Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ

О ГИПЕРТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ ФУНКЦІИ

$\zeta(s, x)$

ВАРШАВА

ТИПОГРАФІЯ „РУССКАГО ОБЩЕСТВА“, ПЛ. СВ. АЛЕКСАНДРА, 4

1913

§ 1. Гильбертъ въ своей извѣстной парижской рѣчи ставитъ проблемму о доказательствѣ *гипертрансцендентности* функціи отъ двухъ перемѣнныхъ (s,x):

$$\zeta(s,x) = x + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \frac{x^4}{4^s} + \ldots \frac{x^n}{n^s} + \ldots \qquad (1)$$

т. е. неопредѣляемости $\zeta(s,x)$ алгебраическимъ дифференціальнымъ уравненіемъ въ частныхъ производныхъ.

Очевидно, разсчитывая, что это доказательство должно быть того же типа, что Хельдеровское доказательство гипертрансцендентности функціи $\Gamma(x)$, исходящее изъ функціональнаго уравненія:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \qquad (2)$$

Гильбертъ указываетъ, какъ на исходную точку возможнаго доказательства функціональное уравненіе:

$$x\,\frac{\partial \zeta(s,x)}{\partial x} = \zeta(s-1,x) \qquad (3)$$

характерное для функціи

$$\zeta(s,x)$$

Въ настоящей статьѣ мы предлагаемъ рѣшеніе поставленной Гильбертомъ проблеммы, но только совершенно иного типа, чѣмъ то, на которое разсчитываетъ самъ Гильбертъ.

Доказательство состоитъ изъ трехъ моментовъ:

1) Доказывается, что, если функція $\zeta(s,x)$ удовлетворяетъ нѣкоторому алгебраическому дифференціальному уравненію:

$$F\left(x, s, \zeta, \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{d\zeta}{ds}, \frac{d^2\zeta}{dx^2}, \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial s}, \frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2}\ldots\right) = 0, \qquad (4)$$

то алгебраическому дифференціальному уравненію удовлетворяетъ также функція:

$$\eta(s,x) = \frac{x^{\kappa}}{\kappa^{s}} + \frac{x^{\kappa^2}}{\kappa^{2s}} + \frac{x^{\kappa^3}}{\kappa^{3s}} + \dots \frac{x^{\kappa^l}}{\kappa^{ls}} + \dots, \tag{5}$$

гдѣ κ представляетъ какое нибудь простое число.

Такъ что гипертрансцендентность $\zeta(s,x)$ будетъ доказана, если тоже будетъ доказано для функціи $\eta(s,x)$.

2) Если $\eta(s,x)$ удовлетворяетъ алгебраическому дифференціальному уравненію въ частныхъ производныхъ:

$$\mathrm{H}\left(s,\, x,\, \frac{\partial\eta}{\partial x},\, \frac{\partial\eta}{\partial s},\, \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2},\, \frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial s},\, \frac{\partial^2\eta}{\partial s^2} \dots\right) = o, \tag{6}$$

то $\omega(x) = \eta\ (s,x)$ удовлетворяетъ обыкновенному дифференціальному уравненію

$$\Omega\left(s,\, x,\, \frac{\partial\eta}{\partial x},\, \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \dots\right) = o, \tag{7}$$

въ которое входятъ только производныя η по x.

3) Такимъ образомъ гипертрансцендентность $\eta(s,x)$, а потому и $\zeta(s,x)$ является доказанной, если доказана гипертрансцендентность $\omega(x)$.

Поэтому остается доказать гипертрансцендентность $\omega(x)$ при неопредѣленномъ значеніи параметра s.

§ 2. Чтобы доказать первый пунктъ прежде всего замѣчаемъ, что всякое дифференціальное уравненіе (4) можно привести къ такому, лѣвая часть котораго представляетъ цѣлую функцію относительно $\zeta(x,s)$ и производныхъ ζ по (x,s).

Полагая

$$e^{-s} = z \qquad s = -\,lgz \tag{8}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial s} = \frac{\partial\zeta}{\partial z} : \frac{\partial s}{\partial z} = -\,z\,\frac{\partial\zeta}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left[-\,z\,\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right] : \frac{\partial s}{\partial z} = z\,\frac{\partial\zeta}{\partial z} + z^2\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} \tag{8'}$$

$$\frac{\partial^3\zeta}{\partial s^3} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\ z\,\frac{\partial\zeta}{\partial z} + z^2\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right] : \frac{\partial s}{dz} = -\,z\,\frac{\partial\zeta}{\partial z} - 3z^2\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} - z^3\,\frac{\partial^3\zeta}{\partial z^3}$$

. . . .

легко приводимъ алгебраическое дифференціальное уравненіе (4) къ виду:

$$\Phi\left(x, z, \zeta, \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{\partial\zeta}{\partial z}, \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\ldots\right) = o \qquad (9)$$

или

$$\sum A\, x^a\, z^b\, \zeta^\kappa \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^{\kappa_x^{(1)}} \left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^{\kappa_z^{(1)}} \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^{\kappa_{xx}^{(2)}} \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial z}\right)^{\kappa_{xz}^{(2)}} \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right)^{\kappa_{zz}^{(2)}} \ldots = o, \qquad (9')$$

гдѣ A постоянныя, a, b, κ, $\kappa_x^{(1)}$, $\kappa_z^{(1)}$ цѣлыя положительныя числа.

По подстановкѣ вмѣсто $\zeta(s,x)$ его выраженія (1) или, что тоже, выраженія

$$\zeta = x + x^2 z^{\gamma_2} + x^3 z^{\gamma_3} + \ldots\ x^r\ z^{\gamma_r} + \ldots, \qquad (10)$$

должны получить тождество, какъ относительно x, такъ и относительно z.

Но, по подстановкѣ, лѣвая часть уравненія (9) обращается въ

$$P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \ldots\ P_r\, x^r + \ldots = o, \qquad (11)$$

гдѣ

$$P_r = \sum_{j=1}^{s=mr} A_{rj}\ z^{\rho_{rj}}\ , \qquad (12)$$

гдѣ A_{rj} постоянныя, ρ_{rj} числа вида:

$$\lambda_{rj}^{(0)} + \lambda_{rj}^{(1)}\gamma_1 + \lambda_{rj}^{(2)}\gamma_2 + \ldots\ \lambda_{rj}^{(r)}\gamma_r\ , \qquad (13)$$

гдѣ $\lambda_{rj}^{(0)}$ цѣлые числа, а $\lambda_{rj}^{(h)}$ $(h > o)$ цѣлыя положительныя числа, ибо каждый членъ суммы (9) даетъ произведеніе z въ нѣкоторой цѣлой положительной степени b и результатовъ дифференцированія и возведенія въ цѣлую положительную степень z^γ т. е. $z^{\kappa(\gamma-l)}$, гдѣ κ и l цѣлыя положительныя числа.

Тождество (11) предполагаетъ

$$P_r = o.$$

Далѣе, если P_r представить въ видѣ

$$P_r = \sum_{j=1}^{s=mr} \overline{A}_{rj}\, z^{\overline{\rho}_{rj}}\ ,$$

гдѣ $\overline{\rho}_{rj}$ всѣ различны, то

$$\overline{A}_{rj} = o.$$

Ибо, въ самомъ дѣлѣ, заставивъ z описывать вокругъ $z = o$ замкнутый контуръ, приводящій

$$z^{\overline{\rho}_{rj}} \text{ къ } z^{\overline{\rho}_{rj}} e^{2\pi\overline{\rho}_{rj} i} \;\ldots\ldots\; z^{\overline{\rho}_{rj}} e^{2\pi\kappa\overline{\rho}_{rj} i}$$

получаемъ:

$$\sum_{j=1}^{s=m_r} A_{rj} e^{2\kappa\pi\overline{\rho}_{rj} i} z^{-\overline{\rho}_{rj}} = o\,.$$

$$\kappa = 1.\ 2\ ..\ m_{r-1}$$

Но опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{m_r} \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \ldots & \omega_{m_r}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{m_r-1} & \omega_2^{m_r-1} & \ldots & \omega_{m_r}^{m_r-1} \end{vmatrix} = (\omega_1-\omega_2)(\omega_1-\omega_3)\ldots(\omega_{m_{r-1}}-\omega_{m_r})$$

$$\omega_j = e^{2\pi\overline{\rho}_{rj} i}$$

не равенъ нулю, ибо это предполагало бы $\omega_g = \omega_h$, что по условію не имѣетъ мѣста.

Такимъ образомъ всѣ члены въ суммѣ (12) должны взаимно сократиться.

Если мы теперь положимъ

$$\zeta = \overline{\zeta} + \underline{\zeta},$$

то будемъ имѣть:

$$P = P_0 + P_1 x + \ldots P_r x^r + \ldots = (\overline{P}_0 + \underline{P}_0) + (\overline{P}_1 + \underline{P}_1) +$$

$$(\overline{P}_2 + \underline{P}_2)\, x^2 + \ldots\ \overline{P}_r + \underline{P}_r\,) x^r + \ldots$$

$$\overline{P} = \overline{P}_0 + \overline{P}_1 x + \ldots\ \overline{P}_r\, x^r + \ldots = \sum A x^a z^b \overline{\zeta}^{\kappa} \left(\frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial x}\right)^{\kappa^{(1)}_x} \ldots\ldots$$

$$\text{а} \quad \underline{P} = \underline{P}_0 + \underline{P}_1 x + \ldots\ \underline{P}_r\, x^r + \ldots.$$

совокупность остальныхъ членовъ.

Если положить

$$\overline{\zeta} = \eta\,(s,x),$$

гдѣ η имѣетъ значеніе (5), такъ что

$$\eta_{\kappa_r} = -\, rlg\kappa,$$

то получимъ въ члены вида

$$A\, z^{-\lambda l g \kappa + \mu},$$

гдѣ λ цѣлое положительное число, μ цѣлое число положительное или отрицательное.

Члены эти должны сокращаться

или 1) между собой или

2) съ членами $\underline{P}_r$.

Но послѣднее не можетъ имѣть мѣста.

Въ самомъ дѣлѣ члены $\underline{P}_r$ получаются черезъ умноженіе или только результатовъ дифференцированій и возведеній въ степень $\underline{\zeta}$ или *еще* умноженіемъ полученнаго такимъ образомъ результата на произведеніе результатовъ дифференцированій и возведеній въ степень $\bar{\zeta}$.

Такъ, напримѣръ, если бы имѣли

$$P = (x + z)\, \zeta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2 + z^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2 \partial x}$$

то при $\zeta = \underline{\zeta} + \bar{\zeta}$ имѣли бы

$$\bar{P} = \bar{\zeta}\, (x + z) \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z}\right)^2 + z^2 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial z^2 \partial x}$$

$$\underline{P} = \underline{\zeta}\, (x + z) \left(\frac{\partial \underline{\zeta}}{\partial z}\right)^2 + z^2 \frac{\partial^2 \underline{\zeta}}{\partial z^2 \partial x} + 2\, (x + z)\, (\bar{\zeta} + \underline{\zeta})\, \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial z} +$$

$$+ (x + z)\, \zeta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2.$$

Первые два члена $\underline{P}$ принадлежатъ къ первой категоріи, остальные ко второй.

Но степени z, входящія въ $\underline{\zeta}$

$$z^{-lgN}$$

гдѣ N цѣлое число, въ которое дѣлителями входятъ обязательно множители иные, чѣмъ κ.

Упомянутымъ выше дѣйствіямъ надъ $\underline{\zeta}$ будетъ отвѣчать вычитаніе изъ показателей $z{-}lgN$ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, умноженіе на цѣлыя положительныя числа и складываніе получаемыхъ такимъ образомъ результатовъ, затѣмъ сложеніе съ результатомъ такихъ же операцій надъ $-rlg\kappa$, т. е. съ $-\lambda lg\kappa - \mu$, гдѣ λ цѣлое положительное число, μ цѣлое число, Въ конечномъ результатѣ показатели z въ $\underline{P}_r$ будутъ вида

$$-\mu' - \lambda' \, lg\kappa - \lambda'_1 \, lg\kappa_1 - \lambda'_2 \, lg\kappa_2 - \ldots - \lambda'_g \, lg\kappa_g \, ,$$

гдѣ λ'_j цѣлыя положительныя числа, κ_j простыя числа, причемъ хотя бы одно λ'_j не равно нулю.

Если бы упомянутое выше сокращеніе имѣло бы мѣсто, то имѣли бы

$$-\lambda \, lg\kappa - \mu = -\lambda'_1 \, lg\kappa - \mu' - \lambda'_1 \, lg\kappa_1 \ldots \lambda'_g \, lg\kappa_g$$

т. е.

$$\kappa^{(\lambda-\lambda')} \kappa_1^{\lambda'_1} \kappa_2^{\lambda'_2} \ldots \kappa_g^{\lambda'_g} = e^{(\mu-\mu')} . \qquad (14)$$

При $\mu \gtrless \mu'$ получаемъ невозможное утвержденіе раціональности цѣлой степени e.

При $\mu = \mu_g$ должны имѣть $g = o$, $\lambda = \lambda'$, $N = \kappa^r$, чего быть не можетъ.

Итакъ $\overline{P}_r = o$, откуда

$$P = P_0 + P_1 x + \ldots P_r \, x^r = o \, ,$$

т. е. уравненію (9) удовлетворяетъ на ряду ζ еще $\zeta = \eta\,(s,x)$

Полагая затѣмъ $z = e^{-s}$ и исключая e^{-s} изъ получаемаго уравненія и уравненій, получаемыхъ дифференцированіемъ, выводимъ алгебраическое дифференціальное уравненіе (6), которому удовлетворяетъ функція:

$$\eta(s,x) = \frac{x^\kappa}{\kappa^s} + \frac{x^{\kappa^2}}{\kappa^{2s}} + \ldots \qquad (5)$$

§ 3. Коэффиціенты въ уравненіи:

$$\Phi \left(x, y, \eta, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial z}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \ldots \right) = o \qquad (9')$$

могутъ быть вообще трансцендентными числами.

Обозначая черезъ

$$\Theta_0, \ \Theta_1, \ \Theta_2 \ldots \ \Theta_n$$

алгебраически независимыя трансцендентныя можемъ коэффиціенты считать раціональными функціями съ цѣлыми коэффиціентами отъ $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2 \ldots \Theta_n$, гдѣ ζ опредѣляется уравненіемъ:

$$R_0(\Theta_0, \Theta_1, \ldots \Theta_n)\xi^\tau + R_1(\Theta_0, \Theta_1 \ldots \Theta_n)\xi^{\tau-1} + \ldots R_{\tau-1}(\Theta_0, \Theta_1 \ldots \Theta_n)\xi + $$
$$+ R_\tau(\Theta_0, \Theta_1 \ldots \Theta_n) = o, \tag{15}$$

гдѣ R_j раціональныя функціи съ цѣлыми коэффиціентами отъ Θ_j.

Коэффиціенты уравненій получаемыхъ дифференцированіемъ ур. (9'), какъ получаемыя черезъ сложеніе и умноженіе на цѣлыя числа коэффиціентовъ ур. (9') будутъ тоже раціональными функціями Θ_j ξ. Изъ получаемыхъ такимъ образомъ уравненій можно исключить Θ_j, ξ.

Въ получаемомъ такимъ образомъ уравненіи коэффиціенты будутъ уже раціональными числами.

Такъ, если

$$\Phi = xz\pi + \sqrt{\pi^2+1}\,\frac{\partial\eta}{\partial x} + x^2\frac{\partial\eta}{\partial z} = o$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \pi z + \sqrt{\pi^2+1}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial\eta}{\partial z} + x^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial z} = o$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \pi x + \sqrt{\pi^2+1}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial z} + x^2\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} = o$$

откуда, исключеніемъ

$$\pi \text{ и } \sqrt{\pi^2+1}$$

$$\begin{vmatrix} zx & \frac{\partial\eta}{\partial x} & x^2\frac{\partial\eta}{\partial z} \\ z & \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} & 2x\frac{\partial\eta}{\partial z} + x^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial z} \\ x & \frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial z} & x^2\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} \end{vmatrix} = o$$

или

$$zx^3\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} - zx^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial z} + x^3\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial x} - zx^3\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial z}\right)^2 -$$
$$- zx^2\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\frac{\partial\eta}{\partial x} - x^3\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\frac{\partial\eta}{\partial z} + 2x^2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial z} = o,$$

дифференціальное уравненіе, уже не содержащее π. Подставляя въ уравненіе (9') вмѣсто η его выраженіе

$$\eta = x^{\kappa} z^{-lg\kappa} + x^{\kappa^2} z^{-2lg\kappa} + \ldots x^{\kappa^r} z^{-rlg\kappa} + \ldots$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \kappa x^{\kappa-1} z^{-lg\kappa} + \kappa^2 x^{\kappa^2-1} z^{-2lg\kappa} + \ldots \tag{16}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = -x^{\kappa} lg\kappa z^{-lg\kappa-1} - 2\kappa^2 lg\kappa x^{\kappa^2-1} z^{-2lg\kappa-1} + \ldots$$

. . . .

получаемъ тождество относительно x и z. Приравниванie нулю коэффицiентовъ при степеняхъ z въ P_r будетъ давать уравненie

$$\Pi(lg\kappa) = 0,$$

гдѣ Π цѣлая функцiя $lg\kappa$ съ цѣлыми коэффицiентами.

Но это возможно только при условiи сведенiя это уравненie къ тожеству, т. е., при условiи, что

$$\Pi(\xi) = 0;$$

гдѣ ξ какая угодно величина, въ частности 0.

Такъ что результатъ подстановки въ уравненie (9) значенiй

$$\eta, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial z} \ldots \tag{16}$$

долженъ давать тожество и при замѣнѣ $lg\kappa$ нулемъ или что тоже при замѣнѣ

$$\frac{\partial \eta}{\partial z}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z}, \ldots\ldots \frac{\partial^p \eta}{\partial x^\alpha \partial z^\beta} (\beta > 0) \ldots$$

нулями, т. е., должны имѣть при всякомъ x, z уравненie

$$\Phi\left(x, z, y, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \ldots\right) = 0.$$

Полагая здѣсь $z = e^{-s}$ приходимъ къ уравненiю (7) § 4. Гипертрансцендентность

$$\omega(x) = \frac{x^{\kappa}}{\kappa^s} + \frac{x^{\kappa^2}}{\kappa^{2s}} + \frac{x^{\kappa^3}}{\kappa^{3s}} + \ldots \frac{x^{\kappa^l}}{\kappa^{ls}} + \ldots \tag{17}$$

докажемъ согласно нашимъ изслѣдованiямъ: „О нѣкоторыхъ ариѳметическихъ свойствахъ рѣшенiй алгебраическихъ дифференцiальныхъ уравненiй“. Мат. Сборникъ. 1910.

А именно, отмѣтимъ, слѣдующее характерное свойство, присущее разложеніямъ

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_s x^3 + \ldots . a_n x^n + \ldots \qquad (18)$$

съ алгебраическими коэффиціентами, удовлетворяющими алгебраическому дифференціальному уравненію

$$f(x,\ y,\ y' . .\ y^{(m)}) = o, \qquad (19)$$

въ которомъ всегда можемъ предполагать f цѣлой функціей $(x,\ y,\ y',\ y'' \ldots\ y^{(m)})$ съ цѣлыми коэффиціентами, и не приводимыми относительно $y^{(m)}$.

Степень неприводимаго уравненія, опредѣлющаго a_n не должна превосходить конечнаго предѣла при возрастаніи n.

Для доказательства замѣчаемъ, что

$$a_i = \frac{y_0^{(i)}}{i!}\,.$$

Предположимъ сперва

$$i = \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}\right]_{x=o} \gtrless o\,. \qquad (20)$$

Тогда дифференцированіе уравненія (19) дастъ

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}\, y^{(m+1)} + \sum_{i=o}^{i=m-1} \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}}\, y^{(i+1)} + \frac{\partial f}{\partial x} = o$$

или

$$f_{m.1}\, y^{(m+1)} + f_{m+1.1} = o, \qquad (21)_1$$

гдѣ

$$f_{m.1} = \frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}$$

$$f_{m+1.1} = \sum_{i=o}^{i=m-1} \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}}\, y^{(i+1)} + \frac{\partial f}{\partial x}$$

цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами отъ

$$y^{(m)},\ y^{(m-1)},\ y^{(m-2)} \ldots\ y',\ y,\ x.$$

Полагая $x = o$ имѣемъ

$$y\, v_0^{(m+1)} + f_{m+1.1}^{(0)} = o$$

$$y_0^{(m+1)} = -\frac{f_{m+1.1}^{(0)}}{v}. \qquad (22)_1$$

Дифференцируя уравненіе (21) еще разъ имѣемъ

$$f_{m.2}\, y^{(m+2)} + f_{m+1.2} = o\,, \qquad (21)_2$$

гдѣ $f_{m.2}$, $f_{m+1.2}$ цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами отъ $y^{(m+1)}$, $y^{(m)}$,... y', y, x

$$f_{m.2} = f_{m.1} = \frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}.$$

При $x = o$

$$y_0^{(m+2)} = -\frac{f_{m+1.2}^{(0)}}{v}, \qquad (22)_2$$

гдѣ $f_{m+1.2}^{(0)}$ цѣлая функція съ цѣлыми коэффиціентами отъ

$$y_0^{(m+1)},\ y^{(m)}\ldots.\ y'_0,\ y_0$$

i — кратное дифференцированіе даетъ

$$f_{m+i}^{(0)},\ y^{(m+i)} + f_{m+1.i} = o$$

и

$$y_0^{(m+i)} = -\frac{f_{m+1.i}}{v}. \qquad (22)_i$$

Подставляя вмѣсто

$$y_0^{(m+1)},\ y_0^{(m+2)}\ldots..\ y^{(m+i-1)}$$

ихъ выраженія въ

$$y_0^{(m)},\ y^{(m-1)},\ y_0^{(m-2)}\ldots\ y'_0,\ y_0$$

изъ уравненій $(20)_1$, $(20)_2$... $(20)_{i-1}$, мы получаемъ для $y_0^{(m+i)}$ раціональную функцію съ цѣлыми коэффиціентами отъ $y_0^{(m)}$, $y_0^{(m-1)}$... y'_0, y_0, а для a_{m+i} раціональную функцію съ цѣлыми коэффиціентами отъ a_0, a_1, a_2.. a_m.

Но a_j ($j = o$, 1. 2... m), какъ алгебраическія числа можно выразить раціональными функціями съ цѣлыми коэффиціентами отъ алгебраическаго числа s, опредѣляемаго неприводимымъ уравненіемъ

$$c_0 s^{\sigma} + c_1 s^{\sigma-1} + c_2 s^{\sigma-2} + \ldots c_{\sigma-1} s + c_{\sigma} = o\,. \qquad (23)$$

Такимъ же образомъ должны выразиться и a_{m+i}.

Если теперь

$$v = \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}}\right]_0 = o,$$

то замѣтимъ прежде всего, что

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}} = b_\kappa x^\kappa + b_{\kappa+1} x^{\kappa+1} + \ldots,$$

гдѣ κ конечное цѣлое число, не равное нулю

$$b_\kappa \gtrless o.$$

Въ самомъ дѣлѣ мы не можемъ имѣть

$$b_\kappa = b_{\kappa+1} = \ldots b_\infty = o$$

ибо, иначе, имѣли бы

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(m)}} = o$$

и уравненіе (19), имѣя квадратное относительно $y^{(m)}$ рѣшеніе не было бы уже неприводимо.

Замѣтимъ, что для того, чтобы при дифференцированіи цѣлой функціи отъ $y, y', y'' \ldots y^{(m)}$ получилась бы цѣлая функція, содержащая $y^{(m+i)}$ необходимо по меньшей мѣрѣ i — дифференцированій.

Для того же, чтобы $y^{(m+i)}$ необходимо не менѣе $2i$ дифференцированій.

Въ самомъ дѣлѣ дифференцированіемъ члена $f(x, y, y' \ldots y^{(m)})$ типа

$$y^{(m)^{h_m}} y^{(m-1)^{h_{m-1}}} \ldots\ldots y'^{h_1} y^{h_0} x^h$$

можно или ввести только одну производную высшаго порядка или повысить на единицу степень одной изъ входящихъ въ произведеніе (24) производныхъ.

Отсюда слѣдуетъ, что, если дифференцированіе лѣвой части уравненія (19) даетъ сумму, содержащую число

$$y^{(m+i)} y^{\kappa_0} y'^{\kappa_1} \ldots y^{(m)^{\kappa_m}},$$

то эта сумма можетъ дать членъ $[y^{(m+i)}]^2$ только послѣ i дифференцированій.

Для того, чтобы вышелъ членъ съ $y^{(m+i)} y^{(m+j)}$ необходимо $(i + j)$ дифференцированію.

Вслѣдствіе этого, дифференцируя уравненіе

$$f(x, y, y' \dots y^{(m)}) = o \tag{19}$$

всего $2i$ раза имѣемъ

$$f_{m.2i}\, y^{(m+2i)} + f_{m+1.2i}\, y^{(m+2i-1)} + \dots f^{m+1-1.2}\, y^{(m+i+1)} +$$
$$+ f_{m+1,2i} = o\ ,$$

гдѣ $f_{j.2i}$ цѣлыя функціи отъ $x, y, y' \dots y^{(m+i)}$ съ цѣлыми коэффиціентами.

Возьмемъ $$i > \kappa$$

такъ, что $$m + i + 1 \leqslant m + 2i - \kappa$$

и получимъ для сокращенія

$$m + 2i = p.$$

Тогда уравненіе (25) можно переписать въ слѣдующемъ видѣ

$$f_m\, y^{(p)} + f_{m-1}\, y^{(p-1)} + \dots f_{m+\kappa}\, y^{(p-\kappa)} + f_{m+\kappa+1,d} = o\ , \tag{25'}$$

гдѣ $f_m\,,\ f_{m-1} \dots f_{m+\kappa}\,,\ f_{m+\kappa+1.p}$ цѣлыя функціи отъ

$$y,\ y',\ y'' \dots\ y^{(p-\kappa+1)}$$

съ цѣлымя коэффиціентами.

Дифференцируя еще q разъ имѣемъ

$$f_m\, y^{(p+q)} + \Big[f_{m+1} + q f'_m \Big] y^{(p+q-1)} + \dots \Big[f_{m+\kappa} + q\, f'_{m+\kappa+1} + \dots \frac{q!}{\kappa!} f_m^{(\kappa)} \Big]$$
$$y_0{}^{(p+q-\kappa)} + f_{m+q+\kappa+1.p+q} = o\ .$$

Полагая $x = o$ имѣемъ

$$f_m^{(0)}\, y_0^{(p+q)} + \Big[f_{m+1}^{(0)} + q f'^{(0)} \Big] y_0^{(p+q-1)} + \dots \Big[f_{m+\kappa}^{(0)} + q f_{m+\kappa-1} + \dots$$
$$\frac{q!}{\kappa!}\, {f_m^{(\kappa)}}^{(0)} \Big] y_0^{(p+q-\kappa)} + f_{m+q+\kappa+1.p+q}^{(0)} = o\ ,$$

гдѣ коэффиціенты при

$$y_0^{(p+q)},\ y_0^{(p+q-1)} \dots\ y_0^{(p+q-\kappa)}$$

цѣлыя функціи отъ q.

Эти цѣлыя функціи не могутъ всѣ тожественно при всякомъ q равняться нулю, т. к. коэффиціентъ при q^κ въ цѣлой функціи, служащей коэффиціентомъ при $y_0^{(p+q-1)}$ равенъ

$$f^{(\kappa)(0)} = \left[f_m^{(\kappa)} \right]_{x=o} = b_\kappa \gtrless o.$$

Мы поэтому можемъ написать въ общемъ случаѣ:

$$y_0^{(p+q-r)} \left[A_0 + A_1 q + \ldots A_r q^r \right] = F\,(y_0, y'_0 \ldots y^{(p+q+r-1)})$$

$$o < r \leqslant \kappa$$

или же, полагая $p + q - r = n$, начиная съ достаточно большихъ n

$$\frac{y_0^{(n)}\, F(y_0, y'_0 \ldots y_0^{(n-1)},}{\Phi(9)}$$

гдѣ F цѣлая функція съ цѣлыми коэффиціентами отъ

$$y_0,\ y'_0 \ldots\ y_0^{(n-1)}$$

A_i цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами отъ величинъ

$$y_0,\ y'_0,\ y''_0,\ y^{(p-\kappa-1)}$$

и, слѣдовательно не зависятъ отъ q.

$\Phi(q)$ при достаточно большомъ q (большемъ чѣмъ высшій предѣлъ корней уравненія $\Phi(q) = o$) можно всегда предполагать не равнымъ нулю. Возвращаясь теперь къ разложенію (17) видимъ, что взявъ $s = \dfrac{p}{q}$, гдѣ q достаточно велико мы можемъ выразить коэффиціенты $\omega(x)$ съ помощью неприводимыхъ уравненій, степень которыхъ можетъ быть сдѣлана какъ угодно велика.

Откуда и слѣдуетъ гипертрансцендентность $\omega(x)$, а на основаніи всего вышедоказаннаго и гипертрансцендентность функціи

$$\zeta\,(s, x).$$

Д. Мордухай-Болтовской
Октябрь 1913 года.