№ № 1 и 2.

Q-21 V
B-265
П-924

Протоколы засѣданій

Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Варшавскомъ Университетѣ,

издаваемые подъ редакціей секретаря Общества.

21. ФЕВР. 1915

Годъ XXV (1913).

ВАРШАВА

Типографія „Русскаго Общества", пл. св. Александра, 4.

1914

ОГЛАВЛЕНІЕ.

№ № 1 и 2.

21. ФЕВР. 1915

Протоколы засѣданій

Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Варшавскомъ Университетѣ,

издаваемые подъ редакціей секретаря Общества.

Годъ XXV (1913).

ВАРШАВА

Типографія „Русскаго Общества", площадь св. Александра, 4.

1913

Q
21
В-265
П-924

33-837/75

Д. Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ.

Къ теоріи трансцендентныхъ чиселъ.

Докладъ прочитанный 26 января 1913 года въ Варшавскомъ Обществѣ Естествоиспытателей.

Борель [1]) указываетъ на возможность обобщенія извѣстныхъ изслѣдованій Льювиля, относящихся къ трансцендентнымъ числамъ.

Льювиль даетъ слѣдующую теорему:

Если x алгебраическое число, опредѣляемое неприводимымъ уравненіемъ n-ой степени, а $\frac{p}{q}$ раціональная дробь, то

$$\left|\frac{p}{q}-x\right| \geqslant \frac{A}{q^n}, \tag{1}$$

гдѣ A не зависитъ отъ n.

Отсюда слѣдуетъ, что, если не существуетъ число n, при которомъ неравенство (1) удовлетворяется, то x число трансцендентное.

Существованіе трансцендентныхъ чиселъ Льювиль доказываетъ, приводя примѣры такихъ чиселъ, опредѣляемыхъ рядами, для которыхъ

[1]) Comptes Rendus за 1899 годъ.

$$\left| \frac{p}{q} - x \right| < \frac{A}{q^n}.$$

Неравенство (1) можно переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\varepsilon \geqslant \frac{A}{q^n}$$

$$q \geqslant \sqrt[n]{A}\, \varepsilon^{-\frac{1}{n}},$$

гдѣ ε разность между $\frac{p}{q}$ и x или

$$|p| + |q| \geqslant B\varepsilon^{-\frac{1}{n}} \tag{2}$$

такъ какъ $\sqrt[n]{A} \geqslant B$, гдѣ B не зависитъ отъ n, напр. $B = 1$.

Дробь $\frac{p}{q}$ можно разсматривать, какъ рѣшеніе уравненія 1-ой степени

$$qy - p = o. \tag{3}$$

Неравенство (2) будетъ давать низшую границу для высоты уравненія (3), при условіи, что y представляетъ x съ точностью до ε.

Теорема Льювиля при такой формулировкѣ допускаетъ въ слѣдующемъ видѣ обобщеніе.

Пусть $x = x_1$ корень уравненія

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ a_{n-1}\, x + a_n = o \tag{4}$$

Пусть y_1 корень уравненія той степени

$$b_0 y^m + b_1 y^{m-1} + \ldots\ b_{m-1}\, y + b_m = o \tag{5}$$

представляетъ приближенie x_1, такъ что

$$|y_1 - x_1| < \varepsilon.$$

Тогда высота уравненія (5) удовлетворяетъ условію

$$|b_0| + |b_1| + \dots |b_m| \geqslant B\varepsilon^{-\mu},$$

гдѣ μ какъ мы ниже покажемъ $= \frac{1}{n}$.

Доказавъ эту теорему Бореля, который даетъ ее безъ доказательствъ, мы примѣнимъ ее къ доказательству трансцендентности корней нѣкоторыхъ трансцендентныхъ уравненій.

Составимъ произведеніе:

$$\begin{aligned} P = \;& (y_1 - x_1)\ (y_1 - x_2)\ (y_1 - x_3) \dots (y_1 - x_n) \\ & (y_2 - x_1)\ (y_2 - x_2)\ (y_2 - x_3) \dots (y_2 - x_n) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & (y_m - x_1)\ (y_m - x_2)\ (y_m - x_3) \dots (y_m - x_n). \end{aligned}$$

Съ одной стороны, замѣчая, что

$$a_0 (y_1 - x_1)(y_1 - x_2) \dots (y_1 - x_n) = a_0 y_1^n + a_1 y_1^{n-1} + \dots a_n$$

мы можемъ написать

$$P = \frac{1}{a_0^m} \prod_{j=1}^{j=m} (a_0 y_j^n + a_1 y_j^{n-1} + \dots a_n) = \frac{\Theta}{a_0^m\, b_0^n},$$

гдѣ Θ цѣлое число, отличное отъ нуля какъ это слѣдуетъ изъ теоріи симметрическихъ функцій.

Но съ другой стороны

$$P = (-1)^{n-1}(y_1 - x_1)\left[(x_1 - y_2)(x_1 - y_3)\dots(x_1 - y_m)\right]\cdot$$

$$\frac{\prod_{j=2}^{s=n}\left[b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots b_m\right]}{b_0^{n-1}}.$$

Если $|y_1 - x_1| < \varepsilon$, то замѣчая, что

$$|(y_1 - x_2)(y_1 - x_3)\dots(y_1 - x_n)| < H,$$

гдѣ H конечное число и не зависитъ отъ n.

$$\left|\frac{\prod_{j=2}^{j=n}\left[b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots b_m\right]}{b_0^{n-1}}\right| > \frac{\Theta}{a_0^m\, b_0^n}\,\frac{\varepsilon^{-1}}{H}.$$

Откуда

$$\left\{|b_0| + |b_1| + \dots |b_m|\right\}^{n-1} |\bar{x}|^m > \frac{\Theta}{a_0^m}\,\frac{b_0^{-1}}{H}\,\varepsilon^{-1},$$

гдѣ $|\bar{x}|$ наибольшее изъ $|x_1|\ |x_2| \dots |x_n|$ или

$$|b_0| + |b_1| + \dots |b_m| > A\varepsilon^{-\frac{1}{n-1}}$$

или (8)

$$|b_0| + |b_1| + \dots |b_m| > A\varepsilon^{-\frac{1}{n}}$$

§ 2. Исходя изъ этого неравенства мы докажемъ трансцендентность корня уравненія

$$a_0 - a_1 x + a_2 \frac{x^2}{(2!)^{2!}} - \frac{a_3 x^3}{(3!)^{3!}} + \ldots\ldots (-1)^n \frac{a_n x^n}{(n!)^{n!}} + \tag{9}$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!^{n+1!}} + \ldots = o,$$

гдѣ a_0, a_1, a_2... цѣлыя положительныя числа, причемъ

$$F < a_i < E,$$

гдѣ F, E конечныя числа.

Функція, стоящая въ лѣвой части уравненія (9) — функція трансцендентная (на основаніи теоремы Эйзенштейна), болѣе того, не выражается въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ и даже, какъ это слѣдуетъ изъ нашихъ изслѣдованій [1]) не опредѣляется алгебраическимъ дифференціальнымъ уравненіемъ т. е. согласно терминологіи Мура [2]) и др. и нашей статьи функція *трансценденталь-трансцендентная* (или согласно Майлэ гипертрансцендентная).

Уравненіе (9) очевидно имѣетъ вещественный положительный корень, ибо представляя это уравненіе въ видѣ

$$f(x) = [\psi_0(x) - \psi_1(x)] + [\psi_2(x) - \psi_3(x)] + \ldots [\psi_{2n}(x) - \psi_{2n+1}(x)]$$

$$+ \omega_{2n+2}(x).$$

Мы можемъ прежде всего положить $x = o$, что даетъ

$$f(o) = a_0 > o$$

затѣмъ распорядиться x такъ, что всѣ разности

$$[\psi_j(x) - \psi_{j+1}(x)] < o,$$

чего достигнемъ, взявъ

---

1) О нѣкоторыхъ ариѳметическихъ свойствахъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій. Мат. Сб. 1910.

2) H. Moore. Concerning Transcendentally Transcendental Functions. Mat. An. B. 48. 1897.

$$x = \frac{(2n+1)!^{2n+1!}}{2n!^{2n!}} \frac{F}{\mathrm{E}}. \tag{10}$$

Остается только доказать, что при достаточно большомъ n

$$\omega_{2n+2}(x) = \omega_{2n+2}\left[\frac{(2n+1)!^{2n+1!}}{(2n!)^{2n!}} \frac{F}{\mathrm{E}}\right]$$

сколь угодно мало

$$|\omega_{2n+2}| \leqslant \sum_{j=2}^{j=\infty} \frac{a_{2n+j}\, x^{2n+j}}{(2n+j)!^{\,2n+j!}}$$

гдѣ x имѣетъ значеніе (10).

Но

$$\psi_{2n+j}(x) = \frac{a_{2n+j}\, x^{2n+j}}{(2n+j)!^{(2n+j)!}} < \mathrm{E}\,\frac{(2n+1)!^{(2n+1)!\,(2n+j)}}{(2n+j)!^{(2n+j)!}\,(2n)!^{2n!\,(2n+j)}}$$

$$\psi_{2n+j}(x) < \mathrm{E}\,\frac{(2n+1)!^{(2n+1)!\,(2n+j)}}{(2n+j)!^{(2n+1)!\,(2n+j)}\,[(2n+j)!]^{(2n+j)!-(2n+1)\,(2n+j)}\,(2n)!^{2n!\,(2n+j)}}$$

гдѣ очевидно

$$(2n+j)! - (2n+1)\,(2n+j) > o$$

$$\psi_{2n+j}(x) < \frac{\mathrm{E}}{(2n+j)!}.$$

Вслѣдствіе сходимости ряда $\sum \frac{1}{n!}$

$$\sum_{j=2}^{s=\infty} \frac{1}{(2n+j)!}$$

при достаточно большомъ и можетъ быть сдѣлано, какъ угодно мало. Тоже относится и къ $\omega_{2n+2}(x)$.

§ 3. Функція (9) голоморфная на всей плоскости, что слѣдуетъ изъ теоремы Коши-Гадамара, ибо

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{(n!)^{n!}}} = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n} \lim_{n=\infty} \frac{1}{(n!)^{n-1!}} = o\,.$$

Обнаруженный нами нуль поэтому можетъ быть только конечнаго порядка кратности.

Полагая

$$f(x) + A(x) = a_0 - a_1 x + \frac{a_2 x^2}{(2!)^{2!}} + \dots\dots (-1)^n \frac{a_n x^n}{n!} \qquad (11)$$

такъ что $A(x) = (-1)^n \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!^{(n+1)!}} + (-1)^{n+1} \frac{a_{n+2} x^{n+2}}{(n+2)!^{(n+2)!}} + \dots$

предположимъ сперва, что $x = x_1$ корень уравненія

$$f(x) = o \qquad (9)$$

а $x = x_2$ корень уравненія

$$f(x) + A(x) = o \qquad (10),$$

гдѣ $A(x)$ при $x = x_2$ очень мало

$$|A(x)| < \omega \qquad (11),$$

такъ что $x = x_2$ будетъ приближенно представлять корень уравненія (9), причемъ между x_1 и x_2 нѣтъ двойного корня уравненія (9).

Тогда

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\, \kappa\,, \qquad (12)$$

гдѣ $\kappa = f'(\xi)$ $x_1 < \xi < x_2$ отлично отъ нуля.

Но на основаніи ур. (9) и (10) уравненіе (12) перепишется такъ

$$x_2 - x_1 = -\frac{A(x_2)}{\kappa}$$

и по (11)

$$|x_2 - x_1| < \frac{\omega}{\kappa} \qquad (13)$$

При достаточно малой разности $x_2 - x_1$ въ силу голоморфности функціи $f(x)$ между x_1 x_2 или не будетъ заключаться корня уравненія $f'(x) = o$ или же должны имѣть $f(x_1) = o$ $f'(x_1) = o$.

Въ первомъ случаѣ имѣетъ мѣсто неравенство (13) во второмъ же равенство (12) замѣняется другимъ

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)^2 \kappa^2 \; (12)_2,$$

дающими вмѣсто неравенства (13) слѣдующее

$$|x_2 - x_1| < \frac{\sqrt{\omega}}{\kappa} \; (13)_2$$

при условіи, что x_1 не представляетъ тройной корень уравненія (9).

Въ случаѣ p-кратнаго корня имѣемъ

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)^p \kappa^p \quad (13)_p$$

откуда извлекаемъ неравенство

$$|x_2 - x_1| < \frac{\sqrt[p]{\omega}}{\kappa} \qquad (13)_p$$

гдѣ p во всякомъ случаѣ нѣкоторое конечное цѣлое положительное число.

Изъ выраженія для $A(x)$ получаемъ

$$|A(x_2)| < \frac{a_{n+1}\, x_2^{\,n+1}}{(n+1)!^{(n+1)!}}$$

и изъ уравненія $(13)_p$

$$|x_2 - x_1| < \frac{\sqrt[p]{a_{n+1}}\;\; x_2^{\frac{n+1}{p}}}{\kappa (n+1)!^{\frac{n+1}{p}}} \qquad (14)$$

Представимъ уравненіе (10) въ видѣ

$$(n!)^{n!}\, a_0 - \frac{(n!)^{n!}}{1}\, a_2\, x + \frac{(n!)^{n!}}{(2!)^{2!}}\, a_2\, x^2 + \dots (-1)^n\, a_n\, x^n = o\,.$$

Условіе алгебраичности корня уравненія (9) на основаніи § 1 сведется къ слѣдующему

$$(n!)^{n!}\, a_0 + \frac{(n!)^{n!}}{1}\, a_1 + \frac{(n!)^{n!}}{(2!)^{2!}}\, a_2 + \dots a_n > \frac{A\, a^{-\frac{1}{p}}\; x_2^{-\frac{n+1}{p}}}{\kappa^{-\frac{1}{n}}\, (n+1)!^{-\frac{n+1!}{pn}}}$$

(15)

при постаточно большомъ n.

Но можно доказать, что это не можетъ имѣть мѣсто, ибо при достаточно большомъ n

$$\frac{a_{n+1}^{-\frac{1}{n}} \, x_2^{-\frac{n+1!}{n}}}{\kappa^{-\frac{p}{n}} (n+1)!^{-\frac{n+1!}{n}}} > (n+1)\,(n!)^{n!}\,\mathrm{E}\,, \qquad (16)$$

а потому и подавно больше лѣвой части неравенства (15).

Поэтому, имѣя въ виду, что

$$(n+1)!^{n!} > (n+1)\,(n!)^{n!}$$

докажемъ теорему доказавъ, что Ω (отношеніе лѣвой части равенства (16) къ $(n+1)!^{n!}$) стремится къ ∞ съ возвращеніемъ n

$$\Omega = \lim_{n=\infty} \frac{\kappa^{\frac{p}{n}}}{a_{n+1}^{\frac{1}{n}} \, x_2^{\frac{n+1!}{n}}} \; \frac{(n+1)!^{\frac{n+1!}{n}}}{(n+1)!^{n!}} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\kappa^{\frac{p}{n}}}{a_{n+1}^{\frac{1}{n}} \, x_2^{\frac{n+1!}{n}}} \, (n+1)!^{(n-1)!} = \infty$$

т. к. $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{(x_2{}^{n+1})^{n-1!}}{(n+1)!^{n-1!}} = o.$

Такимъ образомъ корень уравненія (9) есть въ дѣйствительности трансцендентное число.

§ 5. Предположимъ теперь, что корень $y = \overline{y_1}$ уравненія

$$d_0 + d_1 y + d_2 y^2 + \ldots. d_m y^m + d_{m+1} y^{m+1} + \ldots. = o. \qquad (17)$$

гдѣ d_j раціональныя числа приближенно выражаетъ корень $x = \overline{x_1}$ уравненія

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots . c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + \dots = o. \quad (18)$$

Тогда можно также сказать, что корень уравненія

$$b_0 y_m + b_1 y^{m-1} + \dots . b_{m-1} y + b_m = o$$

гдѣ

$$b_j = d_{m-1} \delta_m$$

δ_m общій знаменатель d_j ($j = o, 1, 2, \dots m$) приближенно выражаетъ корень уравненія

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots a_{n-1} x + a_n = o$$

гдѣ

$$a_j = c_{n-j} \gamma_n$$

γ_n общій знаменатель c_j ($j = o, \dots 2 \dots n$).

При этомъ, если положить

$$|\overline{y_1} - y_1| < \eta \quad |x_1 - x_1| < \zeta$$

то

$$|\overline{y_1} - \overline{x_1}| < \varepsilon = \zeta + \eta.$$

Неравенство (8) тогда дастъ

$$|d_0| \ |\delta^2{}_m| \ [|d_0| + |d_0| + \dots |] > \frac{A}{(c_n \gamma_n)^{\frac{m}{n-1}}} (\zeta + \eta)^{\frac{1}{n}} \quad (19)$$

гдѣ A конечное число.

Это неравенство въ иныхъ случаяхъ даетъ возможность доказать, что трансцендентное число опредѣляемое уравненіемъ нѣкотораго типа (18) не можетъ опредѣляться уравненіемъ какого-нибудь иного типа (17).