№№ 3 и 4.

Протоколы засѣданій

Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Варшавскомъ Университетѣ,

издаваемые подъ редакціей секретаря Общества.

Годъ XXV (1913—1914).

ВАРШАВА

Типографія „Русскаго Общества“, пл. св. Александра, 4.

1914

ОГЛАВЛЕНІЕ.

№№ 3 и 4.

Протоколы засѣданій

Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Варшавскомъ Университетѣ,

издаваемые подъ редакціей секретаря Общества.

Годъ XXV (1913—1914).

ВАРШАВА
Типографія „Русскаго Общества“, пл. св. Александра, 4.
1914

Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ.

Объ алгебраическихъ функціяхъ, опредѣляемыхъ метациклическими уравненіями.

§ 1. Основная идея моихъ сочиненій: „Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій" и „о нѣкоторыхъ приложеніяхъ изслѣдованій Бріо и Букэ" выражается въ слѣдующей весьма общей формѣ:

Ставится проблемма о полученіи $f(x)$ данной операціей P съ помощью конечной совокупности операціи Q или, короче, проблемма о приведеніи P къ операціямъ Q.

1) Прежде всего опредѣляется *схема* P въ Q, т. е. опредѣляются нѣкоторыя ограниченія, относящіяся къ возможнымъ выраженіямъ P въ Q.

Такимъ образомъ, напримѣръ, доказывается, что, если Абелевъ интегралъ выражается въ конечномъ видѣ, съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ, то онъ равенъ

$$\varphi + \sum_{s=1}^{s=m} C_j \, lg \vartheta_j , \tag{1}$$

гдѣ φ и ϑ_j алгебраическія функціи, а постоянныя C_j таковы, что между ними нѣтъ линейныхъ зависимостей съ раціональными коэффиціентами:

$$a_0 + \sum_{j=1}^{j=m} a_j \, C_j = o.$$

Для рѣшенія линейнаго дифференціальнаго уравненія

$$p_0(x,u)\,y^{(n)} + p_1(x,u)\,y^{(n-1)} + \ldots\, p_1(x,u)\,y' + p(x,u)\,y = o$$

въ случаѣ выражаемости этого рѣшенія въ конечномъ видѣ съ помощью элем. трансцендентныхъ имѣемъ схему:

$$\sum e^{\omega}\,[\chi_0]^{\lambda_0}\,[\chi_1]^{\lambda_1} \ldots [\chi_p]^{\lambda_n}\,(lg\vartheta_1)^{n_1}\,(lg\vartheta_2)^{n_2} \ldots (lg\vartheta_q)^{n_q},$$

гдѣ ω, χ_j, ϑ_j алгебраическія функціи, λ_j несвязанныя линейными соотношеніями съ раціональными коэффиціентами, λ_0 раціональное число, n_j цѣлыя положительныя числа, примемъ $n_j \leqslant n - 1$.

Еще примѣръ: Схема для рѣшенія алгебраическаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка

$$f(x, y, y') = o$$

при его выражаемости въ конечномъ видѣ или алгебраическая функція, или $\Pi(\vartheta, x)$ или $\Pi(\zeta, x)$, гдѣ Π алгебраическая функція,

$$\vartheta = e^{\omega}\,[\chi_0]^{\lambda_1}\,[\chi_1]^{\lambda_1} \ldots [\chi_n]^{\lambda_p}$$

$$\zeta = \omega + \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_j\, lg\, \chi_j$$

ω, χ_j алгебраическія функціи, λ_j. постоянныя.

2) Затѣмъ производится непосредственое изслѣдованіе особенныхъ точекъ $f(x)$, т. е., какъ функцію заданной опредѣленной операціей P.

Такъ изслѣдованіе порядка полюсовъ раціональной функцію $F(x,y)$ даетъ полюса и логариѳмическія точки Абелева интеграла $\int F(x,y)\,dx$.

Въ приведенныхъ выше примѣрахъ, относящихся къ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ и къ уравненіямъ перваго порядка, это изслѣдованіе зиждется на Фуксовской теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій и на теоріи Бріо и Букэ, развитой Пуанкарэ и Пикаромъ.

3) Третій моментъ это изслѣдованіе особенностей функцій, опредѣляемыхъ найденной схемой.

Если схема утверждаетъ наличность особенной точки, а непосредственное изслѣдованіе ее отвергаетъ, то получаемъ доказательство неприводимости P къ Q, невыражаемости $f(x)$ съ помощью Q.

Такъ для Абелева интеграла перваго рода, какъ конечнаго на всей Римановской поверхности, нѣтъ ни полюсовъ, ни логариѳмическихъ точекъ, между тѣмъ какъ Льювиллевская схема (1) всегда предполагаетъ такія особенности — откуда невыражаемость Абелева интеграла перваго рода, напр.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}}$$

въ конечномъ видѣ.

Въ большинствѣ случаевъ, непосредственное изслѣдованіе $f(x)$ только налагаетъ дальнѣйшее ограниченіе схемы, которая можетъ привестись къ *опредѣленному построенію надъ x и конечнымъ числомъ параметровъ.* Такъ это имѣетъ мѣсто при интегрированіи въ конечномъ видѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, когда задача приводится къ опредѣленію раціональной функціи отъ x со степенью числителя и знаменателя, не превышающей нѣкоторую границу или, общнѣе, къ раціональной функціи x и ζ (алгебр. ф. отъ x) опредѣленнаго порядка.

Задача тогда сводится къ разысканію значеній параметра, при которыхъ имѣетъ мѣсто нѣкоторое тождество.

Мы покажемъ, какимъ образомъ эти идеи примѣняются при изслѣдованіи выражаемости алгебраической функціи y въ радикалахъ.

Мы ограничимся очень скромной цѣлью: покажемъ только нѣсколько условій, необходимыхъ для выражаемости въ радикалахъ, вытекающихъ изъ изслѣдованій y по степенямъ x.

§ 2. Введемъ еще ограниченіе. Будемъ предполагать степень уравненія простымъ числомъ. Тогда будемъ имѣть для корня метациклическаго уравненія которое всегда будемъ предполагать неприводимымъ) *).

$$f(x, y) = o \qquad (2)$$

или

$$f_0(x)\, y^n + f_1(x)\, y^{n-1} + \dots f_{n-1}(x)\, y + f^n(x) = o, \qquad (2)'$$

гдѣ $f_j(x)$ цѣлыя функціи отъ x форму

$$y = \Phi(x) + \sum_{j=o}^{j=n-2} \xi_j \sqrt[n]{\eta}, \qquad (3)$$

гдѣ ξ_j, η_j раціональныя функціи отъ t_j корня циклическаго уравненія степени $n - 1$

$$\varphi(x, t) = o \qquad (4)$$

или

$$\varphi_0(x) t^{n-1} + \varphi_1(x) t^{n-2} + \dots \varphi_{n-2}(x) t + \varphi_{n-1}(x) = o. \qquad (4)'$$

Между радикалами

$$\sqrt[n]{\eta_j}$$

существуютъ соотношенія, въ силу которыхъ значеніе одного радикала опредѣляетъ значенія другихъ и мы имѣемъ только n возможныхъ значеній для y.

$$\xi_j \sqrt[n]{\eta_j} = \xi_{j-1}^g\, t_{j-1} \left(\sqrt[n]{\eta_{j-1}}\right)^g, \qquad (5)$$

гдѣ g первообразный корень n.

Съ помощью нѣсколькихъ корней уравненія (4) η_j можетъ быть такъ выражено

$$\eta_j = \lambda_j^{r_{n-2}} \lambda_{j+1}^{r_{n-3}} \dots \lambda_{j+n+2}^{r_0}$$

гдѣ r_j наименьшіе положительные вычеты чиселъ $1, g, g^2 \dots g^{n-2}$, гдѣ g первообразный корень n.

Посмотримъ при какихъ условіяхъ функція μ можетъ быть мероморфной т. е. μ разлагается по цѣлымъ степенямъ $(x - a)$.

Предположимъ сперва, что для $x = a$ ξ_j, η_j метаморфны.

---

*) Weber. Algebra. B. I s. 688.

$$\xi_j = \sum_{\kappa=-p_j}^{\kappa=\infty} \xi_j^{(\kappa)} (x-a)^\kappa \tag{6}$$

$$\eta_j = \sum_{\kappa=-q_j}^{\kappa=\infty} \eta_j^{(\kappa)} (x-a)^\kappa \tag{7}$$

$$(x-\infty) = \frac{1}{x}.$$

Тогда въ предположеніи, что q_j не дѣлится на n

$$\sqrt[n]{\eta_j} = (x-a)^{\frac{-q_j}{n}} \left\{ \eta_j^{(-q_j)} + \eta_j^{(-q_j+1)} (x-a) + \ldots \right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$\eta_j^{(-q_j)} \gtrless 0 \tag{8}$$

$$\sqrt[n]{\eta_j} = (x-a)^{\frac{-q_j}{n}} \left\{ a_0^{(j)} + a_1^{(j)} (x-a) + a_2^{(j)} (x-a)^2 + \ldots \right\}$$

$$a_0^{(j)} = \sqrt[n]{\eta_j^{(-q_j)}}$$

$$\xi_j \sqrt[n]{\eta_j} = (x-a)^{\frac{-s_j}{n}} \left\{ b_0^{(j)} + b_1^{(j)} (x-a) + b_2^{(j)} (x-a)^2 + \ldots \right\}$$

$$b_0^{(j)} = \xi_j^{(-p_j)} \sqrt[n]{\eta_j^{(-q_j)}},$$

$$\text{гдѣ } s_j = p_j + \frac{q_j}{n}.$$

Замѣтимъ, что невозможно равенство $s_\alpha \equiv s_\beta \pmod{n}$ ибо иначе $q_\alpha - q_\beta =$ цѣлому числу, но это невозможно, ибо по равенству (5) $q_\alpha \equiv q_\beta \; g^{\alpha-\beta} (mod n)$ и $g^{\alpha-\beta}-1$ дѣлилось бы на n при $\alpha-\beta < n-1$, чего быть не можетъ.

Поэтому, если

$$y = \sum_{\kappa=-s}^{\kappa=-} y_{\frac{\kappa}{n}} (x-a)^{\frac{\kappa}{n}}, \tag{10}$$

то
$$y_{-\frac{s}{n}} = b_0^{(\alpha)} \qquad y_{-\frac{s+1}{n}} = b_0^{(\beta)} \quad \ldots,$$

а, такъ какъ предположено разложенiе μ по цѣлымъ степенямъ, то

$$b_0^{(\alpha)} = o \qquad b_0^{(\beta)} = o \quad b_0^{(\gamma)} = o \ldots$$

или
$$\eta_\alpha^{(-q_\alpha)} = o \quad \eta_\beta^{(-q_\beta)} = o \quad \eta_\gamma^{(-q_\beta)} = o \ldots,$$

чего быть не можетъ.

Поэтому q_j дѣлится на n и $\sqrt[n]{\eta_j}$ должны предположить мероморфными.

Предположимъ теперь случай, когда ξ_j, η_j имѣютъ $x=a$ точкой развѣтвленiя.

Такъ какъ t въ силу цикличности уравненiя (4) представляется въ формѣ

$$t = \psi(x) + \sum_{s=0}^{j=n-3} \sqrt[n-1]{\psi_j(x)}, \tag{11}$$

гдѣ $\psi(x)$, $\psi_j(x)$ рацiональныя функцiи отъ x, то t можетъ разложиться только по цѣлымъ степенямъ $(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$, гдѣ μ множитель $\overline{n-1}$.

Полагая $x-a=z^\mu$ придемъ къ предыдущему случаю и докажемъ, что $\sqrt[n]{\eta_j}$ разлагается по цѣлымъ степенямъ $z=(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$.

Къ тому же заключенію очевидно должны прійти и въ томъ случаѣ, когда y разлагается по степенямъ $(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$, гдѣ μ множитель $\overline{n-1}$.

Такъ что всѣ нули и безконечности η_j будутъ обязательно такими же для μ и того же порядка, т. е. разложеніе μ будетъ

$$y = \sum_{\kappa=-s}^{\kappa=\infty} y_{\frac{\kappa}{n}} (x-a)^{\frac{\kappa}{n}},$$

гдѣ $y_{\frac{\kappa}{n}} \gtrless o$ и κ не дѣлится на n.

Теперь легко видѣть, что у $\sqrt[n]{\eta_j}$, а потому и у y такія точки раздѣленія всегда существуютъ, если только y не сводится къ раціональной функціи отъ x т. е. если уравненіе (2) противно сдѣланному предположенію не неприводимо.

Ибо тогда t_{j-1} (въ силу цикличности ур. (5)) раціональная функціи x, t_1.

Къ раціональной функціи же отъ (x, t_1) сводились бы и $\sqrt[n]{\eta_j}$, какъ ниже однозначныя на той же поверхности. y равнялось бы раціональной функціи (x, t_1) и опредѣлялось бы уравненіемъ степени $n-1$, т. е. уравненіе (2) не было бы уже неприводимымъ.

Итакъ

Чтобы уравненіе (2) *было метацикличнымъ необходимо, чтобы хотя для одной точки разложеніе y содержало $(x-a)^{\frac{\kappa}{n}}$, гдѣ κ не дѣлится на n.*

Слѣдуетъ помнить, что заключеніе отсюда выводимое относительно неразрѣшимости въ радикалахъ уравненія

$$f(x, y) = o \qquad (2)$$

предполагается *неприводимость* этого уравненія. Общій методъ доказательства неприводимости состоитъ въ обнаруженіи невозможности раціональныхъ рѣшеній у уравненія

$$P_{0j}\,\lambda_j^{\sigma} + P_{1j}\,\lambda_j^{\sigma-1} + \ldots\, P_{\sigma j} = o\,, \quad (*)$$

гдѣ λ_j симметрическія функціи составленныя изъ τ корней уравненія (2)

$$\lambda_1 = y_1 + y_2 + \ldots\, y_\tau$$

$$\lambda_2 = y_1 y_2 + \ldots\, y_{\tau-1}\, y_\tau$$

$$\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot$$

$$\lambda_\tau = y_1 y_2 \ldots y_\tau$$

причемъ $\tau = \overline{1\,.\,2 \ldots n-1}$ $\qquad \sigma = n\dfrac{(n-1)\ldots(n-\tau+1)}{1\,.\,2\ldots\,\tau}$

$P_{\kappa j}$ раціональныя функціи отъ x.

Если для нѣкотораго τ уравненія эти имѣютъ раціональныя рѣшенія, то тотчасъ получаемъ разложеніе $f(x,y)$ на раціональныя множители. Задача объ опредѣленіи раціональныхъ рѣшеній ур. (*) рѣшается аналогично съ опредѣленіемъ раціональныхъ рѣшеній линейнаго дифференціальнаго уравненія. Болѣе того на основаніи теоремы Абеля *), по которой всегда можно всегда составить линейное дифференціальное уравненіе съ раціональными коэффиціентами

$$Q_{0j}\,\lambda_j^{(\sigma)} + Q_{1j}\,\lambda_j^{(\sigma-1)} + \ldots\, Q_{\sigma j} = o \quad (**)$$

первая проблемма сводится ко второй. Въ частныхъ же случаяхъ неприводимость уравненія проще всего обнаруживается доказательствомъ:

1) невозможности раціональныхъ рѣшеній у уравненія (2) и

2) невозможности удовлетворенія y въ силу тѣхъ же свойствъ разложенія y по дробнымъ степенямъ уравненію степени τ или $n-\tau$.

Примѣръ:

Уравненіе $y^5 - 5y + x = o$ очевидно не удовлетворяется раціональной функціей отъ x, ибо, если

---

*) Д. М. Синцовъ. Раціональные интегралы. Казань 1898.

С. А. Хвялковскій. О функціональныхъ уравненіяхъ. Извѣстія Варш. Ун. за 1914 годъ.

$$y = \frac{A_{-\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_{-\alpha+1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots, \text{ то}$$

$$\frac{A^5_{-\alpha}}{(x-a)^{5\alpha}} + \dots = -a - (x-a) +$$

чего быть не можетъ. Полюсомъ μ могла быть только $x = \infty$.

$$y = B_\beta x^\beta + B_{\beta-1} x^{\beta-1} + \dots$$

$$B^5_\beta x^{5\beta} + \dots = -x.$$

Но и этого быть не можетъ, ибо тогда $5\beta = 1$ $\beta = \frac{1}{5}$. Такимъ образомъ η, какъ раціональная функція отъ x, не имѣющая полюсовъ свелась бы къ постоянному, чего опять быть не можетъ ибо тогда $x = const.$

Нарушеніе голоморфности μ возможно лишь при значеніяхъ (x, y) опредѣляемыхъ уравненіями

$$F = y^5 - 5y + x = o$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 5y^4 - 5 = o,$$

т. е. при $y = \pm 1$, $y = \pm 2$

Причемъ въ этихъ случаяхъ $\frac{\partial F}{\partial x} = 1$ не нуль.

Разложеніе тогда, какъ извѣстно, будетъ по степенямъ $(x-a)^{\frac{1}{2}}$, ибо

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 20y^3 \text{ не нуль.}$$

Слѣдуетъ еще изслѣдовать $x = \infty$.

Полагая $x = \frac{1}{z}$ $y = \frac{1}{u}$ имѣемъ

$$u^5 = 5u^4 z + z = o,$$

откуда опредѣляя рѣшеніе

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 5u^4 - 20\, zu^3 : (0,0)$$

при которыхъ $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 1$,

дѣлаемъ опять заключенiе о разложимости по степенямъ $z^{1/2}$ или $x^{1/2}$.

Такимъ образомъ y не содержитъ $(x - a)^{1/5}$ и потому можно сказать, что рѣшенiе уравненiя

$$y^5 - 5y + x = o$$

не выражается въ радикалахъ, если доказать еще неприводимость этого уравненiя.

Уравненiе это можетъ быть неприводимо или

1) если имѣетъ рацiональность рѣшенiе, чего не можетъ быть, какъ показано выше,

2) если удовлетворяетъ неприводимому кубическому уравненiю, но и это быть не можетъ т. к. y разлагается по степенямъ $(x-a)^{1/2}$ но не $(x - a)^{1/3}$.

Примѣръ 2.

Для сравненiя возьмемъ еще

$$y^3 - 5y + x = o$$

(тоже, очевидно, не имѣющее рацiональныхъ рѣшенiй).

Для тѣхъ значенiй (y, x), при которыхъ

$$F = o \quad \frac{\partial F}{dy} = o$$

и при этомъ легко видѣть $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \gtrless o$, разложенiе по степенямъ $(x - a)^{1/2}$.

При $x = \infty$ полагая $\mid x = \dfrac{1}{z}$, $y = \dfrac{1}{u}$ имѣемъ:

$$z - 5u^2 z + u^3 = o$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 3u^2 - 10uz$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 6u - 10z$$

$$\frac{\partial^3 F}{du^2} = 6.$$

При $z = o$, $u = o$: $\dfrac{\partial F}{du} = o$ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} = o$ $\dfrac{\partial^3 F}{\partial u^3} \gtrless o$ и мы имѣемъ разложеніе y по цѣлымъ степенямъ $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{1/3}$.

О неразрѣшимости въ радикалахъ мы должны заключить и въ томъ случаѣ, если разложеніе y будетъ содержать

$$(x - a)^{\frac{h}{\nu}}$$

гдѣ ν не равно n и не представляетъ дѣлителя $\overline{n-1}$.

Примѣръ.

Для полученія разложенія y, опредѣляемаго уравненіемъ:

$$y^4 x - 4yx^2 + y^5 + x^6 = o$$

по степенямъ x полагаемъ

$$y = \nu x^{\mu}$$

относит. x члены лѣвой части уравненія степеней

$$4\mu + 1 \quad \mu + 2 \quad 5\mu$$

Полагая $$4\mu + 1 = \mu + 2$$

имѣемъ $$\mu = \frac{1}{3}$$

т. е. получаемъ

$$y = a_{1/3}\, x^{1/3} + \ldots.$$

Неприводимости уравненія

$$y^4 x - 5yx^2 + y^5 + x^6 = o$$

устанавливается или общей методой или

1) установкой невозможности раціональнаго рѣшенія,

или 2) невозможности y удовлетворить неприводимому квадратному уравненію.

Откуда дѣлаемъ заключеніе о неразрѣшимости предложеннаго уравненія въ радикалахъ.

Пусть y содержитъ $\left(x - a\right)^{\frac{h}{n}}$.

Тогда, положивъ $x - a = z^n$ должны заключить о разложеніи ξ, $\sqrt[n]{\eta}$ по цѣлымъ степенямъ $(x-a)^{\frac{1}{n}} = z$.

Въ виду же невозможности разложеній ξ единовременно содержать $(x-a)^{\frac{h}{n}}$ и $(x-a)^{\frac{h}{\mu}}$, ξ должно разлагаться по цѣлымъ степенямъ $(x-a)$.

Далѣе должны имѣть

$$\sqrt[n]{\eta} = z^{-\lambda}\,[\,a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\,] \qquad (12)$$

цѣлое число.

Но согласно схемѣ (3)

$$\sqrt[n]{\eta} = z^{-q}\left[\eta_0 + \eta_1 z^{\frac{\alpha_1 n}{\mu}} + \eta_2 z^{\frac{\alpha_2 n}{\mu}} + \ldots\right] \qquad (13)$$

при этомъ α_j наименьшія положительныя вычеты по модулю $n \ldots s$.

Черезъ сравненіе разложеній (12) и (13)

$$z^{-n\lambda}\left[b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots\right] = z^{-nq}\left[\eta_0 + \eta_1 z^{\frac{\alpha_1 n}{\mu}} + \ldots\right],$$

что предполагаетъ дѣлимость $\alpha_j\, n$, а въ силу того, что $D\,(n, \mu) = 1$ и α_j на μ.

Такимъ образомъ

$$\eta = \sum_{\kappa = q}^{\kappa = \infty} \eta^{(\kappa)}\,(x-a)^{\kappa}$$

совершенно такимъ же образомъ убѣждаемся въ разложеніи (6).

Если y разлагается исключительно по цѣлымъ степенямъ $(x-a)^{\frac{1}{n}}$, то ξ, η должны быть однозначны для всѣхъ значеній x и потому сводиться къ раціональнымъ функціямъ отъ x, форма y:

$$y = \Phi_0\,(x) + \sum_{j=1}^{s=n-1} \Phi_j\,(x)\,(\sqrt{R(x)})^j\,, \qquad (14)$$

гдѣ $\Phi_j\,(x)$ раціональныя функціи отъ x.

Если алгебраическая функція у, опредѣляемая уравненіемъ (2), *можетъ разлагаться только по цѣлымъ степенямъ* $(x-a)^{\frac{1}{n}}$ *и ни одно разложеніе у не содержитъ* $(x-a)^{\frac{h}{\mu}}$, *гдѣ h число простое съ n, то уравненіе* (2) *должно быть обязательно циклическимъ.*

Мы, конечно, можемъ предполагать

$$R(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\,(x-a_2)^{\alpha_2}\,(x-a_3)^{\alpha_3}\ldots(x-a_p)^{\alpha_p}\,, \quad (15)$$

гдѣ $\alpha_j \leqslant n-1$, a_j точки развѣтленія

$$y=\sum_{\kappa=-s}^{\kappa=\infty} y_{\frac{\kappa}{n}}(x-a)^{\frac{\kappa}{n}}$$

$$y_{\frac{\kappa}{n}} \lessgtr o,$$

Полюсами раціональныхъ функцій $\Phi_j(x)$ могутъ быть только рѣшенія уравненія

$$f_0(x)=o. \quad (16)$$

Изъ разложеній y, опредѣляются, какъ α_j, такъ и порядки этихъ полюсовъ.

Высшая граница для порядка полюса $\Phi_j(x)$ тоже опредѣлится, ибо этотъ порядокъ $+\frac{j}{n}\Sigma\alpha_j$ не превосходитъ порядка полюса для μ, а для нѣкотораго j ему равенъ.

Въ результатѣ имѣемъ схему съ конечнымъ числомъ параметровъ, которые опредѣляются уже путемъ простой подстановки вмѣсто y схемы въ данное уравненіе (2).

Если значенія для этихъ параметровъ нельзя найти такія, чтобы уравненіе (2) удовлетворялось, должны заключить, что уравненіе (2) не разрѣшимо въ радикалахъ.

§ 4. Согласно нашимъ изслѣдованіямъ дифференціальное уравненіе:

$$z''=Pz, \quad (16)$$

гдѣ P раціональная функція отъ x въ случаѣ алгебраической интегрируемости имѣемъ систему независимыхъ интеграловъ

$$e^{\int \xi_1\,dx}\quad e^{\int \xi_2\,dx}, \quad (17)$$

гдѣ ξ_1, ξ_2 корни неприводимаго уравненія

$$\varphi_0(x)\,\xi^{\sigma} + \varphi_1(x)\,\xi^{\sigma-1} + \dots \varphi_{\sigma}(x) = o, \qquad (18)$$

въ которомъ $\sigma = 1, 2, 4, 5$.

Въ первыхъ трехъ случаяхъ z выражается въ радикалахъ.

Для $\sigma = 5$ имѣемъ согласно нашимъ изслѣдованіямъ слѣдующія единственно возможныя разложенія

$$1) \quad z_1 = (x-a)^{\frac{\kappa}{10}} \left[A + B(x-a)^{\frac{l}{5}}\right]$$

. . . .

$$2) \quad z_1 = (x-a)^{\frac{\kappa}{3}} \left[A + B(x-a)^{\frac{l}{4}}\right]$$

. . . .

$$z_5 = h_0\, A\,(x-a)^{\frac{\kappa}{8}}$$

$$3) \quad z_1 = (x-a)^{\frac{\kappa}{8}} \left[A + B(x-a)^{\frac{l}{4}}\right]$$

. . . .

$$z_5 = h_1\, B\,(x-a)^{\frac{l}{4}+\frac{\kappa}{8}}$$

$$4) \quad z_1 = (x-a)^{\frac{\kappa}{8}} \left[A + B(x-a)^{\frac{l}{3}}\right]$$

. . . .

$$z_4 = h_0\, A\,(x-a)^{\frac{\kappa}{6}}$$

$$z_5 = h_1\, B\,(x-a)^{\frac{\kappa}{6}+\frac{l}{3}}$$

$$5) \quad z_1 = (x-a)^{\frac{\kappa}{4}} \left[A + B(x-a)^{\frac{l}{2}}\right]$$

. . . .

$$z_3 = (x-a)^{\frac{\kappa}{4}} \left[\overset{(1)}{h_0} A + \overset{(1)}{h_1} B(x-a)^{\frac{l}{2}}\right]$$

. . . .

$$z_5 = \overset{(2)}{h_0}\,(x-a)^{\frac{\kappa}{4}}A$$

$$6)\quad z_1 = (x-a)^{\frac{\kappa}{4}}\left[A + B(x-a)^{\frac{l}{2}}\right]$$

. . . .

$$z_3 = (x-a)^{\frac{\kappa}{4}}\left[\overset{(1)}{h_0}A + \overset{(1)}{h_1}B(x-a)^{\frac{l}{2}}\right]$$

. . . .

$$z_5 = \overset{(2)}{h_1}(x-a)^{\frac{\kappa}{4}+\frac{l}{2}}B.$$

На основанiи вышедоказаннаго только первый случай отвѣчаетъ возможности опредѣленiя z^{2s}, (гдѣ s цѣлое число) уравненiемъ 5-ой степени разрѣшимыхъ въ радикалахъ.

Но при этомъ уравненiе это, согласно § 3 должно быть циклическимъ, если это единственная форма разложенiя y для всѣхъ критическихъ точекъ.

Но, основываясь на теоремѣ: *Если уравненiе* *) $z'' = Pz$ *имѣетъ рѣшено*

$$z = (x-a)^{\alpha}\sum_{j=0}^{s=\infty} P_j\,(x-a)^{\frac{j}{d}}$$

$$P_j = p_{0j} + p_{1j}(x-a) + p_{2j}(x-a)^2 + \ldots$$

$$p_{0j} \lessgtr 0,$$

то тому же уравненiю удовлетворяетъ и

$$z_s = (x-a)^{\alpha+\frac{s}{d}}P_s,$$

---

*) Д. Мордухай-Болтовской. „Объ интегрированiи въ конечномъ видѣ линейныхъ дифференцiальныхъ уравненiй“ § 54.

если $s < d$ *и* $P_s \lessgtr o$

легко выводимъ, что въ этомъ случаѣ уравненіе (16) имѣетъ рѣшеніе

$$\Phi(x)\sqrt{R(x)} = [\chi(x)]^{\lambda} = e^{\int \omega(x)dx}$$

гдѣ ω раціональная функція, т. е. перваго изъ указанныхъ выше 4 типовъ.

Такимъ образомъ уравненіе

$$y'' = \frac{21}{100}\,\frac{-x^2+x-1}{x^2(x-1)^2}\,\mu,$$

согласно Фуксу [1]) алгебраически интегрируемое, для котораго корни опредѣляющаго фуксовскаго уравненія:

$$\alpha_a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{5} \qquad \alpha_b = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{5} \qquad \alpha_\infty = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{5}$$

имѣетъ рѣшеніе, хотя и алгебраическое, но не выражаемое въ радикалахъ, ибо оно, какъ не трудно убѣдиться не имѣетъ значенія типа (1).

Невыражаемость *z* въ радикалахъ будетъ при наличности для *z* единовременно разложеній (1) и (4).

---

[1]) Comptes Rendus. t. 82. 1876 p. 1495.