Годъ XXIII (1911), № 1 и 2.

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Варшавскомъ Университетѣ,

ИЗДАВАЕМЫЕ ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ СЕКРЕТАРЯ ОБЩЕСТВА.

Годъ XXIII (1911).

ВАРШАВА
ТИПОГРАФІЯ ВАРШ. УЧ ОКР БРАК.-ПРЕДМ. 3.
1912.

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Варшавскомъ Университетѣ,

ИЗДАВАЕМЫЕ ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ СЕКРЕТАРЯ ОБЩЕСТВА.

Годъ XXIII (1911).

ВАРШАВА
ТИПОГРАФІЯ ВАРШ. УЧ. ОКР. КРАК.-ПРЕДМ. 3.
1912.

О нѣкоторыхъ интегральныхъ уравненіяхъ.

Д. Мордухай-Болтовского.

---

§ 1. Простѣйшимъ интегральнымъ уравненіемъ является слѣдующее.

$$\int_{(l)} \frac{\varphi(z)}{z-x}\, dz = f(x) \tag{1}$$

гдѣ контуръ l — петля, идущая отъ x_0 къ x или, что тоже, (при условіи монодромности $\varphi(z)$ для $z=x$) окружность безконечно малаго радіуса, описанная около x.

Рѣшеніе этого уравненія

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{2\pi i}$$

Уравненіе

$$\int_{(l)} (z-x)^{-m} \varphi(z)\, dz = f(x) \tag{2}$$

при m цѣломъ положительномъ сводится къ дифференціальному уравненію

$$\frac{2\pi i}{\overline{m-1}!}\,\frac{d^{m-1}\varphi(z)}{dz^{m-1}}=f(x) \tag{3}$$

откуда

$$\varphi(z)=\frac{m-1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z}(z-u)^{m-2}f(u)\,du+\text{произв. цѣлая фун. } n-2\text{-ой степени.}$$

Случай дробнаго m приводитъ уравненіе (2) къ дифференціальному уравненію дробнаго порядка, дающему

$$\varphi(z)=\frac{\Gamma(m)}{2\pi i}\,\underset{x_0}{f}^{(-m+1)}(z),$$

если обозначать часть $\underset{x_0}{f}^{(-k)}(z)$ производную порядка $-k$, взятую отъ x_0.

Формула Лѣтникова даетъ

$$\underset{x_0}{f}^{(-m+1)}(z)=\frac{1}{\Gamma(m-1)}\int_{z_0}^{z}(z-u)^{m-2}f(u)\,du \tag{4}$$

откуда

$$\varphi(z)=\frac{m-1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z}(z-u)^{m-2}f(u)\,du$$

§ 2. Рѣшеніе интегральнаго уравненія

$$\int_{(l)}\frac{\alpha(z,x)\,\varphi(z)}{(z-x)^n}\,dz=f(x) \tag{5}$$

гдѣ $\alpha(z,x)$ полиномъ отъ z степени ниже n сводится

1) къ интегрированію нѣкотораго линейнаго дифференціальнаго уравненія,

2) къ рѣшенію интегральнаго уравненія разсмотрѣннаго типа.

Ибо, разлагая $\alpha(z,x)$ въ рядъ по степенямъ $(z-x)$, имѣемъ

$$\alpha(z,x)=\alpha(x,x)+\frac{\alpha'(x.x)}{1}(z-x)+\frac{\alpha''(x.x)}{1.2}(z-x)^2+\ldots$$

$$\ldots\frac{\alpha^{(m)}(x.x)}{m!}(z-x)^m$$

$$m=E(n).$$

Интегральное уравненіе (5) приводится къ виду

$$\alpha(x,x)\int_{(l)}\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-x)}+\frac{\alpha'(x.x)}{1!}\int_{(l)}\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}+$$

$$+\ldots\frac{\alpha^{(m)}(x.z)}{m!}\int_{(l)}\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-x)^{n-m}}=f(x).$$

Полагая же

$$\int_{(l)}\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-x)^p}=I \quad (2')$$

гдѣ $p=n-m$ имѣетъ

$$\int_{(l)}\frac{\varphi(z)}{(z-x)^{p+k}}dz=\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+k-1)}\frac{d^kI}{dx^k}=\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+k)}\frac{d^kI}{dx^k}$$

и мы получаемъ линейное дифференціальное уравненіе:

$$\frac{\alpha(x.x)}{\Gamma(m)}\frac{d^mI}{dx^m}+\frac{\alpha'(x.x)}{1'.\Gamma(m-1)}\frac{d^{m-1}I}{dx^{m-1}}+\ldots\ldots\ldots\frac{\alpha^{(m)}(x,x)}{m!}I=$$

$$=f(x) \qquad (6)$$

дающее I. По I опредѣляется затѣмъ изъ уравненія (2′) и $\varphi(z)$.

А, именно,

$$\varphi(z)=\frac{p-1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z}(z-u)^{p-2}I(u)\,du \qquad (7)$$

Примѣръ.

Найдемъ рѣшеніе уравненія

$$\int_{(l)}\frac{8z^2-12xz+13x^2}{4\sqrt{(z-x)^5}}dz=\frac{3+4x+2x^2}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \qquad (8)$$

Имѣя въ виду, что

$$8z^2-12xz+13x^2=9x^2+4x(z-x)+8(z-x)^2$$

получаемъ

$$\frac{9}{8}x^2\int\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-x)^{5/2}}+\frac{1}{2}x\int\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-x)^{3/2}}+\int\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-x)^{1/2}}=$$

$$=\frac{3+4x+2x^2}{2x^2}\,e^{\frac{1}{x}}.$$

Полагая

$$I=\int\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-x)^{1/2}}$$

имѣемъ

$$I'={}^1/_2\int\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-x)^{3/2}}\qquad I''={}^3/_4\int\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-x)^{5/2}}$$

такъ что

$${}^3/_2\,x^2I''+xI'+I=\frac{3+4x+2x^2}{2x^2}\,e^{\frac{1}{x}}$$

откуда

$$I=\sqrt[6]{x}\left[C_1\,cs\left(\frac{\sqrt{23}}{6}\,lgx\right)+C_2\,sin\left(\frac{\sqrt{23}}{6}\,lgx\right)\right]+e^{\frac{1}{x}}.$$

Рѣшеніе уравненія (8) получаемъ въ формѣ

$$\varphi(z)=$$

$$=-\frac{1}{4\pi i}\int_{z_0}^{z}\frac{\sqrt[6]{u}\left[C_1\,cs\left(\frac{\sqrt{23}}{6}\,lgu\right)+C_2\,sin\left(\frac{\sqrt{23}}{6}\,lgu\right)\right]+e^{\frac{1}{u}}}{\sqrt{(z-u)^3}}\,du \tag{9}$$

§ 3. Теперь мы покажемъ, какимъ образомъ сводится къ изслѣдованному уравненію (3) уравненіе

$$\int_0^\infty e^{-zx}F(z,x)\,\varphi(z)\,dz=f(x) \tag{10}$$

гдѣ $F(z,x)$ функція отъ z, представляющее обобщеніе извѣстнаго уравненія

$$\int_0^\infty e^{-zx}\varphi(z)\,dz = f(x) \tag{11}$$

Постановкой $e^{-z} = t$ уравненіе это сводится къ уравненію типа

$$\int_0^1 z^{x-1}\mu(x, lgz)\,\varphi(z)\,dz = f(x) \tag{12}$$

Имѣя въ виду, что

$$\int_0^1 z^{x-u-1}\,dz = \frac{1}{x-u}\int_0^1 z^{x-u-1}(lgz)^u\,dz = \frac{(-1)^n\,n!}{(x-u)^{n+1}} \tag{13}$$

получаемъ

$$\int_0^1 z^{x-1}\mu(x, lgz)\,z^{-u}\,dz = \frac{\mu_0(x)}{x-u} - \frac{\mu_1(x)}{(x-u)^2} + \frac{2!\,\mu_2(x)}{(x-u)^3} -$$

$$-\ldots\ldots(-1)^m\frac{m!\,\mu_{m+1}(x)}{(x-u)^{m+1}} \tag{14}$$

если μ степени m относительно lgz.

Умножая послѣднее равенство на функцію $\Theta(u)$, которой ниже надлежащимъ образомъ распорядимся получаемъ, интегрируя по контуру (λ)

$$\int_{(\lambda)}\Theta(u)\,du\int_0^1 z^{x-1}\mu(x, lgz)\,z^{-u}\,dz = \sum_{k=0}^{k=m}\int_{(\lambda)}\frac{(-1)^k k!\,\mu_k(x)}{(x-u)^{k+1}}\Theta(u)\,du$$

или, перемѣняя порядокъ интегрированія

$$\int_0^1 z^{x-1}\mu(x, lgz)\left(\int_{(\lambda)} z^{-u}\Theta(u)\,du\right)dz =$$

$$= \sum_{k=0}^{k=m}\int_{(\lambda)}\frac{(-1)^k\,k!\,\mu_k(x)}{(x-u)^{k+1}}\Theta(u)\,du \tag{15}$$

Если мы теперь подберемъ $\Theta(u)$ такъ, что

$$\sum_{k=0}^{k=m}\int_{(\lambda)}\frac{(-1)^k\,k!\,\mu_k(x)}{(x-u)^{k+1}}\Theta(u)\,du = f(x) \tag{16}$$

то рѣшеніемъ уравненія (12) будетъ

$$\varphi(z)=\int_{(\lambda)} z^{-u}\Theta(u)\,du \tag{17}$$

Если положить

$$I=\int_{(\lambda)} \frac{\Theta(u)\,du}{u-x} \tag{18}$$

то уравненіе (16) приведется къ линейному дифференціальному уравненію

$$\sum_{k=0}^{k=m} \mu_k(x)\, I^{(k)} = f(x). \tag{19}$$

Такимъ образомъ слѣдуетъ

1) найти рѣшеніе дифференціональнаго уравненія (19),

2) рѣшить относительно $\Theta(u)$ интегральное уравненіе (18).

§ 4. Примемъ за контуръ λ петли, описанныя послѣдовательно въ полож. направленіи идущія отъ $x=x_0$ къ особеннымъ точкамъ $\Theta(u)$ (въ случаѣ полюсовъ эти контуры могутъ быть замѣнены безконечно малыми окружностями описанными около этихъ точекъ).

На основаніи теоремы Коши должны имѣть

$$-\int_{(\lambda)} \frac{\Theta(u)\,du}{u-x} + \int_{(x)} \frac{\Theta(u)\,du}{u-x} + \int_{(\infty)} \frac{\Theta(u)\,du}{u-x} = 0,$$

гдѣ (x) обозначаетъ окружностъ безконечнаго радіуса, описанную около точки x, (∞) окружность безконечно большого радіуса. При $\Theta(\infty)=0$ послѣдній членъ равенъ нулю и мы получаемъ уравненіе (18) въ видѣ:

$$\int_{(x)} \frac{\Theta(u)\,du}{u-x} = I \tag{20}$$

Откуда, имѣя въ виду, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(x)}\frac{\Theta(u)\,du}{u-x}=\Theta(u)$$

$$\Theta(x)=\frac{1}{2\pi i}I \tag{21}$$

и $\Theta(x)$, какъ I, опредѣляется линейнымъ дифференціональнымъ уравненіемъ

$$\sum_{k=o}^{k=m}\mu_h(x)\,\Theta^{(k)}(x)=\frac{f(x)}{2\pi i} \tag{22}$$

Въ томъ случаѣ когда функція $\Theta(u)$ монодромна для всѣхъ u (кромѣ $u=\infty$),

уравнение (17) обращается въ слѣдующее

$$\varphi(z)=2\pi i \underset{a_1\,a_2\,\ldots\,a_l}{\mathscr{E}} z^{-u}\,\Theta(u)$$

или

$$\varphi(z)=\underset{a_1\,a_2\,.\,a_l}{\mathscr{E}} z^{-u}\,\Theta(x) \tag{23}$$

гдѣ $I(x)$ опредѣляется линейнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ (19)

$$\sum_{k=0}^{k=m}\mu_k(x)\,I^{(k)}=f(x) \tag{19}$$

Въ томъ случаѣ, когда I имѣетъ единственной особенной точкой (кромѣ x): полюсъ $z=0$ и кромѣ того $I(\infty)=0$ то имѣемъ

$$\varphi(z)=\underset{0}{\mathscr{E}} z^{-u}\,I(u) \tag{23'}$$

Для уравненія

$$\int_0^1 z^{x-1}\,\varphi(z)\,dz=f(x) \tag{24}$$

получаемъ, какъ частный случай, результатъ Мюрфи:

$$\varphi(z) = \underset{0}{\mathscr{E}} z^{-u} f(u) \tag{23''}$$

§ 5. Въ томъ случаѣ когда $\Theta(\infty) = \infty$ и при этомъ существуетъ такое конечное число n, что

$$[\Theta(u) u^{-u}]_{u=\infty} = 0$$

уравненіе (14) замѣняемъ слѣдующимъ:

$$\int_0^1 z^{x-1} \mu(x, lgz) z^{-u} (lgz)^n dz = \frac{n! \mu_0(x)}{(x-u)^{n+1}} - \frac{\overline{n-1}! \mu_1(x)}{(x-u)^{n+2}} + \\ + \dots \frac{(-1)^m (n+m)! \mu_m(x)}{(x-u)^{m+n+1}} \tag{25}$$

Поступая, какъ выше, получаемъ

$$\varphi(z) = \int_{(\lambda)} z^{-u} \Theta(u) \tag{26}$$

гдѣ

$$I = \int_{(\lambda)} \frac{\Theta(u)\, du}{(u-x)^{n+1}} \tag{27}$$

опредѣляется линейнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ.

Выбирая тотъ же, что въ § 4 контуръ интегрированія λ, приводимъ уравненіе (27) къ уравненію (2), разсмотрѣнному въ § 1.

Имѣя же въ виду, что при n дробномъ

$$\int_0^1 z^{x-u-1} (lgz)^n dz = \frac{(-1)^n \Gamma(n+1)}{(x-u)^{n+1}}$$

$$\int_0^1 z^{x-u-1} (lgz)^q \mu(x, lgz) \varphi(z) dz = f(x)$$

при g дробномъ къ рѣшенію ур. (2) при m дробномъ и къ рѣшенію нѣкотораго линейнаго дифференціальнаго уравненія.

§ 6. *Примѣръ*:

Для интегральнаго уравненія:

$$\int_0^1 z^{x-1}\left(xlgz+\frac{1}{2}\right)\varphi(z)\,dz=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

имѣемъ дифференціальное уравненіе

$$xI'+\frac{1}{2}I=\frac{1}{\sqrt[3]{x}},$$

дающее, какъ легко видѣть,

$$I=\frac{C}{\sqrt{x}}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$$

Отсюда выводимъ:

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\lambda)}\left(\frac{C}{\sqrt{u}}+\frac{6}{\sqrt[3]{u}}\right)z^{-u}\,du,$$

гдѣ λ петля отъ x_0 до $x=0$.

Замѣчая, что интегралъ по окружности безк. малаго радіуса равенъ нулю, получаемъ, полагая $x_0=\infty$,

$$\varphi(z)=\frac{C}{\pi i}\int_\infty^x z^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\,du+\frac{3}{2\pi i}(3-\sqrt{3}\,i)\int_\infty^x z^{-u}u^{-\frac{1}{3}}\,du$$

или

$$\varphi(z)=\frac{C'\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{lgz}}+\frac{3}{2\pi i}(3-\sqrt{3}\,i)\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt[3]{(lgx)^2}}$$

Взявъ другое начальное значеніе $\sqrt[3]{(lgz)^2}$ получаемъ для

$\varphi(z)$ вещественную форму [которая получается замѣной $\sqrt[3]{(lgz)^2}$ на

$$\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)\sqrt[3]{(lgz)^2}=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\sqrt[3]{(lgz)^2}\Bigg]$$

$$\varphi(z)=\frac{C''}{\sqrt{lgz}}+\frac{3\sqrt{3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\pi\sqrt{(lgz)^2}} \tag{29}$$