ъ XXI (1909), № 4.

Протоколы засѣданій

Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Варшавскомъ Университетѣ

издаваемые подъ редакціей секретаря Общества.

Годъ XXI (1909), № 4.

ВАРШАВА
Типографія „Русскаго Общества", пл. Св. Александра 4.
1910.

СОДЕРЖАНІЕ № 4.

Протоколы засѣданій

Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Варшавскомъ Университетѣ

издаваемые подъ редакціей секретаря Общества.

Годъ XXI (1909—1910.)

ВАРШАВА
Типографія „Русскаго Общества“, пл. Св. Александра 4.

1910.

О геометрическихъ построеніяхъ съ помощью алгебраическихъ кривыхъ.

Д. Мордухай-Болтовского.

§ 1. *Классификація построеній.*

Съ помощью циркуля и линейки возможны только слѣдующія построенія:

1) прямой, проходящей черезъ двѣ заданныя точки,
2) точекъ пересѣченія двухъ прямыхъ,
3) прямой и круга,
4) двухъ круговъ.

и затѣмъ всѣ построенія, которыя могутъ быть разложены на рядъ этихъ элементарныхъ построеній.

Элементарныя построенія представляютъ ничто иное, какъ построенія корней уравненіи 1-ой и 2-ой степени съ коэффиціентами, равными раціональнымъ функціямъ отъ извѣстныхъ намъ величинъ a_1, a_2... съ раціональными коэффиціентами (или, какъ мы будемъ короче выражаться раціональными въ области a_i

$$\alpha_0^{(1)}(a_1,a_2....a_k)\,\xi^{(1)\,m}+\alpha_1^{(1)}(a_1,a_2...a_k)\,\xi^{(1)m-1}+....$$

$$\alpha_m^{(1)}(a_1,a_2...a_k)=o \qquad (1_1)$$

гдѣ $m=1.2$

Такое построеніе будемъ называть элементарной операціей 1-го класса, уравненіе (1_1) основнымъ уравненіемъ 1-го класса.

Значеніе m будемъ порядкомъ операціи.

Пусть $\xi_1^{(1)}$, $\xi_2^{(1)}$, $\xi_3^{(1)}$... $\xi_{k_1}^{(1)}$

выраженія 1-го класса т. е. выраженія, полученныя при помощи операціи 1-го класса.

При помощи циркуля и линейки (иначе говоря при помощи круга и прямыхъ) возможно построеніе выраженій

$$R\left(a_1, a_2 \ldots a_k, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)} \ldots \xi_{k_1}^{(1)}\right)$$

раціональныхъ въ области a_i, $\xi_i^{(1)}$ которыя будемъ считать общими выраженіями 1-го класса.

Построеніе корня уравненія

$$\alpha_0^{(2)} \xi^{(2)m} + \alpha_{(1)}^{(2)} \xi^{(2)m-1} + \ldots \alpha_m^{(2)} = o \qquad (1_2)$$

$$m = 1,\ 2,$$

гдѣ $\alpha_i^{(2)}$ выраженія 1-го класса будемъ считать элементарной операціей 2-го класса, ур. (1_2) основнымъ уравненіемъ 2-го класса, а выраженіе

$$R(a_1, a_2 \ldots a_k, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)} \ldots \xi_{k_1}^{(1)}, \xi_1^{(2)} \ldots \xi_{kl}^{(2)} \qquad (2_2)$$

выраженіемъ 2-го класса.

Такимъ образомъ устанавливается понятіе объ элементарныхъ операціяхъ, основныхъ уравненіяхъ и выраженіяхъ l-го класса.

Построеніе корня уравненія

$$\alpha_0^{(l)} \xi^{(l)m} + \alpha_1^{(l)} \xi^{(l)m-1} + \ldots \alpha_m^{(l)} = o \qquad (1_l)$$

$$m = 1.2$$

—

гдѣ $\alpha_i^{(l)}$ выраженія l—1-го класса, будемъ считать элементарной операціей l-го класса а выраженіе

$$R\left(a_1, a_2 \ldots a_k, \xi_1^{(1)} \ldots \xi_1^{(2)} \ldots \xi_1^{(l)} \ldots \xi_{k_l}^{(l)}\right) \qquad (2_l)$$

выраженіемъ l-го класса.

Всякое выраженіе, которое можно построить съ помощью циркуля и линейки (иначе говоря, при помощи прямыхъ и круговъ) представляетъ выраженіе этого типа опредѣленнаго класса l.

Если мы къ циркулю и къ линейкѣ присоединимъ инструменты, вычерчивающія другія алгебраическія кривыя второго или высшихъ порядковъ, то очевидно мы получимъ тотъ же результатъ, ту же форму строющихся выраженій и ту же классификацію на порядки и классы.

Разница будетъ только въ томъ, что число m будетъ имѣть значеніе не только 1, 2, но также и другія.

Если мы введемъ инструментъ, вычерчивающій кривую второго порядка, то для насъ сдѣлается возможнымъ построеніе пересѣченія коническихъ сѣченій между собой, или, что тоже, построеніе корней уравненій 3-ей и 4-ой степени съ коэффиціентами, равными нѣкоторымъ раціональнымъ функкціямъ a_1 a_2... т. е. мы можемъ положить

$$m = 1.\ 2.\ 3.\ 4.$$

Если мы возьмемъ построеніе съ помощью алгебраическихъ кривыхъ всѣхъ порядковъ по p включительно, то мы въ состояніи будемъ строить также уравненіе (1_1) степеней до $p^2 = n$ включительно. Тогда

$$m = 1.\ 2.\ 3 \ldots n$$

Пусть нѣкоторая геометрическая задача объ опредѣленіи x приводится кт уравненію

$$c_0 x^q + c_1 x^{q-1} + \ldots c_{q-1}\, x + c_q = 0 \qquad (3)$$

гдѣ c_0, c_1.. c_q раціональны въ области a_i

Для того, чтобы x можно было построить съ помощью алгебраическихъ кривыхъ порядковъ до p включительно, необходимо, чтобы x было формы (2_l), иначе выражаясь чтобы уравненіе (3) рѣшалось съ помощью уравненій степеней 1, 2, 3... n, или, еще иначе выражаясь, чтобы выраженіе хотя одного изъ корней ур. (3) можно было бы построить съ помощью уравненій степеней 1, 2, 3... n.

§ 2. *О построеніи корней алгебраическихъ уравненій.*

Задача о рѣшеніи уравненія (3) съ помощью уравненій степеней не выше n есть прямое обобщеніе задачи о рѣшеніи уравненія съ помощью одних̃ъ квадратныхъ радикаловъ.

Въ томъ случаѣ, когда сказано, что рѣшеніе уравненія (3) не можетъ быть достигнуто съ помощью уравненій степени не выше $n = p^2$, то можно утверждать, что геометрическое построеніе x не можетъ быть произведено съ помощью алгебраическихъ кривыхъ порядковъ $\leqslant p$.

Но мы не можемъ утверждать, что корни всякаго уравненія (1_1) порядка $m \leqslant n$ могутъ быть построены съ помощью алгебраическихъ кривыхъ порядковъ $\leqslant p$, поэтому мы не можемъ въ общемъ случаѣ заключать, что, какъ только мы докажемъ, что рѣшеніе уравненія (3) достигается съ помощью уравненія степени $\leqslant p^2$, то докажемъ и возможность построенія x съ помощью вышеупомянутыхъ алгебраическихъ кривыхъ.

Но въ двухъ случаяхъ это обратное положеніе будетъ вѣрно.

Въ случаѣ *построенія съ помощью циркуля и линейки* (иначе говоря съ помощью прямыхъ и круговъ) мы можемъ утверждать, что корень всякаго уравненіе 1-ой и 2-ой степени можетъ быть построенъ съ помощью циркуля и линейки; откуда слѣдуетъ и вышеупомянутое обратное положеніе.

Въ случаѣ *построенія съ помощью коническихъ сѣченій* мы можемъ утверждать, что корень всякаго уравненія : 1, 2, 3, 4 степеней можетъ быть съ помощью ихъ построенъ.

Въ самомъ дѣлѣ для построенія корня неприводимаго уравненія

$$\alpha_0\xi^3 + \alpha_1\xi^2 + \alpha_2\xi + \alpha_3 = o \qquad (4)$$

беремъ двѣ кривыя

параболу $\qquad y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (5)$

гиперболу $\qquad xy + \delta = o \qquad (6)$

Абсциссы ихъ точекъ пересѣченія опредѣляются уравненіемъ

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = \qquad (7)$$

Если уравненіе (4) имѣетъ съ (7) общій корень, то въ силу его неприводимости, уравненію (7) будутъ удовлетворять всѣ корни уравненія (4), что даетъ

$$\frac{\alpha_0}{\alpha}=\frac{\alpha_1}{\beta}=\frac{\alpha_2}{\gamma}=\frac{\alpha_3}{\delta}$$

Отношеніе остается произвольнымъ. Полагая его равнымъ 1 получаемъ всѣ рѣшенія ур. (4) какъ абсциссы точекъ пересѣченія кривыхъ

$$y=\alpha_0 x^2+\alpha_1 x+\alpha_2$$
$$xy+\alpha_3=o$$

Для построенія корня уравненія

$$\alpha_0\xi^4+\alpha_1\xi^3+\alpha_2\xi^2+\alpha_3\xi+\alpha_4=o \qquad (8)$$

беремъ кривыя

параболу $y = x^2+\beta x+\gamma$ (9)

параболу $y^2+\delta x+\varepsilon=o$ (10)

Чтобы абсциссы точекъ пересѣченія кривыхъ (9) и (10) давали корни уравненія (8) необходимо, чтобы имѣло мѣсто тождество

$$(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^2+\delta x+\varepsilon=\mu(\alpha_0 x^4+\alpha_1 x^3+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x+\alpha_4),$$

которое даетъ рядъ равенствъ:

$$\alpha^2=\mu\alpha_0 \qquad \beta^2+2\alpha\gamma=\mu\alpha_2 \qquad \gamma^2+\varepsilon=\mu\alpha_4$$
$$2\alpha\beta=\mu\alpha_1 \qquad 2\beta\gamma+\delta=\mu\alpha_3$$

Взявъ для μ произвольное значеніе, мы можемъ при помощи циркуля и линейки построить α

по α.. β, какъ выр. раціонально черезъ μ, α_1 α

по α, β... γ

по β, γ... δ

по γ... ε

Переходя отъ случая коническихъ сѣченій къ алгебраическимъ кривымъ высшихъ порядковъ, мы можемъ слѣдующимъ образомъ обобщить полученные результаты.

Корни уравненія

$$\alpha_0\xi^r+\alpha_1\xi^{r-1}+\dots\alpha_r=o$$

гдѣ $r=2s-h$, h положительное число не больше s, могутъ быть построены съ помощью кривыхъ s-го порядка.

Если $h > o$, то ξ можно разсматривать какъ абсциссы точекъ пересѣченія кривыхъ

$$y = \alpha x^{s} + \alpha^{(1)} x^{s-1} + \ldots \alpha^{(s)}$$

$$y^2 + x^{s-h-1} + \beta^{(1)} x^{s-h-2} + \ldots \beta^{(s-h)} = o$$

Въ случаѣ $h = o$ эти кривыя замѣняются слѣдующими:

$$y = ax^{s} + \alpha' x^{s-1} + \ldots \alpha^{(s)}$$

$$y^2 + \beta x^{s-1} + \beta^{(1)} x^{s-2} + \ldots \beta^{(s-1)} = o$$

Легко видѣть, что

$$\alpha_1 \; \alpha^{(1)}{}_1 \ldots \alpha^{(s)}{}_1 \; \beta, \; \beta^{(1)} \ldots \; \beta^{(s-1)}$$

въ обоихъ случаяхъ выражаются такъ, что могутъ быть построены при помощи циркуля и линейки.

Отсюда заключаемъ, что въ случаѣ построенія съ помощью алгебраическихъ кривыхъ высшихъ порядковъ вмѣсто упомянутой выше теоремы имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема:

Если уравненіе (3) разрѣшается съ помощью уравненія не выше n-ой степени, то корни его могутъ быть построены съ помощью алгебраическихъ кривыхъ не выше $E\left(\frac{n}{2}\right)$ *порядка.*

§ 3. О приготовленныхъ выраженіяхъ.

Возвращаясь къ алгебраической задачѣ, поставленной въ концѣ § 1, замѣтимъ, что одно и то же выраженіе для корня уравненія (3) можетъ быть построено различнымъ образомъ съ бо́льшимъ или меньшимъ числомъ элементарныхъ операцій n, $n-1$, $n-2$.. 2-го порядковъ.

Изъ безконечной совокупности этихъ построеній выбираемъ тѣ, которыя содержатъ наименьшее число $N(n)$ элементарныхъ операцій высшаго т. е. n-го порядка.

Изъ выраженій съ $N(n)$ элементарныхъ операцій n-го порядка выбираемъ тѣ, которыя содержатъ наименьшее число $N(n-1)$ операціи $n-1$-го порядка и т. д.

Изъ выраженій съ $N(n)$ эл. операцій n-го порядка, $N(n-1)$ операц. $n-1$-го.... $N(k+1)$ операц. $k+1$-го порядка выбираемъ выраженія съ наименьшимъ числомъ операцій κ-го порядка.

Въ результатѣ, дойдя до $\kappa = 2$ получимъ выраженія, которыя мы назовемъ *приготовленными*.

Замѣтимъ, что, если выраженіе приготовленное, то не можетъ существовать уравненіе

$$\beta_0^{(l)} \xi^{(l)s} + \beta_1^{(l)} \xi^{(l)s-1} + \ldots \beta_s^{(l)} = o \quad (11)$$

гдѣ $\beta_j^{(l)}$ раціональны въ области a_i, другихъ элемент. l-го класса $\xi_1^{(l)}$, $\xi_2^{(l)} \ldots$ элем. l—1-го класса $\xi_1^{(l-1)}$, $\xi_2^{(l-1)} \ldots$ и т. д.

Въ самомъ дѣлѣ, въ противномъ случаѣ, мы могли бы ξ вмѣсто ур. (1l) опредѣлять ур. (11) и принимать послѣднее за основное.

Тогда число операцій n-го порядка мы уменьшили бы па единицу, увеличивъ число операцій нисшихъ порядковъ.

Откуда слѣдовало бы, что взятое выраженіе противно условію не приготовлено.

§ 4. Необходимое условіе для возможности построенія корня алгебраическаго уравненія съ помощью алгебр. кривыхъ опредѣленныхъ порядковъ.

Всякое выраженіе l-го класса (2l) легко привести къ виду

$$B_0 + \sum_{j=1}^{j=m-1} B_j \xi_1^{(l)} = o \quad (12)$$

гдѣ B_0, B_i расположены въ области a_i, другихъ чѣмъ $\xi_1^{(l)}$ выраженій l-го класса и нисшаго классовъ.

Предположимъ, что корень уравненіе (3)

$$c_0 x^q + c_1 x^{q-1} + \ldots c_{q-1} x + c_q = o \quad (3)$$

которое всегда можно предполагать неприводимымъ, можетъ быть построенъ съ помощью операцій 1 2 3.. n порядковъ, такъ что

$$x = B_0 + \sum_{j-1}^{j=m_1-1} B_j\, \xi_1^{(1)j} \qquad (12)$$

Подставляя въ лѣвую часть уравненіе (3) это выраженіе вмѣсто x получаемъ уравненіе

$$C_0 + \sum_{j=1}^{j=m_1-1} C_j\, \xi_1{}^j = o \qquad (13_1)$$

гдѣ Cj раціональны въ области a_i, $\xi_2^{(1)}$, $\xi_{3..}^{(1)}$ $\xi_1^{(1-1)}$, $\xi_{2,.,,,,,}^{(1-1)}$ какъ B_0, Bj.

Тогда на основаніи предыдущаго § коэффиціенты ур. (13) порознь равны нулю:

$$C_j = o \qquad (14_1)$$
$$j = o,\ 1.2..m_1-1$$

оно остается въ силѣ по замѣнѣ $\xi_1^{(1)}$ какими угодно корнями основного уравненія

$$\alpha_{01}{}^{(1)}\, \xi_1^{(1)m_1} + \alpha_{11}^{(1)}\, \xi_1^{(1)m_1-1} + \ldots \alpha_{m_1}^{(1)} = o \qquad (1_1)$$

$$\xi_{11}^{(1)},\quad \xi_{12}^{(1)} \ldots$$

Но

$$C_0 + \sum_{j=1}^{j=m_1-1} C_j\, \xi_{1j}^{(1)} = c_0 x_j{}^q + c_1 x_j{}^{q-1} + \ldots . c_q$$

гдѣ xj получается изъ x замѣной $\xi_1^{(1)}$ на $\xi_{1j}^{(1)}$

Такимъ образомъ (уравненіе (3) удовлетворяетъ $x = x_j$ т. е. выраженіе (12) при какихъ угодно корняхъ ур. (1_1).

Въ свою очередь каждое изъ уравненій (14_1) можетъ быть представлено въ видѣ

$$D_0 + \sum_{j=1}^{j=m_2-1} D_j\, \xi_2^{(1)j} + o \qquad (13_2)$$

и мы должны имѣть

$$D_j = 0$$

$$j = 0,\ 1, 2.\ \overline{m_2} - 1$$

откуда заключаемъ, что уравненія (14_1) и (13_1) остаются въ силѣ по замѣнѣ $\xi^{(l)}_2$ корнями основного уравненія

$$\alpha^{(l)}_{02}\ \xi^{(l)m_2}_2 + \alpha^{(l)m_2-1}_{12} + \alpha^{(l)}_{m_2 2} = 0$$

его опредѣляющаго:

$$\xi^{(l)}_{21},\ \xi^{(l)}_{22}..$$

Отсюда слѣдуетъ, что уравненію (3) удовлетворяетъ выраженіе (12) при $\xi^{(l)}_1$, $\xi^{(l)}_2$... равныхъ какимъ угодно корнямъ уравненій (1^1_l) и (1^2_l)

Разсуждая такимъ образомъ далѣе легко убѣждаемся, что тоже относится и къ другимъ элементарнымъ выраженіямъ сперва l-го затѣмъ l—1-го класса и т. д., т. е. уравненію (3) удовлетворяетъ выраженіе (12) по замѣнѣ всѣхъ элем. выраженій въ него входящихъ всевозможными корнями уравненій (1_1) (1_{l-1})... ихъ опредѣляющихъ.

Обозначая эти выраженія черезъ x_j составляемъ произведеніе

$$(x - x_1)\ (x - x_2)...\ (x - x_j)...$$

для всѣхъ значеній x_j

Мы получаемъ тогда слѣдующее уравненіе, которое имѣетъ своими корнями корни уравненіе (3)

$$d_0 x^{\omega} + d_1 x^{\omega - 1} + ...\ d_{\omega} = 0 \qquad (15),$$

гдѣ d_i

раціональны въ области a_i

степени

$$\omega = m_1 m_2 m_3 ...$$

равной произведенію степеней всѣхъ основныхъ уравненій.

Можно также написать

$$\omega = n^{\alpha_1} (n-1)^{\alpha_2} (n-2)^{\alpha_3} \dots$$

гдѣ α_1, α_2, α_3... числа операцій, n, $\overline{n}-1$, $\overline{n}-2$... порядковъ или, наконецъ,

$$\omega = a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} a_3^{\gamma_3} \dots a_n^{\gamma_n}$$

гдѣ a_1, a_2, a_3... a_n прямыя числа не больше n.

Уравненіе (5) имѣетъ своими корнями только корни уравненія (3).

Но, если уравненіе (3), которое всегда можетъ предполагать неприводимымъ имѣетъ съ (15) общій корень, то всѣ корни ур. (3) удовлет. (15)

$$d_0 x^{\omega} + d_1 x^{\omega-1} + \dots d_{\omega-1} x + d_{\omega} = (c_0 x^q + c_1 x^{q-1} + \dots c_{q-1} x + c_q)$$
$$(d_0^{(1)} x^{\omega_1} + d_1^{(1)} x^{\omega_1 - 1} + \dots d_{\omega_1 - 1}^{(1)} x + d_{\omega_1}^{(1)})$$

Уравненіе (15) поэтому приводимо и часть корней удовлетворяетъ уравненію

$$d_0^{(1)} x^{\omega_1} + d_1^{(1)} x^{\omega_1 - 1} + \dots d_{\omega_1 - 1}^{(1)} x + d_{\omega_1}^{(1)} = 0 \qquad (15^{(1)}),$$

гдѣ $d_j^{(1)}$, какъ и d_j раціональны въ области a_i

Поступая съ ур. $15(^1)$ такъ, какъ мы поступали съ (15) находимъ:

$$d_0^{(1)} x^{\omega_1} + d_1^{(1)} x^{\omega_1 - 1} + \dots d_{\omega_1 - 1}^{(1)} x + d_{\omega_1}^{(1)} =$$
$$= \left(c_0 x^q + c_1 x^{q-1} + \dots c_{q-1} x + c_q\right) \left(d_0^{(2)} x^{\omega_2} + \dots d_{\omega_2}^{(2)}\right)$$

и уравненіе

$$d_0^{(2)} x^{\omega_2} + d_1^{(2)} x^{\omega_2 - 1} + \dots d_{\omega_2 - 1}^{(2)} x + d_{\omega_2}^{(2)} = 0 \qquad (15^{(2)})$$

Такимъ образомъ можемъ поступать до тѣхъ поръ пока не получимъ

$$d_0^{(j-1)} x^{\omega_{j-1}} + d_1^{(j-1)} x^{\omega_{j-1}-1} + \ldots\, d_{\omega_{j-1}-1}^{(j-1)} x + d_{\omega_{j-1}}^{(j-1)} =$$

$$\left(c_0 x^q + c_1 x^{q-1} + \ldots c_{q-1} x + c_q\right) \left(d_0^{(j)} x^{\omega_j} + \ldots d_{\omega_j}^{(j)}\right)$$

гдѣ

$$\omega_j \qquad q$$

Но тогда $\omega_j = o$, ибо иначе мы имѣли бы уравненіе

$$d_0^{(j)} x^{\omega_j} + d_1^{(j)} x^{\omega_j - 1} + \ldots\, d_{\omega_j - 1}^{(j)} x + d_{\omega_j}^{(j)} = o \quad (15^{(j)})$$

степени ниже (3) и этому уравненію удовлетворялъ бы корень ур. (3), чего быть не можетъ въ силу предположенной неприводимости уравненія (3)

Такимъ образомъ полиномъ

$$d_0 x^{\omega} + d_1 x^{\omega-1} + \ldots d_{\omega-1} x + d_{\omega}$$

дѣлится на цѣло на

$$c_0 x^q + c_1 x^{q-1} + \ldots\, c_{q-1} x + c_q$$

Отсюда заключаемъ, что если одинъ корень неприводименъ уравненія

$$c_0 x^q + c_1 x^{q-1} + \ldots\, c_{q-1} + x c_q = o \qquad (3)$$

можетъ быть построенъ съ помощью уравненій низшихъ степеней, то тоже относится и ко всѣмъ остальнымъ корнямъ.

Кромѣ того, $\omega = a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} a_3^{\gamma_3} \ldots a_n^{\gamma_n}$ должно дѣлиться на q.

Отсюда слѣдуетъ, что *для того, чтобы корень неприводимаго уравненія*

$$c_0 x^q + c_1 x^{q-1} + \ldots c_{q-1} x + c_q = o$$

можно было бы построить съ помощью уравненій $m \geqslant n$ степени (или на геометр. языкѣ съ помощью алгебраическихъ кривыхъ $m \leqslant n$-го порядка) необходимо, чтобы: q *разлагалось бы только на такіе простые множители, которые дѣлятъ числа* 1, 2, 3.... n

§ 5. *О дѣленіи угла на пять частей.*

Эта теорема даетъ возможность во многихъ случаяхъ доказать невозможность построеній съ помощью алгебраическихъ кривыхъ опредѣленнаго порядка, въ частности невозможность построенія съ помощью циркуля или линейки или съ помощью коническихъ сѣченій.

Основываясь на частномъ случаѣ этой теоремы можно доказать невозможность трисекціи угла съ помощью циркуля и линейки.

Можно также доказать невозможность дѣленія на 5 частей съ помощью коническихъ сѣченій, кромѣ опредѣленныхъ частныхъ значеній для угла.

Въ силу того, что здѣсь

$$m = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$
$$q = 5$$

такъ какъ уравненіе опредѣляющее

$$x = 2cs\varphi$$

въ

$$a = cs5\varphi$$

слѣдующее

$$x^5 - 5x^3 + x - 2a = o \qquad (17)$$

то въ виду того, что $q = 5$ содержитъ простой множитель 5, не входящій въ 1, 2, 3, 4, то для возможности построенія необходима приводимость ур. (17).

Но легко видѣть, что для всякаго а (или для всякаго φ) это не можетъ имѣть мѣста.

Возьмемъ а равнымъ раціональному числу $\frac{p}{q}$.

Въ случаѣ приводимости ур. (3) возможны случаи, когда лѣвая часть уравненія (17) разбивается на множители

1) $x-\alpha \qquad x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$
2) $x^2+\alpha x+\beta \qquad x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$,

гдѣ α, β, γ, δ, ε раціональныя числа.

Но не для всякаго a лѣвая часть уравненія (17) дѣлится на ($x - \alpha$), иначе говоря, уравненіе (17) имѣетъ раціональный корень или что тоже уравненіе

$$y^5 - 5q^2y^3 + 5q^4y - 2pq^4 = o \quad (18)$$

Такъ какъ q число цѣлое, то уравненіе

$$(5y - 2p)q^4 - 5y^3q^2 + y^5 = o$$

разрѣшенное относительно q должно дать для q раціональное значеніе Но это предполагаетъ, что

$$\sqrt{5y^6 + 8\,py^5} = y^3\sqrt{5 + \frac{8p}{y}}$$

число раціональное или что

$$5 + \frac{8p}{y} = \omega^2$$

гдѣ ω^2 раціональное число. Отсюда

$$y = \frac{8p}{\omega^2 - 5} = \frac{8\,p\mu^2}{\lambda^2 - 5\mu^2} \qquad (19)$$

Такимъ образомъ p должно быть такимъ, что $8p$ содержитъ множитель типа $\lambda^2 - 5\mu^2$. 8 имѣетъ множитель этого типа, если взять

$$\lambda = 3,\ \mu = 1 \qquad \lambda^2 - 5\mu^2 = 9 - 5 = 4$$

Въ этомъ случаѣ $\qquad y = 2p$

Но тогда согласно уравненію (18)

$$4p^4 - 5q^2p^2 + q^4 = o$$

$$q^2 = 4p^2 \text{ или } p^2$$

откуда

$$q = \pm 2p \text{ или } \pm p$$

если $\frac{p}{q}$ дробь сокращается, то необходимо, чтобы $p = \pm 1$, $q = 2$

или $p = 1$ и $q = 1$

Въ этомъ случаѣ $cs5\varphi = \pm\frac{1}{2}$ или $cs5\varphi = \pm 1$

$$\begin{array}{l|l} \varphi = 12^0,\ 60^0 & 24^0,\ 48^0 \\ \varphi = 72^0 & 36^0 \end{array}$$

Первый случай представляетъ построеніе вписаннаго въ кругъ 30, 6, 15-ти, второй—5-ти, 10-ти угольника. Оба случая представляютъ случаи построенія съ помощью циркуля и линейки.

При $p = o$ условіе (19) удовлетворяется и мы, какъ легко видѣть имѣемъ

$$\varphi = 18^0,\ 54^0$$

этотъ случай даетъ построеніе 20-угольника тоже производимое съ помощью циркуля и линейки.

Остается случай, когда число p имѣетъ дѣлитель вида

$$\lambda^2 - 5\mu^2$$

(такъ какъ очевидно μ^2 и $\lambda^2 - 5\mu^2$ общихъ дѣлителей не имѣютъ если дробь $\frac{\lambda}{\mu}$ сокращена).

Линейныя дѣлители квадратичной формы *)

$$\lambda^2 - 5\mu^2 \quad (20)$$

$20z + 1,\ 9,\ 11,\ 19$

Поэтому условіе (19) не выполняется, если p не содержитъ простыхъ множителей этого вида.

Такимъ образомъ условіе (19) имѣетъ мѣсто только для исключительныхъ значеній p. Если p имѣетъ формы (20) то еще не слѣдуетъ отсюда возможность существованія цѣлаго корня уравненія (18).

Для q^2 мы получаемъ выраженіе

$$\frac{2^7 p^2}{(\omega^2 - 5)^2} \quad \frac{1}{5 \mp \omega}$$

$$\sqrt{\frac{2}{5 \mp \omega}}$$

---

*) *Чебышевъ.* Теорія сравненій СПБ. 1879. Таблицы въ концѣ книги.

должно быть раціональнымъ числомъ, откуда

$$\frac{5 \mp \lambda}{2\mu} = \rho^2$$

должно быть квадратомъ раціональнаго числа ρ
$5\mu \mp \lambda$, 2μ не могутъ имѣть иныхъ общихъ дѣлителей кромѣ $d = 2$

Въ самомъ дѣлѣ если $5\mu \mp \lambda = d$ $2\mu = d$, то получаемъ $\mp 2\lambda = (2\alpha - 5\beta)d$ откуда слѣдуетъ если $d > 2$, что λ, d, а μ, потому имѣютъ общій дѣлитель

Полагая $p^2 = \frac{u^2}{v^2}$, u, v цѣлыя числа мы будемъ имѣть

слѣдующіе возможные случаи

$$d = 1 \qquad 5\mu \mp \lambda = u^2 \quad 2\mu = v^2$$
$$d = 2 \qquad 5\mu \mp \lambda = 2u^2 \quad \mu = v^2$$

и для цѣлыхъ чиселъ ρ, мы должны имѣть слѣдующія формы

$$\mp 2\rho = 2u^2 - 5v^2$$
$$2\mu = v^2$$

или, что тоже

$$\mp\lambda = u^2 - 10w^2 \qquad \mu = 2w^2 \quad (21)$$

гдѣ u, w цѣлыя числа

или

$$\mp \lambda = 2u^2 - 5v^2$$
$$\mu = v^2 \qquad (22)$$

Такимъ образомъ нами не только доказана невозможность разложенія перваго типа лѣвой части уравненія (17) въ общемъ случаѣ, но указаны нѣкоторыя ариѳметическія условія, необходимыя для подобнаго разложенія указывающія на связь подобнаго рода вопросы съ ариѳмет. теоріей квадратичныхъ формъ.

Что касается до второго типа разложенія, то этотъ случай является невозможнымъ ни при какихъ раціональныхъ значеніяхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, дѣля

$$x^5 - 5x^3 + 5x - 2a$$

на $x^2 + \alpha x + \beta$

получаемъ въ остаткѣ

$$-\alpha(\alpha^2 - 5)x - (\alpha^2 + 2a)$$

откуда слѣдуетъ, что для дѣленія на $x^2 + \alpha x + \beta$ безъ остатка необходимо, чтобы

$$\alpha(\alpha^2 - 5) = o$$
$$\alpha\beta^2 + 2a = o$$

Единственное раціональное значеніе удовлетворяющее первому уравненію это

$$\alpha = o$$

Но тогда второе даетъ $a = o$, а это предполагаетъ, что $x^5 - 5x^3 + 5x - 2a$ имѣетъ множитель $x - \alpha_0$, гдѣ α_0 раціонально и мы получаемъ случай, который, долженъ быть отнесенъ къ первому типу.

§ 5. Условія, при которыхъ результатъ § 4 остается въ силѣ.

Если мы возьмемъ нормальное уравненіе

$$e_0 t^p + e_1 t^{p-1} + \ldots e_{p-1} t + e_p = o \quad (23)$$

т. е. такое, что всѣ его корни выражаются раціонально въ области e_i отъ одного изъ корней, то въ случаѣ возможности разрѣшенія этого уравненія съ помощью уравненій степеней 1. 2. 3 .... n, если одинъ изъ корней t_1 будетъ построенъ съ помощью элементарныхъ выраженій $\xi^{(l)}$, $\xi^{(l-1)}$... то съ помощью тѣхъ же выраженій будутъ построены и другіе корни уравненія (23) : t_2, $t_3 \ldots t_p$.

Если для t_1 выполнены условія теоремы § 4, т. е. не имѣютъ мѣста для элем. выраженій, въ t_1 входящихъ, уравненія типа (12), то тоже будетъ считаться и къ выраженіямъ t_2, $t_3 .. t_n$.

Предположимъ теперь, что уравненіе (23) служитъ резольвентой Галуа уравненія (3)

$$c_0 x^q + c_1 x^{q-1} \ldots + c_q = o \quad (3)$$

Если это послѣднее уравненіе въ предположеніи, что оно неприводимо, разрѣшимо съ помощью ур. степени 1.2.3...n, то тоже относится и ко (3), такъ какъ t_1, $t_2 \ldots t_p$ выражался раціонально черезъ x_1 $x_2 .. x_n$

Вмѣсто того, чтобы брать приговленное выраженіе для x_1, возьмемъ приготовленное выраженіе для t_1. Такъ какъ $x_1, x_2 \dots x_n$ выражаются раціонально въ области $c_i\ t_1$, то $x_1, x_2 \dots x_n$ будутъ содержать тѣ же элементарныя выраженія, что t_1 и слѣдовательно можно сказать, что между элем. выраженіями въ x_1 входящими не будутъ имѣть мѣста уравненія типа (11).

Поэтому результаты § 4 будутъ оставаться въ силѣ по замѣнѣ: „выраженіе корня ур. (3) приготовлено" условіемъ: „выраженіе корня резольвенты приготовлено".

Но тогда тѣ же условія будутъ имѣть мѣсто не только для $x_1, x_2 \dots x_q$ но и для раціональныхъ отъ нихъ функцій, въ частности для

$$\zeta_i = \sum x_1 x_2 x_3 \dots x_j$$

симметрической функціи отъ $x_1 x_2 \dots x_n$ n величинъ изъ числа корней ур. (3) такъ какъ ζ_i выразится раціонально въ области x_i въ t_1

Различныя значенія ζ_i, отвѣчающія различнымъ группамъ $x_1, x_2 \dots x_n$ будутъ получаться по замѣнѣ $\xi^{(l)}, \xi^{(l-1)}$ различными корнями основныхъ уравненій ихъ опредѣляющихъ.

При этомъ всѣ значенія должны удовлетворять уравненію степени

$$\sigma = \frac{q(q-1)\dots q-n+1)}{1.2..n}$$

$$l_0\zeta_j^\sigma + l_1\zeta_j^{\sigma-1} + \dots l_{\sigma-1}\ _j + l_\sigma = o \quad (24)$$

Если теперь ζ_j удовлетворяетъ неприводимому уравненію

$$m_0\zeta_j^\tau + m_1\zeta_j^{\tau-1} + \dots m_{-\tau 1}\ \zeta_j + m_\tau = o \quad (25)$$

$m_0\ m_1\ m_2 \dots$ раціональны въ области c_i, то въ силу неприводимости всѣ корни ур. (25) удовлетв. (24).

Вслѣдствіе же того, что доказано въ § 4 также всѣ корни ур. (24) удовлетворяютъ (25), откуда слѣдуетъ согласно § 4, что σ дѣлится на цѣло на τ.

§ 6. *Рѣшеніе уравненія съ помощью уравненій нисшихъ степеней.*

Если мы будемъ въ состояніи въ случаѣ возможности разрѣшенія уравненія

$$c_0 x^q + c_1 x^{q-1} + \dots c_{q-1} x + c_q = o \quad (3)$$

съ помощью уравненій не выше n-ой степени найти выраженіе для корня, то мы будемъ въ состояніи (согласно § 2) построить съ помощью алгебраическихъ кривыхъ не выше $E\left(\frac{n}{2}\right)$ -го порядка. Въ случаѣ $n=4$ мы будемъ въ состояніи построить x съ помощью коническихъ сѣченій.

Можно доказать, что задача о рѣшеніи уравненія (3) съ помощью уравненій нисшихъ степеней сводится къ опредѣленію цѣлыхъ корней нѣкоторыхъ алгебраическихъ уравненій и къ исчисленію симметрическихъ функцій т. е. къ задачамъ, рѣшеніе которыхъ хорошо извѣстно.

Мы ограничимъ наше изслѣдованіе частнымъ случаемъ, и въ виду того, что случай когда $n = 2$ уже изслѣдованъ въ математ. литературѣ *) (это случай рѣшенія съ помощью квадратныхъ корней) мы остановимся на случаѣ рѣшенія съ помощью уравненій степеней 2. 3. 4 (т. е. на задачѣ построенія корня ур. (3) съ помощью коническихъ сѣченій).

Замѣтимъ, что въ виду того, что уравненіе этой степени разрѣшимо съ помощью квадратныхъ и кубичныхъ радикаловъ т. е. иначе говоря съ помощью уравненій степеней $n = 2, 3$, поставленная нами задача равносильна задачѣ о разрѣшеніи уравненія съ помощью уравненій 2, 3 степеней.

Возьмемъ n корней уравненіе (3)

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \dots\ x_n$$
$$n = 2{,}3$$

и составимъ элементарныя симметрическія физикціи

$$\zeta_j = \sum x_1\ x_2\ x_3 \dots\ x_j$$

---

*) I. Petersen. Théorie des équations algébriques Paris 1897, p. 150.

Мы будемъ имѣть

$$x^n - \zeta_1 x^{n-1} + \zeta_2 x^{n-2} + \dots (-1)^n \zeta_n = o \quad (23)$$

$\zeta_1 \zeta_2 .. \zeta_n$ какъ допускающія ту же группу подстановки, что ζ_j на основаніи теоремы Лагранжа выражаются раціонально черезъ одну изъ этихъ величинъ, напр. ζ_j раціональной функціей въ области c.

Въ виду чего уравненіе (26) можно переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$x^n + \varphi_1(\zeta_j) x^{n-1} + \dots \varphi_n(\zeta_j) = o$$

гдѣ φ_j раціональныя функціи ζ_j въ области c_i.

Уравненіе опредѣляющее ζ_j

$$l_0\zeta_j^\sigma + l_1\zeta_j^{\sigma-1} + \dots l_{\sigma-1}\zeta_j + l_\sigma = o \quad (24)$$

$l_0, l_1 .. l_\sigma$ раціонально въ области c_i степени

$$\sigma = q\frac{(q-1)}{1\,2} \qquad n = 2$$

$$\sigma = q\frac{(q-1)\,(q-2)}{1.\,2.\,3} \qquad n = 3$$

ζ_j, какъ x_1, x_2.. x_n можетъ быть построено съ помощью уравненій 2 и 3-ей степени

$$q = 2^\alpha 3^\beta$$

Уравненіе (24) можетъ быть приводимо.

Пусть неприводимое уравненіе опредѣляющее ζ_j есть

$$m_0\zeta_j^{\tau'} + m_1\zeta_j^{\tau'-1} + \dots = o \quad (25)$$

Согласно § 5 σ должно дѣлится на τ'.

Такимъ образомъ

$$\sigma = \lambda\tau'$$

гдѣ λ цѣлое число.

Разсмотримъ сперва случай, когда

$$\alpha > o \quad \beta > o$$

Тогда въ случаѣ $n = 2$ будемъ имѣть

$$2^{\alpha-1} 3^\beta (2^\alpha 3^\beta - 1) = \lambda\tau' \quad (26)$$

при $n = 3$

$$2^\alpha 3^\beta (2^\alpha 3^\beta - 1)(2^{\alpha-1} 3^\beta - 1) = \lambda\tau' \quad (27)$$

Изъ этихъ уравненій слѣдуетъ, что въ первомъ случаѣ

$$\tau' = 2^{\alpha'} 3^{\beta'} \qquad \alpha' \leqslant \alpha - 1 \qquad \beta' \leqslant \beta$$

во второмъ

$$\tau' = 2^{\alpha'} 3^{\beta'} \qquad \alpha' \leqslant \alpha \qquad \beta' \leqslant \beta - 1$$

Если мы возьмемъ $n = 2$ въ томъ случаѣ когда $\alpha > \beta$ и безразлично $n = 2$ или $n = 3$ при $\alpha = \beta$, то можемъ сказать, что въ то время, какъ

$$q = 2^{\alpha} 3^{\beta}$$

было дѣлителемъ $(2.3)^{\omega}$, гдѣ ω наибольшее изъ чиселъ α, β, τ' будетъ дѣлителемъ $(2.3)^{\omega - 1}$

Когда $\alpha = \beta$, то можно сказать, что какъ q, такъ и τ' дѣлители $(2.3)^{\omega}$

Уравненіе (25) въ свою очередь, какъ и (3) можемъ привести къ уравненію степени

$$\tau'' = 2^{\alpha''} 3^{\beta''} \qquad \alpha'' \leqslant \alpha' - 1 \qquad \beta'' \leqslant \beta'$$

или

$$\tau' = 2^{\alpha''} 3^{\beta''} \qquad \alpha'' \leqslant \alpha \qquad \beta'' \leqslant \beta'$$

если только

$$\alpha' > 0 \qquad \beta' > 0$$

при этомъ τ'' будетъ дѣлителемъ $(2.3)^{\omega}$ или $(2.3)^{\omega - 1}$ или наконецъ $(2.3)^{\omega - 2}$

Такимъ образомъ мы можемъ продолжать дальше пока не получимъ уравненіе степени

$$\tau = 2^{\gamma} \text{ или } \tau = 3^{\gamma}$$

Но это значеніе можетъ получится только въ томъ случаѣ, если предшествующее уравненіе было степени

$$2^{\lambda} 3^{\mu}$$

причемъ въ первомъ случаѣ $\gamma < \lambda$

во второмъ $\gamma < \mu$

такъ что γ всегда меньше первоначальнаго показателя при 2 или 3.

При этомъ можно сказать, что 2^{γ} дѣлитель

$$(2.3)^{\omega - 1}$$

такъ какъ $\gamma < \omega$ или $\gamma \leqslant \omega - 1$

Такимъ образомъ можно сказать, что задача о рѣшеніи уравненія (3) степени $2^{\alpha} 3^{\beta}$ $\alpha > o$ $\beta > o$ съ помощью уравненій степеней $n = 2.3$ сведена къ болѣе простой задачѣ о рѣшеніи уравненія степени 2^{α} или 3^{β} т. е. къ случаю когда $\alpha = o$ или $\beta = o$.

Разсмотримъ теперь этотъ послѣдній случай.

Если $q = 2^{\gamma}$, то уравненіе (26) дастъ

$$2^{\gamma-1}(2^{\gamma}-1) = \lambda\tau$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\tau = 2^{\gamma'} 3^{\delta'} \qquad \gamma' \leqslant \gamma - 1$$

$$3^{\delta'} \text{ дѣлитъ } 2^{\gamma} - 1 \leqslant 3^{\gamma-1} \leqslant 3^{\omega-2}$$

въ случаѣ чего τ представляетъ дѣлитель

$$(2.3)^{\omega-2}$$

Такимъ же почти образомъ при $\tau = 3^{\gamma}$ изъ уравненія

$$3^{\gamma-1}\,\frac{(3^{\gamma}-1)}{2}(3^{\gamma}-2) = \lambda\tau$$

убѣждается, что

$$\tau = 3^{\gamma'}\,2^{\delta} \qquad \gamma' \quad \gamma - 1$$

$$2^{\delta'} \text{ дѣлитъ } \frac{3^{\gamma}-1}{2}$$

Извѣстно *), что 3 принадлежатъ къ показателю 2^{q-2} по модулю 2^{q} ($q > 3$) иными словами говоря) сравненіе

$$3^{p} \equiv 1 \pmod{2^{q}}$$

возможно только при

$$p \geqslant 2^{q-2}$$

Тогда сравненіе

$$3^{p} \equiv 1 \pmod{2^{\gamma+1}} \tag{28}$$

невозможно, такъ какъ оно предполагаетъ

$$\gamma > 2^{\gamma-1}$$

что при $\gamma \geqslant 2$ невозможно.

При $\gamma = 1$ сравненіе (28) тоже невозможно, какъ это непосредственно провѣряется.

---

*) Сохоцкій. Высшая Алгебра Спб. 1888 стр. 244.

Такимъ образомъ $3^\gamma - 1$ можетъ дѣлиться только 2^γ или на степени еще нисшія.

Откуда слѣдуетъ, что

$$\delta' \leqslant \gamma - 1$$

Такъ какъ $\gamma \leqslant \omega - 1$ мы заключаемъ, что τ въ разбираемомъ случаѣ представляетъ дѣлитель

$$(2.3)^{\omega - 2}$$

Мы получаемъ послѣдовательно уравненія степеней

$$q,\ \tau,\ \tau'\ \tau''\ ..\ \tau^{(k)},\ \tau^{(k+1)} \dots \ ^{(l}) \dots \ \tau^{(r)} \dots \qquad (29)$$

изъ которыхъ каждое разрѣшается съ помощью уравненій 2 и 3-ей степени, причемъ рѣшеніе перваго уравненія сводится къ рѣшенію второго уравненія, рѣшенія второго уравненія къ рѣшенію третьяго и т. д.

Что касается до чиселъ $q, \tau, \tau', \tau'' \dots$, то онѣ обладаютъ слѣдующими свойствами.

Возьмемъ параллельно рядъ (29) еще рядъ чиселъ

$$6^\omega, \quad 6^{\omega - 1}, \quad 6^{\omega - 2} \dots\dots \quad 6, \quad 6^0 = 1$$

Въ ряду (29) числа

$$q,\ \tau,\ \tau',\ \tau'' \dots \tau^{(k-1)} \qquad (I)$$

дѣлители 6^ω и потому меньше 6^ω,

числа $\tau^{(k)}, \tau^{(k+1)}, \dots\ \tau^{(l-1)}$ (II)

дѣлители $6^{\omega-1}$ и потому меньше $6^{\omega-1}$

числа $\tau^{(l)}\ \tau^{(l+1)} \dots\ \tau^{(m-1)}$ (III)

дѣлители $6^{\omega-2}$ и потому меньше $6^{\omega-2}$ и т. д.

Наконецъ должно быть число $\tau^{(r)}$ дѣлитель 6^0 т. е. 1. Дойдя до уравненія отвѣчающаго этому числу задачу можемъ считать рѣшенной, такъ какъ остается только рѣшить уравненіе первой степени.

Число чиселъ въ группахъ (I) и (II)... и потому и во всемъ ряду (29) конечно и мы можемъ указать высшую границу для этихъ чиселъ.

Въ самомъ дѣлѣ отъ одного числа къ другому въ одной группѣ мы переходимъ понижая на одну или нѣсколько единицъ показатели 2 или 3.

Такимъ образомъ въ I группѣ число чиселъ не больше ω.

Для приведенія уравненія (3) къ (25) и такимъ же образомъ уравненія (25) къ слѣдующему т. д. необходимо, найти, пользуясь исчисленіемъ симметрическихъ функцій уравненіе σ-ой степени (24) опредѣляющее

$$\zeta_j = \sum x_1 \; x_2 \ldots x_j$$

гдѣ $x_1 \; x_2 \ldots x_n$ корни ур. (3) приняли $n = 2$ или $n = 3$,

2) изслѣдовать приводимо ли это уравненіе и въ случаѣ приводимости найти неприводимое уравненіе опредѣляющее ζ_j .

Эта задача сводится къ исчисленію симметрическихъ физикцій и къ опредѣленію цѣлыхъ корней уравненія.

Въ самомъ дѣлѣ, чтобы уравненіе было

$$l_0 \zeta^\sigma + l_1 \zeta^{\sigma - 1} + \ldots l_\sigma = 0$$

приводимо т. е. чтобы существовало уравненіе

$$k_0 \zeta^\pi + k_1 \zeta^{\pi - 1} + \ldots k_\sigma = 0$$

съ раціональными въ области c_i коэффиціентами причемъ $\pi < \sigma$ необходимо и достаточно, чтобы уравненія, опредѣляющія

$$Z_1 = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots \zeta_\pi$$
$$Z_2 = \zeta_1 \zeta_2 + \ldots \zeta_{\pi-1} \zeta_\pi$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Z_\pi = \zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_\pi$$

имѣли раціональные корни. Но, какъ извѣстно—опредѣленіе раціональныхъ корней сводится къ опредѣленію цѣлыхъ корней.

3) На основаніи теоремы Лагранжа при помощи одного только исчисленія симметрическихъ функцій найдемъ другія элемент. симм. функціи $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n$.

4) Зная ихъ будемъ имѣть уравненіе степени $n = 2,3$ опредѣляющее x

$$x^n - \zeta_1 x^{n-1} + \ldots (-1)^n \zeta_n = 0$$

Общее оглавленіе за годъ XXI (1909).

По алфавиту.