Министерство образования и науки Российской Федерации
Елабужский государственный педагогический университет

М.Ф. Гильмуллин

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Елабуга
2009

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Елабужского государственного педагогического университета.
Протокол № 28 от 19.09.2008.

УДК 51(091)
ББК 22.1г
Г 47

Рецензенты: Р.М. Зайниев,
кандидат физ.-мат. наук, доцент;
А.Ф. Кавиев,
кандидат ист. наук, доцент.

Гильмуллин М.Ф. История математики: Учебное пособие / М.Ф. Гильмуллин. — Елабуга: Изд-во ЕГПУ, 2009. — 212 с.

ISBN 978-5-9662-0038-1

В учебном пособии изложен профессионально направленный курс истории математики, составленный по ее периодам развития. Целью пособия является ознакомление будущего учителя математики с основными этапами развития науки и его подготовка к осуществлению культурно-исторического подхода к преподаванию математики в средней школе.

Предназначено для студентов математических специальностей педагогических вузов, учителей математики и преподавателей, применяющих историю математики в своей работе.

ISBN 978-5-9662-0038-1

Предисловие

Обучение истории науки является важной составной частью подготовки учителей математики. Его значение особенно возрастает в настоящее время в связи с повышением роли математики во всех сферах человеческой деятельности. Современное математическое образование в школе невозможно без подготовки учителя, способного его осуществить. Математика должна им пониматься в контексте всей культуры. Знания не только математики, но и знания о математике становятся профессионально необходимыми. Поэтому совершенно необходимо включение в учебный план подготовки учителя профессионально направленного курса истории математики. Таким образом, изучение истории математики в педагогическом вузе не является самоцелью.

Целью этого учебно-методического пособия является ознакомление будущего учителя математики с основными этапами развития науки и его подготовка к осуществлению культурно-исторического подхода к преподаванию математики в средней школе. Это сложная научно-методическая задача. Книга является составной частью учебно-методического комплекса по истории математики для студентов физико-математических факультетов педагогических вузов. Она написана на основе имеющейся историко-математической литературы, научно-методических исследований проблемы историко-математической подготовки учителей и личного опыта работы автора в высшей школе.

Историю математики можно писать в различных планах. Мы описывали развитие математики как единого целого раздела науки, но также как составной части истории человеческого общества. Главное место в этом описании занимает история основных понятий, методов и теорий в их последовательном развитии во времени, которое мы подразделяем, как принято в общей истории. Глава I является введением в профессионально направленный курс истории математики. Главы II-V книги соответствуют историческим периодам развития математики, определенным А.Н. Колмогоровым. Глава VI посвящена истории отечественной математики и составляет отдельный концентр данного курса и поэтому может быть использована для самостоятельного изучения. Она содержит и некоторые вопросы истории отечественного математического образования. Отдельный параграф в ней посвящен истории математики и математического образования Татарстана.

В конце каждого параграфа приводятся вопросы и задания, которые соответствуют его содержанию. Они могут быть разобраны на семинарских занятиях, а также вынесены на зачет.

В «Терминологическом словаре» даются определения понятий, выделенных в тексте учебника курсивом.

Практические цели обучения требуют обратить особое внимание на историю развития каждой содержательно-методической линии школьного курса математики. Как известно, это содержание охватывает линии расширения понятия числа, уравнений и неравенств, алгебраических преобразований, функций, начал математического анализа, геометрических фигур, координатного метода, аксиоматического метода, элементов теории вероятностей, приложений математики.

Важным является ознакомление студентов с биографиями классиков математической науки. Многие из них сыграли значительную роль в истории не только как математики. Раскрытие характера и особенностей их творчества имеет большое воспитательное значение.

Мы не будем претендовать на монографическое описание богатой фактами истории математики. Содержание самой истории математики основано на опубликованных исследованиях других авторов. Мы не ставим целью описание всех источников, заслуг и роли отдельных лиц. Автор видит свою задачу в систематизации и изложении имеющегося материала с точки зрения подготовки будущего учителя математики. Естественно, описаны истории открытия наиболее важных понятий и методов, создания теорий, решения классических проблем. Хотя при этом в тени остается труд множества людей, самоотверженно работавших во имя математики. В то же время мы должны были приоткрыть дверь в «лабораторию гения», проанализировать пути, которые привели к открытиям. Ведь, как сказал Лейбниц: «познание метода на выдающихся примерах ведет к развитию искусства открытия».

Глава I.
ВВЕДЕНИЕ В ИСТОРИЮ МАТЕМАТИКИ

1.1. История математики в школе

Большое значение приобретает изучение истории математики в вузе в связи с новыми требованиями к школьному образованию: гуманизация и гуманитаризация образования, профильное обучение и т.п. Перед исследователями встает задача создания учебных дисциплин, которые бы объединяли принципы естественнонаучных и гуманитарных предметов. Такой дисциплиной является и история науки. Глубокое понимание педагогического значения истории математики и широких возможностей ее применения в школе необходимо формировать у будущих учителей еще в педвузе.

Знание опыта развития математических знаний содействует выполнению учителями своих профессиональных обязанностей. Если учитель знает историю своего предмета, то он может координировать учебный процесс, делая его более эффективным. В основе такой работы лежит *принцип историзма* и *историко-генетический метод*. Генетический принцип обучения требует, чтобы обучение следовало путям происхождения знания. Историко-генетический метод учитывает, что ученики в своем личном обучении отражают в той или иной степени общий исторический путь, следуя которому, человечество добывало математические знания.

Многие математические теории, факты, термины и символы первоначально кажутся искусственными и оторванными от жизни. Если же к ним подойти с позиции исторического развития, то станет виден их глубокий жизненный смысл, их естественность и необходимость. Поэтому преподавание математики должно в основных чертах повторять путь развития самой науки.

Вопрос об использовании элементов истории при обучении математике не новый. Проникновение историко-генетического метода в преподавание математики начинается с появления в 1685 г. «Исторического и практического трактата по алгебре» Д. Валлиса. В XVIII-XIX веках его идеи развивали А.К. Клеро, В.Г. Спенсер. В конце XIX и начале XX века он обсуждался на съездах преподавателей математики России. Одним из активных пропагандистов историко-генетического метода был исследователь истории математики и математического образования В.В. Бобынин. В работе 1886 г. «Философское, научное и педагогическое значение истории математики» он писал: «Преподавание каждой науки должно идти тем же путем, которым шла при своем развитии сама наука». Более того, история математики должна быть теоретической основой методики математики: «История математики должна начертить искусству преподавания математики подробную программу, а также вместе с философией математики указать ему приемы и методы исполнения этой программы». Такие ведущие специалисты в области математики и математического образования, как А.Н. Колмогоров, А.Я. Хинчин, И.В. Арнольд, Н.Я. Виленкин, Б.В. Гнеденко и др. принцип историзма считали одним из главных среди принципов современного школьного образования.

Современная школьная программа указывает на необходимость ознакомления учащихся с фактами из истории математики, жизнью и творчеством выдающихся математиков. Но в программе нет конкретных указаний, какие сведения, когда и как сообщать. Изучение учениками развития математики означает систематическое, планомерное ознакомление на уроках с наиболее важными событиями из истории науки в связи с изучаемым теоретическим материалом. Ни в одном вузовском курсе будущие учителя математики такой методике не обучаются.

Историко-математическая подготовка учителей должна вестись с учетом профессионально-педагогической направленности. В этой концепции особо выделяется объединение общенаучной и методической линий подготовки. В методической системе обучения истории математики выделяются цели, соответствующие традиционным функциям обучения: образовательным, воспитательным, практическим. Образовательные цели включают в себя овладение системой знаний, дающей представление об объекте и предмете истории математики, периодах ее развития. Группу воспитательных целей составляют: формирование научного мировоззрения у студентов, творческой активности, интереса к математике и ее истории, эстетическое воспитание и др. К практическим целям относят: ознакомление с ролью истории математики в решении задач практики, в частности, практики преподавания математики, формирование общей, математической и методической культуры учителя. Историко-математическая подготовка учителя математики, таким образом, на более высоком уровне реализует и цели школьного образования. А именно: методисты считают, что использование истории математики в школе имеет следующие вполне определенные цели:

1) формирование научного мировоззрения учеников;
2) развитие познавательного интереса к изучению математики;
3) повышение общей культуры и расширение кругозора учеников;
4) углубление понимания ими изучаемого раздела;
5) осуществление межпредметных связей;
6) лучшее понимание роли математики в современном обществе;
7) нравственное воспитание на примере жизни и творчества великих математиков;
8) эстетическое воспитание.

Во многих случаях исторические сведения могут упростить изложение, сделать его более доступным для понимания, обеспечить наглядность изложения, показать преимущества выбранного метода перед другими. Например, изучая формулы сокращенного умножения, можно вспомнить, что в Древней Греции эти формулы доказывались геометрически. При первом знакомстве с арабской, точнее, индийской, нумерацией нужно показать ее преимущество в сравнении с римской или славянской нумерацией.

Учителю на первый взгляд кажется трудным найти на уроке время, необходимое для ознакомления учащихся с историческим материалом. В методической литературе описаны следующие формы сообщения исторических сведений: историческая справка, краткая беседа, экскурс, решение исторической задачи, доказательство именной теоремы, показ и разъяснение рисунка и другие. Они могут быть использованы на любом этапе урока и на уроках любого типа. Обычно им отводится 5-10 минут времени на одном уроке или на нескольких уроках, спланированных подходящим образом. Главную методическую трудность представляет вопрос о том, как на деле сочетать изучение определенной темы с изложением соответствующего исторического материала. Преодолеть эту трудность можно лишь постепенно, в ходе планомерной работы. Практически каждый учитель создает свою методическую систему обучения, в которую органически вплетается историко-математический компонент.

Другим путем ознакомления учеников с историческим материалом являются внеклассные занятия: факультативы, кружки, вечера, недели математики, конкурсы, математическая печать и т.п. Специфика исторического материала открывает широкие возможности для разработки историко-познавательных и математически содержательных конкурсов. Открытие и развитие математических теорий, доказательство отдельных теорем и решение некоторых задач настолько увлекательны, что могут представлять самостоятельные математические миниатюры. Именные теоремы и задачи, формулы, фигуры и числа всегда содержат повод для интересного и содержательного разговора.

Школьные учебники мало уделяют внимания истории математики, поэтому сведения об этом должны быть заимствованы из других источников. Имеется достаточно большая библиотека, содержащая исторический материал. Это пособия для учителей, учебники по истории математики, книги по истории отдельных разделов математики, хрестоматии, первоисточники, жизнеописания великих математиков и т.п. Несомненно, нужно обращаться к методическим материалам из журналов «Математика в школе», «Квант», газеты «Математика». Мы рекомендуем обратить внимание на литературу, приведенную в конце настоящего пособия.

Вопросы и задания

1. Назовите цели использования истории математики в школе.
2. Какие формы сообщения исторических сведений на уроках вы знаете?
3. Назовите преимущества индийской позиционной десятичной системы счисления по сравнению с римской нумерацией.
4. Какие системы счисления описываются в школьных учебниках?
5. Какие именные теоремы изучаются в школьной геометрии?

1.2. Предмет истории математики

История математики — одна из математических дисциплин. Она черпает свое предметное содержание из математики, как и любая другая часть математики. В истории математики принято ссылаться на определение предмета математики и ее периодизацию, данную А.Н. Колмогоровым. Он полагал, что дать адекватное формальное определение предмета математики невозможно, и дал это определение через ее историю. Его знаменитая статья «Математика» в Большой Советской Энциклопедии (1954) начинается с определения математики, данного Ф. Энгельсом в «Анти-Дюринге» (1877): «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал». Вместе с тем он подчеркивает, что запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, непрерывно расширяется в связи с запросами естествознания, так что это определение наполняется все более богатым содержанием. К данному определению неоднократно предлагались дополнения и уточнения, характеризующие современную математику. Например, ему противопоставлялось определение Н. Бурбаки: «Математика представляется скоплением абстрактных форм — математических структур». По мнению многих ученых (В.И. Арнольд, Л.Д. Кудрявцев и др.), предметом математики являются модели. Считается, что математика — это область человеческого знания, в которой изучаются математические модели, то есть логические структуры, у которых описаны некоторые отношения между их элементами. Согласно современной методологии науки, принято различать объект и предмет математики. Ф. Энгельсом определен объект математики (пространственные формы и количественные отношения). Н. Бурбаки, В.И. Арнольд и другие охарактеризовали предмет математики (модели).

Следуя К.А. Рыбникову, классику истории математики, включим в состав математики следующие компоненты:

1) факты, накопленные в ходе ее развития;
2) гипотезы, подвергающиеся в дальнейшем проверке опытом;
3) теории и законы, выражающие результаты обобщения фактического материала;
4) методологию математики, т.е. общетеоретическое истолкование математических теорий и законов.

Все эти компоненты математики находятся во взаимосвязи и в развитии. Выяснение того, как происходит это развитие в изучаемый исторический период и куда оно ведет, — это и является предметом истории математики. «История математики есть наука об объективных законах развития математики» (К.А. Рыбников). Таким образом, целью истории математики как науки является исследование закономерностей, по которым развивается математика. Объектом истории математики является процесс возникновения и развития математики. Ее предмет — модели исследуемого объекта, охватывающие все важные его компоненты — зафиксированные в опыте и включенные в процесс практической деятельности стороны, свойства и отношения объекта. Их мы называем моделями процесса развития математики. В историко-математической литературе специального названия предмета истории математики не встречается. Чтобы выделить компоненты предмета истории математики, на исследование процесса развития математики возлагаются определенные задачи:

1) воссоздание фактического содержания истории развития математики (возникновение математических понятий, методов, теорий; характер и особенности развития математики у отде-

льных народов в определенные исторические периоды; вклад, внесенный в математику отдельными учеными и др.);

2) раскрытие многообразных связей математики (с практическими потребностями и деятельностью людей; с развитием других наук; влияние экономической и социальной структуры общества на содержание и характер развития математики);
3) исследование закономерностей развития науки (вскрытие исторической обусловленности логической структуры современной математики, соотношения ее частей, диалектики ее развития и ее перспективы);
4) раскрытие влияния развития математической науки на ее преподавание в учебных заведениях.

Таким образом, история математики изучает возникновение математических понятий и теорий, устанавливает причины их возникновения и рассматривает их дальнейшее развитие.

Существует два подхода к изложению истории математики. В первом из них история математики рассматривается как история развития понятий, идей, переходящих от одного математика к другому, который их далее развивает. Например, Галилей повлиял на Кавальери, Кавальери — на Торричелли, Торричелли — на Паскаля, Паскаль — на Лейбница, а Лейбниц — на братьев Бернулли, братья Бернулли — на Эйлера. Эйлер оставил такой след в математике, что его последователей трудно перечислить. Через много лет после смерти Эйлера Лаплас говорил: «Читайте Эйлера. Это наш общий учитель». Приведенная цепочка охватывает XVI-XVIII века. Такой подход не ошибочен и он выявляет важные этапы в истории математики. Но он односторонен. Он не учитывает, что существует тесная зависимость между развитием математики и развитием общества в целом. История математики — это одна из частей истории человеческого общества. Преобладающие общественные и экономические условия определяют и математические исследования. Например, почему греческая математика больше занимается площадями, а итальянская (XV-XVI вв.) — объемами, вычислением центра тяжести, небесной механикой. Греческая математика обслуживала земледельческое общество. А XV век — век Великих географических открытий (открытие Америки

Колумбом в 1492 г., морского пути в Индию Васко да Гама в 1498 г.). Для плавания нужны корабли, их водоизмещение определяется объемом, а устойчивость — положением центра тяжести. Для ориентирования в океане необходимо вычисление географических координат. Или второй пример. Почему к дедукции пришли греки, а не египтяне или вавилоняне, хотя греки у них учились? Это связано с общественно-политическим устройством жизни тех народов. В Египте правил фараон, авторитет которого непререкаем. А Греция — демократическое государство, здесь принимаемые решения обсуждаются, их целесообразность доказывается.

Таким образом, для всестороннего рассмотрения процесса развития математики надо рассмотреть этот процесс в непосредственной связи с развитием человеческого общества. Уже возникшие математические структуры развиваются в той или иной степени самостоятельно, но это саморазвитие происходит в условиях и на основе практической деятельности людей и определяется, иногда непосредственно, иногда — в конечном счете, потребностями общества. Но не все математические идеи возникли непосредственно из нужд практики. Некоторые из них появлялись из необходимости развития самой математики. Английский математик Харди заметил, что «настоящая» математика «настоящих» математиков — Ферма, Эйлера, Гаусса, Абеля, Римана почти полностью «бесполезна» с точки зрения практического использования. Однако многое из этого «бесполезного» в дальнейшем находило применение в решении практических задач. Как замечательный пример такого, долгое время не признанного формального понятия, можно назвать понятие мнимого числа. Теория комплексных чисел в дальнейшем значительно упростила решение многих задач гидро- и аэромеханики. С другой стороны, состояние науки в определенный период позволяет пересмотреть и некоторые оценки прежних знаний. Например, бурный рост информатики и вычислительной техники возрождает внимание к приближенным методам старых времен. Сами электронные вычислительные машины расширяют круг задач, решаемых средствами математики. Вообще же область приложений математики постоянно расширяется.

Очень важно установить связь истории математики с другими науками.

Связь истории математики и философии естественна. Во-первых, математика выделилась из натурфилософии. Во-вторых, методы теории познания используются и в математике, и в обучении математике, и в методико-математических исследованиях. Диалектический метод устанавливает соотношения между компонентами методической системы. В-третьих, мировоззренчески направленное обучение математике в школе или вузе выделяется как цель во многих методических системах.

История науки, в том числе математики, является важной частью всеобщей истории, истории общечеловеческой культуры. Без ее изучения не может быть сформировано целостное представление о развитии человеческого общества. Поэтому историю математики мы изучаем в последовательном развитии во времени, подразделяя его, как принято в общей истории. При изучении различных периодов развития математики обязательно выделяется «социальный компонент» (смена общественных формаций, научно-технические революции, важнейшие открытия и события мировой культуры).

Очень тесна связь математики и физики. Многие успехи физики были связаны с успехами математики. И наоборот, постановка многих физических задач часто приводила к созданию новых математических теорий. Как пример приведем создание И. Ньютоном дифференциального и интегрального исчисления как математического аппарата механики.

Связь истории математики с педагогикой более сложная. Здесь в первую очередь мы устанавливаем, как влияет развитие математической науки на ее преподавание. В историю образования внесли большой вклад многие математики. Реформы образования непосредственно касались и математики. В настоящее время усиленно разрабатывается история отечественного математического образования.

Связь истории математики и информатики интересна с нескольких сторон. Во-первых, использование компьютеров налагает отпечаток на математику. Даже поднимался вопрос: необходимо выделить в отдельный период появление машинной математики. Во-вторых, в связи с созданием компьютерных учебников и обучающих систем по математике возникает проблема их методического обеспечения. В-третьих, курс истории математики сам является предметной областью, для которого целесообразно ставить задачу создания и применения компьютерного учебника.

Вопросы и задания

1. Назовите объект и предмет математики.
2. Назовите компоненты математики.
3. Определите объект и предмет истории математики.
4. Назовите задачи истории математики.
5. Назовите способы изложения истории математики.
6. Приведите примеры влияния общественно-политического устройства общества на развитие математики.
7. Приведите примеры математических теорий, созданных «впрок».
8. Приведите примеры математических теорий, получивших дальнейшее развитие в современной математике в связи с потребностями науки и практики.
9. Приведите примеры влияния развития математики как науки на ее преподавание в учебных заведениях.

1.3. Периоды развития математики

В истории математики можно различать отдельные периоды, отличающиеся друг от друга рядом характерных особенностей. В основу периодизации обычно полагают оценку содержания, уровня достижений и особенностей математических исследований: ее важнейших методов, результатов, идей. Чаще всего на практике используется периодизация А.Н. Колмогорова, приведенная в его статье «Математика» (1954). В ней он выделяет четыре периода развития математики.

1. *Зарождение математики.* Этот период начинается с возникновением человечества и продолжается до VI-V веков до н.э. Здесь происходит накопление фактического материала математики в рамках общей неразделенной науки. Формируются первичные представления о натуральных и дробных числах,

геометрических фигурах и телах. Вырабатываются методы решения простейших прикладных задач. Включает в себя математику Древнего Египта, Древнего Вавилона, Древней Индии и Китая. Заканчивается в Древней Греции.

2. *Период элементарной математики.* Этот период продолжается от VI-V веков до н.э. до конца XVI века н.э. Он характеризуется достижениями в изучении свойств постоянных величин. Поэтому иногда этот период в литературе называют еще «периодом математики постоянных величин». Эта математика в основном изучается в средней школе. Математика превращается в строгую дедуктивную науку. Включает в себя математику Древней Греции, эллинистических стран, средневекового Китая и Индии, стран ислама, средневековой Европы и Эпохи Возрождения.

3. *Период создания математики переменных величин*. Этот период продолжается от начала XVII века до середины XIX века. Он отличается введением в математику функций и их изучением. Введение переменных величин в геометрию приводит к созданию аналитической геометрии. Для изучения функциональных зависимостей создается дифференциальное и интегральное исчисление. В этот период складываются почти все научные дисциплины в качестве классической основы современной математики. Поэтому его называют также «периодом высшей математики». Условно подразделяется на математику XVII и XVIII веков.

4. *Период современной математики*. Этот период отсчитывается с середины XIX века и продолжается в наши дни. К нему привел критический пересмотр проблем оснований математики. Появляются многие новые математические теории и расширяются ее приложения. Создаются теоретико-групповые методы в алгебре, неевклидовы геометрии. Математический анализ перестраивается на основе строгого определения действительного числа и предела.

Во второй половине XX века, на фоне бурного развития вычислительной техники и проникновения компьютерных технологий во все области практической и теоретической деятельности людей, ими стали пользоваться и математики.

Использование компьютеров налагает отпечаток и на математику. Но, пока, нет оснований считать его началом нового периода развития математики.

При широком понимании задач курса истории математики его изложение естественно вести не по содержательно-методическим линиям школьной математики, а по историческим периодам.

Вопросы и задания

1. Назовите периоды развития математики.
2. Охарактеризуйте кратко каждый период развития математики.
3. Попытайтесь установить соответствие между периодами развития математики и ступенями в ее преподавании.
4. Соответствует ли предмет современной математики его определению, данному Ф. Энгельсом?

Глава II.

ЗАРОЖДЕНИЕ МАТЕМАТИКИ

2.1. Возникновение математических понятий в первобытном обществе

Мы определили математику как науку о пространственных формах и количественных отношениях. Чувство формы выражается воспроизведением объекта в рисунке, то есть в фигуре. Количественное отношение выражается числом. Таким образом, число и фигура — первоначальные математические понятия.

Первые представления о них относятся к эпохе древнего каменного века — палеолита, начало которого относят ко времени около 3 миллионов лет назад. 5 миллионов лет тому назад на территории Восточной и Южной Африки появились высшие человекообразные приматы. Ученые полагают, что они были предками первых людей. Первобытный человек сформировался в процессе сложного и долгого развития, постепенно расселяясь по всей планете, около 2 миллионов лет тому назад. Люди жили в пещерах, занимались собирательством (охота, рыбная ловля, сбор растительной пищи). Вырабатывался язык для общения. Единственное отличие человека от животных — изготовление орудий труда и их применение. Они совершенствовались очень медленно. Открытие огня существенно отделило людей от животных, изменило их быт. В результате длительного воздействия на первобытного человека окружающей природы, коллективных форм жизни, трудовой деятельности около 40 тысяч лет назад появился человек современного вида. К концу палеолита (около 25-15 тысяч лет назад) появляются наскальные рисунки, в частности, они найдены в пещерах Франции, Испании. Археологические данные подтверждают, что к этому времени люди научились рисовать, писать, считать. На Кипре найден глиняный диск овальной формы с письменностью минойцев, древнего населения острова. В Моравии найдена кость волка с делениями. Всем этим документам 15 тысяч лет.

Около 20 тысяч лет назад началось потепление, климат, близкий к современному, установился 12 тысяч лет назад. Отступают ледники, появляется возможность обрабатывать землю. На Ближнем Востоке 15-12 тысяч лет назад зарождается земледелие. Происходит переход от простого собирания пищи к активному ее производству. 10 тысяч лет назад земледелие становится основным занятием человека, а чуть позже появляется скотоводство. Начинается новая эра в развитии человечества — неолит, или новый каменный век.

В эпоху палеолита люди мало продвинулись в понимании числовых величин и пространственных отношений. В эпоху неолита появляются условия для их развития. Прекращаются странствования в поисках пищи. Строятся жилища, хранилища для урожая, изготавливается посуда. Появляются ремесла: гончарное, плотницкое, ткацкое. Возникает обмен — зачатки торговли. Развитие человечества в эпоху неолита делает значительный скачок. Люди научились плавить металл (10 тысяч лет назад, а далее по-разному в различных районах земли). Каменный век сменяется бронзовым веком (6 тысяч лет назад в Месопотамии, 4 тысячи лет — в Европе), а затем железным веком (3 тысячи лет назад). Совершенствуются орудия труда, повышается производительность. Деревенские поселения с развитым ремеслом и торговлей вырастают в первые города (7,5 тысячи лет назад в Месопотамии, Египте). Родовые отношения постепенно разрушаются. Общество расслаивается на классы. Возникает рабовладельческое общество. Образуются государства. По различным причинам, в результате войн, покорения одних народов другими, возникают новые или исчезают ослабевшие государства и народы. Большинство народов прошли такой путь развития. К концу IV тысячелетия до н.э. родовой строй был изжит в наиболее развитых обществах и первобытные общества подошли к эпохе цивилизаций.

Вот на таком фоне исторического развития народов и возникли первоначальные математические понятия числа и фигуры. Непосредственных свидетельств их возникновения и развития не сохранилось. Поэтому мы обращаемся к косвенным свидетельствам. Для составления полной картины математической культуры любого народа следует изучить все этапы ее развития, начиная с дописьменного периода. Для этого используются материалы археологии, этнографии, сравнительного языкознания, фольклора. С возникновением живописи и письменности появляется возможность передать при помощи картины или знаков то или иное содержание. До нас дошли древние папирусы (Египет), глиняные таблички (Крит, Междуречье), дощечки из бамбука (Индия, Китай) с древними текстами. Бумага была изобретена в I веке до н.э. в Китае. Для изучения развития математики в ранние периоды обращаются и к трудам историков более позднего времени. Сопоставляя сведения, полученные из этих источников, можно приблизительно восстановить картину того, как считали наши далекие предки, как они оценивали величины при помощи чисел. Эти сведения имеют значение и для опровержения теорий, согласно которым понятия числа и фигуры являются у человека врожденными.

Первоначальные математические понятия взяты из практики, из наблюдений за окружающими предметами. Ф. Энгельс пишет: «Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствовано исключительно из внешнего мира, а не возникло в голове из чистого мышления». Появление первых рисунков может быть как-то аргументировано. Но о появлении первых чисел можно лишь делать какие-то предположения.

Считается, что понятие числа возникло вследствие практической необходимости пересчета предметов. Полагают, что первые числа — один и много — имеют качественный, а не количественный характер. Запас чисел на ранних стадиях весьма ограничен. Ряд известных и используемых чисел конечен и удлиняется лишь постепенно. Сначала появляется число 2, которое отождествляется с реальными объектами: у индейцев — глаза, у тибетцев — крылья и т.п. Большие числа сначала образуются с помощью сложения, т.е. одновременно с получением новых чисел вводится и основное действие над ними — сложение. Эти выводы делаются также из наблюдения за развитием счета у малоразвитых народов. Например, ко времени прихода европейцев в XVII в. коренные племена Австралии имели крайне бедный запас чисел. Одно из племен использовало для выражения малых чисел такие слова: 1 — энэа, 2 — петчевал, 3 — петчевал-энэа, 4 — петчевал-петчевал. Миклухо-Маклай в XIX в. так описывал счет папуасов Новой Гвинеи: загибая пальцы руки они издавали определенный звук, например, «бе»: бе, бе, бе, бе, ибон-бе, потом на другой руке — бе, бе, бе, бе, ибон-али, на ноге — самба-бе, на другой ноге — самба-али. Можно понять, что али — это два, но в сочетании с другим словом, обозначающим конкретный предмет. Наличие многих общих черт позволяет предположить, что аналогично было возникновение счета и у других народов.

Вообще, каждое натуральное число есть свойство, общее для всех совокупностей, предметы которых можно сопоставить по одному, и разное у совокупностей, для которых такое сопоставление невозможно. Естественно, такое понимание о нем возникло в результате очень длительного и сложного исторического процесса развития способности к абстрактному мышлению. В возникновении первоначального представления о числе можно выделить три основных этапа:

1. Установление случайного взаимнооднозначного соответствия между двумя сравниваемыми множествами.
2. Появление различных эталонов счета, вначале естественных: луна — 1, глаза — 2, рука — 5 и т.п., затем искусственных — счетные палочки, камешки и т.п.
3. Переход к единому, наиболее удобному эталону счета: руки — двоичная, пальцы руки — пятичная, пальцы обеих рук — десятичная системы счисления.

Счет предметов с помощью эталонов сопровождался образованием числительных и возникновением числовых обозначений. Изображение и наименование чисел у разных народов и в разные времена были основаны на следующих общих принципах. Вводятся основные знаки, с помощью которых записываются и называются остальные числа. Обычно используется сочетание трех принципов: аддитивного, субтрактивного и мультипликативного, когда стоящие рядом знаки означают соответственно сумму, разность и произведение значений этих знаков. В более поздних нумерациях значение знака стало зависеть еще от его позиции.

Таким образом, по мере совершенствования счета появляются различные системы счисления. Следы древних систем счисления сохраняются и в наши дни, например, пятичной, двадцатичной, шестидесятичной.

Когда количество предметов превышало количество пальцев рук и ног, люди стали пользоваться для числовых записей камешками, зарубками на палках, пучками, узлами на веревках и т.п. Для перехода от таких приемов к специальным символам оставался только один шаг. И такие символы мы обнаруживаем в начале писаной истории.

Сознание неограниченной продолжимости ряда чисел является признаком высокого уровня знаний и культуры. В разное время у разных народов предельными числами были 2, 3, 5, 7, 10, 40, 60, 100 и др. Многие из них попали в категорию «мистических чисел».

С конкретными геометрическими фигурами человек столкнулся в своей трудовой деятельности. Еще в эпоху, когда люди пользовались каменными орудиями труда, они придавали им некоторую форму: треугольников, трапеций. Художники земледельческих обществ уже не только копировали природу, а изображали ее в символах и орнаменте. Ломаная или волнистая линия обозначала воду, треугольник — плодородие, окружающий мир представлялся в виде ромба, ориентированного по сторонам света. Дальнейший толчок развитию геометрических представлений дали ремесла: изготовление сосудов, одежды, постройка зданий. Особенно сильное влияние оказало земледелие. Тогда задачи проведения границ участков, определения длин и площадей сделались жизненно насущными.

К отвлеченным понятиям геометрической фигуры и геометрического тела человек пришел, отвлекаясь от физических свойств предметов, изучая их размеры, формы и положение. Геометрические фигуры встречаются в самых древних дошедших до нас математических документах (египетских папирусах, вавилонских клинописных текстах), написанных около 4 тысяч лет назад.

Как и для чисел, происхождение названий геометрических фигур первоначально связывалось с конкретными предметами. Большинство общепринятых в настоящее время названий геометрических фигур являются греческими и обозначают конкретные предметы, имеющие схожую форму.

Например, слово «центр» происходит от греческого слова *κεντρον* (лат. centrum), обозначавшего первоначально палку с заостренным концом, которой погоняли быков. Этим же словом стали называть острую ножку циркуля, ставящуюся на центр окружности.

Слово «трапеция» происходит от слова *τραπεζιον*, означающего «столик», «сфера» (лат. sphaera) — *σφαιρα* — «мяч», «цилиндр» — *κιλινδρος* (лат. cylindrus)— «валик» и т.п.

Создание понятий о геометрических фигурах было тесно связано с изображением различных плоских фигур на рисунках и орнаментах и изготовлением моделей различных тел. Ранние орнаменты, возможно, имели магическое или религиозное значение. Но постепенно стало преобладающим их эстетическое значение. Появление орнаментов на изделиях знаменовало уже закрепление представлений о равенстве, подобии, симметрии.

«Число» и «фигура», исторически первые понятия математики, и в наше время лежат в основе всех математических знаний. Другие математические понятия: «площадь», «объем» и другие абстракции пространственных свойств предметов, сформировались аналогично в результате длительного исторического развития и возникли из повседневной практической деятельности людей.

Вопросы и задания

1. Назовите первоначальные математические понятия.
2. Охарактеризуйте кратко начало развития понятия числа.
3. Объясните происхождение названий известных геометрических фигур.

2.2. Накопление математических сведений и создание практической математики древними цивилизациями Востока

В течение V-III тысячелетия до н.э. новые и более совершенные формы общества сложились на берегах великих рек Азии и Африки в субтропическом поясе: на долинах рек Нил, Тигр и Евфрат, Инд и Ганг, Хуанхэ и Янцзы. С переходом на земледелие в первую очередь заселились районы с плодородными землями. Прибрежные земли в районах рек могли давать обильные урожаи при условии ухода за посевами: регулировании разливов, орошения, осушения болот. Требовалось строить плотины, водохранилища, каналы. Все эти работы требовали централизованного управления. Возникли города, появились новые специальности: ремесленники, солдаты, писцы. Руководство общественными работами находилось в руках людей, сведущих в смене времен года, в деле землеустройства, хранения запасов, взимания налогов. Чиновники накопили различные знания: технические, медицинские и др. Они постигли также искусства счета и измерения. Знания возвышали этих людей над обществом. Появились жрецы — служители храмов, которые стали носителями этих знаний. Во многих восточных странах жрецы занимали высокое положение. Чтобы не потерять своего влияния, они допускали к обучению лишь узкий круг лиц.

Восточное общество жило циклами. Обширные владения под управлением одного лица, большие государства могли держаться столетиями, а потом исчезнуть под ударами соседей. В этих условиях периоды культурного подъема сменялись веками застоя и упадка. Еще одной особенностью древневосточных государств была их обособленность и консервативность. Несмотря на сходство экономического строя и одинаковый уровень научных знаний, их культуры оставались различными. Поэтому культуру этих цивилизаций изучают отдельно. В том числе и математику — хотя по арифметической природе они весьма схожи.

Восточная математика возникла как прикладная наука, имевшая целью обеспечить календарные расчеты, межевание земель, распределение материалов и урожая, организацию общественных работ, сбор налогов. Поэтому она основывалась на арифметических расчетах и измерениях.

Датировать открытия восточной математики трудно. Научные сведения сохранялись без изменений в течение долгого времени, даже тысячелетий. Хранилища научных знаний часто уничтожались в результате войн, наводнений, пожаров. Трудность в датировке связана также с материалом, которым пользовались эти народы для их закрепления (папирусы, глиняные дощечки, кора, бамбук, шелк, позже бумага). Поэтому наши сведения о восточной математике весьма отрывочны.

Математика Древнего Египта

Одними из первых перешли к земледелию жители долины Нила. К концу IV тысячелетия до н.э. образуется единое государство Египет во главе с фараоном. Долгая история этого государства проходит через Древнее, Среднее, Новое царства. В разное время столицами были города Тис, Мемфис, Фивы, Саис. Наиболее известные фараоны Менес (Мина), Хеопс, Эхнатон, Тутмос, Рамсес. Последнее самостоятельное древнеегипетское царство — при фараоне Псамметихе. В 655 г. до н.э. он при помощи греков изгоняет захвативших их ассирийцев, и позволяет грекам организовать колонию в Египте. Дальнейшая история Египта — время упадка страны. В 525 г. до н.э. был завоеван персидским царем Камбизом, в 332 г. до н.э. — Александром Македонским.

Знаковыми достижениями древнеегипетской цивилизации являются: изобретение иероглифической письменности (в IV тысячелетии до н.э.), строительство пирамид (например, пирамида Хеопса, построенная в XXVI в. до н.э., высотой в 146 м., причислялась древними к семи чудесам света), первый календарь (принятый еще в V тысячелетии до н.э., с продолжительностью года в 365 дней). О состоянии математики в Древнем Египте нам позволяют судить два дошедших до нас папируса. Египетская математика мало изменилась с тех пор, как были составлены эти папирусы.

Первый папирус известен в истории математики как «папирус Райнда», или «папирус Ахмеса». Он хранится в Британском музее в Лондоне. Найден в 1858 г. и приобретен англичанином Райндом. Расшифрован в 1870 г. Имеет размеры: длина 544 см, ширина 33 см. Содержит 84 задачи. Написан в XVII в. до н.э., но содержит более старый материал. Назван «Наставление, как достигнуть знания всех темных..., всех тайн, которые содержат в себе вещи. Сочинение написано в 33 году в 4 месяце времени вод в царствовании царя Ра-а-ус. Со старых рукописей времени царя ...Писец Ахмес написал это».

Второй папирус называют «московским папирусом», он хранится в московском Музее изобразительных искусств имени А.С. Пушкина. Имеет размеры: длина 550 см, ширина 8 см. Содержит 25 задач. Написан на два века раньше. Приобретен в конце XIX в. востоковедом В.С. Голенищевым. Расшифрован в 1927 г.

Математика в папирусах излагается как решение задач. Все задачи имеют практическое содержание: о количестве хлеба, о емкости хранилищ, о площади поля и т.п. Они группируются не по методам решений, а по темам. Каждая задача решается заново, без каких-либо пояснений, в числах. Числа как таковые, а также методы решения задач еще не являются предметом рассмотрения.

Числа записывались в десятичной системе счисления со специальными знаками — иероглифами — для десятичных единиц каждого разряда. Таким образом, позиционного принципа записи еще не было. Иероглифы первоначально имели вид рисунков и сохраняли внешнее сходство с конкретными предметами.

𓏺	(единица) — означал зарубку;
𓎆	(десять) — означал пару вытянутых рук;
𓍢	(сто) — измерительная веревка;
𓆼	(тысяча) — цветок лотоса, символ изобилия;
𓂭	(десять тысяч) — поднятый кверху палец;
𓆐	(сто тысяч) — сидящая лягушка;
𓁨	(миллион) — человек с поднятыми руками.

Каждый знак в записи числа повторяется столько раз, сколько в данном числе единиц соответствующего разряда. Записи выполняются справа налево.

Арифметика египтян преимущественно аддитивного характера, т.е. все вычисления сводятся к сложению. Умножение сводится к удвоению и сложению. Например, для вычисления 13·11 выполнялись удвоения

1	11
2	22
4	44
8	88

и складывались 88+44+11=143.

В египетской арифметике вводятся и дроби. Все дроби сводятся к суммам так называемых «основных», или «*аликвотных*» дробей. Это дроби, имеющие числителем единицу. Исключение составляла дробь 2/3:

$$\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}.$$

	1/2
	1/5
	1/10
	2/3

У историков математики принято писать $\bar{n}$ вместо $1/n$. Самые простые разложения писцы должны были знать наизусть:

$$\bar{6} + \bar{6} = \bar{3},\ \bar{3} + \bar{6} = \bar{2},\ \bar{2} + \bar{3} + \bar{6} = 1.$$

Сведение к суммам основных дробей производилось с помощью таблиц, которые давали разложение дробей вида 2/n, где n — нечетное число. Например,

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}.$$

Хотя нетрудно проверить, что любая такая дробь представляется в виде суммы двух основных дробей:

$$\frac{2}{2k+1}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(2k+1)}.$$

Например,

$$\frac{2}{19}=\frac{1}{10}+\frac{1}{190}.$$

Как производился выбор слагаемых, остается неизвестным. Такие действия с дробями придавали египетской математике тяжеловесность.

Деление было самой трудной арифметической операцией. Здесь применялось нахождение частей числа.

Пример. $19:8=2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.$

1	8
2	16
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	1

Далее складываются подходящие части, так как 19=16+2+1.

Разложение дробей на сумму основных дробей применялось в математике очень долго, даже в средние века.

Греческий математик Прокл писал в V в. н.э., что согласно большинству мнений геометрия была впервые открыта в

Египте, имела свое происхождение в измерении площадей. В самом деле, некоторые задачи египтян имеют геометрическую природу и касаются преимущественно измерений земельных участков соответствующей формы.

Площадь треугольника вычислялась правильно: половина произведения основания на высоту. Площадь круга диаметра d вычислялась по правилу

$$S = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 .$$

Это дает для числа π приближенное значение

$$\frac{256}{81} \approx 3{,}1605.$$

Площадь четырехугольника произвольной формы со сторонами a, b, c, d находили как произведение полусумм противоположных сторон:

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}.$$

Эта формула справедлива только для прямоугольника.

Вычисляются объемы тел, как произведение площади основания на высоту: куба, параллелепипеда, цилиндра. Все они рассматриваются как сосуды для зерна. Имеется даже такой замечательный результат, как объем усеченной пирамиды с квадратным основанием:

$$V = \frac{1}{3} h\left(a^2 + ab + b^2\right),$$

где a, b — стороны основания, h — высота пирамиды.

Есть основания полагать, что строившие пирамиды египтяне обладали еще многими другими геометрическими знаниями и умениями: равенство углов при основании равнобедренного треугольника, представление о подобии геометрических фигур, умение измерять и переносить углы, использование прямоугольной координатной сетки. Такие выводы позволяют делать также использование ими приборов в строительной практике: треугольного ватерпаса, простейшего диоптра.

«Египетские треугольники», прямоугольные треугольники с отношениями сторон 3: 4: 5, использовались в землемерной практике. С помощью веревки с завязанными на ней на равном расстоянии узлами можно было размечать прямые углы земельных участков. Арпедонапты (натягивающие веревку) применяли свои знания и в строительном деле.

Рассматриваются египтянами и алгебраические задачи, сводящиеся к линейным уравнениям с одним неизвестным.

Пример. Некое количество и его четвертая часть вместе дают 15. Каково количество?

Приведем традиционное решение в египетском духе:

Начни с 4. Получишь 5. 15 подели на 5. Результат умножь на 4.

В этом решении применяется метод, получивший в более поздние времена название «правила ложного положения». Для неизвестной величины берется произвольное значение, учитывая особенности входящих в задачу чисел, стараясь избавиться от дробей. Когда в результате предписанных действий получается не то число, которое требуется получить по условию, то испробованное «ложное» значение и значения его частей подвергаются пропорциональному исправлению.

Встречаются задачи, в которых разыскивается отвлеченное число, не связанное с определенными объектами. Оно обозначается специальным иероглифом, обозначающим «кучу» и читающуюся hau (хау). Поэтому египетскую алгебру иногда называют хау-исчислением.

Таким образом, в математике Древнего Египта мы встречаем некоторые элементы классической элементарной математики.

Научные исследования и обучение писцов в Древнем Египте проходили в так называемых «Домах жизни», создававшихся при храмах и имевших в своем составе библиотеку. Система образования включала в себя достаточно глубокое изучение математики.

После завоеваний Египта Александром Македонским начинается процесс синтеза греческой и египетской культур.

Математика Древнего Вавилона

Культура древнего Двуречья, образованного Тигром и Евфратом, называется вавилонской по имени одного из крупнейших городов этой области. Двуречье называют также Междуречьем, Месопотамией. Первоначально эта культура возникла южнее, на берегу Персидского залива. В IV тысячелетии до н.э. на дельтах этих рек возникли шумерские города Ур, Урук, Лагаш. Основа культуры Двуречья была заложена шумерами. Позднее с северо-запада в Двуречье пришли семитские племена, главным городом которых стал Аккад. В середине IV тысячелетия произошло крупное наводнение с большими жертвами, которое послужила основой мифа о Всемирном потопе.

В XXIV веке до н.э. шумеры были завоеваны аккадянами, образуется единое государство. Его история знала много раз периоды подъема и упадка. Шумеры как народ исчезают в XVIII в. до н.э. Их история была восстановлена только в новейшее время. В XVIII в. Месопотамия достигает своего расцвета. Это новое царство со столицей в Вавилоне, вблизи нынешнего Багдада. Царь Хаммурапи присоединяет соседние земли. При нем был разработан свод законов, которые действовали на его территории на протяжении тысячи лет. Этот свод был образцом для законодателей. Однако войны ослабили вавилонское государство и оно было завоевано племенами горцев. Наступил длительный период застоя. В 729 г. Вавилон захватили ассирийцы. Восстановление могущества Вавилона состоялось в VII в до н.э. при царе Навуходоносоре. Затем в 538 г. до н.э. он был захвачен персами, в 336 г. — Александром Македонским. После его смерти Двуречье становится одной из областей эллинистического государства Селевкидов. В это время усиливается взаимное проникновение и развитие восточной и греческой математики.

Известность Вавилона как центра торговли, ремесел и искусств связана с тем, что через него шли водные пути от Персидского залива к предгорьям Кавказа и караванная дорога из Ирана в Египет. Расцвет торговли повлек за собой развитие денежной системы. Необходимость путешествий заставила наблюдать за небесным сводом. Эти наблюдения привели к первым систематизированным знаниям по астрологии и астрономии. Вавилоняне составили подробную карту звездного неба, первыми установили продолжительность года в 365 дней. О достаточно обширных познаниях вавилонян в математике сообщает древний историк Геродот. Он рассказывает о реализованных ими грандиозных проектах по изменению русла рек, созданию искусственных каналов.

Шумеры изобрели клинописное письмо. Основным материалом для письма служили глиняные плитки. На пластинку из мягкой глины наносили знаки, после чего их обжигали, или просто высушивали. Полученные дощечки при бережном обращении могли храниться веками. Много их найдено при археологических раскопках. Датируются они разными веками от XXX до I века до н.э. Сейчас такие плитки находятся в разных музеях мира. Известно примерно 150 фрагментов с текстами математических задач и 200 с числовыми таблицами. В расшифровке клинописных текстов значительны заслуги О. Нейгебауэра, Ф. Тюро-Данжена, А. Сакса и др. Анализ этих математических текстов проводился в 30-х годах XX в.

В Вавилоне мы впервые встречаемся с последовательной позиционной нумерацией. Эта нумерация использует только два клинописных знака: вертикальный клин ▼ для обозначения 1 и горизонтальный клин ◄ — для 10. Числа от 1 до 59 записываются при помощи этих знаков, повторяя необходимое количество соответствующих клиньев. 60 изображается тем же вертикальным клином. Знака для нуля сначала не было, позже был введен знак, заменявший нуль, для отделения разрядов между собой. Этот знак никогда не ставился в конце числа. Впоследствии вертикальный клин стал обозначать любую целую степень числа 60, в том числе и отрицательную.

У историков математики теперь принята такая запись:

$$2,21;12,27 = 2\cdot 60 + 21 + \frac{12}{60} + \frac{27}{60^2}.$$

Операции сложения и вычитания производились так же, как это делается в десятичной позиционной системе счисления. Для умножения существовал обширный набор таблиц.

Деление сводилось к умножению. Поэтому составлялись таблицы обратных величин.

Имеются различные объяснения того, почему 60 было выбрано вавилонянами за основание системы счисления. Наиболее убедительной является теория, предложенная О. Нейгебауэром: шестидесятичная система счисления возникла из шестидесятичной системы мер, а именно: из денежно-весовой системы мер. Вавилоняне имели довольно развитую торговлю. Весовой и денежной единицей у шумеров была *мина*. Аккадяне пользовались *шекелем*. При их совместном употреблении и обращении установили, что мина в 60 раз больше шекеля. Со временем была введена новая мера — *талант*, равная 60 минам. Позднее для всех них стали использовать один и тот же клин, но при этом талант писали перед минами, а затем шекели. Таким образом, величина определялась не только знаком, но и местом записи числа.

Значение позиционной системы счисления в истории науки огромное. Она заменяла сложную систему обозначений простой. Кроме того, следы шестидесятичной системы удержались в современной науке при измерении углов и времени. Шестидесятичными дробями пользовались в астрономии ученые всех народов до XVII в., называя их астрономическими дробями.

Но запись чисел у вавилонян имела и свои недостатки. Вертикальный клин мог означать талант, мину или шекель, а что именно, можно было установить только из контекста. Усложняло понимание и отсутствие нуля в положенных местах.

Вавилоняне владели техникой решения квадратных уравнений. Более того, решали задачи, сводящиеся к кубическим и биквадратным уравнениям. Имеется большое число задач, представляющих собой уравнения и системы уравнений первой и второй степени. Решение таких задач ограничивается так же, как у египтян, простым перечислением этапов вычисления, необходимого для ее решения.

По всей вероятности, квадратные уравнения появились в результате развития самой науки, из обращения задач, поставленных практикой. Например, зная стороны прямоугольника, легко подсчитать его площадь и периметр. Если же, зная периметр и площадь, попытаться найти стороны, то получится каноническая система уравнений, сводящаяся к квадратному уравнению.

При вычислениях широко используются таблицы умножения, обратных величин, квадратных и кубических корней. Приводятся превосходные приближения:

$$\sqrt{2} \approx \frac{17}{12} \approx 1,4167, \text{ вместо } \sqrt{2} \approx 1,4142.$$

Видимо, применялась формула приближенного вычисления квадратных корней из неквадратных чисел (метод Герона)

$$\sqrt{a} = \sqrt{x^2 + h} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right),$$

которая получается отбрасыванием малой величины

$$\frac{h^2}{4x^2}.$$

Основной чертой вавилонской геометрии был ее алгебраический характер. Приводятся формулы площадей и объемов. В частности, имеются правила для вычисления площадей некоторых правильных многоугольников.

Считается, что вавилонянам была известна теорема Пифагора. В одной из глиняных табличек имеется список прямоугольных треугольников с рациональными сторонами, т.е. пифагоровых троек чисел x, y, z таких, что $x^2+y^2=z^2$. Реконструкция методов их подбора приводит к формулам

$$x = p^2 - q^2,\ y = 2pq,\ z = p^2 + q^2,$$

известным в теории чисел как диофантовы.

Вавилонская математика считается выше египетской. Она оказала существенное влияние как на греческую математику, так и на математику других народов, находившихся в политических и экономических связях с Вавилоном. Хотя влияние египетской науки на греческую считается выше.

Математику Древнего Китая и Индии удобнее изложить перед историей математики этих стран в средние века. Хотя математики Индии и Китая подчеркивают древность их науки, для подтверждения этого у них нет древних математических текстов.

Несколько позже возникли цивилизации в Средней Азии, Закавказье, на побережье Средиземного моря, в Америке. По остаткам этих древних цивилизаций можно судить о том, что они мало уступали Египту и Вавилону. Но документально подтвержденная математика сохранилась только в Египте, Месопотамии, Индии и Китае.

Таким образом, математика Древнего Востока — это набор математических правил, позволяющих решать практические задачи. Разработаны системы счисления, включая позиционные. Решены уравнения первой и второй степени. Найдены формулы для вычисления площадей и объемов.

Все они получены опытным путем, без всяких попыток обоснования. Поэтому восточная математика не может считаться строго научной. Для зарождения математики как науки требовалось возникновение новой цивилизации.

Вопросы и задания

1. Назовите источники математики Древнего Египта и Вавилона.
2. Охарактеризуйте способ изложения решения задач в математике Древнего Востока.
3. Перечислите основные достижения математики древних цивилизаций Востока.
4. Сравните уровень развития математики в Древнем Египте и Древнем Вавилоне.
5. Оцените значение изобретения позиционной системы счисления.

Глава III.
ПЕРИОД ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

3.1. Начало теоретической математики

В странах древнего Востока математики как науки в нашем теперешнем понимании, то есть развитой дедуктивной системы предложений, не было. Рождение такой науки, основанной на строгих доказательствах, мы наблюдаем в Древней Греции. Почему же именно греки пришли к новой математике?

В течение XXX-X веков до н.э. в бассейне Средиземного моря и прилегающих областях очень многое изменилось в экономике и политике. Это время характеризуется массовым переселением народов в результате войн и смут. Примерно в IX в. значительно слабее стали Египет и Вавилон, более сильными стали такие народы, как евреи, ассирийцы, финикийцы, греки.

Бронзовый век сменился веком железа. Это привело к ускорению роста экономики благодаря удешевлению средств производства. Создается избыток продуктов и товаров, что послужило оживлению торговли. Произошла замена неудобного восточного письма доступным алфавитом. Была изобретена чеканная монета. Появился новый класс — купечество. Те города, которые возникли в Греции, на побережье Малой Азии, на островах Средиземного моря, заселенные греками, уже не были центрами страны оросительного земледелия. Это были города ремесленников и торговцев. Они вели торговлю не только с соседними городами, но и со всем побережьем.

Таким образом, в VII-VI вв. до н.э. возникли новые самоуправляющиеся города-государства (полисы) с зачатками демократического управления. В этих городах вместо единовластного землевладельца управление осуществлялось Народным собранием. Граждане получили право принимать законы и выбирать высших должностных лиц. Каждый имел право на собрании высказать свои пожелания, но также при этом должен был обосновать их.

В VII-VI веках до н.э. ведущее место среди новых полисов занимал город Милет, находящийся в Ионии, на анатолийском берегу. Позже стали значительны и другие города: Коринф, Афины в Греции, Кротон в Италии, Сиракузы в Сицилии. Но в VI в. появился общий враг греческих государств — персы. Они завоевали Ионию. На первое место выдвигается Аттика в материковой Греции и ее столица Афины. Позже греки, объединившись, разбили персов дважды (в 490 г. при Марафоне и в 480 г. при Саламине). После этих побед Афины становятся политическим и культурным центром всей Греции.

Таким образом, одними из распространителей восточной математики были греческие купцы. Они познакомились с ней, когда прокладывали свои торговые пути. Основывая колонии на доступных территориях, греки изучали культуру и науку соседних народов.

Греки обнаружили, что на Востоке теорией не занимались. Там ставился только один практический вопрос: «как?», но не ставился научный вопрос «почему?». А древних греков начали интересовать философские вопросы, позволяющие понять, какое место занимает человек в рамках некоторой рациональной схемы. Также их интересовала не математика в чистом виде, а ее место в этой схеме, ее возможности для выражения законов природы. Возникли первые философские школы, которые стали логически обосновывать свое миропонимание. Начали разрабатываться методы научного мышления. И математика стала неким универсальным языком для выражения этих методов.

Греческая наука выделяется в первую очередь тем, что только один раз в истории человечества и только в одном месте — в Греции — возникла та математика, которую называют аксиоматико-дедуктивной. Именно такой подход к построению математических теорий используется в настоящее время. Кроме того, в Греции впервые стали известны авторы древних научных открытий, в том числе и математических, и их сочинения.

Период времени с VII-VI вв. до н.э., времени возникновения греческой цивилизации, до второй половины V в. н.э., когда под ударами варваров пала Римская империя, в истории науки называют античностью. Таким образом, античная наука включает науку Древней Греции, эллинистического мира и Древнего Рима. Достижения античного периода в любой области человеческой деятельности столь велики, что именно с этого времени ведется отсчет их развития. Историческими и социальными условиями развития наук в этот период обычно называют следующие причины. В обществе возникла потребность в логическом обосновании мироустройства. Античное общество было способно содержать какое-то количество людей, занимающихся наукой, философией. Способствовала развитию науки реализация в этом обществе зачатков демократических прав и свобод. И, наконец, научная мысль еще не была скована религиозными догмами.

Ионийская школа

В Милете в VI в. до н.э. возникла первая математическая, точнее, натурфилософская, школа. Она называлась ионийской школой, по названию местности Иония. Согласно преданию, отцом греческой математики является милетский купец **Фалес** (около 624-547 гг. до н.э.), политический деятель, философ, астроном и математик. К его школе принадлежали ученики Фалеса — Анаксимен, Анаксимандр, Анаксагор. Ионийцы стояли на наивных материалистических позициях, считая, что все многообразие мира имеет единую основу. Сам Фалес первоосновой всего сущего считал воду. Школа просуществовала около ста лет, до падения Милета, завоеванного персами в 494 г.

В молодости, занимаясь торговлей, Фалес много путешествовал. В Египте в течение ряда лет он общался с жрецами и познакомился с астрономией и геометрией в школах Мемфиса и Фив. Историк Плутарх пишет, что он удивил царя Амазиса, измерив высоту пирамиды Хеопса по отбрасываемой тени.

Философы ионийской школы впервые стали заниматься геометрией теоретически. Однако строгой логической геометрической системы они не создали. Были лишь собраны правила, найденные эмпирическим путем, которыми они руководствовались при конкретных построениях. Тем не менее считается, что в этой школе был введен процесс обоснования как необходимый компонент математической деятельности. Фалесу приписывают первые доказательства (объяснения правильности) следующих утверждений:

1. Вертикальные углы равны.
2. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.
3. Треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам.
4. Диаметр делит круг на равные части.
5. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.
6. Сумма углов прямоугольного треугольника равна двум прямым.
7. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Последнее утверждение теперь носит название теоремы Фалеса.

Равенство вертикальных углов Фалес использовал для измерения расстояния до удаленного предмета (корабля в море).

Фалес был причислен к «семи мудрецам древности», среди которых назван первым: «Между семью мудрецами Фалес — мудрец звездовидец». Геродот сообщает, что он предсказал солнечное затмение 585 года до н.э. Кроме того, он:

- открыл продолжительность года и разделение его на 365 дней;
- установил дни солнцестояния и равноденствия;
- открыл Малую медведицу и Полярную звезду, ввел ориентацию по ней.

Таким образом, уже в первых математических школах исследовались вопросы астрономии. Мы и далее будем отмечать эти вопросы, так как в пределах астрономии развивалась одна из частей классической математики — тригонометрия.

Остановимся и на древнегреческих нумерациях, которыми пользовались и развивали в ионийской школе. Первоначально греки пользовались так называемой *аттической* нумерацией, именуемой также геродиановой по имени описавшего ее историка Геродиана (II в. н.э.). Она была близка к более поздней известной нам римской нумерации. Основными знаками чисел были иероглифы для обозначения 1, 5. 10, 100, 1000, 10000:

I (один),
Г или П (пенте — пять),
Δ (дека — десять),
Н (гекатон — сто),
Х (хилиас — тысяча),
М (мириада — десять тысяч).

Запись чисел основывалась на аддитивном принципе. Названия этих единиц мы приводим еще для того, чтобы отметить их присутствие во многих современных терминах: пентаграмма, декалитр, гектар, километр, мириады и др. Отметим также, что расчеты в аттической нумерации были тесно связаны со счетной доской — абаком.

Позднее аттическая нумерация была вытеснена более совершенной и компактной буквенной, или алфавитной, нумерацией, которую называют *ионийской*. В этой системе буквы алфавита, взятые по 9, используются для обозначения единиц, десятков, сотен. Каждой букве дается отличительный знак (черта, титул), указывающий, что она используется как число. Например, $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3, ...$, $\iota = 10, \kappa = 20, \lambda = 30, ...$

Попытки записать числа, большие 1000, привели к обозначениям, которые можно рассматривать как зачатки позиционной системы. Однако окончательного перехода к ней в Греции сделано не было. Впоследствии Архимед дал способ наименования сколь угодно больших чисел, существенно дополнив ионийскую нумерацию.

Примеры алфавитных систем счисления в истории математики встречаются и у других народов: древнеславянская, арабская, еврейская, грузинская, армянская и др. Следы буквенной нумерации сохранились в наши дни при применении букв в номерах пунктов, домов и т.п.

Таким образом, ионийская школа положила начало дедуктивному изложению геометрии и предприняла попытки изучения свойств абстрактных фигур. В дальнейшем эта школа дала толчок развитию «софистики». Софистами называли преподавателей философии и ораторского искусства. Ими разработаны некоторые приемы рассуждений. Они рассматривали проблемы философского характера скорее с целью уяснения их сути, чем ради пользы. В дальнейшем их деятельность превратилась в обучение только внешнему красноречию. При этом часто применялись всевозможные словесные увертки, подмена понятий, многозначность слов, логические ошибки. Известное теперь понятие «математические софизмы» берет свое начало из такой софистики.

Вопросы и задания

1. Попытайтесь назвать причины возникновения дедуктивной математики в Древней Греции.
2. Проанализируйте доказательства первых геометрических теорем ионийской школы, используя школьные учебники.
3. Найдите материалы и изучите старославянскую буквенную нумерацию.
4. Приведите примеры математических софизмов.

3.2. Пифагорейская школа

В VI в. до н.э. от демократического общества софистов отмежевалась группа философов с математическими интересами, примыкавшая к аристократическим объединениям. Они называли себя пифагорейцами в честь основателя этой школы Пифагора.

Пифагор (около 570-473 гг. до н.э.) — самый популярный ученый за всю историю человечества. По традиции, коренное преобразование математики приписывают ему. Так же, как Ньютон определил развитие всей культуры последних четырех столетий, так и Пифагор 2500 лет назад направил людей по пути торжества Разума. Он был великим философом, сравнимым с его современниками Конфуцием, Буддой, Заратуштрой.

Пифагор Самосский — легендарная личность. Было время, например, в начале XX в., когда его объявили вымышленным, а все научные достижения той эпохи стали приписывать школе пифагорейцев. Конечно, вся биография Пифагора является знаком вопроса. Родился он на богатом торговом острове Самос в Эгейском море рядом с Ионией. Учился у Фалеса и Анаксимандра. Был призером Олимпийских игр по кулачному бою. По совету Фалеса отправился для усовершенствования знаний в Египет, учился математике у египетских жрецов. В то время Египет был завоеван персами (525 г. до н.э.). Пифагор попал в плен и был отправлен в Вавилон. Учился астрологии у халдейских жрецов. Есть сведения, что он посетил Индию, перенял знания браминов по астрономии и медицине. В 40-летнем возрасте возвратился в Самос, организовал свою школу, собрав вокруг себя юношей из благородных семей. Деятельность школы была направлена на переустройство общества в соответствии с философскими взглядами Пифагора. Ее аристократическая идеология противоречила расцвету тирании. Из-за преследований по политическим мотивам, школа Пифагора переселяется сначала в город Кротон, колонию Греции на юге Италии, потом в Тарент и Мерапонт. Везде их встречают враждебно, в одной из стычек он погибает.

Пифагорейский союз — это научная школа, походившая на тайное общество. Его члены были связаны жесткими обязательствами. Например, хранить в тайне все достижения школы, все результаты приписывать учителю. Поступающие давали обет молчания на три года, в это время могли слушать учителя только из-за занавески. Среди учеников были и женщины, в частности его жена Теано.

В настоящее время невозможно отделить сделанное самим Пифагором от работ его учеников. Поэтому обычно говорят о математике пифагорейцев. Они занимались астрономией, геометрией, гармонией (теорией музыки) и арифметикой (теорией чисел).

Если для нас Пифагор — математик, то для современников — это пророк. Он выдавал себя за посланца высших сил, утверждал, что встречается с богами. Есть такие учения, что Христос не был уникальным явлением. За 500 лет до него такой мессия посетил землю — это Пифагор. Таким образом, многое в жизни и творчестве Пифагора имело мистический характер, в том числе и его математика.

Арифметика пифагорейцев

Основным содержанием пифагорейской математики является число, рассматриваемое как совокупность единиц. Бог положил числа в основу мирового порядка: «Все есть число». Гармония является божественной и заключается в числовых отношениях. Кто до конца изучит числовую гармонию, станет бессмертным. Число — мера вещей, лежащая в основе бытия, причина стройности и порядка.

1 (монада) — матерь всех чисел. Числа 1, 2, 3, 4 — священная четверица, первооснова всего: огонь, земля, вода, воздух. Их сумма, 10 (декада) — превосходное число, корень всей природы.

Таким образом, пифагорейцы начали приписывать числам свойства не математического характера, что привело к мистике. Их арифметика была в некоторой степени спекулятивной наукой. Тем не менее, ими были заложены основы теории чисел. Изучение свойств делимости чисел позволило разбивать их на классы.

Основным свойством чисел считалась четность. Пифагорейцы создали учение о четных и нечетных числах. Эта теория впоследствии была включена Евклидом в его «Начала» (IX книга).

Единицы, составляющие число, считались неделимыми и изображались точками, которые пифагорейцы располагали в виде правильных геометрических фигур. Так возникли «фигурные» числа: линейные, плоские, треугольные, квадратные и т.п.

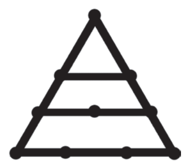
Линейные числа (простые) — делятся только на 1 и на самих себя, представляются в виде точек, выстроенных в линию. Например, 5:

Плоские числа — представимы в виде произведения двух сомножителей, поэтому изображаются в виде прямоугольника. Например, 6:

Телесные числа — представимы в виде произведения трех сомножителей, изображаются в виде прямоугольного параллелепипеда. Например, 8:

Треугольные числа — это 1, 3, 6, 10, ..., или в общем виде — сумма членов арифметической прогрессии 1, 2, 3, ...:

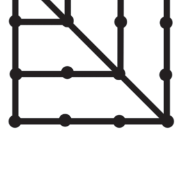
$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$



Квадратные числа — это 1, 4, 9, 16, ..., или в общем виде — сумма членов арифметической прогрессии 1, 3, 5, ...:

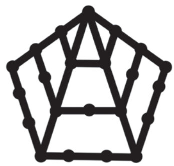
$$1 + 3 + 5 + ... + (2n–1) = n^2.$$

Существующее и ныне выражение «квадрат» для числа n^2 является пережитком пифагорейской терминологии. Именно от фигурных чисел пошло выражение: «Возвести число в квадрат (в куб)».



Пятиугольные числа — это 1, 5, 12, 22, ..., или в общем виде — сумма членов арифметической прогрессии 1, 4, 7, ...:

$$1+4+7+...+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}.$$



Если сумма всех натуральных делителей числа, кроме самого числа, соответственно меньше, больше или равно данного числа, то оно называлось недостаточным, избыточным или *совершенным*. Например, 10 — недостаточное число, 12 — избыточное, 6 — совершенное, так как

$$1+2+5=8;\ 8<10.$$

$$1+2+3+4+6=16;\ 16>12.$$

$$1+2+3=6;\ 6=6.$$

Совершенным числам пифагорейцы придавали особое значение. С тех пор в теории чисел стоит открытым вопрос о бесконечности множества совершенных чисел. Четных совершенных чисел найдено на сегодня 27: 6, 28, 496, ..., наибольшее из них 2^{44496} (2^{44497}-1). Известно, что нечетных совершенных чисел до 10^{50} нет. Греческими математиками (Евклид) было выяснено, что совершенные числа можно искать в виде $2^n(2^{n+1}-1)$: если $(2^{n+1}-1)$ — простое число, то это число — совершенное.

Дружественные числа — это пара чисел, каждое из которых равно сумме собственных делителей другого. Пара наименьших дружественных чисел — 220 и 284:

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284,$$

$$1+2+4+71+142=220.$$

В настоящее время известно более 600 пар дружественных чисел. Вопрос бесконечности множества пар таких чисел пока тоже не решен.

Пифагорейцы исследовали решения неопределенного уравнения $x^2+y^2=z^2$ в натуральных числах. Сегодня эта задача называется задачей Пифагора, а ее решения, тройки чисел x, y, z называются *пифагоровыми тройками*. Такая теоретико-числовая задача связана с геометрической задачей: найти все прямоугольные треугольники с целочисленными катетами x,y и гипотенузой z. Частные ее решения были известны еще в Египте и Вавилоне. В папирусах есть прямоугольный треугольник с отношением сторон 3: 4: 5. Такой треугольник и сегодня называется *египетским*. Пифагорейцы нашли бесконечно много троек вида:

$$x = m,\ y = \frac{1}{2}(m^2 - 1),\ z = \frac{1}{2}(m^2 + 1),$$

где m — нечетное число.

Общее решение этой задачи в случае взаимно простых чисел x, y, z встречается у Диофанта (III в. н.э.):

$$x = 2pq,\ y = p^2-q^2,\ z = p^2+q^2,\ (p, q)=1.$$

Кроме теоретической, у пифагорейцев была и практическая арифметика — учение о правилах действий над числами. Этот раздел арифметики назывался у них логистикой, или счетным искусством. Таблица умножения однозначных чисел, которую мы иногда находим на обложке тетради в клеточку, названа таблицей Пифагора в его честь. У пифагорейцев подобные таблицы содержали больше чисел, так как ионийская система счисления содержала больше знаков.

Геометрия пифагорейцев

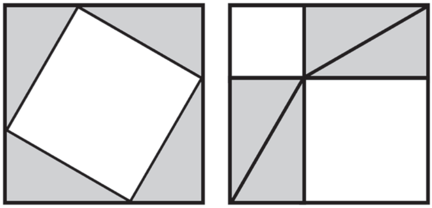
В пифагорейской школе геометрия из собрания рецептов решения различных задач на измерение площадей и объемов превратилась в абстрактную науку. Пифагор в геометрии первым пришел к следующим мыслям. Во-первых, должны рассматриваться абстрактные идеальные объекты: точка — «то, что не имеет частей», линия — «длина без ширины» и т.д. Во-вторых, свойства этих идеальных объектов должны устанавливаться не с помощью измерений на конечном числе объектов, а с помощью рассуждений, справедливых для бесконечного числа объектов, т.е. должны быть доказаны. Эти рассуждения должны сводить неочевидные утверждения к известным или очевидным истинам. В-третьих, в геометрии можно выбрать конечное число первоначальных истин, из которых с помощью логических правил выводимо неограниченное число геометрических предложений. Эти отправные недоказуемые положения были названы *аксиомами* (*αξιωμα* по-гречески — ценность, основное положение). Таким образом, в VI-V вв. до н.э. в школе Пифагора возник аксиоматический метод построения науки.

Рассмотрим некоторые геометрические достижения школы Пифагора. Предание приписывает ему первое доказательство теоремы о сумме внутренних углов произвольного треугольника.

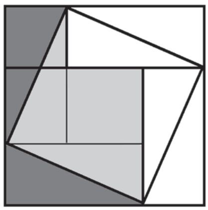
Принято считать, что Пифагор дал первое доказательство самой популярной геометрической теоремы, носящей теперь его имя. Ее геометрическая формулировка: квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах. Это самая значимая теорема, простая и красивая в формулировке.

Доказательство Пифагором этой теоремы окружено ореолом красивых легенд. Например, существует легенда, что он принес богам в жертву сто быков за открытие этой истины. Но это маловероятно: Цицерон заметил, что всякое пролитие крови было чуждо уставу пифагорейского ордена. У Евклида теорема названа «теоремой нимфы» из-за сходства чертежа с бабочкой (нимфой). Так как «нимфа» — также богиня, невеста, арабы назвали ее «теоремой невесты».

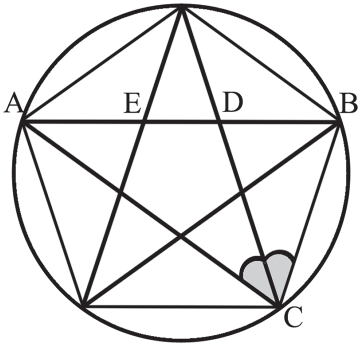
Существует много различных доказательств этой теоремы: геометрических, алгебраических, тригонометрических, механических. Доказательство самого Пифагора до нас не дошло. В современных школьных учебниках большей частью даются простые алгебраические выводы этой формулы. При этом теряется первозданная геометрическая аура теоремы, теряется путь, который вел древних мудрецов к истине. Поэтому в школе нужно найти возможность познакомить учащихся и с классическими геометрическими доказательствами, в том числе и с известными из древних трактатов. Интерес представляет доказательство в индийском духе (Бхаскара, XII в.):



Можно познакомить учеников с доказательством «кресло невесты»:



Пифагорейцы проявляли повышенный интерес к правильным фигурам и телам. Эти фигуры отвечали их философии о закономерном, гармоничном устройстве мироздания. Они догадались, что плоскость можно без дырок и наложений покрыть лишь тремя правильными многоугольниками: треугольниками, квадратами и шестиугольниками. В школе Пифагора умели строить эти фигуры. Построение правильного пятиугольника, которое пифагорейцам тоже удалось, уже не столь очевидно. Излюбленной геометрической фигурой для них была пентаграмма — правильная пятиконечная звезда. Она служила им паролем, была символом здоровья и счастья. Чтобы приветствовать друг друга, они вычерчивали ее на песке.



Пентаграмма обладает замечательными свойствами. Она может быть составлена тремя «возвышенными треугольниками», то есть равнобедренными треугольниками вида ΔABC, $\angle A$=36°, $\angle B$=$\angle C$=72°. Они обладают замечательным свойством: биссектриса угла при основании делит боковую сторону в «золотом сечении»:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{BD}.$$

Этой биссектрисой является один из лучей пентаграммы. Таким образом, лучи пентаграммы делят друг друга в «золотой пропорции».

Отрезки пентаграммы связаны между собой всеми видами средних величин, которые были известны пифагорейцам:

$$AD=\frac{AB+ED}{2},\ AD=\sqrt{AB\cdot AE},$$
$$AE=\sqrt{AD\cdot ED},\ AE=\frac{2AB\cdot ED}{AB+ED}.$$

Пифагор знал четыре правильных многогранника — тетраэдр, гексаэдр, октаэдр, додекаэдр. Он называл их космическими телами, связывал с четырьмя мировыми стихиями (огонь, земля, воздух, вода). Позднее Теэтет открыл оставшийся — икосаэдр. Сейчас эти правильные многогранники называются *платоновыми телами*.

Кризис пифагорейской математики

Пифагорейцы изучали пропорции, то есть равенства отношений четырех величин: $a:b = c:d$. Но определить отношение величин $a:b$ в общем случае они не смогли. Дробь как число для пифагорейцев не существовала, так как единица считалась ими неделимой. Дробь $a:b$ понималась не как доля единицы $(a:b)\cdot 1$, а как отношение двух целых чисел $(a\cdot 1):(b\cdot 1)$.

Пифагорейцы знали три вида пропорций:

арифметическую $a-b=c-d$,

геометрическую $a:b=c:d$,

гармоническую $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}$.

Особое значение имели непрерывные пропорции, или средние величины, то есть такие пропорции, у которых средние члены совпадали: $b=c$. При этом средние члены пропорции равны известным нам средним величинам крайних членов пропорций — среднему арифметическому, среднему геометрическому и среднему гармоническому соответственно:

$$b=\frac{a+d}{2},\ b=\sqrt{a\cdot d},\ b=\frac{2a\cdot d}{a+d}.$$

Среднее арифметическое и среднее гармоническое двух величин образуют с ними геометрическую пропорцию:

$$a:\frac{a+b}{2}=\frac{2ab}{a+b}:b.$$

Эта пропорция играла важную роль в пифагорейской теории музыки, поэтому ее называют *музыкальной пропорцией*.

Для ранних пифагорейцев было бесспорным, что всякие два отрезка соизмеримы между собой, то есть всегда найдется третий отрезок, который измеряет оба эти отрезка. Открытие *несоизмеримости*, то есть обнаружение таких величин, отношение которых не может быть выражено с помощью целых чисел, является наивысшим достижением пифагорейской школы и поворотным этапом в развитии всей математики. Возможно, это было сделано в связи с исследованием среднего геометрического 1 и 2, двух священных чисел, или при поиске общей меры диагонали и стороны квадрата. Было обнаружено, что их отношение не выражается числом, то есть тем, что мы теперь называем рациональным числом. Только такие числа допускались в пифагорейской арифметике. Открытие несоизмеримых отрезков ставило под удар основу всей философии пифагорейцев, так как «число есть мера всех вещей». Согласно преданию, несоизмеримость открыл сам Пифагор, и это открытие долго держалось в тайне.

После смерти Пифагора в союзе произошел раскол. Одна группа учеников — математики — стали изучать иррациональные величины, распространять научные знания. Другая группа — акузматики — продолжали придерживаться религиозно-мистического направления, софистики.

Школа Пифагора продолжала жить в течение нескольких столетий. Пифагорейцами называли себя Архит из Тарента, Феодор из Кирены, Теэтет. Его последователи встречаются и в настоящее время — современная нумерология ведет свое начало от пифагорейцев. В Риме поставлен памятник Пифагору, как самому мудрому греку.

Вопросы и задания

1. Опишите основные классы чисел, определенные в пифагорейской арифметике.
2. Изучите различные доказательства теоремы Пифагора, используя школьные учебники. В дополнительной литературе найдите другие доказательства.
3. Докажите основные свойства пентаграммы.
4. Докажите истинность «музыкальной пропорции».

3.3. Геометрическая алгебра. Классические задачи древности

Открытие несоизмеримости заставило математиков начать поиски путей выхода из кризиса. Греки начали строить математику не на основе арифметики рациональных чисел, а на основе геометрии. Была создана так называемая *«геометрическая алгебра»*. Основными объектами служили отрезки и прямоугольники, над которыми были определены операции сложения и вычитания. Произведением двух отрезков являлся построенный на них прямоугольник, трех отрезков — параллелепипед. Не имело смысла говорить о сложении разнородных величин, например прямоугольников и отрезков. Поэтому исчисление, определенное в геометрической алгебре, было ступенчатым. Все правила, теоремы и задачи формулировались в терминах отношений между длинами отрезков и площадями прямолинейных фигур. Например, геометрически выводились и алгебраические соотношения:

$$a(b+c) = ab+ac,\ (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2.$$

Геометрические построения выполнялись с помощью прямых и окружностей, то есть греческая математика стала теорией построений с помощью циркуля и линейки. Эти построения несли в себе и вычислительную функцию. Все задачи, связанные с решением квадратных уравнений, решались тоже с помощью построений. Процедура геометрического решения фактически совпадала с формулой решения с помощью дискриминанта. Возник вопрос: можно ли любую геометрическую задачу решить так же? Уже в V в. до н.э. появились задачи, не поддававшиеся решению при помощи циркуля и линейки. Это знаменитые *три классические задачи древности*, сыгравшие выдающуюся роль в истории математики, и которые были окончательно решены только в XIX в.:

1. *Удвоение куба*. Построить куб, объем которого в два раза больше объема данного куба.
2. *Трисекция угла*. Произвольный угол разделить на три равные части.
3. *Квадратура круга*. Построить квадрат, равновеликий данному кругу.

Задачу об удвоении куба называют «Делосской проблемой». Существует такая легенда. На острове Делос вспыхнула чума. Жители обратились за советом к оракулу. Он сказал, что нужно удвоить золотой жертвенник богу Аполлону, имеющий форму куба. Делосцы отлили еще один куб, но чума не унималась.

Если ребро данного куба равно a, а искомого x, то задача об удвоении куба сводится к уравнению $x^3=2a^3$, откуда $x = a\sqrt[3]{2}$. С помощью циркуля и линейки построить отрезок $\sqrt[3]{2}$ грекам не удалось. Гиппократ Хиосский (V в. до н.э.) эту задачу свел к отысканию двух средних пропорциональных величин x, y — «вставок», образующих непрерывную пропорцию

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

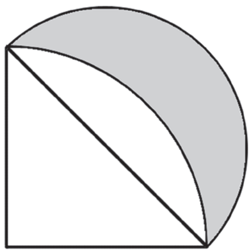
Архит Тарентский (428-365 гг. до н.э.) решил задачу с помощью некоторой пространственной кривой, то есть это решение не являлось классическим. Другие математики (Платон, Эратосфен, Герон, Никомед), пытавшиеся решить эту задачу, тоже использовали другие механизмы, отличные от циркуля и линейки.

Задача трисекции угла тоже сводится к кубическому уравнению: $4x^3–3x+a=0$, , что связано с формулой $\cos 3x=4\cos^3 x–3\cos x$. Но получить такое уравнение в древности не могли, это сделали математики Востока в средние века. Лишь в 1837 г. французский математик Пьер Ванцель (1814-1848) доказал, что кубические уравнения, к которым сводятся задачи удвоения куба и трисекции угла, в общем случае неразрешимы в квадратных радикалах, и поэтому не могут быть решены с помощью циркуля и линейки. Первое решение задачи трисекции угла неклассическими средствами сделал Гиппий из Элиды (V в. до н.э.). Он дал способ построения особой линии (трисектрисы, названной Лейбницем квадратрисой в частном случае), с помощью которой было найдено решение задачи трисекции угла.

Задачу о квадратуре круга можно также решить с помощью квадратрисы, что сделал ученик Гиппия Динострат (IV в. до н.э.). Так как задача сводится к уравнению $x^2=\pi r^2$, то $x = \sqrt{\pi}\, r$, то есть она равносильна построению отрезка, равного π. Поэтому задача о квадратуре круга равносильна задаче о вычислении длины окружности. В 1882 г. немецкий математик Карл Линдеман (1852-1939) строго доказал трансцендентность числа π. Оно не может быть корнем алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами. Поэтому невозможно решение задачи квадратуры круга с помощью циркуля и линейки.

В процессе решения этих задач древности математики столкнулись и с другими проблемами. Например, **Гиппократ Хиосский** разыскивал квадрируемые луночки, то есть фигуры, ограниченные двумя дугами окружностей, для которых можно построить равновеликие квадраты. Такие полумесяцы называются *луночками Гиппократа*. Он нашел три вида таких луночек.

Одна из таких луночек ограничена четвертью окружности и полуокружностью, построенной на хорде этой четверти, как на диаметре. Ее площадь равна площади равнобедренного прямоугольного треугольника.



Еще две квадрируемые луночки были найдены лишь в XIX в. Окончательное решение проблемы было получено совсем недавно: в 1946 г. казанские математики Н.Г. Чеботарев и А.В. Дороднов доказали, что других квадрируемых луночек нет.

К алгебраическим уравнениям сводится еще одна классическая геометрическая задача — задача о построении правильных многоугольников. Пифагорейцы умели строить равносторонние 3-, 4-, 5-угольники, а также удваивать число их сторон. В «Началах» Евклида был построен правильный 15-угольник. Какие же правильные многоугольники можно построить, решил К.Ф. Гаусс в конце XVIII в. (когда ему было 19 лет). Он доказал, что с помощью циркуля и линейки можно разделить окружность на такое простое число p равных частей, что $p = 2^{2^n} + 1$, где n — неотрицательное целое число.

Вопросы и задания

1. Сформулируйте три классические задачи древности.
2. Докажите формулу разности квадратов геометрически.
3. Решите задачу трисекции угла в частных случаях, например, для прямого угла.
4. Постройте с помощью циркуля и линейки правильные многоугольники с 3, 4, 5, 6 сторонами.

3.4. Проблемы бесконечности и непрерывности. Кризис древнегреческой математики

С давних времен для познания картины мира философы вводили категории «движение» и «покой», «непрерывность» и «дискретность», «бесконечное» и «конечное». Вселенная бесконечна, бесконечно разнообразие форм окружающего мира, бесконечно время, его непрерывное течение измеряется дискретными величинами и т.д. Не обошли эти категории и греческие философы-математики. Например, Анаксагор (V в. до н.э.) понятие бесконечности объявил первоосновой своего мировоззрения: «Процесс деления неограничен. Для любого малого найдется еще меньшее. Для нечто большого найдется еще большее». Он считал неправомерным мыслить бесконечный процесс законченным.

Все эти категории существуют и в математике: числовой ряд — бесконечен, прямая — бесконечна. С проблемой бесконечных процедур и величин греческие ученые столкнулись и при попытках *квадрирования* и *спрямления*, т.е. вычисления площадей фигур и длин линий. При дедуктивном построении математики неизбежна ссылка на категорию бесконечности. Особое значение она приобрела с открытием несоизмеримости. Различные ученые по-разному решали проблемы бесконечности. Отсутствие четких правил его использования нередко приводило к противоречиям. Встал вопрос о возможности дедуктивного изложения математики.

Один из способов построения математики был предложен великим философом древности **Демокритом** (около 460-380 гг. до н.э.). Это был первый греческий ученый-энциклопедист: он занимался философией, математикой, физикой, медициной, филологией и др. В основе философии Демокрита — атом, как нечто неделимое, которое не возникает и не исчезает и является первоосновой всего существующего. Демокрит перенес свою философскую концепцию и в математику. Например, точка — это атом. Набор специально расположенных точек — прямая. Набор прямых — плоскость, набор плоскостей — пространство. Набор тончайших кругов — цилиндр или конус. Тела составляются из конечного числа элементарных частей, объем тела получается суммированием объемов этих частей. Демокрит отрицает бесконечную делимость, несоизмеримость.

Атомистическая теория Демокрита непригодна для исследования непрерывных величин, так как необходим предельный переход. Например, пусть отрезок — непрерывная величина — есть бесконечное множество «неделимых» частей. Если их величина равна нулю, то и величина всего отрезка есть нуль. Если же каждое «неделимое» имеет некоторую величину, то величина отрезка будет бесконечной, так как малая величина, повторенная бесконечное число раз, может стать бесконечно большой. Поэтому нельзя определять меру отрезка как сумму мер «неделимых». Мера множества не равна сумме мер его элементов.

Тем не менее, идеи Демокрита плодотворны, и они были развиты Архимедом. В этих идеях можно увидеть зародыши интегрального исчисления. Даже в наши дни мы пользуемся аналогами понятия «атом» при постановке задач в математической физике.

Возникшие трудности ярко представлены в парадоксах (или апориях, антиномиях) **Зенона Элейского** (около 490-430 гг. до н.э.). Их сформулировал и подробно изучал Аристотель. Из 45 апорий (*απορια* по-гречески — трудность) до нас дошло только 9. Они подчеркивают противоречия в объяснении движения и времени с использованием бесконечности. Но не пытаются решить их.

1. *Дихотомия* (рассечение пополам). «Движение невозможно». Чтобы пройти из A в B, надо пройти половину AB_1 расстояния AB, чтобы достичь B_1, нужно достичь B_2 на полпути от A до B_1 и так до бесконечности. Так как отрезков бесконечно много, движение никогда не может начаться.

2. *Ахиллес и черепаха*. «Быстроногий Ахиллес никогда не догонит черепаху, если в начале движения черепаха находилась на некотором расстоянии впереди него». Ахиллес быстрее черепахи, но, чтобы ее догнать, ему надо сначала пройти точку С, из которой черепаха начала движение. Когда Ахиллес попадет в С, черепаха продвинется в точку C_1. Ахиллес не может догнать черепаху, пока не попадет в C_1, но черепаха продвинется при этом в точку C_2 и т.д.
3. *Стрела*. «Летящая стрела не движется». В каждый неделимый момент времени стрела находится в покое. В противном случае момент был бы делим, так как существовало бы начальное и конечное положение стрелы. Если отрезок времени полета — сумма таких неделимых моментов, то стрела все время находится в покое.

Аргументы Зенона показали, что конечный отрезок можно разбить на бесконечное число малых отрезков, каждый из которых — конечной длины. Если считать, что прямая состоит из точек, то мы встречаемся с затруднениями.

Несоизмеримые отрезки Пифагора и парадоксы Зенона говорят о логическом кризисе древнегреческой математики.

Вопросы и задания

1. Назовите признаки кризиса древнегреческой математики.
2. Попытайтесь объяснить «решение» парадокса «Ахиллес и черепаха».
3. Докажите несоизмеримость диагонали и стороны квадрата.
4. Объясните, где в школьной математике применяются аналоги «атомов» Демокрита.

3.5. Афинская школа

В V в. до н.э. прошли греко-персидские войны. Объединенные города-государства Греции одержали победы: в 490 г. при Марафоне над войсками царя Дария, в 480 г. при Саламине над Ксерксом. После победы Афины становятся политическим и культурным центром Древней Греции. Конец V — начало IV в. до н.э. называют «золотым веком Афин». Здесь работали замечательные ученые — Анаксагор, Демокрит, Гиппий, Феодор, Гиппократ, Платон, Аристотель. Были созданы знаменитые *Академия Платона* и *Ликей Аристотеля* — прообразы будущих университетов.

К этому времени сложились две пути в развитии математики — материалистический (Демокрит) и идеалистический (Пифагор, далее Платон). **Платон** (429-348 гг. до н.э.) в Афинах организовал свою Академию, там занимались миром идей. Математика рассматривалась как условие для занятия философией. Известно, что при входе висела надпись: «Не войдет сюда тот, кто не знает геометрии». В «Республике» Платона (360 г. до н.э.) мы находим, что ученики должны изучать «квадривиум», чтобы понимать законы Вселенной. Он состоял из арифметики, геометрии, астрономии, музыки. На идеалистической основе нельзя было ожидать больших открытий. Но некоторые ученики Академии в дальнейшем перешли к естественнонаучным взглядам на математику.

Аристотель (384-322 гг. до н.э.) из Стагиры 17-летним приходит в Афины и становится учеником Платона. Остается в Академии 20 лет, до смерти Платона, потом покидает из-за возникших разногласий. Через некоторое время он был приглашен для занятий с сыном царя Македонии Александром, которому было 13 лет. Через 3 года, когда Александр стал царем, Аристотель снова переезжает в Афины и открывает свою школу в Ликее, предместье Афин (от слова «ликей» произошли, считается, слова «лекция» и «лицей»). Александр не забывает учителя. Ликей стал школой широких исследований. Аристотель занимается многими науками, но особый интерес представляют его работы по логике. Он является общепризнанным основателем логики. Именно ее не хватало для дедуктивного построения математики.

Аристотель открыл, что если некое утверждение A следует из B, то надо установить истинность B. Истинность B может следовать из C, C — из D, и т.д. Когда-то в этой цепочке $A \Leftarrow B \Leftarrow C \Leftarrow D \Leftarrow ...$ придется остановиться, и последнее утверждение следует принять за аксиому.

Аристотель выработал схему научного построения любой математической теории. В этой схеме выделяются четыре этапа: 1) Основные понятия; 2) Аксиомы; 3) Определения; 4) Теоремы. Логически правильная теория должна содержать в себе некоторый набор аксиом, независимых друг от друга и не противоречащих друг другу, и правила вывода из этих аксиом новых утверждений. На рубеже IV и III веков до н.э. такой подход к математике стал считаться единственно правильным. Состоялось утверждение математики как аксиоматико-дедуктивной теории.

Аристотель сформулировал три логических принципа: принцип тождества (если *A*, то *A*), противоречия (*A* и не *A* не могут быть одновременно истинны) и исключенного третьего (или *A*, или не *A* истинно). Достижением логики Аристотеля являются также установленные им правила логического вывода — силлогизмы. При помощи силлогизмов из двух посылок выводится новое заключение.

Например, «Все *A* суть *B*. Все *C* суть *A*. Тогда все *C* суть *B*». Такие рассуждения часто используются и в математике: «Все ромбы — параллелограммы. Все квадраты — ромбы. Значит, все квадраты — параллелограммы».

Отклонение от условий иногда дает неверное заключение. Это часто используется в софизмах. Например: «Все, кто встал, тот стоит. Сидящий встал. Значит, сидящий стоит».

Аристотель по воззрениям отошел от идеализма, но еще не пришел к материализму. Он отрицал «неделимое» Демокрита: «Непрерывное не может состоять из неделимых».

Математическая школа, связанная с Академией Платона, представлена следующими математиками: Архит Тарентский, Теэтет Афинский, Евдокс Книдский. **Архит** (428-365 гг. до н.э.) известен стереометрическим решением задачи об удвоении куба. **Теэтет** (IV в. до н.э.) установил пять правильных многогранников и изучал иррациональности.

Евдокс Книдский (406-355 гг. до н.э.) — гениальный математик, выдающийся астроном, географ, врач, философ. Родился в Книде, в Малой Азии. Учился математике у Архита, в академии Платона. Сконструировал модель движения небесных тел, в центре которой находилась Земля. Положил начало сферической геометрии. Позднее разошелся с Платоном. Обосновал свою школу в Кизике на Мраморном море, где построил первую обсерваторию и начал систематические астрономические наблюдения. Составил первый в Греции звездный каталог. Ему приписывается первое определение земного меридиана.

Наиболее глубокие исследования Евдокса относятся к области введения в анализ бесконечно малых — это теория отношений и «метод исчерпывания». Его теория дошла до нас в изложении Евклида в V книге «Начал». В ее основе лежала общая концепция величины. По Евдоксу, понятие величины охватывает и числа, и другие непрерывные величины: длины отрезков, площади, объемы. Оно вводится с помощью аксиом, определяющих отношения равенства и неравенства. У Евклида они даны так:

1. Равные одному и тому же равны между собой.
2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.
3. И если от равных отнимаются равные, то и остатки будут равны.
4. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.
5. И целое больше части.

Для решения проблемы бесконечности Евдокс ввел знаменитую аксиому, известную теперь как аксиома Архимеда: «Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга». Это значит, если даны величины a и b, то существуют числа n и m, такие, что $na>b$, $mb>a$. Величины a, b имеют одно и то же отношение, что и c,d, если для любых целых m,n одновременно выполняются либо $ma<nb$, $mc<nd$, , либо $ma=nb$, $mc=nd$, либо $ma>nb$, $mc>nd$. Две пары величин, имеющих одно и то же отношение, называются пропорциональными. Пропорциональность является отношением эквивалентности, поэтому записывается как равенство $a{:}b=c{:}d$. Все пары величин разбиваются на классы пропорциональных пар, и новый объект — отношение — выступает как то общее, что имеют все пары величин некоторого класса. Евдокс вводит также и отношение порядка: $a{:}b>c{:}d$, если существуют числа m,n, такие, что $ma>nb$, $mc\leq nd$.

Таким образом, Евдокс уравнял соизмеримые и несоизмеримые величины. Он вплотную подошел к понятию иррационального числа. Теорией отношений пользовались до конца XIX в. Ньютон назвал отношения числами. Вся глубина теории отношений Евдокса была понята только после работ Р. Дедекинда, который во второй половине XIX в. ввел действительные числа как сечения в множестве рациональных чисел. Между их теориями существовала глубокая аналогия.

В теории «метода исчерпывания» содержатся элементы учения о пределах. Он основывался на аксиоме Евдокса-Архимеда и на лемме, сформулированной Евдоксом: «Для двух заданных неравных величин, если от большей отнимается больше половины и от остатка больше половины, и это делается постоянно, то останется некоторая величина, которая будет меньше заданной меньшей величины». С помощью этого метода Евдокс строго доказал, что объем пирамиды равен ⅓ объема призмы с той же высотой и с тем же основанием. В дальнейшем Архимед сумел с помощью метода Евдокса найти ряд новых площадей и объемов.

Итогом афинской школы стали наметившиеся пути выхода греческой математики из возникшего кризиса: это дедуктивное построение математики Аристотеля и теория отношений Евдокса.

Вопросы и задания

1. Назовите представителей афинской школы.
2. Проведите анализ итогов афинской школы.

3.6. Математика эллинистических стран

Новая эпоха античного мира началась с завоеваний Александра Македонского. Города-государства материковой Греции были завоеваны его отцом Филиппом. Александр начал походами на Персию и за 334-323 гг. до н.э. покорил Египет, Вавилон, Персию, Согдиану, Бактрию, часть Индии. В результате его десятилетних военных походов под ударами греко-македонской армии прекратило свое существование Персидское царство и на его руинах возникла новая мировая держава, превзошедшая размерами все до сих пор существовавшие государства. Она впервые объединила и перемешала между собой народы Европы и Азии, их культуру, образ жизни. Таким образом, Александр Македонский сыграл уникальную роль в истории человечества: он свел вместе Восток и Запад. В 323 г. он умер в Вавилоне. Его империя распалась на несколько больших частей — эллинистических монархий: Египет под властью Птолемеев, Месопотамия под Селевкидами, Македония под властью Антигона. Началась эпоха эллинизма. Старая культура Востока смешалась с греческой цивилизацией. Государственным языком эллинистических стран стал греческий, культура и наука развивались на этом языке. Соприкосновение древнегреческой математики с математикой Востока оказалось настолько плодотворным, что за полтора века (350-200 гг. до н.э.) было создано все то, что мы называем «греческой математикой».

Культурным, научным и торговым центром всего древнего мира стала столица Египта Александрия, основанная в 332 г., крупнейший порт. Вход в гавань прикрывал остров Фарос, на котором был воздвигнут грандиозный маяк высотой 130 метров, считавшийся одним из семи чудес света. Птолемеи покровительствовали наукам и искусствам. Птолемей I основал в Александрии *Мусейон* (Дом Муз, около 290 г. до н.э.), в который были приглашены крупнейшие ученые, философы, поэты мира. Это был дворец с помещениями для научных занятий, залами для преподавания. Рядом были устроены ботанический сад, зоопарк, обсерватория. При Мусейоне была собрана богатейшая библиотека, в основу которой была положена библиотека Аристотеля. В Александрийской библиотеке было собрано около 700 тысяч свитков. Основой обучения становится книга.

Для этой эпохи характерен рост городов, в связи с чем большое развитие получила строительная техника. Она требовала значительной математической подготовки инженеров и ремесленников. Военная техника тоже достигла высокого уровня. Конструкция орудий и кораблей нуждалась в сложных предварительных расчетах.

Эллинистические государства на Востоке просуществовали почти три века. Они были завоеваны римлянами и вошли в состав Римской империи.

Проследим историю математики этой эпохи в ее действующих лицах. Ученый-энциклопедист **Эратосфен** из Кирены (276-196 гг. до н.э.) — математик, географ, историк, филолог, поэт — предпринял новое измерение градуса земного меридиана, что позволило ему точнее установить размеры Земли. Его имя вошло в историю математики изобретением «решета Эратосфена» — метода, при помощи которого можно выписать все простые числа.

Одним из первых александрийских ученых был **Евклид** (около 340-287 гг. до н.э.). Он является одним из наиболее влиятельных математиков всех времен. О его жизни нет достоверных данных. Вероятно, он жил во времена Птолемея I. Заведовал математическим отделом александрийской библиотеки.

Имя Евклида почти всегда упоминается в связи с наиболее известным его сочинением «Начала», выдающимся произведением математики. В них он систематизирует достижения предшествующей математики. По словам Ф. Клейна, «великое историческое значение «Начал» в том, что они передали последующим временам идеал вполне логической обработки геометрии». Они уступают по популярности, по числу изданий только Библии. «Начала» были основой для изучения геометрии более 2000 лет. Большая часть нашей школьной геометрии заимствована из первых шести книг «Начал». На геометрии Евклида базировалась классическая механика.

«Начала» состоят из 13 книг. В I-IV книгах рассматривается геометрия на плоскости. Основой для них являются попытки систематизации математики, предпринятые Гиппократом и Демокритом. В частности, дано доказательство теоремы Пифагора, материал геометрической алгебры, построение правильных многоугольников. В V книге изложена евдоксова теория несоизмеримых величин в геометрической форме. В VI книге эта теория применена к подобию треугольников. Книги VII-IX посвящены теории чисел. Здесь встречается алгоритм Евклида для вычисления НОД, теорема Евклида о бесконечности множества простых чисел. В X книге излагаются теория отношений Евдокса, классификация иррациональностей Теэтета.

Книги XI-XIII посвящены геометрии пространства. Изложение завершается описанием пяти правильных многогранников.

Построение «Начал» в полном соответствии со схемой Аристотеля. В первой книге даются пять аксиом и пять постулатов, их Евклид различает. Аксиомы, характеризующие свойства величин, даются как у Евдокса. Перечислим постулаты:

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. Из всякого центра всяким раствором может быть описан круг.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где эти углы меньше двух прямых.

Каждая книга начинается с определений. Доказываются 470 предложений с полной ссылкой на предыдущие теоремы.

В изложении «Начал» есть определенные недостатки. Например, есть описательные определения: «Точка есть то, что не имеет частей», «линия — длина без ширины», и т.д. Аксиом и постулатов недостаточно для дедуктивного построения геометрии. Нет аксиом стереометрии, аксиом движения и непрерывности. При доказательстве теорем иногда прибегает к наглядности чертежа. Нет разграничения между постулатами и аксиомами.

В VIII-IX вв. появились первые переводы «Начал» на арабский язык, в XII в. — на латинский язык. Первое издание на русском языке вышло в 1739 г.

Особое место в «Началах» занимает V постулат. Возможно, Евклид пытался его доказать, поскольку долго его не применял. Таким образом, к трем неразрешимым задачам древности Евклид добавил еще одну — проблему V постулата. Как нам известно, с тех пор эту проблему пытались решить многие математики. Эта драматическая история завершилась только в XIX в. открытием неевклидовых геометрий.

С именем Евклида связана известная крылатая фраза: «В геометрии даже для царей нет другой дороги». Египетский царь Птолемей I, наслышавшись о необыкновенной мудрости Евклида, пожелал лично познакомиться с ним. Он попросил Евклида изложить ему содержание его книг. Выслушав доказательства первых теорем, он спросил, нет ли более короткого пути для изучения геометрии, чем изучение «Начал». Так ответ Евклида вошел в историю.

Следующим гениальным математиком, творчество которого определило на долгие века судьбу науки, был **Архимед** (287-212 гг. до н.э.). Его вклад в науку сравнивают с вкладом Ньютона и Эйлера. Сохранились также некоторые сведения о его жизни и личности. Нам известно, что он был великим механиком, прославившим себя инженерной деятельностью. В отличие от многих предшественников, почти все его математические исследования имели практические истоки и чаще всего были связаны с механикой.

Архимед жил в Сиракузах на острове Сицилия, работал советником царя Гиерона. Он был убит, когда римляне взяли Сиракузы. Известно, что техническое искусство Архимеда было использовано при защите города.

Самое важное для нас то, что Архимед был величайшим из математиков. До наших дней сохранились многие его математические работы. Наибольший вклад Архимеда в математику относится к интегральному исчислению. Хотя такого исчисления в ту пору не было, методы Архимеда давали удивительные результаты. Сохранилось его письмо Эратосфену, известное под названием «Метод», в котором он описывает нестрогий, но плодотворный способ получения новых результатов: «Многие из моих современников или последователей, ознакомившись с этим методом, будут в состоянии находить новые теоремы, до которых я еще не додумался». И действительно, для итальянских математиков XVI в. идеи Архимеда стали отправным пунктом для развития интегрального исчисления.

Развитие в IV-III вв. до н.э. теории конических сечений, статики, гидростатики потребовало вычисления ряда новых площадей и объемов и, впервые в истории науки, центров тяжести. Решая подобные задачи, Архимед использовал старые формы метода исчерпывания, а также ввел новые схемы решения.

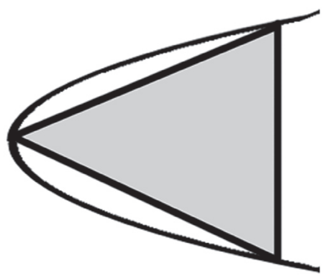
При вычислении площадей и объемов, определении длин дуг Архимед применял метод, аналогичный методу верхних и нижних интегральных сумм. Например, в сочинении «Измерение круга», вычисляя длину окружности, он пользовался вписанными и описанными правильными многоугольниками. Архимед дошел до 96-угольника и получил приближение для отношения длины окружности к ее диаметру (число π):

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Поэтому, число 22:7 называется числом Архимеда, это хорошее рациональное приближение числа π. Именно Архимед методом исчерпывания доказал, что площадь круга равна половине произведения длины окружности на радиус.

В книге «О сфере и цилиндре» приводится отношение площади поверхности сферы к площади большого круга («в 4 раза больше»), отношение объема шара к объему описанного цилиндра («2/3 части»). Последнюю формулу Архимед считал своим самым выдающимся достижением и завещал написать ее на надгробном памятнике. Именно по этому рисунку спустя 150 лет удалось отыскать место его захоронения.

В книге «Квадратура параболы» Архимед дал выражение для площади параболического сегмента. Он составляет 4/3 площади вписанного треугольника с основанием таким же, как у сегмента и с вершиной на вершине параболы. Решение этой задачи было важно в кораблестроении — сечение греческих кораблей было близко к параболическому сегменту.



В своем сочинении «О коноидах и сфероидах» Архимед находит объемы тел вращения, получающихся при вращении некоторых кривых второго порядка. Иногда он пользовался механическим методом, используя принцип равновесия, центры тяжести. При этом вычисление интегральных сумм не производилось. В книге «О спиралях» рассмотрел движение точки по вращающемуся диску (спираль Архимеда) и указал способ построения касательной к спирали.

В работе «Исчисление песчинок» («Псаммит») Архимед разработал способ, позволяющий регулярно выражать сколь угодно большие числа: «Для любого количества предметов можно найти число, и для любого числа можно указать большее и назвать его».

Отметим еще некоторые вопросы математики, связанные с именем Архимеда. Считается, что он нашел формулу, выражающую площадь треугольника по его сторонам, которую приписывают Герону:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Архимеду принадлежит обобщение понятия правильного многогранника и открытие новых геометрических тел — выпуклых полуправильных многогранников («архимедовы тела»), их всего 13, и звездчатых — их больше, 51.

В трактате по гидростатике «О плавающих телах» он установил наличие выталкивающей силы жидкости — это закон Архимеда о потере веса телами, погруженными в жидкость. Это открытие связывают со знаменитым восклицанием «Эврика!», ему посвящены даже стихи. В работе «О равновесии плоских фигур» Архимед выводит знаменитый закон рычага: «Величины уравновешиваются, если расстояния их от точки опоры обратно пропорциональны весам». Известно выражение: «Дайте мне точку опоры вне шара Земного, его я сдвину с пути». В самом деле, он построил машину, с помощью которой одним движением руки сдвинул с места тяжело нагруженный корабль и протащил его по суше. Архимед также сконструировал планетарий, в котором можно было наблюдать фазы Луны, движение планет, затмение Луны и Солнца.

Исследования Архимеда не получили развития в древности, так как не хватало аналитической базы, буквенного исчисления. После построения символической алгебры Виетом и Декартом, аналитической геометрии Декартом и Ферма, стало возможным создание исчисления бесконечно малых. Эта работа закончилась Ньютоном и Лейбницем в XVII в. И тогда даже великий Лейбниц сказал: «Внимательно читая сочинения Архимеда, перестаешь удивляться всем новейшим открытиям геометрии».

Последний крупный математик эллинистической эпохи — **Аполлоний Пергский** (260-170 гг. до н.э.). Он работал в Александрии. Прославился как геометр и астроном. Написал трактат из восьми книг «Конические сечения». Эллипс, гипербола, парабола определяются как сечения кругового конуса. Мы называем эти кривые, следуя Аполлонию. Их названия выражают одно из свойств этих кривых, связанное с площадями. «Парабола» — это «приложение», «эллипс» — «приложение с недостатком», «гипербола» — «приложение с избытком».

В работе «О касании» разбирается знаменитая задача Аполлония: «Даны три вещи, каждая из которых может быть точкой, прямой или окружностью. Требуется провести окружность, которая проходила бы через данные точки и касалась бы данных прямых или окружностей». В сочинении «О плоских геометрических местах» рассматриваются преобразования плоскости в себя, которые переводят прямые и окружности в прямые и окружности. Например, частными случаями таких преобразований являются преобразования подобия и инверсии.

У Аполлония впервые встречается в явном виде требование, чтобы геометрические построения выполнялись только с помощью циркуля и линейки. Также он дает вывод «симптомов» кривых — их планиметрических свойств, записанных в словесной форме. Они могут считаться зачатками уравнений кривых.

Теория конических сечений — это пример математической теории, созданной «впрок». Они долгое время не получили применения. Их первые применения относятся к механике земных и небесных тел: вспомним исследования Кеплера о движении планет по эллиптическим орбитам, Галилея — о движении снарядов по параболическим траекториям.

Вопросы и задания

1. Охарактеризуйте математику эллинистической эпохи с точки зрения ее существенного продвижения древнегреческой математики.
2. Оцените историческое значение «Начал» Евклида.
3. Проанализируйте вывод Архимедом формулы площади параболического сегмента.
4. Составьте каталог полуправильных многогранников.
5. Изучите решение задачи Аполлония, данное Виетом.

3.7. Математика римской эпохи

Последний период античного общества — период господства Рима. Он прошел путь от маленького поселения на берегу Тибра (легендарной датой основания Рима считается 21 апреля 753 года до н.э.) до столицы мировой державы, раскинувшейся на просторах Европы, Азии и Африки, от Британии до Месопотамии. В Древнем Риме в III в. до н.э. сложилось сильное и прочное государство. Древние историки считают, что у римлян было наилучшее государственное устройство (республика), так как они разумно взяли лучшее от монархии, аристократии и демократии. В это время римская армия стала лучшей армией своей эпохи. Постепенно римляне завоевали Сицилию (212 г. до н.э.), Грецию (146 г. до н.э.), Месопотамию (64 г. до н.э.), Египет (30 г. до н.э.). В 31 г. до н.э. Гай Юлий Цезарь Октавиан (племянник Юлия Цезаря, усыновленный им в завещании) взял Александрию. При его правлении Римское государство стало называться империей.

Римское общество сначала процветало благодаря военной добыче, рабам и богатствам, стекавшимся из всех провинций. Потом начались постоянные гражданские войны. В IV-V вв. н.э. произошел социальный и политический распад Римской империи, вызванный кризисом рабовладельческого хозяйства, борьбой покоренных римлянами народов и нашествиями «варваров». В восточных районах империи возникло Византийское государство, столицей которого в 330 г. стал Константинополь. В 395 г. Римская империя разделилась на Западную и Восточную. В 476 г. германцы низвергли последнего римского императора. Так прекратила свое существование Западная Римская империя.

Римская культура в начале своего пути находилась под большим влиянием высокоразвитой культуры эллинов. Тем не менее в Римскую эпоху начался упадок культуры и науки. Александрия оставалась центром античной математики, но после Аполлония начался спад. Ученые занимались в основном комментированием прежних работ. Из-за этого иногда трудно выяснить, что в своих трудах они открыли сами. Проследим содержание математики этой эпохи в трудах ее основных представителей.

Гиппарх из Никеи (около 180-125 гг. до н.э.) — один из основоположников астрономии и тригонометрии. Жил в Александрии и на острове Родос. Составил звездный каталог, открыл явление прецессии, определил длительность солнечного года с незначительной погрешностью. Создал теорию движения Луны. Гиппарх является основоположником математической географии. Он ввел географические координаты — широту и долготу — для определения положения точки на земной поверхности. Фактически это первое использование координат. Он же составил и первые таблицы хорд, которые заменяли в то время таблицы синусов. Большая часть его работ вошла в «Альмагест» К. Птолемея.

Никомах из Герасы (I-II вв. н.э.). Его «Арифметическое введение» является изложением пифагорейской теории чисел. Вместе с «Началами» Евклида долгое время оно было самым распространенным математическим учебником древности. Это пособие для изучения арифметики много раз переиздавалось и комментировалось.

Герон Александрийский (I в. н.э.) — механик и инженер, изобретатель. Жил и работал в Александрии, преподавал в Мусейоне. Его математические работы являются энциклопедией античной прикладной математики. В лучшей из них —

«Метрике» — даны правила и формулы для точного и приближенного вычисления площадей и объемов. В частности, там приведены так называемая формула Герона для определения площади треугольника по трем сторонам, встречающаяся у Архимеда, объемов усеченного конуса, шарового сегмента, тора, пяти правильных многогранников. Здесь же приведены правила численного решения квадратных уравнений, приближенного извлечения квадратных и кубических корней. В сочинении «О диоптре» изложены правила земельной съемки, фактически основанные на использовании прямоугольных координат. Он изобрел ряд приборов и автоматов: водяные часы, паровые машины и др.

Менелай Александрийский (I в.) — греческий математик и астроном. Жил в Риме. Написал трактат «Сферика» в трех книгах по сферической тригонометрии, который сохранился в арабском переводе. Это первая система геометрии, отличная от евклидовой. В третьей книге содержится теорема, позже названная теоремой Менелая: «Если на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты три точки A_1, B_1, C_1, которые удовлетворяют соотношению

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1,$$

то эти три точки лежат на одной прямой». Он применил эту теорему и к сферическому треугольнику.

Клавдий Птолемей (около 100-178 гг. н.э.) — астроном, математик, географ, развивший геоцентрическую систему мира. Известно, что он происходил из Египта, жил и работал в Александрии. Главное произведение Птолемея — это астрономический труд высшего мастерства «Большое математическое построение астрономии в XIII книгах», известно также как «Великое собрание» (арабизированное название — «Альмагест»). Описывается теория движения Солнца, Луны, планет. Содержатся сведения по прямолинейной и сферической тригонометрии. Большинство теорем формулируется геометрически. Например, теорема, которая теперь известна в элементарной геометрии как теорема Птолемея: произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон. Эта теорема используется им для вычисления хорд. Они играли роль синусов. Как известно, хорда, стягивающая угол, равна удвоенной линии синуса половины данного угла. Птолемей составил таблицу хорд, соответствующих дугам от 0 до 180°, которая много веков была единственным пособием при решении треугольников. Вычисления довольно точные. Например, переводя его данные на синусы, получают $\sin 1^{\circ}=0{,}017268$, а точное значение 0,017453. Птолемей дает приближенное значение числа

$$\pi \approx \frac{337}{120} \approx 3{,}14167.$$

Геометрически выводятся формулы синуса и косинуса суммы и разности углов. В «Альмагесте» греческая наука органически связана с достижениями вавилонских астрономов. У вавилонян Птолемей заимствует деление круга на 360 градусов, шестидесятеричное деление градуса на минуты. Он применяет также шестидесятеричные дроби, которые записывает с помощью греческой десятичной буквенной нумерации. Ему также принадлежит изобретение астролябии. В трактате «География» заложил основы математической географии и картографии, положил начало учению о стереографических проекциях и о солнечных часах.

Диофант (III в. н.э.) — последний из великих математиков античности, один из основоположников алгебры. Жил и работал в Александрии. О его жизни почти ничего не известно: это загадка истории науки. Его математические работы неожиданны и по постановке задач, и по методам их решения. Основное его сочинение — «Арифметика» в 13 книгах, до нас дошло только 6. У Диофанта античная алгебра достигла высшего расцвета. Он начал вновь строить алгебру не на базе геометрии, а опираясь на арифметику. Ввел буквенную символику: обозначение неизвестного, его степеней (до шестой степени), обратных чисел, символ отрицательного числа, равенства, употребляя сокращенную запись слов. Сформулировал основные правила алгебраических операций, действий со степенями. Ему принадлежит постановка и решение задач, сводимых к неопределенным уравнениям и их системам, решаемым в рациональных положительных числах. Такие уравнения теперь называются *диофантовыми*. Сочинения Диофанта были отправной точкой для теоретико-числовых исследований П. Ферма, Л. Эйлера, К. Гаусса и других математиков.

Папп Александрийский (конец III в. н.э.) — математик и механик эпохи позднего эллинизма. Важнейшая из его работ — «Математическое собрание» (или «Математический сборник») в восьми книгах — является руководством по геометрии с комментариями, историческими замечаниями и некоторыми его собственными результатами. Многие результаты древних авторов известны только в той форме, в какой они сохранились у Паппа, например, три задачи древности. Есть глава об изопериметрических фигурах, где доказывается, что круг имеет большую площадь, чем любой правильный многоугольник того же периметра. Его собственные работы относятся к проективной геометрии. Папп получил теорему, эквивалентную теореме Дезарга, частный случай теоремы Паскаля. Известны также его комментарии к трудам Евклида, Птолемея.

Возникшее в первых веках н.э. в Римской империи христианство было активным врагом языческой культуры и науки. Изгонялись и преследовались ученые. Римляне тоже не поощряли занятия абстрактной наукой. В такой сложной обстановке для науки александрийская школа просуществовала еще более века. В конце IV в. н.э. церковь начинает организованное наступление на науку. В 391 г. была сожжена александрийская библиотека. Последним представителем александрийской школы стала **Гипатия (Ипатия) из Александрии** (370-415 гг. н.э.), убитая толпой фанатиков за то, что не приняла христианства. Гипатия — философ, математик и астроном — была общепризнанным руководителем школы неоплатоников. Ее считают первой женщиной-математиком. Ей приписываются комментарии к «Альмагесту» Птолемея, «Арифметике» Диофанта, «Коническим сечениям» Аполлония. Имеются сведения о том, что она изобрела ареометр, астролябию, планисферу — это тоже характеризует направление ее научных интересов. Гипатия принимала участие в общественных делах города и пользовалась большой популярностью.

Еще некоторое время продолжалась деятельность Афинской академии. Здесь работал **Прокл Диадох** (410-485 гг. н.э.), византийский математик и философ. Обучался в Александрии и Афинах. Стал главой афинской школы неоплатоников. Написал комментарий к первой книге «Начал» Евклида. Он имеет большое значение как один из главных источников по истории греческой математики от Фалеса до Евклида. Прокл пытался доказать V постулат Евклида. Формулировка аксиомы о параллельных прямых, вошедшая в школьные курсы геометрии, которая равносильна постулату, дана Проклом.

Афинская академия была закрыта как языческая школа в 529 г. Возникли некоторые школы в Константинополе, столице Византии — Восточной римской империи, которые пытались продолжить традиции греческой математики. В 630 г. Александрию взяли арабы. Центр научной деятельности перемещается на восток: Китай, Индию, Среднюю Азию.

Таким образом, завершилась эпоха античной математики. Ее значение в истории математики огромно. Она определила дальнейшее развитие науки в течение многих веков.

Вопросы и задания

1. Назовите основные итоги математики римской эпохи.
2. Оцените вклад александрийских математиков в развитие геометрии, алгебры и тригонометрии.
3. Назовите причины упадка греческой математики в эпоху позднего эллинизма.

3.8. Развитие математики в Китае

После крушения античного рабовладельческого общества развитие математических наук в течение нескольких столетий происходило главным образом в странах Ближнего и Среднего Востока. Они были колыбелью древнейших цивилизаций. Но еще древнее считается китайская цивилизация. Она возникла в начале II тысячелетия до н.э. на берегах реки Хуанхэ, а затем распространилась на бассейн реки Янцзы. Первое китайское государство появилось в эпоху Инь (XVIII-XII вв. до н.э.). Была создана иероглифическая письменность. К этой эпохе относятся первые, дошедшие до нас китайские письменные памятники. В XII в. до н.э. кочевые племена Чжоу разрушили государство Инь и основали новое царство. В эту эпоху китайская экономика и культура развивались дальше. Были возведены сотни километров плотин, создана огромная оросительная сеть. К этому времени относится деятельность знаменитого философа Конфуция (Кунцзы, 551-479 гг. до н.э.), оказавшего огромное влияние на жизнь и мировоззрение китайцев. Считается, что в эту эпоху в Китае возникли математика и астрономия. В VII в. до н.э. китайские ученые умели предсказывать солнечные и лунные затмения. Астрономы составили первый звездный каталог (IV в. до н.э.). Великими открытиями китайцев являются порох, компас, бумага, шелк, лак, рис и чай. Появились первые математические книги, которые не дошли до нас. Но они легли в основу известных классических математических трудов. Математики Китая подчеркивают древность их науки, хотя для этого у них нет документальных подтверждений — древних математических текстов.

В III в. до н.э. Цинь Шихуанди, первый император династии Цинь, образовал единое государство. В годы его правления началось строительство Великой Китайской стены. Цинь предпринял меры по политическому и административному объединению страны: унифицировал единицы измерения, ввел единую денежную единицу, распространял единообразное письмо. В истории он известен циньским погромом: в 213 г. этот император приказал сжечь все классические книги, по-видимому, для того, чтобы ликвидировать прежние традиции. Однако вскоре в династии Хань (II в. до н.э.-II в. н.э.) древние книги начали восстанавливать. Ко II в. до н.э. относится изобретение бумаги (хотя традиционной датой изобретения бумаги из растительных волокон считается 105 г. н.э.), кисти для письма и рисования. Тогда же впервые в Китае начали проводить официальные экзамены при наборе государственных чиновников. Таким образом, математическому образованию уделялось серьезное внимание.

В это же время были созданы наиболее древние из дошедших до нас сочинений — «Трактат об измерительном шесте» и самая известная книга — «Математика в девяти книгах» (окончательную редакцию которой сделал Чжан Цан во II в. до н.э.). Она была предназначена для чиновников, торговцев, землемеров, строителей. В ней помещено 246 задач с указаниями для их решения.

Книги имеют различный математический уровень: они явно были написаны в разное время. Они являются итогом математических достижений Китая до начала нашей эры. В VII-X вв. н.э., неоднократно дополненный и подвергшийся переработке, он сделался основным учебником для чиновников. Кроме этих трактатов, следует отметить сочинения «Трактат о морском острове», составленный Лю Хуэем, и «Математический трактат» Сунь-цзы (III в.).

Китайские иероглифические цифры возникли во II тысячелетии до н.э. и установились к III в. до н.э. Эти иероглифы применяются и в настоящее время. Система счисления — десятичная. В научных записях числа изображались различно расположенными, горизонтальными и вертикальными, палочками и кружочком. Арифметические действия производились на счетной доске с помощью палочек.

Обыкновенные дроби появились почти одновременно с целыми числами. Операции над дробями выполнялись по правилам, отличающимся от современных незначительно. На счетной доске дроби изображались парой чисел, и действия над дробями сводились к действиям над ними.

В Китае уже ко II в. до н.э. имелась развитая система десятичных мер длины, а чуть позже и объема, веса. Они привели к первому появлению десятичных дробей (III в. н.э.).

Некоторые задачи сводились к системам линейных уравнений с двумя неизвестными, которые решались с помощью «правила двух ложных положений». При их решении возникали таблицы в виде матриц, которые преобразовывались методом «фан-чэн», схожим с методом Гаусса.

При этом приходилось иногда вычитать из меньшего числа большее. Здесь впервые в истории математики появились отрицательные числа. Они выделялись на счетной доске палочками другого цвета или другой формы, а при письме записывались чернилами другого цвета. Позже их назвали «фу» и стали толковать как «долг», в отличие от положительных чисел «чжэн» («имущество»).

Девятая книга «Математики в девяти книгах» была посвящена геометрическим задачам. При решении некоторых из них применялась теорема Пифагора. Вычислялись площади многоугольников, круга и его частей, кругового кольца, объемы прямоугольного параллелепипеда, прямой призмы, пирамиды с квадратным основанием.

Из Китая до нас дошел первый *магический квадрат* «Ло-шу», связанный со многими легендами.

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

Таким образом, математика Китая являлась совокупностью вычислительных алгоритмов, предназначенных для решения на счетной доске некоторых классов задач арифметики, алгебры и геометрии. Но она имела мало общего с дедуктивной наукой греческого образца.

Китайская математика не была изолирована от развития математики в других странах. Имеются некоторые факты взаимного влияния математики Китая, Индии, стран ислама. Например, появление отрицательных чисел в Индии, десятичных дробей в Средней Азии, близость китайской и индийской нумераций и др. Связи между математиками Китая и Индии прослеживаются с первых веков н.э. и особенно усиливаются в период распространения буддизма, когда в Китае появляются индийские ученые.

Вопросы и задания

1. Назовите основные источники китайской математики.
2. Какие математические понятия впервые нашли применение в математике Древнего Китая?

3.9. Развитие математики в Индии

Еще в середине III тысячелетия до н.э. в долине Инда существовала развитая цивилизация. Уже в период первобытнообщинного строя (XXX-XXI вв. до н.э.) индийцы сооружали оросительные каналы, были знакомы с прядением и ткачеством, применяли гончарный круг. В XII в. до н.э. стала заселяться и долина Ганга племенами ариев. Создаются рабовладельческие государства. Борьба за власть в них велась главным образом между воинами (кшатриями) и священниками (брахманами). Не позже IX в. была установлена связь Индии с Вавилоном. Постепенно разные толкования брахманизма объединились в единое учение — индуизм, который существует до сегодняшнего дня. В VI в. до н.э. возникла новая религия — буддизм, одна из мировых религий. В VI в. до н.э. часть северной Индии была захвачена персидским царем Дарием. В 327-325 гг. до н.э. большая часть Индии была завоевана Александром Македонским и впоследствии вошла в состав царства Селевкидов.

К началу нашей эры в Индии сложилась развитая феодальная система организации общества. Она определяла медленный темп развития производства и науки. В IV в. Индию объединила династия Гупта. В VIII в. изгоняются буддисты. XI в. отмечается нападением мусульман и распространением ислама на части Индии. В XIV в. она была покорена Бабуром, потомком Тамерлана, и входила в состав империи Великих Моголов.

Таким образом, в истории Индии имеется достаточно фактов, свидетельствующих о наличии экономических и политических связей с греческими, арабскими государствами и с Китаем. Естественно, эти связи повлияли на развитие ее культуры. В истории математики тоже отмечается распространение математических знаний в обоих направлениях. Например, в V в. появилась переводная греческая астрономическая литература.

Проследим историю индийской математики на источниках и персоналиях. В I тысячелетии до н.э. появились священные книги брахманов «Веды» («Знания»). К VII-V вв. до н.э. относятся первые индийские письменные математические памятники. Большинство трактатов индийцев написаны на санскрите — языке религиозных книг. Этот давно вымерший язык объединял многочисленные народы Индии, говорившие на различных языках. Некоторые сведения о математике древней Индии содержатся в комментариях к «Ведам». Одной из таких книг была «Сульва сутра» («Правила веревки»), относящаяся к VI-V вв. до н.э. В ней излагаются способы построения культовых сооружений и связанные с ними математические правила: построение прямого угла, квадрата, прямоугольника, деление отрезка пополам.

Математические школы существовали в Удджайне (Центральная Индия) и Майсоре (Южная Индия). Наиболее известными математиками были Ариабхата I (V в.), Брахмагупта (VII в.), Бхаскара I (VII в.), Бхаскара II (XII в.). Для их работ характерны арифметико-алгебраические разделы и вопросы астрономии. Уже в IV в. появились астрономо-математические труды — «сиддханты» («учения»). Важнейшая из сиддхант была написана Брахмагуптой около 628 г. («Усовершенствованное учение Брахмы»), состояла она из 20 книг. Большая часть этого сочинения была посвящена астрономии, но две книги отводились арифметике, алгебре и геометрии. Бхаскара II написал трактат «Сиддханта-широмани» («Венец учения») из четырех частей, посвященный астрономии и математике. Арифметическая часть этого труда — книга «Лилавати» («Прекрасная»), оставалась образцовым учебником в течение столетий. Она неоднократно переиздавалась, была переведена на многие языки. Отметим и такое своеобразие индийских трактатов: некоторые из них были написаны в стихах, чтобы математические правила можно было заучивать наизусть.

В 1881 г. была найдена близ Бахшали (северо-западная Индия) математическая рукопись неизвестного автора, которая, как полагают, относится к VI в. н.э. Этот памятник известен под названием «Бахшалийской рукописи». Состоит он из 70 полос березовой коры.

Наиболее известным достижением индийской математики является наша современная десятичная позиционная система счисления. Установлено, что начиная с VI в. до н.э. в Индии была распространена десятичная непозиционная система счисления — числа «брахми». Каждая единица, десятка, сотня, тысяча имела свой символ. Эта система позже была вытеснена позиционной записью, заимствованной у вавилонян и переделанной на десятичную. Первое ее применение относится к источнику 595 г. Еще раньше был введен нуль, обозначаемый словом «сунья» («пустое»). Он изображался точкой, позднее знаком 0, возможно, от греческого слова «ouden» («ничто»). В отличие от вавилонян, нуль ставился и в конце числа. Отныне любое число стало записываться с помощью десяти знаков. Десятичная система счисления была заимствована арабами (VII-VIII вв.) и начала свое продвижение на Запад.

Некоторые современные математические понятия имеют индийские корни. Индийско-арабско-латинский след прослеживается, например, в термине «цифра». Арабские ученые перевели «сунья» как «сифр», а позже европейцы — «ciffra».

Считается, что наша арифметика имеет индийское происхождение. В арифметике индийцы рассматривали 8 действий: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в квадрат и куб, извлечение квадратного и кубического корня. Существовало свыше десятка способов умножения.

Вычисления индийцы когда-то производили на счетной доске, покрытой песком или пылью. Поэтому арифметические вычисления назывались «дхули-карма» — «работа с пылью». При этом приходилось стирать промежуточные выкладки. Поэтому нужно было уметь проверять результаты вычислений. Индийцы ввели проверку с помощью 9, которая применялась в арифметике долгое время.

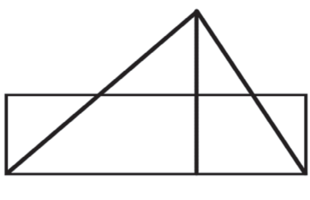
Дроби в Индии тоже известны очень давно. Индийцы записывали дроби так, как это делается в настоящее время: числитель над знаменателем, только без дробной черты. Правила действий над дробями почти не отличаются от современных.

Начиная с Брахмагупты индийские математики пользовались отрицательными числами, трактуя их как долг, а положительные числа — как имущество. Брахмагупта приводит все правила арифметических действий над отрицательными числами. Например, сумма двух имуществ есть имущество, двух долгов — долг, имущества и долга — их разность и т.д.

Выдающимся достижением индийской математики было создание развитой алгебраической символики. Она была даже богаче, чем у Диофанта. Большинство символов представляют собой первые слоги соответствующих санскритских терминов. Например, неизвестную величину индийцы называли «йават-тават» («столько, сколько»), а для обозначения неизвестной служила буква, означающая слог «йа». Квадратный корень обозначался слогом «му», от слова «мула» — «основание». «Мула» по-индийски также «корень растения». Арабские переводчики индийских сиддхант в VIII в. перевели этот термин словом «джизр» («корень растения»). Латинские переводчики в XII в. перевели это слово «radix», откуда происходят наши термины «корень», «радикал».

Индийцы решали задачи на линейные, квадратные уравнения и их системы. Рассматривались также неопределенные уравнения первой степени $ax+by=c$. Первое общее решение встречается у Брахмагупты. Поэтому нет оснований называть неопределенные линейные уравнения диофантовыми. Индийцы допускали для них только целочисленные, в том числе отрицательные решения.

Знания и открытия индийских математиков в геометрии относительно слабые. Геометрические доказательства крайне лаконичны, но весьма наглядны. Например, для обоснования правила вычисления площади треугольника приводится рисунок, в котором высота прямоугольника равна половине высоты треугольника.

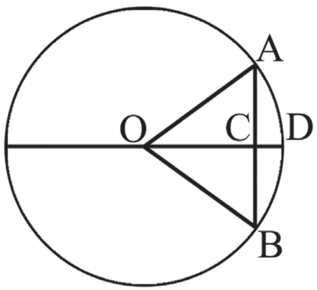


Брахмагупта вычислял площадь четырехугольника по формуле

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

которая верна только для вписываемых в круг фигур. В частности, при *d=0* получается известная формула Архимеда-Герона.

В индийской астрономии вопросы тригонометрии хорд александрийских астрономов развились в теорию тригонометрических величин. Используемые при вычислениях хорды и полухорды (линия синуса), индийцы называли «джива» («тетива»). Арабы произносили его «джайб» («впадина»), при переводе арабских сочинений на латынь европейские переводчики использовали слово «sinus» с тем же значением.



AC — линия синуса, OC — линия косинуса, CD — линия синуса-версуса.

Для вычислений замена хорд синусами несущественна, так как хорда дуги равна удвоенному синусу половины дуги. Таблицы синусов приводятся у Ариабхаты и Бхаскары I. Кроме линии синуса, индийцы пользовались линией косинуса и линией *синуса-версуса*, то есть разностью между радиусом и линией косинуса. Они также пользовались тенью, отбрасываемой вертикальным шестом — *гномоном*, для определения высот и расстояний. Эти вычисления впоследствии привели математиков стран ислама к тангенсам и котангенсам. Линии синуса, косинуса, тени применялись для решения астрономических задач.

Таким образом, в Индии математика является очень древней наукой, составляющей часть старинной культуры. В ней тоже, как и в Китае, преобладали вычислительно-алгоритмические методы и отсутствовали попытки построения дедуктивных систем.

Вопросы и задания

1. Назовите основные достижения индийской математики.
2. Опишите историю создания десятичной позиционной системы счисления.
3. Приведите примеры математических терминов, имеющих индийские корни.
4. Как развивались тригонометрические знания в рамках астрономии?

3.10. Математика стран ислама

История так распорядилась, что наиболее значительным источником знаний для европейских ученых в Средние века и Эпоху Возрождения стала не античная математика, а арабская.

Политическое господство греков над Ближним Востоком закончилось после возникновения ислама. В VII в. в Аравии возникла новая религия — ислам, основанная Мухаммедом (Магометом). За начало мусульманской эры принимается время бегства (по-арабски «хиджра») Мухаммеда из Мекки в Медину (622 г.). Его преемники — халифы, распространяя ислам, завоевали много стран на огромной территории: Сирию, Месопотамию, Иран (637 г.), Египет (642 г.), далее Северную Африку, Испанию (711 г.), Сицилию, юг Италии, часть Закавказья, Индии. Везде, куда арабы проникали, они пытались заменить греко-римскую культуру культурой ислама. Государственным языком становился арабский, заменявший греческий или латинский.

Огромная, но не связанная в единый хозяйственный механизм, восточная империя не обладала политической устойчивостью. На юге Европы арабские государства просуществовали около двух столетий. В X в. началось изгнание арабов, закончившееся в Европе только в XV в.

Образование халифата совпало с распадом рабовладельческой формации и становлением феодального строя. Сначала столицей халифата был Дамаск, а в 762 г. стал Багдад. В городах велось большое строительство, росла торговля. Нужды ирригации, строительства, прокладки сухопутных и морских путей торговли требовали развития различных наук, в первую очередь математики и тесно связанной с ней астрономии. Халифы покровительствовали наукам, приглашали в Багдад видных ученых покоренных стран. Халиф аль-Мамун в IX в. построил «Дом Мудрости» с библиотекой и обсерваторией. Там работал ведущий математик того времени аль-Хорезми.

В X в. завоеванные страны стали фактически независимыми, сохраняя религиозное подчинение Багдаду. Возникли новые научные центры в Бухаре, Хорезме (там работали Ибн Сина, аль-Бируни), Каире (работали аль-Мисри, аль-Хайсам), Кордове.

В XI в. начались завоевания тюрков. Была основана империя со столицей в Газне (Афганистан). Там творил аль-Бируни, а в Исфахане (Иран) — великий поэт и математик Омар Хайям.

В XIII в. Среднюю Азию завоевали монголы. Они ликвидировали багдадский халифат. В Марагу (Азербайджан), столице внука Чингисхана Хулагу, в это время жил и работал ат-Туси. А в XV в. Среднюю Азию завоевал Тамерлан. В столице Тамерлана Самарканде в научном центре, возглавляемом его внуком султаном Улугбеком, трудился самый крупный математик XV в. аль-Каши.

Научные труды математиков стран ислама написаны на арабском языке, некоторые — на персидском. Ведущая наука арабской эпохи — астрономия, поэтому она в первую очередь разрабатывала вычислительно-алгоритмические проблемы и методы. Эти методы стояли на первом месте во всей восточной математике, но в Китае и Индии развивались менее строго и медленно. В математике стран ислама алгебра и тригонометрия впервые сформировались в самостоятельные науки.

В исламской математике были распространены два типа нумерации: сначала буквенная, восходящая к древнесемитским, затем десятичная, заимствованная у индийцев. В буквенной нумерации использовались 28 букв, являющихся специальными знаками для единиц, десятков, сотен и тысячи.

Понятие отрицательного числа не нашло заметного применения в арабской науке. Тем не менее, встречаются термины «мусбат» и «манфи», имеющие тот же смысл, что и китайские «чжен» и «фу». Математики Западной Европы их перевели на латынь как positivus и negativus и стали обозначать ими положительные и отрицательные числа.

Дроби записывали на индийский манер: знаменатель под числительным. Разделительная черта появилась в XII в. В деловой математике в ходу было египетское представление дробей в виде суммы аликвотных дробей. Арабские астрономы пользовались сначала только шестидесятичными дробями — по традиции, восходящей через александрийских астрономов к Древнему Вавилону.

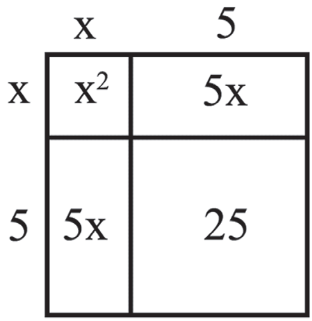
Проследим далее историю математики стран ислама через труды выдающихся мусульманских ученых. Первым в этом ряду стоит **Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми** (787-850). Имя аль-Хорезми указывает на его родину — среднеазиатское государство Хорезм. Он при халифе аль-Мамуне возглавлял в Багдаде библиотеку «Дома Мудрости», своего рода академии. Был хорошо знаком с индийской математикой и наукой эллинистических стран. Написал несколько книг по математике и астрономии. В своей книге «Об индийском счете» впервые разъяснил индийскую систему записи чисел. Книга была переведена на латынь и стала одним из источников, через которые Европа познакомилась с десятичной позиционной нумерацией. Автора в переводах называли Algorizmi, Algorithmus, что ввело в наш математический язык термин «алгоритм».

В другой книге «Хисаб аль-джабр ва-л-мукабала» («Исчисление восполнения и противопоставления») он рассматривал вопросы решения уравнений. Эта алгебра стала известна тоже в латинском переводе, и слово «аль-джабр» стало употребляться как синоним всей науки «алгебры», которая до XIX в. была наукой о решении уравнений. Аль-Хорезми рассматривал решение шести канонических классов уравнений первой и второй степеней:

1) $ax^2=bx$, 2) $ax^2=c$, 3) $bx=c$,
4) $ax^2+bx=c$, 5) $ax^2+c=bx$, 6) $bx+c=ax^2$.

Он записывал их без всякой символики, выражая словами. Например, четвертый класс уравнений читался «квадраты и корни равны числу». Неизвестное называлось «корнем» или «вещью», квадрат неизвестного — просто «квадратом». Уравнения не содержали вычитаемых членов. Чтобы решить какое-либо уравнение, их требовалось свести к одному из этих типов. Для этого использовались следующие операции: аль-джабр (восполнение) — перенос вычитаемых членов уравнения в другую часть в виде прибавляемых членов; аль-мукабала (противопоставление) — сокращение равных членов в обеих частях. Считается, что эти действия и термины пришли в математику из теории взвешивания. Аль-Хорезми формулировал лишь правила, дающие положительные корни уравнений. Эти правила даются на примерах, но вполне общим образом.

Например, при выводе правила, которое решает четвертый класс уравнений, рассуждения носят геометрический характер. Рассмотрим это на примере уравнения $x^2+10x=39$.



Неизвестная величина изображается отрезком, ее квадрат — квадратом, построенным на этом отрезке, $10x$ — суммой двух равных прямоугольников. Эти три фигуры с площадью 39 дополняются квадратом 5×5 до квадрата со стороной $x+5$ с площадью 64. Значит, сторона $x+5=8$, $x=3$. Это решение напоминает отчасти метод геометрической алгебры.

Во всех исламских странах пользовались учением аль-Хорезми об имущественных расчетах по мусульманскому наследственному праву. Большим недостатком алгебры во времена аль-Хорезми было отсутствие символики, словесное описание операций. Это задерживало развитие алгебры. Тем не менее его труды сыграли важную роль в истории математики. До середины XIX в. в алгебре сказывалось ее восточное происхождение — ей не хватало аксиоматического обоснования. В наших школьных учебниках алгебры и геометрии до сих пор сохранились эти признаки их различного происхождения.

В VIII-X вв., в начальный период развития математики стран ислама, арабские ученые перевели на свой язык индийские сиддханты и сочинения греческих математиков — Евклида, Архимеда, Аполлония, Птолемея, Диофанта и др. Удивительно то, что со многими работами греков Европа позже познакомилась через арабские переводы. В этом отношении особо выделяется **Сабит ибн Корра** (836-901). Этот математик, астроном, механик, переводчик работал в Багдаде. Именно в его переводах сохранились не дошедшие до нас по-гречески мемуары Аполлония и Архимеда. Все позднейшие ученые пользовались его переводами «Начал» Евклида, «Альмагеста» Птолемея.

Многие арабские математики пытались решить классические задачи древности. В частности, в работе «Деление прямолинейного угла на три равные части» Сабит ибн Корра решал задачи трисекции угла и удвоения куба. Он занимался также исследованиями по теории параллельных прямых, посвященных V постулату, а также Омар Хайям, ат-Туси. На протяжении X в. уравнениями были выражены многие геометрические, тригонометрические, физические задачи: трисекция угла, построение вписанных многоугольников и др.

Омар Хайям (1048-1131, Хайям Абу-ль Фатх Омар ибн Ибрахим) — персидский поэт, философ, астроном и математик. Больше известен как поэт, автор «Рубайят». Родился в Нишапуре на севере Ирана и там же погребен. Получил блестящее образование в Бухаре и Самарканде. Его приглашали ко двору многие властители Востока. Заметили его и на родине, он переехал в Исфахан — столицу могущественной империи сельджуков и стал придворным султана Малик-шаха. Здесь под его руководством в 1074 г. была построена обсерватория, самая лучшая из созданных в то время и до него. Там Хайям провел более 40 лет. Он составил «Маликшахские астрономические таблицы», работал над реформой солнечного календаря. Она была осуществлена в 1079 г. Этот календарь действовал в Иране почти 900 лет и был отменен только в 1976 г. Известно, что календарь Хайяма «Джалали» точнее григорианского календаря.

Хайям первым среди математиков создал теорию решения уравнений до третьей степени включительно и дал общую классификацию всех уравнений в трактате «О доказательствах задач аль-джабры и аль-мукабалы» (1069). В этом труде он определил и предмет алгебры — нахождение неизвестных величин, отнесенных к другим известным величинам с помощью уравнений. Тем самым, алгебра рассматривается как наука об уравнениях.

Хайям берется и за изучение проблемы V постулата Евклида, которую безуспешно пытались решить ученые уже тысячу лет. В 1077 г. он завершил работу над трактатом «Комментарии к трудным постулатам книги Евклида». Сам того не зная, Хайям близко подошел к проблемам, которые решил гениальный русский геометр Лобачевский. Предвосхитил он и Декарта, создавшего аналитическую геометрию, изучая геометрию в числах. Занимался Хайям и географией, естествознанием, философией. Поэтому весь мир признает его теперь ученым-энциклопедистом.

В 1256 г. монголы разграбили Багдад. В новом научном центре монгольского периода — обсерватории в Марагу (Азербайджан) — трудился **ат-Туси** (1201-1274, Насирэддин ат-Туси Абу Джафар Мухаммед ибн Мухаммед) — ученый-энциклопедист и государственный деятель. Родился в Туси (Иран).

Ат-Туси перевел на арабский язык важные работы древних ученых и написал к ним комментарии и приложения. Написал ряд трактатов по математике, астрономии, философии, минералогии, медицине. Развивал связанные с астрономией разделы математики, в первую очередь тригонометрию. Благодаря нему тригонометрия отделилась от астрономии. В его «Трактате о полном четырехстороннике» (1260) плоская и сферическая тригонометрия выступают как самостоятельные предметы. В них стал преобладать материал об алгебраических зависимостях. Большое значение имела также его работа «Изложение Евклида», в которой он сформулировал новый постулат, которым предложил заменить пятый постулат Евклида.

Таким образом, тригонометрия, возникшая в трудах александрийских и индийских ученых, существенно продвинулась вперед в работах математиков и астрономов исламских стран (Сабит ибн Корра, аль-Бируни, аль-Баттани, ат-Туси, аль-Каши). Из совокупности вспомогательных средств астрономии она преобразовалась в науку о тригонометрических функциях в плоских и сферических треугольниках и о способах решения этих треугольников. Арабские математики применяли уже линии синуса, косинуса, тангенса, котангенса. Линии тангенса и котангенса рассматривались как тени: горизонтального гномона — на вертикальную плоскость и вертикального гномона — на горизонтальную плоскость. Линии синуса и косинуса измеряли как александрийские и индийские астрономы — в 60-х долях радиуса.

Последним крупным ученым исламской математики считается **аль-Каши** (?-1430, аль-Каши Гийас ад-Дин Джемшид ибн-Масуд) — математик и астроном, работавший в Самаркандской обсерватории Улугбека. Последним произведением аль-Каши было «Ключ арифметики» — энциклопедия элементарной математики своего времени, приспособленная к нуждам практиков-вычислителей. Книга выделялась среди средневековой математической литературы богатством материала, ясностью и стройностью изложения. В этом трактате аль-Каши впервые более точно, чем ранее в Китае, изложил и применил теорию десятичных дробей, описал правила действий над ними. Отделял дробную часть от целой части вертикальной чертой или писал другим цветом. В Европе десятичные дроби были введены голландцем С. Стевином только в 1586 г. В этой же работе аль-Каши изложил приемы извлечения корней любой степени, один из которых был основан на применении формулы бинома Ньютона для натурального показателя. Аль-Каши также дал правила приближенного решения уравнений высших степеней, усовершенствовал тригонометрические вычисления.

Начиная с XIV в. основным путем влияния математики стран ислама на Европу становится Византия. Примерно с середины XV в. развитие исламской математики замедляется.

Математика стран ислама оказала исключительное влияние на развитие математики и на Востоке, и на Западе. Значительная ее часть создавалась в алгоритмически-алгебраическом духе, но существенно продвинулась по отношению к античным методам. Западная Европа достигла того же уровня только в XVI в.

Вопросы и задания

1. Какие основные разделы математики разрабатывались в математике стран ислама?
2. Опишите историю происхождения термина «алгебра» и предмета алгебры.
3. Как развивалась тригонометрия в трудах арабских математиков?

3.11. Математика средневековой Европы

В середине I тысячелетия н.э. в Европе на смену рабовладельчеству приходит феодализм. Время господства феодальных отношений с V в. до XV в. именуется Средними веками. Возникает малоподвижная цивилизация. Духовный мир занимается только усвоением античного наследия и достояний стран Востока. Возникновение ислама и его быстрое распространение в странах Востока способствует еще большему разрыву между Западом и Востоком.

В эпоху раннего феодализма (V-XI вв.) возникали феодальные государства, постоянно воевавшие между собой. Единственным долговечным образованием являлась Священная Римская империя, в нее входили многие феодальные государства Германии, Франции, Италии и других стран.

Когда в Западной Римской империи вторгшиеся кельты, германцы, славяне образовали вместе с местным населением свои государства, подвергшиеся в V в. нашествию гуннов, от прежней цивилизации остались только немногие слабые города и христианство. Экономический и культурный уровень долгое время был низким. В IV в. христианство стало государственной религией. Церковь, господствовавшая над всей духовной жизнью, сначала полностью отвергла культуру греков и римлян как порождение язычества. Но когда она вступила в союз с государством, ей пришлось заимствовать и даже развивать некоторые элементы «языческой» культуры и науки. Впоследствии монастыри являлись важными центрами распространения знаний и просвещения. Почти все ученые средневековой Европы были религиозными деятелями.

До конца XV в. на Западе нет математика, который бы внес что-то существенное в развитие математики. Для воспитания образованных людей в эпоху раннего феодализма были написаны несколько книг о семи «свободных искусствах». Их подразделяли на тривиум (трехпутье — грамматика, риторика, диалектика) и квадривиум (четырехпутье — арифметика, геометрия, астрономия, музыка). Одним из наиболее популярных в Средние века авторов по квадривиуму был **Северин Боэций** (480-524) — государственный деятель и философ-неоплатоник. Учился в Афинах. Написал труд «Основы арифметики» — поверхностный перевод Никомаха и Евклида на числовых и геометрических примерах без доказательств.

Беда Достопочтенный (672-735), ирландский монах, разносторонний ученый — историк-летописец и математик. Автор хронологического трактата, посвященного вычислению дня пасхи. Первый день пасхи устанавливается правилами, которые дают решение в целых числах неопределенных линейных уравнений. Беда дал также полное описание счета на пальцах, которое он включил в книгу по хронологии «О счете времени». Различные загибы пальцев рук изображали единицы, десятки, сотни, тысячи, а жесты рук позволяли продлить счет до миллиона. К пальцевому счету восходит характерное для средневековой арифметики деление чисел на digiti («пальцы»), articuli («суставы») и numeri composite — прочие «составные числа».

При дворе франкского короля Карла Великого, впоследствии объявленного римским императором, работал епископ **Алкуин** (735-804). Был организатором школ и автором ряда руководств. Из них наибольший интерес для нас представляет «Задачи для изощрения ума юношей». Среди них встречаются и дошедшие до нас логические задачи, задачи на сообразительность, например известная задача о волке, козе и капусте.

Математиком-церковником был **Герберт** (950-1003), французский монах, который в 999 г. стал папой Сильвестром II. Он был одним из первых западных ученых, ездивших в Испанию и изучавших математику арабского мира. Он стал вводить в Европе использование индийско-арабских цифр. Ему приписывают несколько математических сочинений, в частности книгу об абаке. У Герберта впервые появились термины «делимое» и «делитель».

Основой прогресса культуры и науки на стадии развитого феодализма (XI-XV вв.) служило постепенное развитие ремесла, товарного производства и торговли, подъем городов. Добыча руд и металлургия в VIII-XII вв. превратилась в заметную область промышленности. В XI в. появилось стекло, в XII в. — бумага, часы, в XIII в. — порох, в XV в. было изобретено книгопечатание. К концу периода феодализма были созданы условия для ускорения технического прогресса и для смены всей системы экономических, политических, научных и культурных отношений.

Тем не менее передовое движение культуры протекало в острой борьбе с реакционными силами. Церковь жестоко преследовала научную мысль, отклонявшуюся от религиозной ортодоксии. В XIII в. официально была учреждена инквизиция.

Постепенно арабы вытесняются с Пиренейского полуострова. Создаются национальные государства, возникают прочные монархии, такие, как Англия, Франция, Испания. Между этими государствами, а также с Востоком устанавливаются торговые связи. В наилучшем положении оказываются города Испании и Италии. Первые могущественные торговые города Италии: Генуя, Пиза, Венеция, Милан, Флоренция — ведут торговлю с арабами и северными странами. Итальянские купцы едут на Восток, изучают и распространяют арабскую математику.

Огромное значение для прогресса математических знаний имели переводы с арабского на латынь, ставший в Западной Европе общим языком ученых, сочинений восточных математиков и греческой литературы, имевшейся на арабском языке. Переводами особенно занимались в XII-XIII вв. Были переведены «Начала» Евклида, «Измерение круга» Архимеда, «Конические сечения» Аполлония, «Альмагест» Птолемея, сочинения Аристотеля, Прокла, Герона, аль-Хорезми, ибн Корры и др.

Важную роль в развитии математики сыграли первые университеты. Они были открыты сначала в итальянских городах: Салерно (XI в.), Болонье (1100), позже в Париже (конец XII в.), Оксфорде (конец XII в.), Кембридже (1209), Праге (1348) и др. Тем не менее сначала математика в университетах была в подсобной роли. Подготовка математиков не была специальной целью университетов. Окончание университета давало право на преподавание.

В XIII в. наступило некоторое оживление в науке, и в математике в том числе, в связи с борьбой против схоластики, начатой **Роджером Бэконом** (1214-1294). Он противопоставил догматам, основанным на вере, опыт как единственный источник научного познания. В центре всей науки он поставил физико-математические знания. По Бэкону, все истины имеют ценность только потому, поскольку они выражены числом и мерой, то есть в математической форме.

Первым самостоятельным математиком Западной Европы, полностью осветившим все достижения математиков стран ислама и продвинувшимся дальше них, был итальянский математик **Леонардо Пизанский** (1170-1240), известный под именем Фибоначчи. Его отец торговал в Алжире, где Леонардо изучал математику у арабских учителей. Как купец, он посетил Египет, Византию, Сицилию, всюду пополнял свои знания по математике.

Основное математическое сочинение Леонардо Фибоначчи — «Книга абака» (1202). Под словом «абак» он подразумевал арифметику вообще. Леонардо систематизировал сведения, почерпнутые из арабских трудов, античной математики и присоединил собственные задачи и методы. Книга послужила распространению новой арифметики в Европе. Она излагалась на основе индийской нумерации. Приводилось сравнение с арифметикой над римскими числами. Рассматривались вопросы разложения на простые множители, признаки делимости, приемы решения задач коммерческой арифметики, задачи на смешение, суммирование прогрессий. Впервые изучил рекуррентную последовательность, известную теперь как *последовательность Фибоначчи*. Каждый ее член, кроме первых двух, равных 1, равен сумме двух предыдущих членов: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...Эта последовательность появляется в известной «задаче о кроликах»: «Спрашивается, сколько пар кроликов родится в год от одной пары, если каждая пара приносит ежемесячно по паре, способной через месяц к размножению, и если ни одна пара не погибает». В настоящее время числа Фибоначчи находят применение в самых различных областях естествознания.

Фибоначчи изложил также алгебру линейных и квадратных уравнений. Рассмотрел те же 6 классов уравнений, что и аль-Хорезми, решаемые с помощью «аль-джабры и аль-мукабалы». Изложение словесное, хотя есть и сокращенные обозначения. Неизвестное называлось res (вещь) или radix (корень). Исследовал системы линейных уравнений с несколькими неизвестными. При этом первый в Европе пришел к мысли о введении отрицательных чисел и их толковании как долга.

Леонардо Фибоначчи выступил убежденным сторонником новой нумерации. Но десятичная нумерация входила в обиход очень медленно. Все торговые книги использовали только римские цифры и абак. В установлениях «Искусства обмена» (1299) банкирам запрещалось пользоваться индийско-арабскими числами. Лишь в XIV в. итальянские купцы их начали применять в своих счетных книгах.

Николь Орем (1323-1382) — французский математик и механик, епископ Лизье, преподавал в Сорбонне. Перевел некоторые сочинения Аристотеля. В сочинении «О размерах форм» графически сопоставлял значения зависимой и независимой переменной, то есть приблизился к аналитической геометрии и понятию функции. Этот трактат оказал влияние на Декарта при введении координатного метода. Применял дробные и иррациональные показатели степени. Пользовался рядами, различал сходящиеся и расходящиеся ряды, доказал, например, расходимость *гармонического ряда*.

Позднее Средневековье отмечается Столетней войной между Францией и Англией (1337-1453), Великой чумой (1347-1348), уничтожившей треть европейского населения.

Вопросы и задания

1. Оцените уровень развития математики в средневековой Европе.
2. Опишите отношения религии и науки в средние века.
3. Как проникали математические знания в средневековую Европу?

3.12. Математика Эпохи Возрождения

XV-XVI века вошли в историю Европы под названием Эпохи Возрождения. Оно означает возрождение того высокого уровня культуры, который был достигнут в античном мире. Именно в это время в недрах феодального строя возникает новое — буржуазное — общество. Происходит зарождение буржуазии из бюргерства, пролетариата из ремесленников. Совершаются первые буржуазные революции (Нидерланды, Англия). Продолжается процесс образования современных наций. Появляются мануфактуры, требующие технического усовершенствования. Гигантски возрастает торговля, приведшая к росту мореплавания и к великим географическим открытиям: открытие Америки Колумбом (1492), Васко да Гама — морского пути в Индию (1498).

Совершается также подлинная культурная революция. Это эпоха расцвета Возрождения в Италии. Начинается освобождение естествознания от теологии.

После падения Константинополя в 1453 г., когда Византийская империя перестала существовать, многие ученые-греки переселились в города Западной Европы. Математика в эту эпоху развивалась главным образом в Италии, Франции, Германии, Голландии.

Типичен для этого периода **Иоганн Мюллер** (**Региомонтан**, 1436-1476) из Кенигсберга, ведущий математик XV в., замечательный вычислитель, мастер инструментов, печатник. Учился в Лейпциге, работал в Венском университете, затем руководил Нюрнбергской обсерваторией. В Италии изучил греческий язык. Перевел Птолемея, Аполлония, Герона, Архимеда. Его главное сочинение, «Пять книг о треугольниках всех видов» — систематическое изложение тригонометрии. Отличается от нынешних учебников только отсутствием современных обозначений. Тригонометрия впервые трактовалась как самостоятельная наука, не зависящая от астрономии. Подобное уже было сделано в XIII в. ат-Туси, но его труды не получили развития. Основное содержание тригонометрии Региомонтана взято из арабской математики, но он систематизировал и превосходно изложил этот огромный материал.

Наибольших успехов математика Эпохи Возрождения добилась в алгебре. Крупнейшим европейским алгебраистом XV в. был итальянец **Лука Пачоли** (1445-1515), ученый монах. Окончил Болонский университет. Работал профессором математики в Риме, Неаполе, Флоренции, Болонье. Был учителем и другом Леонардо да Винчи. Основным трактатом Пачоли является «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности» (1494), одна из первых печатных книг по математике. Она содержала все, что тогда знали по арифметике, алгебре, тригонометрии. Арифметические обозначения книги не слишком отличаются от современных. Отныне пользование индийскими цифрами стало общепринятым. Под влиянием да Винчи написал сочинение «Божественная пропорция», названное по «золотому сечению». Пытался вывести пропорции человеческой фигуры, каноны архитектуры. Пачоли был также изобретателем двойной бухгалтерии «кредит-дебет». Некоторые его труды посвящены механике и теории шахматной игры.

Алгебру Пачоли называл «Arte maggiore» («Великое искусство»), это название часто встречалось в алгебре и дальше. Он ввел систему алгебраических обозначений, отличающуюся от современных. Например, неизвестное обозначалось *co* (от слова cosa — вещь), квадрат неизвестного — *ce* (censo — квадрат), куб — *cu* (cubo — куб), квадратный корень — R или R2.

Известному итальянскому путешественнику **Марко Поло** (1254-1323) приписывается первое применение термина «millione» («большая тысяча») для описания богатств стран Востока. **Никола Шюке** (1445-1500), французский математик, врач, по аналогии с ним ввел дальнейшие термины биллион, триллион и т.д. до нониллиона в сочинении «Наука о числах в трех частях» (1484). Он же рассматривал отрицательные числа, называя их «меньшее, чем ничто», ввел впервые отрицательные и нулевые показатели степеней.

Следующий шаг на пути создания алгебраической символики был сделан немецкими математиками XVI в., известными под названием «коссистов». Они именовали алгебру «Coss» — от итальянского слова cosa — вещь, обозначавшего у алгебраистов неизвестное. Коссисты пользовались алгебраической терминологией и обозначениями, аналогичными итальянским, в частности, как у Пачоли. Видным коссистом был **Ян Видман** (1460-?). Он преподавал в Лейпциге, первым начал чтение лекций по алгебре в университете. В его труде «Быстрый и красивый счет для всего купечества» (1489) впервые используются знаки «+» и «–». Терминология коссистов получила широкое распространение не только в Германии, но и в других странах Европы. В частности, Л.Ф. Магницкий в своей «Арифметике» (1703) использует их знаки и названия.

Первым крупным математическим достижением европейских ученых, превзошедшим открытия математиков Востока, было общее решение кубических уравнений в радикалах. Древние греки и восточные ученые решили только несколько частных случаев. Уравнения третьей степени можно было свести к трем типам: $x^3+px=q$, $x^3=px+q$, $x^3+q=px$, где $p,\ q$ — положительные числа. Их исследовал профессор Болонского университета **Сципион дель Ферро** (1456-1526). По обычаю того времени, он не опубликовал решения, а сообщил его ученику Фиори, который пользовался этими правилами на математических турнирах. Позже венецианский мастер счета **Никколо Фонтана** (1500-1557) по прозвищу Тарталья (Заика) переоткрыл приемы Ферро (1535). На турнире он победил Фиори, публично продемонстрировав результаты, но сохранив в тайне метод. В 1539 г. ученый доктор из Милана **Иеронимо Кардано** (1501-1576) выпросил у него формулировку решения, поклявшись не публиковать его. Тарталья сообщил свое правило в стихах. Восстановив по не вполне ясным формулировкам правило и доказав его, Кардано счел себя вправе поместить его в своей книге «Великое искусство» (1545), упомянув об авторстве Тартальи. Несмотря на это, за правилом закрепилось название «формула Кардано». Для первого типа уравнений $x^3+px=q$ она имеет вид:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}+\frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}-\frac{q}{2}}.$$

Тарталья возмутился, завязалась полемика, сыпались оскорбления. Эта перепалка породила интересные документы: «Вопросы» Тартальи (1546) и «Вызовы» Феррари (1547), защитника Кардано, которые довели до всеобщего сведения историю этого замечательного открытия. «Великое искусство» Кардано содержало и другое блестящее открытие: метод **Луиджи Феррари** (1522-1565) сведения решения уравнения четвертой степени к решению кубического уравнения.

Кардано рассматривал и отрицательные числа, называя их «вымышленными», но он не был в состоянии что-либо сделать в так называемом «неприводимом» случае кубического уравнения $x^3+q=px$, когда налицо три корня, но они получаются в виде суммы чисел, называемых теперь мнимыми. Эта трудность была преодолена последним из больших болонских математиков XVI в. **Рафаэлем Бомбелли** (1526-1573), чья «Алгебра» появилась в 1572 г. Он ввел последовательную теорию мнимых и комплексных чисел. Отныне комплексные числа потеряли сверхъестественность, хотя их полное признание произошло только в XIX в. Таким образом, комплексные числа были введены при решении кубических уравнений, а не квадратных, о чем часто утверждают в школьных учебниках.

В Эпоху Возрождения происходило дальнейшее расширение понятия числа. Крупнейший из коссистов **Михаэль Штифель** (1487-1567) дал систематическую теорию отрицательных чисел в трудах «Полная арифметика» (1544), «Немецкая арифметика». Он также близко подошел к идее логарифма, сопоставляя геометрическую и арифметическую прогрессии.

В средневековой Европе, как и в странах ислама, широко применялись шестидесятичные дроби, это усложняло вычисления. **Симон Стевин** (1548-1620), голландский математик, механик и инженер из Брюгге, ввел десятичные дроби. Его обозначения дробей отличались от современных. После работы Стевина «Десятая» (1585) началось широкое распространение десятичных дробей в Европе. О том, что эти дроби открыл аль-Каши, в то время европейцы еще не знали. Стевин активно выступал за введение десятичной системы мер. Стоит отметить и его подход к понятию числа вообще: «... нет никаких абсурдных, иррациональных, неправильных, невыразимых или глухих чисел».

Выдающимся достижением математики Эпохи Возрождения является создание символической алгебры. Ее отсутствие тормозило развитие математики. Коренное улучшение в алгебраическую символику ввел **Франсуа Виет** (1540-1603), «Великий дилетант» математики, «Отец алгебры». Он был юристом по профессии, стал советником королей Генриха III и Генриха IV. Математикой занимался на досуге. Но именно он изложил основные принципы новой алгебры в сочинениях «Математический канон» (1579), «Введение в аналитическое искусство» (1591). По словам Виета, «все математики знали, что под их алгеброй и алмукабалой были скрыты несравненные сокровища, но не умели их найти; задачи, которые они считали наиболее трудными, совершенно легко решаются десятками с помощью нашего искусства, представляющего, поэтому, самый верный путь для математических изысканий».

В его символической алгебре впервые появились знаки не только для неизвестных, но и данных произвольных величин.

То есть буквенные обозначения использовались и для коэффициентов. Прописные буквы алфавита использовались для скаляров: гласные для неизвестных, согласные для коэффициентов. В современном смысле применялись знаки + для сложения и — для вычитания. Это коренной перелом в развитии алгебры: стало возможным алгебраическое исчисление как система формул. Применяя общий аппарат алгебраических преобразований, в труде «Об анализе и усовершенствовании уравнений» Виет дал полное аналитическое изложение теории уравнений первых четырех степеней. С помощью тригонометрических средств он решил кубическое уравнение в неприводимом случае, свел его к задаче трисекции угла. Разработал метод приближенного решения алгебраических уравнений. Исследовал вопрос о зависимости между корнями и коэффициентами уравнений, их открытие он сам особенно ценил. Именно это выражают формулы Виета, изучаемые в школьном курсе алгебры.

В тригонометрии Виет дал полное решение задачи об определении всех элементов треугольников по трем данным элементам, нашел важные разложения $\cos nx$, $\sin nx$ по степеням $\cos x$, $\sin x$. Виет решил задачу Аполлония, за это его называли «французским Аполлонием».

Громкую славу Виету при дворе короля принесла расшифровка переписки врагов Генриха III во время войны с Испанией. Таким образом, Виет внес свой вклад в историю криптографии.

В развитие математики внесли свой вклад и другие великие деятели Возрождения. Основной труд великого польского астронома **Николая Коперника** (1473-1543) «О вращениях небесных сфер» (1543) содержит не только изложение гелиоцентрической системы, но и плоскую и сферическую тригонометрию, точные таблицы синусов. Великий итальянский художник, инженер-изобретатель, ученый-энциклопедист **Леонардо да Винчи** (1452-1519) видел в математике образец научной доказательности. Он изучал вопросы теории перспективы, построения правильных многоугольников, вычисления центров тяжести (полукруга, тетраэдра), определения площадей (эллипса). Он изобрел циркуль для пропорционального изменения фигуры, прибор для вычерчивания параболы. Великий немецкий художник, скульптор, архитектор **Альбрехт Дюрер** (1471-1528) написал труды «Наставление об измерении с помощью циркуля и линейки», «О человеческой пропорции». Он впервые использовал три плоскости проекции. На его гравюре «Меланхолия» изображен составленный им первый в Европе магический квадрат четвертого порядка.

В Эпоху Возрождения техника вычислений достигла новых высот. В связи с большим спросом на инженеров требовалось улучшить и вычислительный аппарат математики. После десятичных дробей инженера и математика-вычислителя Стевина, большим усовершенствованием стало изобретение логарифмов. Приближенные вычисления, необходимые в астрономии, финансовом и страховом деле, требовали облегчения. Главную трудность представляли умножение и деление многозначных чисел, особенно тригонометрических величин. С целью приведения их к сложению и вычитанию, использовали тригонометрические таблицы, основанные на формулах

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)),$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b)),$$

или таблицы квадратов, основанные на формуле

$$ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2).$$

Удовлетворительное решение вопроса дали логарифмы. При их введении использовались свойства арифметических и геометрических прогрессий. Важный шаг вперед сделал **Джон Непер** (1550-1617), шотландский лорд, в труде «Описание удивительного канона логарифмов» (1614). Основная идея Непера — построение двух последовательностей чисел, связанных таким образом, что, когда одна последовательность возрастает в арифметической прогрессии, другая убывает в геометрической. При этом произведение двух чисел второй последовательности находится в простой зависимости от суммы соответствующих чисел первой последовательности и умножение можно свести к сложению. С помощью такой системы Непер смог значительно облегчить вычислительную работу с синусами. Способ Непера был неуклюжим, его две последовательности соответствовали формуле

$$y = ae^{-\frac{x}{a}},$$

где a=10^7. Отметим еще изобретенные Непером счетные палочки — еще один счетный прибор.

К этим же идеям подошел швейцарский математик **Иост Бюрги** (1552-1632), механик и астроном. Его астрономические вычисления привели к изобретению логарифмов независимо от Джона Непера. Таблицы Бюрги, составленные в самом начале XVII в., были изданы в 1620 г. под названием «Арифметические и геометрические таблицы прогрессий». Бюрги вместе с Кеплером ввел запятую для отделения целой части от дробной в десятичной дроби.

После смерти Непера Генри Бригс (1561-1631), профессор из Лондона, опубликовал «Логарифмическую арифметику» (1624), содержавшую *«бригсовы»* десятичные логарифмы с четырнадцатью знаками для чисел от 1 до 20000 и от 90000 до 100000. Пробел от 20000 до 90000 был заполнен Езекиилом де Деккером, голландским землемером (1627), и опубликован в виде полной таблицы логарифмов.

У Непера понятия основания логарифма не было. Натуральные логарифмы появились одновременно с бригсовыми. Логарифмическая линейка была изобретена в начале XVII в.

В Эпоху Возрождения математика Европы впервые вышла за пределы знаний греческой и арабской математики. Была создана арифметическая и алгебраическая символика, отсутствие которой тормозило развитие теории уравнений. Алгебра была построена как символическое исчисление. Введены в практику десятичная позиционная арифметика, отрицательные числа, десятичные дроби. Уравнения 3-й и 4-й степени решены в радикалах в общем виде. Формально введены комплексные числа. Были усовершенствованы вычислительные методы. Таким образом, было завершено построение математики постоянных величин.

Вопросы и задания

1. Какие проблемы, решенные в математике Эпохи Возрождения, выходят за пределы греческой и арабской математики?
2. Опишите процесс создания символической алгебры.
3. Как проходило развитие методов решения уравнений 3-4 степеней в радикалах?
4. Какие идеи привели к изобретению логарифмов?

Глава IV.

ПЕРИОД СОЗДАНИЯ МАТЕМАТИКИ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН

4.1. Математика семнадцатого века

Условно XVII-XVIII века называют Новым временем. В Европе в это время укреплялся новый общественный строй — капитализм. Новое время явилось эпохой буржуазных революций — от революции в Нидерландах конца XVI в. до революций во Франции и странах Центральной Европы в середине XIX в. Составной частью этого процесса была промышленная и техническая революция. Новое время было и эпохой научной революции.

Прежде всего, изменилась концепция мира в целом. В трудах Коперника, Тихо Браге, Кеплера утвердилась и усовершенствовалась гелиоцентрическая система мира. Галилей дал новую механику. Наиболее заметных достижений достигла оптика благодаря открытию зрительной трубы, телескопа, микроскопа. Были изобретены часы с маятником, барометр, термометр. Открытие научных приборов и их совершенствование расширило возможности и точность научных измерений.

Начиная с Эпохи Возрождения, ученые проявляли все возрастающее внимание к практическим задачам. Государство начало активно привлекать их к исследованию таких задач. «Чистые» математики тогда встречались редко: Стевин занимался гидротехникой, Тарталья — баллистикой, Кардано — теорией механизмов, Кеплер, Галилей, Гюйгенс, Ньютон строили зрительные трубы, Гюйгенс был гениальным часовым мастером, Паскаль и Лейбниц работали над арифмометрами. Часто физические задачи давали импульс математическому творчеству и приводили к открытию нового метода. Назовем несколько вопросов, правильная постановка и решение которых требовали математического исследования, завершающегося числовым расчетом. Это проблемы гидравлики (давление воды на плотины и шлюзы, движение воды в каналах), кораблестроения и навигации (устойчивость плавающих тел, черчение географических карт, определение координат корабля в открытом море), артиллерии (движение брошенного тела в пустоте и в сопротивляющейся среде), оптики (свойства линз и их систем), точного приборостроения (часы). Идея «универсальной механики» стала господствующей в науке XVII в. А поскольку механика развивалась как наука математическая, то математика приобретала значение универсального метода познания мира.

В XVII веке в развитии математики было сделано столько, сколько не было сделано со времен античности. Математические исследования расширились, возникли новые разделы науки. Создание аналитической геометрии и анализа произвело в математике подлинную революцию.

К концу XVI в. математика складывалась из арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии. Была введена удобная десятичная запись чисел, до высокой степени доведена техника вычислений. Но это была по преимуществу математикой постоянных величин. В XVII веке в физико-математической картине мира на первое место выдвигались законы, которые представляли собой аналитически выраженные функциональные зависимости между совместно изменяющимися величинами. Вспомним открытую Кеплером зависимость интенсивности света от расстояния до его источника, закон Галилея о движении тел в пустоте, закон Торричелли, закон Бойля-Мариотта, закон Гука о растяжении пружины и др. Таким образом, преобладающее значение в разработке физики приобрело измерение величин, поиск законов, выражающихся формулами алгебры. Отныне математика переходит к исследованию переменных величин и функций, как аналогов механического движения и любого количественного изменения вообще. Ф. Энгельс характеризовал революцию в математике XVII в. следующим образом: «Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и тем самым диалектика и, благодаря этому же, стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление». Построение нового анализа функций как системы алгоритмов оказалось главной целью и главным достижением новой математики.

Возросла роль античного наследия. Были сделаны латинские переводы и издания почти всех классиков. Особое значение приобрел обмен информацией при помощи переписки. Были такие математики, например, М. Мерсенн в Париже, через которых велась переписка и устанавливались связи между учеными (Декарт, Ферма, Галилей, Паскаль, Дезарг и др.). Сообщать Мерсенну о каком-нибудь открытии означало опубликовать его для всей Европы. Началось издание научной периодики: «Философские труды» в Лондоне и «Журнал ученых» в Париже (1665).

Создавались академии: в Неаполе (1560), Национальная академия в Риме (1603), Королевское общество в Лондоне (1662, первый президент Броункер), Королевская Академия наук в Париже (1666, первый президент Гюйгенс), в Берлине (1700, первый президент Лейбниц) и др.

Развитие математики происходило неравномерно в различных странах. В Италии, где работали Галилей, Кавальери, Торричелли, из-за разгула религиозной реакции, произошел спад научных исследований. Наиболее передовыми стали страны: Англия (где работали Непер, Валлис, Барроу, Ньютон), Франция (Декарт, Ферма, Паскаль, Дезарг), Голландия (Стевин, Жирар, Гюйгенс).

Начиная с XVII в. правильнее было бы излагать историю развития отдельных математических дисциплин. Они создавались усилиями многих ученых. Тем не менее, отдельные ученые работали во многих направлениях и внесли существенный вклад в развитие нескольких научных дисциплин. Именно в этом веке происходила разработка основ многих классических математических наук. Проследим этапы их создания в трудах выдающихся ученых Нового времени.

Великий немецкий астроном **Иоганн Кеплер** (1571-1630), работавший в Праге, установил законы обращения планет (в сочинении «Новая астрономия», 1609), положил начало небесной механике. Он проявил себя приверженцем теории Коперника, поэтому всю жизнь подвергался преследованиям со стороны церкви. Его труды были внесены в список запрещенных книг. В математике он развивал методы математики переменных величин, сначала в связи с задачами астрономии, затем — геометрии. Он вычислял объемы тел, получающихся при вращении конических сечений (в сочинении «Новое измерение винных бочек», 1615). Используя идею метода неделимых Архимеда, Кеплер оригинальными приемами интеграций нашел объемы 92 тел вращения. В работе «Гармония мира» построил систематическую теорию выпуклых и звездчатых многогранников.

Один из основателей точного естествознания, итальянский механик и астроном **Галилео Галилей** (1564-1642), всячески пропагандировал применение математических методов при изучении явлений природы, единство опыта и теории. В знаменитом труде «Диалог о двух главнейших системах мира, птолемеевой и коперниковой» (1632) блестяще развивал учение Коперника о движении Земли. Это сочинение вызвало гнев инквизиции, запрет книги и требование отречения Галилея от своего учения. Большое значение имела работа Галилея по созданию принципов механики. Он открыл закон инерции, законы свободного падения тел, колебаний маятника. Рассчитал параболическую траекторию снаряда, нашел высоту и дальность полета в зависимости от начальной скорости и угла возвышения. В своих «Беседах ...» (1638) пришел к математическому изучению движения, к зависимости между расстоянием, скоростью и ускорением. Исследуя ускоренное движение, пришел к понятию мгновенной скорости. В области математики Галилей явился предшественником Кавальери в создании исчисления неделимых. У него мы встречаем и элементы теории вероятностей («О выходе очков при игре в кости», 1655).

В тесном взаимодействии математики и смежных наук вырабатывались методы бесконечно малых (*инфинитезимальные методы*). Для создания исчисления бесконечно малых в математике XVII в. сложились достаточные предпосылки. Это были: наличие сложившейся алгебры, введение в математику переменных величин, усвоение метода неделимых древних греков, идей Архимеда, накопление методов решения задач на вычисление площадей и объемов, нахождения касательных и экстремумов. В создании анализа бесконечно малых принимали участие многие ученые, начиная от Кеплера и Галилея.

Бонавентура Кавальери (1598-1647), ученик Галилея, профессор в Болонье, построил упрощенную разновидность исчисления бесконечно малых («Геометрия», 1635) — метод неделимых, необходимую ему для вычисления площадей и объемов. Неделимыми он называл параллельные между собой хорды плоской фигуры и параллельные плоскости тела. При вычислении площадей Кавальери суммировал неделимые — площади малой ширины, а при вычислении объемов — слои малой толщины. Он получал свои результаты с помощью «принципа Кавальери»: «Два тела одинаковой высоты имеют один и тот же объем, если плоские сечения этих тел на одинаковом уровне имеют одинаковые площади». Кавальери смог вычислить объем шара, конуса, а также вывести ряд формул, равнозначных формулам интегрального исчисления

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Эванджелиста Торричелли (1608-1647), последователь Галилея и Кавальери, вычислял объемы тел вращения методами, близкими к интегрированию. Исследовал логарифмическую спираль, дал ее квадратуру и спрямление. Построил касательные к параболам и гиперболам любого порядка, то есть к кривым, задаваемым уравнениями $y^n=kx^{\pm m}$. Более известен как физик, изучавший атмосферное давление, истечение жидкостей из сосудов и др. Изобрел ртутный барометр, усовершенствовал артиллерийский угломер.

После Виета ценный вклад в развитие алгебры внесли Томас Гарриот, Петер Роте, Альбер Жирар. **Томас Гарриот** (1560-1621), выпускник Оксфорда, написал монографию «Применение аналитического искусства к решению алгебраических уравнений» (1631). Усовершенствовал алгебраическую символику (например, ввел знаки $>$,$<$). **Петер Роте** (?-1617), немецкий математик, установил, что число корней уравнения не превосходит его степени. **Альбер Жирар** (1595-1632), голландский математик, выпускник Лейденского университета, ученик

Стевина, военный инженер, дал геометрическую интерпретацию корней и сформулировал основную теорему алгебры. В книге «Новые открытия в алгебре» (1629) развил теорию симметрических многочленов от корней уравнения. Для этого требовалось использовать нулевые, отрицательные и мнимые корни. Жирар дал окончательный вывод общей формулы для решения полного квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Новый мощный толчок развитию всей математики сообщил **Рене Декарт** (1596-1650), выдающийся французский философ, математик, физик и физиолог. В латинизированной форме его называли Картезиус, поэтому его философское учение называется *картезианством*. Родился в дворянской семье в городе Лаэ (ныне Лаэ-Декарт). Получил хорошее образование в иезуитском колледже в г. Ла-Флеш, затем изучал медицину и право. Окончил университет в Пуатье. Некоторое время служил в армии Морица Оранского, участвовал в 30-летней войне. Путешествовал по Европе. Возвратившись в Париж, стал деятельным членом кружка ученых, философов и естествоиспытателей. Его философские идеи находили много поклонников, но вызывали неодобрение иезуитов. Декарт переехал в Голландию, самую передовую в то время страну. Его жизненным принципом было: «Хорошо прожил тот, кто хорошо укрылся». Резко сокращал личное общение с учеными, поддерживал только переписку через своего друга Мерсенна. Из-за гнева протестантских церковников переехал потом в Стокгольм (1649). Шведская королева Христина пригласила его для организации Академии наук. Умер там от простуды в 1650 г. Позже он был перенесен в Пантеон в Париже.

Декарт искал общий метод мышления, который позволял бы делать открытия и выявлять истину в науках. Он боролся против схоластики, за изучение природы, приобретение реальных знаний. Единственной наукой о природе, обладавшей систематическим изложением, была тогда механика, которая основывалась на математике. Все явления природы Декарт трактовал как перемещения делимых и подвижных частей трехмерно протяженной материи. Картезианство приняли в свое время многие ученые, несмотря на его дуалистический характер: оно принимало существование двух субстанций — материи и духа. По мнению Декарта, математика должна была стать наиболее важным средством для понимания мира. По методу математики можно строить и другие науки: Декарт в своих трудах доказывал возможность этого. Он заложил научные основы оптики, физиологии, метеорологии.

Свою новую математику Декарт называл всеобщей. Ее изложение содержится в единственном печатном труде по математике — «Геометрии», появившемся в 1637 г. в качестве приложения к книге на французском языке «Рассуждения о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскивать истину в науках. Вместе с Диоптрикой, Метеорами и Геометрией, которые суть примеры этого метода». Гораздо большее распространение получило латинское издание «Геометрии», подготовленное профессором Францем ван Схоотеном (1615-1660), поклонником, другом, учеником Декарта, учителем голландских математиков, в том числе Гюйгенса. Во второй половине XVII в. «Геометрия» являлась настольной книгой всех творческих математиков. Тем не менее она не является трактатом по геометрии. Значительную ее часть составляет теория алгебраических уравнений. Заслуга Декарта в том, что он последовательно применил хорошо развитую алгебру начала XVII в. к геометрии греков. Это явилось началом современной аналитической геометрии. В «Геометрии» Декарт впервые ввел понятие переменной величины и функции.

Для представления общей непрерывной величины Декарт пользовался геометрией. Он построил исчисление отрезков: представлял любые величины и составленные из них выражения отрезками, в отличие от геометрической алгебры греков. Отрезки обозначались буквами: данные — начальными буквами алфавита, неопределенные количества — последними буквами *x, y, z*. Все задачи математики, по Декарту, могут быть выражены с помощью уравнений. Единственный общий метод решения уравнений — построение их корней, как отрезков — координат точек пересечения некоторых плоских кривых.

Координаты появились еще в древности, например, широта и долгота в «Географии» Птолемея. Другой вид координат — отрезки, зависимости между которыми («симптомы») выражали определяющие свойства этих кривых. Слово «координаты» ввел Лейбниц только в 1692 г. В «Геометрии» Декарта нет «декартовых осей», не выведены уравнения прямой линии и конических сечений. Он чертил только одну ось с начальной точкой и указывал направление других координат, вообще говоря, наклонных. Отрицательные абсциссы не рассматривались. Хотя Декарт их истолковывал как противоположно направленные отрезки. «Истинные» (действительные) корни он подразделял на «явные» (положительные) и «неявные» или «ложные» (отрицательные). Также у него существовали «воображаемые» корни, как недействительные корни, которые можно вообразить себе в числе, требуемом для справедливости основной теоремы алгебры. В алгебраических обозначениях Декарта многое уже является современным: степени a^2, a^3..., радикалы $\sqrt{\ }$.

Декарт также первым описал алгебраический способ построения касательных и нормалей к кривым. При этом он пользовался еще одним важным методом — «методом неопределенных коэффициентов» для многочленов.

Среди открытий Декарта заслуживают внимания также вычисление площади циклоиды по методу неделимых и построение к ней касательных. Он знал также открытое позднее Эйлером соотношение между числами граней, вершин и ребер выпуклых многогранников. С именем Декарта связаны такие понятия, как декартовы координаты, произведение, парабола, лист, овал и др. Его «Геометрия» оказала огромное влияние на развитие математики, и около 150 лет алгебра и геометрия развивались в направлениях, указанных Декартом.

Несколько ближе к современной аналитической геометрии подошел другой «Великий дилетант» математики — **Пьер Ферма** (1601-1665), юрист из Тулузы. Он был знатоком многих древних и современных языков. Стал разносторонним математиком: вместе с Декартом явился создателем аналитической геометрии, вместе с Паскалем заложил основы теории вероятностей, создал новый метод касательных и экстремумов. Ферма может считаться основоположником алгебраической теории чисел.

Его результаты дошли до нас в разрозненном виде. Он писал мало и сжато, не публиковался. Некоторые теоретико-числовые результаты дошли лишь в виде проблем, без доказательств. Например, он искал критерии того, будет ли заданное число простым или составным. Эффективного алгоритма определения простоты числа не существует по сей день — это одна из важнейших проблем современной криптографии. Ферма полагал, что формула $F(n) = 2^{2^n} + 1$ дает простое число при любом целом *n*. Это верно при $0 \le n \le 4$. Но число $F(5)=2^{32}+1$ не простое, что было доказано Эйлером. До сих пор неизвестно, конечно ли число простых чисел Ферма $F(n)$.

В своем письме, получившем название «Второго вызова математикам» (1657), он предложил найти общее правило решения уравнения $x^2=1+ay^2$, где a — целое число, не являющееся полным квадратом. Он утверждал, что это уравнение имеет сколько угодно целых решений. Эту задачу решили Эйлер и Лагранж. Эйлер по ошибке называл его «уравнением Пелля» (Джон Пелль, 1611-1685, английский алгебраист).

Одной из фундаментальных теорем теории чисел является «малая теорема Ферма»: $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, если a не делится на простое число p. Ферма сформулировал ее так: для каждого числа a, не делящегося на простое число p, существует такое число f, являющееся делителем $p-1$, что a^f-1 делится на p.

На полях «Арифметики» Диофанта Ферма сделал свои знаменитые заметки. Среди них «Великая теорема Ферма»: уравнение $x^n+y^n=z^n$ неразрешимо в целых положительных значениях x, y, z, если $n>2$. Против задачи Диофанта «Разделить квадратное число на два других квадратных числа» была сформулирована такая задача: «Разделить куб на два других куба, четвертую степень или вообще какую-либо степень выше второй на две степени с тем же обозначением невозможно, и я нашел воистину замечательное доказательство этого, однако поля слишком узки, чтобы поместить его».

За более чем три столетия напряженных поисков такое доказательство не было получено. Случай $n=4$ был доказан самим Ферма «методом бесконечного спуска». Более сложный случай $n=3$ доказан Эйлером, $n=5$ Лежандром и Дирихле, $n=7$ Ламэ. Куммер доказал для всех $n \le 100$. Это привело к созданию теории идеальных чисел. Попытки доказательства теоремы Ферма привели к открытию и решению многих проблем алгебраической теории чисел. В начале прошлого века (1908) за доказательство теоремы Ферма было завещано 100000 марок премии тому, кто сделает его в течение последующих 100 лет. В комиссию в Геттингенском университете поступили тысячи доказательств, но все они оказались ошибочными. Профессиональные математики считали поиск доказательства теоремы безнадежным делом и отказывались тратить свое время на такое бесполезное занятие. В конце XX в. объявился профессионал, завершивший эту эпопею. Об окончательном доказательстве теоремы было заявлено в 1995 г. профессором Принстонского университета Эндрю Уайлсом. Две статьи общим объемом в 130 страниц были подвергнуты тщательному анализу и в мае 1995 г. опубликованы в журнале «Annals of Mathematics». В 1997 г. Уайлс получил премию в размере 50000 долларов. Великая теорема Ферма была официально признана доказанной.

Трактат «Введение в изучение плоских и телесных мест» (1636) содержит начала аналитической геометрии Ферма. Он формулирует принцип аналитической геометрии следующим образом: «Всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины, налицо имеется место, и конец одной из них описывает прямую или же кривую линию... Для установления уравнений удобно расположить обе неизвестные величины под некоторым заданным углом (который мы большей частью принимаем прямым) и задать положение и конец одной из величин». Во «Введении» впервые встречаются уравнения для прямых линий и конических сечений относительно системы перпендикулярных осей.

Ферма произвел квадратуру любых кривых $y=x^n$, $n\in Z$, $n>0$. При этом он возродил метод интегральных сумм. Вычислял также кубатуры и определял центры тяжести тел вращения.

Большое значение для становления дифференциального исчисления имело предложенное Ферма правило нахождения экстремумов. В сочинении «Метод отыскания максимумов и минимумов» (1638) Ферма изобрел прием, пригодный для нахождения экстремумов и касательных. Это правило совпадает с известным теперь необходимым условием экстремума дифференцируемой функции: $f'=0$. Его метод состоял в незначительном изменении переменного в алгебраическом уравнении с последующим обращением этого изменения в нуль.

Задачи, которые оказали влияние на зарождение и развитие теории вероятностей, возникали в статистике, в страховом деле, при обработке астрономических наблюдений, в различных азартных играх. Разработка вероятностных задач оказалась тесно связанной с комбинаторикой. Одной из первых задач, которую следует отнести к теории вероятностей, являлся подсчет числа возможных различных исходов при бросании нескольких игральных костей. Такие подсчеты велись уже с X в. До середины XVII в. в теории вероятностей не было никакого общего метода решения задач, а также цельной математической теории. Затем в ее разработку включились Ферма, Паскаль, Гюйгенс. Ферма и Паскаль разными путями решили задачу о разделении ставок (1654).

Книга Кавальери «Геометрия» (1635) побудила многих математиков различных стран заняться задачами, в которых применялись бесконечно малые. Появляется новая проблема — задача о касательной. При решении этой задачи выявились два направления: геометрическое (Кавальери, Торричелли, Барроу, Гюйгенс, которые использовали античные методы) и алгебраическое (Декарт, Ферма, Валлис, которые применяли новую алгебру). Каждый из них приходил своим методом к формуле, равносильной интегралу

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Исаак Барроу (1630-1677), английский математик, филолог и богослов, показывает, что задача о касательной и задача о вычислении объемов — это две взаимно обратные операции («Лекции по оптике и геометрии», 1670). Он был профессором в Кембридже, учителем Ньютона, одним из главных предшественников Ньютона и Лейбница в разработке исчисления бесконечно малых. Для него исходным являлось понятие движения. **Джон Валлис** (1616-1703), профессор кафедры геометрии в Оксфорде, был первым математиком, у которого алгебра по-настоящему переросла в анализ. Был одним из основателей и первых членов Королевского общества. Его главные труды — «Арифметика бесконечных» (1656), «Трактат по алгебре» (1685). Ввел бесконечные ряды и бесконечные произведения, знак ∞ для бесконечности. Он первым из математиков XVII в. арифметизировал понятие определенного интеграла, рассматривая его как предел отношения числовых последовательностей, независимо от понятия площади. Заложил основы метода интерполирования, построил график функции y=sin$x$ — синусоиду.

Выдающийся голландский физик, астроном, математик **Христиан Гюйгенс** (1629-1695) дал более строгие применения анализа бесконечно малых в геометрии и физике. Родился в Гааге, обучался в Лейдене, работал в Гааге и Париже. В 1666 г. стал первым президентом Академии наук в Париже. Создал волновую теорию света. Открыл кольца Сатурна. Исследовал способы измерения времени, изобрел маятниковые часы (1657), разработал их теорию («Маятниковые часы», 1673). Совместно с Гуком установил постоянные точки термометра — точку таяния льда и точку кипения воды. В приложениях анализа исследовал эволюты и эвольвенты плоской кривой (1654), трактрису, логарифмическую спираль, цепную линию, циклоиду. Написал первое руководство по теории вероятностей «О расчетах в азартной игре» (1657). Ввел понятие «математическое ожидание». Создал достаточно полную теорию цепных дробей и пользовался подходящими дробями как наилучшими приближенными значениями.

Большой вклад в основание многих разделов математики внес **Блез Паскаль** (1623-1662), французский математик, физик, философ, религиозный мыслитель. Был противником философских воззрений Декарта. Уже отмечалось, что Паскаль является вместе с Ферма основателем математической теории вероятностей. Важную роль играл в развитии комбинаторики его «Трактат об арифметическом треугольнике». Он впервые записал таблицу сочетаний в треугольной форме (*«треугольник Паскаля»*). Биноминальные коэффициенты Паскаль образовывал по разработанному им способу полной математической индукции — это было одно из важнейших его открытий. В 16 лет открыл «теорему Паскаля» о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение, одну из классических теорем проективной геометрии: точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в коническое сечение, лежат на одной прямой. От идей проективной геометрии перешел (1658) к теории *рулетты*, то есть к задаче формировавшегося тогда анализа бесконечно малых. Открыл и применил такие методы, которые дают основание считать его одним из творцов анализа. Теорема Паскаля о характеристическом треугольнике, как указывал Лейбниц, была одним из источников, которые он использовал при создании дифференциального и интегрального исчислений. Занимался исследованием циклоиды. Использовал интегральные суммы для решения задач квадратуры, *кубатуры*, отыскания центров тяжести фигур, связанных с циклоидой. Доказал ряд теорем, касающихся замены переменных и интегрирования по частям.

Основополагающим вкладом в становлении гидростатики является «закон Паскаля» о распределении давления в жидкостях. Он установил принцип действия гидравлического пресса. Провел опыт, подтвердивший существование атмосферного давления (1648). Сформулировал ряд законов в области метеорологии. Изобрел первую счетную машину (1642) для двух арифметических действий. Всего построил более 50 машин.

Начало проективной и начертательной геометрии как отдельной науке положил французский инженер, архитектор **Жирар Дезарг** (1591-1661). Он является автором книги о перспективе (1636), основной его труд — «Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью» (1639). Широко применял проективное преобразование, бесконечно удаленные точки и прямые, двойное отношение четырех точек, инволюции, полярные соотношения. Свою известную «теорему Дезарга» о перспективном отображении треугольников обнародовал в 1648 г. Писал свои труды на придуманном ботаническом языке.

Проективно-геометрическое направление Дезарга и Паскаля нашло применение только в XIX в. в трудах Монжа, Понселе, Штейнера и др.

В XVII в. перед естествознанием возникла новая проблема — найти законы движения. Для этого аппарат математики постоянных величин был недостаточным. Работы Кавальери, Декарта, Валлиса, Гюйгенса, Паскаля и др. подготовили все для построения дифференциального и интегрального исчисления. Они действительно появились в работах Ньютона и Лейбница и стали могучим средством решения новых задач. О том, что они опирались на труды предыдущих поколений математиков, Ньютон сказал: «Я сделал так много потому, что стоял на плечах гигантов».

Очень много написано по вопросу о приоритете этого открытия. Установлено, что оба они открыли свои методы независимо друг от друга. Ньютон первым открыл свои методы анализа (1665-1666), а Лейбниц позже (1673-1676), но Лейбниц первым выступил в печати (Лейбниц в 1684-1686 гг., Ньютон в 1704-1736 гг.). На старости лет Ньютону пришлось вступить в долгий спор с Лейбницем о приоритете. Начало спору положили не они сами (1699), но вскоре приняли в нем деятельное участие. Острая и пристрастная полемика, в которую было вовлечено много ученых, испортила немало крови Ньютону и Лейбницу. Оба они далеко отошли от высокой первоначальной оценки взаимных заслуг. Этот спор, разросшийся до размеров международной распри, имел печальные последствия для математики. Английские математики отказывались от применения алгоритмов Лейбница, а математики континента выражали невнимание к достижениям школы Ньютона. Так продолжалось более ста лет.

Гениальный английский ученый, основоположник современной механики, создатель математики непрерывных процессов **Исаак Ньютон** (1643-1727) родился в Вулсторпе, учился в Кембридже у Барроу. С 1669 г. до 1701 г. — профессор Кембриджского университета, с 1699 г. — главный директор Монетного двора, с 1703 г. — Президент Королевского общества. Ньютон похоронен в английском национальном пантеоне — Вестминстерском аббатстве.

Годы работы в университете были для Ньютона самыми плодотворными. Именно в это время он написал свои важнейшие труды. В 1665-1666 гг. в Кембридже вспыхнула чума, и Ньютон уехал в деревню. Его библиограф профессор Мор заметил: «В истории науки нет равного примера таких достижений, как достижения Ньютона в течение этих двух золотых лет». За эти годы он открыл свой общий метод анализа, который назвал «теорией флюкций». Первое систематическое изложение этой теории дано в рукописи «Следующие предложения достаточны, чтобы решать задачи с помощью движения» (1666). В его следующем труде «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов» (1669) содержатся фундаментальные открытия в области бесконечных рядов. В частности, он обобщил общее разложение степени бинома на случай любого действительного показателя. Данный Ньютоном метод изучения функций с помощью рядов имел впоследствии огромное значение для всего анализа.

При издании трудов Ньютону приходилось вступать в полемику с научным миром, и поэтому он перестал печататься. Его сочинения были изданы лишь после того, как его имя приобрело мировую славу. Например, «Метод флюкций и бесконечных рядов» был напечатан только в 1736 г., после его смерти. Столь позднее издание трудов Ньютона по исчислению бесконечно малых ограничило распространение его открытий, особенно за пределами Англии.

Изложение анализа Ньютона имеет механическую основу. Текущие переменные величины изменяются в зависимости от времени, они называются «флюэнтами», обозначаются v, x, y, z. Скорости, с которыми каждая флюэнта изменяется при движении, называются «флюкциями», обозначаются $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Бесконечно малые изменения флюэнт, названные «моментами флюкций», обозначаются $\dot{v}o, \dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o$, где o — «бесконечно малое количество». Нетрудно видеть, что *флюкция* Ньютона — это производная. Однако его способ не был вполне определенным. Бесконечно малое количество было определено нестрого: в одних случаях им пренебрегали, отбрасывали, в других случаях на него делили, то есть считали ненулевым.

Ньютоном были поставлены в терминах метода флюкций две главные проблемы анализа. Первая: по данному соотношению между флюэнтами определить соотношение между флюкциями. Это задача дифференцирования функций, зависящих от «времени». Вторая: по данному уравнению, содержащему флюкции, найти соотношение между флюэнтами. Это задача интегрирования дифференциального уравнения первого порядка.

Ньютон применил метод флюкций к большому кругу геометрических задач на касательные, кривизну, экстремумы, квадратуры, спрямления и др. Большое внимание он уделил интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, решил некоторые задачи вариационного исчисления.

С именем Ньютона связано решение многих взаимосвязанных задач математики и физики. Он рассматривал математику только как способ для физических исследований. Его основной труд «Математические начала натуральной философии» (1687) насквозь проникнут духом новых исчислений, он показывает все могущество этих исчислений в изучении законов природы. В этой работе он свел все известные до него и все найденные им самим сведения о движении и силе в одну дедуктивную систему земной и небесной механики. В ней содержатся аксиоматическое построение механики, законы механики, закон всемирного тяготения, строго математически выведенные эмпирические законы Кеплера движения планет, решение проблемы приливов и отливов, теории движения Луны. Ньютон дал определение основных понятий механики — массы, плотности, количества движения, силы, пространства, времени. В этом сочинении содержится развитая теория конических сечений, необходимая для исследования движения планет и комет. В этом же труде Ньютон впервые разработал общую теорию предельных переходов под названием «метода первых и последних отношений». Здесь вводится и сам термин «предел» (limes). Понятию предела определения не дается, метод пределов излагается в 12 леммах.

Вклад Ньютона в математику не исчерпывается созданием анализа. Его «Универсальная арифметика» становится одним из первых учебников Нового времени по арифметике, алгебре и применению алгебры к геометрическим задачам. В алгебре ему принадлежат метод численного решения алгебраических уравнений (метод Ньютона), важные теоремы о симметрических функциях корней алгебраических уравнений (формулы Ньютона), об отделении корней. В сочинении «Всеобщая арифметика» (1707) он развил учение о числе, дал определение числа: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное. Целое число есть то, что измеряется единицей; дробное — кратной долей единицы; иррациональное число несоизмеримо с единицей». В «Методе разностей» (1711) ученый решил задачу о проведении через данные точки параболической кривой и предложил интерполяционную формулу, названную его именем. В «Перечислении кривых третьего порядка» (1704) дал классификацию этих кривых.

Ньютон усиленно разрабатывал вопросы оптики, открыл дисперсию света. Построил первый рефлектор (1668).

Недостатки аналитических методов Ньютона вызывали нападки на теорию флюкций. В 1734 г. английский философ, епископ Джордж Беркли, выпустил памфлет, известный под названием «Аналист» («Аналист или рассуждение, обращенное к неверующему математику, где исследуется, более ли ясно воспринимаются или более ли очевидно выводятся предмет, принцип и умозаключения современного анализа, чем религиозные таинства и догматы веры»). «Аналист» содержал остроумную и во многом справедливую критику. Эти недоразумения были устранены лишь после четкого установления современного понятия предела.

Великий немецкий ученый **Готфрид Вильгельм Лейбниц** (1646-1716) упоминается в первую очередь как один из основоположников математического анализа. Родился в Лейпциге. Окончил юридический факультет Лейпцигского университета. Состоял на юридической и дипломатической службе и выезжал в Париж. Творческая математическая деятельность началась там, где он познакомился с Гюйгенсом и под его руководством изучал работы Галилея, Декарта, Ферма, Паскаля и самого Гюйгенса. Большую часть жизни провел в Ганновере, был библиотекарем, библиографом и тайным советником юстиции ганноверского герцога. В 1700 г. организовал Академию наук в Берлине и стал ее первым президентом. Способствовал открытию академий наук в Вене и Петербурге. Встречался с Петром I, работал над проектом организации образования в России. Занимался многими науками: философией, историей, лингвистикой, биологией, геологией, психологией, физикой и математикой. Открыл кинетическую энергию. Создал теорию геологической эволюции, психологии подсознания. В дипломатии старался содействовать объединению немецких государств.

Лейбниц нашел свое новое исчисление в 1673-1676 гг. под влиянием Гюйгенса, в ходе изучения работ Декарта и Паскаля. Он знал, что Ньютон обладал подобным методом. Но подход Ньютона был механическим, а подход Лейбница — геометрическим. При этом он исходил не из квадратуры кривых, как Ньютон, а из проблемы касательных. Рассматривал «характеристический треугольник» (*dx*, *dy*, *dz*), который уже встречался у Паскаля. Прежние частные и разрозненные приемы Лейбниц свел в единую систему взаимосвязанных понятий анализа, что позволило производить действия с бесконечно малыми по определенному алгоритму. Впервые анализ в форме Лейбница изложен им в печати в 1684 г. в статье «Новый метод для максимумов и минимумов, а также для касательных, для которого не являются препятствием дробные и иррациональные количества, и особый вид исчисления для этого». В этой статье впервые вводились наши символы *dx*, *dy*, правила дифференцирования произведения и частного

$$d(uv) = vdu + udv,\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2},$$

условие $dy=0$ для точек экстремума, $d^2y=0$ для точек перегиба.

Разъяснения анализа Лейбница страдали той же неопределенностью, что и у Ньютона. Иногда *dx*, *dy* были конечными величинами, иногда меньше любого определенного количества и все-таки не нули. В 1686 г. вышла следующая статья «О скрытой геометрии ...» с правилами интегрального исчисления. В ней содержался символ $\int$, который Лейбниц называл «суммой» (термин «интеграл» позже ввел Я. Бернулли).

Лейбниц был одним из самых плодовитых изобретателей современных математических символов. Немногие математики так хорошо понимали единство формы и содержания символики. Название «дифференциальное и интегральное исчисление» принадлежит Лейбницу. Он же ввел термины «функция», «переменная величина», «координаты», «абсцисса», «ордината», «дифференциал», «алгоритм». Благодаря его влиянию стали пользоваться знаками равенства «=» и умножения «•», логической символикой.

Математические работы Лейбница не ограничиваются областью анализа. Ученый занимался поиском всеобщего метода для овладения науками. Он искал «всеобщий язык», в котором все ошибки мысли выявились бы как ошибки вычислений. Это привело его к символической логике. Таким образом, Лейбниц считается одним из основоположников математической логики.

Лейбница можно считать идейным вдохновителем современной машинной математики. Он одним из первых сконструировал счетную машину, которая выполняла не только сложение и вычитание, но и умножение, деление, возведение в степень и извлечение квадратного и кубического корней. Свыше 40 лет Лейбниц посвятил усовершенствованию своего изобретения. Изобрел он и первый интегрирующий механизм.

Лейбниц ввел понятие определителя и выдвинул некоторые идеи, касающиеся теории определителей, которые далее развивали Вандермонд, Коши, Гаусс и окончательно разработал К. Якоби.

Влияние работ Лейбница на современников оказалось огромным. Он создал собственную математическую школу, в которую входили братья Бернулли, Лопиталь, Эйлер и др. Он первым нарушил и традицию писать научные труды только на латинском языке.

Швейцарские математики братья Якоб и Иоганн Бернулли были первым поколением замечательного семейства Бернулли из Базеля, давшего математике не одно поколение своих представителей. **Якоб Бернулли** (1654-1705) — это этап в развитии теории вероятностей. В труде «Искусство предположений», изданной только в 1713 г., классическое определение вероятности события как отношение числа благоприятных исходов к числу всех равновозможных исходов формально ввел Я. Бернулли. Вывел теорему — частный случай закона больших чисел. Построил математическую модель для описания серии независимых испытаний (схема Бернулли). Благодаря его работам теория вероятностей приобрела важнейшее значение в практической деятельности. После 1687 г., ознакомившись с мемуарами Лейбница, начал применять новые идеи к изучению свойств ряда кривых. Определил площадь сферического треугольника, вычислил площади коноидальных и сфероидальных поверхностей, произвел многочисленные квадратуры и спрямления. Его книга «Арифметические приложения о бесконечных рядах и их конечных суммах» (1689-1704) явилась первым руководством по теории рядов. Совместно с братом Иоганном положил начало вариационному исчислению. Выдвинул и частично решил изопериметрическую задачу и задачу о брахистохроне, или кривой быстрейшего спуска, поставленную И. Бернулли. Был учителем брата Иоганна, племянника Николая, П. Эйлера — отца Л. Эйлера.

Иоганн Бернулли (1667-1748) достиг больших результатов в разработке анализа, теории дифференциальных уравнений. Деятельно сотрудничал с Лейбницем. В 1691-1693 гг. преподавал в Париже. Создал французскую ветвь школы Лейбница. Был профессором Базельского университета с 1705 г. Его учениками были, кроме сыновей Даниила и Николая, Г.Ф. Лопиталь, Л. Эйлер. Он развил теорию показательной функции, вывел правило раскрытия неопределенностей типа 0:0 (носящее имя Лопиталя), указал методы интегрирования рациональных дробей. Дал определение понятия функции как аналитического выражения. Дал первое систематическое изложение дифференциального и интегрального исчислений. Конспект лекций, читанных им Лопиталю, был положен в основу составленной Лопиталем книги «Анализ бесконечно малых для исследования кривых линий» (1696). В 1742 г. Бернулли издал «Курс интегрального исчисления». Большое значение для развития математики имела обширная переписка братьев Бернулли с Лейбницем. Еще до 1700 г. они втроем открыли значительную часть нашего основного курса анализа.

Маркиз **Гийом Франсуа Антуан де Лопиталь** (1661-1704), французский математик, ученик И. Бернулли, развивал его результаты. Издал первый учебник по математическому анализу (1696, лекции И. Бернулли), курс аналитической геометрии конических сечений (1707).

Дифференциальное и интегральное исчисление конца XVII в. подверглось нападкам из-за некоторых неопределенностей, связанных с бесконечно малыми величинами. Их авторы не были в состоянии строго обосновать анализ. Полемика между сторонниками нового анализа (Вариньон и др.) и последователями картезианской математики (Ролль и др.) велась на заседаниях Парижской Академии и в печати. В ней участвовало много лиц, и она принимала порой очень острый характер.

Главным итогом развития математики XVII столетия является создание аппарата математики переменных величин: понятия функции как аналитического выражения и главного средства исследования функций — алгоритмов исчисления бесконечно малых, развитых до дифференциального и интегрального исчисления. Созданы новые разделы математики: аналитическая геометрия, теория вероятностей, проективная геометрия. Поставлены и решены ряд важных задач теории чисел. Развиты численные методы. Сформулирована основная теорема алгебры.

Таким образом, XVIII в. начался новым кризисом в развитии математики. Было создано исчисление, дающее прекрасные результаты в вычислениях, но оно не было подкреплено прочным логическим фундаментом.

Вопросы и задания

1. Назовите основные признаки революционных изменений в математике XVII века.
2. Какие новые разделы математики были созданы в Новое время?
3. Назовите имена математиков, внесших свой вклад в создание анализа бесконечно малых.
4. Назовите основоположников аналитической геометрии, теории вероятностей, проективной геометрии.
5. Назовите основные отличия анализа Ньютона и Лейбница.
6. Опишите историю «Великой теоремы Ферма».

4.2. Математика восемнадцатого века

Одно из названий XVIII века — «Век Просвещения». Ведущие страны управлялись «просвещенными деспотами»: Фридрихом I, Людовиками XV и XVI, Екатериной II. Это век Вольтера (1694-1778), Дидро (1713-1784), Ломоносова (1711-1765). Научная деятельность в основном сосредоточилась в Парижской, Берлинской, и Петербургской академиях (организована в 1725 г.). Крупнейшим событием духовной жизни стало издание во Франции знаменитой «Энциклопедии наук, искусств и ремесел» (1751-1772) в 28 томах, ее редактором был Дени Дидро.

Восемнадцатый век характеризуется в математике в основном развитием анализа и его приложений. Крупнейшие математики XVII-XVIII веков после Лейбница вышли из швейцарского города Базеля. В первую очередь, это братья Бернулли, Якоб и Иоганн. Они стали первыми выдающимися учениками Лейбница, совместно с ним создали основы современного дифференциального и интегрального исчисления. Оставили свой след в развитии математики два сына Иоганна: **Николай Бернулли** (1695-1726) и **Даниил Бернулли** (1700-1784). Они некоторое время работали в Петербурге по приглашению Петра I. Николай известен некоторыми трудами по теории дифференциальных уравнений. Даниил главным образом занимался вопросами астрономии, физики, гидродинамики и газовой динамики. Заложил основы кинетической теории газов. Изучал теорию колебаний, впервые применил для решения соответствующего дифференциального уравнения тригонометрические ряды, впоследствии названные рядами Фурье. Заложил основы теории дифференциальных уравнений с частными производными. В алгебре ему принадлежит приближенный метод численного решения алгебраических уравнений. В теории вероятностей он впервые применил исчисление бесконечно малых. Применил теорию вероятностей к статистике народонаселения. Ему принадлежит определение числа e как предела

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ при } n\to\infty.$$

Гениальный математик, механик, физик, астроном **Леонард Эйлер** (1707-1783) тоже вышел из Базеля. Его отец, пастор, был учеником Я. Бернулли. Леонард учился у отца и И. Бернулли. Окончил Базельский университет. Был приглашен для работы в недавно организованной Петербургской Академии наук и долгое время работал в ней (1727-1741, 1766-1783), был украшением и славой Академии более 50 лет. В 1741-1766 гг. работал в Берлине, но не порвал связи с Петербургом. Он продолжал помогать в подготовке русских математиков. Его статьи на латинском языке появлялись без перерыва в печатном органе Академии («Комментарии Петербургской Академии наук») начиная со 2-го тома за 1727 г. до самой смерти и еще 43 года спустя. Эйлер пользовался особым покровительством Фридриха II и Екатерины II. Россия стала его второй родиной. Похоронен в Санкт-Петербурге.

Ему принадлежат заметные результаты во всех областях математики и ее приложений, существовавших в его время. Описать их без знания всего аппарата современной высшей математики невозможно, тем более на нескольких страницах. Он заложил основы многих математических дисциплин. Среди всех ученых Эйлер выделялся фантастической продуктивностью и невероятной интуицией. В 1735 г. он ослеп на один глаз, в 1766 г. почти полностью потерял зрение, но ничто не могло ослабить его трудоспособность. Слепой Эйлер, пользуясь феноменальной памятью, продолжал диктовать свои открытия. Написал 886 работ. 550 его книг и статей опубликованы при жизни, остальные в течение 47 лет после смерти. В 1909-1975 гг. в Швейцарии издавалось Полное собрание сочинений Эйлера, состоящее из 72 томов.

Многочисленные открытия Эйлера по математическому анализу, сделанные им за 30 лет и напечатанные в различных академических изданиях, были объединены в одном произведении — двухтомном «Введении в анализ бесконечных» (1748). Оно было посвящено свойствам рациональных и трансцендентных функций, исследованию кривых и поверхностей. В этом труде содержится изложение нынешней тригонометрии с ее определениями и обозначениями и теории рядов. Впервые вводится понятие функции комплексного переменного. Приводится известная формула Эйлера, связывающая показательные и тригонометрические функции $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, разложения в степенной ряд функций e^x, $\sin x$, $\cos x$. Здесь впервые вводятся углы Эйлера, играющие в математике и механике важную роль. Затем вышел трактат в 4-х томах. Первый том, «Дифференциальное исчисление» (1755), был издан в Берлине, остальные три тома «Интегрального исчисления» (1768-1770) — в Петербурге. В последнем томе рассматривалось вариационное исчисление, созданное Эйлером и Лагранжем. Все эти книги служили основными руководствами для математиков. «Изучение работ Эйлера остается наилучшей школой в различных областях математики, и ничто другое не может это заменить», — сказал великий немецкий математик Гаусс.

Эйлер посвятил ряд работ алгебре и теории чисел. Работа «Элементы алгебры» (1768) вышла на русском, немецком и французском языках. Ученый положил начало аналитическому методу в теории чисел. Всего теории чисел посвящены более 140 его работ: известны функция Эйлера, закон квадратичной взаимности Эйлера и др. Исследуя простые числа, Эйлер предложил ряд формул, при подстановке в которые большого числа первых целых чисел получаются простые. Например, $2x^2+29$, x^2+x+41, $x^2-79x+1001$ дают соответственно 29, 41, 80 простых чисел при $x=0, 1, 2, ...$ Эйлер доказал также, что любой многочлен с целыми коэффициентами при подстановке чисел 0, 1, 2, ... рано или поздно даст составное число.

Эйлер был одним из творцов современной дифференциальной геометрии. Ему же принадлежит доказательство топологической теоремы о соотношении между числом вершин, граней и ребер многогранника: $V+F=E+2$. В алгебраической топологии важную роль играют эйлерова характеристика и эйлеров класс.

Почти во всех областях математики и ее приложений встречается имя Эйлера: теоремы, тождества, постоянные, углы, функции, интегралы, формулы, уравнения, подстановки.

Большая часть работ Эйлера посвящена вопросам приложений математики в физике, механике, астрономии. В 1746 г.

вышли три тома статьей, посвященных артиллерии, в которых он совершенствовал формулы баллистики и придал им вид, удобный для практического применения. В 1749 г. он выпустил двухтомный труд, впервые излагающий вопросы навигации в математической форме. В 1773 г. Эйлер опубликовал полную теорию кораблестроения и маневрирования судов. В 1769-1771 гг. он издал в трех томах трактат «Диоптрика», содержащий все свои результаты по диоптрике, полученные за 30 лет. В них изложены правила наилучшего расчета рефракторов, рефлекторов, микроскопов, теория преломления лучей в системе линз и др. Кроме этих трудов, следует отметить следующие сочинения: «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» (1736), «Теория движения твердых тел» (1765), «Теория движения планет и комет» (1774).

Большое просветительское значение имеет «Письма к немецкой принцессе» — философское произведение Эйлера. Ученый оказал огромное влияние на развитие математического образования в России. Эйлер считается основоположником не только Петербургской математической школы, но также первой в России методико-математической школы. Первые учебники математики, изданные на русском языке, были написаны Эйлером. Первые русские академики по математике были учениками Эйлера (С.К. Котельников, С.Я. Румовский, Н.И. Фусс, М.Е. Головин). Математическая школа Эйлера под его руководством провела огромную просветительскую работу, создала замечательную для своего времени учебную литературу.

Влияние Эйлера на все дальнейшее развитие математики бесспорно. «Читайте Эйлера, это наш общий учитель», — сказал великий французский математик Лаплас.

Ведущим математиком французских энциклопедистов был **Жан Лерон Даламбер** (1717-1783), математик, механик, философ, член Парижской Академии наук. Основные работы относятся к динамике, статике, гидродинамике, аэродинамике. Его «Трактат о динамике» (1743) явился первой работой, в которой были сформулированы общие правила составления дифференциальных уравнений движения любых материальных систем. Установил три основных принципа динамики: принцип инерции, принцип параллелограмма сил и принцип равновесия. Математические работы посвящены теории дифференциальных уравнений и математической физике. Нашел решение уравнения в частных производных второго порядка, выражающего колебания струны. Исчисление бесконечно малых он пытался обосновать с помощью теории пределов. В теории рядов его имя носит достаточный признак сходимости. В алгебре дал первое, не вполне строгое, доказательство основной теоремы алгебры, которая называется сейчас леммой Даламбера.

Даламбер работал вместе с философом-просветителем Д. Дидро над созданием «Энциклопедии наук, искусств и ремесел». Многие важные статьи энциклопедии написаны им: «Геометрия», «Дифференциал», «Уравнения» и др. Здесь в современном смысле встречается термин «натуральное число». Написал вступительную статью «Очерк происхождения и развития науки» (1750), в которой дал классификацию наук.

Начало нового периода в истории французской математики — это учреждение военных школ. В них математика была составной частью обучения. Преподавали почти все известные математики — Лагранж, Лаплас, Лежандр, Монж, Карно. В одном из них учился Наполеон. В 1794 г. была основана Политехническая школа — ведущее учебное заведение для инженеров.

Усовершенствованием исчисления бесконечно малых занимался **Жозеф Луи Лагранж** (1736-1813), французский математик и механик, член Берлинской, Парижской и Петербургской Академий наук. Он пытался обосновать строго теорию пределов, исключить недостатки анализа Ньютона, Лейбница и Даламбера. Но его алгебраический метод обоснования анализа оказался неудовлетворительным.

Лагранж родился в Турине, уже в 19 лет стал профессором математики. Когда в 1766 г. Эйлер уехал из Берлина в Петербург, Фридрих II пригласил Лагранжа на его место. В этом «скромном» приглашении было сказано: «Необходимо, чтобы величайший геометр Европы проживал вблизи величайшего из королей». В 1766-1787 гг. Лагранж был Президентом Берлинской Академии наук. Потом переехал в Париж. Участвовал в реформе мер и весов, вместе с Лапласом и Монжем разрабатывал метрическую систему мер. Принимал участие в организации и работе Высшей Нормальной и Политехнической школ.

Работы Лагранжа и Эйлера легли в основу нового раздела математического анализа — вариационного исчисления. Причем Эйлер часто признавал преимущества методов Лагранжа над своими. В период работы в Берлине Лагранж получил важные результаты в диофантовом анализе, теории алгебраических уравнений, вариационном исчислении. В книге «О решении численных уравнений» (1767) дал методы отделения действительных корней алгебраического уравнения и их приближенного вычисления. Нашел метод исключения переменных из системы уравнений при помощи результанта. В «Размышлениях об алгебраическом решении уравнений» (1770) исследовал проблему о возможности решения уравнений выше четвертой степени. Они повлияли в дальнейшем на Галуа и Абеля, которые решили эти проблемы.

В Париже Лагранж издал свои курсы математического анализа в двух частях: «Теория аналитических функций» (1797) и «Лекции по исчислению функций» (1801-1806). Дал формулу остаточного члена ряда Тейлора, формулу конечных приращений и интерполяционную формулу. Ввел тройные интегралы. Разработал метод вариации произвольных постоянных. Использовал функции комплексной переменной для решения задач гидродинамики. В 1788 г. опубликовал «Аналитическую механику», в которой создал классическую механику в виде учения об общих дифференциальных уравнениях движения материальных систем. Таким образом, он заменил геометрический подход Ньютона к механике аналитическим подходом.

Пьер Симон Лаплас (1749-1827), французский математик, физик и астроном, — последний ведущий математик XVIII века. Учился в школе монашеского ордена, но, занявшись математикой, не только оставил занятия теологией, но и стал убежденным атеистом. Ему принадлежат фундаментальные работы по математике, экспериментальной и математической физике, небесной механике. После Великой французской революции принимал деятельное участие в реорганизации системы образования во Франции и в создании Высшей Нормальной и

Политехнической школ. Наполеон и Людовик XVIII удостоили его многих почестей. В 1790 г. был председателем Палаты мер и весов, в 1799 г. — министром внутренних дел.

Основная математическая работа Лапласа — «Аналитическая теория вероятностей» (1812). Она включает все то, что составляет современный курс теории вероятностей: теория сложения и умножения вероятностей, производящие функции, математическое ожидание, геометрические вероятности, нормальное распределение, метод наименьших квадратов, разностные уравнения. Доказал биномиальный закон распределения вероятностей, первые предельные теоремы. Математические исследования Лапласа относятся также к теории дифференциальных уравнений с частными производными. На уравнении Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

основывается решение задач теории потенциала, теплопроводности, электростатики, гидродинамики. Его другой капитальный труд, «Трактат о небесной механике» (1798-1825) в 5 томах, содержит теорию фигуры Земли, Луны, возмущений планет, происхождения Солнечной системы. Лаплас завершил создание небесной механики на основе закона всемирного тяготения Ньютона.

К концу XVIII века некоторые ведущие математики высказывались, что область математических исследований истощена, что все уже открыто и изложено.

Вопросы и задания

1. Охарактеризуйте вклад Эйлера в развитие математики.
2. Какие вопросы элементарной математики были разработаны Эйлером?
3. Каков вклад Эйлера в развитие математического образования в России?
4. Назовите имена математиков XVIII века.
5. Какие области математики разрабатывались в XVIII веке?
6. Назовите центры развития математики в XVIII веке.

Глава V.
ПЕРИОД СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

5.1. Математика девятнадцатого века

Французская революция и наполеоновская эпоха создали благоприятные условия для дальнейшего развития математики. Более широко это развитие проходило во Франции, а затем в Германии. Вообще, весь XIX век прошел под знаком состязания двух крупнейших математических школ — французской и немецкой. В начале века в ней царствовал Гаусс, а в конце — Пуанкаре. Обе школы достигли высокого уровня развития, математики других стран учились у них.

В середине века образовалась российская (петербургская) школа с заметными результатами. В России тоже появились ученые, которые внесли существенный вклад, как в развитие классических разделов математики, так и в создание новых областей.

Новые математические направления освобождались от прикладных целей, каковыми до этого считались механика и астрономия. Появились «чистые» математики, работающие ради развития самой науки. Отошли на второй план академии, определявшие лицо науки XVIII века, математика развивалась теперь в многочисленных университетах, крупных институтах. Почти все крупные ученые стали преподавателями. Латинский язык науки заменился национальными языками. Это подорвало интернационализм науки предыдущих столетий. Математика чрезвычайно дифференцировалась, некоторые ее разделы приобрели узко специальный характер. Росла специализация у самих математиков. Хотя были и такие ученые, которые внесли большой вклад в развитие многих разделов математики. Наиболее мощное влияние на математиков XIX в. оказали труды Гаусса, Римана, Клейна, Пуанкаре.

Карл Фридрих Гаусс (1777-1855), гениальный немецкий математик, астроном, физик, родился в Брауншвейге. Его необычные математические способности были замечены еще в детстве. Учился в Геттингенском университете. С 1807 г. и до смерти был директором астрономической обсерватории в Геттингене и профессором университета. Научные интересы Гаусса были очень широкие и органично сочетали теоретические и прикладные вопросы. Его работы оказали большое влияние на все дальнейшее развитие высшей алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории электричества и магнетизма, геодезии, теоретической астрономии. Уже в 1796 г., в 19 лет, он сделал свое знаменитое открытие о возможности построения правильного 17-угольника циркулем и линейкой. Позже доказал, что правильный n-угольник можно построить при простом n вида $n = 2^{2^k} + 1$, k≥0. Это был значительный шаг вперед в теории геометрических построений, впервые после греческих геометров. Гаусс достиг изумительной виртуозности в технике вычислений. Он составил большие таблицы простых чисел и квадратичных вычетов. В 1799 г. в докторской диссертации дал первое строгое доказательство «*основной теоремы алгебры*», позже доказал ее не менее чем шестью способами. Его фундаментальное сочинение «Арифметические исследования» (1801) является началом современной теории чисел. Здесь он изложил теорию вычетов, сравнений 2-й степени, закон взаимности квадратичных вычетов («золотая теорема»). В этой же работе излагаются некоторые вопросы алгебры: теория квадратичных форм, теория уравнений деления круга. Позже Гаусс создал новую алгебру комплексных чисел и целых гауссовых чисел (1831). Использовал современную геометрическую интерпретацию комплексных чисел. Открыл эллиптические функции (1800). Дал первое систематическое исследование сходимости рядов («О гипергеометрическом ряде», 1812). Астрономические труды Гаусса (1800-1820) тоже значительны. Он написал книгу «Теория движения небесных тел» (1809), в которой содержатся методы, до сих пор лежащие в основе вычисления планетных орбит. Гаусс фактически создал высшую геодезию, которую он изложил в сочинении «Исследования о предметах высшей геодезии» (1842-1847). Для изучения формы земной поверхности потребовалось создать общий геометрический метод исследования поверхностей. Его «Общие исследования о кривых поверхностях» (1827) являются основаниями дифференциальной геометрии поверхностей. Доказал, что гауссова кривизна не меняется при изгибаниях поверхности. Созданная таким образом внутренняя геометрия поверхностей стала образцом для создания римановой геометрии. Около 1818 г. Гаусс пришел к идее о возможности неевклидовой геометрии, но не опубликовал свои исследования и не разрабатывал далее. По-видимому, ему не хотелось публично затрагивать этот спорный вопрос. Он опасался, что эти идеи не будут поняты. Возможно также, что Гаусс недостаточно осознал их научную важность. К публикации Лобачевского о неевклидовой геометрии отнесся с большим вниманием, был инициатором его избрания членом-корреспондентом Геттингенского ученого общества. Признанием заслуг Гаусса является его титул «Король математиков». Геттингенская Академия наук издала, начиная с 1908 г., 11 томов сочинений Гаусса.

Развитие математики во Франции

Все ведущие математики Франции, так или иначе, были связаны с Политехнической школой. Известными учебными заведениями были также Высшая Нормальная школа и университет Сорбонны. Вопросы теории чисел в XVIII-XIX вв. разрабатывались и во французской математической школе. Например, книга «Опыт теории чисел» (1798) Лежандра была первым последовательным и полным изложением теории чисел своего времени. **Адриан Мари Лежандр** (1752-1833) — известный французский математик, профессор Политехнической школы, заменивший Лапласа. Ввел известный символ Лежандра:

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}+1, \textit{ если } a - \textit{квадратичный вычет по модулю } p\\ -1, \textit{ если } a - \textit{квадратичный невычет по модулю } p\end{cases}$$

По критерию Эйлера,

$$\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{\frac{p-1}{2}}\left(\operatorname{mod} p\right).$$

Если a — квадратичный вычет, то сравнение $x^2 \equiv a (\mathrm{mod}\ p)$ имеет два решения, если невычет, то не имеет решений. Лежандр ввел в математику функции $E(x)$ (антье) для обозначения целой части числа x, и функцию $\pi(x)$ для числа простых чисел, не превосходящих x. Вывел свою знаменитую эмпирическую формулу

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x - 1,08366},$$

сформулировал закон распределения простых чисел. Доказал великую теорему Ферма для 5. Он открыл также многочлены, названные полиномами Лежандра, и доказал их важнейшие свойства. В вариационном исчислении установил признаки существования экстремумов. Лежандр является автором хорошего учебника «Начала геометрии» (1794) по элементарной геометрии. В этом учебнике, в отличие от «Начал» Евклида, была осуществлена алгебраизация геометрии. Он многократно переиздавался, переведен на ряд языков. По его образцу создавались все учебники элементарной геометрии, в частности, в России.

Еще один из основателей Политехнической школы — **Гаспар Монж** (1746-1818), французский геометр и общественный деятель. Организатор высшего технического образования во Франции. Великую французскую революцию (1789) встретил восторженно, стал одним из активных деятелей республики. Работал в Комиссии мер и весов, а затем морским министром (1792-1793) и организатором национальной обороны. Был горячим приверженцем и другом Наполеона, принимал участие в его походе в Египет. Монж получил всемирное признание, создав в 70-е годы современные методы проекционного черчения и его основу — начертательную геометрию. Однако главное его произведение, «Начертательная геометрия», было опубликовано лишь в 1795 г. Важные открытия сделал Монж и в дифференциальной геометрии. Его «Приложения анализа к геометрии» (1804) — первая книга в этой области геометрии. Издал первый курс аналитической геометрии («Приложения алгебры к геометрии», 1802). Несколько его важных работ посвящено химии, физике, металлургии. Был одним из создателей науки о машинах.

Французский математик и военный инженер **Жан Виктор Понселе** (1788-1867) был профессором в Сорбонне, директором Политехнической школы (1848-1850), Президентом Парижской АН. Ученик Монжа. Участвовал в походе Наполеона в Россию, два года был в плену в Саратове. Позже занимал высокие военные посты во Франции. Понселе известен как один из создателей проективной геометрии. Его «Трактат о проективных свойствах фигур» (1822) — это изложение основ проективной геометрии. Первым сформулировал принцип двойственности. Известны также работы по теории машин, экспериментальной механике. Ввел в механику понятие работы.

Симеон Дени Пуассон (1781-1840) — французский математик, физик, окончил Политехническую школу и преподавал там, потом в Сорбонне. Ученик Монжа и Лапласа. Опубликовал более 300 работ по многим областям математики и ее приложений. На продуктивность Пуассона указывает частое упоминание его имени в наших учебниках: скобки Пуассона, интеграл, константы, уравнение, коэффициент, распределение и др. Существенное значение имеют его работы, посвященные неопределенным интегралам, уравнениям в конечных разностях, дифференциальным уравнениям с частными производными, вариационному исчислению, рядам. Он основательно улучшил способы применения теории вероятностей вообще и к вопросам статистики в частности. Ввел в науку понятие «закон больших чисел» (в работе «Исследования о вероятности приговоров в уголовных и гражданских делах», 1837). Пуассон основательно разработал многие разделы математической физики, теории упругости, теплопроводности, электростатики, магнетизма, гидромеханики. Написал «Курс механики» (1811), многократно переиздававшийся.

Жан Батист Жозеф Фурье (1768-1830) — французский математик, преподавал в Политехнической школе. Первые исследования касались алгебры многочленов: доказал теорему о числе действительных корней алгебраического уравнения, лежащих в данном промежутке. Но основным объектом его исследований была математическая физика. Его монография «Аналитическая теория теплоты» (1822) — это математическая теория теплопроводности. Разработал метод (метод Фурье) разделения переменных. В основе этого метода лежит представление функций тригонометрическими рядами (рядами Фурье). Они применялись и раньше, но только у Фурье стали настоящим инструментом математической физики. Работы Фурье, продолженные Дирихле, Лобачевским, Риманом, способствовали созданию теории множеств и теории функций действительной переменной. Фурье написал ряд статей о творчестве отдельных ученых, внес основополагающий вклад в египтологию. Он принимал участие в Египетской кампании Наполеона. С 1798 г. Фурье — непременный секретарь Египетского института, где развил значительную научную и организаторскую деятельность. Возглавлял научную экспедицию в долине Верхнего Нила.

Огюстен Луи Коши (1789-1857) — французский математик, работал в Политехнической школе, Сорбонне, Коллеж де Франс. Он был членом почти всех академий наук. Его работы относились к различным областям математики. Отличался от других математиков неограниченной продуктивностью. Были периоды, когда Коши каждую неделю представлял в Парижскую АН новый мемуар. Академии приходилось ограничивать объем всех статей, публикуемых в «Comptes Rendus» («Отчетах»), для того, чтобы справиться с продукцией Коши. Всего он написал и опубликовал свыше 800 работ по теории чисел, алгебре, математическому анализу, дифференциальным уравнениям, математической физике, теоретической и небесной механике и др. Его «Курс анализа» (1821), «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (1823), «Лекции по приложениям анализа к геометрии» (1826-1828) основывались на систематическом использовании понятия предела. В них он дал определение непрерывной функции, производной как предела отношения, интеграла как предела сумм, доказательство существования интеграла от непрерывной функции, признаки сходимости рядов и др. Вопросы строгости математического анализа, одна из основных проблем современной математики, также занимали Коши. Поэтому он разрабатывал строгую теорию действительных чисел. Большой заслугой Коши является развитие теории аналитических функций комплексной переменной, заложенной Эйлером и Даламбером. В теории дифференциальных уравнений Коши принадлежат: постановка общих задач (задача Коши), основные теоремы существования решений. В геометрии Коши обобщил теорию многогранников, исследовал касание, спрямление и квадратуру кривых. В алгебре он развил теорию определителей, нашел все главные их свойства. Ввел понятие конечной группы. Ему принадлежат термины «определитель», «модуль комплексного числа», «сопряженные числа» и др.

Французский математик и историк математики **Мишель Шаль** (1793-1880), профессор Политехнической школы и Сорбонны, создал новое направление в науке — вычислительную геометрию, построил синтетическую проективную геометрию, включив в нее метрическую геометрию. С 1846 г. становится первым геометром Франции и одним из наиболее авторитетных геометров мира. Опубликовал «Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов» (1837).

Гениальный французский математик **Эварист Галуа** (1811-1932) заложил основы современной алгебры. Его математические дарования проявились очень рано. Труды Лежандра и Лагранжа пробудили интерес Галуа к алгебре. В 16-18 лет, будучи учеником лицея, он получил основные результаты теории, впоследствии названной его именем (теория Галуа). Тем не менее, он дважды не был принят в Политехническую школу, провалившись на вступительных экзаменах. В 1830 г. поступил в Высшую нормальную школу, но вскоре был исключен за активную политическую деятельность. Как республиканец, публично выступал против королевского режима. Дважды подвергался тюремному заключению. Был убит на дуэли, подстроенной его политическими противниками.

В 1828-1830 гг. были написаны пять работ Галуа, наиболее значительными из которых являются «Анализ одного мемуара об алгебраическом решении уравнений» (1830), где формулируются важные положения теории Галуа, и «Из теории чисел» (1830), где он фактически построил теорию конечных полей. Свои работы он представлял и в Академию наук, но даже такие крупнейшие математики, как Коши, Фурье, Пуассон, не оценили их. Накануне дуэли некоторые рукописи, в которых он изложил свои основные открытия, отправил другу с просьбой: «Ты публично попросишь Якоби или Гаусса дать заключение не о справедливости, а о значении этих теорем. После этого, я надеюсь, найдутся люди, которые сочтут нужным расшифровать эту галиматью». Эта «галиматья» содержала теорию групп — ключ к современной алгебре и геометрии. Письмо Галуа было опубликовано вскоре после его смерти. Но из-за сжатости изложения и новизны идей его открытия долгое время еще не получили признания. Все его работы были разобраны и опубликованы в 1846 г. Лиувиллем. В 1870 г. известный французский математик Жордан написал книгу о теории подстановок, отметив, что его работы являются толкованиями рукописей Галуа. Эта книга сделала теорию Галуа достоянием всей математики. Галуа повторил результат Абеля о невозможности решения в радикалах алгебраических уравнений выше четвертой степени. Нашел необходимое и достаточное условие, которому удовлетворяет уравнение, разрешимое в радикалах. Галуа фактически ввел такие фундаментальные понятия, как группа, подгруппа, нормальный делитель, поле, расширение. Сам термин «группа» был впервые употреблен Галуа. Теория групп считается одним из выдающихся достижений математики XIX столетия. Она нашла многочисленные применения в фундаментальных и прикладных науках.

Рассмотрим далее вклад в математику XIX в. представителей других народов. Другой молодой гений — **Нильс Хенрик Абель** (1802-1829), норвежский математик. Его короткая жизнь столь же трагична. Обучался в университете Христиании (Осло). В это время опубликовал знаменитую теорему о невозможности решения общего уравнения 5-й степени в радикалах (1824). Получил за эту работу стипендию для продолжения образования за границей. Был в Берлине, Париже, Италии. После приезда жил в тяжелой нужде, только в 1828 г. получил работу в университете. Умер от чахотки.

За свою короткую жизнь Абель сделал важнейшие математические открытия. Он показал, что уравнения с коммутативной группой подстановок корней разрешимы в радикалах (поэтому коммутативные группы называются теперь абелевыми). Его работы обусловили развитие теории Галуа. Независимо от Якоби, Абель создал теорию эллиптических функций (за что в 1830 г. Парижская АН присудила им премию). Основал общую теорию интегралов алгебраических функций. Заложил основы теории интегральных уравнений. Важные работы относятся к теории рядов. Его имя носят многие математические понятия: абелевы дифференциалы, интегралы, уравнения, функции, признаки сходимости, многообразия и др.

Развитие математики в Германии

Одним из создателей теории эллиптических функций был немецкий математик **Карл Густав Якоб Якоби** (1804-1851). Профессор Кенигсбергского, затем Берлинского университетов. В сочинении «Новые основы теории эллиптических функций» (1829) ввел и изучил тэта-функции и некоторые другие трансцендентные функции. Одновременно с Остроградским предложил метод замены переменных в кратных интегралах. Работа Якоби «О построении и свойствах определителей» (1841) познакомила математиков с теорий определителей. Идея определителя идет от Лейбница, Лагранжа, Коши, Крамера. Якоби ввел в употребление функциональные определители (некоторые из них называются якобианами). Поддерживал тесную связь с русскими математиками.

Преемником Гаусса в Геттингене стал **Петер Густав Лежен Дирихле** (1805-1859), немецкий математик. Он сделал ряд крупных открытий в теории чисел. Его «Лекции по теории чисел» (1863) переведены на многие языки и оказали влияние на выдающихся математиков более позднего времени — Римана, Кронекера, Дедекинда и др. Для решения задач теории чисел применял аналитические функции, принцип Дирихле. Доказал теорему о бесконечности количества простых чисел в арифметических прогрессиях. Сформулировал и исследовал понятие условной сходимости ряда. Дал строгое доказательство возможности разложения в ряд Фурье кусочно-непрерывной и монотонной функции.

Георг Фридрих Бернхард Риман (1826-1866) — выдающийся немецкий математик, преемник Дирихле в Геттингене. Его работы оказали сильнейшее влияние на развитие современной математики. В 1851 г. защитил докторскую диссертацию на тему «Основы общей теории функций одной комплексной переменной». Она положила начало геометрическому направлению в теории аналитических функций и новой геометрической науке — топологии. Глубоко разработал теорию конформных отображений, ввел понятие римановой поверхности. В 1854 г. представил фундаментальную работу по тригонометрическим рядам и основам анализа «О возможности представления функций с помощью тригонометрических рядов». Риман ввел строгое понятие определенного интеграла и доказал его существование. В мемуаре «О количестве простых чисел, не превышающих данной величины» (1859) впервые распространил на комплексную область дзета-функцию, установил ее свойства. Это позволило позже Адамару строго обосновать асимптотический закон распределения простых чисел (1896). Этот мемуар сыграл важную роль в развитии аналитической теории чисел. В мемуаре «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (представлен в 1854, опубликован в 1868), Риман впервые после открытия Лобачевского развил учение о пространстве, провел классификацию всех существующих геометрий, включая неевклидову. Ввел обобщенные римановы пространства, частными случаями которых являются пространства геометрий Евклида и Лобачевского. Это стало первым признанием геометрии Лобачевского.

Как известно, разработка оснований математики, устранение неясностей в формулировке основных понятий анализа были одними из главных достижений математики XIX в. Одним из разработчиков строгого анализа был известный немецкий математик **Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс** (1815-1897), который вырос до профессора математики Берлинского университета. Известна слава о его лекциях, всегда тщательно подготовленных. Он был воплощением математической скрупулезности. Его система логического обоснования математического анализа основывалась на построенной им теории действительных чисел. В своих лекциях ученый строго определил основные математические понятия: функция, непрерывность, производная, экстремум и др. Построил пример непрерывной функции, нигде не имеющей производной. Доказал теорему о том, что комплексные числа образуют над полем действительных чисел единственную коммутативную алгебру без делителей нуля. При жизни Вейерштрасса его идеи распространяли слушатели лекций из разных стран. Среди его учеников были математики, также получившие большую известность, в частности, Кантор, Ковалевская. Большинство трудов изданы после его смерти и посвящены математическому анализу, теории аналитических функций, вариационному исчислению, линейной алгебре.

Леопольд Кронекер (1823-1891), немецкий математик, профессор Берлинского университета, стал сторонником «арифметизации» математики. Он считал, что только арифметика обладает подлинной реальностью. Известно заявление Кронекера: «Целые числа сотворил бог, а все прочее — дело людских рук». Его взгляды были односторонни. Защищая их, он вел упорную борьбу с принципами теоретико-функциональной школы Вейерштрасса и теоретико-множественной школы Кантора. Основные работы Кронекера относятся к алгебре и теории чисел. В алгебре его именем называют критерий совместности системы линейных уравнений. Кроме того, он дал метод, с помощью которого можно разложить многочлен над полем рациональных чисел.

Рихард Дедекинд (1831-1916) — немецкий математик, ученик Гаусса и Дирихле. В его трудах заложены основы современной алгебры, изучающей группы, кольца, поля, структуры и модули. Ввел понятие кольца, идеала. Дедекинд одним из первых дал теоретико-множественное обоснование теории действительных чисел — теорию сечений Дедекинда («Непрерывность и иррациональные числа», 1872). Он проделал для современной математики то, что сделал Евдокс для греческой. Дедекинд сформулировал полную систему аксиом арифметики (1888, ее обычно называют аксиоматикой Пеано), а также принцип полной математической индукции.

Георг Кантор (1845-1918) — немецкий математик, основоположник теории множеств. Родился в Петербурге, окончил Берлинский университет, преподавал в Галле. Основатель и первый президент Германского математического общества (1890-1893). Инициатор созыва первого Международного математического конгресса в Цюрихе (1897). Теория множеств Кантора («Основы общего учения о многообразиях», 1883) лежит ныне в основе математического анализа. Кантор разработал теорию бесконечных множеств и теорию трансфинитных чисел. Доказал несчетность множества всех действительных чисел (1874). Таким образом, было установлено существование бесконечных множеств, имеющих разные мощности. Определил понятия мощности множества, континуума, счетных и несчетных множеств, характеристической функции множества. Создал одну из строгих теорий действительных чисел, сформулировал впервые аксиому непрерывности, названную его именем.

Теория Кантора послужила причиной общего пересмотра логических основ математики и оказала влияние на всю современную структуру математики. Он систематически использовал актуальную бесконечность. Но математики отказывались принимать бесконечность иначе, как процесс. Главным оппонентом Кантора был Кронекер. Теория множеств Кантора добилась признания после введения теории меры Лебега (1901). Тем не менее, оставались еще логические трудности, например, парадоксы Рассела и Бурали-Форти. Это привело к возникновению различных школ в области обоснования математики: *формалистов* и *интуиционистов*.

В XIX веке в Германии продолжали развивать также аналитическую, проективную, многомерную евклидову геометрию и топологию многие математики — Якоб Штейнер (1796-1863), Юлиус Плюккер (1801-1868), Герман Грассман (1809-1877), Август Фердинанд Мёбиус (1790-1868).

Развитие математики в России

Научная, образовательная и просветительская деятельность Петербургской Академии наук в XVIII веке, работа в ней таких выдающихся ученых, как Эйлер, а также других известных математиков Европы, положили начало подготовке российских математиков высокого уровня.

В начале XVIII века математическое образование в России отставало от развитых стран Европы практически на полтысячелетия. Однако уже к концу XIX в. оно отвечало европейским стандартам. Свой вклад в дело математического образования и науки сделали Московский университет, открытый в 1755 году, и другие университеты, учрежденные в начале XIX в.: Казанский, Харьковский (1804) и др.

Остроградский Михаил Васильевич (1801-1862) — русский математик и механик, один из основателей петербургской математической школы, член Петербургской АН (1830) и многих иностранных академий наук. Родился в Полтавской области. Учился в Харьковском университете, однако не получил документа об окончании из-за своих антирелигиозных взглядов. Ездил совершенствовать свое математическое образование в Париж (1822-1828), общался с Фурье, Коши, Пуассоном. Затем преподавал в Петербурге в военных и инженерных учебных заведениях, а также в Главном педагогическом институте.

Первые работы Остроградского были опубликованы еще в Париже. Его исследования касаются самых разных областей математики и механики: дифференциального и интегрального исчисления, высшей алгебры, теории чисел, геометрии, теории вероятностей, математической физики, аналитической механики и др. Многие теоремы и формулы Остроградского вошли в курсы математического анализа, но его имя при этом не всегда упоминается. В работе, посвященной теории теплоты, доказал теорему, известную теперь как формула Остроградского-Гаусса (1828). Она связывает интеграл по объему с интегралом по поверхности. Вывел формулу преобразования двойных интегралов в тройные. Разработал метод замены переменных в кратных интегралах (1836). Критерием ценности математических исследований для ученого была возможность использовать полученные результаты на практике. Например, одна из его работ по теории вероятностей, положившая начало статистическим методам браковки, использовалась для проверки товаров, поставляющихся в армию.

Остроградский был прекрасным педагогом и организатором. Он создал русскую школу прикладной механики. Среди его учеников было много известных ученых. Ему принадлежат немало учебных пособий: «Пособие начальной геометрии», «Лекции алгебраического и трансцендентного анализа», «Программа и конспект тригонометрии для военно-учебных заведений», «Курс небесной механики» и др. В результате преподавательской и организационно-педагогической деятельности у Остроградского выработалась система педагогических взглядов вообще и на преподавание математики в частности. Под влиянием его идей еще в середине XIX века были изданы методические пособия, пропагандирующие прогрессивные методы преподавания. Для современников Остроградский был российским математиком первой величины. Тем не менее, он не понял идей неевклидовой геометрии и резко выступил против работ Лобачевского.

Вопрос о независимости аксиомы параллельных занимал ученых в течение двух тысяч лет, начиная от греческих математиков. Все они пытались доказать ее, то есть вывести из других аксиом, и терпели неудачу. Гаусс правильно считал аксиому независимой, откуда вытекало, что логически возможны другие геометрии, основанные на другом выборе аксиом. Но он не опубликовал свои соображения. Впервые это сделали Лобачевский (1826) и Бояи (1832).

Лобачевский Николай Иванович (1792-1856) — великий русский математик, гениальный геометр, творец неевклидовой геометрии. Родился в Нижнем Новгороде. Учился в Казанской гимназии, затем в университете (1807-1811). Вся его жизнь связана с Казанским университетом. В 1812 г. началась его педагогическая деятельность, с 1816 г. он — профессор, в 1820-1821, 1823-1825 гг. — декан физико-математического факультета, 1827-1846 гг. — ректор Казанского университета. Университет строился под его руководством. В 1846-1856 гг. — помощник попечителя Казанского учебного округа.

Все годы преподавательской и научной деятельности Лобачевский занимался вопросами обоснования анализа и геометрии. Сначала он тоже пытался доказать пятый постулат Евклида. Однако уже в 1823 г. он составил рукопись учебника по геометрии, в котором изложение материала существенно отличалось от традиционного. (Рецензент, академик Н.И. Фусс, дал учебнику резко отрицательный отзыв.) В нем Лобачевский выделил из геометрии Евклида все то, что не зависит от V постулата — «абсолютную геометрию». Далее он пришел к убеждению, что постулат не зависит от остальных аксиом. Если заменить его другим, т.е. что через точку на плоскости вне лежащей на этой плоскости прямой можно провести не только одну параллельную этой прямой, противоречия не обнаруживается. Ученый впервые сообщил свою «воображаемую геометрию» в докладе на Совете факультета 11(23) февраля 1826 года «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных». Его публикация комиссией факультета не была разрешена. О содержании работы можно было судить только по материалам, которые вошли в статью «О началах геометрии», опубликованную в «Казанском вестнике» (1829). Узнали о ней немногие. В 1835 г. в «Ученых записках Казанского университета» был опубликован мемуар «Воображаемая геометрия», а в 1835-1838 гг. — «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». В этом сочинении ученый дал полное, систематическое изложение новой геометрии. Все эти работы были встречены современниками крайне недоброжелательно. В Европе с работами Лобачевского познакомились по брошюре «Геометрические исследования по теории параллельных линий», изданной в 1840 г. в Берлине на немецком языке. С этим мемуаром ознакомился Гаусс и высоко оценил его открытие. По его представлению Лобачевский был избран членом-корреспондентом Геттингенского научного общества как один из «выдающихся математиков Российской империи». В конце жизни Лобачевский, потеряв зрение, продиктовал свою последнюю работу («Пангеометрия», 1855), посвятив ее 50-летию университета.

Долгое время неевклидова геометрия игнорировалась, и не принималась большинством математиков. Даже самые крупные отечественные математики (Остроградский, Буняковский) не поняли важности этого открытия. Первым понял и признал их Риман (1854). Правильность идей Лобачевского была полностью доказана после того, как итальянский математик Е. Бельтрами построил модель плоскости Лобачевского (псевдосфера Бельтрами, 1868). Таким образом, была доказана непротиворечивость геометрии Лобачевского. Создание новой геометрии является величайшим достижением математики XIX столетия. Оно поставило Лобачевского в первые ряды математиков мира. Стойкость Лобачевского в борьбе за свои идеи является ярким примером научной смелости.

Лобачевский внес большой вклад и в другие области математики. Он дал общее определение функциональной зависимости, позже введенной Дирихле. В своей книге «Алгебра, или исчисление конечных» дал метод приближенного вычисления корней алгебраических уравнений высших степеней (метод Лобачевского). Внес он также значительный вклад в теорию определителей.

Без представления Яноша Бояи начало неевклидовых геометрий было бы неполным. Венгерский математик **Янош Бояи** (1802-1860, встречаются также чтения Бойяи, Больяи, Бойаи, Бойай) был военным инженером. Его отец Фаркаш Бояи, профессор математики и поэт, учился в Геттингене с Гауссом, дружил с ним и переписывался. Янош окончил Венскую военно-инженерную академию. Еще в юности овладел математическим анализом. В академии начал заниматься доказательством постулата о параллельных линиях. Отец, сам занимавшийся когда-то этой проблемой, предостерегал сына: «Ты должен отвергнуть это подобно самой гнусной связи, это может лишить тебя всего твоего досуга, здоровья, покоя, всех радостей жизни. Эта черная пропасть в состоянии, быть может, поглотить тысячу таких титанов, как Ньютон, на земле это никогда не прояснится». Янош стал офицером, но продолжал заниматься геометрией. Около 1825 г. он пришел к основным положениям неевклидовой геометрии. Издал их в 1832 г. в виде приложения («Аппендикс») к сочинению отца «Опыт введения учащегося юношества в начала чистой математики» — «Приложение, излагающее абсолютно верное учение о пространстве». Это приложение по продуманности каждого слова и предложения принадлежит к числу наиболее совершенных произведений математики. Фаркаш Бояи написал Гауссу, прося отзыва. В своих письмах Гаусс отзывался с величайшей похвалой о работе Яноша Бояи, однако не дал о ней публичного отзыва. Он сказал, что идеи «Приложения» являются его мыслями уже многие годы. Янош был разочарован, так как терял приоритет. Он еще больше был потрясен, когда ознакомился с сочинением Лобачевского, изданным в 1840 г. на немецком языке. Написал он еще работу по теории мнимых величин, в которой предвосхитил теорию Гамильтона. Но получил на нее отрицательный отзыв. Неудачи тяжело отразились на его творчестве. Он больше никогда ничего не публиковал. Умер в состоянии депрессии за несколько лет до того, как неевклидова геометрия получила всеобщее признание.

Буняковский Виктор Яковлевич (1804-1889) — русский математик, академик Петербургской АН (1830), ее вице-президент (1864-1889). Высшее образование получил во Франции, там же защитил диссертацию и получил степень доктора математики (1825). Преподавал в Петербургских учебных заведениях, в частности, в университете. Ученый работал преимущественно над теорией чисел и теорией вероятностей с приложениями. Его сочинение «Основания математической теории вероятностей» (1846) содержит оригинальное изложение самой теории, а также историю возникновения и развития этой науки, ее приложения к страхованию, демографии и др. Наряду с Остроградским и Чебышёвым Буняковский сыграл огромную роль в повышении научного уровня преподавания математики в высшей школе. Составил «Лексикон чистой и прикладной математики» (до буквы Е). Словарь имел большое значение для установления русской математической терминологии. Написал учебники для средней школы: «Арифметика» (1844), «Программа и конспект арифметики» (1849). Интересовался практикой вычислений, предложил усовершенствованный вариант русских счетов. Изобрел несколько математических приборов.

Ковалевская Софья Васильевна (1850-1891) — русский математик, механик, писатель и публицист, член-корреспондент

Петербургской АН (1889). Родилась в Москве. Рано обнаружила незаурядные математические способности. Брала уроки высшей математики у известного педагога А.Н. Страннолюбского. В то время женщин в российские университеты не принимали. Чтобы иметь возможность заниматься наукой, вступила в фиктивный брак с В.А. Ковалевским (впоследствии выдающимся русским ученым, палеонтологом) и потом уехала в Германию. Училась в Гейдельбергском и Берлинском университетах. Занималась у Вейерштрасса. На основании работ по теории уравнений в частных производных и абелевым интегралам Геттингенский университет присвоил ей степень доктора философии (1884). В 1874 г. вернулась в Россию, но не имела возможности применять свои знания. Ее пригласили работать в Стокгольмском университете (1883), где она проработала 8 лет. В 1888 г. она написала работу «Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки», за которую получила премию Парижской АН, позже еще премию Шведской АН. Ковалевская получила мировое признание как ученый. Но из-за несправедливого отношения к женщине в царской России ее основная научная деятельность протекала за границей. Тем не менее передовая русская интеллигенция добилась высокой оценки ее научных достижений. Исключительным для России событием было ее избрание членом-корреспондентом Петербургской АН (по представлению П.Л. Чебышёва). Занималась она и писательской деятельностью, известны ее романы «Воспоминания детства», «Нигилистка». В литературных произведениях даже пыталась дать математическое обоснование поступков людей. Ковалевская сочувствовала революционной борьбе и идеям утопического социализма. В 1871 г. приезжала в осажденный Париж, ухаживала за ранеными коммунарами.

Во главе русской математики середины и второй половины XIX в. стоял **Пафнутий Львович Чебышёв** (1821-1894), основатель петербургской математической школы, академик (1859). Он стал членом многих иностранных академий наук: Берлинской, Парижской, Шведской, Болонской АН, Лондонского королевского общества и др. Родился в селе Окатово нынешней Калужской области. Учился в Московском университете. Преподавал сначала в Московском, потом в Петербургском университетах, где он проработал 35 лет. Его докторская диссертация «Теория сравнений» была отмечена премией Петербургской АН. В университете Чебышёв читал лекции по аналитической геометрии, теории чисел, высшей алгебре. Его плодотворная педагогическая деятельность сочеталась с большой научной работой в Петербургской АН. В 1856-1873 гг. работал также в Ученом совете Министерства народного просвещения.

Характерной особенностью его творчества была тесная связь теории и практики, что он сам неоднократно подчеркивал. В анализе он изучал вопросы интегрирования алгебраических функций. Построил общую теорию ортогональных многочленов. Большое число работ ученого посвящено теории чисел. Получил важные результаты о распределении простых чисел. Он доказал «постулат Бертрана», который говорит о том, что между числами n и $2n$-2 при n>3 всегда есть хотя бы одно простое число. Установил асимптотический закон распределения простых чисел

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$$

и показал границы погрешности своей формулы

$$0,92129 < \frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\ln x}} < 1,10555.$$

Большое значение имели работы Чебышёва по теории вероятностей. Он доказал достаточно общие формы закона больших чисел. Доказанная им центральная предельная теорема, а также исследования его учеников А.А. Маркова и А.М. Ляпунова стали основой для создания русской школы теории вероятностей. Чебышёв стал основоположником нового раздела теории функций — конструктивной теории функций. В ней основным элементом является теория наилучших приближений функций многочленами. Нашел полиномы, наименее отклоняющиеся от нуля (полиномы Чебышёва).

Чебышёв конструировал также машины и механизмы, всего он создал более 40 новых механизмов и усовершенствовал более 80: арифмометр, паровую машину, центробежный регулятор. Многие из них демонстрировались на выставках в Париже и Чикаго. По существу, он создал русскую математическую науку о механизмах.

За время своей многолетней педагогической деятельности Чебышёв подготовил плеяду замечательных ученых — А.А. Марков, А.М. Ляпунов, Е.И. Золотарев, А.Н. Коркин, Д.А. Граве и др. А.А. Марков писал: «Раз в неделю, в определенные часы, двери его были открыты для всякого, имеющего что-нибудь сообщить о собственных занятиях знаменитому математику и получить от него указания, и редко кто-нибудь от него уходил, не унося с собою новых мыслей и поощрения к дальнейшей работе».

Итоги математики XIX столетия

К 1870 году математика разрослась в огромное хаотичное здание. Даже большие математики могли продуктивно работать лишь в немногих областях. Но появились и объединяющие математику принципы, например теория групп. Творчество отдельных математиков также несло такие обобщающие начала математики.

В 1871 г. в Берлине начал издаваться реферативный журнал по математике «Книга успехов математики за год» В конце века издавалась «Энциклопедия математических наук» на немецком языке под руководством Ф. Клейна. В шести томах энциклопедии показывалась эволюция математических методов с начала XIX столетия.

Феликс Клейн (1849-1925) — влиятельный немецкий математик. Окончил Боннский университет. В 1872 г. начал работать в Эрлангенском университете. Его вступительная профессорская лекция называлась «Сравнительное рассмотрение новых геометрических исследований» и стала известна в истории математики как «Эрлангенская программа Клейна». В ней он изложил свою идею в области оснований геометрии. По этой идее, любая геометрия является теорией инвариантов некоторой группы преобразований. Например, евклидова геометрия изучает инварианты метрической группы, проективная геометрия — проективной группы, неевклидовы геометрии — это проективные геометрии с метрикой Кэли. Классификация групп преобразований дает классификацию геометрий. Известна модель Клейна (1871), реализующая систему аксиом геометрии Лобачевского (интерпретация Клейна). Она привела к полному признанию геометрии Лобачевского.

Программа Клейна оказала существенное влияние на преподавание геометрии в высших и средних учебных заведениях в течение нескольких десятилетий. С 1886 г. Клейн работал в Геттингенском университете. Его основные научные труды были посвящены неевклидовой геометрии, непрерывным группам, теории эллиптических функций, теории автоморфных функций. Клейн применил понятие группы ко многим разделам математики. Он стремился раскрыть, с одной стороны, внутренние связи между отдельными областями математики, с другой стороны — между математикой и физикой. Много сделал он для создания «Энциклопедии математических наук». В течение почти сорока лет (с 1876) был главным редактором журнала «Математические анналы». Ученый очень много занимался вопросами математического образования. Организовал Международную комиссию по реорганизации преподавания математики (1908). Его основные труды были переведены на русский язык еще в 30-х годах XX века: «Высшая геометрия», «Неевклидова геометрия», «Элементарная математика с точки зрения высшей», «Лекции о развитии математики в XIX столетии». В годы совместного пребывания Клейна и Гильберта (1895-1925) Геттинген стал мировым центром математических исследований. Молодые математики разных национальностей съезжались сюда для изучения своих частных предметов в качестве неотъемлемой части математики в целом.

Анри Пуанкаре (1854-1912) — величайший французский математик, физик, астроном и философ. Член Парижской АН (1887) и более чем 35 иностранных академий. Учился в Политехнической школе. Преподавал в Каннском, Парижском университетах. Никто из математиков этого периода не владел таким количеством дисциплин и не был в состоянии их все обогатить. Нет области математики и ее приложений, где бы Пуанкаре не оставил новых методов исследований. Свыше 1000 его работ, опубликованных в Париже в 1916-1954 гг., составляют 10 томов. Математические работы Пуанкаре относятся алгебраической топологии, дифференциальным уравнениям, теории вероятностей, неевклидовой геометрии, основаниям математики и др. В математической физике он разрабатывал теорию потенциала, теплопроводности, гидродинамику, термодинамику и др. Ввел основные понятия комбинаторной топологии. Четыре больших мемуара под названием «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» (1882-1886) положили начало качественной теории дифференциальных уравнений. Разрабатывая теорию автоморфных функций, он использовал геометрию Лобачевского и дал ее новую интерпретацию (1882). Большая заслуга Пуанкаре в создании специальной теории относительности. Написал ряд научно-популярных книг «Ценность науки», «Наука и гипотеза» на идеалистических позициях, за что критиковался В.И. Лениным. Именем Пуанкаре назван Математический институт в Париже.

Давид Гильберт (1862-1943) — немецкий математик, оказавший огромное влияние на развитие математики и физики конца XIX и первой половины XX века. Родился в Кенигсберге, окончил там университет. Преподавал там же, а в 1895-1933 гг. — в Геттингенском университете. Создал здесь важнейший мировой математический центр. Гильберт возглавил большую школу, охватывавшую почти всю математику. Академик А.Н. Колмогоров, исследовавший его творчество, выделил в нем 8 периодов, каждый из которых был посвящен определенному разделу математики: теория инвариантов, теория алгебраических чисел, основания геометрии, теория дифференциальных и интегральных уравнений, математическая физика, логические основы математики. В знаменитой книге «Основания геометрии» (1899) Гильберт дал полную систему аксиом евклидовой геометрии, классифицировав их по группам. Именем Гильберта названо пространство, обобщающее понятие евклидова пространства на бесконечномерный случай (гильбертово пространство). Пришел к ряду понятий, которые легли в основу современного функционального анализа и спектральной теории линейных операторов. Выполнил важные исследования в области логических оснований математики. Гильберт совместно с И.П. Бернайсом написал трактат «Основания математики» (1934).

Из-за необходимости расширения форм общения в условиях роста числа математиков и математических работ, во второй половине XIX века организовались городские математические общества: Московское (1864), Лондонское (1865), а затем национальные: Французское математическое общество (1872) и Немецкое математическое объединение (1891). Возникла необходимость создания международной организации. В 1897 г. состоялся I Международный математический конгресс в Цюрихе.

Фундаментальными итогами математики XIX века являются:

- открытие и признание неевклидовых геометрий;
- строгое обоснование теории действительных чисел и построение анализа на ее основе;
- открытие теории групп и ее приложений;
- разработка оснований геометрии и классификация геометрий;
- открытие теории множеств.

Вопросы и задания

1. Какие изменения в математике привели к началу периода современной математики?
2. Охарактеризуйте открытие и признание неевклидовых геометрий.
3. Назовите имена математиков, занимавшихся строгим обоснованием математического анализа.
4. Исследование каких проблем математики привели к открытию понятия группы?
5. Назовите центры развития математики в XIX веке.
6. В развитие каких разделов математики внесли свой вклад российские математики XIX века?

5.2. Математика двадцатого века

Двадцатый век был великой эпохой в истории математики. Достижения математики в этом столетии превосходят все, что было создано в ней за предшествующие две с половиной тысячи лет. Вместе с тем описание и анализ развития математики XX века — очень трудное дело. Оно изучено гораздо хуже. Математика в этом веке чрезвычайно дифференцировалась. Оригинальная литература стала необозримой.

Рубеж XIX и XX веков ознаменовался крупнейшими достижениями в науке и технике. Рентген открыл свои лучи (1895). Попов и Маркони изобрели радио (1895). Планк начал создавать теорию квантов (1900). Начала развиваться генетика (1900). Самолет братьев Райт поднялся в небо (1903). Эйнштейн создал основы специальной теории относительности (1905).

Математика в начале XX века была преимущественно европейской. На рубеже веков активизировались итальянская, венгерская, австрийская, шведская математические школы. Заметная группа ученых сформировалась еще в США. А к концу тридцатых годов расстановка математических сил существенно изменилась. Два основных центра находились тогда в СССР и США. Москва стала одним из крупнейших центров мировой математической науки. Математика развивалась также в Ленинграде, Харькове, Киеве, Казани, Тбилиси, Ташкенте.

В двадцатые годы в Германии было начато издание серии монографий по всем основным областям математики. Но требовалось издание и обзоров новейших изданий, энциклопедических статей. Таковыми были французские «Мемориалы математических наук», немецкие «Достижения точных наук».

В 1897 г. на I Международном математическом конгрессе в Цюрихе интенсивность математических исследований за предшествующие годы оценивалось числом 2000 публикаций в год. Уже в 1900 г. это число достигло 2600. На II Математическом конгрессе в Париже в 1900 г. работали четыре основные секции: арифметики и алгебры, анализа, геометрии, механики и математической физики и две дополнительные секции: истории и библиографии, преподавания и методологии. Надо отметить, что, уже начиная с первого, во всех конгрессах постоянное внимание уделялось проблемам преподавания математики. Например, основной темой доклада Клейна была реорганизация высшего математического образования. Для выявления изменений, происшедших в математике XX века, достаточно изучить перечни секций современных математических конгрессов. В них чаще всего встречаются математическая логика и основания математики; алгебра; теория чисел; геометрия; топология; алгебраическая геометрия; комплексный анализ; группы Ли и теория представлений; вещественный и функциональный анализ; теория вероятностей и математическая статистика; дифференциальные уравнения; математическая физика; численные методы; дискретная математика; математические аспекты информатики; приложения математики к нефизическим наукам; история математики; преподавание математики. Многие из названных наук родились и сформировались лишь в XX столетии.

В 1900 г. на II Парижском конгрессе Гильберт сформулировал 23 проблемы, решение которых, по его мнению, способствовало бы дальнейшему развитию математики. Эти проблемы стали предметом исследований математики XX столетия. Некоторые из них уже решены. Список «Проблем Гильберта» подтверждал жизненную силу всех областей математики. Пуанкаре в 1908 г. на IV Международном математическом конгрессе сделал доклад «Будущее математики», наметив не конкретные, а общие задачи математики.

Организация международных конгрессов, издание математической энциклопедии, реферирование научной продукции, организованное во всемирном масштабе — все это служило цели сохранения организационного единства все более разветвляющейся математики.

В течение века менялись и основные направления развития математики. До второй мировой войны ими были анализ и его приложения. После войны произошел рост исследований по топологии, алгебраической геометрии, теории групп Ли и теории представлений. Новыми направлениями, родившимися в начале века, считаются, прежде всего, три ветви математики — теория функций, топология и функциональный анализ.

На первый план выдвигается теория функций действительного переменного (ТФДП). В начале века французский математик **Анри Лебег** (1875-1941) завершил построение теории меры и интегрирования. Он ввел новое понимание интеграла

$$\int_a^b f(x)dx,$$

созданного Коши и Риманом через интегральные суммы

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

заменив их суммами вида

$$\sum_i \eta_i mes(E_i).$$

Лебег занимался также педагогическими вопросами и историей науки. В становлении ТФДП большое значение имели работы оригинального итальянского математика **Джузеппе Пеано** (1858-1922), французских математиков **Эмиля Бореля** (1871-1956) (выдающегося популяризатора математики), **Рене Бэра** (1874-1932). Мера множества и интеграл по Лебегу, измеримые множества Бореля, классы функций Бэра входят в университетские курсы математики. В двадцатые годы ведущая роль в теории функций перешла к русской школе. Ее представляли **Николай Николаевич Лузин** (1883-1950) и его ученики.

Продолжала развиваться и теория аналитических функций — ведущая математическая дисциплина прошлого века. Важные результаты получили французские математики **Жак Адамар** (1865-1963) и Э. Борель. Адамар применил свои методы в аналитической теории чисел и доказал, что количество $\pi(x)$ простых чисел, не превышающих x, асимптотически равно $x/\ln x$.

В классическом математическом анализе на рубеже столетий главное место занимали проблемы решения краевых задач математической физики. После работ Пуанкаре дальнейшие успехи были достигнуты в трудах **Александра Михайловича Ляпунова** (1857-1918) и **Владимира Андреевича Стеклова** (1864-1926). Продвинуться в этих вопросах помогала новая теория интегральных уравнений. С именем Стеклова связана реорганизация бывшей Императорской Академии наук в Академию наук СССР — он был ее вице-президентом.

Рождение функционального анализа является одним из важнейших событий математики. В нем воссоединились многие концепции классического анализа, линейной алгебры и геометрии. Решающий сдвиг в этой теории сделал шведский математик **Эрик Ивар Фредгольм** (1866-1927). Он разработал общие приемы решения некоторых интегральных уравнений. Линейные интегральные уравнения являются бесконечномерными аналогами систем линейных уравнений. Так родился линейный функциональный анализ в бесконечномерных пространствах. Важным разделом функционального анализа явилась теория гильбертовых пространств.

Слово «топология» относится к двум разделам математики. Родоначальником «комбинаторной топологии» был Анри Пуанкаре. У истоков другой, «общей топологии», стоял Кантор. Общая топология примыкает к теории множеств и лежит в основаниях математики. Это аксиоматическая теория, призванная исследовать такие понятия, как «предел», «сходимость», «непрерывность» и т.п. Ее основы заложили в XX в. немецкий математик **Феликс Хаусдорф** (1868-1942), польский математик **Казимеж Куратовский** (1896-1980) и знаменитый представитель московской школы академик **Павел Сергеевич Александров (**1896-1982). Комбинаторная топология — это раздел геометрии. Она изучает свойства фигур, остающихся неизменными при взаимно однозначных и непрерывных отображениях. В ее создании принимали участие Анри Пуанкаре, крупнейший голландский математик **Ян Брауэр** (1881-1966), Анри Лебег, выдающийся московский математик **Павел Самуилович Урысон** (1898-1924). Сейчас топология — одна из центральных областей математики.

В первой половине XX в. возникла концепция аксиоматического построения всей математики. Согласно этой концепции «в основе всей математики лежит чистая теория множеств» (А.Н. Колмогоров). Казалось, что Кантору суждено найти такое место для математики, которое Гильберт назвал «раем». Но в теории множеств обнаружились парадоксы. Поэтому потребовался пересмотр оснований математики. Возникли два направления обоснования математики: *интуиционистское* и *конструктивное*. Немецкий математик **Эрнст Цермело** (1871-1953) дал первую систему аксиом теории множеств. Была аксиоматизирована алгебра, элементарная геометрия, теория вероятностей, топология, теория меры и др. В конце тридцатых годов группа французских математиков объединилась, чтобы построить всю математику на аксиоматической основе. Результатом их деятельности стал многотомный трактат «Элементы математики», изданный под псевдонимом **Никола Бурбаки**. Фундаментом являлась теория множеств. Эта попытка осталась незавершенной. Тем не менее их работа имела большое значение для развития математики. По крайней мере был создан язык, на котором математики понимают друг друга.

В двадцатые годы быстро развивалась алгебра. Она перестраивалась по образцу теории групп, становясь учением об алгебраических системах. Изменился предмет алгебры. Прежняя наука о решении алгебраических уравнений осталась лишь разделом в современной алгебре. Новую постановку алгебраических проблем дал немецкий математик **Эрнст Штейниц** (1871-1928) в мемуаре «Алгебраическая теория полей» (1910). В течение века произошла алгебраизация всей математики. Среди тех, кто в значительной степени способствовал этому процессу, надо назвать немецкого математика **Эмми Нётер** (1882-1935), создавшую абстрактную алгебру, и ее ученика голландского математика **Бартеля Лендерта Ван-дер-Вардена** (1903-1996). Нётер — самая известная женщина-математик XX века, профессор Геттингенского университета. В 1928-1929 гг. она читала абстрактную алгебру и алгебраическую геометрию в Московском университете. Советские алгебраисты, интенсивно занимающиеся проблемами современной алгебры, группируются в 20-е годы вокруг академика О.Ю. Шмидта.

В конце XIX в. казалось, что физика — завершенная область знаний. Но вскоре, в 1904-1906 гг., усилиями Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна была создана специальная теория относительности. Устройство физического мира, описываемого этой теорией, непривычно и противоречит интуиции. Математические основы теории относительности были разработаны немецким математиком **Германом Минковским** (1864-1909), одним из представителей геттингенской математической школы. Он установил ее связь с геометрией Лобачевского. Через 10 лет Эйнштейн создал общую теорию относительности (1915), которая разрушила представления о «плоском» мире. Он ввел в физику риманову дифференциальную геометрию.

Рождение квантовой механики в двадцатые годы разрушило привычные представления о физической картине мира. Разрушилось представление о познаваемости микромира. Был разработан математический аппарат квантовой механики. По этой теории, положение материальной частицы и ее импульс определяются лишь с определенной вероятностью.

Английский ботаник Броун обнаружил под микроскопом хаотическое движение малых частиц в жидкости. Теорию броуновского движения на физическом уровне дал Эйнштейн (1905). Начала его математической теории построил американский математик **Норберт Винер** (1894-1964), основоположник кибернетики. Оказалось, что траектории броуновских частиц — непрерывные функции, не имеющие производных. Полная математическая теория броуновского движения была построена А.Н. Колмогоровым.

Математики участвовали во всех деяниях века, в том числе в создании новейших средств вооружения и ведения военных действий. Невозможно сомневаться в том, что их вклад в создание ядерного оружия был велик. Проблемы управления артиллерийским огнем и бомбометанием разрабатывались в теории вероятности (фон Нейман, Винер, Колмогоров). Проблемы шифровки сообщений и эффективной передачи их по каналам связи привели к созданию теории информации и теории кодирования (Винер, Шеннон).

Войны XX века разорвали международные научные связи. После 1945 г. они быстро восстановились. В 1950 г. собрался первый послевоенный Международный математический конгресс в США (Гарвард). С тех пор конгрессы собирались регулярно. Во второй половине столетия математика приобрела характер истинно интернациональной науки. Начала осуществляться мысль Гильберта о том, что для математика весь культурный мир представляет собой единую страну.

Процесс математизации различных наук идет в нарастающем темпе. Теперь можно указать и на нетрадиционные области ее применения: химия, биология, лингвистика, психология, медицина, геология и др. Происходит качественное изменение самой математики. Понятие предмета математики приобретает все более глубокое содержание.

Вопросы и задания

1. Какие новые разделы математики были созданы в XX веке?
2. Назовите имена математиков, занимавшихся построением новой теории функций.
3. К каким разделам математики имеет отношение топология?
4. Какие физические приложения математики разрабатывались в XX веке?
5. Назовите центры развития математики в XX веке.
6. В развитие каких разделов математики внесли свой вклад российские математики в XX веке?

Глава VI.

ИСТОРИЯ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

6.1. Развитие математики в России до XVIII века

Математические познания древних народов, населявших территорию России, оценить трудно, так как письменных источников не сохранилось. Естественно считать, что математическая культура русского народа, как и любого другого, была тесно связана с его общественной жизнью. Арифметических и геометрических знаний требовала практическая деятельность людей. Различные связи древних славян со многими народами Европы и Азии также не могли не познакомить наших предков с их научными достижениями.

Обычно изложение истории отечественной математики начинают с XI-XII вв., от которых сохранились в нашей стране первые математические памятники. Но первые сведения о развитии арифметики в Древней Руси относятся к IX-X вв. Существование городов, ведение земледелия и торговли говорят о распространении простейших математических знаний. Это были навыки арифметических действий и геометрических правил конструирования. Об этом говорят и археологические находки, и берестяные грамоты, и сохранившиеся храмы и дворцы.

В X-XI вв. Киевская Русь достигла высокой степени могущества и культурного развития. Уже в начале X века на Руси существовала письменность. Приобретение знаний шло больше всего через Византию. После крещения на Руси появились не только книги религиозного содержания, но и светского характера — греческого и болгарского происхождения. Возможно, что до создания славянской азбуки на Руси пользовались греческим алфавитом и буквенной нумерацией. Была разработана глаголица, вытесненная потом кириллицей. На Руси кириллица получила распространение при киевском князе Владимире Святославиче (978-1015). При нем в Киеве была открыта школа для детей, в которой обучение велось по образцам византийских школ. При Ярославе Мудром (1019-1054) переписывалось много книг. Крупным культурным центром был Новгород, с его развитыми ремеслами и торговлей.

Буквы древнерусского алфавита имели также числовое значение, для обозначения которого над буквами ставился значок «~» — титло. Для обозначения тысяч пользовались теми же буквами, у которых снизу слева ставился знак в виде перечеркнутой черточки. Для единиц более высоких десятичных разрядов имелись свои названия и обозначения: «тьма» (десять тысяч), «легион» (десять тем), «леодр» (десять легионов). Таким образом, древнерусская нумерация была основана на принципах ионийской нумерации. Она применялась до конца XVII в., далее начала вытесняться индийской нумерацией.

Простейшие дроби были известны давно. Сначала возникли 1/2 и 1/3, потом их последовательные половинки: 1/4 (четь), 1/8 (полчети), 1/6 (полтрети), 1/12 (пол-полтрети) и т.д.

Большую роль в развитии арифметики играли различные системы мер: длины, площади, сыпучих тел, весовой и денежной единиц. Более сложные вычисления велись в календарных и хронологических расчетах. Древнейшее русское математическое сочинение, дошедшее до нас, — «Учение им же ведати человеку числа всех лет» (1136) написал **Кирик Новгородец** (родился в 1110 г.), первый русский математик, известный нам по имени. Оно посвящено хронологическим расчетам. Счет годам велся не от рождества Христова, а от сотворения мира. Кирик вычислил не только число годов, но и число месяцев, недель и дней.

Таким образом, в начале истории русского государства ход развития ее математической культуры был общим со всеми государствами Европы. Далее на Западе знакомятся с арабской математикой. В России, больше связанной с Византией, чем со странами ислама, развитие математики пошло иным путем. Сближение с Европой насильственно прервалось в XIII веке из-за нашествия монголо-татар (1240) и крестоносцев (1242).

Эти нашествия и раздробленность в русском государстве привели к длительному застою в общественной жизни, а также в культуре и науке. А.С. Пушкин говорил, что татары не походили на мавров: завоевав Россию, они не подарили ей ни алгебры, ни Аристотеля. К началу Нового времени Россия отстала от Европы по уровню науки вообще и математики в частности.

Окончательное свержение монгольского ига состоялось в XV веке (1480). Московское княжество стало организующим центром Русского государства. С укреплением государства и экономическим подъемом страны возникли новые запросы общества к математике. Например, большое значение приобрели межевание и измерение земель, коммерческие расчеты, решение задач строительной и военной практики. Церковь требовала продолжения пасхальных таблиц. Хотя, в общем, в XVI-XVII вв. православие подвергало запрету западную светскую и научную литературу: «Богомерзостен перед Богом всякий, кто любит геометрию, а се душевные грехи учиться астрономии и эллинским книгам; по своему разуму верующий легко впадает в различные заблуждения; люби простоту больше мудрости, не изыскуй того, что выше тебя, а какое дано тебе от Бога учение, то и держи».

При Иване Грозном в 1556 г. был издан наказ о землемерии с приложением землемерных начертаний в виде примеров и правил. В XVI в. был создан древнейший русский учебник по математике: «Сия книга рекома по гречески Арифметика, а по Немецки Алгоризма, а по Русски Цыфирная счетная мудрость». Развитие математики в России реально начинается с XVII в. Известно множество рукописных учебников математики XVII века на русском языке. Их впервые исследовал известный историк математики профессор Московского университета В.В. Бобынин. Основное содержание этих математических рукописей посвящено решению арифметических и геометрических задач. Они предназначались в основном для торговцев, чиновников, землемеров, ремесленников. Хотя эти учебники и являлись компиляциями, тем не менее они подготовили почву, на которой выросла учебная литература и школа XVIII столетия. В начале XVII в. был создан «Устав ратных, пушечных и других дел, касающихся до воинской науки», снабженный правилами применения геометрических методов для определения расстояний на местности. Землемерам предназначалась «Книга сошного письма» («О земном верстании, как земля верстать», 1629). В XVII в. наблюдается постепенное вытеснение алфавитной нумерации современной цифровой.

Единой системы образования в России до XVIII в. не было. В 1687 г. открывается Славяно-греко-латинская академия в Москве. Из этой академии вышли Л.Ф. Магницкий и М.В. Ломоносов.

Но пока в конце XVII в. математика в России резко отставала от стран Европы, где в это время уже разрабатывались основы дифференциального и интегрального исчисления. Хотя перелом в истории науки в России уже приближался.

Вопросы и задания

1. Какими путями проникали математические знания в Древнюю Русь?
2. Охарактеризуйте древнерусскую нумерацию.
3. К какому веку относятся первые известные древнерусские математические памятники?
4. Как развивались математические знания на Руси в эпоху Золотой Орды и после свержения монгольского ига?
5. Оцените уровень развития математики к концу XVII столетия.

6.2. Развитие математики в России в XVIII-XIX столетиях

В первой четверти XVIII в. математическое просвещение становится одной из задач государства. За спешную подготовку военных и технических специалистов принимается царь Петр I. Реформы, начатые им, потребовали и организации широкого светского обучения. Посылка людей за границу для обучения не дала эффекта.

В 1701 г. в Москве начала работу Навигацкая школа. От нее в 1715 г. отделилась Морская академия, переведенная в Петербург. В Навигацкой школе готовили специалистов во все роды военной, морской и гражданской службы. Преподавание математики включало арифметику, геометрию, тригонометрию, пользование таблицами логарифмов, счетными линейками. Основными преподавателями были А.Д. Фархварсон и Л.Ф. Магницкий, известные российские просветители.

Андрей Данилович Фархварсон (1675-1739) — шотландский математик, профессор, приехавший в Москву по приглашению Петра I. При его участии впервые в России были изданы «Таблицы логарифмов и синусов, тангенсов и секансов» (1703), «Начала» Евклида (1739, перевод на русский язык Фархварсона).

Леонтий Филиппович Магницкий (1669-1739) — один из выдающихся людей петровского времени по образованности и математическим познаниям. В 1703 г. он напечатал в Москве первое руководство — энциклопедическую «Арифметику», которая сразу же стала основным учебником математики в России на многие годы. Прослужила она до середины XVIII в., оказав немалое влияние на все учебные руководства русских авторов. Учитывая нужды практики, Магницкий включил в книгу, помимо математического материала, сведения по естествознанию и технике. Полное название книги — «Арифметика сиречь наука числительная». Это большой том, разделенный на две книги. Первая книга посвящена арифметике, вторая включает алгебру с геометрическими приложениями, начала тригонометрии, географию и навигацию. Нужно отметить, что Магницкий проделал большую работу по улучшению русской математической терминологии. Благодаря ему в наш словарь вошли термины множитель, произведение, делитель, квадратное число, извлечение корня, пропорция, прогрессия и др.

Нередко встречаются в книге и стихи, ими Магницкий высказывал общие выводы и методические советы. Например, следующим образом выражена бесконечность натурального ряда:

Число есть бесконечно,
Умом нам недотечно.
Никто не знает конца,
Кроме всех Бога творца.

В 1714 г. в ряде губернских городов были открыты низшие «цифирные» школы для обучения молодежи, которые просуществовали до 1744 г. В Москве стали работать инженерная и артиллерийская школы (1711), затем переведенные в Петербург.

Поворотным пунктом в развитии математики в России явилось основание Петербургской Академии наук. В 1724 г. вышел указ Петра I о ее организации, а при ней — университета и гимназии. Она была создана в 1725 г., через полгода после смерти Петра, и дала мощный толчок в подготовке русских математиков. Сначала академиков пришлось выписывать из-за рубежа — Швейцарии и Германии. Среди 23 академиков, приглашенных на работу в течение первых лет, семь являлись математиками. Были приглашены Яков Герман, Христиан Гольдбах, Николай и Даниил Бернулли, Леонард Эйлер. Начиная с 1728 г. выходили «Записки Императорской Петербургской Академии наук» на латинском языке, в которых печатались оригинальные математические труды академиков, среди них 400 трудов Эйлера. На академиков возлагались также преподавание в университете и гимназии и занятия с наиболее способными студентами. Некоторые студенты направлялись для усовершенствования знаний в Германию. Таким образом, педагогические и методические идеи Европы проникали в Россию через представителей первой российской научно-методической школы Эйлера. Академические учебные заведения сыграли важную роль в развитии науки и просвещении. Они дали гениального ученого М.В. Ломоносова, а также первых русских академиков-математиков. Но из-за отсутствия подготовленных для учебы в университете студентов, он был в 1783 году закрыт. Научно-просветительская и педагогическая работа Эйлера, его учеников и преемников — С.К. Котельникова, С.Я. Румовского, Н.Г. Курганова, Н.И. Фусса, М.Е. Головина, С.Е. Гурьева и др. содействовали улучшению преподавания во всех учебных заведениях страны: инженерных, военных, морских, сухопутных и других. **Семен Кириллович Котельников** (1723-1806), старший ученик Эйлера, первый русский академик-математик (1756), руководил Академической гимназией.

Степан Яковлевич Румовский (1734-1812), академик (1763), вице-президент академии (1800-1803), был первым попечителем Казанского учебного округа и оказал большую помощь при организации Казанского университета. М.Е. Головин, племянник Ломоносова и ученик Эйлера, активно участвовал в организации системы народных училищ, начатой в 1782 г., был профессором основанной в 1786 г. Учительской семинарии в Петербурге. Н.И. Фусс десять лет помогал Эйлеру в качестве секретаря, стал академиком (1783), был секретарем академии. Он очень многое сделал для опубликования колоссального научного наследия Эйлера. Позже принимал активное участие в реформе системы образования. **Семен Емельянович Гурьев** (1764-1813), академик (1798), особенно заботился о подготовке национальных кадров. Его главный труд «Опыт усовершенствования элементов геометрии» (1798) посвящен вопросам обоснования математики. В истории методики обучения математике его считают первой в России методической работой, открывающий этап теоретического уровня развития этой науки.

Потребность страны в расширении системы общего образования была велика. В 1782 г. создана Комиссия об учреждении училищ. Были открыты двухклассные народные училища в уездных городах и четырехклассные — в губернских. При Петербургском училище было создано отделение для подготовки учителей (1782), преобразованное потом в Учительскую семинарию (1786). В ней преподавал М.Е. Головин, одним из воспитанников был выдающийся деятель математического просвещения Т.Ф. Осиповский. В 1804 г. Учительская семинария преобразована в Педагогический институт, а потом на его основе организовался Петербургский университет.

Большую заслугу имеет академия в создании учебной математической литературы. Ведущими учебниками были руководства Эйлера, оказавшие влияние на все создававшиеся учебники. Например, «Руководство к арифметике, для употребления в гимназии при Императорской Академии наук» явилось образцом для книг Н.Г. Курганова «Универсальная арифметика» (1757) и «Арифметика или числовник» (1771). Большое значение имела «Универсальная арифметика» Эйлера — учебное руководство по алгебре. По сочинениям Эйлера, в которых он придал тригонометрии современный вид, М.Е. Головин издал «Плоскую и сферическую тригонометрию с алгебраическими доказательствами» (1789). С.Е. Гурьев написал первое русское руководство по дифференциальной геометрии «Основания трансцендентной геометрии кривых поверхностей» (1806).

Таким образом, первым научным математическим центром России была Петербургская Академия наук. Его основание пришлось на время революционных изменений в математике и механике. Европейские математики создали аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисление, теорию вероятностей. Российские ученые XVIII-XIX вв. внесли свой вклад в развитие многих разделов математики. Творчество великого Эйлера охватывало все области физико-математических знаний. Историю науки XVIII в. поэтому называют иногда веком Эйлера. Исследования по приложениям в механике, физике ярко выражены в трудах Д. Бернулли. Его главным делом в Академии стала подготовка труда по гидродинамике, а также исследования по теории вероятностей и статистике, о колебаниях систем. В истории математической физики особое место занимает задача о колебании струны. Д. Бернулли указал также (1729), что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots$$

есть основание натуральных логарифмов, которое Эйлер позднее обозначил *e*. Имя академика Гольдбаха известно в связи со знаменитой «проблемой Гольдбаха»: всякое целое число, большее двух, есть сумма трех простых чисел. Он полностью исследовал условия конечной интегрируемости дифференциального бинома

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx.$$

В 1755 г. был основан Московский университет. В нем почти полстолетия преподавалась только элементарная математика. Для трех его факультетов готовили студентов две гимназии.

Первая половина XIX века характеризуется постепенным повышением уровня преподавания и ростом квалификации преподавателей. Из выпускников того периода вышло немало выдающихся ученых, в том числе академик П.Л. Чебышёв.

В начале XIX в. академические учебные заведения были закрыты в связи с общей реформой системы образования при Александре I. В 1802 г. было создано Министерство народного просвещения, при нем — Главное правление училищ, в которое вошли, в частности, Румовский и Фусс. В уездных городах открывались уездные училища, в губернских — гимназии. Составной частью реформы являлось учреждение университетов по всей Российской империи, по числу шести учебных округов. Университеты организовались в Дерпте (Тарту) (1802), Вильнюсе (1803), Казани и Харькове (1804), Петербурге (1819). Позже они были открыты в Киеве (1834), Одессе (1865), Варшаве (1869), Томске (1888). Важной особенностью новой системы учебных заведений была ее непрерывность. Окончив уездное училище, можно было перейти в гимназию, а гимназическая подготовка считалась достаточной для поступления в университет. С 1808 г. никто не мог поступить на государственную службу без диплома училища. Преподаватели училищ готовились в университетах.

В каждом университете учреждались физико-математические факультеты и кафедры математики. В них обучали алгебре, аналитической геометрии, дифференциальному и интегральному исчислению, читали повторительный курс элементарной математики. Сначала срок обучения был трехгодичным, потом — четырехгодичным (1835). Позже были введены и другие предметы: начертательная геометрия, теория вероятностей и др. Ректорами многих университетов долгие годы были математики — Д.М. Перевощиков в Москве, Н.И. Лобачевский в Казани и др. В подготовке преподавательских кадров первоначально велика была заслуга иностранных профессоров. Это Н.Д. Брашман, воспитанник Политехнического института и Венского университета, который работал в Петербурге, Казани и Москве; М.Ф. Бартельс, выпускник Геттингенского университета, работавший в Казани и Тарту и др.

После смерти Эйлера (1783) уровень математического творчества в Академии снизился. Новый подъем начался в 20-е годы XIX века в период плодотворной работы молодых академиков М.В. Остроградского и В.Я. Буняковского. Важнейшим событием в истории отечественной математики этого периода явилось открытие Н.И. Лобачевским первой системы неевклидовой геометрии (1826). Они имели не только выдающиеся научные достижения. Все они были блестящими педагогами-новаторами с прогрессивными идеями в преподавании математики.

В середине XIX столетия русская педагогическая мысль достигла высокого рацсвета. К.Д. Ушинский (1824-1871) заложил основы научной педагогики. Усилилась разработка вопросов преподавания математики. П.Л. Чебышёв состоял членом Ученого комитета Министерства народного просвещения (1856-1873), составлял многочисленные рецензии на учебные пособия. Во второй половине века оформилась как самостоятельная наука методика преподавания математики. Россия создала прогрессивную школу методики преподавания арифметики (П.С. Гурьев, В.А. Латышев и др.). «Курс алгебры» А.Н. Страннолюбского (1867) стал первой методикой алгебры в России. Были заложены основы методики геометрии (С.Е. Гурьев, Н.И. Лобачевский). В работах В.П. Ермакова, М.Г. Попруженко, В.П. Шереметевского зарождались методики преподавания алгебры, тригонометрии, начал анализа. К концу века начала развиваться и общая методика обучения математике. Но предложенные методики в основном имели нормативный, рецептурный характер. Многие методические руководства были толкователями задачников.

Во второй половине XIX в. были созданы передовые для своего времени учебные пособия для средней школы: «Элементарная геометрия в объеме гимназического курса» и «Начальная алгебра» А.Ю. Давидова (1864), а также руководства выпускника Петербургского университета **Андрея Петровича Киселева** (1852-1940) «Систематический курс арифметики для средних учебных заведений» (1884), «Элементарная алгебра» (1888), «Элементарная геометрия» (1892). Киселев совершенствовал свои руководства от издания к изданию, и они постепенно стали основными учебниками русских школ. Они же были приняты и в советских школах.

Начиная с 1828 г. все наши академики-математики вышли из русских университетов. В середине века в Петербурге начал складываться творческий коллектив математиков, ведущее место в котором занял П.Л. Чебышёв. Его научная и педагогическая работа оказала решающее влияние на создание Петербургской математической школы. Его исследования по теории чисел, теории вероятностей, теории наилучшего приближения функций, теории интегрирования стали основой научных направлений русских математиков. Его ученики **Марков Андрей Андреевич** (1856-1922), **Ляпунов Александр Михайлович** (1857-1918), **Золотарев Егор Иванович** (1847-1878), **Коркин Александр Николаевич** (1837-1908), **Граве Дмитрий Александрович** (1863-1939), **Вороной Георгий Феодосьевич** (1868-1908) успешно продолжили разработку его тематики, а также стали основателями новых направлений. Этот научный коллектив оказался ядром Петербургского математического общества, действовавшего в 1890-1905 гг. Ученик Ляпунова **Владимир Андреевич Стеклов** (1864-1926, академик с 1912) получил замечательные результаты в области математической физики и теории ортогональных функций. Ученик Коркина **Алексей Николаевич Крылов** (1863-1945, академик с 1916), советский математик, механик и кораблестроитель, имеет ценные работы по прикладной математике. Он создал строгую научную теорию приближенных вычислений.

Петербургские математики оказали большое влияние на формирование научных школ и в других городах, например, А.М. Ляпунов и В.А. Стеклов в Харькове, Д.А. Граве в Киеве. Хотя с течением времени развитие математики в каждом университете приобретало свои особенности.

Особо следует отметить первую научную алгебраическую школу, созданную Д.А. Граве в 10-е годы XX века в Киевском университете, куда он переехал в 1902 г. Граве в Киеве отошел от прежней тематики и сосредоточился на новой алгебре и теории чисел. Специальный семинар по теории групп, основанный им, превращается в научную школу, членами которой были Б.Н. Делоне, Н.Г. Чеботарев, О.Ю. Шмидт и др. В 1909 г. Граве издал известную книгу «Элементарный курс теории чисел», в 1914 г. — фундаментальный труд «Элементы высшей алгебры». Все руководства Граве содержат много исторических справок и экскурсов в историю проблемы. Для средней школы он написал «Начала алгебры» (1915).

Славу русской науки составляет научная деятельность первой в мире женщины — профессора математики С.В. Ковалевской. В 70-80-х годах она получила замечательные результаты в аналитической теории дифференциальных уравнений.

В 1882 г. **Виктор Викторович Бобынин** (1849-1919) впервые в России стал читать в МГУ факультативный курс истории математики. Это был беззаветно преданный истории наук ученый, популяризатор истории математических знаний и ее применения в обучении. Он на собственные средства издавал журнал «Физико-математические науки в их прошлом и настоящем» (1885-1894).

Новый этап движения за реформу математического образования начался в конце XIX в. Яркие представители этого движения в России — В.П. Шереметевский и К.Ф. Лебединцев, в Европе — Ф. Клейн. Шереметевский в статье «Математика как наука и ее школьные суррогаты» (1895) писал, что идеи современной математики остаются за рамками школьных программ. В начале этого этапа развития методики математики в ней ярко проявляются идеи самой математики, направленные на применение функциональной зависимости. На IV Международном математическом конгрессе в Риме (1908) была создана Международная ассоциация преподавателей математики. Высшей точкой методико-математической деятельности в дореволюционной России являются два Всероссийских съезда преподавателей математики: в Петербурге в январе 1912 г. и в Москве в январе 1915 г. На этих съездах было обсуждено большое число насущных вопросов преподавания математики: о реформах курсов геометрии, алгебры, о введении в курс средней школы элементов высшей математики, приближенных вычислениях, исторических элементах в преподавании, о подготовке учителей и др.

История формирования Московской математической школы непосредственно связана с Московским университетом. В 1864 г. было основано Московское математическое общество (ММО), начато издание журнала «Математический сборник» (1865). Это старейшее периодическое издание существует и в наши дни. ММО сыграло огромную роль в методическом росте математического образования. В 1906 г. при МГУ был создан Московский педагогический кружок, издававший журнал «Математическое образование» (1912-1917). Председателем кружка был математик **Болеслав Корнелиевич Млодзеевский** (1858-1923), профессор Московского университета. Он был также одним из организаторов Московских высших женских курсов.

В России издавались и другие популярные журналы, посвященные вопросам элементарной математики и ее преподавания: «Журнал элементарной математики» (Киев, 1884-1886), «Вестник опытной физики и элементарной математики» (Киев, 1886-1891; Одесса, 1891-1917).

В Московском университете на рубеже XIX-XX вв. общепризнанным лидером математиков-прикладников стал **Николай Егорович Жуковский** (1847-1921). Многие годы он преподавал в университете, стал президентом ММО (1905-1921). Потребности развития авиации стали стимулом к рождению аэродинамики, которая в начале века создала теорию воздухоплавания. Н.Е. Жуковский является классиком этой науки. За теоретические и экспериментальные заслуги В.И. Ленин назвал его «отцом русской авиации».

Другая научная школа московских математиков, по классической дифференциальной геометрии, ведет начало от работ **Карла Михайловича Петерсона** (1828-1881). Они положили начало московской геометрической школе. Отметим, что Петерсон всю жизнь работал и преподавателем средней школы. Вслед за Петерсоном теорией поверхностей занимался Б.К. Млодзеевский. После них геометрическую школу возглавил **Дмитрий Федорович Егоров** (1869-1931), следующий президент ММО (1923-1931). Он же положил начало Московской школе ТФДП. Его учениками были крупнейшие советские ученые Н.Н. Лузин, И.Г. Петровский, С.С. Бюшгенс, С.П. Фиников и др. Научная репутация Егорова была очень высокой. В 1929 г. он был избран почетным членом АН СССР. Жуковский, Млодзеевский, Егоров ввели в практику вузовского обучения научные семинары и лекции, посвященные новым областям математики. Это ускорило рост молодых ученых. В этих семинарах формировались будущие ведущие советские математики.

К началу советского периода развития отечественная математика имела выдающиеся достижения. Во многих областях математики русские математические школы выдвинулись на передовые позиции в мире (неевклидовы геометрии, математическая физика, теория чисел, теория вероятностей, теория дифференциальных уравнений, теория функций действительного переменного, абстрактная алгебра). Новейшая история отечественной математики создается в советскую эпоху.

Вопросы и задания

1. Охарактеризуйте реформаторскую деятельность Петра I в области образования.
2. Оцените деятельность Академии наук как центра развития математики.
3. Какой вклад в образование внесли академические учебные заведения?
4. Каким был вклад иностранных академиков в развитие математики и математического образования в России?
5. Назовите признаки первой методико-математической школы Эйлера.
6. Опишите вклад учеников Эйлера в развитие математического образования в России.
7. Назовите первых русских академиков-математиков.
8. Оцените уровень математического образования в первых русских университетах.
9. Назовите выдающихся русских математиков первой половины XIX в.
10. Как начала создаваться методика преподавания математике в России?

11. Охарактеризуйте Петербургскую математическую школу Чебышёва.
12. Где была создана первая русская алгебраическая школа?
13. Охарактеризуйте новые явления в развитии математического образования в конце XIX — начале XX вв.
14. Как создавалась Московская математическая школа?

6.3. Советская математическая школа

Выдающийся математик, основоположник московской школы теории функций **Николай Николаевич Лузин** (1883-1950) является одним из связующих звеньев между дореволюционной российской и советской математикой. Он обучался в Московском университете, в Сорбонне, стажировался в Геттингене; учился у Бореля, Пуанкаре, Адамара, Дарбу, Лебега. Его знаменитый труд «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915) определил на многие годы вперед линию развития теории функций. Лузин с 1922 г. работал в МГУ, после избрания академиком (1929) руководил отделом теории функций Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Учениками Н.Н. Лузина были П.С. Александров, Н.К. Бари, Л.В. Келдыш, А.Н. Колмогоров, М.А. Лаврентьев, Л.А. Люстерник, Д.Е. Меньшов, М.Я. Суслин, А.Я. Хинчин, Л.Г. Шнирельман и др. Они составили основу Московской математической школы. Ни одна математическая школа мира не располагала таким созвездием выдающихся ученых.

Павел Сергеевич Александров (1896-1982) — выдающийся советский математик, академик (1953), создатель советской топологической школы, имеющей мировое признание. Многие понятия и теоремы общей топологии носят имя Александрова. Долгие годы руководил деятельностью Московского математического общества в качестве его президента. Был членом многих иностранных академий наук и научных обществ.

Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987) — выдающийся советский математик, академик (1939), член АПН СССР (1968). С 1930 г. — профессор МГУ. Внес основополагающий вклад во многие области современной математики: теорию функций действительного переменного, теорию вероятностей, теорию марковских случайных процессов, топологию, конструктивную логику, функциональный анализ, механику, прикладную математику, статистику, теорию информации.

Принято считать, что основные этапы развития современной математики — это время работы пяти великих математиков — Ньютона, Эйлера, Гаусса, Пуанкаре и Колмогорова. Важнейшим научным вкладом Колмогорова является аксиоматическое построение теории вероятностей. Эта аксиоматика связала воедино теорию множеств, теорию функций и теорию вероятностей. На ее основе стало возможным развитие теории случайных непрерывных процессов, например, точное математическое описание броуновского движения. А.Н. Колмогоров создал большие школы теории функций и теории вероятностей. Многие его ученики стали известными во всем мире математиками (например академик В.И. Арнольд).

Много сил и времени Колмогоров отдал реформе школьного математического образования. Он является автором и редактором школьных учебников, программ и учебных планов. По его инициативе при МГУ была создана школа-интернат для одаренных детей.

Александр Яковлевич Хинчин (1894-1959) имеет первоклассные труды по теории функций и теории чисел. Он является одним из основоположников советской школы теории вероятностей. Преподавал в МГУ, член-корреспондент АН СССР (1939), действительный член АПН РСФСР (1944). Значителен его вклад в математическое образование в высшей и средней школе. Он является автором известных книг «Краткий курс математического анализа», «Теорема Ферма», «Три жемчужины теории чисел» и др.

После революции алгебраическая школа Д.А. Граве продолжала работать успешно. Он сам принял активное участие в строительстве советской науки и в реформе высшей школы. В 1920 г. был избран членом АН УССР, в 1929 г. — почетным членом АН СССР. Еще до революции начали свои исследования по алгебре и теории чисел ученики Д.А. Граве — О.Ю. Шмидт, Б.Н. Делоне, Н.Г. Чеботарев и др. **Отто Юльевич Шмидт** (1891-1956, академик с 1935) еще в 1916 г. опубликовал монографию «Абстрактная теория групп». С 1923 г. Шмидт работал в Московском университете, руководил кафедрой алгебры. Он известен также как полярный исследователь и геофизик, астроном, общественный деятель, Герой Советского Союза, главный редактор БСЭ. **Борис Николаевич Делоне** (1890-1980) успешно занимался вопросами новой алгебры и теорией алгебраических чисел, стал членом-корреспондентом АН СССР (1929). **Николай Григорьевич Чеботарев** (1894-1947) — крупнейший советский алгебраист, член-корреспондент АН СССР (1929). Занимался вопросами теории алгебраических чисел, теории Галуа, групп Ли. Работал в Киеве, Одессе, с 1927 г. в Казани, заведовал кафедрой алгебры КГУ. Был директором Научно-исследовательского института математики и механики, теперь носящего его имя, председателем Казанского физико-математического общества. Создал известную Казанскую алгебраическую школу. Автор известных монографий «Теория Галуа», «Теория групп Ли».

Важные результаты были получены в теории чисел. В аналитической теории чисел основные достижения связаны с работами академика **Ивана Матвеевича Виноградова** (1891-1983). С 1929 г. — действительный член Академии наук СССР, с 1932 г. руководил Математическим институтом АН СССР.

В начале XX в. создавалась школа, занимавшаяся проблемами теории интегральных уравнений, ярким представителем которой был В.И. Смирнов. **Владимир Иванович Смирнов** (1887-1974) окончил Петербургский университет (1910), ученик В.А. Стеклова. Академик (1943). Профессор Петербургского (Ленинградского) университета, возглавлял Институт математики и механики Ленинградского университета, теперь носящего его имя. Основные работы относятся к теории функций комплексного переменного, теории дифференциальных уравнений, математической физике, истории математики. Возглавлял Комиссию АН СССР по истории физико-математических наук. Был президентом Ленинградского математического общества. Автор энциклопедического пятитомного труда «Курс высшей математики», который многократно переиздавался и был базовым вузовским учебником в течение более 50 лет. За этот фундаментальный труд был удостоен Государственной премии (1948). В 1941-1944 гг. в составе научного филиала ЛГУ был в эвакуации в Елабуге, работал заведующим кафедрой физики и математики Елабужского государственного учительского института.

В 1934 г. Академия наук СССР была переведена в Москву. Переехал также и Математический институт АН СССР. Ленинградская (Петербургская) и Московская математические школы стали работать вместе. Этот сплав крупнейших специалистов стал одной из мощнейших научных школ в мире — советской математической школой. Эта школа вплоть до распада СССР была ведущей в мире. Росли научные кадры и на периферии СССР.

Во время Великой Отечественной войны многие отечественные математики переключились на решение задач, связанных с обороной страны (А.Н. Колмогоров, Б.В. Гнеденко, Л.С. Понтрягин и др.).

Замечательные достижения советской математики выдвинули ее в первые ряды мировой науки. Ее результаты описаны в обзорах «Математика в СССР за 15 лет» (1933), «Математика в СССР за 30 лет» (1948), «Математика в СССР за 40 лет» (1959), «Математика в СССР, 1958-1967» (1970).

Вопросы и задания

1. Какие направления математических исследований продолжились в советское время?
2. Назовите имена советских математиков, занимавшихся построением новой теории функций.
3. Охарактеризуйте развитие алгебры и теории чисел в СССР.

6.4. Особенности развития математики в Татарстане

Культурно-исторические эпохи развития татарского народа

Курс истории математики в педагогическом вузе в национальной республике должен затрагивать вопросы развития математики и математического образования в крае. Их следует рассматривать как органическую часть истории отечественной математики. История развития науки и образования народов разных национальностей имеет свое образовательное и воспитательное значение. Возникает потребность в ознакомлении будущих учителей с краеведческим материалом в рамках курса истории математики. Требуется изучать развитие математических знаний всех народов, населяющих территорию республики, влияние на них отечественной и зарубежной математической мысли. Интересно сравнить уровень математических знаний, например, татарского народа с уровнем знаний других народов. Таким образом, в краеведческих историко-математических исследованиях решаются те же задачи, что и в истории отечественной математики.

Характер развития математических знаний у разных народов имеет свои особенности. Поэтому и их уровень в разные исторические периоды будет различным. Хотя все они являются составной частью истории отечественной математики. При изучении данной темы истории математики ее условно можно озаглавить «История математики Татарстана». Вопросам истории математики Татарстана посвящены недавние работы В.М. Беркутова, Л.Р. Шакировой и др. Конечно, нужно упомянуть прежние работы Б.В. Болгарского, известных казанских ученых-математиков Б.Л. Лаптева, В.В. Морозова, Б.М. Гагаева, Н.Н. Парфентьева, Н.Г. Чеботарева, А.П. Нордена и других. Опираясь на эти и другие работы, попытаемся описать кратко историю математики Татарстана с глубокой древности до наших дней.

Изучение закономерностей развития математических знаний и образования мы связываем с социальными условиями жизнедеятельности народа. Народы, населяющие Среднее Поволжье, прошли сложный этногенетический путь. Ученые выделяют две культурно-исторические эпохи в жизни татарского народа — общетюркскую (доисламскую, IV-X вв.) и тюрко-мусульманскую (X-XX вв.). Тюрко-мусульманскую эпоху национальной истории делят на два крупных периода: X век — середина XVI века и середина XVI века — начало XX века. Первый период характеризуется становлением государственности, обретением исламом официального статуса, распространением арабской письменности и культуры. Второй период начинается с завоевания Казанского ханства (1552), потерей исламом государственного и общественного статуса. В рамках этого периода обычно обозначают три этапа развития национальной культуры: традиционалистский (середина XVI в. — конец XVIII в.), реформаторский (конец XVIII в. — XIX в.) и национально-демократический (начало XX в.). В связи с социально-политическими условиями жизни в тюрко-мусульманскую эпоху обусловливаются три периода развития математики и математического образования татарского народа: I. X-XV вв. II. XVI-XVIII вв. III. XIX в. — начало XX в.

Таким образом, в своем историческом развитии культура, наука, образование народов Татарстана испытывали многостороннее влияние: культуры Востока, с одной стороны, и культуры русской и европейской — с другой. Но в целом процесс развития математики и математического образования татарского народа представляет собой исторически обусловленную саморегулирующуюся социальную систему, сохранившую в течение многих веков свои характерные особенности и народные традиции.

Древнейшие времена

Всеобщую историю развития математики в крае следует начинать с древнейших времен. Первые люди в бассейнах Волги и Камы на территории современного Татарстана появились еще в ледниковом периоде, в эпоху среднего палеолита, около 80-100 тысяч лет тому назад. Общую теорию накопления математических знаний мы можем применить и к этим народам. Например, развитие представлений о понятии фигуры, выражающейся в рисунке. Шедевры древней наскальной живописи периода позднего палеолита (Урал, Капова пещера), изображение мамонта на бивне мамонта, найденном на территории Татарстана — тому подтверждение. Народы, населяющие эту территорию, прошли все этапы развития первобытных и древних народов. Было бы интересно сравнить уровень развития этих народов и тех, которых мы изучаем в истории математики. Например, во времена от Фалеса до Евклида, в VIII-III веках до н.э., на значительной территории Среднего Поволжья и Прикамья обитали племена ананьинской культуры, далекие предки современных финно-угорских народов. Она взяла название от села Ананьино Елабужского района, возле которого еще в XIX веке был исследован богатый памятник этой культуры. Период ананьинской культуры — это время установления внешних связей Среднего Поволжья со многими отдаленными народами вплоть до античного мира, например, южным греко-скифским миром. Но математические памятники этого периода не сохранились.

Общетюркская эпоха

Государственность предков татар восходит к периоду раннего средневековья. К возникновению новых этнических массивов привело Великое переселение народов, начатое в IV веке н.э. Это переселение положило конец рабовладельческому строю античного мира и ознаменовало начало нового — феодального строя. На огромной территории Западной Евразии, от Волги до Рейна, образовалась Гуннская империя. Гуннские племена дошли до Среднего Поволжья и оставили свой след в средневековой истории народов Волго-Уральского региона. После распада гуннской орды в разное время в юго-восточной Европе были и другие раннефеодальные государственные объединения, являющиеся их потомками: Аварский (VI в.), Тюркский (VI-VIII вв.), Хазарский (VII в.), Кимакский (VIII-X вв.) каганаты, Великая Болгария (VII-VIII вв.), печенеги (X в.), половцы (кипчаки, XI в.), сыгравшие определенную роль в происхождении татарского народа.

Восточный Тюркский *каганат* на территории Центральной Азии от Иртыша до Китая, в составе населения которого были и древние татары, считается историками начальной формой государственности татарского народа. Основу хозяйства Тюркского каганата составляло кочевое скотоводство. Существовали раннее земледелие, металлургия. Изготавливались орудия труда, оружие. Развивалась торговля, что привело к денежному обращению. С конца VII века тюркские правители чеканили собственную монету. Строились города. Высшим достижением тюркской культуры стало появление письменности (руника,VIII век). Таким образом, уровень математической культуры предков татарского народа в общетюркскую эпоху может соответствовать общему уровню культуры всех народов, населявших Юго-восточную Европу и Центральную Азию.

Тюрко-мусульманская эпоха. Волжская Булгария

В конце VIII — начале IX века в Среднем Поволжье появились болгары — часть племен Великой Болгарии из Приазовья. Доболгарские и болгарские тюркоязычные народы вошли с местными финскими племенами в широкий этнический и культурный контакт. Для окончательного объединения всех племен в единое государство болгарские князья решили официально, всенародно принять ислам. В известных путевых заметках Ахмеда ибн-Фадлана описано, что в 922 году из Багдада прибыло посольство, чтобы установить в Волжской Булгарии законы ислама. Болгарский царь всенародно закрепил официальное принятие ислама. Оно стало началом становления нового централизованного государства болгар на севере — Волжской Булгарии. В начальный период существования государства этнический состав населения был пестрым, но к XII веку образовалась единая народность с общим названием «булгары». Основным видом хозяйства волжских булгар было развитое земледелие. Ему подчинялось скотоводство. Широко развито было строительное дело и ремесла. Большое развитие получила металлургия. Развивалась торговля зерном, пушниной, рыбой, медом, оружием, ювелирными изделиями. В X веке начали чеканить собственные серебряные монеты — диргемы (с древнегреческого «драхма»). Булгарское государство издавна имело торговые связи с Киевской Русью — своим ближайшим соседом. Волжская Булгария была типичным раннефеодальным государством. Высшая власть принадлежала эмиру. Первые города появились в начале X века. Самые крупные города: столица Булгар, Сувар, Буляр.

Единственным уцелевшим наземным архитектурным памятником домонгольской Булгарии является угловая башня Елабужского городища. Это остатки некоторого городка, белокаменной мечети-цитадели на окраине современной Елабуги.

Результаты раскопок на Елабужском городище и в исторической части современного города позволяют отнести время возникновения булгарской крепости к концу X — началу XI в. Они также дали обоснование даты возникновения города Елабуги. В 2007 году Елабуга праздновала 1000-летие города.

У булгар в VIII-IX веках существовали зачатки письменности — восточная руника Тюркского каганата. С принятием ислама она была заменена арабской графикой. Принятие этой письменности способствовало установлению тесных культурных связей с Востоком, развитию литературы, просвещения и разных наук (история, медицина, философия, право). В условиях интенсивных культурных контактов с мусульманскими центрами в Булгарии развиваются просвещение, культура, наука на основе ислама. Уже к концу X в. местное духовенство берет на себя миссионерские функции. В городах и селах Волжской Булгарии, по сообщениям арабского ученого, географа Ибн Русте, были мечети и школы. Грамоте обучали в мектебе (начальные школы) и медресе (средние школы). Основное внимание уделялось изучению и толкованию Корана, мусульманского права. Условием образованности было и овладение арабским и персидским языками, и родным тюркским языком. Изучались элементы некоторых других наук. Например, арифметика, на основе которой строилось дальнейшее математическое образование. Она была необходима для торговых расчетов, раздела имущества. Арифметика была риторической, знаки действий и искомые величины обозначались в словесной форме. Геометрия была собранием некоторых правил для решения задач практического характера. Они изучались дедуктивным методом, но без доказательств. Как учебные пособия применялись и самостоятельные источники, и рукописные трактаты среднеазиатских ученых-математиков (аль-Хорезми, Ибн-Сина и др.). Происходил активный процесс накопления народной математики, основанной на его знаниях и опыте по измерениям, исчислению времени, денежным расчетам.

Связи Волжской Булгарии и Киевской Руси были добрососедскими. После образования Северо-восточной Руси в XII веке с центром во Владимиро-Суздальской земле русские князья неоднократно предпринимали попытки вторжения в Булгарию. В дальнейшем в связи с монгольским завоеванием Восточной Европы Волжская Булгария потеряла самостоятельность (1236) и вошла в состав нового государства — Золотой Орды, под власть которой подпала и Русь.

Золотая Орда

Древние татары Центральной Азии (Тюркский каганат) были вовлечены в XII-XIII веках в процесс создания Монгольского государства. В начале XIII века Чингиз-ханом была завоевана огромная территория в Китае, Средней Азии, на Кавказе. В 1223 году на реке Калке произошла историческая битва русского войска с монгольской армией, одержавшей победу. После смерти Чингиз-хана (1227) западные земли (*Улус* Джучи) возглавил Бату-хан (Батый) — внук Чингиз-хана. Волжская Булгария была покорена в 1236 году. Создалось новое феодальное государство развитого средневековья в Центральной Евразии — Золотая Орда (1243). После смерти Батыя (1255) Золотая Орда получила государственную самостоятельность, вышла из состава Монгольской империи и приняла ислам. Высшей точки своего могущества Золотая Орда достигла в начале XIV века при Узбек-хане. Она имела слаженный государственный механизм: органы центрального и местного управления, судебную и налоговую систему, таможенную службу, сильную армию. Основными видами хозяйства в Золотой Орде были скотоводство и земледелие. Она была также крупнейшим центром международной транзитной торговли. В Золотой Орде мирно сосуществовали бывшая кочевая и новая городская культуры. Некоторые города по размерам и численности населения превосходили западноевропейские (Рим в XIII веке имел 35 тысяч жителей, Париж в XIV веке — 58 тысяч, Сарай, столица Золотой Орды, в XIV веке — более 100 тысяч). Распространилась арабская письменность. Пользовались популярностью творения Фирдоуси (X в.), Омара Хайяма (XI в.), Низами (XII в.), Саади (XIII в.). Некоторые научные сведения золотоордынского периода можно найти в поэтических произведениях того времени. Например, гелиоцентрическое представление — еще до Коперника, Бруно и Улугбека. О развитии астрономии и геодезии свидетельствуют обломки астролябии и квадрантов, обнаруженные при археологических раскопках. Арабский ученый ан-Нувейри (XIII в.) писал о распространении в Золотой Орде мечетей и медресе, мусульманских наук и просвещения.

В золотоордынскую эпоху (XIII-XV вв.) булгарский улус сохранил экономическую и политическую автономию. Поэтому развитие математики и математического образования претерпело незначительные изменения, хотя уровень математических знаний вырос. Подтверждением высокого уровня геометрических представлений булгар служат сохранившиеся и отреставрированные памятники каменного зодчества города Булгар: Соборная мечеть, Черная палата, мавзолей и др. Для их конструкций характерна кубическая форма, перекрытая внутри полусферическим или конусообразным сводом, и завершающаяся снаружи восьмигранным шатром или конусом. Такие строительные конструкции подтверждают владение булгарами стереометрическими знаниями и приемами стереографической проекции. Вспомним также об участии булгарских мастеров в строительстве каменных зданий на Руси, в том числе некоторых соборов. В строительстве подобных зданий также применялись сложные математические расчеты.

Стоит здесь упомянуть также о *«вавилонах»*. Это чертежи на пластинках, состоящие из трех концентрических подобных прямоугольников. Такие чертежи были найдены археологами во время исследований булгарских, древнерусских и болгарских городов. Линии и части линий этих прямоугольников состояли друг с другом в различных соотношениях, на основе которых можно было производить некоторые математические расчеты и геометрические построения. Например, стороны прямоугольников имели отношение $1:\sqrt{2}$. Проведенные на чертеже дополнительные линии позволяли достаточно точно строить квадратуру круга, удваивать квадраты, строить простые иррациональные выражения. Булгарские зодчие, используя модели «вавилонов», достигали гармонии, пропорциональности сооружений. Среди линий «вавилонов» можно найти много со-отношений, по величине близких к «золотому сечению». Таким образом, гармоничное деление, позже названное Леонардо да Винчи «золотым сечением», удачно применялось в строительстве еще булгарами. Например, части комплекса мечети в Биляре образуют «золотое сечение».

В конце XIV века Золотая Орда была разгромлена Тамерланом. Но она продолжала существовать, хотя и ослабла. В начале XV века она распалась на несколько татарских государств: Казанское, Астраханское, Крымское, Касимовское, Сибирское ханства и Ногайская орда. Битва на Куликовом поле в 1380 году стала началом конца татаро-монгольского ига. Окончательно оно было свергнуто к 1480 году.

Казанское ханство

В первый период существования Казанского ханства, т.е. во второй половине XV века, в качестве названия его народа наряду с этнонимом «татары» параллельно применялось слово «булгары», хотя и чисто традиционно. В этот период оформлялся этнический тип казанских татар. Они продолжили культурные и духовные традиции предыдущих поколений, подняли их на более высокую ступень. Столицей ханства, центром культурной жизни стал город Казань. Она вызывала восхищение современников своей архитектурой, красотой крепостных стен, белокаменных палат, дворцов, мечетей. Хозяйственная деятельность — традиционные для этих мест земледелие и скотоводство, все виды ремесел. Широкое развитие получили строительство и архитектура. Выдающимся памятником культового зодчества того времени, сохранившимся на территории Казанского Кремля, является знаменитая башня Сююмбике. Основой грамоты, как и в Волжской Булгарии, являлась письменность на основе арабской графики. Обучались в мектебе и медресе. В книге татарского историка Х. Муслими «История Булгар» (1584) приводится длинный перечень селений Казанского ханства, отмеченных мектебе и медресе, известными учителями-наставниками, проповедниками. В самой Казани, например, при главной мечети имелось крупное медресе высшего типа, руководимое видным педагогом, сеидом Кул Шарифом.

В этот период развития математического образования появляются учебные пособия местных авторов. **Мухутдин Мухаммед** (I пол. XVI в.) пишет замечательную книгу «Сборник правил» (Мэжмэгъэл кавагыйд, 1542). Она содержит свод почти всех арифметических правил. Книга написана на древнетюркском языке, по ней преподавали в медресе. Почти через сто лет был составлен трактат «Комментарий на «Фараиз ас-Саджаванди» («Шэрхи Фэраиз эс-Сижэвэнди») **Юнысом Оруви аль-Казани** (1636-конец XVII в.). Как известно, фараиз (наука о наследовании) преподавался в медресе.

Исследователи, изучавшие историю татарского народа XV-XVI вв., констатируют скудость документальных и литературных источников этого периода, дошедших до наших дней. В работах В.М. Беркутова, Г.М. Давлетшина, З.Т. Шарафутдинова, Я.И. Ханбикова и др. перечислены имена тюркских, булгарских, татарских ученых и просвещенных людей. Среди них нет математиков, получивших свои оригинальные математические результаты на уровне изучаемых в истории математики ученых исламских стран, таких, как аль-Хорезми, Омар Хайям. Их труды можно оценить как комментаторские, просветительские. Хотя их общими усилиями уровень математических знаний народа повышался.

Отношения между Москвой и Казанью были натянутыми, часто решались с помощью военных походов. В итоге они привели к падению Казанского ханства, потере государственности татарского народа. Казанское ханство просуществовало до завоевания его Иваном Грозным (1552). Дальнейшее развитие национальной культуры проходило в составе русского государства.

Мектебе и медресе

В распространении математических знаний и математического образования в крае основополагающее значение имело создание и развитие со времен возникновения Булгарского государства мусульманских школ — мектебе и медресе. С ними связано распространение просвещения.

Мектебе — мусульманская начальная школа по обучению грамоте. Слово «мектебе» происходит от арабского «мактаб» («школа»), «катаба» («писать»); буквально «мактаб» — «место, где пишут». В мектебе был только один учитель, который обучал всем предметам. Главный предмет мектебе составлял «Дин дэреслэре» («Уроки религии»). В обучении преобладал узкий практицизм. Роль учителя в мектебе обычно выполнял имам (настоятель мечети) или приходской мулла. Большая часть детей, окончивших курс обучения в мектебе, этим ограничивалась и приступала к работе в хозяйстве. Часть детей, более состоятельных родителей, желая продолжить обучение, поступала в медресе.

Медресе — это мусульманское училище высшего типа. Слово «медресе», по всей видимости, образовано от арабского слова «мадарасат», означающего буквально «место учения, изучения», т.е. место, где читается Коран. Слово «дарас» буквально означает «урок, лекция». Учащихся медресе называли «шакирдами», а человека, преподававшего в медресе — «мугаллимом» (арабское «муаллим» — «учитель»). В медресе учащихся в соответствии с прохождением курса подразделяли на четыре разряда — иптидаия, рущдия, игъдадия и галия. Из разряда в разряд шакирды переводились после усвоения установленного объема учебного материала. Медресе выпускало людей разных профессий в зависимости от прохождения цикла знаний. Те, кто проходил полный курс обучения, могли стать служителями культа, муфтиями (государственными чиновниками), казиями (судьями), тарикачи (лицами, ведавшими разделом наследства при судье), писцами, контролерами. Окончившие разряд «игъдадия» становились, большей частью, настоятелями мечетей и учителями сельских мектебе и медресе. Таким образом, реализовывалась профильная и многоступенчатая система обучения.

Все содержание наук, изучаемых в мектебе и медресе, можно сгруппировать в пять разделов: введение в арабскую грамматику и теорию словесности; постулаты магометанского вероучения и религии; элементы мусульманского законодательства и права; сведения о мусульманских обрядах и нравственности; основы точных наук.

На рубеже XVIII-XIX столетий в татарской школе сложилась довольно четкая система математического образования.

Эта система характеризовалась прохождением в мектебе пропедевтической арифметики на эмпирической основе без теории предмета. Основные понятия алгебры и геометрии, такие как, например, законы действий, уравнение, форма и размеры фигур, площади, тоже закладывались в курсе арифметики. В медресе более позднего времени изучались арифметика, алгебра, геометрия с тригонометрией как логически связанные по содержанию разделы элементарной математики, а также физика и астрономия. Наиболее известные медресе — Иж-Бубинское, Апанаевское, Ахуновское, Мухаммэдия, Касимия, Хусаиния.

Российская империя

Падение Казанского ханства и последовавшее за ним завоевание Московской Русью тюркских пространств между Волгой и Уралом стало поворотным пунктом в судьбах мусульманских народов этого региона. Ликвидация государственности, ее общественно-политических институтов сопровождалась тотальным наступлением на духовные основы жизни народа, в первую очередь на ислам. Были разорены мечети и медресе. Медресе и мектебе сохранились лишь в селениях, расположенных далеко от городов. После присоединения Казани все внимание царского правительства было обращено на то, чтобы как можно скорее приобщить жителей этого края к русской культуре. Прежде всего считалось необходимым распространить среди туземного населения русский язык и православие. Поэтому уже с 1557 г. начинается усиленная деятельность по созданию и развитию религиозных школ, которая была поручена православному духовенству. В эти школы привлекались дети татар и других национальностей, проживающих в Казанском крае.

К началу Нового времени Русь значительно отстала от Западной Европы в науке вообще и в математике в частности. Поэтому оказать существенное влияние на развитие математики других народов в XVI-XVII веках она не могла. Например, даже индийско-арабские цифры стали вводиться только в конце XVI в. и переход на них затянулся до начала XVIII в. Даже первый русский учебник арифметики Л.Ф. Магницкого (1703) написан с употреблением буквенной и индийской нумерации.

В начале XVIII века в области математического образования Россия отставала от развитых стран Европы. Однако уже к концу XIX в. образование в нашей стране отвечало европейским стандартам.

Как известно, XVIII век начинается для России, ее народов с бурной реформаторской деятельности Петра I. Она коснулась и нерусских народов. В 1758 г. в Казани была открыта гимназия, руководимая Московским университетом, первая в провинции. Это послужило культурному развитию местного края и оживлению научной мысли. Петровские реформы повлекли за собой новые веяния и в татарской культуре. Среди мусульманско-образованной прослойки тоже усиливается интерес к светским наукам и просвещению. Возникает просветительское движение. Еще при Петре I было начато печатание в Петербурге официальных документов правительства на татарском языке арабским шрифтом. Указом Екатерины II в 1769 г. было разрешено преподавание татарского языка в Казанской гимназии. Первая татарская книга «Азбука татарского языка» Сагита Хальфина, преподавателя Казанской гимназии, была напечатана в типографии Московского университета в 1774 г.

Царское правительство поощряло политику обрусения и христианизации татар. В XIX в. было принудительно крещено около 200 тысяч татар. Казань была одним из центров русского православного миссионерства. Миссионеры выработали последовательную систему воспитания и обучения вновь крещеных народов в духе христианской веры. Среди педагогов-миссионеров ведущее место принадлежит Н.И. Ильминскому (1822-1891).

Большую роль в развитии культуры Восточной России сыграл Казанский университет, открытый в 1804 г. В 1804-1860 гг. при университете функционировал Педагогический институт, в который принимались выпускники университета для подготовки их к учительской работе в гимназиях и училищах. Процессы, происходящие в обществе, оказали влияние и на национальную культуру. Возникают новые типы учебных заведений различной социальной ориентации: Центральная крещено-татарская школа (1863), Казанская русско-инородческая учительская семинария (1872), Казанская татарская учительская школа (1876) и др. Был создан татарский алфавит на основе русской графики (Н.И. Ильминский, 1870 г.). Ученые-просветители и учителя-практики создают учебники и задачники, вырабатывают математические термины на родном языке.

В XIX веке, в условиях формирования нации, татарского литературного языка, а также оживления предпринимательской деятельности, наступает новый этап в развитии математического образования. Сохраняется преемственность в содержании математики как единого учебного предмета. Усиливается связь учебного материала по математике с другими дисциплинами: географией (календарь, съемка плана, измерение на местности), черчением. Происходит разделение элементарной математики на учебные предметы (арифметику, алгебру, геометрию с тригонометрией). Зарождаются прогрессивные идеи о необходимости сближения учебного предмета математики с математической наукой, о связи изучения математики с жизнью. Это был период формирования татарской национальной школы, борьбы за ее демократизацию (светское образование, обучение на родном языке).

Выдающийся просветитель татарского народа **Каюм Насыри** (Габделкаюм Габделнасырович Насыров, 1825-1902) организовал первую русско-татарскую школу в Казани (1871) по обучению детей из татар русскому языку и математике. Он написал первые учебники по математике на татарском языке: «Арифметика» («Хисаплык», 1873), «Наука геометрии» («Хэндэсе»,1895). В них учитывался опыт русской школы и идей прогрессивной педагогики. К. Насыри оставил работы также по филологии, лингвистике, истории, этнографии, педагогике, методике, астрономии, географии, физиологии, земледелию. До него никакой научной и научно-популярной литературы по светским наукам у татар не было. Перу Насыри принадлежит более 40 изданных трудов. Немало занимательных, научно-популярных книг он перевел с русского и восточных языков на татарский. Особой популярностью пользовалась, да и теперь пользуется фантастическая повесть из жизни известного ученого, философа и поэта Авиценны («Абугалисина», 1881). Более 35 лет своей жизни Насыри отдал педагогической работе, начав с простого учителя и став крупнейшим ученым-педагогом. Он впервые внедрил в татарской школе классно-урочную систему обучения.

При создании учебника по арифметике К. Насыри внимательно изучил и использовал народные математические знания: меры веса, длины, времени, сравнивая их с общеупотребительными мерами. В содержание учебника он включил и занимательные задачи, рассчитанные на образное мышление детей. В нем дано определение предмета арифметики, указано на ее практическое применение, даны теоретические положения и методические советы. Он впервые ввел индийские цифры, познакомил с русской системой чисел, умело сопоставил арабскую и русскую терминологию. На созданную К. Насыри терминологию опиралась вся научная, техническая, научно-популярная, художественная литература татарского народа.

В начале XX века в татарских школах, кроме учебников К. Насыри, использовали учебники математики русских школ, переведенные на татарский язык: «Краткая геометрия» А.Ю. Давидова («Мухтасар хэндэсе»), «Счет в действиях» И.И. Идрисова («Хисабы гамали»), «Задачник по арифметике» К. Бикулова («Масаиль хисаб»), «Полная арифметика» Мамсиева («Бадрель-хисаб») и др. Учебник «Логия яхуд мантыйк фэне» Габдуллы Бобьинского служил элементарным пособием по логике.

В конце XIX — в начале XX в. дело татарского просветительства продолжили революционно-демократические педагоги. Они стояли за сближение татарской культуры с западноевропейской и русской. Педагоги-демократы выступали против однобокого гуманитарного направления татарских школ, за заложение основ образования будущих инженеров, врачей и других профессий (например, Фатих Амирхан (1886-1926), Габдулла Тукай (1886-1913), Маджид Гафури (1880-1934) и др.). Их деятельность встречала естественное сопротивление господствующих классов татар и идеологов их образования: кадимистов, отстаивающих интересы феодализма, и джадидистов, представлявших интересы нового буржуазного развития.

Казань была крупным центром обширного учебного округа и многих учебных заведений. Здесь работали видные зарубежные и русские ученые и учителя-практики. Их вклад в развитие науки и образования трудно переоценить. Не является исключением и развитие математики в крае. Поэтому история создания Казанской математической школы требует отдельного рассмотрения.

Казанская математическая школа

В Казанскую гимназию, открывшуюся в 1758 г., были направлены семеро лучших выпускников Московского университета, в их числе четыре учителя математических дисциплин — Григорий Иванович Карташевский, Иван Ипатьевич Запольский, Степан Сергеевич Петровский и Николай Мисаилович Ибрагимов. Все они были не только высокообразованными учителями-математиками, но и хорошо подготовленными методистами. И все они сыграли положительную роль в подготовке будущих студентов Казанского университета.

В ноябре 1804 г. Александр I подписал Утвердительную грамоту и Устав Императорского Казанского университета. Университет учреждался в составе четырех факультетов или отделений (нравственных и политических наук; физических и математических наук; врачебных или медицинских наук; словесных наук). В преподавательском составе было всего два профессора и четыре адъюнкта, двое из которых являлись математиками. Это были Г.И. Карташевский, читавший курсы арифметики, геометрии и тригонометрии, и И.И. Запольский, преподававший опытную физику. В дальнейшем, в 1808-1810 гг., подготовку математиков и физиков возглавили известные европейские ученые, немецкие профессора Мартин Христиан Бартельс, Каспар Фридрих Реннер, Иосиф Антонович Литтров, Франц Ксаверий Броннер.

Отечественные математики вступили на путь самостоятельного математического творчества в двадцатые годы XIX столетия. И в числе первых выдающихся русских математиков мы называем **Николая Ивановича Лобачевского** (1792-1956), вся жизнь которого связана с Казанью. Он был не только гениальным математиком, но и видным русским педагогом-новатором, замечательным преподавателем, воспитавшим плеяду ученых и учителей края. С 1802 г. он учился в Казанской гимназии, в 1807-1811 гг. в университете, а затем преподавал там. В частности, отметим особую роль Н.М. Ибрагимова и Г.И. Карташевского как учителей Н.И. Лобачевского, когда он учился в гимназии до своего поступления в университет. Они вселили в него уверенность в математических способностях. Профессор чистой математики, выпускник Геттингенского университета, друг и учитель Гаусса, М.Х. Бартельс смог поддержать интерес Лобачевского к математическому творчеству, познакомить его с новейшими достижениями по математике.

Кроме гениальной неевклидовой геометрии, Н.И. Лобачевский оставил многочисленные исследования по алгебре, математическому анализу, теории вероятностей, механике, физике, астрономии. Вряд ли в истории не только Казанского, но и других российских университетов, найдется человек, который так органично сочетал гениальность ученого, талант педагога и умение руководителя.

Работа Лобачевского в качестве ректора университета (1827-1846) и помощника попечителя Казанского учебного округа (1846-1855) позволяла непосредственно руководить развитием математического образования в крае. Б.В. Болгарский считает Н.И. Лобачевского основоположником методической школы в Казани. К идеям, положенным в основу «воображаемой» геометрии, он пришел от своих размышлений методического характера. Известно также, что он впервые проводил параллельное изложение вопросов планиметрии и стереометрии (т.е. на основе принципов фузионизма). Н.И. Лобачевский разработал методику преподавания по каждому предмету физико-математического цикла. Он рекомендовал исторический подход в преподавании любого учебного предмета, особенно в старших классах гимназии, считая, что принцип историзма показывает науку не только в ее прошлом и настоящем, но и в ее перспективе.

В Казанском учебном округе методическая и учебная работа была поставлена лучше, чем в других округах России. В гимназиях округа преобладала математическая направленность преподавания. Пять ректоров-математиков в течение пятидесяти лет возглавляли университет. В Казанской гимназии и в университете были установлены вакансии для татар и башкир. Эти меры сыграли объективно положительную роль в подготовке местной интеллигенции, для просвещения татар.

Все первые питомцы Казанской математической школы были учениками М.Х. Бартельса. Вторым представителем университетской математической школы, после Н.И. Лобачевского, М.Х. Бартельс назвал **Ивана Михайловича Симонова**, астронома, ректора университета. Около пятидесяти лет два ученых и педагога рука об руку трудились во имя процветания Казанского университета. Учениками Лобачевского были Н.Д. Брашман, Н.Н. Зинин (будущий академик, основатель Казанской школы химиков), А.Ф. Попов и др. Следующий этап деятельности Казанской математической школы характеризовался интенсивным развитием идей Лобачевского практически по всем направлениям. Вопросы математического анализа и алгебры во второй половине XIX века успешно разрабатывали А.Ф. Попов (1815-1878), В.Г. Имшенецкий (1832-1892), А.В. Васильев (1853-1929), Д.М. Синцов (1867-1946) и др. В 1890 г. было основано Казанское физико-математическое общество, первым председателем которого был А.В. Васильев. Инициаторами возвращения к геометрическим идеям Н.И. Лобачевского в Казанском университете выступили его питомцы, профессора чистой математики Ф.М. Суворов (1845-1911) — в области теории инвариантов римановых пространств и А.П. Котельников (1865-1944) — по основам механики неевклидовых пространств. Тем самым они проложили путь к открытию в начале XX столетия профессором П.А. Широковым направления геометрических исследований, высокий научный уровень которых способствовал восстановлению славы Казанского университета в области неевклидовой геометрии.

Развитие математики Татарстана в XX столетии

Создание в Казани первоклассного математического центра является, прежде всего, заслугой **Николая Григорьевича**

Чеботарева (1894-1947). С его приездом в Казань в 1927 г. началось систематическое развитие алгебры. Этот год можно считать годом рождения Казанской алгебраической школы. Профессор Н.Г. Чеботарев, избранный в 1929 г. членом-корреспондентом АН СССР, занимался проблемами высшей алгебры, теорией групп, теорией чисел, геометрией. Его монография «Основы теории Галуа» (1934) вошла в хронику важнейших достижений всех времен и народов в области математики. Заслуженный деятель науки РСФСР (1943). Был удостоен Государственной премии СССР за фундаментальные результаты, полученные им в теории Галуа (1947). Президиум АН СССР учредил премию имени Н.Г. Чеботарева (1947). Учениками Н.Г. Чеботарева являются известные советские алгебраисты И.Д. Адо, В.В. Морозов, Н.Н. Мейман и др.

С начала XX века начинается научная деятельность **Николая Николаевича Парфентьева** (1877-1943). С 1930 г. до конца жизни он возглавлял кафедру теоретической механики. Парфентьев занимался разработкой теории функций, теоретической механики, математической физики, историей и методологией математики. Многообразие его научных интересов способствовало подготовке из учеников разнообразных по профилю ученых, заложивших в первые десятилетия после революции начала оригинальных научных направлений и обеспечивших дальнейшее успешное развитие математики и механики в Казанском университете. Здесь следует назвать П.А. Широкова, Б.М. Гагаева, В.А. Яблокова, К.П. Персидского, М.И. Альмухамедова, Г.С. Салехова, К.З. Галимова и др.

Профессор **Петр Алексеевич Широков** (1895-1944) разрабатывал проблемы неевклидовой геометрии и механики, а также тензорного анализа. Он воспитал многих геометров — докторов наук И.П. Егорова, Б.Л. Лаптева и др. Благодаря трудам П.А. Широкова, а затем А.П. Нордена и их учеников, сложилась Казанская геометрическая школа, продолжившая в новых формах и на современном уровне дело Н.И. Лобачевского.

Николай Гурьевич Четаев (1902-1959) является основателем Казанской школы теории устойчивости. С 1943 г. — член-корреспондент АН СССР, лауреат Ленинской премии

(1960). Его имя внесено в число 1500 выдающихся математиков всех времен и народов.

Профессор **Борис Михайлович Гагаев** (1897-1975) занимался изучением проблем теории функций действительного переменного, аналитической теории дифференциальных уравнений и математической физики. Был председателем Казанского физико-математического общества (1947-1949), деканом физико-математического факультета (1945-1947). Ему принадлежит ряд историко-математических очерков. Заведовал кафедрой математического анализа, воспитал более 80 кандидатов и 15 докторов наук. Заслуженный деятель науки ТАССР (1954) и РСФСР (1966).

Выдающийся математик, профессор **Александр Петрович Норден** (1904-1993) окончил Московский университет, работал в КГУ с 1945 г., заведовал кафедрой геометрии. Основные работы относятся к дифференциальной геометрии. Много внимания уделял вопросам преподавания геометрии в вузе, создал курсы по основаниям геометрии, дифференциальной геометрии. Интерес для учителей представляет его книга «Элементарное вступление к геометрии Лобачевского» (1953). Норден сыграл ключевую роль в организации журнала «Известия вузов. Математика», более 20 лет возглавлял его работу. Являлся научным руководителем около 40 докторов и кандидатов наук. Под его редакцией и с его комментариями были изданы труды Н.И. Лобачевского. Заслуженный деятель науки ТАССР (1954) и РСФСР (1964), лауреат медали им. Н.И. Лобачевского.

Крупный ученый-геометр **Борис Лукич Лаптев** (1905-1989) внес значительный вклад в теорию обобщенных пространств. Он является также известным историком математики, исследователем творчества Лобачевского. Лаптев стал организатором и руководителем ежегодных «Лобачевских чтений». Заведовал кафедрой геометрии, был деканом физико-математического факультета КГУ, директором НИИ математики и механики КГУ. Заслуженный деятель науки ТАССР (1965) и РСФСР (1975).

В 1935 г. был открыт НИИ математики и механики при КГУ. Первым его директором был Н.Г. Чеботарев, после смерти институту было присвоено его имя, а далее возглавил

НИИ его ученик В.В. Морозов. Ученики Чеботарева, работая в разных областях алгебры, расширили научные достижения Казанской школы алгебраистов. **Владимир Владимирович Морозов** (1910-1975) успешно решил проблему перечисления всех примитивных представлений простых групп Ли (1938). А.В. Дородновым была полностью решена знаменитая задача Гиппократа о квадрируемых луночках.

Михаил Тихонович Нужин (1914-1983) — доктор физико-математических наук, профессор, 25 лет был ректором КГУ, Заслуженный деятель науки РСФСР. Занимался исследованиями в области теории краевых задач, теории функций комплексного переменного, дифференциальных уравнений, механики сплошной среды, теории фильтрации.

В 1945 г. был основан Казанский филиал АН СССР. Казанский университет стремился взять на себя объединение научных сил республики вокруг решения важных народнохозяйственных проблем. Существование сильной Казанской математической школы определяло всегда состояние науки и образования в крае. Все видные представители татарской интеллигенции, отдавшие свой ум и талант делу развития математики, являются, в основном, воспитанниками этой школы. Богатейшее наследие, оставленное дореволюционной школой в области математического образования, явилось той благодатной почвой, благодаря которой стали возможны его достижения в советское время. Отметим далее некоторых из татарских ученых Казанской математической школы и педагогов-математиков.

Юсупов Нури Валеевич (1888-1937). В октябре 1920 г. он организовал татарскую учительскую семинарию, преобразованную потом в педагогический техникум. В 20-х годах издавал свои учебники математики для школ на татарском языке. В 30-х годах работал в Казанском педагогическом институте доцентом, профессором, деканом физико-математического факультета. Переводил русские стабильные учебники по математике на татарский язык (например, учебники Н. Рыбкина). Под его руководством был составлен научно-терминологический словарь по элементарной математике. Н.В. Юсупов вел также большие научные изыскания в области истории развития математики Востока. Весьма ценным научным трудом явилась его книга «Очерки по истории развития арифметики на Ближнем Востоке» (Казань, 1932). Это историко-математическое исследование, освещающее развитие арифметических и алгебраических знаний у народов Ближнего Востока и знакомящее с методами решения задач восточных математиков.

Максудов Гаяс Гисамович (1891-1942). Окончил Османский университет, физико-математическое отделение (1919). Организатор и редактор журнала «Магариф» («Образование», 1921-1925 гг.). Автор учебников «Кыскача жэбер дэреслэре» («Краткий курс алгебры», 1923), «Жэбер дэреслэре» («Уроки алгебры», 1929), «Туры сызыклы тригонометрия» («Прямолинейная тригонометрия», 1929). Один из инициаторов введения новой орфографии — «Яналифа» — взамен бытовавшей арабской графики. Обосновывал необходимость принятия латинского шрифта для татарской письменности и научной терминологии на татарском языке. Был первым из татарских математиков, занимавшимся математическим анализом под руководством профессора Б.М. Гагаева. Работал на физико-математическом факультете КГУ (1933-1936).

Курбангалиев Мухутдин Хафизитдинович (1873-1941). Автор учебников по математике на татарском языке для начальных школ (1910-1913). В 1923-1924 гг. издал книги «Риязыят дэреслеклэре» («Учебники математики»). Профессор (1930), Заслуженный деятель науки ТАССР (1940).

Альмухамедов Мазит Ифатович (1904-1971). Автор учебников по математике на татарском языке для средних и высших учебных заведений: «Черчение» (1931), «Начертательная геометрия» (1932), «Математика для взрослых» (1932), «Книга по физике для практических занятий» (1931), «Книга для практических занятий по математике» (1932). Многие годы работал в КГПИ, был заведующим кафедрой математического анализа, деканом физико-математического факультета. Доктор физико-математических наук (1950), профессор, Заслуженный деятель науки ТАССР.

Более двухсот лет существует Казанский университет и одновременно его математическая школа — один из крупнейших международных научных центров. За этот период ученые университета внесли огромный вклад как в математическую науку, так и в дело развития математического образования. Известные представители Казанской математической школы принесли ей заслуженное признание как в России, так и за рубежом.

Вопросы и задания

1. Назовите характерные признаки культурно-исторических эпох в истории татарского народа.
2. Назовите периоды развития математики и математического образования в тюрко-мусульманскую эпоху.
3. Охарактеризуйте уровень математической культуры татарского народа в период существования самостоятельной государственности.
4. Охарактеризуйте систему образования в мектебе и медресе.
5. Опишите систему образования в Казанском крае в составе Российской империи.
6. Каков вклад татарских просветителей в систему математического образования?
7. Назовите основные направления научных исследований и представителей Казанской математической школы.
8. Назовите татарских ученых и педагогов-математиков, и расскажите об их вкладе в дело математического образования.

Литература

Основная литература

1. Рыбников, К.А. История математики / К.А. Рыбников. — М.: Изд-во Московского ун-та, 1974. — 456 с.
2. Стройк, Д.Я. Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк. — М.: Наука, 1978. — 336 с.
3. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: в 3 т. — Т. 1. С древнейших времен до начала Нового времени / И.Г. Башмакова и др.; под ред. А.П. Юшкевича. — М: Наука, 1970. — 352 с.
4. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: в 3 т. — Т. 2. Математика XVII столетия / И.Г. Башмакова и др.; под ред. А.П. Юшкевича. — М: Наука, 1970. — 300 с.
5. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: в 3 т. — Т. 3. Математика XVIII столетия / И.Г. Башмакова и др.; под ред. А.П. Юшкевича. — М: Наука, 1972. — 300 с.
6. Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей / И.Г. Башмакова и др.; под ред. А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича. — М.: Наука, 1978. — 256 с.
7. Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций / Б.Л. Лаптев и др.; под ред. А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича. — М.: Наука, 1981. — 270 с.
8. Юшкевич, А.П. История математики в России до 1917 года / А.П. Юшкевич. — М.: Наука, 1968. — 592 с.
9. Глейзер, Г.И. История математики в школе: IV-VI классы / Г.И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1981. — 240 с.
10. Глейзер, Г.И. История математики в школе: VII-VIII классы / Г.И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1982. — 240 с.

11. Глейзер, Г.И. История математики в школе: IX-X классы / Г.И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1983. — 352 с.
12. Дробышев, Ю.А. Историко-математический аспект в методической подготовке учителя / Ю.А. Дробышев. — Калуга: Изд-во КГПУ, 2004. — 156 с.

Дополнительная литература

1. Зверкина, Г.А. История математики: Учебное пособие / Г.А. Зверкина. — М.: МИИТ, 2005. — 108 с.
2. Майер, Р.А. История математики: Курс лекций. Часть 1 / Р.А. Майер. — Красноярск: РИО КГПУ, 2001. — 191 с.
3. Марков, С.Н. Курс истории математики: Учебное пособие / С.Н. Марков. — Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1995. — 248 с.
4. Одинец, В.П. Зарисовки по истории математики: Учебное пособие / В.П. Одинец. — Сыктывкар: Изд-во КГПИ, 2005. — 232 с.
5. Хрестоматия по истории математики: Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия / И.Г. Башмакова и др.; под ред. А.П. Юшкевича. — М.: Просвещение, 1976. — 320 с.
6. Хрестоматия по истории математики: Математический анализ. Теория вероятностей. / И.Г. Башмакова и др.; под ред. А.П. Юшкевича. — М.: Просвещение, 1977. — 224 с.
7. Математика: Хрестоматия по истории, методологии, дидактике / Сост. Г.Д. Глейзер. — М.: Изд-во УРАО, 2001. — 384 с.
8. Болгарский, Б.В. Очерки по истории математики / Б.В. Болгарский. — Минск: Вышейшая школа, 1979. — 368 с.
9. Депман, И.Я. История арифметики / И.Я. Депман. — М.: КомКнига, 2006. — 416 с.
10. Депман, И.Я. Рассказы о старой и новой алгебре / И.Я. Депман. — М.: КомКнига, 2006. — 144 с.
11. Шереметевский, В.П. Очерки по истории математики / В.П. Шереметевский. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 184 с.

12. Беллюстин, В.К. Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики / В.К. Беллюстин. — М.: Изд-во ЛКИ, 2007. — 208 с.
13. Бурбаки, Н. Очерки по истории математики / Н. Бурбаки. — М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1963. — 292 с.
14. Гнеденко, Б.В. Очерки по истории математики в России / Б.В. Гнеденко. — М.: КомКнига, 2005. — 296 с.
15. Полякова, Т.С. История математического образования в России / Т.С. Полякова. — М.: Изд-во Московского ун-та, 2002. — 624 с.
16. Шакирова, Л.Р. Казанская математическая школа, 1804-1954 / Л.Р. Шакирова. — Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2002. — 284 с.
17. Беркутов, В.М. Развитие математического образования булгаро-татар / В.М. Беркутов. — Казань: Изд-во «Дом Печати», 1997. — 176 с.
18. Баврин, И.И. Занимательные задачи по математике / И.И. Баврин, Е.А. Фрибус. — М.: ВЛАДОС, 1999. — 208 с.
19. Малых, А.Е. История математики в задачах. Часть I. Математика в древнем Египте и Вавилоне / А.Е. Малых, М.С. Ананьева. — Пермь: Изд-во ПГПУ, 2006. — 53 с.
20. Дорофеева, А.В. Страницы истории на уроках математики / А.В. Дорофеева. — Львов: Журнал «Квантор», 1991. — 97 с.
21. Малыгин, К.А. Элементы историзма в преподавании математики в средней школе / К.А. Малыгин. — М.: Учпедгиз, 1958. — 240 с.
22. Виленкин, Н.Я. За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра. Геометрия / Н.Я. Виленкин, Л.П. Шибасов, З.Ф. Шибасова. — М.: Просвещение, 1996. — 320 с.
23. Земляков, А.Н. Введение в алгебру и анализ: культурно-исторический дискурс. Элективный курс: учебное пособие / А.Н. Земляков. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007. — 320 с.

Справочная литература

1. Бородин, А.И. Биографический словарь деятелей в области математики / А.И. Бородин, А.С. Бугай; под ред. И.И. Гихмана. — Киев: Радянська школа, 1979. — 607 с.
2. Богомолов, А.Н. Математики. Механики: Биографический справочник / А.Н. Богомолов. — Киев: Наукова думка, 1983. — 640 с.
3. Гушель, Р.З. Из истории математики и математического образования: Путеводитель по литературе / Р.З. Гушель. — Ярославль: Изд-во ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 1999. — 287 с.
4. Богомолов, Н.В. Очерки о российских педагогах-математиках / Н.В. Богомолов. — М.: Высшая школа, 2006. — 311 с.

ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ

Академия Платона — учебное заведение, организованное Платоном (429-348 гг. до н.э.) в Афинах. Математика рассматривалась как условие для занятия философией. Ученики изучали «квадривиум», состоявший из арифметики, геометрии, астрономии, музыки, чтобы понимать законы Вселенной. Впервые читались систематические лекции. Афинская академия была закрыта как языческая школа в 529 г.

Аксиомы ($\alpha\xi\iota\omega\mu\alpha$ по-гречески — ценность, основное положение**)** — первоначальные истины, из которых с помощью логических правил выводимо неограниченное число верных предложений. Возникли в VI-V вв. до н.э. в школе Пифагора.

Аликвотные дроби — обыкновенные дроби, имеющие числителем единицу.

Аттическая (геродианова) нумерация — первоначально древние греки пользовались этой нумерацией, которую называют также по имени описавшего ее историка Геродиана (II в. н.э.). Она была близка к более поздней известной нам римской нумерации.

Ахиллес и черепаха — парадокс Зенона Элейского (V в. до н.э.): «Быстроногий Ахиллес никогда не догонит черепаху, если в начале движения черепаха находилась на некотором расстоянии впереди него».

Бригсовы логарифмы — логарифмы по основанию 10. Названы по имени Генри Бригса (1561-1631), профессора из Лондона, который опубликовал «Логарифмическую арифметику» (1624), содержавшую десятичные логарифмы.

«Вавилоны» — чертежи на пластинках, состоящие из трех концентрических подобных прямоугольников. Были найдены археологами во время раскопок булгарских, древнерусских и болгарских городов. Линии и части линий этих прямоугольников состояли друг с другом в различных соотношениях, на основе которых можно было производить некоторые математические расчеты и геометрические построения. Булгарские и русские зодчие, используя модели «вавилонов», достигали гармонии, пропорциональности сооружений.

Гармонический ряд — числовой ряд 1+1/2+1/3+..., члены которого являются числами, обратными числам натурального ряда. Каждый член этого ряда, начиная со второго, есть среднее гармоническое двух соседних членов — предыдущего и последующего. То, что этот ряд расходится, открыл Николь Орем (1323-1382), французский математик.

Геометрическая алгебра — изложение математики на геометрической основе. Такое развитие было совершено в древнегреческой математике в V в. до н.э. из-за кризиса, связанного с проблемой несоизмеримости.

Гномон — древнейший астрономический инструмент, состоящий из вертикального шеста на горизонтальной площадке. По длине и направлению тени шеста можно определить высоту и азимут Солнца. Применялся и в виде солнечных часов.

Диофантовы уравнения — Диофанту (III в. н.э.), последнему из великих математиков античности, одному из основоположников алгебры, принадлежит постановка и решение задач, сводимых к неопределенным уравнениям и их системам, решаемым в рациональных положительных числах. Такие уравнения теперь называются диофантовыми, но решаются они в целых числах.

Дихотомия — парадокс Зенона: «Движение невозможно».

Дружественные числа — пара чисел, каждое из которых равно сумме собственных делителей другого. Открыты в пифагорейской школе.

Египетский треугольник — прямоугольный треугольник с отношением сторон 3 : 4 : 5. Встречается в египетских папирусах.

Зарождение математики — период развития математики от возникновения человечества до VI-V веков до н.э. Происходит накопление фактического материала математики в рамках общей неразделенной науки. Включает в себя математику Древнего Египта, Древнего Вавилона, Древней Индии и Китая.

Интуиционизм (интуиционистское направление) — одно из философских направлений в обосновании математики, возникшее в связи с кризисом теории множеств в начале XX в. Интуиционисты считают математику «деятельностью» отдельного человека, опирающегося на интуицию. Основателем является голландский математик Брауэр.

Инфинитезимальные методы — методы бесконечно малых. Впервые их начал применять Архимед для вычисления площадей и объемов. Создавались усилиями многих математиков XVI-XVII вв.

Ионийская нумерация — буквенная нумерация греков, вытеснившая аттическую нумерацию. В этой системе буквы алфавита, взятые по 9, используются для обозначения единиц, десятков, сотен. Каждой букве дается отличительный знак (черта), указывающий, что она используется как число.

Историко-генетический метод — метод обучения, требующий, чтобы обучение следовало путям происхождения знания, его исторического развития, в основных чертах повторяя путь развития самой науки.

Каганат — ханство (по-тюркски, «каган» — «великий хан»).

Картезианство — философское учение Рене Декарта (1596-1650), выдающегося французского философа, математика, физика. В латинизированной форме его называли Картезиус.

Квадратура круга — классическая задача древности: «Построить квадрат, равновеликий данному кругу».

Квадрирование — вычисление ограниченной линией площади.

Конструктивизм (конструктивное направление) — одно из философских направлений в обосновании математики, возникшее в связи с кризисом теории множеств в начале XX в. Является ответвлением интуиционизма. Основано на попытках аксиоматизации теории множеств, исключающих противоречия. Создавалось Цермело и Гильбертом. В конструктивной математике ограничиваются конструктивными объектами, существование которых считается доказанным лишь тогда, когда указывается способ его потенциально осуществимого построения.

Кубатура — вычисление объема тела; а также построение куба, равновеликого данному телу.

Ликей Аристотеля — учебное заведение, организованное Аристотелем (384-322 гг. до н.э.) в Ликее, предместье Афин.

Луночки Гиппократа — фигуры, ограниченные двумя дугами окружностей. Гиппократ Хиосский (V в. до н.э.) искал квадрируемые луночки, т.е. луночки, для которых можно построить равновеликие квадраты.

Магический квадрат — квадратная таблица натуральных чисел, имеющая одинаковые суммы чисел по всем строкам, столбцам и двум диагоналям. Самым древним, дошедшим до нас, является китайский магический квадрат Ло-шу (XXII в. до н.э.). Название «магических» такие таблицы получили от арабов, которые использовали их как талисманы.

Мина — весовая и денежная единица в Вавилоне, в 60 раз большая шекеля.

Музыкальная пропорция — среднее арифметическое и среднее гармоническое двух величин образуют с ними геометрическую пропорцию:

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b.$$

Эта пропорция играла важную роль в пифагорейской теории музыки, поэтому ее называют «музыкальной пропорцией».

Мусейон (Дом Муз) — научное и учебное заведение в столице Египта Александрии, основанное Птолемеем I (конец IV в. до н.э.). Для работы в нем были приглашены крупнейшие ученые мира (Евклид, Аполлоний, Герон, Птолемей и др.). Субсидировался государством.

Несоизмеримые величины — однородные величины, не имеющие общей меры. Их отношение является иррациональным числом. Явление несоизмеримости было открыто пифагорейцами.

Основная теорема алгебры — «Всякий многочлен ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет, по крайней мере, один комплексный корень». Тогда число корней многочлена, с учетом их кратностей, равно его степени. Первое строгое доказательство было дано Гауссом (1799).

Пентаграмма — излюбленная геометрическая фигура пифагорейцев, правильная пятиконечная звезда.

Период современной математики — период развития математики, отсчитывающийся с середины XIX века и продолжающийся в наши дни. Появляются многие новые математические теории (неевклидова геометрия, теория групп, строгая теория действительных чисел, основания математики) и расширяются ее приложения.

Период создания математики переменных величин — этот период продолжается от начала XVII века до середины XIX века. Складываются почти все научные дисциплины в качестве классической основы современной математики. Поэтому его называют также «периодом высшей математики». Условно подразделяется на математику XVII и XVIII веков.

Период элементарной математики — период развития математики от VI-V веков до н.э. до конца XVI века н.э. Иногда этот период в литературе называют еще «периодом математики постоянных величин». Эта математика в основном изучается в средней школе. В этот период математика превращается в строгую дедуктивную науку. Включает в себя математику Древней Греции, эллинистических стран, средневекового Китая и Индии, стран ислама, средневековой Европы и Эпохи Возрождения.

Пифагоровы тройки — тройки целых положительных чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2=z^2$. Могут быть истолкованы как длины сторон прямоугольного треугольника. Наименьшими являются пифагоровы числа 3, 4, 5.

Платоновы тела — пять правильных выпуклых многогранников — тетраэдр, гексаэдр, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

Последовательность Фибоначчи — рекуррентная последовательность, каждый член которой, кроме первых двух, равных 1, равен сумме двух предыдущих членов: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Впервые их изучал Леонардо Пизанский (Фибоначчи, 1170-1240).

Принцип историзма — принцип исследования и обучения, основанный на изучении объекта в процессе его закономерного развития, во взаимной связи с окружающей действительностью.

Рулетта — траектория точки, жестко связанной с кривой, которая катится без скольжения по другой неподвижной кривой. Например, если круг катится по прямой, то рулеттой точки его окружности будет циклоида — ее впервые изучал Паскаль.

Синус-версус (обращенный синус) — $\sin versa\alpha = 1 - \cos\alpha$. Линией синуса-версуса, то есть разностью между радиусом и линией косинуса, впервые начали пользоваться индийские математики в Средние века.

Совершенное число — если сумма всех натуральных делителей числа, кроме самого числа, равна данному числу, то оно называется совершенным. Понятие введено пифагорейцами.

Спрямление — вычисление длины линии.

Стрела — парадокс Зенона: «Летящая стрела не движется».

Талант — весовая и денежная мера у вавилонян, равная 60 минам (вес приблизительно 30 кг).

Треугольник Паскаля — Блез Паскаль (1623-1662), французский математик, физик, философ в «Трактате об арифметическом треугольнике» впервые записал таблицу сочетаний (биномиальных коэффициентов) в треугольной форме.

Три классические задачи древности — задачи об удвоении куба, трисекции угла, квадратуре круга.

Трисекция угла — классическая задача древности: «Произвольный угол разделить на три равные части».

Удвоение куба — классическая задача древности: «Построить куб, объем которого в два раза больше объема данного куба».

Улус (по-монгольски — государство) — государственное образование, административная единица у некоторых народов Азии.

Флюкция – устаревшее название производной функции по времени, введенное Ньютоном.

Шекель – малая весовая и денежная единица у аккадян, перешедшая вавилонянам. Оказала влияние на возникновение позиционной 60-ичной системы счисления.

Содержание

На 1 стр. обложки
картина Н.П. Богданова-Бельского "Устный счет"
(1895 г., Государственная Третьяковская галерея)

Мансур Файзрахманович Гильмуллин

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ
Учебное пособие

Технический редактор: Т.М. Гильмуллин

Подписано в печать 5.02.09. Формат 60х90 1/16.
Усл. п. л. 13,25. Тираж 500 экз. Заказ № 010 .
Издательство ЕГПУ
423604, Елабуга, Казанская, 89.