Годъ XXIII (1911), № 1 и 2.

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Варшавскомъ Университетѣ,

издаваемые подъ редакціей секретаря общества.

Годъ XXIII (1911).

ВАРШАВА
Типографія Варш. Уч. Окр. Брак.-Предм. 3.
1912.

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Варшавскомъ Университетѣ,

издаваемые подъ редакціей секретаря общества.

Годъ XXIII (1911).

ВАРШАВА
ТИПОГРАФІЯ ВАРШ. УЧ. ОКР. КРАК.-ПРЕДМ. 3.
1912.

ОГЛАВЛЕНІЕ:

		стр.:
1.	Протоколы засѣданій	I—IX
2.	Б. Ф. Печенко. Къ вопросу о строеніи бактерій. Drepanospira Mülleri n. g. n. sp., паразитъ парамеціи; строеніи его и циклъ развитія	1— 46
3.	А. И. Хаинскій. Новые методы гистологическаго изслѣдованія въ приложеніи къ изученію морфологіи и физіологіи инфузоріи Paramaecium caudatum	47—130
	Списокъ литературы	I—VIII
4.	П. И Митрофановъ. Начальное развитіе крачки (Sterna macrura Naum.) . .	131—155
5.	Д. Мордухай-Болтовской. О взаимныхъ метрическихъ теоремахъ . .	157—188
6.	С. Вуйцицкій. Конечныя фазы развитія пыльцы у Iucca recurva Slsb. . .	189—191
7.	Э. Розенталь. Восхожденіе на Большой Араратъ	193—209
8.	А. Н. Бартеневъ. Къ составу фауны Кавказа	211—239
9.	Г. Ю. Верещагинъ. Объ измѣненіяхъ цикличности Cladocera въ зависимости отъ географической широты мѣстности	241—275
10.	В. В. Дубянскій. Эльбрусъ и долина Баксана	277—290
11.	В. П. Вельминъ. О разложеніи идеаловъ квадратичной области на простыхъ множителей	291—294.

О взаимныхъ метрическихъ теоремахъ.

Д. Мордухай-Болтовского.

§ 1. Каждой зрительной теоремѣ отвѣчаетъ взаимная содержаніе которой и доказательство получается съ помощью перехода отъ Декартовыхъ къ Плюкеровымъ координатамъ.

Двойственный рядъ теоремъ можетъ быть продолженъ дальше въ область метрическихъ теоремъ, если установить значеніе тѣхъ формулъ, которыя получаются черезъ замѣну въ формулахъ для координатъ среднеариѳметическаго и среднегармоническая центра, разстояніе между точками, площади треугольника и т. д. Декартовыхъ координатъ черезъ Плюкеровы. Такимъ образомъ получаются теоремы взаимныя съ теоремами Ньютона и Котеса и ихъ дальнѣйшія обобщенія, какъ это было показано въ нашемъ докладѣ 1910 г. Обществу Естествоиспытателей.

Новую группу взаимныхъ метрическихъ теоремъ получаемъ, указавъ геометрическій смыслъ:

$$\sqrt{(\xi_2-\xi_2)^2+(\eta_2-\eta_1)^2} \tag{1}$$

выраженія получаемаго изъ формулы

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

разстоянія между двумя точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) на плоскости.

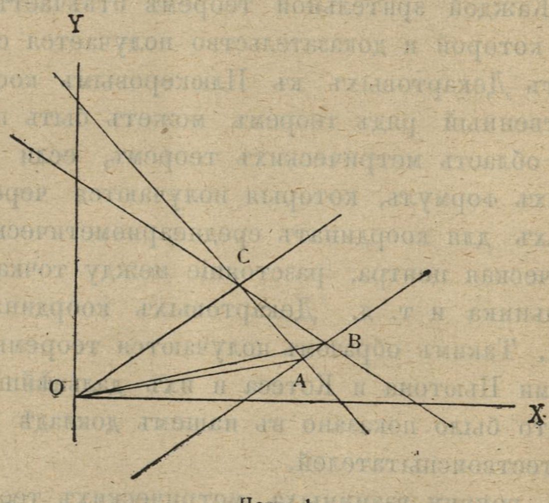
Геометрическую величину опредѣляемую формулой (1) назовемъ *разстояніемъ* двухъ прямыхъ λ_1, λ_2 относительно точки O (служащей началомъ координатъ) и будемъ обозначать черезъ $\lambda_1{}^0\,\lambda_2$.

Изъ послѣдующаго будемъ слѣдовать, что $\lambda_1{}^0\,\lambda_2$ не зависитъ отъ направленія OX, OY, а исключительно отъ взаимнаго положенія $\lambda_1\,\lambda_2$ и ихъ положенія относительно точки O. Нетрудно усмотрѣть слѣдующее значеніе $\lambda_1{}^0\,\lambda_2$.

Точку пересѣченія прямыхъ (черт. 1).

$$\lambda_1\,(AC) \quad \text{и} \quad \lambda_2\,(BC)$$

соединяемъ съ O прямой OC, длину которой назовемъ векторомъ $\lambda_1\,\lambda_2$ относительно O и обозначимъ черезъ r_{12}.



Черт. 1

Разстояніе между точками A и B такими, что площадь $\Delta\,AOC$ и $\Delta\,BOC$ равны $\frac{1}{2}$ или что тоже площади параллелограмовъ, построенныхъ на CB и OC и на CA и OC равны единицѣ равно

$$\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2}.$$

Легко видимъ, что уравненіе OC

$$(\xi_2-\xi_1)x+(\eta_2-\eta_1)y=0.$$

Проводимъ $AB \parallel OC$

Уравненіе AB:

$$(\xi_2-\xi_1)x+(\eta_2-\eta_1)y+\delta=0.$$

Координаты A, B:

$$x_1=\frac{\delta\eta_1+\eta_2-\eta_1}{\Delta} \qquad y_1=\frac{-\delta\xi_1+\xi_2-\xi_1}{\Delta}$$

$$x_2=\frac{-\delta\eta_2+\eta_1-\eta_2}{\Delta} \qquad y_2=\frac{-\delta\xi_2+\xi_1-\xi_2}{\Delta}$$

Координаты C:

$$\bar{x}=\frac{\eta_2-\eta_1}{\Delta} \qquad \bar{y}=-\frac{\xi_2-\xi_1}{\Delta}$$

$$\Delta=\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1.$$

Разстояніе C отъ AB равно

$$\frac{\delta}{\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2}}$$

Это же будетъ высотой $\Delta\, CAO$

Основаніе

$$OC=r_{12}=\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}=\frac{\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2}}{\Delta} \qquad (2)$$

Площадь $\Delta\, CAO=\frac{1}{2}\frac{\delta}{\Delta}$.

Если же площадь равна $\frac{1}{2}$ (и очевидно въ тоже время тогда и площадь OCB равна $\frac{1}{2}$), то $$\delta = \Delta \tag{3}$$

Но $$AB = \frac{\delta}{\Delta}\sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2}$$

и въ виду уравн. (3)

$$\lambda^0{}_1\,\lambda_2 = AB = \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2} \tag{4}$$

Отсюда же получаемъ геометрическое значенiе

$$|\Delta| = |\xi_1\,\eta_2 - \xi_2\,\eta_1|.$$

А именно площадь ABC равна $^1/_2\ \Delta$.

§ 2. Изъ ΔABC имѣемъ

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin(\lambda_1, \lambda_2)}{\sin(\lambda_2, \mu)}, \qquad AB = AC\,\frac{\sin(\lambda_1, \lambda_2)}{\sin(\lambda_2, \mu)}$$

если черезъ (λ_1, λ_2) и (λ_2, μ) обозначить углы между CA и CB, CB и CO.

Но, по условiю,

$$\text{пл.}\,AOC = \text{пл.}\,BOC = \frac{1}{2}$$

откуда

$$r_{12}\,AC \sin(\lambda_1, \mu) = 1 \qquad AC = \frac{1}{r_{12}\sin(\lambda_1, \mu)}$$

$$AB = \lambda^0{}_1\,\lambda_2 = \frac{1}{r_{12}}\,\frac{\sin(\lambda_1, \lambda_2)}{\sin(\lambda_1, \mu)\sin(\lambda_2, \mu)} \tag{5}$$

Этому выраженiю можно придать еще слѣдующую, болѣе простую, форму.

Имѣя въ виду, что

$$\sin(\lambda_1, \lambda_2) = \sin[(\lambda_1, \mu) - (\lambda_2, \mu)]$$

и $$\frac{sin\,(\lambda_1\,\lambda_2)}{sin\,(\lambda_1,\mu)\,sin\,(\lambda_2,\mu)}=\frac{1}{tg\,(\lambda_1,\mu)}+\frac{1}{tg\,(\lambda_2,\mu)}$$

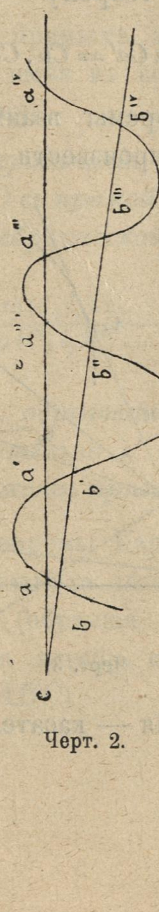
мы можемъ, полагая

$$\frac{1}{tg\,(\lambda_1,\mu)}+\frac{1}{tg\,(\lambda_2,\mu)}=\frac{2}{tg\,(\lambda_{12},\mu)}$$

гдѣ λ_{12} среднегармоническая ось λ_1, λ_2 относительно прямой μ, написать

$$\lambda^0{}_1\,\lambda_2=\frac{2}{r_{12}\,tg\,(\lambda_{12},\mu)} \qquad (6)$$

§ 3. Какъ приложеніе положеннаго результата можемъ привести выводъ теоремы, взаимной съ теоремой Ньютона, относящейся къ парамъ взаимно-параллельныхъ хордъ.



Черт. 2.

Если мы будемъ (черт. 2) проводить изъ различныхъ точекъ C плоскости прямыя параллельныя двумъ даннымъ прямымъ, пересѣкающія алгебраическую кривую въ точкахъ:

$$(a, a', a'' \ldots .) \; (b, b', b'' \ldots .),$$

то для всѣхъ положенiи точки C

$$\frac{Ca \, . \, Ca', Ca'' \ldots}{Cb \, . \, Cb' \, . \, Cb'' \ldots} = const \qquad (7)$$

имѣетъ одно и тоже значенiе.

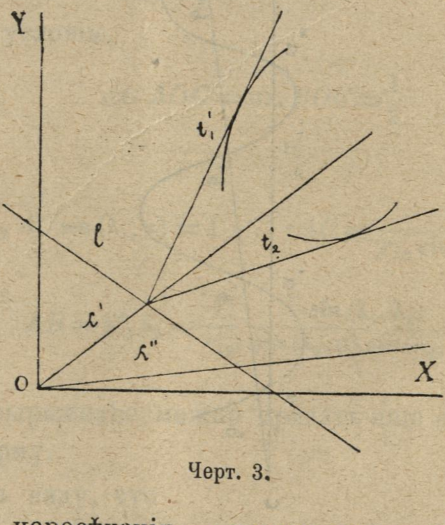
Для кривой второго порядка

$$\frac{Ca \, . \, Ca'}{Cb \, . \, Cb'} = const.$$

Когда переходимъ къ частному случаю круга, $const = 1$ и мы имѣемъ извѣстную теорему

$$Ca \, Ca' = Cb \, . \, Cb'.$$

При построенiи теоремы взаимной съ только что формулированной, слѣдуетъ произвести замѣны (черт. 3.):



Черт. 3.

1) точекъ пересѣченiя — касательными изъ точки,

2) условіе параллельности прямыхъ — условіемъ нахожденія точекъ на прямой проходящей черезъ начало координата,

3) разстояніе между точками $m_1 m_2$ — разстояніемъ 2-хъ прямыхъ $\lambda_1 \lambda_2$ относительно точки O.

Теорема состоитъ въ слѣдующемъ:

Если провести черезъ нѣкоторую точку O двѣ прямыя λ', λ'' и изъ точекъ пересѣченія λ'', λ'' съ какой нибудь прямой l приводитъ касательныя къ алгебраическимъ кривымъ: $t'_1, t'_2 \ldots t''_2, t''_2 \ldots$ то обозначая черезъ $t_i^{(\prime)} l$ разстояніе $t^{\prime}$, l относительно O должны имѣть, что

$$\frac{t'_1 l \,.\, t'_2 l \,.\, t'_3 l \ldots\ldots}{t''_1 l \,.\, t''_2 l \,.\, t''_3 l \ldots\ldots} = const. \tag{8}$$

независимо отъ положенія прямой l.

Замѣняя разстоянія прямыхъ тригонометрическими выраженіями (6) получаемъ, имѣя въ виду, что величины r_{12} взаимно сокращается теорему:

Если изъ точекъ пересѣченія двухъ прямыхъ λ'', λ'' проходящихъ черезъ точку O съ прямой l провести касательныя: $t'_1, t'_2 \ldots t''_1, t''_2 \ldots$ къ алгебраической кривой, то отношеніе

$$\frac{tg\,(t'_1 l, \lambda')\; tg\,(t'_2 l, \lambda') \ldots\ldots tg\,(t'_m l, \lambda')}{tg\,(t''_1 l, \lambda'')\; tg\,(t''_2 l, \lambda'') \ldots\ldots tg\,(t''_m l, \lambda'')} \tag{9}$$

гдѣ $(t'_i l, \lambda')$ $(t''_i l, \lambda'')$ углы, образованныя среднегармоническими осями $t'_i l$, $t''_i l$ относительно λ' и λ'' остается неизмѣннымъ при всякомъ положеніи прямой l.

Точно также изъ теоремы Карно, относящейся по точкамъ пересѣченія треугольника алгебраческаго кривой и состоящей въ томъ, что (обращая черезъ $a, a', a'' \ldots b, b', b'' \ldots c, c', c''$ точка пересѣченія алгебр. кривой со сторонами AB, BC, CA треугольника ABC)

$$\frac{aA\,.\,a'A\,.\,a''A\ldots}{aB\,.\,a'B\,.\,a''B\ldots}\times\frac{bB\,.\,b'B\,.\,b''B\ldots}{bC\,.\,b'C\,.\,b''C\ldots}\times\frac{cC\,.\,c'C\,.\,c''C\ldots}{cA\,.\,c'A\,.\,c''A\ldots}=1$$

мы получаемъ взаимную теорему, выражаемую равенствомъ:

$$\frac{tg\,(t_1{}^{(a)}\,c,\lambda_a)\;tg\,(t_2{}^{(a)}\,c,\lambda_a)\ldots}{tg\,(t_1{}^{(a)}\,b,\lambda_a)\;tg\,(t_2{}^{(a)}\,b,\lambda_a)\ldots}\times\frac{tg\,(t_1{}^{(b)}\,a,\lambda_b)\;tg\,(t_2{}^{(b)}\,a,\lambda_b)\ldots}{tg\,(t_1{}^{(b)}\,c,\lambda_b)\;tg\,(t_2{}^{(b)}\,c,\lambda_b)\ldots}\times$$

$$\times\frac{tg\,(t_1{}^{(c)}\,b,\lambda_c)\;tg\,(t_2{}^{(b)}\,b,\lambda_c)\ldots}{tg\,(t_1{}^{(c)}\,a,\lambda_c)\;tg\,(t_2{}^{(b)}\,a,\lambda_c)\ldots}=1, \qquad (10)$$

гдѣ $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ обозначаютъ прямыя, направленныя изъ нѣкоторой точки O къ вершинамъ треугольника.

Если теперь точку O удалимъ на безконечность, то получимъ теорему, доказанную Шалемъ и выражаемую равенствомъ

$$\frac{sin\,(t_1{}^{(a)},c)\;sin\,(t_2{}^{(a)},c)\ldots}{sin\,(t_1{}^{(a)},b)\;sin\,(t_2{}^{(a)},b)\ldots}\times\frac{sin\,(t_1{}^{(b)},a)\;sin\,(t_2{}^{(b)},a)\ldots}{sin\,(t_1{}^{(b)},c)\;sin\,(t_2{}^{(b)},c)\ldots}\times$$

$$\frac{sin\,(t_1{}^{(c)},b)\;sin\,(t_2{}^{(c)},b)\ldots}{sin\,(t_1{}^{(c)},a)\;sin\,(t_2{}^{(c)},a)\ldots}=1 \qquad (11)$$

Въ обобщенной теоремѣ Карно треугольникъ замѣняется многоугольникомъ.

Обозначая черезъ $a'_1, a''_1\ldots a'_2, a''_2\ldots a'_p, a''_p\ldots$ точки пересѣченія сторонъ многоугольника съ алгебраической кривой, черезъ $A_1, A_2\ldots$ вершины должны имѣть:

$$\prod_{i=1}^{i=p}\frac{a'_i A_i\,.\,a'_i A_i\,.\;\;.\,a_i^{(n)}A_i}{a'_i A_{i+1}\,a''_i A_{i+1}\ldots a_i^{(n)}A_{i+1}}=1 \qquad (12)$$

Очевидно взаимная теорема опредѣляется уравненіемъ:

$$\prod_{i=1}^{i=p}\prod_{j=1}^{j=m}\frac{tg\,(t_j^{(\alpha_i)}\,\alpha_i,\lambda_{A_i})}{tg\,(t_j^{(\alpha_i)}\,\alpha_{i+1},\lambda_{A_i})}=1 \qquad (13)$$

въ частномъ случаѣ уравненіемъ

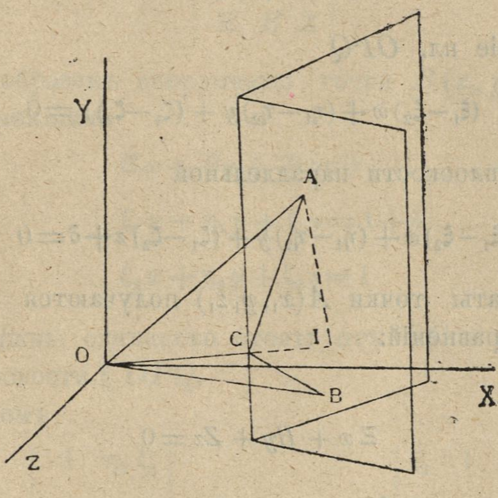
$$\prod_{i=1}^{i=p}\prod_{i=1}^{i=m}\frac{\sin(t_j^{(\alpha_i)},\alpha_i)}{\sin(t_j^{(\alpha_i)},\alpha_{i+1})}=1 \qquad (14)$$

§ 4. Аналогичныя взаимныя метрическія теоремы устанавливаются въ пространствѣ, если предварительно установить геометрическое значеніе *разстоянія 2-хъ плоскостей*

$$(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)\,(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)$$

$$\lambda^0{}_1\,\lambda^0{}_1=\sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2+(\zeta_1-\zeta_2)^2}$$

относительно точки O.



Черт. 4.

Изъ O проводимъ плоскость $\perp$ къ λ_1, λ_2. Пусть C точка пересѣченія λ_1, λ_2 и этой плоскости. OC назовемъ векторомъ и обозначеніемъ черезъ r_{12}. Пусть $A_1 B$ такія точки, что площади параллелограммовъ построенныхъ на OC и OA, OC и OB равны 1.

Тогда

$$(\lambda^0{}_1 \lambda_2) = AB.$$

Замѣтимъ, что уравненіе OAB:

$$\Xi x + Hy + Zz = 0 \tag{16}$$

гдѣ

$$\Xi = \eta_2 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_2$$

$$H = \zeta_2 \xi_1 - \zeta_1 \xi_2$$

$$Z = \xi_2 \eta_1 - \xi_1 \eta_2$$

т. е. опредѣлители миноры опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

Уравненіе пл. OPQ

$$(\xi_1 - \xi_2) x + (\eta_1 - \eta_2) y + (\zeta_1 - \zeta_2) z = 0 \tag{17}$$

а уравненіе плоскости параллельной

$$(\xi_1 - \xi_2) x + (\eta_1 - \eta_2) y + (\zeta_1 - \zeta_2) z + \delta = 0 \tag{18}$$

Координаты точки $A(x_1, y_1 z_1)$ получаются совмѣстнымъ рѣшеніемъ уравненій:

пл. OAB

$$\Xi x + Hy + Zz = 0 \tag{16}$$

пл. $\lambda_1 (PQS)$

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z = 1 \tag{19}$$

пл. $\|$ OPQ и отстоящей на разстояніе AJ равное высотѣ $\Delta\, OCA$:

$$(\xi_1 - \xi_2) x + (\eta_1 - \eta_2) y + (\zeta_1 - \zeta_2) z + \delta = 0 \tag{18}$$

причемъ, очевидно, уравненія (19) и (18) можно замѣнить слѣдующими:

$$\xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z = 1 + \delta$$
$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z = 1$$

дающими вмѣстѣ съ уравненіемъ (16)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1+\delta & \eta_2 & \zeta_2 \\ 1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ 0 & H & Z \end{vmatrix}}{\Omega} \qquad y_1 = \frac{\begin{vmatrix} \xi_2 & 1+\delta & \zeta_2 \\ \xi_1 & 1 & \zeta_1 \\ \Xi & 0 & Z \end{vmatrix}}{\Omega}$$

$$z_1 = \frac{\begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 & 1+\delta \\ \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \Xi & H & 0 \end{vmatrix}}{\Omega}, \tag{20}$$

$$\Omega = \begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \Xi & H & Z \end{vmatrix}$$

Такимъ образомъ координаты точки $B\,(x_2, y_2, z_2)$ опредѣляются уравненіями

$$\Xi x + Hy + Zz = 0$$
$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z = 1 + \delta$$
$$\xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z = 1$$

ибо A, B должны одинаково стоять отъ OC и поэтому быть на одной плоскости $\parallel$ OPQ.

Мы имѣемъ

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \eta_2 & \zeta_2 \\ 1+\delta & \eta_1 & \zeta_1 \\ 0 & H & Z \end{vmatrix}}{\Omega}, \qquad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} \xi_2 & 1 & \zeta_3 \\ \xi_1 & 1+\delta & \zeta_1 \\ \Xi & 0 & Z \end{vmatrix}}{\Omega}$$

$$z_2 = \frac{\begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & 1+\delta \\ \Xi & H & 0 \end{vmatrix}}{\Omega}$$

Сопоставляя и ур. (20) имѣемъ

$$x_1 - x_2 = \frac{\begin{vmatrix} \delta & \eta_2 & \zeta_2 \\ \delta & \eta_1 & \zeta_1 \\ 0 & H & Z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \Xi & H & Z \end{vmatrix}} = \frac{\delta \begin{vmatrix} 1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ 1 & \eta_2 & \zeta_2 \\ 0 & H & Z \end{vmatrix}}{\Xi^2 + H^2 + Z^2} = \frac{\delta\,[(\eta_2-\eta_1)\,Z - (\zeta_2-\zeta_1)\,H]}{\Delta^2}$$

гдѣ

$$\Delta = \sqrt{\Xi^2 + H^2 + Z^2},$$

точно такимъ же образомъ

$$y_1 - y_2 = \frac{\delta\,[\zeta_2-\zeta_1)\,\Xi - (\xi_2-\xi_1, Z]}{\Delta^2}$$

$$z_1 - z_2 = \frac{\delta\,[(\xi_2-\xi_1)\,H - (\eta_2-\eta_1)\,\Xi]}{\Delta^2}$$

откуда получаемъ

$$AB = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)} =$$

$$= \frac{\delta}{\Delta^2}\sqrt{[(\eta_2-\eta_1)\,Z - (\xi_2-\xi_1)\,H]^2 +}$$

$$\overline{+ [\zeta_2-\zeta_1)\,\Xi - (\xi_2-\xi_1)\,Z]^2 + [(\xi_2-\xi_1)\,H - (\eta_2-\eta_1)\,\Xi]^2} =$$

$$= \frac{\delta}{\Delta^2}\sqrt{[(\xi_2-\xi_1)^2 + (\eta_2-\eta_1)^2 + (\zeta_2-\zeta_1)^2]\,[\Xi^2 + H^2 + Z^2]} =$$

$$= \frac{\delta}{\Delta}\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2 + (\eta_2-\eta_1)^2 + (\zeta_2-\zeta_1)^2}$$

на основанiи извѣстной формулы

$$(A^2+B^2+C^2)\,(a^2+b^2+c^2) = (Aa+Bb+Cc)^2 + (Ab-Ba)^2 +$$
$$+ (Bc-Cb)^2 + (Ac-Ca)^2$$

и имѣя въ виду, что

$$\Xi\,(\xi_2-\xi_1) + H(\eta_2-\eta_1) + Z(\zeta_2-\zeta_1) = 0.$$

Но площадь ΔAOC равна

$$\frac{1}{2}\, OC$$

умнож. на разстояніе AI точки A отъ POQ

$$OC = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}\ ,$$

гдѣ $(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})$ координаты точки C т. е. точки пересѣченія 3-хъ плоскостей

$$OPQ: \qquad \Xi x + Hy + Zz = 0$$

$$\lambda_1: \qquad \xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z = 1$$

$$\lambda_2: \qquad \xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z = 1,$$

такъ что

$$\bar{x} = \frac{(\eta_2 - \eta_1)\, Z - (\zeta_2 - \zeta_1)\, H}{\Delta} \qquad \bar{y} = \frac{(\zeta_2 - \zeta_1)\, \Xi - (\xi_2 - \xi_1)\, Z}{\Delta}$$

$$\bar{z} = \frac{(\xi_2 - \xi_1)\, H - (\eta_2 - \eta_1)\, \Xi}{\Delta^2}$$

$$OC = \frac{\sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2}}{\Delta^2}$$

$$AI = \frac{\delta}{\sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2}}$$

откуда

$$\text{пл.}\, AOC = \frac{1}{2}\, \frac{\delta}{\Delta}$$

Такъ какъ пл. $AOC = \frac{1}{2}$, то

$$\delta = \Delta$$

и слѣдовательно

$$AB = \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1) + (\zeta_2 - \zeta_1)^2}$$

Для $(\lambda^0{}_1 \lambda_2)$ мы легко получимъ тригонометрическую формулу:

$$AB = \lambda^0{}_1 \lambda_2 = \frac{1}{r_{12}} \frac{\sin(\lambda_1 \lambda_2)}{\sin(\lambda_1, \mu) \sin(\lambda_2, \mu)} \tag{22}$$

гдѣ (λ_1, λ_2) уголъ между плоскостями $\lambda_1 \lambda_2$, (λ_1, μ) уголь между λ_1 и плоскостью μ (OPQ) λ_1, λ_2 относительно пл. или

$$\lambda_1{}^0 \lambda_2 = \frac{2}{r_{12}\, tg(\lambda_{12}\, \mu)}$$

гдѣ λ_{12} среднегармоническій листъ $\lambda_1 \lambda_2$ относительно μ, такъ что

$$\frac{2}{tg(\lambda_{12}, \mu)} = \frac{1}{tg(\lambda_1, \mu)} + \frac{1}{tg(\lambda_2, \mu)} \tag{23}$$

§ 5. Теоремѣ Ньютона, указанной въ § 3 отвѣчаетъ слѣдующая теорема въ пространствѣ.

Если приводить изъ разныхъ точекъ по три прямыхъ параллельныхъ 3 направленіямъ, пересѣкающихъ алгебраическую поверхность въ точкахъ

$$a, a', a'' \ldots$$

$$b, b', b'' \ldots$$

$$c, c', c'' \ldots$$

то произведенія

$$Ca \,.\, Ca' \,.\, Ca'' \ldots$$

$$Cb \,.\, Cb' \,.\, Cb'' \ldots$$

$$Cc \,.\, Cc' \,.\, Cc' \ldots$$

находятся въ постоянныхъ отношеніяхъ независимо отъ положенія точки C.

Къ этой теоремѣ, доказываемой совершенно также какъ теорема Ньютона, легко построить взаимную, замѣняя разстояніе — между точками и пользуясь тригонометрической формулой для разстояніями между прямыми.

Если провести на одной плоскости три прямыя L_1 L_2, L_3 *и черезъ нихъ провести касательныя плоскости къ алгебраической поверхности* t_1', t_2'... t_m', t_1'', t_2''... t_m'', t_1''', t_2'''... t_m''' *и затѣмъ передвигать* L_1, L_2, L_3 *въ трехъ плоскостяхъ* λ', λ'', λ''' *проходящихъ черезъ точку такъ, чтобы эти прямыя оставались въ одной плоскости, то произведенія*

$$tg\,(t_1'\,l_1\,\lambda')\;tg\,(t_2'\,l_1\,\lambda')\ldots\;tg\,(t_m'\,l_1\,\lambda')$$

$$tg\,(t_1''\,l_1\,\lambda'')\;tg\,(t_2''\,l_1\,\lambda'')\ldots\;tg\,(t_m''\,l_1\,\lambda'')$$

$$tg\,(t_1'''\,l_1\,\lambda''')\;tg\,(t_2'''\,l_1\,\lambda''')\ldots\;tg\,(t_m'''\,l_1\,\lambda''')$$

будутъ находиться въ постоянныхъ отношеніяхъ. $(t_i^{(j)}\,l)$ *означаетъ средне-гармоничвскій листъ* $t_i^{(j)}$ *и* l.

Не трудно построить теорему, отвѣчающую теоремѣ Карно и ей взаимную.

§ 6. Условіе параллельности двухъ прямыхъ

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = 1 \qquad\qquad \alpha_2 x + \beta_2 y = 1$$

$$\text{есть } \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \quad \text{или} \quad \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0 \tag{24}$$

Условіе перпендикулярности

$$\frac{\alpha_1\,\alpha_2}{\beta_1\,\beta_2} = -1 \qquad \text{или} \qquad \alpha_1\,\alpha_2 + \beta_1\,\beta_2 = 0 \tag{25}$$

Легко видѣть, что опредѣляется тѣми же соотношеніями между α, β для случая уравненія точекъ въ Плюкеровыхъ координатахъ:

$$\alpha_1\,\xi + \beta_1\,\eta = 1 \qquad\qquad \alpha_2\,\xi + \beta_2\,\eta = 1.$$

Равенство (24) будетъ условіемъ, чтобы двѣ точки лежали на общей прямой, проходящей черезъ точку O; равенство (25) условіемъ, чтобы прямыя OM_1, OM_2 соединяющія данныя точки съ O были бы взаимно перпендикулярны.

Въ случаѣ рав. (24) будемъ говорить о *параллельности точекъ* относительно O, въ случаѣ (25) — *перпендикулярности точекъ*.

Разстоянію точки отъ прямой будетъ отвѣчать понятіе о разстояніи прямой отъ точки (относительно точки).

Это разстояніе данной прямой отъ прямой MN соединяющей точку N пересѣченія $ON \perp OM$ съ данной прямой съ данной точкой M.

Двѣ плоскости

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 1$$

$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 1$$

параллельны при

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \tag{26}$$

перпендикулярны при

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0 \tag{27}$$

Равенство (26) есть условіе параллельности точекъ:

$$\alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta = 1$$

$$\alpha_4 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta = 1$$

состоящей въ томъ, что M_1, M_2 и O на одной прямой.

Равенство (27) условіе перпендикулярности т. е. того, что $OM_1 \perp OM_2$.

Изслѣдуемъ, что отвѣчаетъ перпендикулярности плоскости и прямой.

Прямая — L перпендикулярна плоскости P, если двѣ плоскости переходящія черезъ нее P_1, P_2 перпендикулярны къ P.

Для полученія взаимнаго понятія перпендикулярности и прямой относительной точки O слѣдуетъ взять точку M

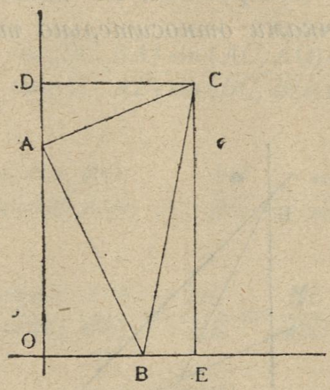
перпендикулярную къ M_1, M_2 лежащимъ на прямой L. Такая точка лежитъ на прямой, перпендикулярной къ плоскости, проходящей черезъ точку O и прямую L.

Если требуется взять точку $\perp$ къ прямой въ данной плоскости, принадлежащей прямой L, то слѣдуетъ взять пересѣченіе упомянутой выше OM съ этой плоскостью.

Опусканію изъ данной точки M перпендикуляра къ плоскости P отвѣчаетъ проведеніе въ плоскости P перпендикуляра къ M — это сводится на опредѣленію прямой пересѣченія плоскости P съ плоскостью $\perp$ къ OM.

Параллельности двухъ прямыхъ отвѣчаетъ принадлежность прямыхъ одной плоскости проходящей черезъ точку O.

Въ Декартовыхъ координатахъ положенія точки опредѣляется разстояніями ея отъ двухъ взаимно перкулярныхъ прямыхъ, взятыхъ съ надлежащими знаками — Взаимно-Декартовой системой координатъ будетъ та, въ которой прямая опредѣляется разстояніями отъ двухъ взаимноперпендикулярныхъ (относительно точки O) точекъ XY.



Черт. 5.

Если X_1 Y двѣ точки положеніе которыхъ извѣстно (двѣ координатныя точки), то, проведя черезъ X и Y: $OX \perp OY$ отличаемъ точки пересѣченія прямой L съ OX и OY.

Взаимно-Декартовы координаты прямой L:

абсцисса $\underline{x} = (AB^0, AY)$

ордината $\underline{y} = (AB^0, BX)$

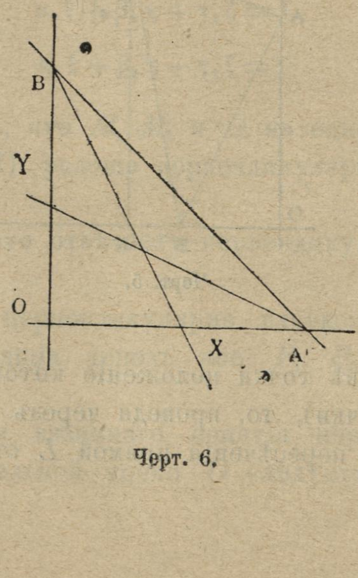
или

$$\underline{x} = \frac{1}{OA} \frac{\sin(AB, AY)}{\sin(AB, OX) \sin(BX, BX)}$$

$$\underline{y} = \frac{1}{OB} \frac{\sin(AB, BX)}{\sin(AB, OY) \sin(BX, OY)}$$

Взаимно - Декартовыми координатами въ пространствѣ слѣдуютъ считать разстоянія (относит. точки O) данной плоскости P отъ плоскостей AXZ, BXZ, CXY, гдѣ ABC пересѣченія P съ OX, OY, OZ, X, Y, Z координатныя точки.

§ 7. Понятіемъ взаимнымъ — углу между прямыми будетъ слѣдующее, которое мы по аналогіи назовемъ *угломъ между двумя точками относительно точки* O.



Черт. 6.

$tg\,\omega$, гдѣ ω уголъ между прямыми AB, AC опредѣлится какъ отношеніе

$$\frac{BC}{AC}$$

гдѣ $BC \perp AC$ катеты, AB гипотенуза прямоугольнаго трехугольника (или лучше сказать, трехсторонника).

Прямоугольному трехсторроннику во взаимной Геометріи отвѣчаетъ трехточечникъ ABC, такой, что точки A, B перпендикулярны т. е. лежатъ на прямыхъ OA, OB взаимно перпендикулярныхъ и проходящихъ черезъ точку O.

$tg\,\omega$, гдѣ ω уголъ между точками A, C опредѣляется отношеніемъ разстояній прямыхъ (CB, AB) къ (AC, AB) или отношеніями двухъ величинъ

$$\frac{1}{OB}\,\frac{\sin(BC, BA)}{\sin(BC, BO)\sin(BA, BO)}$$

$$\frac{1}{AO}\,\frac{\sin(AC, AB)}{\sin(AC, AO)\sin(AB, AO)},$$

такъ что

$$tg\,\omega = \frac{OA}{OB}\,\frac{\sin(BC, BA)\sin(AC, AO)\sin(AB, AO)}{\sin(AC, AB)\sin(BC, BO)\sin(BA, BO)}$$

Но

$$\frac{OA}{OB} = \frac{\sin(BA, BO)}{\sin(AB, AO)} \qquad \frac{AC}{BC} = \frac{\sin(BC, BA)}{\sin(AC, AB)}$$

такъ что

$$tg\,\omega = \frac{AC\sin(AC, AO)}{BC\sin(BC, BO)} = \frac{DC}{DE} = \frac{DC}{DO} = tg\,AOC$$

и

$$\omega = \angle AOC$$

Такимъ образомъ *за уголъ между точками A, C мы должны принять уголъ, подъ которымъ изъ точки O видно разстояніе AC.*

Приведемъ примѣры построенія взаимной теоремы съ замѣной угла между прямыми угломъ между точками.

Для кривой 3-го порядка имѣемъ теорему:

Ангармоническое отношеніе четырехъ касательныхъ, проведенныхъ изъ любой точки кривой постоянно.

Для полученія взаимной теоремы должны замѣнить

касательную — точкой кривой,
точку — касательной,
кривую 3-го порядка — кривой 3-го класса.

Уголъ между прямыми — уголъ между точками или, что тоже, угломъ между прямыми соединяющими точки съ точкой O.

Мы получаемъ теорему, утверждающую постоянство сложнаго отношенія:

$$\frac{\sin(Oa, Ob)}{\sin(Oa, Od)} : \frac{\sin(Oc, Ob)}{\sin(Oc, Od)}$$

гдѣ Oa, Ob, Oc, Od прямыя соединяющія 4 точки: a, b, c, d пересѣченія кривой 3-го класса съ касательной къ ней, съ точкой O или, что тоже, постоянство ангармоническаго отношенія 4 точекъ: a, b, c, d.

§ 8. Въ Дифференціальной Геометріи устанавливается понятіе объ *эволютѣ*, какъ огибающей нормалей плоской кривой.

Взаимнымъ понятіемъ будетъ нѣкоторое геометрическое мѣсто, которое мы назовемъ *ортогоналіей*.

Понятіе это согласно вышеизложенному должно быть установлено слѣдующимъ образомъ.

Ортогоналія — геометрическое мѣсто точекъ N пересѣченій прямой $ON \perp OM$ (гдѣ M точка кривой) съ касательной.

Уравненіе эллипса въ Плюкеровыхъ кординатахъ:

$$\frac{\xi^2}{\underline{a}^2} + \frac{\eta^2}{\underline{b}^2} = 1$$

$$\underline{a} = \frac{1}{a}, \qquad \underline{b} = \frac{1}{b}$$

если уравненіе въ Декартовыхъ координатахъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Уравненіе ортогонали въ Плюкеровыхъ координатахъ (тоже, что уравненіе эволюты въ Декартовыхъ т. е.)

$$\left(\frac{\xi}{\underline{\alpha}}\right)^{2/3}+\left(\frac{\eta}{\underline{\beta}}\right)^{2/3}=1,$$

гдѣ

$$\underline{\alpha}=\frac{b^2-a^2}{\underline{a}}=\frac{a^2-b^2}{ab^2}\qquad \underline{\beta}=\frac{b^2-a^2}{\underline{b}}=\frac{a^2-b^2}{a^2b}$$

Переходя къ Декартовымъ координатамъ получаемъ

$$\frac{A^2}{x^2}+\frac{B^2}{y^2}=1$$

$$A=\frac{2a^2b^2}{3(a^2-b^2)}\qquad B=\frac{2b^2a^2}{3(a^2-b^2)}$$

Это хорошо изслѣдованная кривая, извѣстная подъ названіемъ Круциферы или Kreuzcurve (gino Loria t. I p. 210. Teixeira). Извѣстно построеніе этой кривой съ помощью элипса

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1.$$

Точно такимъ же образомъ получаемъ уравненіе ортогонали гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ортогоналія гиперболы — тоже хорошо изслѣдованная кривая Понтифера

$$\frac{A^2}{x^2}-\frac{B^2}{y^2}=1$$

Для параболы

$$\underline{\eta}^2=2\,\underline{p}\,\underline{\xi}\qquad \underline{p}=\frac{1}{p}$$

Уравненіе ортогонали въ Плюкеровыхъ координатахъ

$$\eta^2 = \frac{8(\xi - p)^3}{27p}$$

а въ Декартовыхъ

$$x^3 = 2(p-x)y^2$$

Это уравненіе тоже весьма хорошо извѣстной кривой циссоидальнаго типа.

Радіусу кривизны отвѣчаетъ — разстояніе между касательными къ данной кривой къ ортогонали въ соотвѣтствующей точкѣ.