

Методика изучения алгебраических выражений, тождеств и тождественных преобразований

У математиков существует свой язык – формулы.

С.В. Ковалевская

План

1. **Основные понятия темы**
2. **Место выражений и их преобразований в курсе алгебры основной школы**
3. **Значение тождественных преобразований в школьном курсе математики**
4. **Различные подходы к изложению раздела «Тождественные преобразования»**
5. **Основные типы учебных задач темы и приемы их решения**
6. **Специальные методы и приемы обучения**
7. **Характерные затруднения учащихся и пути их преодоления**
8. **Методика изучения нового вида преобразований**
9. **Методика изучения тождественных преобразований алгебраических выражений (Харьковская С.58-73)**

История введения буквенной СИМВОЛИКИ

III в. – Диофант Александрийский

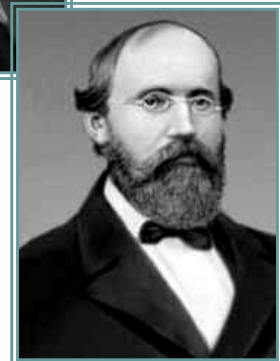
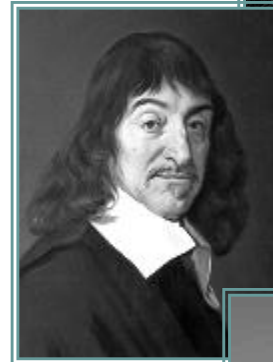
...

XVI в. – Франсуа Виет

XVII в. – Рене Декарт

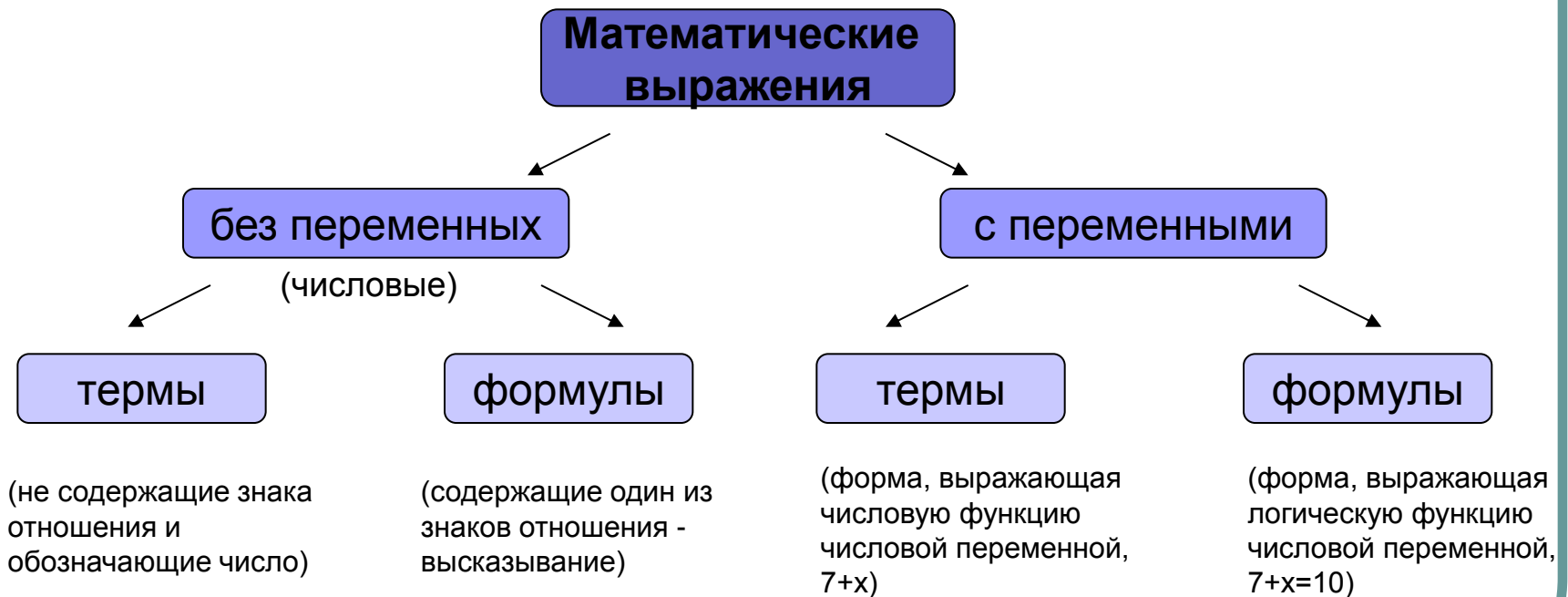
Введение буквенной символики – трудный и длительный процесс (≈ 13 веков)

Знак « \equiv » для обозначения тождества был введен в 1857 г. Бернхардом Риманом

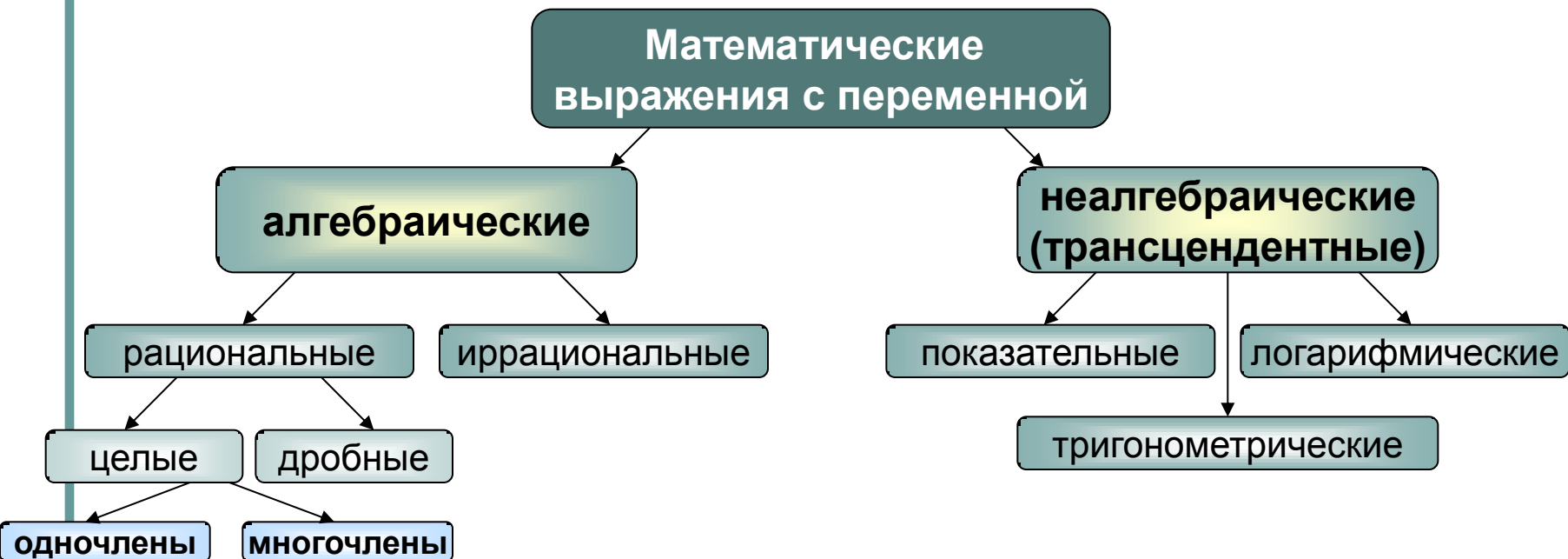


Математические выражения

Выражения математического языка – конечная последовательность символов из его алфавита (имеющая смысл и построенная по определенным правилам).



Математические выражения



• Для каждого вида выражения существует выражение *стандартного вида* и его подвиды.

• Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называются *допустимыми значениями* переменных и образуют *область определения* выражения.

Основные понятия темы

- **Тождественно равные выражения** – это выражения, которые принимают одинаковые числовые значения при подстановке соответственно равных числовых значений входящих в них букв из общей области определения.
- **Тождество** – равенство двух тождественно равных выражений.
- **Тождественное преобразование выражений** – замена одного выражения другим, тождественно ему равным.

Место выражений и их преобразований в курсе алгебры основной школы

I этап (пропедевтический).

- **1-4 кл.:** Элементарные сведения о переменной, уравнении, буквенной записи законов действий, числовом значении буквенного выражения. [Интуитивно-практический уровень, без теоретических обоснований]
- **5-6 кл.:** Сфера применения начал алгебры расширяется за счет разнообразия и усложнения заданий, требующих выполнения операций над рациональными числами, которые сводятся к умениям:
 - производить вычисления по формулам;
 - составлять числовые и буквенные выражения, пропорции и линейные уравнения по условиям текстовых задач;
 - решать несложные линейные уравнения, используя при этом раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых;
 - анализировать пропорциональную зависимость, иллюстрировать её на примерах простых графиков и др.

Место выражений и их преобразований в курсе алгебры основной школы

II этап (основной).

• **7 кл.:** используется нерасчлененная система преобразований, представленная правилами выполнения действий над одной или обеими частями равенства.

Темы программы: одночлены; многочлены; формулы сокращенного умножения; целые выражения.

• **8-9 кл.:** выделяются конкретные виды преобразований и формируются умения и навыки их применения.

Темы программы: преобразования рациональных выражений; преобразование выражений, содержащих квадратные корни; преобразование выражений, содержащих степень (с целым и рациональным показателем).

Место выражений и их преобразований в курсе алгебры основной школы

III этап (завершающий).

• **10-11 кл.:** организация целостной системы преобразований. Основная цель – формирование гибкого и мощного аппарата, являющегося средством решения задач различного уровня сложности.

Темы программы:

- преобразование выражений, содержащих степень с произвольным показателем;
- преобразование выражений, содержащих логарифмы;
- преобразование тригонометрических выражений;
- преобразования связанные с операциями дифференцирования и интегрирования .

Значение тождественных преобразований в школьном курсе математики

Раздел «Тождественные преобразования» занимает центральное место в школьном курсе математики. Изучение ТП

- *во-первых*, имеет *самостоятельное значение*, т.к. связан со следующими вопросами:

- а) обобщение операций над числами, проведение вычислений «в общем виде», обучение использованию алгебраической символики;

- б) классификация и распознавание алгебраических выражений, преобразование выражений к стандартному виду;

- в) рационализация выражений.

- *во-вторых*, ТП играют *роль вспомогательного «инструмента»* при решении уравнений и неравенств, при исследовании функций и ряде других тем школьного курса математики.

- *в-третьих*, ТП имеют *большое воспитательное значение*, т.к. они способствуют развитию у учащихся операционного мышления, воспитанию таких качеств личности, как целеустремленность в поиске решения, сообразительность, аккуратность, честность, справедливость.

Различные подходы к изложению раздела «Тождественные преобразования»

Алгебраический подход

Устремляет внимание к
букве и к операциям над
буквой

Дореволюционные учебники

Функциональный подход

Отправным пунктом
является общее понятие
функции как
соответствия между
независимыми и
зависимыми
переменными.

Современные учебники

ПРОБЛЕМА:
рациональное сочетание
алгебраического и функционального подходов

Основные типы учебных задач темы и приемы их решения

Основными типами учебных задач в этой линии являются:

- «Упростить выражение»;
- «Найти числовое значение выражения наиболее рациональным способом»;
- «Разложить на множители»;
- «Доказать тождество»;
- «Доказать неравенство».

Учителю следует включить и упражнения следующего вида:

- «Установить, является ли предложенное равенство тождеством»;
- «Выявить среди предложенных равенств тождества и указать в них допустимые значения переменных»

Основные типы учебных задач темы и приемы их решения

Прием решения задачи «Упростить выражение»:

- 1) Изучите особенности данного выражения.
- 2) Установите, какие из следующих ТП нужно выполнить, чтобы привести данное выражение к простейшему (стандартному) виду:
 - а) общие алгебраические преобразования: раскрытие скобок, приведение подобных, разложение на множители, сокращение дробей и действия с дробями;
 - б) специальные преобразования: правила действий со степенями, радикалами, логарифмами, использование тригонометрических тождеств.
- 3) Выполните выбранные преобразования, используя соответствующие частные приемы.
- 4) Запишите ответ, если нужно, упростив его.

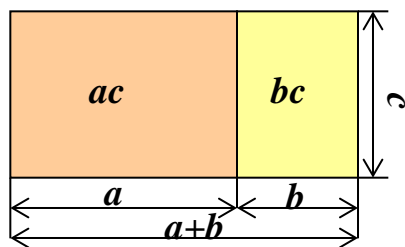
Основные типы учебных задач темы и приемы их решения

Прием решения задачи «Найти числовое значение выражения»:

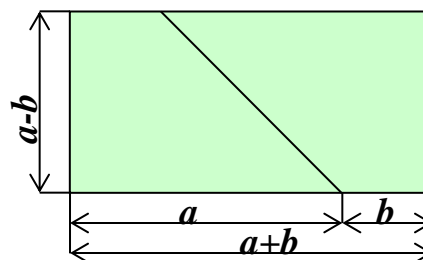
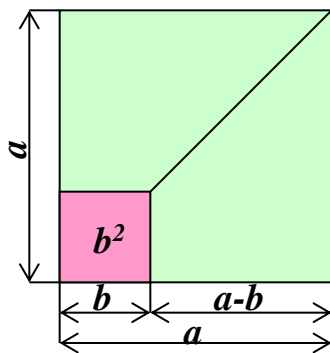
- 1) Изучите особенности данного выражения и характер числовых данных.
- 2) Установите, можно ли упростить выражение:
 - а) до подстановки числовых значений букв;
 - б) после подстановки числовых значений букв.
- 3) Если можно, упростите выражение, используя соответствующий прием в случаях а) или б).
- 4) Выполните вычисления, соблюдая порядок действий и используя соответствующие приемы вычислений.
- 5) Запишите ответ.

Специальные методы и приемы обучения

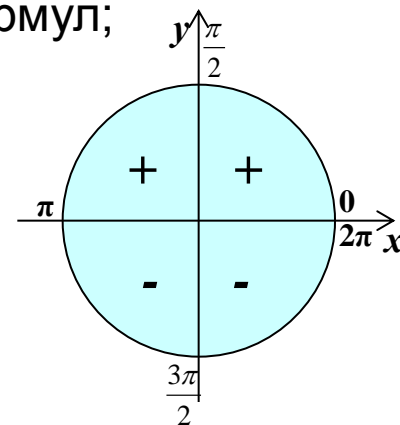
- чтение алгебраических выражений различными способами ($a^3 + b^3$);
- геометрическая иллюстрация преобразований и формул;



$$(a+b)c = ac + bc$$

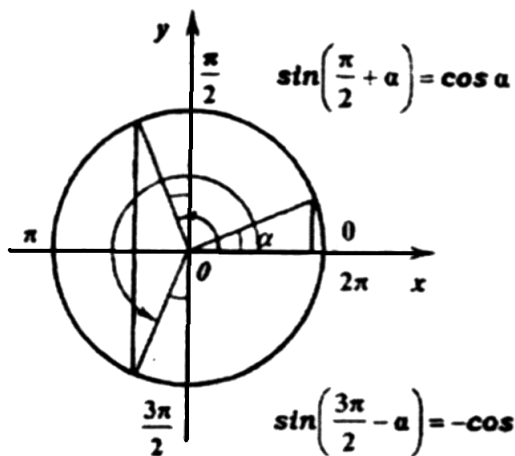


$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$



- мнемонические приемы для запоминания и применения формул;
- логически осмысленное запоминание и припоминание.

Специальные методы и приемы обучения



$\frac{\pi}{2}$

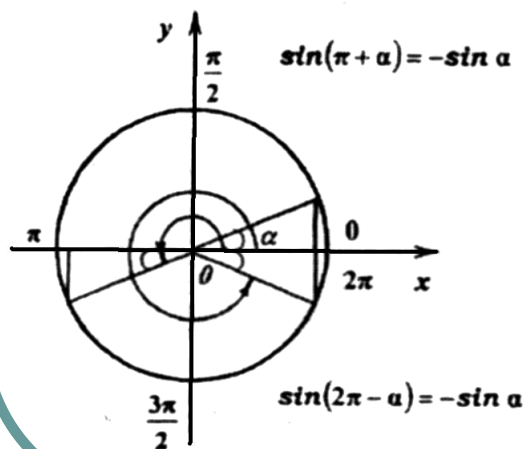
Название

“да!”

“меняется”



$\frac{3\pi}{2}$



$\pi \longrightarrow 2\pi$

Название

“нет!”

“не меняется”

$$(\Delta \pm \square)^2 = \Delta^2 \pm 2\Delta\square + \square^2$$

Типичные ошибки учащихся при выполнении тождественных преобразований

1. Смешивают правила умножения степеней с правилом возведения в степень ($5x^2 \cdot 3x^4 = 15x^8$);
2. Распространяют по неверной аналогии правила умножения степеней с одним основанием на случай умножения степеней с разными основаниями ($2^5 \cdot 7^3 = 14^8$);
3. Складывают показатели степеней при сложении степеней – смешивают с правилом умножения степеней ($2^3 + 2^4 = 2^7$);
4. Неправильно применяют формулы (по неверной аналогии: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ или $\lg(a+b) = \lg a + \lg b$ или $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$);
5. Сокращают в алгебраической дроби по неверной аналогии не множители, а слагаемые $\left(\frac{a^2b + ac}{a+c} = \frac{ab+c}{1+c} \right)$;
6. Изменяют знак не у всех членов вычитаемого, когда вычитается многочлен и, особенно, дробь;
7. Не учитывают знак подкоренного выражения при использовании свойства арифметического корня и получают под корнем отрицательное число и др.

Рекомендации по методике изучения основных групп преобразований

Методика изучения новой группы преобразований:

- 1) **Знакомство с его особенностями и характерными чертами;**
- 2) **Включение каждого нового вида преобразований в целостную систему;**
- 3) **Знакомство с возможными применениями к решению широкого круга задач.**

Овладевая новым видом преобразований учащиеся должны:

- уметь распознавать область применимости изучаемого тождества;
- знать его формулировку, аналитическую запись, алгоритм применения;
- уметь проводить преобразование в прямом и обратном порядке;
- знать о возможных приложениях;
- уметь использовать в комплексе с другими.