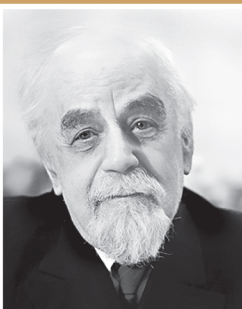
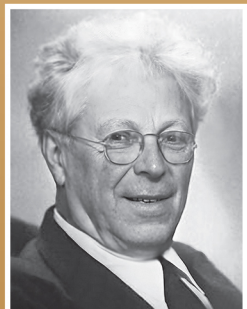
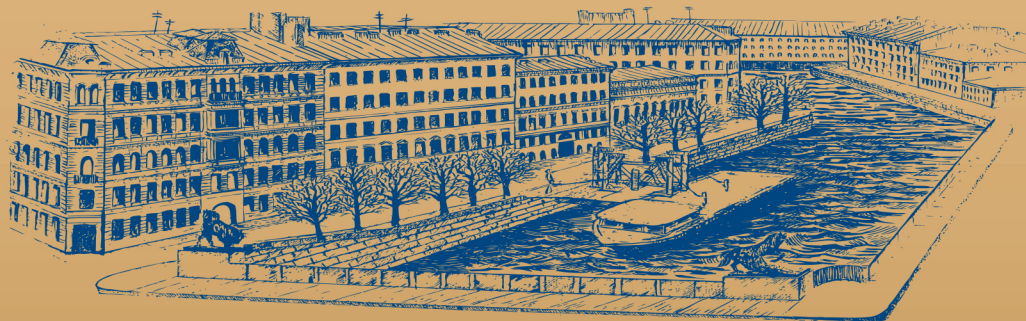
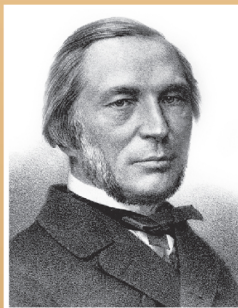
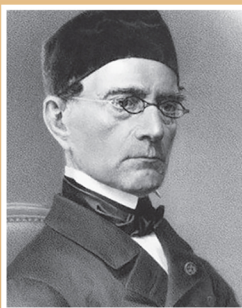
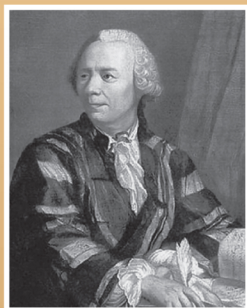


МАТЕМАТИКИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГА И ИХ ОТКРЫТИЯ



Математики Санкт-Петербурга и их открытия

Редакторы:

Н. Ю. Решетихин, Г. И. Синкевич,
С. К. Смирнов, Д. М. Столяров

Редактор-составитель:

Н. С. Калинин

Концепция книги:

С. К. Смирнов

Электронное издание

УДК 51(09)
ББК 22.1г
МЗ4

Математики Санкт-Петербурга и их открытия : Сборник статей
Ред.-сост. Н. С. Калинин.
Электронное издание
М. : МЦНМО, 2025
525 с.: ил.
ISBN 978-5-4439-3417-4

В книге рассказаны биографии 45 математиков, чья жизнь и/или работа была тесно связана с Санкт-Петербургом-Петроградом-Ленинградом. Большая часть биографий снабжена рассказами о научных достижениях их героев. Для широкого круга читателей.

Подготовлено на основе книги:
Математики Санкт-Петербурга и их открытия : Сборник статей /
ред.-сост. Н. С. Калинин. — М. : МЦНМО, 2025. — 528 с.: ил.
ISBN 978-5-4439-1917-1

В соответствии с Федеральным законом № 436-ФЗ
от 29 декабря 2010 года маркируется знаком 16+.

ISBN 978-5-4439-3417-4

© Н. С. Калинин (сост.), 2025
© Авторы статей, 2025
© МЦНМО, 2025

Что главное должен воспитывать в себе ученый? Нужно избавиться от излишнего честолюбия. Не следует думать, что счастливым может быть только гений. Нужно приучиться ценить даже маленькое достижение, радоваться ему и никогда не переоценивать себя. Нужно выработать в себе трудолюбие. Нужно понять и воспитать в себе радость познания, которая почти то же, что и радость жизни. Счастье в том, чтобы дело твоей жизни было нужно людям.

С. Л. Соболев

Оглавление

От составителей	8

Первые годы математики в Санкт-Петербургской академии наук

Христиан Гольдбах (<i>Н. В. Локоть</i>)	15
Шифр Шетарди, который разгадал Христиан Гольдбах (<i>Н. С. Калинин</i>)	19
Даниил Бернулли (<i>Л. В. Коновалова</i>)	25
Закон Бернулли в гидродинамике (<i>Лора Сен-Реймон</i>)	30
Леонард Эйлер (<i>Л. В. Коновалова</i>)	40
Треугольники Леонарда Эйлера и эллиптические кривые (<i>Джованни Фельдер</i>)	48
Габриэль Ламе (<i>М. М. Воронина</i>)	54
Михаил Васильевич Остроградский (<i>М. М. Воронина</i>)	60
Теорема Гаусса—Грина—Остроградского о дивергенции (<i>Мариано Джакинта</i>)	68
Виктор Яковлевич Буняковский (<i>Н. С. Калинин</i>)	76

Эра Чебышёва

Пафнутий Львович Чебышёв (<i>Атанас Пападопулос</i>)	85
О работах П. Л. Чебышёва по картографии (<i>Атанас Пападопулос</i>)	90
Александр Николаевич Коркин (<i>Г. И. Синкевич</i>)	95
Юлиан Кароль Сохоцкий (<i>Г. И. Синкевич</i>)	99
Два результата Ю. В. Сохоцкого в исторической перспективе (<i>К. Ю. Федоровский, П. В. Пармонов</i>)	103
Георг Кантор (<i>Г. И. Синкевич</i>)	110
Георг Кантор и основание теории множеств (<i>Акихиро Канамори и У. Хью Вудин</i>)	120
Егор Иванович Золотарёв (<i>Н. В. Локоть</i>)	125

Егор Золотарёв и квадратичный закон взаимности (С. А. Ягунов)	130
Николай Яковлевич Сонин (Н. В. Локоть)	139
Софья Васильевна Ковалевская (Хайнц Клаус Штрик)	143
Редукция абелевых интегралов и волчок Ковалевской (А. В. Цыганов)	148
Евграф Степанович Федоров (Маржори Уиклер Сенешаль)	153
Е. С. Федоров и геометрия (Марджори Уиклер Сенешаль)	157
Андрей Андреевич Марков (Н. В. Локоть)	164
Числа Маркова в арифметике и геометрии (Ю. Г. Прохоров)	169
Александр Михайлович Ляпунов (А. Г. Хованский, Т. В. Белокриницкая)	178
Теория устойчивости Ляпунова (А. Г. Хованский)	185
Георгий Феодосьевич Вороной (Н. В. Локоть)	190
Г. Ф. Вороной: от чисел к параллелоэдрам (Н. П. Долбилин)	193

Первые годы советского периода

Алексей Николаевич Крылов (М. А. Семенов-Тян-Шанский)	201
Владимир Андреевич Стеклов (Н. С. Калинин)	205
Волчок Стеклова (А. В. Цыганов)	211
Борис Григорьевич Галёркин (И. И. Демидова)	216
Метод Галёркина (С. И. Репин)	221
Николай Максимович Гюнтер (Г. И. Синкевич)	226
Сергей Натанович Бернштейн (Н. В. Локоть)	232
Неравенство Бернштейна в теории приближений (Тамаш Эрдеи, Пауль Неваи)	236
Владимир Иванович Смирнов (Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров)	243
Вклад В. И. Смирнова в комплексный анализ (Н. К. Никольский)	249
Александр Александрович Фридман (Н. Г. Кузнецов)	255
Значение работ Фридмана по космологии (Клаус Кифер, Герман Николаи)	261
Яков Давидович Тамаркин (Н. В. Локоть)	269
О работах Я. Д. Тамаркина, их влиянии и развитии в асимптотической теории и спектральной теории операторов (А. А. Шкаликов)	274
Борис Николаевич Делоне (Г. И. Синкевич)	288
Б. Н. Делоне и диофантовы уравнения третьей степени (Н. П. Долбилин)	293
Абрам Самойлович Безикович (Н. В. Локоть)	297
Теорема Безиковича о проекциях и множества Безиковича (Пертти Маттила)	301

Иван Матвеевич Виноградов (<i>Н. С. Калинин</i>)	306
Работы И. М. Виноградова по тригонометрическим суммам (<i>Лилян Б. Пирс</i>)	311
Владимир Александрович Фок (<i>В. В. Фок</i>)	316
Николай Евграфович Кочин (<i>А. Т. Ильичев, А. Г. Куликовский</i>)	321
Н. Е. Кочин и задача о распаде произвольного разрыва (<i>А. Т. Ильичев, А. Г. Куликовский</i>)	326

Послевоенная математика

Андрей Андреевич Марков-младший (<i>В. П. Одинец</i>)	333
От движений Маркова к следам Маркова (<i>Кристиан Кассель</i>)	338
Дмитрий Константинович Фаддеев (<i>С. В. Востоков</i>)	342
Д. К. Фаддеев: диофантовы уравнения, теория Галуа, гомологическая алгебра (<i>А. В. Яковлев</i>)	347
Соломон Григорьевич Михлин (<i>В. Г. Мазья</i>)	351
С. Г. Михлин и многомерные сингулярные интегралы (<i>В. Г. Мазья, Г. В. Розенблюм</i>)	356
Сергей Львович Соболев (<i>Н. С. Калинин</i>)	361
Теоремы вложения Соболева (<i>О. В. Бесов</i>)	368
Пространства Лоренца (<i>Рональд Девор</i>)	372
Леонид Витальевич Канторович (<i>И. А. Болдырев</i>)	378
Влияние Л. В. Канторовича на теорию оптимальной транспортировки (<i>Алессио Фигалли</i>)	383
Александр Данилович Александров (<i>Д. Ю. Бураго</i>)	391
Теорема Александрова о вложении многогранников (<i>Н. Д. Лебедева, А. М. Петрунин</i>)	400
Юрий Владимирович Линник (<i>Н. С. Калинин</i>)	405
Владимир Абрамович Рохлин (<i>Н. С. Калинин</i>)	410
Теоремы Рохлина о сигнатуре (<i>О. Я. Виро, С. М. Финашин, В. М. Харламов</i>)	416
Виктор Абрамович Залгаллер (<i>Г. Ю. Панина</i>)	421
Ольга Александровна Ладыженская (<i>Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров</i>)	426
О. А. Ладыженская и проблема глобальной однозначной разрешимости уравнений Навье—Стокса (<i>Г. А. Серёгин, Т. Н. Шилкин</i>)	431
Михаил Соломонович Бирман (<i>Т. А. Суслина, Д. Р. Яфаев</i>)	436
М. С. Бирман: спектральная теория и теория рассеяния (<i>Т. А. Суслина, Д. Р. Яфаев</i>)	442
Аскольд Иванович Виноградов (<i>Л. А. Тахтаджян</i>)	445

Оглавление	7
Виктор Петрович Хавин (А. Д. Баранов, Н. К. Никольский)	452
В. П. Хавин и принцип неопределенности в гармоническом анализе (VP и UP) (А. Г. Полторацкий)	460
Людвиг Дмитриевич Фаддеев (Н. Ю. Решетихин)	464
Рассеяние и солитоны. Три избранные работы Л. Д. Фаддеева (Н. Ю. Решетихин)	470
Андрей Александрович Суслин (И. А. Панин)	479
Замечательные теоремы Андрея Суслина (Эрик М. Фридландер, А. С. Меркурьев)	484

Приложения

Жизнь и смерть математиков в Петрограде 1918–1923 года. Комиссия по улучшению быта ученых и петроградские математики (Н. А. Малышева)	493
История о математиках, репрессированных НКВД в блокадном Ленинграде (Н. С. Калинин)	511

От составителей

Польза истории не только в том, что она раздает причитающиеся почести и тем самым другие могут стремиться к подобной похвале, но также и в превознесении искусства исследования и его методов через прославленные примеры.

Готфрид Вильгельм Лейбниц

1. Математики прошлого в целом сталкивались с теми же проблемами, что и мы. Как выбрать задачу, на которой сконцентрировать свои усилия? Где найти работу? Как относиться к административным обязанностям? Что делать во время политической нестабильности, эпидемии, во время голода и войны?

Мы представляем читателю книгу, содержащую ответы математиков прошлого на эти вопросы, — мы узнаем, что они делали в той или иной ситуации и чем это обернулось. Их биографии задают сетку координат, не очевидную из повседневной жизни; позволяют видеть, как одни и те же стремления по-разному преломляются в различные исторические периоды.

Таков первый способ читать нашу книгу: биографические заметки, составляющие половину книги, передают опыт жизни наших коллег из прошлого.

2. Царь-реформатор Петр I желал обустроить образование в России на европейский манер. Под влиянием (в том числе) Лейбница он создал в Санкт-Петербурге Академию наук и художеств. Подыскать в Европе будущих сотрудников Петр Первый поручил своему лейб-медику(!) Блюментросту.

Петр I умер, но академия открылась в 1725 году при императрице Екатерине I. Строить науку с нуля приехали довольно молодые люди, в возрасте в среднем около 30 лет, в том числе девятнадцатилетний Эйлер — самая большая математическая удача России. Леонард Эйлер находил интересную математику во всем, за что брался, будь то картография, кровообращение или изучение остойчивости кораблей. Среди первых академиков был Христиан Гольдбах, который заинтересовал Эйлера теорией

чисел, а потом работал криптографом, а также Даниил Бернулли, написавший в Петербурге свой учебник по гидродинамике и популяризовавший так называемый петербургский парадокс.

Сильнейший импульс математическому образованию в России был дан, в течение последующих десятилетий открывались школы и университеты, переводились учебники.

3. Следующий важный этап — Буняковский, Остроградский и Ламе. Все они учились в Европе, а затем существенно повлияли на математическое образование в России. Как и Эйлер, они не отказывались от любой работы: помимо математики, Буняковский занимался демографией (например, выяснял численность русской армии с помощью статистики), Ламе рассчитывал напряжение для куполов и арок Исаакиевского собора, Остроградский разрабатывал статистические методы браковки изделий, занимался теоретическими вопросами баллистики и страхования.

4. Следующая большая удача — Чебышёв, по широте интересов ненамного уступающий Эйлеру. Чебышёв часто ездил в Западную Европу обсуждать математику, а затем вырастил целую плеяду учеников, чтобы было с кем общаться в России.

Чем старше школа, тем она ценнее. Ибо школа есть совокупность накопленных веками творческих приемов, традиций, устных преданий об отшедших ученых или ныне живущих, их манере работать, их взглядах на предмет исследований. Эти устные предания, накапливающиеся столетиями и не подлежащие печати или сообщению тем, кого считают неподходящим для этого, — эти устные предания суть сокровища, действительность которых трудно даже представить себе и оценить... Если искать каких-либо параллелей или сравнений, то возраст школы, накопление ею традиций и устных преданий, есть не что иное, как энергия школы, в неявной форме.

Н. Н. Лузин

5. Затем пришла Первая мировая война, время потрясений, голод в Петербурге (называемом тогда Петроградом). От голода и холода умирает семья Сохоцкого, чудом выживают Стеклов и Крылов, более молодые Виноградов, Фридман, Безикович уезжают в университет в Пермь, переходящую из рук в руки во время гражданской войны, — там хотя бы кормят!

Затем Безикович и Тамаркин эмигрируют, опасаясь новой власти, а институт Стеклова во главе с Виноградовым переезжает в Москву.

Многие математики умерли или уехали (кто за границу, кто в Москву), но математическая жизнь в Петербурге (теперь уже Ленинграде) не останавливается: подрастают ученики — Линник, Канторович, Александров, Соболев, Фок, Фаддеев... и начинается Вторая мировая война.

После войны Ленинград служит местом, куда могут устроиться люди с «неправильной» биографией (Рохлин, Ладыженская), которым нет места в Москве. И снова появляется многочисленная плеяда математиков, оставивших след в мировой науке.

6. В книге мы пишем о математиках, которые жили или работали в Петербурге — например, в Петербурге родился Кантор. Интересное совпадение: Кантора крестили в той же лютеранской церкви, где венчался Эйлер, проработавший в Петербурге большую часть своей жизни. На Васильевском острове расположен дом, где жила Ковалевская. Официальная биография порой скрывает личность ученого, мы же, напротив, старались включить в тексты как можно больше интересных житейских историй.

Прошлое вовсе не улетучивается, оно остается на месте. Не только в течение нескольких месяцев после начала войны на ход ее могут оказывать существенное действие законы, неторопливо проведенные в мирное время, не только через пятнадцать лет после совершения преступления, оставшегося нераскрытым, судебный следователь может еще находить элементы, которые прольют на него свет (...)

Марсель Пруст. Германт, глава вторая
Перевод А. А. Франковского

7. Наконец, на историю можно смотреть и как на доставшееся нам наследие идей. Математики издавна черпали вдохновение в классических работах предшественников. Вот всего лишь один пример: Буняковский привлек Чебышёва к изданию работ Эйлера, а в процессе редактирования Чебышёв заинтересовался теорией чисел и доказал свои знаменитые оценки на плотность распределения простых чисел.

Кроме биографических статей, книга включает математические заметки — о транспортной задаче Канторовича, о круговом методе Виноградова, о кристаллографии Федорова, о результатах Чебышёва в задачах картографии — и так далее, всего 35 заметок. Наши авторы старались показать классические результаты в новом свете, когда это возможно и уместно. Мы надеемся, что читатели смогут почерпнуть вдохновение и новые идеи, листая эту книгу.

Н. С. Калинин

* * *

Есть ли что-то особенное и уникальное в петербургских математиках и их теоремах? Мы, безусловно, так думаем. Хотя Санкт-Петербург и сравнительно молодой город, лишь недавно отметивший трехсотлетие, он имеет богатую историю, иногда красивую, а порой трагическую. И он по праву занимает видное место в мировой математике.

Поэтому мы были бесконечно рады, когда Санкт-Петербург был выбран местом проведения Международного конгресса математиков 2022 года, и готовили грандиозный праздник науки для ученых со всего мира. Мы хотели познакомить коллег и друзей не только с одним из красивейших городов мира, но и с нашей культурой и математическими традициями. Помимо многих более амбициозных проектов, мы хотели подарить участникам небольшой сувенир — красочный буклет с короткими зарисовками о жизни и теоремах петербургских математиков.

В наших планах буклет был бы не только развлекательным, но и информативным; не только интересным для ученых, но и доступным для широкой публики. Буклет должен был демонстрировать красоту математических идей и показывать их авторов как живых людей, а не холодных вычислителей.

Однако, как это не раз случалось в истории Петербурга, жизнь внесла свои коррективы. Конгресс был переведен в онлайн-формат решением Исполкома ММС, и сувенирный буклет так и не был опубликован. С другой стороны, по мере работы над тем, что изначально задумывалось как небольшая книжка, проект обрел свою жизнь и начал превращаться во что-то более объемное и глубокое, совсем в ином жанре.

Результат лежит перед вами, и мы надеемся, что он вам понравится. Хотя потенциальная аудитория новой книги и сузилась, а текст стал тяжелее, на наш взгляд, книга стала более интересной и содержательной. Мы по-прежнему надеемся, что и в этом виде она заинтересует широкий круг читателей, и не только математиков, которые интересуются развитием своей области, но и всех тех, кто увлекается историей науки, ее идей и людей. И появление новой книги в новом формате особенно своевременно, поскольку оно совпало с трехсотлетием российской науки.

Стоит ли нам возвращаться к прошлому математических открытий и людей, стоящих за ними? Мы считаем, что да, ведь их истории не только увлекательны, но и преподают нам ценные уроки для сегодняшней жизни и исследований.

Станислав Смирнов,
Санкт-Петербург

* * *

Мы благодарим всех авторов книги за их терпение и время. За помощь в работе над проектом мы благодарны таким организациям, как архивы ПОМИ, СПбГУ и ПГУПС, библиотека МИАН и МЦНМО. Помимо этого, мы благодарим лично Александра Авдюшенко, Николая Андреева, Дмитрия Барина, Джун Барроу-Грин (June Barrow-Green), Федора Ба-

харева, Татьяну Блинкову, Жана-Фреда Варлена (Jean-Fred Warlin), Анну Васильеву, Анатолия Вершика, Максима Всемирнова, Виталия Гербуза, Славу Гончарова, Сергея Демидова, Татьяну Долженкову, Евгения Дубцова, Райнхарда Зигмунда-Шульце (Reinhard Siegmund-Schultze), Виктора Клепцына, Алису Книзель, Сергея Крыжевича, Екатерину Ксенофонову, Галину Кутееву, Михаила Лифшица, Марту Маццокко (Marta Mazzocco), Анну Нордскову, Дмитрия Пащенко, Григория Полотовского, Евгения Ростовцева, Кристину Старос (Kristina Staros), Александра Тискина, Бориса Френкина, Дмитрия Фукса, Кристофера Холлингза (Christopher Hollings), Михаила Шифмана, Сергея Ягунова, Ивана Ященко.

Первые годы математики
в Санкт-Петербургской
академии наук

Христиан Гольдбах (1690–1764)

Христиан Гольдбах — потомок древнего прусского рода — родился 18 марта 1690 года в Кёнигсберге (ныне Калининград) в семье пастора Бартоломеуса Гольдбаха, профессора истории и красноречия в местном университете. Изучая право на юридическом факультете Кёнигсбергского университета (Альбертина, или Университет им. Альберта), Христиан много времени посвящал занятиям математикой, о чем свидетельствуют страницы его дневниковых записей.

После окончания учебы юноша отправился путешествовать, но попутно искал способ осуществить свое тайное желание:

Я всегда мечтал о том, чтобы приложить свои силы к буквенной арифметике и иметь в этом опытного учителя, который ввел бы меня в источники, новыми задачами побуждал бы меня к движению вперед» (из переписки с Тойерлейном¹).

В долговременных поездках по университетам Европы (1710–1714) он собирал редкости и книги, посещал библиотеки, знакомился с людьми, которые были ему интересны, в том числе с Х. Вольфом², Г. Лейбницем, И. Ньютоном, с представителями семьи Бернулли, А. Муавром. С некоторыми из них Гольдбах вел оживленную переписку, обсуждая математические проблемы. Везде встречал любезный прием, видимо, благодаря разносторонним интересам и дару блестящего собеседника. Посещал диспуты на разнообразные темы (например, «О ранах, о которых нельзя с уверенностью сказать, смертельны они или нет».)

Гольдбах обладал редким умением мгновенно завязывать, а потом поддерживать путем переписки знакомства с людьми самых разных специальностей. В Гронингене он защитил юридическую диссертацию на тему «О наказании за похищение».

¹ Давид Андреас Тойерлейн (1645–1728). Богослов, любитель математики.

² Христиан фон Вольф (1679–1754). Немецкий ученый-энциклопедист, принял деятельное участие в поиске кандидатур для формирования Академии наук в Петербурге.

После присвоения ему королем ранга гофрата (надворного советника) Гольдбах три года безвыездно прожил в Кёнигсберге, переписываясь с друзьями, затем снова отправился путешествовать, на этот раз на север — в Швецию, выполняя по пути неофициальные дипломатические поручения (для чего отлично подходит роль странствующего ученого), потом в Данию, Австрию, Венецию.

С 1724 года в переписке Гольдбаха с нюрнбергским физиком И. Г. Допельмейером появляются упоминания о создаваемой в Петербурге академии и о И. Д. Шумахере, подбирающем по поручению русского царя кандидатуры для нее среди ученых Европы. Приглашение в Петербург уже получили его друзья (Я. Герман и Г. Б. Бюльфингер, Д. и Н. Бернулли). Гольдбах же решил ехать туда без приглашения — только по пути из Риги он написал письмо Л. Л. Блюментросту³, с которым был хорошо знаком. Его не остановил даже ответ Блюментроста в том роде, что все места в академии уже заняты. В августе 1725 года он, опередив Германа и Бюльфингера, был уже в городе на Неве.

Для Гольдбаха срочно была найдена должность секретаря академии и ее историографа, так как энциклопедичность познаний и умение расположить к себе собеседника были оценены академическим руководством по достоинству. Секретарские обязанности — написание протоколов заседаний, подготовка трудов академиков к изданию и ведение переписки с учеными — вряд ли отягощали Христиана Гольдбаха, у него оставалось время и для занятий математикой. Правда, протоколы заседаний в его исполнении были очень лаконичны, но Гольдбах время от времени выступал с сообщениями о своих математических изысканиях в академической Конференции⁴, деятельно участвовал в подборе кандидатур на замещение вакансий в академии, устанавливал связи с другими академиями. В поисках задач он часто обращался к старым книгам.

Параллельно, по желанию императрицы Екатерины I, ему пришлось исполнять нелегкие обязанности воспитателя Петра II в Санкт-Петербурге и даже последовать за царским двором в Москву (январь 1728 года), где он проживал до 1732 года. В Москве он хлопотал по академическим делам, написал предисловие к I тому «Комментариев... Академии наук», некролог Николаю Бернулли и несколько математических работ. Возвращение Гольдбаха в Петербург вместе с двором Анны Иоанновны состоя-

³ Лаврентий Лаврентьевич Блюментрост (1692–1755). Лейб-медик Петра I, первый президент Академии наук.

⁴ Средоточием научной деятельности Академии являлась ее «Конференция», заседания которой проводились дважды в неделю. Самый ранний протокол научного заседания Конференции относится к 2 ноября 1725 года. На нем с докладом о форме Земли выступил академик Я. Герман.

лось в январе 1732 года, тогда же он был назначен председателем Конференции Академии наук и руководил научной частью академии полтора года, затем снова вернулся к прежним своим обязанностям, переживая вместе с академией все потрясения и повороты судьбы.

При Елизавете Петровне Гольдбах принял предложение о переходе на службу в Коллегию иностранных дел (март 1742 года). Чем в течение 22 лет занимался на дипломатическом поприще статский советник (1742), а затем — тайный советник (1769) Христиан Гольдбах, не вполне ясно.

Сначала он часто бывал в Петербурге по делам, посещал академию в дни торжеств и публичных собраний, выступал с речами и поэмами, блистал на великосветских приемах и при дворе, а последние 10 лет жизни вообще в Москву не возвращался (1754–1764). Он постоянно переписывался с Эйлером, часто обсуждая с ним математические проблемы. С приходом в Коллегию графа А. П. Бестужева-Рюмина, учредившего службу перлюстрации зашифрованной переписки иностранных дипломатов, Христиан Гольдбах возглавил дешифровальную службу при ней. Отметим, что успешное раскрытие Гольдбахом шифров и разработка новых шифров для секретной корреспонденции имели колоссальное политическое значение для России.

Звездный час Гольдбаха настал в 1744 году, когда он прочитал зашифрованные депеши французского посла Шетарди в Париж. Этот случай стал хрестоматийным в истории криптографии. Шетарди знал, что его письма вскрываются, но был уверен, что прочесть его шифр невозможно, и поэтому легкомысленно писал об императрице, что она всецело отдается своим удовольствиям, несерьезна, глупа и беспутна. Ставший канцлером А. Бестужев-Рюмин ловко использовал именно этот текст в борьбе против «французской» придворной партии (к тому моменту у него на руках уже были дешифрованные тексты практически всех писем этого посла). Он разыграл перед Елизаветой сцену дешифровки депеши, «вынужденно» произнося «поносные слова».

6 июня Шетарди был выдворен из страны. 26 июля Х. Гольдбах стал действительным статским советником.

Перечень научного наследия Христиана Гольдбаха, включая его переписку с Н. и Д. Бернулли, Л. Эйлером, Г.-В. Лейбницем и Я. Германом, и анализ работ имеется в статье [1]. Ко времени приезда в Петербург у Гольдбаха было опубликовано несколько статей по арифметике и алгебре в немецком журнале *Acta Eruditorum*. В российский период жизни появилось еще 6 научных статей, которые напечатаны в первых четырех томах академического издания *Commentarii Academiae scientiarum imperialis* (1728–1733). Это работы по теории чисел, интегрированию диф-

ференциальных уравнений и бесконечным рядам; кроме того, огромное число результатов Гольдбаха присутствует в его переписке.

Так, в письмах к Д. Бернулли Гольдбах привел первый пример трансцендентного числа⁵ (1729) и решил вопрос о случаях интегрируемости в конечном виде дифференциального бинома (1730), а в переписке с Николаем Бернулли при обсуждении задачи Риккати приведены некоторые случаи интегрируемости уравнения Риккати (1721).

Переписка с Л. Эйлером велась в течение 35 лет, ей мы обязаны постановкой знаменитых проблем Гольдбаха (1742): «Каждое нечетное целое число, большее 5, можно представить в виде суммы трех простых чисел» (тернарная проблема) и «Каждое целое четное число, большее двух, можно представить как сумму двух простых» (бинарная проблема).

Для всех достаточно больших нечетных чисел тернарная проблема была решена И. М. Виноградовым (1937) и Ю. В. Линником (1945), а полностью — математиком перуанского происхождения Х. Хельфготтом (2013). Бинарная проблема Гольдбаха—Эйлера остается пока гипотезой.

Часть переписки с Н. Бернулли (27 писем), Д. Бернулли (71 письмо) и Эйлером (177 писем) была отредактирована и опубликована правнуком Эйлера П. Н. Фуссом.

Христиан Гольдбах умер 20 ноября 1764 г. в Санкт-Петербурге. Его похоронили на лютеранском участке Сампсониевского кладбища Санкт-Петербурга.

Н. В. Локоть

Литература

- [1] Юшкевич А. П., Копелевич Ю. Х. Христиан Гольдбах. (1690–1764) М.: Наука, 1983. 224 с. (Серия «Научно-биографическая литература» Академии наук СССР).
- [2] Мясников А. Л. Тайный код России. М.: Вече, 2016. 328 с.
- [3] Fuss P. N. Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII-e siècle: précédée d'une notice sur les travaux de Léonard Euler. (2 vol.). St-Petersbourg, 1843.
- [4] Кузьмин Р. С. О трансцендентных числах Гольдбаха // Труды Ленинград. индустр. института. 1938. Т. 5, № 1. С. 28.

⁵ Это было число $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-(2^n-1)}$. Его трансцендентность была доказана только в 1938 году Р. О. Кузьминым, тоже петербургским математиком. В 1930 году Кузьмин доказал трансцендентность чисел a^b , где a — алгебраическое число, отличное от 0 и 1, а b — квадратичная иррациональность. Для случая произвольного иррационального алгебраического числа b это седьмая проблема Гильберта, которая была решена в 1934 году независимо А. О. Гельфондом (Москва) и Т. Шнейдером (Франкфурт).

Шифр Шетарди, который разгадал Христиан Гольдбах

С 1742 года Гольдбах работал в «черном кабинете» (Cabinet Noir), где занимался расшифровкой писем иностранных послов. В этой статье мы расскажем, как ему удалось расшифровать письмо французского посла маркиза Шетарди от 15 февраля 1744 года, которое, будучи показанным императрице Елизавете, привело к высылке посла.

Приехав в 1743 году в Россию во второй раз, маркиз де Шетарди¹ рассчитывал на доброе к нему отношение императрицы Елизаветы. Он знал, что его письма перехватываются русскими, но был абсолютно уверен, что его шифр разгадать невозможно, и потому писал открыто все, что думает. Например: «Императрица в силу лености сложила все дела на Бестужева» — из его письма от 15 февраля 1744, которое мы и будем, в основном, обсуждать.

Как оказалось, Шетарди использовал так называемый великий шифр (Grand Chiffre), разработанный Антуаном Россиньолем. В этом шифре трехзначные числа кодируют слова, буквы, звуки и слоги, причем для часто повторяющихся слогов используются несколько чисел вперемешку. Кроме того, какие-то числа не означают ничего, их добавляют, чтобы шифр было сложнее взломать².

В 1742 году Христиан Гольдбах перешел из академии наук на службу в Коллегию иностранных дел, с зарплатой 1500 рублей в год. Бестужев-Рюмин³ привлек его к расшифровке иностранной корреспонденции. С шифром Шетарди Гольдбах справился не сразу, но к 1744 году он уже имел

¹ Жак-Жоакен Тротти, маркиз де ла Шетарди (1705–1759). Французский дипломат. Будучи французским посланником в России в 1739–1742 гг., помогал Елизавете, дочери Петра I, устроить переворот и взойти на престол.

² Для сравнения, известному криптоаналитику Этьену Базери в конце XIX века потребовалось несколько лет, чтобы взломать похожий шифр времен Людовика XIV в попытках понять, кем был человек, называемый «Железная маска».

³ Алексей Петрович Бестужев-Рюмин (1693–1766). Русский государственный деятель. В разное время был послом, канцлером, участвовал во многих интригах, дважды был приговорен к смертной казни. Сторонник сближения России с Англией и Австрией.

двухлетний опыт разгадывания шифров, и если первые шифры он разгадывал весь первый год своей работы, то этот шифр был взломан за две недели.

Начало письма от 15 февраля выглядит так:

335	632	679	498	283	249	202	97	996
752	786	983	95	155	900	591	179	23
478	987	742	597	36	659	933	894	126
527	97	99	813	865	780	898	958	432
507	302	514	694	611	510	661	56	414
506	406	359	95	358	712	562	715	900
219	51	498	111	823	880	466		

В этом кусочке фрагмент «335 632 679» не означает ничего (назовем такие числа мусорными) и добавлен для усложнения жизни читающего.

Далее, выпишем по одному слову в строчку (с примерным переводом):

498 (En)	283 (re)	249 (marq)	202 (ant)	замечая	
97 (que)				что	
996 (tout)				все	
752 (est)				находится	
786 (mycop)					
983 (dans)				в	
95 (la)	155 (même)			той же самой	
900 (si)	591 (tu)	179 (ation)		ситуации	
...359 (par)	95 (la)	358 (m)	712 (ort)	562 (de)	715 (Bevern)
Par la mort de Bevern — со смертью Бреверна ⁴ .					

Архив министерства иностранных дел (именно там хранятся расшифровки, сделанные рукой Гольдбаха) до сих закрыт для внешних посетителей. Возможно, так было не всегда — Т. А. Соболева, автор книги [1], обильно его цитирует. Так или иначе, автору этой заметки пришлось искать французских историков и просить их пойти во французские архивы (которые открыты).

Во Франции полученные от Шетарди письма дешифрованы и хранятся в архиве министерства иностранных дел по адресу 2 rue Suzanne Masson, 93120 La Courneuve, France. Большое спасибо Жан-Фреду Варлену (Jean-Fred Warlin) за фотографию писем! Ниже приведена фотография одной страницы из такого письма.

Речь идет о том, что Шетарди подкупил кого-то, кто живет вместе с Михаилом Голицыным, и, чтобы лучше знать, что происходит в окружении царицы, нужно подкупить ее духовника и синод, чтобы затем пользо-

⁴ Карл Герман (Германович) фон Бреверн (1704–1744), министр императрицы Елизаветы, президент Академии наук в 1740–1741 гг.

106

Roubles a celle chez qui il logeoit —
 514. 600. 949. 781. 574. 816. 204. 440. 569.
qu'il vous avoit marqué pouvoir être
 990. 986. 928. 551. 414. 993. 36. 902. 831.
important de faire, mais dans le cas.
 797. 615. 760. 721. 202. 562. 476. 976. 983.
où il est essentiel d'être informé de ce qui
 611. 135. 430. 986. 811. 126. 961. 933. 775.
se passe dans l'intérieur de la —
 136. 760. 352. 562. 566. 732. 831. 94. 994.
Tsarine, et plus encore de s'aider —
 436. 661. 489. 942. 663. 514. 95. 51. 813.
sûrement de ses préjugés
 228. 800. 514. 507. 763. 668. 123. 283. 291.
superstitieux en intéressant —
 562. 887. 959. 551. 507. 123. 868. 933. 933
pour soy son confesseur —
 755. 498. 189. 506. 831. 989. 965. 995. 253.
et les Prélats qui composent la —
 757. 816. 994. 967. 813. 705. 958. 219. 619.
Synode, ce ne peut jamais être —
 990. 14. 943. 961. 451. 900. 876. 514. 438.
que la nature de la circonstance —
 227. 700. 787. 976. 760. 23. 95. 225. 591.
qui peut décider du plus ou du moins
 283. 562. 987. 52. 996. 700. 514. 876. 668.
de dépense. Je suis même persuadé —
 985. 228. 430. 514. 223. 562. 812. 478. 975.
que vous estimerez que l'on ne doit pas —
 155. 633. 97. 99. 124. 934. 746. 934. 97.

Текст на этой странице:

[600] roubles à celle chez qui il logeait, qu'il vous avait marqué pouvoir être important de faire, mais, dans les cas où il est essentiel d'être informé de ce qui se passe dans l'intérieur de la Tsarine, et plus encore de s'aider sûrement de ses préjugés superstitieux en intéressant pour soi son confesseur et les prélats qui composent son synode, ce ne peut jamais être que la nature de la circonstance qui peut décider du plus ou du moins de dépense. Je suis même persuadé que vous estimerez qu'on ne doit pas...

ваться ее суеверностью. Сколько понадобится денег, заранее предсказать невозможно (Шетарди просит о финансировании).

Не так просто разгадать шифр, даже имея расшифрованную версию перед глазами. Автор этой заметки сначала думал, что слова в строке соответствуют числам из следующей строки, и пытался найти соответствия. Это не так. Человек, который расшифровывал письма, писал, заполняя строчки до конца, и к соблюдению такого соответствия не стремился, так что обычно соответствующие числа идут парой строк ниже. Иногда перевод выполнен по смыслу, а не дословно, иногда не удается понять, что имеется в виду (возможно, Шетарди иногда путал цифру-другую).

Дело продвинулось, когда после нескольких часов изучения текста в глаза бросилось, что число 51, вероятно, соответствует слову *Tsarine* (царица). После этого дело пошло гораздо быстрее — можно было сопоставлять с соответствующим текстом числа немного после и немного до 51.

Обратите внимание на старое правописание — *logeoit* вместо современного *logeait*, *seurement* вместо *sûrement*. Иногда Шетарди кодирует написание слова, иногда его произношение, иногда пользуется сокращениями, когда слово понятно из контекста.

Например, *deux* = 136 (d') 755 (eu), *faits* = 216 (fait) 816 (s), *ulcéré* = 339 (u) 574 (l') 438(cé) 283 (ré).

Как же Гольдбах мог разгадать такой шифр? Дадим ему слово (из письма от Гольдбаха Бестужеву-Рюмину):

Милостивый государь мой! Принося Вашему сиятельству первые плоды третьего цифирного ключа, надеюсь, что вместо нареkania мне какого-либо в том медления, паче моей поспешности удивляться причину иметь будут, ежели когда-нибудь соизволено будет сличать самой ключ с разобранными письмами и когда усмотрится, что потребно было каждое число или каждую цифру весьма прилежно свидетельствовать, нежели возможно было познать содержание хотя б одного письма. Но понеже сия работа уже сделана, то я в состоянии нахожусь, в день по одной пиесе⁵ разобрав, отдавать, ежели я, однако ж, другими делами от того отторгнут не буду. Что же касается до четвертого и пятого ключей, от которого я еще несколько штук [писем] в руках имею, то оныя ключи несравненно труднее первых нахожу (...)

Как только правильно разгаданы хотя бы несколько чисел (или известно примерное содержание письма), дальнейшая дешифровка многократно упрощается. Мы можем предполагать, что Гольдбах знал французский, имел представление о текущей политической обстановке и понимал, что числа шифруют не буквы, а слоги или даже слова.

Мы можем также предполагать, что Гольдбах получал все письма Шетарди (технология перехватывания писем и их копирования к тому времени была хорошо отработана).

Даже в этом случае совсем неясно, как разгадывать такой шифр; не удивительно, что Шетарди по возвращении во Францию заключил своего слугу-секретаря, имевшего доступ к шифру, в Бастилию, подозревая предательство с его стороны. Секретаря допрашивали пять месяцев, потом отпустили, найдя совершенно невиновным и наивным простым человеком (Людовик XV даже назначил ему компенсацию за время, проведенное в тюрьме).

Однако что-то угадать можно и без доступа к шифру. Например, частотный анализ показывает, что некоторые числа встречаются намного чаще других. Приведем те, что встретились более 20 раз в этом письме:

95 la (35 раз)
97 que (31 раз)
204 à (33 раза)
283 raî, r или ré (27 раз)
451 le (24 раза)
507 s' (21 раз)
562 de или dé (39 раз)
813 et (22 раза)
989 pour (22 раза)

Так что, хотя частотный анализ напрямую и не применим, Гольдбах мог сопоставить этим числам наиболее частые французские слоги, что значительно сокращало перебор вариантов.

Далее, в письме встречаются числа, и они не зашифрованы, например, *dérêches des 18 et 25 janvier* выглядит как 444 984 18 813 25 246. Письма доходили не всегда, Шетарди посылал некоторые письма по два раза и, значит, должен был об этом писать — упоминая датировку писем. Отсюда мы узнаем, что 813 — это et (и), а 246 — janvier (январь).

Повторы слогов, как в слове *superstitieux* — 123 (su) 868 (pers) 933 (ti) 933 (ti) 55 (eux), встречаются во французских текстах довольно редко. Безусловно, Гольдбах имел список слов с повторами слогов, это был один из известных методов взлома шифров. Иногда Шетарди начинал или заканчивал письма абзацем незашифрованного текста (например, говоря, что он посылал уже это письмо и дублирует его на всякий случай). В случае неосмотрительности такие письма могли быть не абсолютно идентичны, что дало бы информацию, какие числа обозначают одно и то же. В конце концов, в руки Гольбаха мог попасть какой-то черновик письма из мусора, который можно было сличить со всеми зашифрованными письмами, и этого бы уже хватило для расшифровки.

Тем самым, хотя взлом такого шифра поначалу кажется совершенно безнадежной задачей, у Гольбаха было множество способов найти зацепку, ведь Шетарди, будучи уверенным в том, что шифр взломать невозможно, вряд ли следил за частотностью чисел или упоминанием дат.

Так или иначе, 17 июня 1744 года в три часа ночи к Шетарди пришли солдаты во главе с генералом Ушаковым, приказали покинуть Москву в течение дня и Россию в течение восьми дней и отобрали портрет Елизаветы, подаренный ему самой императрицей.

В январе 1744 года с Гольдбахом был перезаключен договор о службе в России именно на основании его успехов в дешифровальной деятельности. Из протоколов докладов Елизавете от 3 января 1744 года:

18. Слушать же и всемилостивийше апробовать соизволила проект заключаемого статским советником Гольдбахом о вступлении его в российскую службу контракта. И при том по всеподданнейшему докладу, не соизволено ль будет ему, Гольдбаху, за прилежные его труды и особое искусство в разбирании цифирных секретных писем в награждение до 1000 рублей пожаловать, Ея Императорское Величество на сие всемилостивийше соизволила.

Данный текст является сокращенной версией [3].

Н. С. Калинин

Литература

- [1] *Соболева Т. А.* История шифровального дела в России. М.: ОЛМА-ПРЕСС, 2002.
- [2] *Warlin J.-F.* Représenter la France à la cour des tsarines. Les deux ambassades de Joachim-Jacques de La Chétardie de 1739 à 1744. Thèse pour obtenir le grade de docteur de l'université Paris-Sorbonne. Paris: Université Paris-Sorbonne, 2017. См. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01727686/document>
- [3] *Калинин Н. С.* Шифр, который разгадал Христиан Гольдбах // Математика в высшем образовании. 2021. Т. 19. С. 85–94.

Даниил Бернулли (1700–1782)

Даниил Бернулли, один из выдающихся ученых XVIII в., родился 29 января 1700 года в Гронингене (Голландия) в семье доктора медицины, профессора математики Иоганна Бернулли, впоследствии ставшего одним из крупнейших математиков Европы. В 1705 году семья переехала в Базель, где отцу предложили место профессора математики в университете, освободившееся после смерти его старшего брата — известного математика Якоба Бернулли. Детство Даниила протекало в спокойной обстановке, типичной для семьи успешного ученого, каковым был его отец. Он много времени уделял обучению математике своих сыновей Даниила и Николая и привил им любовь к математике на всю жизнь.

В 13 лет Даниил окончил базельскую гимназию, а в 16 получил степень магистра философии. По настоянию отца Даниил начал изучать медицину, так как медицинская практика всегда давала возможность обеспечить материальное благополучие и достойное положение в обществе. Отметим, что и сам отец по совету своего старшего брата Якоба изучил медицину, получил звание доктора медицины, а чтение лекций по математике в Базельском университете чередовал с медицинской практикой.

В 1718 году Даниил уехал в Гейдельберг, чтобы продолжить изучение медицины под руководством выдающегося врача Небеля, а в 1719 году переехал в Страсбург для совершенствования своих знаний анатомии и хирургии. В 1720 году он вернулся в Базель, защитил диссертацию «О дыхании» и получил степень лиценциата медицины.

Серьезно заниматься математикой он начал в родном Базеле в 1720–1723 гг., однако медицину не забросил. В 1723 году Даниил вновь отпра-



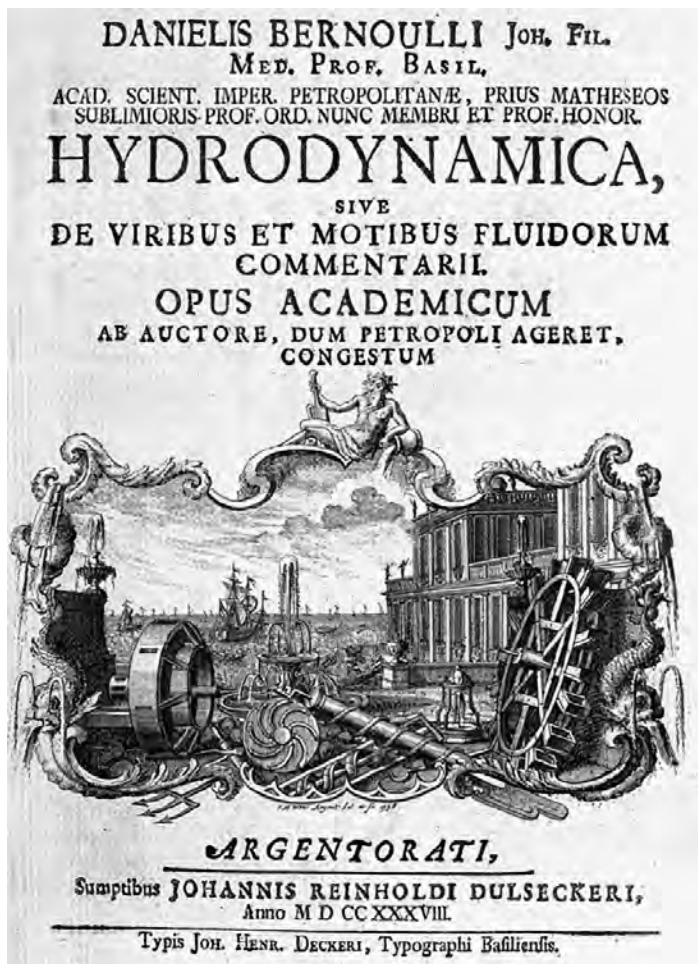
вился в заграничное путешествие, на этот раз в Венецию, для совершенствования своих познаний в медицине под руководством знаменитого итальянского врача Микелотти. Изучение медицины он успешно совмещал с занятиями математикой. В 1724 году Д. Бернулли публикует свою первую математическую работу «Математические упражнения». В этом ему помог его друг — знатный венецианец, который за свой счет напечатал несколько экземпляров книги. Работа была посвящена защите идей отца и дяди, Якоба Бернулли, от необоснованных нападок итальянских ученых. Это исследование принесло ему известность в научных кругах Италии, а Академия наук в Болонье внесла его в список своих членов.

С 1724 года Парижская академия наук начала проводить конкурсы, посвященные наилучшему решению различных научных проблем, при суждая победителям щедрые вознаграждения. Таким образом академия привлекала ученых к решению наиболее актуальных задач, способствуя развитию науки. Первый конкурс был посвящен вопросу «О наилучшем способе построения песочных или водяных часов, используемых на кораблях». Д. Бернулли послал свое решение в Париж и получил премию. Отметим, что с 1724 по 1757 годы он удостоивался премий десять раз. По числу полученных премий Даниил уступал лишь Эйлеру.

В 1725 году была учреждена Петербургская академия наук. Братья Николай и Даниил Бернулли были приглашены на службу в академию. 27 октября 1725 г. они прибыли в Санкт-Петербург. Даниил получил кафедру физиологии с окладом 800 рублей в год, а Николай — кафедру математики с окладом 1000 рублей в год. К сожалению, Николай, блестящий математик, обладал слабым здоровьем и умер сразу после своей свадьбы в 1726 г., прожив в Петербурге всего 8 месяцев. Императрица Екатерина I лично выразила Даниилу свои соболезнования в связи с кончиной брата.

Деятельность Д. Бернулли в Петербурге была необычайно продуктивна. В течение первого года своей работы в академии он сделал более 10 сообщений, посвященных решению проблем математики и механики, являющихся основой для решения задач физиологии. В 1729 году Д. Бернулли приступил к работе над книгой «Гидродинамика», провел многочисленные опыты для проверки выдвинутых им гипотез.

Здоровье Д. Бернулли ухудшалось, сказывался суровый климат Санкт-Петербурга. В 1733 году он обратился к руководству академии с просьбой об отставке и 24 июля покинул Санкт-Петербург, проработав в нем 8 лет. Он возвратился в Базель, где занял кафедру анатомии и ботаники. В 1750 году он получил в Базельском университете кафедру физики и занимал ее до последних лет жизни. В 1734 году Бернулли издал в Страсбурге «Гидродинамику». Этот труд принес ему мировую славу.



Титульный лист «Гидродинамики»

В 1737 году Д. Бернулли был избран почетным членом Петербургской академии наук с ежегодной пенсией 200 рублей. Отметим, что связь Даниила с Петербургской академией не прекращалась после его отъезда. В период с 1731 по 1735 год он опубликовал пять работ, четыре из них изданы в Санкт-Петербурге; с 1736 по 1745 год из опубликованных 18 работ 11 опубликованы в Санкт-Петербурге; с 1766 по 1770 год опубликовано 8 работ, и все в Санкт-Петербурге; в 1771–1775 было опубликовано 10 работ — все в Санкт-Петербурге.

Основные работы Д. Бернулли относятся к гидродинамике, кинетической теории газов, теории колебаний. Д. Бернулли, наряду с Даламбером и Эйлером, заложил основы теории дифференциальных уравнений в частных производных. Большое место в его исследованиях занимала теория

вероятностей. Наиболее известная работа «Попытка новой теории вычисления вероятностей случайных величин» была опубликована в 1738 году в Санкт-Петербурге. В этой работе Бернулли ввел понятие «морального ожидания». Это понятие он применил к задаче, которая получила название «петербургской игры».

Задача состоит в следующем: играют двое — Павел и Петр⁶, Петр бросает монету, и если она падает обратной стороной, то он платит Павлу один дукат и игра прекращается, а если монета падает лицевой стороной, то игра продолжается. В случае появления при втором испытании обратной стороны монеты Петр платит Павлу два дуката и игра заканчивается; если монета падает лицевой стороной, то игра продолжается. Если при третьем испытании появляется обратная сторона монеты, то Петр платит Павлу 4 дуката, если в четвертом испытании выпадает обратная сторона монеты, то Петр платит 8 дукатов и так далее. Для участия в такой игре Павел должен предварительно отдать Петру некоторую сумму денег, которая должна равняться математическому ожиданию выигрыша. В данном случае возможные значения выигрыша равны 1, 2, 4, 8, ... Таким образом, математическое ожидание выигрыша у Павла равно $1/2 \cdot 1 + 1/4 \cdot 2 + 1/8 \cdot 4 + \dots$, т. е. бесконечно. Однако моральное ожидание его выигрыша, согласно теории Д. Бернулли, будет конечным (основной аргумент Бернулли состоит в том, что полезность денег — величина мультипликативная, а не аддитивная и ценность одного дуката для того, у кого их всего десять, намного больше, чем для того, у кого их тысяча). Этот софизм⁷ получил название «петербургский парадокс». Его разъяснение было дано А. Я. Хинчиным в 1925 году в работе «О петербургской игре».

Научные заслуги Д. Бернулли были высоко оценены современниками. На родине он дважды был избран ректором Базельского университета. Д. Бернулли был избран членом многих иностранных академий и научных обществ. В 1747 году он избран в Берлинскую академию наук, в 1748 году — в Парижскую академию наук, в 1750 был избран членом Лондонского королевского общества. Д. Бернулли был в числе семи иностранных ученых, которых императрица Екатерина II удостоила подарком — именным экземпляром золотой медали, отчеканенной в честь победы над турками.

Его термины «гидродинамика» и «установившееся состояние» стали общепринятыми и используются до сих пор. Даниил Бернулли прожил

⁶ Возможно, это аллюзия на первоверховных апостолов Петра и Павла, обладающих бесконечным временем для игры.

⁷ Софизмом называют логичное на первый взгляд рассуждение, приводящее к странному выводу.

долгую жизнь. Он никогда не был женат, был скромным, уравновешенным человеком, пользовался уважением не только у коллег, но и у всех знавших его. На склоне лет Д. Бернулли занялся благотворительностью. На свои средства он построил небольшой отель для путешествующих студентов и ученых, в котором они могли найти приют и пропитание. 17 марта 1782 года Даниил Бернулли скончался в возрасте 82 лет в Базеле.

Л. В. Коновалова

Закон Бернулли в гидродинамике

Даниил Бернулли часто считается отцом гидродинамики.

Представляется, что первым, кто использовал этот термин, был Даниил Бернулли, который дал это название своему трактату о движениях жидкостей, напечатанному в Страсбурге в 1738 году. Следует признать, что новым было не только заглавие, но и сама работа. Видимо, Даниил Бернулли был первым, кто вывел законы движения жидкостей из надежных и неслучайных принципов, чего не сделал до него ни один из писавших о гидравлике. Тот же автор уже опубликовал в 1727 году, в мемуарах Петербургской академии, эссе о своей новой теории (Даламбер, [12]).

Будучи математиком и физиком, Д. Бернулли применял анализ, в частности дифференциальное исчисление, для формализации основных законов механики жидкостей и записи их в виде уравнений.

1. Задача о сосудах и стоках

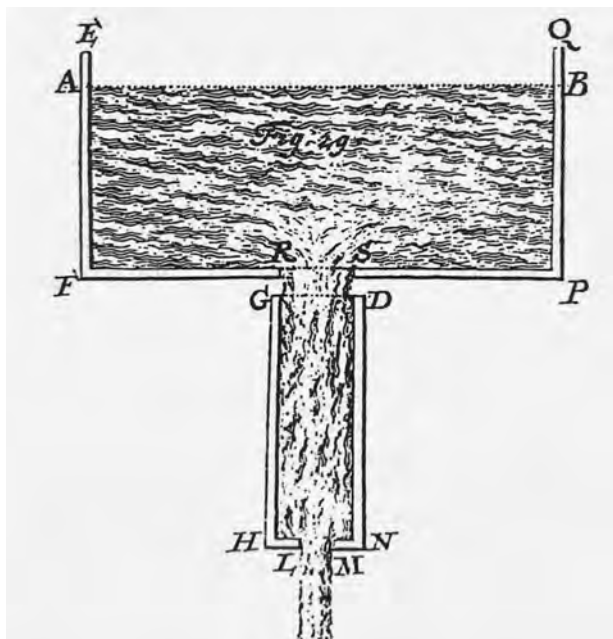
Мемуар Бернулли «Гидродинамика» [6], посвященный герцогу Курляндскому и Семигальскому Бирону, сводит воедино различные теоретические результаты и замечания о силах и движениях в жидкостях, подтвержденные многочисленными экспериментами.

При этом рассматриваются жидкости, протекающие через сосуды с отверстиями и трубами разной формы, изучается влияние поворотов или сдвига сосудов на их движение и даже (нереалистичное) приложение к навигации.

1.1. Результат, противоречащий интуиции. Отправной пункт всех этих вычислений, известный теперь как закон Бернулли, связывает скорость течения с давлением в данной точке. Его можно сформулировать следующим образом.

Закон Бернулли. *В горизонтально текущей жидкости в точках, где ее скорость высока, давление ниже, чем в точках, где ее скорость низка.*

Таким образом, если имеется горизонтальная труба с сечениями разных диаметров, то в тех сечениях, где вода течет быстро, ее давление ни-



же, чем в сечениях, где вода течет медленно. Казалось бы, это противоречит интуиции, поскольку было бы естественно связать высокую скорость с высоким давлением. Однако этот закон просто выражает тот факт, что вода ускоряется, если сзади давление выше, чем впереди.

1.2. Аналог принципа Гюйгенса в механике. Д. Бернулли вывел этот принцип по аналогии с законом живой силы Гюйгенса в механике [20]. По его собственным словам, доказательство состоит в следующем.

Приращение потенциала системы, каждая часть которой движется с некоторой скоростью, показывает высоту по вертикали, которой достигает центр тяжести этой системы, если считать, что каждая частица при движении вверх в соответствии со своей скоростью поднимается так далеко, как возможно.

Высота по вертикали указывает, насколько в действительности опустился центр тяжести, когда каждая частица пришла в состояние покоя.

Приращение потенциала обязательно равно действительному спуску, если все движение остается распределенным (Бернулли, [6]).

Таким образом, приращение потенциала зависит от скорости, которая, в свою очередь, вычисляется в терминах потока: «Движение жидкостей очень близко к такому, когда скорость повсюду обратно пропорциональна соответствующему размеру сосуда» (Бернулли, [6]). Фактическое понижение выражается через давление по законам гидростатики.

Теперь Бернулли смог применить эти законы сохранения к бесконечно малым объемам и с помощью геометрических рассуждений вычислил, например, скорость опорожнения сосуда.

2. Современная формулировка

Первоначальный текст Бернулли сегодня труден для понимания: терминология уже не соответствует современным стандартам, предположения не всегда ясно формулируются (кроме как в виде правил применения), а обозначения очень запутанны.

Тем не менее закон Бернулли ныне излагается в простом виде во всех курсах механики жидкостей.

2.1. Давление — макроскопическое проявление внутренних взаимодействий. Давление, о котором говорится в законе Бернулли, — это внутреннее давление жидкости, которое при ее течении действует во всех направлениях. Заметим, что это не то же самое давление, которое жидкость производит на предмет, оказавшийся на ее пути и препятствующий ее движению.

Интересно отметить, что работа Д. Бернулли в действительности содержит зачатки кинетической теории газов: частицы жидкости находятся в тепловом возбуждении, которое усиливается при повышении давления. На самом деле давление является результатом множества столкновений между этими частицами жидкости.

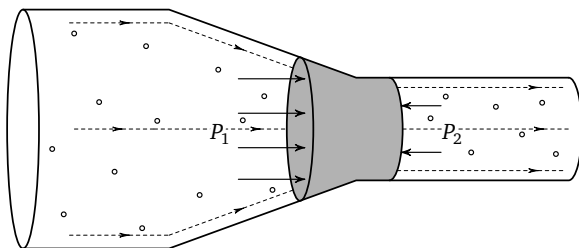
2.2. Баланс энергии в целом. Источником силы, производящей работу по ускорению движения жидкости, служит давление ее соседних малых частей.

Рассмотрим трубу, в которой вода течет ламинарно слева направо. Когда объем воды, затемненный на рисунке, достигает узкой части трубы, его скорость возрастает. Сила, порожденная давлением слева от рассматриваемого объема, толкает его вправо и добавляет ему энергию, так как она действует в направлении его перемещения. Сила, порожденная давлением справа от этого объема воды, толкает его влево и уменьшает его энергию, действуя противоположно направлению его перемещения.

Мы знаем, что вода должна ускоряться (для сохранения объема потока), и потому полная работа сил давления, действующих на элемент объема воды, должна быть положительной.

Работа W_F силы F (параллельной направлению движения) имеет вид Fd , где d — расстояние, пройденное при приложении силы. Сила давления имеет вид PS , где P — давление, а S — площадь, к которой прилагается сила. Отсюда

$$W_{\text{давления}} = PSd.$$



Площадь S_1 в левой части больше, чем площадь S_2 в правой. Но когда рассматриваемый объем воды встречает сужение трубы, он деформируется и удлиняется: поэтому сила, порожденная давлением P_2 в правой части, прилагается к большей длине d_2 , чем сила, порожденная давлением P_1 в левой части. Полный объем рассматриваемого количества воды остается постоянным: $S_1 d_1 = S_2 d_2$. Следовательно, давление P_1 воды слева должно быть больше, чем давление P_2 воды справа, чтобы суммарная работа, произведенная над рассматриваемым объемом воды, была положительной.

3. Уравнения Эйлера в сравнении с уравнением Бернулли

Закону Бернулли можно придать количественную форму, выписав точный баланс энергии. Это, в частности, приводит к выяснению условий, наложенных на поток.

3.1. Идеальный несжимаемый поток. В работах Бернулли в основном рассматривается вода, которая считается несжимаемой. Фактически в параграфе 8 «Гидродинамики» предложено обобщение на случай «упругих жидкостей», когда учитываются эффекты сжимаемости (что было очень оригинальным новшеством), но мы здесь не будем рассматривать этот случай.

Бернулли также уточняет в своем труде, что он пренебрегает всеми эффектами вязкости, и в частности сцеплением на границе (которое он называет «трением» или «клейкостью» жидкости).

Для несжимаемой идеальной жидкости с плотностью ρ Эйлер (позже) показал [15], что динамические уравнения потока можно записать в виде

$$\begin{cases} \nabla_x \cdot u = 0, \\ \rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla_x)u) = -\rho g e_z - \nabla_x P. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, z)$ — трехмерный вектор пространственных координат, $u = u(t, x)$ — трехмерное поле, представляющее массовую скорость жидкости в момент времени t в точке пространства x , g — ускорение силы тяжести, $P = P(t, x)$ — (скалярное) давление. Первое из этих уравнений представляет собой условие несжимаемости. Во втором уравнении

$\partial_t u + (u \cdot \nabla_x)u$ — ускорение вдоль потока, а правая часть этого уравнения соответствует силам, действующим на частицу жидкости. С математической точки зрения P — это в точности множитель Лагранжа, соответствующий условию несжимаемости. Действительно, взяв дивергенцию второго уравнения, получаем

$$\nabla_x \cdot ((u \cdot \nabla_x)u) = -\Delta_x P.$$

Это означает, что P зависит нелокальным образом от функции u и ее производных, а также от граничных условий.

Отметим, что описание жидкости функциями u и P , данное Эйлером, в некотором смысле отражает позицию наблюдателя, находящегося в заданной точке (в противоположность описанию Лагранжа, когда наблюдатель следует за частицами жидкости).

3.2. Уравнение Бернулли. В своей работе Бернулли ограничивает также свое внимание *стационарным потоком*. Это значит, что эйлерово поле скоростей u не зависит от времени: $u = u(x)$. Напомним, что это не означает, что данная частица жидкости имеет постоянную скорость. Однако в любой данной точке объема, занятого жидкостью, наблюдатель всегда видит одинаковый поток. С другой стороны, частицы жидкости увлекаются потоком: они движутся по течению со скоростью, точно определенной соотношением Бернулли.

Последнее допущение, не очень точно и строго сформулированное, относится к геометрии потока. Бернулли предполагает для простоты, что жидкость «разделена на слои, перпендикулярные направлению движения» и что «частицы жидкости движутся с одинаковой скоростью, так что всюду скорость жидкости обратно пропорциональна соответствующему размеру сосуда». Это допущение можно ослабить, рассматривая тонкую трубку жидкости вокруг линии поля, но необходимое условие состоит в том, что линии поля остаются приблизительно параллельными, т. е. течение ламинарно.

В определении ламинарного течения на самом деле нет полного согласия. Здесь мы ограничимся случаем *безвихревого потока*, для которого $\text{rot } u = 0$. Поскольку функция u имеет также нулевую дивергенцию, конвекционное слагаемое можно переписать в виде

$$(u \cdot \nabla_x)u = \nabla_x \frac{|u|^2}{2} - u \wedge (\text{rot } u) - u(\nabla_x \cdot u) = \nabla_x \frac{|u|^2}{2},$$

и это также потенциальное слагаемое. В итоге приходим к уравнению Бернулли

$$\nabla_x \left(\rho \frac{|u|^2}{2} + \rho g z + P \right) = 0.$$

В общем случае ламинарных несжимаемых потоков закон сохранения выполнен лишь вдоль линий тока:

$$u \cdot (u \cdot \nabla_x)u = (u \cdot \nabla_x) \frac{|u|^2}{2},$$

так что для двух точек 1 и 2 на одной и той же линии тока имеем

$$\rho \frac{|u_\ell|^2}{2} + \rho g z_\ell + P_\ell = \rho \frac{|u_r|^2}{2} + \rho g z_r + P_r.$$

Отсюда следует, в частности, закон Бернулли (при $z_1 = z_2$).

Однако в геометрии, которую рассматривал Бернулли, допущение о непрерывном ламинарном течении не бесспорно. Бернулли кратко его обсуждает в своей диссертации, но связанные с этим физические явления крайне сложны и на самом деле плохо поняты до сих пор.

4. Вихри и турбулентность

Цель этого заключительного раздела — дать представление об упомянутой выше сложности.

4.1. Формирование завихрений. Как показано выше, безвихревой поток удовлетворяет уравнению Бернулли. С другой стороны, легко проверить, что несжимаемая идеальная жидкость (при условии герметичности стенок $u \cdot n = 0$) не создает вихрей. Действительно, в двумерном случае вихрь $\omega = \nabla_x^\perp \cdot u$ просто перемещается:

$$\partial_t \omega + (u \cdot \nabla_x) \omega = 0$$

и потому сохраняется. В трехмерном пространстве вихрь $\Omega = \text{rot } u$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \Omega + (u \cdot \nabla_x) \Omega = \Omega \cdot \nabla_x u.$$

Здесь есть дополнительный «растягивающий» фактор, но если вначале вихрь нулевой, то он таким и остается (при условии, что решение достаточно гладкое, чтобы имела смысл оценка устойчивости).

Бернулли указал в своем мемуаре, что его модель местами неточна, особенно вблизи отверстия и стенок сосуда, вследствие вязкости (которая никогда не равна в точности нулю) и сцепления со стенками. А. Навье [24] и Дж. Стокс [27] обобщили уравнения Эйлера (1) на вязкие жидкости:

$$\begin{cases} \nabla_x \cdot u = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla_x)u = -ge_z - \nabla_x \frac{P}{\rho} + \nu \Delta_x u, \end{cases} \quad (2)$$

где во втором уравнении по-прежнему $\partial_t u + (u \cdot \nabla_x)u$ — ускорение и $-ge_z - \nabla_x \frac{P}{\rho}$ — силы, а слагаемое $\nu \Delta_x u$ отвечает за вязкость: при $\nu > 0$ учтены неконсервативные внутренние силы (трение между соседними частицами жидкости, имеющими разные скорости). На первый взгляд эти уравнения не очень отличаются от (1), особенно когда число Рейнольдса (пропорциональное $1/\nu$) очень велико. В частности, для вихрей получаем транспортно-диффузионное уравнение

$$\partial_t \Omega + (u \cdot \nabla_x) \Omega - \nu \Delta_x \Omega = \Omega \cdot \nabla_x u,$$

в силу которого сохраняется безвихревой характер потока.

Однако уравнения Навье—Стокса имеют порядок 2 (лапласиан включает вторые производные), поэтому нужно наложить больше граничных условий, что позволяет, в частности, моделировать эффект сцепления со стенками (на стенках $u = 0$). И в общем случае это условие несовместимо с предсказаниями, которые дают уравнения Эйлера для невязкой жидкости. Поэтому следует ожидать, что даже жидкости с малой вязкостью ($\nu \ll 1$) ведут себя совершенно не так, как идеальные жидкости ($\nu = 0$), особенно в окрестности стенок. Наблюдения действительно показывают, что вблизи стенок возникают небольшие завихрения, и в принципе они могут дестабилизировать всю жидкость.

4.2. Переход к турбулентности. Л.Прандтль был первым, кто исследовал эти граничные эффекты более подробно, введя понятие пограничного слоя и охарактеризовав его с помощью разномасштабных продолжений [26]. Его главная идея состояла в том, что вдали от стенок вязкий поток похож на идеализированный поток u_E , подчиненный уравнению (1), которое затем связывается с граничным условием посредством довольно крутого профиля, заданного на слое размера $\sqrt{\nu}$. Чтобы понять эту связь, производится раздувание перпендикулярно границе с коэффициентом $\sqrt{\nu}$. В простом случае, когда область двумерна, а граница задана уравнением $x_2 = 0$, для стационарного потока этот профиль $u = (v_1(x_1, x_2/\sqrt{\nu}), \sqrt{\nu}v_1(x_1, x_2/\sqrt{\nu}))$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} \nabla_x \cdot v = 0, \\ (v \cdot \nabla_x)v_1 - \partial_{x_2 x_2}^2 v_1 = -\partial_{x_1} p_E(x_1, 0), \\ v(x_1, 0) = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow \infty} v(x_1, x_2) = u_E(x_1, 0), \end{cases} \quad (3)$$

где (x_1, x_2) — тангенциальная и нормальная координаты, а u_E, p_E — скорость и давление, найденные из уравнения Эйлера (1).

К сожалению, это уравнение не всегда математически корректно. Устойчивость пограничного слоя (и тем самым правомерность двухмасштабного продолжения) зависит от того факта, что градиент давления,

производимого внутренним течением $\partial_{x_1} p_E(x_1, 0)$, не становится положительным и слишком большим.

С физической точки зрения в случае обтекания препятствия наблюдается, что пограничные слои, обтекающие препятствие, постепенно теряют свой импульс и не могут преодолеть встречный (положительный) градиент давления противотока, так что они отделяются от стенок. Другими словами, можно ожидать, что взаимодействие со стенками породит завихрения, которые затем распространятся в жидкости в виде небольших вихрей любых масштабов. Это имеет два особенно важных последствия. С одной стороны, даже при малой вязкости присутствие этих небольших структур делает поток крайне неравновесным. С другой стороны, поле скоростей теряет регулярность и сами уравнения Навье—Стокса (2) становятся неустойчивыми.

Понять этот механизм перехода к турбулентности — важнейшая задача для физиков и математиков. Не пытаясь перечислить все математические результаты в этой области, мы можем охарактеризовать состояние вопроса следующим образом.

- Многомасштабное продолжение, предложенное Прандтлем, оправдано в ряде ситуаций, когда пограничный слой устойчив, например при отрицательном градиенте давления [25, 22, 17] (см. также [8, 9, 18] и дальнейшие ссылки). Отрыв пограничного слоя формализован С. Голдстейном [19] и математически исследован в последние годы в [13].
- Неустойчивость потока в присутствии структур мелкого масштаба столь сильна, что даже теряется единственность решений уравнений Эйлера [14], как и уравнений Навье—Стокса [7, 1]. Это означает, что для потоков такой сложности очень трудно (если вообще возможно) точно установить все подробности поля скоростей.
- Усиленная диссипация и невязкое затухание, вызванные комбинацией малой вязкости и присутствия структур мелкого масштаба, установлены для некоторых потоков (как правило, для сдвиговых потоков) при отсутствии границ (простое описание этих механизмов см. в обзоре [2]).
- Для режимов вполне развившейся турбулентности А. Н. Колмогоров в 1941 году предложил статистический подход, который, в частности, предсказывает распределение вихрей по масштабам (см., например, [16]). Эти прогнозы, хотя и чисто эвристические, совместимы с критическим уровнем регулярности для уравнений Навье—Стокса (порогом единственности [10, 21]).

Однако и прогноз появления вихрей в пограничном слое (дестабилизации ламинарного течения), и вероятностный анализ уравнения Навье—

Стокса с целью строгого обоснования модели Колмогорова (для вполне турбулентного режима), и математическое описание перехода между этими двумя режимами остаются весьма стимулирующими открытыми проблемами. Вероятно, они потребуют подхода, который сильно отличается от обычного подхода в теории уравнений с частными производными, когда можно воспользоваться неустойчивостью и свойствами смешивания — как, например, в КАМ-теории динамических систем (о результатах в этом направлении см. [3, 4]).

Благодарности. Л. Шевийяр, А.-Л. Далибар, И. Галлахер и Б. Мори дали очень полезные комментарии к предварительному варианту этой статьи, за что автор им благодарен.

Лора Сен-Реймон (Laure Saint-Raymond)
перевод Б. Р. Френкина

Литература

- [1] Albritton D., Brué E., Colombo M. Non-uniqueness of Leray solutions of the forced Navier—Stokes equations. arXiv preprint. 2021. arXiv:2112.03116 [math.AP].
- [2] Bedrossian J., Germain P., Masmoudi N. Stability of the Couette flow at high Reynolds number in 2D and 3D // Bull. Amer. Math. Soc. 2019. V. 56, № 3. P. 373–414.
- [3] Bedrossian J., Blumenthal A., Punshon-Smith S. Almost-sure exponential mixing of passive scalars by the stochastic Navier—Stokes equations. arXiv preprint. 2019. arXiv:1905.03869 [math.AP].
- [4] Bedrossian J., Punshon-Smith S. Chaos in stochastic 2d Galerkin—Navier—Stokes. arXiv preprint. 2021. arXiv:2106.13748 [math.PR].
- [5] Bernoulli D. Theoria nova de motu aquarum per canales quocunque fluentes // Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Petropolis, 1729. T. 2 (1727). P. 111–125.
- [6] Bernoulli D. Hydrodynamica, sive de Viribus et Motibus Fluidorum commentarii. Opus Academicum. Argentorati (Strasbourg), France: J. R. Dulsecker, 1738.
- [7] Buckmaster T., Vicol V. Nonuniqueness of weak solutions to the Navier—Stokes equation // Ann. Math. 2019. V. 189, № 1. P. 101–144.
- [8] Caflisch R. E., Sammartino M. Zero Viscosity Limit for Analytic Solutions, of the Navier—Stokes Equation on a Half-Space. Part I. Existence for Euler and Prandtl Equations // Comm. Math. Phys. 1998. V. 192, № 2. P. 433–461.
- [9] Caflisch R. E., Sammartino M. Zero Viscosity Limit for Analytic Solutions of the Navier—Stokes Equation on a Half-Space. Part II. Construction of the Navier—Stokes Solution // Comm. Math. Phys. 1998. V. 192, № 2. P. 463–491.
- [10] Constantin P., E Weinan, Titi E. S. Onsager's conjecture on the energy conservation for solutions of Euler's equation // Comm. Math. Phys. 1994. V. 165, № 1. P. 207–209.

- [11] *D'Alembert J. Le R. Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides: pour servir de suite au Traité de dynamique. Paris, 1744; 1770.*
- [12] *D'Alembert J. Le R. Hydrodynamique // Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers. Nouv. Ed. Geneve, 1778. V. 17. P. 877–880.*
- [13] *Dalibard A.-L., Masmoudi N. Separation for the stationary Prandtl equation // Publ. Math. IHES. 2019. T. 130, № 1. P. 187–297.*
- [14] *De Lellis C., Székelyhidi L. Dissipative continuous Euler flows // Invent. Math. 2013. V. 193, № 2. P. 377–407.*
- [15] *Euler L. Principes généraux du mouvement des fluides // Mémoires de l'Académie royale des sciences et des belles lettres de Berlin. 1757. V. 11. P. 274–315; см. также: Opera Omnia. Ser. 2. V. 12. P. 54–91. Enestrom number 226.*
- [16] *Frisch U. Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov. Cambridge: CUP, 1995. Имеется перевод: Фриш У. Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова. М.: Фазис. 1998.*
- [17] *Gerard-Varet D., Maekawa Y. Sobolev stability of Prandtl expansions for the steady Navier–Stokes equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 2019. V. 233, № 3. P. 1319–1382.*
- [18] *Gerard-Varet D., Masmoudi N. Well-posedness for the Prandtl system without analyticity or monotonicity // Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 2015. T. 48, № 6. P. 1273–1325.*
- [19] *Goldstein S. On laminar boundary-layer flow near a position of separation // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1948. V. 1, № 1. P. 43–69.*
- [20] *Huygens C. Horologium Oscillatorium: Sive de Motu Pendulorum ad Horologia Aptato Demonstrationes Geometricae. Paris: F. Muguet, 1673.*
- [21] *Isett P. A proof of Onsager's conjecture // Ann. Math. 2018. V. 188, № 3. P. 871–963.*
- [22] *Iyer S., Masmoudi N. Global-in- x Stability of Steady Prandtl Expansions for 2D Navier–Stokes Flows. arXiv preprint. 2020. arXiv:2008.12347 [math.AP].*
- [23] *Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР. 1941. Т. 30, № 4. С. 299–303.*
- [24] *Navier H. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides // C. R. Acad. Sci. 1827. T. 6. P. 389–440.*
- [25] *Олейник О. А., Самохин В. Н. Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука, Физматлит, 1997.*
- [26] *Prandtl L. Über flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung // Verhandl. 3. Int. Math. Kongr. Heidelberg (1904). 1905. S. 484–491.*
- [27] *Stokes G. G. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids // Trans. Cambridge Phil. Soc. 1849. V. 8. P. 287–319.*

Леонард Эйлер (1707–1783)

По широте интересов и разнообразию деятельности Эйлер не уступает Леонардо да Винчи: он был архитектором (рассчитывал нагрузки на новаторский проект моста Кулибина¹), географом (под началом Эйлера был составлен первый атлас Российской империи), занимался военным делом, навигацией, астрономией и т. д.

Эйлер получил фундаментальные результаты и заложил основы многих разделов математики: теории чисел (дзета-функция, непрерывные дроби, первообразные корни), анализа (эллиптические функции, суммирование рядов), вариационного исчисления (уравнение Эйлера—Лагранжа), специальных функций, геометрии поверхностей (определение кривизны через нормальные сечения, уравнения геодезических, понятие конформного отображения). Его результаты в механике не менее значительны, мы упомянем лишь углы Эйлера и гидродинамическое уравнение Эйлера.

Леонард Эйлер, один из величайших математиков, родился в Базеле (Швейцария) 15 апреля 1707 года в семье небогатого протестантского священника. В то время Базель был центром европейского образования и культуры. Базельский университет, основанный в XVI веке, являлся очагом просвещения. В середине XVI века в Базель из Голландии переехала семья Бернулли, сыгравшая важную роль в судьбе Эйлера.

Первоначальное образование Леонард Эйлер получил от отца, который в молодости успешно занимался математикой под руководством Якоба Бернулли. Пастор готовил сына к духовной карьере, но обучал и мате-



¹ Иван Кулибин (1735–1818), знаменитый русский механик-самоучка.

матике. Обучаясь в последних классах гимназии, Эйлер посещал лекции по математике в университете, где преподавал один из крупнейших математиков того времени Иоганн Бернулли (1667–1748), младший брат Якоба Бернулли. Иоганн Бернулли заметил талантливого юношу и посоветовал ему самостоятельно изучать первоисточники, а также разрешил по субботам после обеда приходить к нему в дом для разъяснения трудных мест. Там Эйлер познакомился с его сыновьями Николаем (1695–1726) и Даниилом (1700–1782).

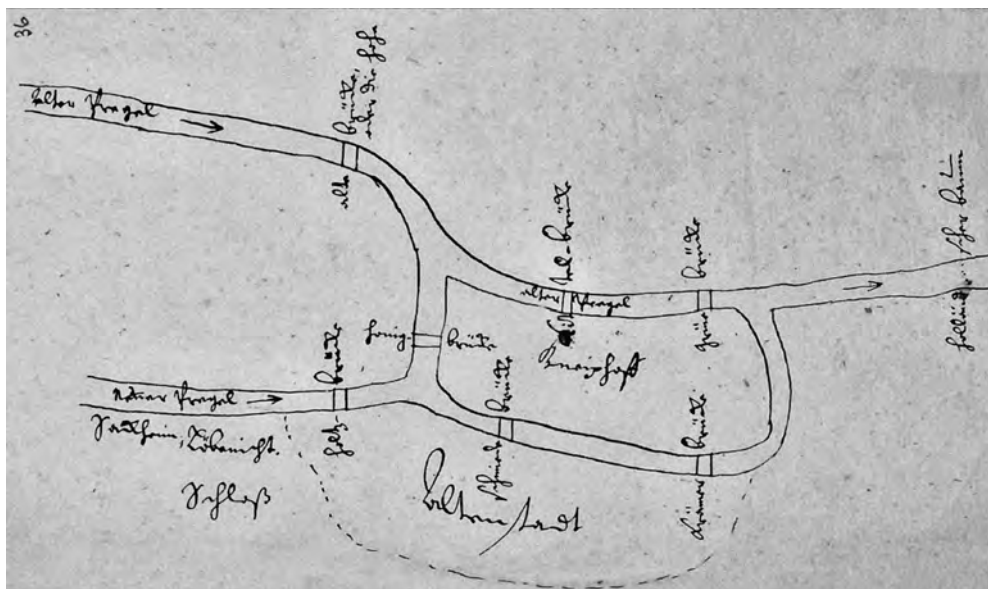
В 1723 году Эйлер получил степень магистра искусств. На испытании он произнес речь на латыни о сравнении философии Декарта и Ньютона. По желанию отца Эйлер изучает богословие. Оба понимали, что в Швейцарии научная карьера бесперспективна: число претендентов на профессорские места сильно превышало число вакансий. В 1727 году Эйлер делает попытку занять должность на кафедре физики в Базельском университете, но безуспешно.

Россия, Петербург (1727–1741). Петр Великий имел планы основать академию наук в России еще в последние годы XVII столетия. Он трижды обсуждал свои планы с великим Лейбницем. До открытия академии Петр не дожил: лишь в 1724 году Сенат принял решение о ее создании, а открыла ее Екатерина I в 1725 году.

Петербургская академия наук выгодно отличалась от других европейских академий, во-первых, твердым бюджетом (24 тыс. рублей в год при общем бюджете страны около 8 млн рублей) и щедрой оплатой труда профессоров, во-вторых, тем, что академия носила более универсальный характер (она состояла из трех классов: математического, физического и гуманитарного), в-третьих, при академии имелись гимназия и университет.

Своих кадров в России не было, поэтому стали приглашать иностранцев. Так, были присланы приглашения сыновьям знаменитого Иоганна Бернулли — Николаю и Даниилу. Николай стал профессором математики, а Даниил — профессором физиологии. У Эйлера, провожавшего своих друзей в Россию, появилось, по его словам, «неописуемое желание отправиться с ними в Санкт-Петербург». Даниил обещал похлопотать и выполнил свое обещание: Эйлеру было предложено место адъюнкта на кафедре физиологии с окладом 200 рублей в год. Леонарда не смущало, что ему предстояло заниматься медициной. В те времена медицина не воспринималась как наука, далекая от математики: например, сам Иоганн Бернулли чередовал занятия математикой с медицинской практикой.

В 1727 году двадцатилетний Эйлер, получив от Петербургской академии наук 130 рублей на проезд, отправился в Россию. Эйлер сразу включился в интенсивную работу Академии наук, его работы, публиковав-

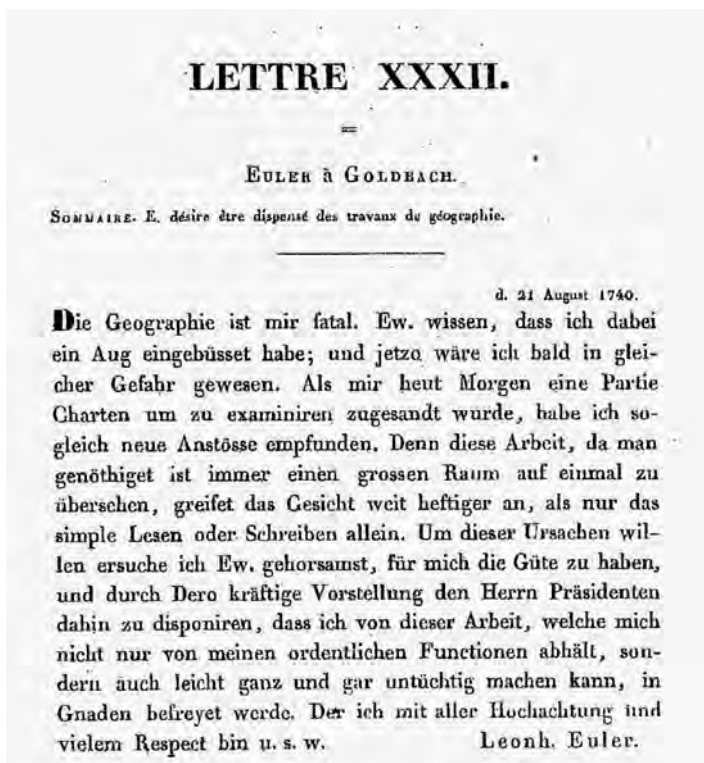


Из письма Эйлера от 9 марта 1736 года: найти маршрут, проходящий один и только один раз по каждому из семи указанных на плане мостов (начальная и конечная точки маршрута совпадать не обязаны). Эта задача известна как задача о кёнигсбергских мостах.

шиеся в «Комментариях Петербургской императорской академии наук», быстро снискали ему известность и почетное место среди математиков Европы. Уже в 1730 году Эйлер — профессор кафедры физики с окладом в 400 рублей. Через два года Даниил Бернулли уехал в Базель, и Эйлер занял кафедру математики с окладом 600 рублей в год. Эйлер стал одной из самых значительных фигур в Академии наук, он постоянно делает доклады, публикует статьи, не пренебрегает никакими поручениями. Его привлекли к составлению генеральной карты России, и он занялся картографией, но главным в его жизни оставалась математика. Именно в эти годы он сложился как великий математик. Однако интенсивная работа пагубно повлияла на его здоровье — в возрасте 27 лет он ослеп на правый глаз.

7 января 1733 года Эйлер женился на Катарине Гзель — дочери академического живописца, родом из Швейцарии. Они счастливо прожили более 40 лет; жена родила ему 13 детей, из которых выжили пятеро — три сына и две дочери.

Эйлер был бесконфликтным и глубоко религиозным человеком. Он был доброжелателен и умел ладить со всеми. Работал при любых обстоятельствах и в любой обстановке: «Ребенок на коленях, кошка на спине — так писал он свои бессмертные произведения», — рассказывали о нем.



Письмо Эйлера к Гольдбаху, в котором Эйлер рассказывает, что из-за работы с географическими картами он лишился зрения в одном из глаз.

К 1740 году здоровье Эйлера ухудшилось из-за постоянных перегрузок, да и суровый петербургский климат давал о себе знать. В это время прусский король Фридрих II намеревался преобразовать Королевское общество в Академию наук и с этой целью пригласил Эйлера в Берлин. Эйлер принял предложение Фридриха и 29 мая 1741 года уволился со службы в Петербургской академии наук. При этом он остался почетным членом Петербургской академии с пенсией 200 рублей в год. В июне 1741 года Леонард Эйлер выехал из Петербурга в Берлин.

Пруссия, Берлин (1741–1766). Берлинский период Леонарда Эйлера продолжался четверть века, с 1741 по 1766 год. Отношения с королем у Эйлера не сложились. В Берлине считали, что в обязанности ученых входит, кроме всего прочего, служить украшением гостиных, радовать изящной беседой. Эйлер этого не делал — он занимался математикой. В 1744 году была открыта Берлинская академия наук, но после отъезда Лейбница Эйлеру не предложили поста ее президента — он был только директором математического отделения.

В трудах Петербургской академии наук Эйлер опубликовал за эти годы 109 работ, а в трудах Берлинской академии наук — 127 работ. Он оказывает Петербургской академии наук многочисленные услуги, заботится о пополнении библиотек, ведет интенсивную переписку с русскими академиками. Необходимо отметить, что всю свою жизнь великий математик испытывал глубочайшую признательность Петербургской академии наук, сознавая, что его приезд в Петербург имел решающее значение для всей его судьбы.

В письме к Шумахеру² от 18 ноября 1749 года Эйлер писал:

Я и все прочие, имевшие счастье некоторое время состоять при русской императорской Академии, должны признать, что всем, что собой представляем, обязаны благоприятным обстоятельствам, в которых мы там находились. Что собственно до меня касается, то при отсутствии такого превосходного обстоятельства я бы вынужден был, главным образом, обратиться к другим занятиям, в которых, по всем признакам, мог бы заниматься только крохоборством. Когда Его Королевское Величество недавно меня спрашивал, где я изучил то, что знаю, я, согласно истине, ответил, что всем обязан своему пребыванию в Петербургской академии.

Эйлер прилагал все усилия, чтобы его семья ни в чем не нуждалась. В 1753 году ему удалось купить небольшое красивое имение в Шарлоттенбурге с домом и садом. В 1756 году началась семилетняя война Пруссии с Россией, жизнь дорожает, деньги обесцениваются, а жалованье не растет. Наступающие русские войска разрушили имение в Шарлоттенбурге, однако русские офицеры (петербургские знакомые Эйлера, в том числе его крестник) убедили Эйлера, что он как почетный член академии может требовать компенсации. Эйлер пишет письма в Петербург, в том числе М. В. Ломоносову, но дело затягивается. Только Екатерина II, взойдя на престол после переворота, приказала возместить весь ущерб Эйлеру (1200 рублей, его годовая зарплата в Петербурге) и позвала его обратно в Петербург. Положение Эйлера в Берлине тяготит его. В 1759 году умер президент Берлинской академии наук Мопертюи, оклад которого был в два раза выше оклада Эйлера. Эйлер надеялся, что хоть теперь Фридрих предложит ему должность президента академии, но тщетно. К началу 1760-х годов отношения Эйлера с Фридрихом обострились. К разрыву подталкивало унижительное положение: великому математику назначено было жалование в 1200 талеров в год, что соответствовало примерно 400 рублям.

² Шумахер, Иоганн Даниэль, (1690–1761). Уроженец Эльзаса, вместе с Лефортом приехал в Россию, работал в созданной Петром I библиотеке. Именно Шумахер уговаривал приехать в Россию ученых, рекомендованных Х. Вольфом. Впоследствии был секретарем Академии наук, решая все денежные и хозяйственные вопросы. Был женат на дочери повара Петра I.

В декабре 1765 года Эйлер письменно обратился к канцлеру графу Воронцову с просьбой о принятии его в Петербургскую академию наук. Эйлер выдвинул следующие требования: должность вице-президента с годовым окладом 3000 рублей, предоставление квартиры без солдатского постоя, а также кафедры физики для старшего сына с окладом 1000 рублей в год и достойных мест по медицинской и артиллерийской части для среднего и младшего сыновей.

Об условиях Эйлера Воронцов доложил Екатерине II, на что императрица ответила:

Конечно, я нахожу его совершенно достойным желаемого им звания (...) При настоящем положении академии там нет денег на жалование в 3000 рублей, но для человека с такими достоинствами, как г-н Эйлер, я добавлю к академическому жалованию из государственных доходов, что вместе составит требуемые ему 3000 рублей. У него будет казенная квартира и ни малейшей тени солдат. Хотя в академии нет свободной кафедры физики с жалованием в 1000 рублей для старшего сына, однако я ее ему назначу, также свободную практику второму сыну и дам место, если он пожелает поступить на службу. Третий сын будет помещен без всякого затруднения. Я уверена, что моя академия возродится из пепла от такого важного приобретения, и заранее поздравляю себя с тем, что возвратила России великого человека.

В 1766 году Эйлер вернулся в Россию.

Россия, Санкт-Петербург (1766–1783).

17 июля 1766 года Леонард Эйлер возвратился в Санкт-Петербург. На следующий день после своего приезда Эйлер с двумя старшими сыновьями был принят императрицей. Екатерина II пожаловала ему 8000 рублей на покупку дома. Эйлер приобрел на Николаевской набережной (ныне набережная Лейтенанта Шмидта) дом, в котором прожил до конца своих дней. Сейчас в этом доме располагается школа № 27, на стене которой висит мемориальная доска.

Эйлер сразу же включился в работу Петербургской академии наук. Он привез много рукописей, которые не успел опубликовать в Берлине. Эйлер, как и в молодости, полон новых идей, которые нужно было реализовывать, он работает с тем же рвением, как и прежде.



Эйлер интересовался проблемой движения крови по артериям. Эта тема была важна для военной хирургии. Еще в январе 1737 года он участвовал в обсуждении в академии работы И. Вейтбрехта «О движении крови». В 1742 году Эйлер впервые сформулировал и решил задачу о течении жидкости по эластичной трубке. В работе 1775 года Эйлер исследовал волновое течение крови по артериям. Из-за значительных математических трудностей он не смог решить полученную систему уравнений и произнес знаменитую фразу: «Если бы Бог хотел, чтобы мы поняли течение крови по артериям, он не придумал бы такие сложные уравнения».



В 1774 году умерла жена Эйлера; она была похоронена на Смоленском лютеранском кладбище. Чтобы не менять жизненный уклад, Эйлер женится на ее сводной сестре Абилай Гзель. Зрение Эйлера резко ухудшилось. Екатерина II лично для Эйлера вызвала знаменитого окулиста барона Вентцеля, который удачно провел операцию по удалению катаракты. Эйлер должен был не напрягать зрение в течение нескольких дней после операции, однако он не смог этого сделать и тут же включился в работу. В результате Эйлер окончательно ослеп.

К слепоте стала присоединяться и глухота, но ничто не может заставить Эйлера прекратить работу: теперь он свои труды диктует. В течение 12 лет до последнего дня жизни он надиктовал 10 больших книг и более 400 статей. Ему удавалось очень ясно писать на черном столе белым мелом. Последние годы его жизни академические издания не справлялись с потоком работ слепого ученого. Эйлер шутливо обещал директору академии графу Орлову, что его работы будут заполнять «Комментарии» академии в течение 20 лет после его смерти. Академия наук издавала его труды 47 лет после его смерти, число работ дошло до 771.

18 сентября 1783 года был обычный день в жизни Эйлера, он занимался математикой со своим внуком, производил вычисления. Около 5 часов вечера появилась резкая головная боль. Прежде чем потерять сознание, Леонард Эйлер произнес: «Я умираю». В 11 часов вечера Эйлера не стало. По словам французского математика и философа Н. Кондорсе, «Эйлер перестал вычислять и жить». Великий математик был похоронен на Смоленском кладбище рядом с могилой первой жены. В 1956 году его прах был перенесен в некрополь Александро-Невской лавры.



Леонард Эйлер — самый плодовитый математик за всю историю. При его жизни было издано 530 его книг и статей. В 1910 году историком математики Г. Энестромом была составлена библиография, содержащая 886 наименований. С 1910 года Швейцарское общество естествоиспытателей издает собрание сочинений Эйлера. К началу 80-х годов XX века вышло 72 тома. Восемь дополнительных томов должна составить научная переписка Эйлера; последний на данный момент том вышел в 2021 г. Таким образом, для того, чтобы издать полное собрание сочинений Эйлера, включая переписку, понадобилось более ста лет.

Л. В. Коновалова

Треугольники Леонарда Эйлера и эллиптические кривые

Леонард Эйлер оставил нам огромное научное наследие, включающее работы по математике, физике и многим другим предметам, и большая часть современной математики начинается с идей Эйлера. В этой заметке мы сосредоточимся на его знаменитой статье по элементарной геометрии «Простые решения некоторых очень сложных геометрических задач» [4], опубликованной в Санкт-Петербурге в 1767 году, по возвращении Эйлера в Россию после двадцатипятилетнего пребывания в Берлине. Эта публикация является отправной точкой для многих теорем о треугольниках, демонстрирующих красоту математики в доступной для старшеклассников форме. Но, как мы увидим, она, помимо прочего, послужила источником интересных результатов в области алгебраической геометрии, в которой используются и другие идеи, восходящие к Эйлеру.

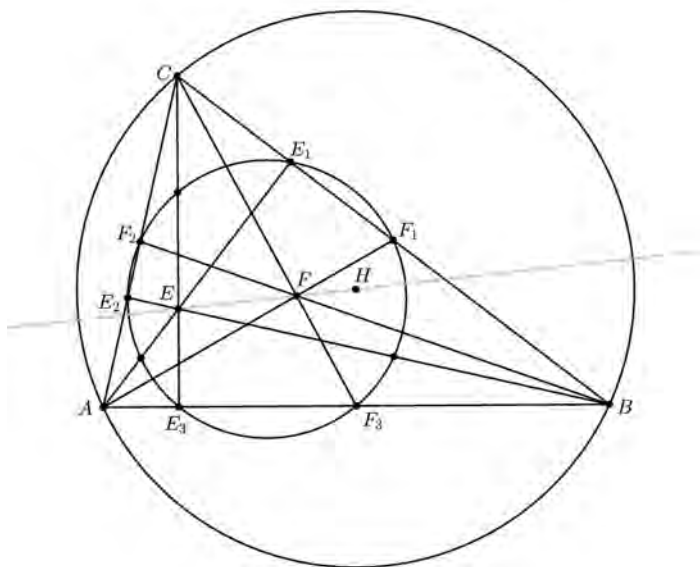


Рис. 1. Прямая Эйлера

Напомним, о чем идет речь. Эйлер рассматривает четыре центра треугольника ABC : ортоцентр E (в обозначениях Эйлера) — точка пересечения высот; центроид F — точка пересечения медиан; центры G и H вписанной и описанной окружностей соответственно (рис. 1). Он показывает, что точки E , F и H лежат на одной прямой (сегодня она носит название *прямой Эйлера* треугольника) и что $EF : FH = 2$. Далее он показывает, как восстановить исходный треугольник по любому из треугольников EFG , EGH и FGH : по длинам сторон этих треугольников он строит кубическое уравнение, корнями которого служат стороны исходного треугольника. Обязательное наличие у кубического уравнения трех положительных корней накладывает ограничения на расстояния между центрами, которое Эйлер обсуждает в случае равнобедренного треугольника. Одним из следствий вычислений, сделанных Эйлером, является так называемая *формула Эйлера* $R^2 - d^2 = 2rR$, связывающая расстояние $d = GH$ между центрами вписанной и описанной окружностей с их радиусами r и R . Из этого соотношения мгновенно следует *неравенство Эйлера* $R \geq 2r$.

В этом месте приходится испортить наш рассказ необходимым замечанием. Эйлер рассматривает различные соотношения между расстояниями в треугольнике, но не привлекает явно радиус описанной окружности. Поэтому в действительности ни формула, ни неравенство Эйлера в упомянутой статье не появляются. С другой стороны, неравенство $R \geq 2r$ имеется в работе 1746 года британского математика Уильяма Чаппла [2], опубликованной в приложении к *Gentleman's Magazine*, хотя и с сомнительными доказательствами.

Конечно, прямая Эйлера в статье есть, и позже выяснилось, что многие другие замечательные центры треугольника также лежат на этой прямой [14], например центр окружности девяти точек. Однако в этой заметке мы хотели бы проследить еще одну тему, и для этого мы должны представить еще одного швейцарского¹ эмигранта в Санкт-Петербурге. Зрение Эйлера ухудшалось с 1738 года, и к 1772 он полностью ослеп, поэтому он пригласил семнадцатилетнего Николая Фусса, обучающегося у Даниила Бернулли в Базеле, чтобы тот помогал ему в его работе. Фусс участвовал в публикации более 200 статей, написанных Эйлером в промежутке между 1772 и 1783 годами, до самой его (Эйлера) смерти. Позднее Фусс женился на внучке Эйлера Альбертине, стал уважаемым академиком и внес свой вклад в развитие науки и образования в России. Мы обязаны ему трогательным биографическим некрологом Эйлеру. В 1794 году Фусс дока-

¹ Поскольку автор этого текста подозревает, что одной из причин, по которой его попросили написать об Эйлере, является то, что он швейцарец, он беззастенчиво добавит в изложение еще пару швейцарских персонажей.

зал теорему [7], обобщающую результат Эйлера на вписанно-описанные четырехугольники: расстояние d между центрами вписанной и описанной окружностей четырехугольника связано с их радиусами r и R формулой

$$(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2).$$

Между прочим, в том же томе «Известий Петербургской императорской академии наук» есть еще шесть статей Эйлера, последняя из которых имеет интересное название «Является ли число 1000009 простым?» (Не является, поскольку, как показал Эйлер, оно может быть представлено двумя существенно различными способами в виде суммы двух квадратов!) Фусс позднее попробовал найти аналогичное соотношение для многоугольников с большим числом сторон. В томе «Известий» 1798 года (в который вошли четыре статьи Эйлера) он опубликовал решение этой задачи для многоугольников с не более чем восемью сторонами, но лишь в случае, когда одна из вершин многоугольника принадлежит линии центров окружностей [8]. Якоб Штейнер (еще один швейцарский математик) поставил общую задачу во втором номере журнала Крелля в 1826 году [16] и привел без доказательства ответ для многоугольников до восьмиугольника (исключая семиугольники). Интересным совпадением является то, что статья Абеля «Исследования эллиптических функций», следующая за [16], положила начало теории эллиптических кривых, которая оказалась ключом к решению общего случая.

Карл Густав Якоби рассказывает эту историю в 1828 году [13] и отмечает, что Фусс допустил «к сожалению, нечасто встречающуюся» ошибку, сформулировав утверждение в частном случае при том, что оно в действительности выполнено в общем случае. Тем временем в 1822 году появилась книга Понселе [15]. В ней было показано, что если пара конических сечений обладает тем свойством, что одно вписано в многоугольник, а другое описано вокруг него, то существует бесконечно много многоугольников с этим свойством и любая точка описанной коники может служить вершиной (пример такой конфигурации приведен на рис. 2). Никакой связи со Швейцарией здесь нет, но есть связь с Россией: Жан-Виктор Понселе участвовал в русской кампании Наполеона (которую некоторые читатели назовут Отечественной войной 1812 года) и был взят в плен в битве под Красным. Он написал свою книгу, будучи военнопленным в Саратове между 1812 и 1814 годами.

Якоби показывает, что уравнения Фусса эквивалентны уравнениям Штейнера, и предлагает общее аналитическое решение для произвольного числа сторон в терминах эллиптических интегралов. Позже Артур Кэли [1] дал алгебраическое решение, предложив для каждого n уравне-

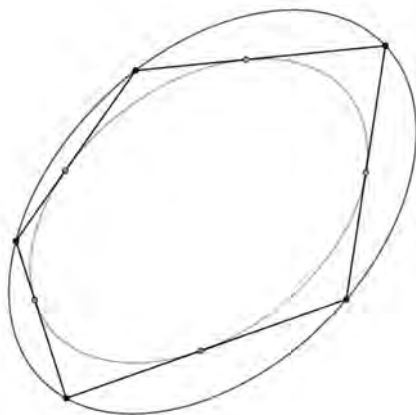


Рис. 2. К теореме Понселе

ние для геометрического места пар конических сечений, допускающих n -сторонний вписанно-описанный многоугольник. Он использовал теорию эллиптических функций Абеля и Якоби, но напомнил нам, что его результат на самом деле является следствием формул сложения Эйлера для эллиптических интегралов [3, 5].

Объяснение этих результатов в современной терминологии было дано совсем недавно Филиппом Гриффитсом и Джозефом Харрисом [12, 10, 11]. Рассматривая два конических сечения общего положения, они замечают, что множество пар, состоящих из точки первой коники и касательной из нее ко второй конике, является эллиптической кривой (которая топологически является тором $S^1 \times S^1$) с двумя инволюциями: одна заменяет точку другой точкой пересечения прямой с первой коникой, а другая заменяет одну касательную на другую, проходящую через ту же точку. Композиция этих инволюций представляет собой сдвиг на элемент эллиптической кривой, и вписанно-описанный многоугольник существует тогда и только тогда, когда указанный элемент имеет конечный порядок. Таким образом, результат Кэли можно понимать как описание геометрического места точек конечного порядка в семействе эллиптических кривых.

Интерес автора к этой истории возник благодаря недавнему результату Джованни Галлавотти и Яна Жослена [9], которые пересмотрели динамическую систему, введенную Людвигом Больцманом в 1868 году: частица в плоскости, находящаяся под воздействием центральной силы притяжения, подчиненной закону обратных квадратов, упруго отскакивает от прямой линии, не проходящей через центр (рис. 3). Как показали Галлавотти и Жослен, система, помимо энергии, имеет вторую независимую

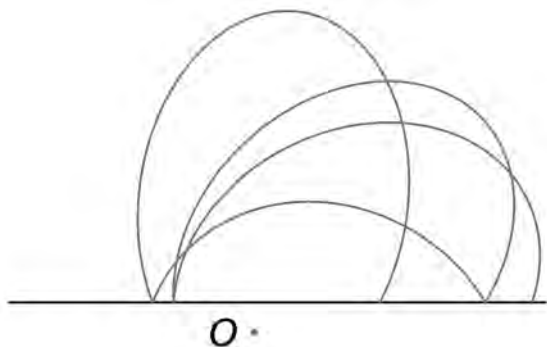


Рис. 3. Траектория частицы, отскакивающей от прямой

сохраняющуюся величину. Оказывается [6], что если для данных значений двух сохраняющихся величин одна из орбит периодична, то и все остальные орбиты с такими же значениями сохраняющихся величин периодичны. И снова эллиптическая кривая с двумя инволюциями дает объяснение этому феномену.

Джованни Фельдер (*Giovanni Felder*)

перевод Ф. Бахарева

Литература

- [1] Cayley A. On the Porism of the in-and-circumscribed Polygon // Phil. Trans. Royal Soc. London. 1861. V. 151. P. 225–239.
- [2] Chapple W. An Essay on the properties of triangles inscribed in, and circumscribed about two given circles // Miscellanea curiosa mathematica. 1749. V. 1, № IV. P. 117–124.
- [3] Euler L. De integratione aequationis differentialis $\frac{m dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{n dy}{\sqrt{1-y^4}}$ // Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. 1761. V. 6. P. 37–57; см. также: Opera Omnia. Ser. 1. V. 20. P. 58–79. Enestrom number 251.
- [4] Euler L. Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum // Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. 1767. V. 11. P. 103–123; см. также: Opera Omnia. Ser. 1. V. 26. P. 139–157. Enestrom number 325.
- [5] Euler L. Integratio aequationis

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}}$$

// Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. 1768. V. 12. P. 3–16; см. также: Opera Omnia. Ser. 1, V. 20. P. 302–317. Enestrom number 345.

- [6] *Felder G.* Poncelet property and quasi-periodicity of the integrable Boltzmann system. arXiv preprint. 2008. arXiv:2008.03480 [math.DS].
- [7] *Fuss N.* De quadrilateris quibus circulum tam inscribere quam circumscribere licet // *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae.* 1794. V. 10. P. 103–125.
- [8] *Fuss N.* De polygonis symmetrice irregularibus circulo simul inscriptis et circumscriptis // *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae.* 1798. V. 13. P. 166–189.
- [9] *Gallavotti G., Jauslin I.* A Theorem on Ellipses, an Integrable System and a Theorem of Boltzmann. arXiv preprint. 2008. arXiv:2008.01955 [math.DS].
- [10] *Griffiths Ph., Harris J.* A Poncelet theorem in space // *Comment. Math. Helv.* 1977. V. 52. P. 145–160.
- [11] *Griffiths Ph., Harris J.* On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism // *Enseign. Math. Sér. 2.* 1978. T. 24, № 1–2. P. 31–40.
- [12] *Griffiths Ph.* Variations on a theorem of Abel // *Invent. Math.* 1976. V. 35, № 1. P. 321–390.
- [13] *Jacobi C. G. J.* Über die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementar-Geometrie. // *C. G. J. Jacobi's Gesammelte Werke: Herausgegeben auf Veranlassung der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften* / Ed. by C. W. Borchardt. CUP, 2013. P. 277–294.
- [14] Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers. <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html> (accessed 24 October 2020).
- [15] *Poncelet J.-V.* Traité des propriétés projectives des figures. T. 1. 2^{ème} ed., revue, corrigée et argumentée d'annotations nouvelles. Paris: Gauthier-Villars, 1865.
- [16] *Steiner J.* Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen. Geometrische Aufgaben und Lehrsätze // *J. reine angew. Math.* 1896. Bd. 2. S. 96–100, 286–292.

Габриэль Ламе (1795–1870)

Французский ученый Габриэль Ламе — математик, механик, инженер, член-корреспондент Петербургской академии наук, член Парижской академии наук. С 1820 по 1831 год он жил и работал в Санкт-Петербурге, в это время сформировались его научные интересы.

Его научная деятельность охватывала широкий спектр областей математики и физики, от теории чисел до теории упругости и математической физики, от чисто теоретических исследований (таких как доказательство теоремы Ферма для $n = 7$) до самых конкретных приложений (например, строительство висячих мостов), он разработал общую теорию криволинейных координат. СПбГУ совместно с посольством Франции организовал кафедру Ламе в Петербурге. Габриэль Ламе — один из 72 ученых, чьи имена увековечены на Эйфелевой башне.

Габриэль Ламе родился в городе Туре на западе Франции. Первоначальное образование получил в лицее Людовика Великого в Париже. В 16 лет он вынужден был оставить лицей и ради заработка поступить мелким служащим в адвокатскую контору, но однажды ему попала в руки книга Лежандра «Начала геометрии».

Он был настолько увлечен книгой, что вернулся в лицей, успешно его окончил и поступил в Политехническую школу. После этого еще в течение трех лет учился в Горной школе, там же он встретился и подружился с будущим знаменитым физиком Б. Клапейроном, с которым долгие годы был неразлучен.

В России после войны 1812 года развернулись большие работы по восстановлению инженерных сооружений, зданий, дорог. Инженеров не хватало, поэтому преподавателей Института инженеров путей сообщения, основанного в 1809 году, откомандировали в различные местности



для руководства работами. Директору института, испанцу А. А. Бетанкуру, пришлось привлекать европейских специалистов для преподавания. В 1819 году профессор института П. Базен поехал во Францию, чтобы пригласить двух молодых, подающих надежды инженеров в Корпус инженеров путей сообщения для преподавательской деятельности. Он выбрал Ламе и Клапейрона. Они согласились с предложением, соблазнившись обещанными преимуществами и высокой степенью свободы. Ламе и Клапейрон читали лекции по высшей математике, физике, астрономии, механике с составлением проектов машин, прикладной химии, а также «Курс новых открытий и усовершенствований в искусствах». Инженер путей сообщения А. И. Дельвиг вспоминал, что Ламе «был человек положительный, глубоко ученый, приятной наружности и изящных форм, читал лекции красноречиво и твердо знал, что читал».

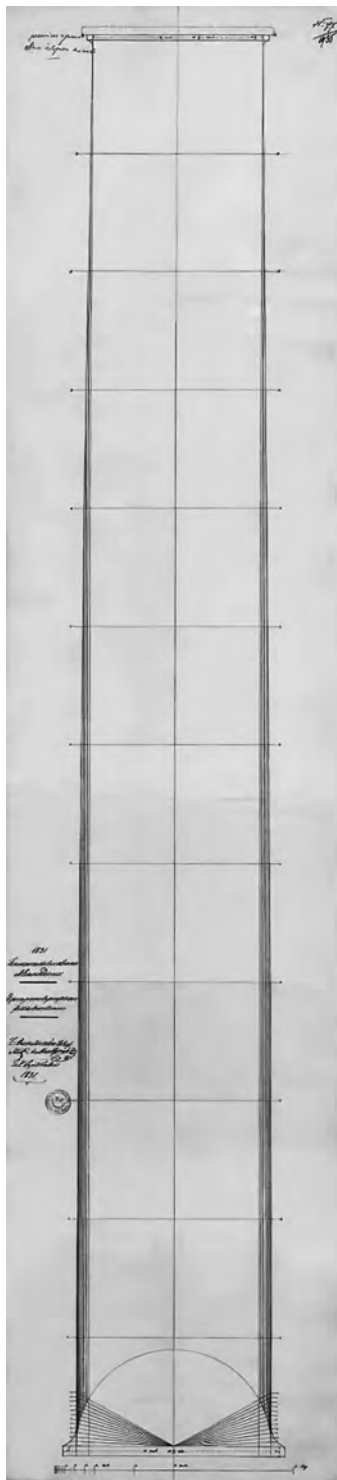
Научные интересы Ламе были связаны с работами, которые производились инженерами Корпуса путей сообщения: строительство Исаакиевского собора, шоссе Санкт-Петербург—Москва, цепных мостов и т. п. [2].

Ламе принимал участие в строительстве Александровской колонны. В 1829 году был утвержден представленный О. Монферраном проект триумфальной колонны в честь победы России над Наполеоном, высотой 47,5 метра. Для того, чтобы смотреть на колонну было приятно, ее форма должна иметь чуть бочкообразный вид. Эту линию кривизны колонны, т. е. очертания наружного контура, и рассчитал Ламе. Он писал:

Вкус в согласии с правилами искусства как бы требует, чтобы колонна по мере подъема в высоту постепенно уменьшалась в диаметре и чтобы это уменьшение происходило посредством плавной кривой.

Колонна сделана из единого монолита — гранита и держится только собственной тяжестью. Ее перевозка и подъем также были труднейшей инженерной задачей. И сегодня, восхищаясь красотой и величием Александровской колонны, можно вспомнить Габриэля Ламе и его, по слову Монферрана, «счастливый выбор кривизны».

Ламе с Клапейроном разработали проекты висячих мостов через Язу, Москву-реку и через Лугу в Ямбурге. Они написали несколько статей о висячих мостах и о построении веревочных многоугольников. Считается, что Ламе и Клапейрон впервые разработали идеи графостатики, введя понятие веревочного многоугольника как орудия исследования. В связи с проблемами теории упругости Ламе занимался и теорией рядов, в частности рядов Фурье. Под влиянием Остроградского Ламе начал интересоваться проблемами распространения тепла. Об этом свидетельствует его статья, посвященная законам охлаждения и затвердевания жидкого шара, опубликованная в 1831 году [7]. Современные исследователи считают,



Александровская колонна
в Санкт-Петербурге

Чертеж Александровской колонны,
выполненный Ламе [6]

что это была первая в мире работа по теории задач со свободными границами.

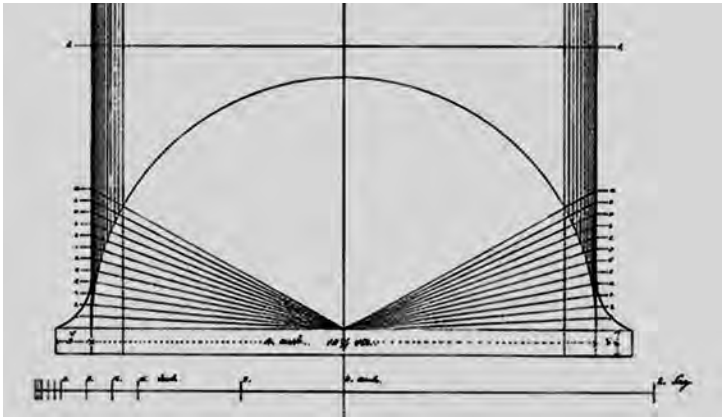
Ламе интересовался и железнодорожным строительством. В 1830 году он был командирован на открытие железной дороги Ливерпуль—Манчестер, чтобы перенять опыт строительства. За сделанный по итогам поездки доклад ему был пожалован орден Станислава III степени.

Однако через одиннадцать лет успешной карьеры Ламе решил покинуть Россию. Точная причина возвращения на родину до сих пор неизвестна, но, возможно, сыграла свою роль Июльская революция 1830 года во Франции, породившая у российского правительства подозрительное отношение к французам. И сам Ламе (сторонник идей Сен-Симона) тяготился той политической обстановкой, которая сложилась в России эпохи царствования Николая I. Письма Ламе также помогают нам понять причины столь внезапного отъезда ученого. Еще в 1828 году он писал: «Французские семьи покидают Россию. Круг нашего общения резко сокращается, и, если мы не вольемся в русское общество, которое не подходит нам и которому не подходим мы, наш салон превратится в пустыню. Меня эта перспектива не пугает. Я достаточно люблю одиночество. Но моя жена, у которой нет математики для того, чтобы усердно ею заниматься, и которая не может даже пообщаться с мужем, когда он усердно работает, в полном праве начать жаловаться, и меня это беспокоит».

В 1831 году Г. Ламе, профессор и майор на российской службе, член-корреспондент Петербургской академии наук, подал в отставку (официально — по причине болезни) и вернулся в Париж. За время работы в России Ламе опубликовал 18 работ, посвященных вопросам математики, строительной механики, умозрительной и прикладной механики. Анализ его работ показывает, что основные научные направления, которым Ламе посвятил свою дальнейшую жизнь, — теория упругости, аналитическая теория тепла, теория криволинейных координат — были им намечены еще в Петербурге. Именно в России он получил первые результаты в области математической физики.

После отъезда из России Ламе еще в течение нескольких лет продолжает заниматься проблемами железнодорожного строительства. Он вместе с Клапейроном разрабатывает первый перспективный план начертания сети железных дорог во Франции, а спустя некоторое время они приступают к строительству железной дороги Париж—Сен-Жермен.

Однако Ламе быстро отошел от своей инженерной деятельности. В 1832 году он начал преподавать физику в Политехнической школе, затем он читал лекции в Сорбонне. В последующие десятилетия им были созданы основные труды в области математической физики, которые и прославили его имя.



Деталь чертежа на с. 56.

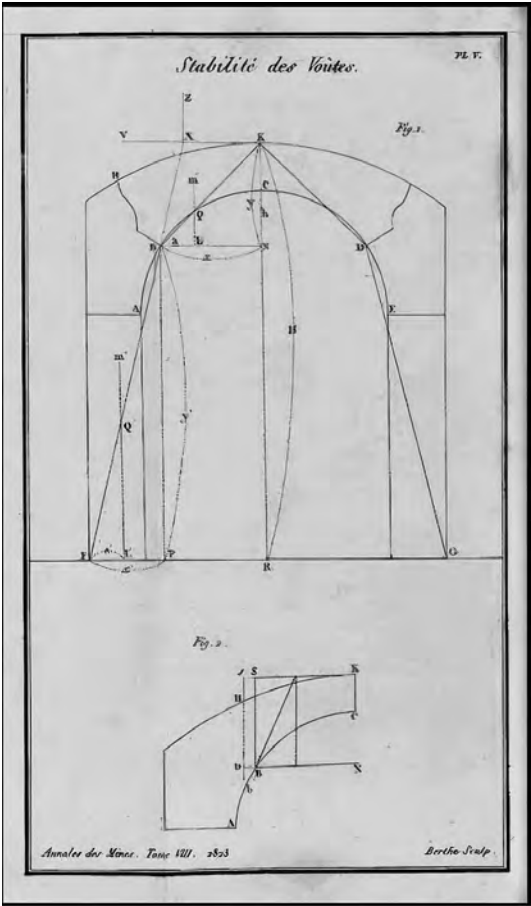


Рисунок из статьи Ламе и Клапейрона «Об устойчивости сводов» [5].

Одновременно с Огюстеном Луи Коши Ламе анонсировал доказательство Великой теоремы Ферма. Оба частями публиковали свои предполагаемые доказательства, пока Эрнст Куммер не указал на общую для них ошибку: и Ламе, и Коши предполагали единственность разложения на простые множители в некоторых кольцах, в которых на самом деле это свойство не выполнялось.

В 1863 году из-за потери слуха Ламе был вынужден оставить свою работу. Последние годы его прошли тяжело. А. И. Дельвиг вспоминал, что он видел Ламе незадолго до кончины, уже совсем старым, глухим и болезненным, однако он «с удовольствием отзывался о времени, проведенном им в России, и относился к ней с благодарностью».

М. М. Воронина

Литература

- [1] *Bertrand M. J. Éloge de Gabriel Lamé, ingénieur en chef des mines // Ann. des Mines. Sér. 7. 1878. T. 13. P. 236–259.*
- [2] РГИА. Ф. 207. Оп. 15. Д. 27.
- [3] *Дельвиг А. И. Мои воспоминания. Т. 1–4. М., 1912–1913.*
- [4] *Montferrand A. R. Plans et détails du monument consacré a la mémoire de l'Empereur Alexandre. Paris, 1836. Имеется перевод: Планы и детали памятника, посвященного памяти императора Александра / Перевод с французского под ред. А. В. Радзюкевича. Издательская платформа Ридеро. 112 с. https://ridero.ru/books/plany_i_detali_pamyatnika_posvyashe-nnogo_pamyati_imperatora_aleksandra*
- [5] *Lamé G., Clapeyron É. Sur la stabilité des voûtes // Ann. des Mines. Sér. 1. 1823. T. 8. P. 789–836.*
- [6] *Montferrand A. R. Épure pour le profil au fût de la colonne // Высочайше утвержденные рисунки и чертежи по работам Исаакиевского собора (в С.-Петербурге): рукопись. Папка № 14: Работа по постройке Александровской колонны. Л. № 77. Отдел редких книг и рукописей Научно-технической библиотеки ПГУПС.*
- [7] *Lamé G., Clapeyron É. Mémoire sur la Solidification par refroidissement d'un globe liquide // Ann. chim. et phys. 1831. T. 47. P. 250–256.*

Михаил Васильевич Остроградский

(1801–1862)

М. В. Остроградский оказал огромное влияние на преподавание математики в военных и инженерных учебных заведениях Российской империи. Он решил задачу о распространении волн в цилиндрическом бассейне, при изучении распространения тепла в телах получил формулу для преобразования интеграла по трехмерному телу в интеграл по его поверхности, ввел понятие сопряженного оператора, исследовал различные вариационные принципы, в том числе в неконсервативных механических системах.

М. В. Остроградский родился 24 сентября (12 сентября по старому стилю) 1801 года в Полтавской губернии в имении отца. До 8 лет он жил в деревне с родителями. Его младший брат Андрей вспоминал, что Михаил с детства любил все измерять — лягушек, глубину колодца и т. п. — и для этого постоянно носил с собой шнурок.

В 1809 году Михаил поступил в Полтавскую гимназию. Одновременно, по обычаю русских дворян, Остроградский был зачислен на государственную службу в канцелярию полтавского губернатора. Позже Остроградского стали готовить к поступлению в Харьковский университет, хотя сам он мечтал о военной карьере. В 1817 году он стал студентом университета. Попад под влияние увлеченного преподавателя математики А. Ф. Павловского, Михаил усердно принялся за самостоятельную работу над учебниками. Уже в 1818 году он сдал экзамены за трехлетний курс обучения, а затем, по собственному прошению, уволился из университета с аттестатом для поступления в военную службу.

Однако через год Остроградский вернулся в университет «для усовершенствования в науках, относящихся к прикладной математике». Он



Mikhail Ostrogradsky

пострадал в конфликте между ректором-математиком Т. Ф. Осиповским, материалистом, и новым попечителем университета З. Я. Корнеевым, приехавшим «разогнать мрак заблуждений, утвержденных кичливостью разума, и посеять в сердцах христианские добродетели». Остроградский не посещал лекций по философии, богопознанию и христианскому учению. Преподаватель философии написал жалобу попечителю Корнееву, а тот передал ее министру образования, и в итоге Остроградский «за вольнодумство» лишился не только ученой степени кандидата, присужденной ему в апреле 1821 года, но и диплома 1818 года.

Вскоре, для того чтобы повысить свой уровень в области математических наук, Остроградский стал просить отца отпустить его во Францию. (Биографы Остроградского упоминают, что в то время подобные поездки из тихой провинции считались очень опасными, родные и соседи думали, что молодого человека отправляют на гибель и что его отец, дав разрешение, потерял рассудок.) Осенью 1822 года Остроградский (со второго раза, в первый раз он был обворован попутчиком) добрался до Парижа, где прослушал ряд математических курсов у П. Лапласа, Ж. Фурье, О. Коши. О его пребывании в Париже имеется мало сведений. Дневников он не вел, его переписка малочисленна и неинтересна, в основном содержит просьбы прислать денег. В первом же письме он писал, что уже обошел весь город, город хорош, но красоты его преувеличивают, экипажи весьма дурны, запряжены обычно в две лошади.

В ноябре 1826 года Остроградский представил Парижской академии наук свою первую самостоятельную работу — «Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне». Она была напечатана в 1832 году. Существует две версии о том, почему он написал эту работу. Первая: Остроградский бродил в одиночестве по берегу Сены и, скучая, наблюдал за движением волн — это его навело на мысль заняться изучением волнообразного движения. Вторая версия: по какой-то причине в 1826 году он не получил вовремя денег от отца, задолжал за гостиницу и еду и по жалобе хозяина был посажен в долговую тюрьму в Клиши, где и написал эту работу. Остроградский послал ее Коши, который представил ее с самым лестным отзывом в Парижскую академию наук, в результате чего она и была напечатана во Франции. Более того, Коши¹ сам выкупил Остроградского из тюрьмы. В Париже М. В. Остроградский сблизился с В. Я. Буняковским.

¹ Коши, иезуит и член общества св. Винсента, поступил как предписано — выкупил нищего из тюрьмы, ведь никаких преступлений Остроградский не совершал, но был беден. Коши содействовал Остроградскому в получении места в коллеже Генриха IV, что позволило молодому ученому несколько поправить свое финансовое положение.

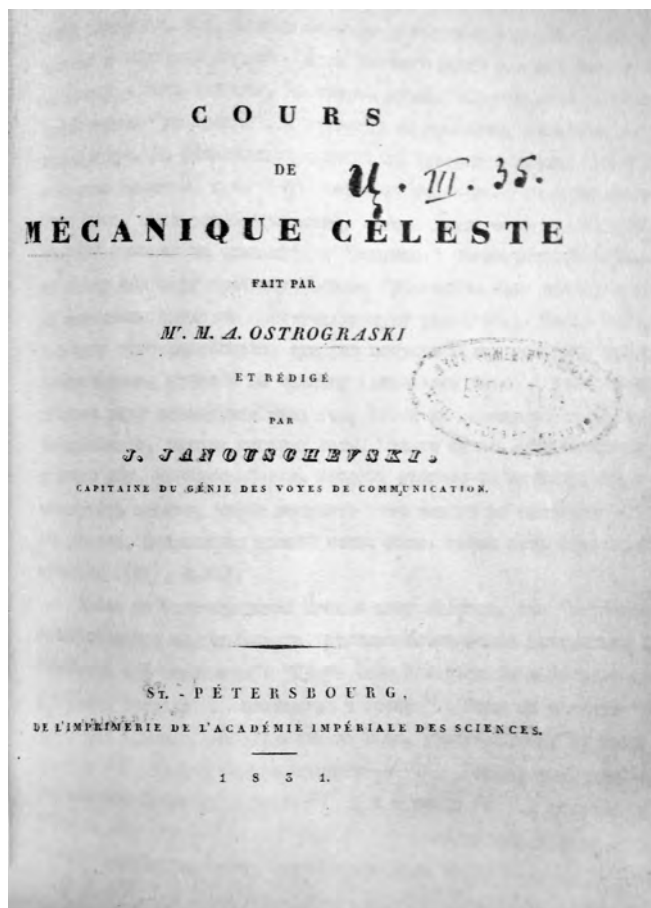
В начале 1828 года Остроградский, в связи с тем, что отец перестал высылать ему деньги, пешком (потому что по пути снова был обворован) вернулся в Россию. По возвращении некоторое время (пока не было установлено, что он не преследует никаких политических целей) был под негласным надзором полиции, видимо, потому что вернулся из Франции, где мог надышаться революционным духом. Он представил в Академию наук в Петербурге ряд работ. Эти работы, а также его известность во Франции привели к тому, что 17 декабря 1828 года М. В. Остроградский был избран адъюнктом Академии наук. К этому времени в изданиях Академии были напечатаны три его работы по вопросам математической физики и математического анализа. В августе 1830 года Остроградский был избран экстраординарным академиком, через год — ординарным по прикладной математике, а в 1855 году, после кончины академика П. Н. Фусса, занял кафедру ординарного академика по чистой математике. М. В. Остроградский принимал активное участие в жизни Академии наук: он писал научные работы, делал доклады, рецензировал представленные работы. Однако большую часть своего времени он отдавал педагогической деятельности, которой посвятил более 30 лет.

Дальнейшая деятельность Остроградского проходила в Петербурге, однако его влияние было достаточно ощутимым во всей России. В 1830 г. он представил в Академию наук рапорт, в котором определил свою цель: способствовать применению теоретических приложений к запросам практики. Наиболее ярко это положение нашло свое отражение в высших инженерных учебных заведениях Петербурга. Остроградский преподавал в Морском кадетском корпусе (с 1828 года), в Институте корпуса инженеров путей сообщения (с 1830 года), Главном педагогическом институте (с 1832 года), Главном инженерном училище (с 1840 года), Главном артиллерийском училище (с 1841 года).

В 1829 году Остроградский прочел в Петербурге свой первый курс по небесной механике. Это были публичные, то есть для всех желающих, лекции по небесной механике, в которых он обобщал методы, положенные в основу аналитической механики Лагранжа. Чтение курса продолжалось с ноября 1829 по март 1830 года. Несмотря на большую стоимость курса, лекции посещало 30 слушателей. (Абонемент стоил сто рублей. В 1830-х годах пшеничная мука стоила до 2 рублей за пуд (16 кг), воз сена — до 8 рублей, сотня яиц — 3,5 рубля.) Институт путей сообщения приобрел пять абонементов на эти лекции и предоставил их репетиторам (ассистентам) института. Один из них — выпускник института 1828 года И. С. Янушевский (1804–1871) — записал эти лекции. В рапорте директору института о необходимости издания лекций Янушевский писал:

Курс Остроградского по новости и общности идей, которые в нем заключаются, будет уважаем не только в России, но и за границей, а более всего он будет полезен офицерам нашим, которые по выходе из института, заведения лучшего по части математики в России, не имеют часто ни времени, ни способов следовать новым открытиям.

Эти лекции Остроградского были изданы литографским способом на французском языке. Можно сказать, что дошли они до нас благодаря Янушевскому.



Титульный лист издания лекций Остроградского

Остроградский читал различные курсы по математическим наукам. В Морском кадетском корпусе (впоследствии Морской академии) он вел занятия по математике и начертательной геометрии. Помимо обязательных занятий Остроградский читал «Алгебраический и трансцен-

дентный анализ». Лекции были публичными и привлекали достаточно много слушателей — более 60 человек. Записки этих лекций были изданы в 1837 году. При поступлении на работу в Главный педагогический институт Остроградский подчеркивал, что преподавать математику следует не менее трех раз в неделю. При этом ученый составляет собственный курс и нуждается в репетиторе (ассистенте) для повторения материала. Эти требования были выполнены. Среди наиболее выдающихся учеников Михаила Васильевича по педагогическому институту можно назвать И. А. Вышнеградского, А. Н. Тихомандрицкого, Н. С. Будаева, П. Е. Рощина, Е. Ф. Сабинина, Д. М. Деларю и других.

Одним из любимых учебных заведений М. В. Остроградского был Институт путей сообщения. Он был приглашен туда в 1830 году для преподавания механики. Одновременно был приглашен и известный математик В. Я. Буняковский. В письме главноуправляющего путей сообщения ректору института сказано:

Вместе с сим предписываю Вашему превосходительству пригласить господ адъюнктов Императорской С.-Петербургской академии наук Остроградского и Буняковского. Первого — для преподавания механики аналитической и астрономии, а последнего — для преподавания дифференциального и интегрального исчисления и статики синтетической.

В институте математическое образование всегда ставилось во главу угла. Так, в 1834 году на заседании конференции (совета) института постановили: «Высшую математику отнести к первому разряду наук, то есть к наукам, необходимым каждому инженеру». В 1843 году даже было принято интересное положение: «Тех инженеров, которые не осият высшую математику, инженерами не выпускать — только архитекторами». В 1859 году на заседании совета института отмечалось: «Стремление к анализу усвоено ими (учащимися) через изучение высших математических наук». Здесь речь идет о том, что инженеры ответственно подходят к порученному делу, тщательно анализируют его и лишь потом принимают решения. Именно воспитанники этого института записали лекции Остроградского по небесной механике 1831 года и по аналитической механике 1836 и 1857 годов. Третий литографированный курс академика М. В. Остроградского 1857 года менее известен. Экземпляр курса хранится лишь в научно-технической библиотеке ПГУПС. Сопоставление лекций Остроградского, изданных с двадцатилетним разрывом, позволяет проследить динамику развития аналитической механики.

М. В. Остроградский быстро завоевал исключительный авторитет как ученый, лектор, воспитатель. Выпускник института путей сообщения 1844 года, известный инженер В. А. Панаев оставил интересные воспоми-

нения об институте путей сообщения, о его профессорах и ученых. Он писал:

Всякий воспитанник с нетерпением ждал счастья и достижения великой чести слушать лекции Остроградского... Ясность и краткость его изложений были поразительны. Он не мучил слушателя выкладками, а постоянно держал его в напряженном состоянии относительно сущности вопроса.

Одним своим присутствием Остроградский стимулировал работу слушателей в области математики и механики. Подтверждением этому может служить тот факт, что в архивах хранится большое количество соответствующих работ и переводов, выполненных «по зову души» воспитанниками Остроградского в 30-е — 50-е годы XIX столетия. Инженер путей сообщения А. В. Дурново писал:

Едва ли о каком-либо другом профессоре ходило столько рассказов, анекдотов и легенд, как об Остроградском. И он действительно был своеобразен и оригинален... Излагал свой предмет М. В. прекрасно — точно, ясно и даже художественно. Никогда не повторялся, и если должен был говорить иногда о том, что излагал уже раньше, то делал это всегда на новый лад, с новыми аргументами и приемами выводов. Нередко он и увлекался, и притом всегда в одну сторону — в область военной истории. Увлекательно, с большим воодушевлением пояснял он слушателям подвиги великих полководцев, делая чертежи мелом... и доказывая сильную зависимость таланта полководца от математического склада ума.

В ноябре 1848 г. по указу Николая I был создан Учебный комитет, задачей которого являлось определение приоритетов в техническом образовании и наблюдение «за его ходом в учебных заведениях ведомства путей сообщения». В состав этих учебных заведений тогда входили Институт путей сообщения, Строительное училище и различные школы. В декабре 1848 года М. В. Остроградский был избран членом этого комитета и назначен главным наблюдателем за преподаванием математических наук в военно-учебных заведениях Петербурга и в учебных заведениях ведомства путей сообщения. В его обязанности входило рассмотрение новых программ и методов преподавания, новых руководств по всем учебным предметам, рассмотрение книг и вообще всех учебных пособий, приобретаемых для заведения, подбор преподавательского состава. Если учесть, что Остроградский преподавал в пяти учебных заведениях Петербурга, был связан с Московским университетом и Московским техническим училищем (впоследствии МВТУ, МГТУ), то его влияние на преподавание предметов математического направления трудно переоценить.

Действительно, идеи М. В. Остроградского распространялись по всей стране. Так, например, его воспитанники из Главного педагогического института, где профессор Остроградский по собственным запискам излагал высшую алгебру, дифференциальное, интегральное и вариационное исчисления, аналитическую геометрию и теорию механики с приложениями, получали назначения в учебные заведения Министерства народного просвещения, в Петербургский, Варшавский, Кавказский, Дерптский, Белорусский, Киевский, Казанский учебные округа, в различные гимназии и училища Сибири и Урала. Его ученики из других учебных заведений также разъезжались по всей стране.

Чтобы еще полнее осветить многогранную деятельность М. В. Остроградского, можно указать на его работу в различных экспертных комиссиях. Так, например, в 1835 году он был членом комитетов по рассмотрению проектов снабжения водой Петербурга «посредством проводных труб», по исследованию стрельбы «регулируемыми гранатами», принимал он участие и в работе комиссии по рассмотрению опытов академика Б. С. Якоби для приложения электромагнитной силы к движению судов» (и других средств передвижения).

Научные труды Остроградского относятся к теоретической механике, гидромеханике, теории упругости, небесной механике, математическому анализу и теории дифференциальных уравнений. В теоретической механике ему принадлежат результаты, связанные с развитием принципа возможных перемещений, вариационных принципов механики и другими задачами. Теория распространения тепла в жидкости фактически впервые была построена Остроградским. Ряд формул и методов носит его имя. М. В. Остроградский занимался также вопросами теории упругости, теории магнетизма, небесной механикой. Другие работы посвящены задачам вариационного исчисления, интегрированию алгебраических функций, теории чисел, алгебре, геометрии, теории вероятностей.

Остроградский дружил с великим украинским поэтом Т. Г. Шевченко, имеются сведения, что последний жил на квартире у Остроградского по возвращении из ссылки. Остроградский любил украинский говор и зачастую употреблял украинские словечки в обыденной речи и на лекциях. Не желая разбираться в невнятно написанных трудах Лобачевского (Гаусс сравнивал их с густым лесом, через который нельзя найти дороги, не изучив предварительно каждого дерева), Остроградский дал на них отрицательный отзыв. После смерти матери М. В. Остроградский возобновил участие в церковных службах.

М. В. Остроградский в 1834 году был избран иностранным членом Американской академии наук, в 1841 году — Туринской академии, в 1853

году — Национальной академии деи Линчеи в Риме, в 1856 году — иностранным членом-корреспондентом Парижской академии наук.

Скончался М. В. Остроградский 20 декабря 1861 (1 января 1862 года) от опухоли в спине; похоронен в родовом имении. А. Н. Крылов писал:

Крепости организма Михаила Васильевича мог позавидовать сам Тарас Бульба, ибо даже тогдашней септической хирургии и полужнахарской медицине понадобилось четыре месяца, чтобы свести его в могилу.

М. М. Воронина

Литература

- [1] ЦГИА СПб. Ф. 381, Оп. 13, Д. 323, 1830. Л. 7.
- [2] ЦГИА СПб. Ф. 381. Оп. 13. Д. 388, Л. 9.
- [3] Отчет о состоянии ИКИПС с 1809 по 1859 год. СПб., 1859. С. 9.
- [4] Воспоминания Валериана Александровича Панаева // Русская старина. 1893. Октябрь. С. 68–89.
- [5] РГИА. Ф. 200. Оп. 1. Д. 1. 2223 и Д. 2462.
- [6] История Петербургского государственного университета путей сообщения. Том первый, 1809-1910. СПб., ПГУПС, 2009. 517 с.
- [7] РГИА. Ф. 447. Оп. 1. Д. 1. Л. 2.
- [8] *Смирнов А.* Историческое обозрение первого двадцатипятилетия Главного педагогического института 1828–1853. СПб.: тип. Имп. Акад. наук, 1853. С. 42.
- [9] *Youschkevitch A. P. Ostrogradsky, Mikhail Vasilievich* // Dictionary of Scientific Biography. Vol. 10. New York: Scribner, 1974.
- [10] *Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б.* Михаил Васильевич Остроградский (1801–1862). Жизнь и работа. Научное и педагогическое наследие. М.: АН СССР, 1963. 272 с.

Теорема Гаусса—Грина—Остроградского о дивергенции

Классическая формулировка теоремы Гаусса—Остроградского такова.

Пусть A — ограниченное связное открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, с (кусочно-)гладкой границей ∂A , а $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ — гладкое векторное поле на открытом множестве, содержащем замыкание множества A . Тогда

$$\int_A \operatorname{div} f \, d\mathcal{H}^n = - \int_{\partial A} f \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1}, \quad (1)$$

где ν — внутренняя единичная нормаль к границе ∂A , а $\mathcal{H}^k$ обозначает k -мерную хаусдорфову меру, $\operatorname{div} f := \sum_{i=1}^n D_i f_i$, $D_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Напомним, что для всякого положительного вещественного числа k определена мера $\mathcal{H}^k$ любого подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, а при целых k она совпадает с k -мерной лебеговой мерой для гладких k -мерных поверхностей в $\mathbb{R}^n$.

В размерности 1 тождество (1) сводится к формуле $\int_a^b f \, dx = f(b) - f(a)$; в старших размерностях оно равносильно набору тождеств

$$\int_A D_i f \, d\mathcal{H}^n = - \int_{\partial A} f \nu_i \, d\mathcal{H}^{n-1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

В частности, равенство (1), очевидно, верно в случае, если A — произведение n конечных интервалов. Наконец, из формулы (1) следует, что $\int_A D_i f \, dx = 0$ для любой функции f с компактным носителем в множестве A . Отсюда вытекает формула двойственности

$$\int_A D_i f \, \phi \, d\mathcal{H}^n = - \int_A f D_i \phi \, d\mathcal{H}^n \quad (3)$$

для любых гладких функций f, ϕ на A (в предположении, что носитель функции ϕ компактен в A).

Приведенная выше теорема упоминается с именами К. Ф. Гаусса, М. В. Остроградского, Дж. Грина или их комбинациями, например как

теорема Гаусса—Грина или Гаусса—Остроградского. Это не удивительно, поскольку ее частные случаи прослеживаются вплоть до самых ранних стадий развития многомерного анализа, а их авторство часто приписывается не тем, кому следует. Историческую справку о теореме Гаусса—Остроградского можно получить в статье [5].

В XVIII веке Лагранж и Лаплас, итерируя теорему Ньютона—Лейбница, сводили интеграл по области к интегралу по границе. Частные случаи формулы (1) появляются в работах Гаусса в 1813, 1833 и 1839 годах. В 1826 году М. В. Остроградский представил в Парижскую академию наук статью, в которой сформулировал и доказал теорему Гаусса—Остроградского в размерности 3; ей также посвящена его статья, представленная в Парижскую академию в 1827 году и в Санкт-Петербургскую академию в 1828 году. Лишь последнее представление было опубликовано в 1831 году, остальные два сохранились лишь в рукописи.

Теорема Гаусса—Остроградского появляется также в работе С. Д. Пуассона, представленной в 1828 году и опубликованной в 1829 году без ссылки на Остроградского, хотя, по-видимому, Пуассон видел его статью. В том же 1828 году Грин частным образом опубликовал статью, остававшуюся довольно долго незамеченной. В ней он использовал в трехмерном случае формулы типа

$$\int_A (u \Delta v + Du \cdot Dv) dV = \int_{\partial A} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS,$$

которые ныне называются *формулами Грина*; при этом отсутствует явное упоминание того, что мы называем *теоремой Грина*:

$$\int_C (L dx + M dy) = \pm \int_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy,$$

где C — замкнутая кривая в $\mathbb{R}^2$, а D — ограниченная ей область. Такая формула появляется без доказательства лишь в статье О. Л. Коши в 1846 году, а позже с доказательством — в диссертации Б. Римана в 1851 году, в связи с теоремой Коши о функциях комплексного переменного.

Наконец, имеет смысл упомянуть связь между формулами «Гаусса—Грина—Остроградского» и *формулой Стокса*

$$\int_S (\text{curl } \sigma) dA = \pm \int_\Gamma (\sigma \cdot \tau) ds,$$

где ds — элемент длины граничной кривой Γ поверхности S в пространстве $\mathbb{R}^3$, τ — единичный касательный вектор к Γ , а знак зависит от ориентации. Длительный процесс развития — с участием многих математиков,

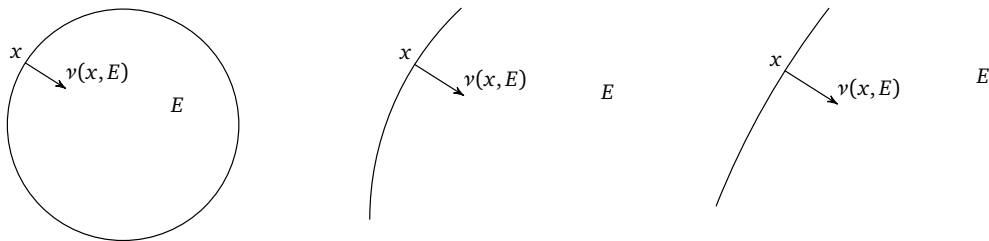


Рис. 1. Точки приведенной границы множества Каччополи и соответствующие нормали определяются в терминах теории меры посредством растяжений

в частности Остроградского, Г. Ганкеля, В. Вольтерры, А. Пуанкаре и Эли Картана — привел к *теореме Стокса* о дифференциальных формах: для гладких ориентированных $(k + 1)$ -мерных поверхностей S и дифференциальных форм ω порядка k выполнено равенство

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega. \quad (4)$$

Частными случаями этой теоремы являются теорема Стокса для 1-форм ω в трехмерном пространстве, теорема Грина для 1-форм ω в двумерном пространстве и теорема Гаусса—Остроградского для 2-форм ω в трехмерном пространстве.

Предыдущие теоремы имеют и техническое, и концептуальное значение для математического анализа, геометрии и физики. Из огромной литературы на эти темы коснемся лишь некоторых аспектов теории *множеств конечного периметра*, разработанной Э. де Джорджи в ряде статей, первые из которых относятся к началу 1950-х годов, см. [2]. Доказательства теорем и другую полезную информацию читатель найдет в книгах [1], [3] и [4].

Пусть E — измеримое по Лебегу множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Согласно де Джорджи, E является *множеством конечного периметра* или *множеством Каччополи*, если обобщенные производные его *характеристической функции* (или *индикатора*) χ_E — знакопеременные меры Радона μ_i . Это означает, согласно формуле двойственности (3), что $\int \chi_E D_i \psi \, dx = - \int \psi \, d\mu_i$ для любой гладкой функции ψ с компактным носителем, где μ_i — знакопеременные меры Радона, или, что равносильно в силу теоремы Рисса, что линейное отображение $\lambda(\phi) := \int \chi_E \operatorname{div} \phi \, d\mathcal{H}^n$ равномерно ограничено при $|\phi| \leq 1$. Пусть $D_i \chi_E$ обозначает μ_i , а $|D \chi_E|$ — (полную) вариацию векторнозначной меры $D \chi_E$, т. е. меру, значение ко-

торой на произвольном борелевском множестве B равно

$$\sup \left\{ \int_B \operatorname{div} \phi : \phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), |\phi(x)| \leq 1 \text{ почти всюду} \right\}.$$

По определению *периметр* множества E равен полной вариации меры $|D\chi_E|$ по пространству $\mathbb{R}^n$:

$$P(E) := |D\chi_E|(\mathbb{R}^n).$$

Далее будем обозначать класс всех множеств Каччополи символом $\mathcal{P}$. Из формулы (1) легко выводится, что ограниченные множества A с гладкой границей конечной меры $\mathcal{H}^{n-1}$ принадлежат классу $\mathcal{P}$, причем $P(A) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial A)$. Теория дифференцирования мер гарантирует, что для произвольного множества $E \in \mathcal{P}$ в почти всех относительно меры $|D\chi_E|$ его точках x существует производная Радона—Никодима меры $D\chi_E$ относительно $|D\chi_E|$:

$$\frac{dD\chi_E}{d|D\chi_E|} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{D\chi_E(B(x, r))}{|D\chi_E(B(x, r))|} =: \nu(x, E). \quad (5)$$

Поэтому для любой функции $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ можно записать

$$\int_E \operatorname{div} \phi \, d\mathcal{H}^n = - \int \phi \cdot \nu(x, E) |D\chi_E| \quad (6)$$

и даже ограничить область интегрирования во втором интеграле до множества ∂E , поскольку носитель меры $|D\chi_E|$ лежит в ∂E . Формула (6) выглядит как обобщение теоремы Гаусса—Остроградского на случай множеств Каччополи. Но это не совсем так: существуют множества, для которых $P(E) < \infty$, но $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) = \infty$ (см. рис. 2), и отсутствует соотношение между границей и векторами $\nu(x, E)$. Все это конкретизируется в следующей знаменитой *теореме о спрямляемости* де Джорджи. Определим *приведенную границу* $\partial^- E$ множества E как множество всех точек, в которых существует предел $\nu(x, E)$, причем $|\nu(x, E)| = 1$; тогда множество $\partial^- E$ является $(n-1)$ -спрямляемым. Это означает, что, за исключением множества нулевой меры $\mathcal{H}^{n-1}$, множество $\partial^- E$ можно представить как объединение борелевских подмножеств $(n-1)$ -мерных многообразий, касательные плоскости которых нормальны к $\nu(x, E)$ в точках $x \in \partial^- E$ почти всюду по мере $\mathcal{H}^{n-1}$; при этом

$$D\chi_E = \nu(x, E) \mathcal{H}^{n-1}|_{\partial^- E}$$

и теорема Гаусса—Остроградского выполняется в следующей форме:

$$\int_E \operatorname{div} \phi \, d\mathcal{H}^n = - \int_{\partial^- E} \phi \cdot \nu(x, E) \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

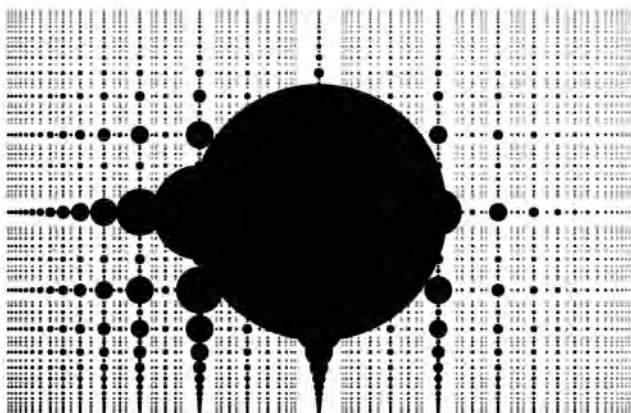


Рис. 2. Приближение множества Каччополи со всюду плотной границей; примером такого множества служит объединение кругов с центрами во всех рациональных точках единичного квадрата.

Далее, $\partial^- E \subset \partial_\mu E$, где $\partial_\mu E$ обозначает границу множества E по мере, состоящую из всех точек, которые не имеют относительно E ни плотность 0 (точки разрежения), ни плотность 1 (точки разрежения для дополнения множества E), причем $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_\mu E \setminus \partial^- E) = 0$. Наконец, теорема Федерера утверждает, что E является множеством Каччополи в точности тогда, когда $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_\mu E) < \infty$.

Периметр и класс множеств Каччополи обладают многими хорошими свойствами. Как видно из определения, (i) периметр $P(E)$ полунепрерывен снизу относительно сходимости в среднем, т. е. сходимости индикаторов в пространстве L^1 . Более того, можно доказать (ii) *свойство аппроксимации*: для каждого множества $E \in \mathcal{P}$ существует последовательность полигональных (множество *полигонально*, если его граница содержится в конечной совокупности гиперплоскостей) либо имеющих гладкую границу множеств $E_j \in \mathcal{P}$ со следующими свойствами: E_j сходятся в среднем к E и $P(E_j) \rightarrow P(E)$; (iii) *свойство компактности*: из последовательности множеств класса $\mathcal{P}$ с равномерно ограниченными периметрами и носителями можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в среднем к некоторому множеству класса $\mathcal{P}$.

Таким образом, можно рассматривать множества Каччополи как пределы в среднем последовательностей множеств с гладкими границами, а периметр — как *лебегово обобщение* классической меры границы:

$$P(E) := \inf \left\{ \liminf_{j \rightarrow \infty} P(E_j) \right\},$$

где нижняя грань берется среди последовательностей множеств E_j с глад-

кими границами, сходящихся к E в среднем. Это выделяет класс множеств Каччополи как естественный класс для исследования вариационных задач, использующих площадь поверхностей коразмерности 1. В частности, такова задача отыскания множества минимального периметра среди множеств заданной полной меры (в классе $\mathcal{P}$ задача имеет простой ответ) и характеристики оптимальных множеств как шаров. Последний факт — *изопериметрическое свойство* евклидова шара в двойственной форме: пусть C — шар в пространстве $\mathbb{R}^n$; тогда для всех таких $E \in \mathcal{P}$, что $\mathcal{H}^n(E) = \mathcal{H}^n(C)$, верно неравенство $P(E) \geq P(C)$, причем равенство выполнено в точности тогда, когда $E = C$.

Ниже приведен набросок принадлежащего де Джорджи доказательства изопериметрического свойства шара.

1. Операция симметризации Штейнера, в классическом случае сохраняющая полную меру и уменьшающая меру границы гладкого множества, обобщается на множества Каччополи. Пусть даны ограниченное множество $E \in \mathcal{P}$ и направление η в пространстве $\mathbb{R}^n$, и пусть H обозначает $(n-1)$ -мерную плоскость, ортогональную η . Напомним, что *симметризация Штейнера* для множества E в направлении η — это такое множество $E^{s,\eta}$, что его пересечение с (почти) любой прямой L , ортогональной к H , есть отрезок, симметричный относительно H и имеющий длину, равную одномерной мере множества $L \cap E$. Верно следующее: $\mathcal{H}^n(E^{s,\eta}) = \mathcal{H}^n(E)$ и $P(E^{s,\eta}) \leq P(E)$; если при этом выполнено равенство, то множество E нормально либо относительно плоскости H , либо в направлении η , т. е. пересечения с E прямых, ортогональных к H , являются отрезками.

2. Чтобы доказать неравенство $P(B) \geq P(C)$ для всех $B \in \mathcal{P}$, удовлетворяющих условию $\mathcal{H}^n(B) = \mathcal{H}^n(C)$, с учетом свойства аппроксимации достаточно рассмотреть случай, когда B — некоторое полигональное множество Π . В этом случае Π содержится в шаре большого радиуса $B(0, R)$ и по соображениям компактности и полунепрерывности достигается минимум периметра на классе $\mathcal{E}$ множеств $B \in \mathcal{P}$, удовлетворяющих условию $\mathcal{H}^n(B) = \mathcal{H}^n(\Pi)$ и имеющих носители в $B(0, R)$. Пусть E — одно из таких минимизирующих множеств. Штейнеровская симметризация $E^{s,\eta}$ также реализует минимум в том же классе $\mathcal{E}$, поэтому E нормально в направлении η . Поскольку это верно для всех направлений и всех минимизирующих множеств, каждое такое множество нормально относительно любого направления либо каждое такое множество выпукло.

3. Пусть E — ограниченное выпуклое множество, а H — некоторая $(n-1)$ -мерная плоскость, проходящая через центр тяжести множества E . Применив вращение, можно считать, что H — это гиперплоскость $x_n = 0$, и представить E после замены $(x_1, \dots, x_n)$ на (y, x_n) как множество $f_1(y) \leq x_n \leq f_2(y)$, $y \in \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ — выпуклая область в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$, а

f_1, f_2 — липшицевы функции. При этом

$$P(E) - P(E^{s, x_n}) = \int_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + |Df_1|^2} d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + |Df_2|^2} d\mathcal{H}^{n-1} - \\ - 2 \int_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + \left| D \frac{f_2 - f_1}{2} \right|^2} d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Из неравенства Минковского теперь вытекает, что $P(E) - P(E^{s, x_n}) \geq 0$, причем равенство достигается в точности тогда, когда $D(f_1 - f_2) = 0$ на $\mathcal{D}$. Следовательно, множество E симметрично в любом направлении и, значит, является шаром.

В частности, мы доказали, что шар — единственное решение задачи отыскания множества наименьшего периметра среди множеств данной полной меры с гладкой границей. В классическом контексте доказательство де Джорджи можно понимать так: если множество E оптимально, то E является шаром. По существу, это сводится к тому, что сделал Я. Штейнер, считавший такое рассуждение доказательством изопериметрического свойства шара. В рамках теории меры существование решения доказывается, а в классическом штейнеровском контексте оно предполагается. Как мы ныне знаем, такое предположение делает доказательство Штейнера неполным: прежде чем обвинять кого-либо в убийстве после исключения остальных подозреваемых, желательно убедиться, что убийство имело место. Предполагая существование неких объектов, можно в действительности доказать любую бессмыслицу. Как заметил О. Перрон, если предположить существование наибольшего натурального числа n , можно доказать, что n должно равняться 1; действительно, если n больше единицы, то $n^2 > n$ — противоречие. Штейнер так и не признал, что его доказательство изопериметрического свойства неполно, хотя Дирихле указал ему пробел. Ирония истории в том, что подобную ошибку делали в девятнадцатом веке многие прославленные математики, например Гаусс, Дирихле, Риман и Нейман, см. [6].

Мариано Джакинта (Mariano Giaquinta)

перевод Б. Р. Френкина

Литература

- [1] *Ambrosio L., Fusco N., Pallara D. Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems. Clarendon Press, 2000. (Oxford Mathematical Monographs).*
- [2] *De Giorgi E. Selected Papers. Springer, 2006. (Springer Collected Works in Mathematics).*

- [3] *Evans L. C., Gariepy R. F.* Measure Theory and Fine properties of Function. CRC Press, 1992. (Studies in Advanced Mathematics). Имеется перевод: Эванс Л. К., Гариппи Р. Ф. Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 2002.
- [4] *Giaquinta M., Modica G., Souček J.* Cartesian Currents in the Calculus of Variations I. Springer, 1998. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. V. 38).
- [5] *Katz V. J.* The History of Stokes' Theorem // Mathematics Magazine. 1979. V. 52, № 3. P. 146–156.
- [6] *Monna A. F.* Dirichlet's principle: A mathematical comedy of errors and its influence on the developments of analysis. Utrecht: Oosthoek, Scheltema & Holkema, 1975.

Виктор Яковлевич Буняковский

(1804–1889)

В. Я. Буняковский — русский математик и демограф, член Академии наук (1828), ее вице-президент (1864–1889). Он внес существенный вклад в развитие теории вероятностей и статистики, принимал деятельное участие в постановке и последующих реформах математического образования в Российской империи.

Виктор Яковлевич Буняковский родился в г. Баре Подольской губернии в семье подполковника кавалерии. Рано оставшись без отца, умершего в Финляндии во время русско-шведской войны 1808–1809 гг., В. Я. Буняковский воспитывался в семье генерала, графа А. П. Тормасова, участника Отечественной войны 1812 года.

Вместе с сыном Тормасова Александром Виктор отправился на учебу за границу в 1820 году. Он учился в Кобурге, где брал частные уроки, затем в Академии в Лозанне, затем (1824–1825) в Париже в Коллеж де Франс и на факультете наук Сорбонны; слушал лекции О. Коши, П. Лапласа, Ж.-Б. Фурье, С. Пуассона, А. Лежандра и А. Ампера. В Париже получил степень бакалавра и лицензиата (1824), а в 1825 году степень доктора математических наук за представленные работы по аналитической механике и теории тепла. Там же он сдружился с М. В. Остроградским.



Вернувшись в Россию, Буняковский преподавал в Первом кадетском корпусе (1826–1831) и в Санкт-Петербургском университете (1846–1859). Являлся профессором Горного института и Института инженеров путей сообщения. С 1830 года — экстраординарный академик. В 1864 году избран вице-президентом Академии наук и занимал эту должность вплоть до своей кончины.

Буняковский занимался частными вопросами интегрирования, элементарной теории чисел, написал исторический обзор различных «дока-



зательств» постулата о параллельных прямых, однако он не принимал теорию Лобачевского, хотя и отзывался о ней с уважением. Основные достижения Буняковского лежат в области теории вероятностей, статистики и демографии.

Переработав лекции Лапласа, которые он слушал в Париже, Буняковский написал лучший для своего времени учебник «Основы математической теории вероятностей» (1846), по которому Гаусс изучал русский язык.

Оказав влияние на Чебышёва в области теории вероятностей, сам Буняковский больше занимался прикладными вопросами демографии и страхования. Математические основы страхования в России были заложены еще Эйлером и Фуссом, на которых ссылается Буняковский в своих работах. С 1858 года Буняковский состоял главным экспертом правительства по вопросам статистики и страхования, помог организовать эмеритальную кассу на флоте, то есть организацию, в которую участники вносили деньги (обычно 6 % от зарплаты) и из которой через определенное время участия или по выслуге лет выплачивалась ежегодная пенсия участнику или (в случае смерти) членам его семьи.

Для рационального планирования эмеритальных классов требовалось понимать, сколько и каких выплат нужно в среднем делать; Буняковский исследовал соответствующие математические модели. В 1869 году он опубликовал цикл из четырех заметок по этой теме. В «Заметке по поводу одного вопроса о пожизненных пенсиях», читанной в заседании физико-математического отделения Академии наук 10 декабря 1868 года, дано математическое решение задачи о том, как на основе таблицы смертности «определить возраст X , с достижением которого лицо приобретает право на пенсию, обуславливая этот возраст тем, чтобы ежегодно увеличивающийся итог пенсионеров не превзошел со временем некоторого данного предела». Математик А. А. Марков впоследствии участвовал в 1890 году в расчетах для касс, за что имел благодарность министерства финансов. Кстати, Марков, будучи гимназистом, написал Буняковскому письмо со своими исследованиями. Буняковский нашел ошибки, но похвалил будущего академика.

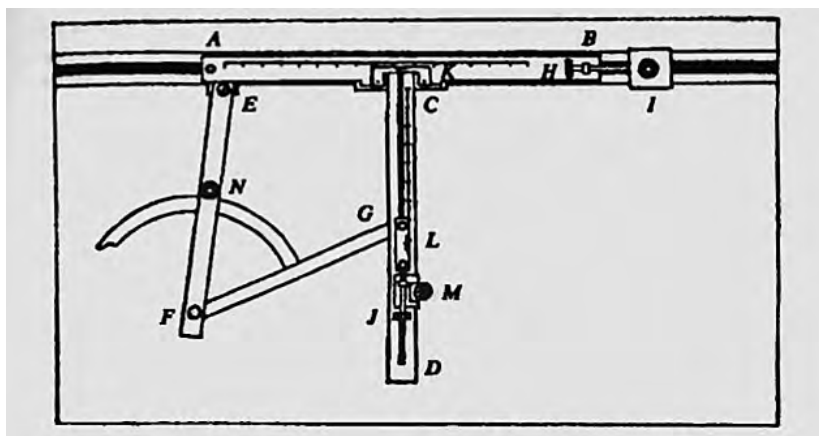
Практически единственными исходными демографическими данными в то время были записи о смертности православного населения (переписи не проводились); именно из них и приходилось Буняковскому высчитывать возрастное распределение населения России. Изучив вопрос, Буняковский заключает:

Исключительно неблагоприятное положение наше относительно законов смертности в сравнении с другими европейскими народами, до сих пор принимаемое за факт несомненный, по моему мнению, есть просто научное недоразумение, возникшее и державшееся единственно вследствие того, что занимавшиеся решением этого вопроса недостаточно вникали в его сущность.

Для страны с возрастающим населением старый метод смертных списков давал преувеличение смертности. Считая метод смертных списков ошибочным, Буняковский предложил новый способ составления таблиц смертности. Отличие его способа от использовавшегося ранее заключалось в том, что повозрастные числа умерших сопоставлялись числам родившихся, к поколению которых принадлежали умершие данного возраста.

Буняковский рассчитал, в частности, вероятную численность российской армии (в те времена оценить такую величину можно было тоже только с помощью статистики).

В. Я. Буняковский снискал славу и как изобретатель. В 1855 году он предложил новые модели пантографов (приборов, позволяющих делать копии чертежей и карт в уменьшенном масштабе), планиметров (приборов, измеряющих площадь) и так называемых эккеров, которые ока-



Эккер Буняковского (схема)

зались более точными и дешевыми, чем существовавшие аналоги. Суммирующий эккер предназначался для расчетов по методу наименьших квадратов: двигая линейки и зажимные винты, можно было из чисел x, y получать $\sqrt{x^2 + y^2}$, что позволяло быстро сосчитать сумму квадратов данных чисел.

В 1867 году, отталкиваясь от принципа работы традиционных русских счетов, Буняковский изобрел самосчеты — устройство для многократного сложения и вычитания более крупных чисел. Самосчеты предназначались для подсчета средних месячных или годовых значений метеорологических элементов: например, вместо деления суммы на 30 каждое слагаемое учитывалось с весом $1/30$. В настоящее время оригинальные самосчеты сохранились только в музее Политехнического института и Петро-заводском краеведческом музее.

В 1889 году В. Я. Буняковский вместе с П. Л. Чебышёвым и В. Г. Имшенецким добились избрания С. В. Ковалевской в Академию наук — она стала первой женщиной — членом-корреспондентом Академии наук.

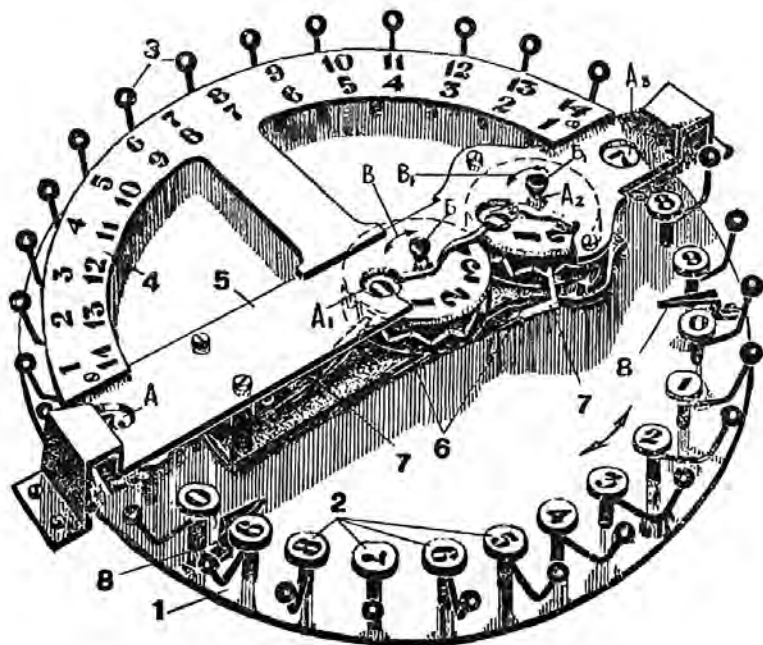
Неравенство Коши—Буняковского—Шварца. Неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i v_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 \right)$$

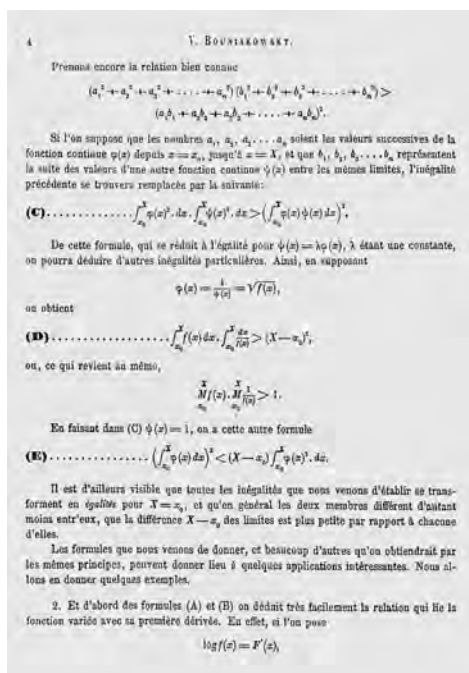
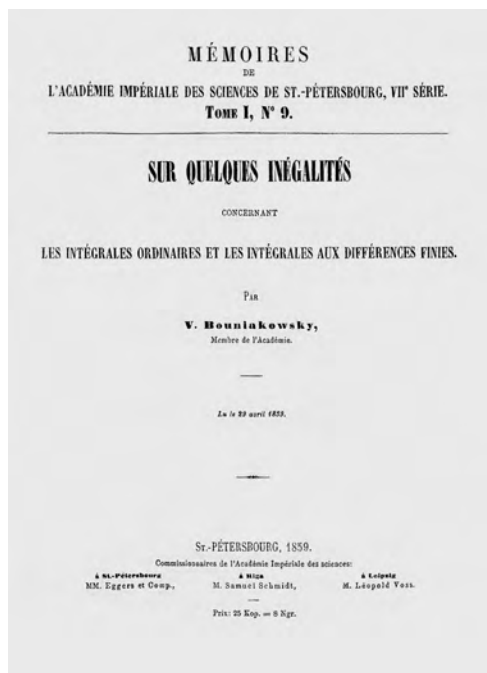
для сумм появилось в работе Огюстена Луи Коши в 1821 году, затем В. Я. Буняковский в работе 1859 года доказал (в качестве вспомогательного шага) неравенство

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx \right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx$$

ОБЩИЙ ВИД САМОСЧЕТОВ: 1 — металлический круг, свободно вращающийся на оси; 2 — цифры от 0 до 9, повторяющиеся три раза; 3 — стержни с шаровидными наконечниками; 4 — неподвижная дугообразная полоса с двумя рядами чисел; 5 — поперечная планка с выносками для результатов — A_1, A_2, A_3 ; 6 — диски с зубцами (зубчатой передачей они соединяются с кругом 1); 7 — фиксатор (упругая пружина); 8 — зуб на круге 1; 9 — столбики; 10 — зуб на правом диске. Буквами В и B_1 показаны направления вращения дисков.



Самосчеты Буняковского



Неравенство Коши—Буняковского

для интегралов. Работа Буняковского была опубликована на французском языке в Записках Академии наук. Г. Шварц получил то же самое неравенство на 30 лет позже, в 1888 году. В русскоязычной литературе неравенство известно как «неравенство Коши—Буняковского», в англоязычной литературе — как «неравенство Коши—Шварца».

Н. С. Калинин

Литература

- [1] Прудников В. Е. Выдающийся русский ученый и педагог (к 150-летию со дня рождения Буняковского) // Математика в школе. 1954. № 4. С. 15–24.
- [2] Прудников В. Е. Б. Я. Буняковский — ученый и педагог. М.: Учпедгиз, 1954. 88 с.
- [3] Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889) // Демоскоп. С. 181–182. 6–19 декабря 2004. <http://www.demoscope.ru/week1y/2004/0181/nauka02.php>.
- [4] Буняковский В. Я. Основания математической теории вероятностей. СПб., 1846. 479 с.
- [5] Буняковский В. Я. Опыт о законах смертности в России и о распределении православного народонаселения по возрастам. СПб., 1865. 196 с.
- [6] Grigorian A. T. Bunyakovsky, Viktor Yakovlevich // Dictionary of Scientific Biography. Vol. 2. New York: Scribner, 1970.

- [7] *Sheynin O. B.* On V. Ya. Buniakovsky's work in the theory of probability // Arch. Hist. Exact Sci. 1991. V. 43, № 3. P. 199–223.

Эра Чебышёва

Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894)

Пафнутий Львович Чебышёв является ключевой фигурой петербургской математической школы. Он получил важные результаты в теории чисел, теории вероятностей, теории приближений, анализе, геометрии, алгебре, дифференциальных уравнениях, картографии и астрономии. Его теорема о распределении простых чисел лежит в основании аналитической теории чисел.

Работы П. Л. Чебышёва в теории вероятностей включают обобщения закона больших чисел и центральной предельной теоремы и делают его одним из основателей современной теории вероятностей. Он был первым математиком, осознавшим роль общей теории ортогональных многочленов. Ему принадлежат фундаментальные результаты о приближении вещественных аналитических функций многочленами. Он много интересовался механикой и спроектировал несколько интересных механизмов. Работы Чебышёва демонстрируют важность математики в прикладных вопросах и служат примером того, как прикладные вопросы могут задавать мотивацию для теоретических исследований.

Пафнутий Львович Чебышёв родился 4 (16) мая 1821 года в деревне Окатово (сейчас в Жуковском районе Калужской области), в 80 километрах к югу от Москвы. Деревня была частью владений его отца, офицера, принадлежащего к древнему дворянскому роду.

До 11 лет Пафнутий учился в Окатово под руководством родственников, а затем в Москве с частными репетиторами. В 1837 году он поступил на факультет физики и математики Московского университета. Уже через год он написал статью под названием «Вычисление корней уравнений»,



где он изложил метод приближения корней алгебраического уравнения степени n . Эта статья положила начало целой серии результатов по теории приближений, которой Чебышёв занимался всю жизнь.

В Московском университете таланты Чебышёва привлекли внимание Н. Д. Брашмана, преподавателя механики. Чебышёв глубоко уважал Брашмана, ставшего его наставником, и как математика, и как человека.

Закончив университет в 1841 году, Чебышёв защитил кандидатскую диссертацию «О числовом решении алгебраических уравнений высшей степени». В 1843 году он опубликовал в журнале Лиувилля «Заметку о классе кратных определенных интегралов»; эта заметка привлекла внимание Э. Каталана еще до публикации, судя по тому, что тот написал примечания к ней, опубликованные в том же номере журнала. Всего в журнале Лиувилля появилось 17 статей Чебышёва.

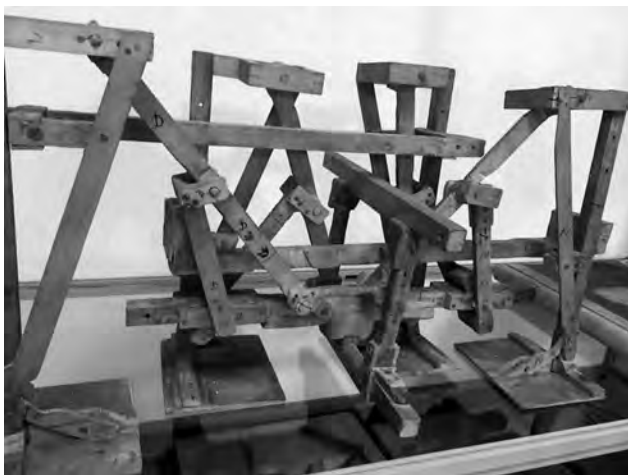
В 1843 году Чебышёв опубликовал в журнале Крелля «Заметку о сходимости ряда Тейлора», в которой он указал на нестыковку в утверждении Коши об интегралах последовательности функций. В 1845 году Чебышёв защитил магистерскую диссертацию «Опыт элементарного анализа теории вероятностей», открывшую серию работ по этой теме, в которой он вскорости стал мировым лидером.

В 1847 году Чебышёв переехал в Санкт-Петербург и начал преподавать в Санкт-Петербургском университете. В 1847 году он защитил докторскую диссертацию по теории чисел, озаглавленную «Теория сравнений» — тема, которой он заинтересовался после изучения работ Эйлера. Эта диссертация содержала первые нетривиальные результаты по распределению простых чисел со времен Евклида. С этих результатов началась современная теория распределения простых чисел.

Часть упомянутой диссертации была опубликована в журнале Лиувилля под названием «О функции, которая определяет множество простых чисел менее определенного числа». Она содержит новые данные о предельном поведении при больших x функции $\pi(x)$ — количества простых чисел, меньших x .

К этому времени Чебышёв уже стал известным математиком в Европе, и его влияние продолжало увеличиваться.

В 1854 году Чебышёв, вдохновленный паровым двигателем Дж. Уатта, опубликовал статью под названием «О теории механизмов, известных под именем параллелограммов». Это была первая из его 10 статей о теории шарнирных механизмов. Джеймс Уатт придумал механизм, который приближенно производит прямолинейное движение из комбинации круговых. Чебышёв заинтересовался этой темой, соединяющей вопросы механики и теории приближений. Он хотел получить точное решение проблемы преобразования прямолинейного движения в круговое, не огра-



Стопоходящая машина Чебышёва

ничиваясь только приближенным результатом. Искомый механизм был придуман в 1871 году Л. Липкиным, одним из молодых коллег Чебышёва, а два года спустя французским инженером Поселье было предложено другое решение [4].

В своей работе по этой теме Чебышёв создал общую теорию трансформации одного движения в другое с помощью шарнирных механизмов. Интерес к шарнирным механизмам погас к концу XIX века, но опять активизировался в 1980-е годы, под влиянием Уильяма Тёрстона (см. исследование А. Б. Сосинского [5]). Среди устройств, которые изобрел Чебышёв, — механизмы, работающие как инвалидное кресло и весельная лодка. Интересно, что в его работе 1854 года о шарнирных механизмах впервые упоминаются многочлены, позже названные многочленами Чебышёва.

В начале 1840-х годов П. Л. Чебышёв наладил контакты с известными математиками Западной Европы и близко подружился с Ш. Эрмитом, Ж. Берtrandом, Э. Каталаном, Л. Кронекером, Э. Лукасом и другими. Лето Чебышёв почти всегда проводил за границей, в основном в Париже. Собрание сочинений Чебышёва содержит отчет о трехмесячном пребывании во Франции в 1852 году, где он вспоминает о своих дискуссиях с И.-Ж. Бьенэме, О. Л. Коши, Ж. Лиувиллем, Ш. Эрмитом, А. де Полиньяком, Ж. А. Серре, Ж. В. Понселе и другими математиками.

Встречи проходили вечером, поскольку в течение дня Чебышёв был занят посещением заводов и фабрик. Он записывал свои наблюдения о ветряных мельницах в Лилле, о металлургическом заводе в Аянже, о бумажной фабрике в Коронне, о литейном цехе и о пушечном заводе в Руэлле, о турбинах на мельнице в Сен-Море, о водяной мельнице в Мо, о фабрике

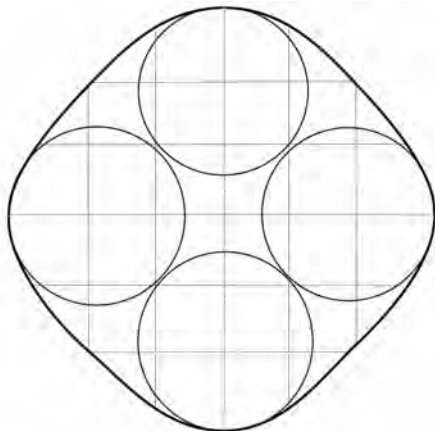


Рисунок из неоконченной статьи Чебышёва о раскрое тканей. См. [2]

оружия в Шательро и др. Он организовал небольшую поездку из Парижа в Лондон, где вел дискуссии с А. Кэли и Дж. Сильвестром, и посетил Королевский политехнический институт, где изучал модели различных машин. Он также побывал в Брюсселе, где посетил музей двигателей, а на обратном пути в Россию он сделал остановку в Берлине для встречи с П. Г. Дирихле.

В 1853 году Чебышёв был избран адъюнктом Санкт-Петербургской академии наук. Его главной задачей там было помогать В. Я. Буняковскому, который отметил его высокую работоспособность в публикации издания работ Эйлера по теории чисел. Чебышёв стал ординарным академиком по прикладной математике в 1858 году.

С самого детства Чебышёв был инвалидом из-за парализованной ноги; он ходил с палочкой и не участвовал в детских играх. Он был очарован механизмами и сохранил эту страсть до конца своих дней. Одним из его первых творений была печатная машинка, которую он соорудил своими руками. Машины, которые он изобрел, выставлены в музее искусств и ремесел в Париже, в Санкт-Петербургском университете, в Санкт-Петербургской академии наук и в других местах. Чебышёв был членом многих европейских академий наук.

В 1874 году П. Л. Чебышёв был избран иностранным членом (первым русским после императора Петра I) Парижской академии наук.

Чебышёв стал членом Французской ассоциации по продвижению науки — ученого сообщества, созданного в 1872 году, целью которого было продвижение связей между разными науками. Он участвовал в четырех ежегодных собраниях этого сообщества: в Лионе (1873), Клермон-Ферране (1876), Париже (1878) и Ла Рошели (1882), каждый раз представ-

для несколько работ по разным темам (географические карты, пошив одежды, вычислительные приборы и пр.). Тезисы его докладов представлены в его собрании сочинений.

В 1882 Чебышёв отказался от должности профессора и посвятил все свое время исследованиям. Раз в неделю его дом был открыт для молодых ученых, которые хотели обсудить с ним свои исследования или просили совета. Летом 1893 года он в последний раз посетил Париж. Пафнутий Львович Чебышёв умер 26 ноября 1894 года. Он похоронен рядом с родителями, в церкви Преображения в деревне Спас-Прогнанье, в 10 километрах от города науки Обнинска. В соседней деревне Машково есть школа, названная в честь Чебышёва, в ней находится музей, содержащий коллекцию оригинальных фотографий и предметов, которые принадлежали Чебышёву, включая счетную машинку, сделанную его руками.

Было написано несколько биографий Чебышёва, например [6], [7].

Атанас Пападопулос (Athanasios Papadopoulos)
перевод Т. Блинковой

Литература

- [1] Делоне Б. Н. Петербургская школа теории чисел. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1947.
- [2] Étienne G. Sur la coupe des vêtements: variation autour d'un thème de Tchebychev // Enseign. Math. Sér. 2. 2011. Т. 57, № 1–2. P. 165–208.
- [3] Lipkin L. Dispositif articulé pour la transformation rigoureuse du mouvement circulaire en mouvement rectiligne // Revue universelle des Mines et de la Métallurgie de Liège. 1871. Т. XXX. P. 149–150.
- [4] Peaucellier A. Note sur une question de géométrie de compas // Nouv. Ann. Math. Sér. 2. 1873. Т. 12. P. 71–78.
- [5] Sossinsky A. Configuration spaces of planar linkages // Handbook of Teichmüller theory. Vol. VI / Ed. Papadopoulos A. Zürich: EMS, 2016. P. 335–373. (IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics. Vol. 27).
- [6] Vassiliev A. V. P. L. Tchébychef et son œuvre scientifique // Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche. 1898. Т. 1.
- [7] Youshkevitch A. P. Chebyshev, Pafnuty Lvovich // Complete Dictionary of Scientific Biography. New York: Scribner, 2008.

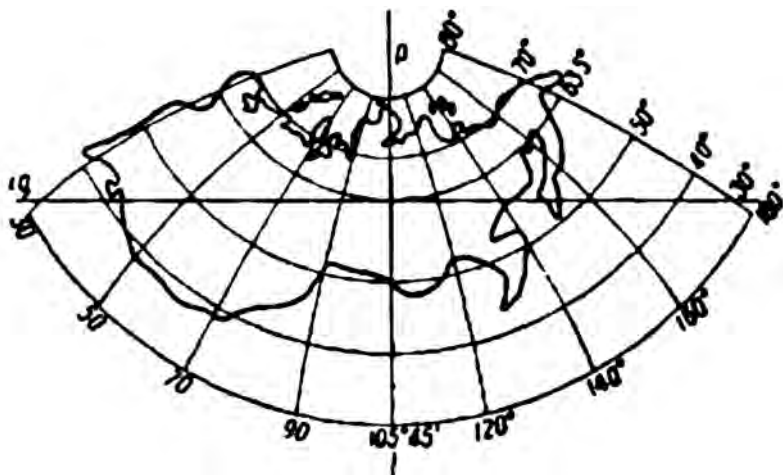
О работах П. Л. Чебышёва по картографии

Пафнутий Львович Чебышёв, как и его знаменитый предшественник Леонард Эйлер, занимался огромным количеством исследовательских тем, в том числе теорией чисел, теорией вероятностей, теорией эллиптических интегралов, дифференциальной геометрией, теорией приближений, механикой и другими. Им всегда руководило желание найти эффективные решения и практичные алгоритмы, а также хорошие приближения — в случае, если нельзя получить точное решение. Его биографы сообщают, что, проводя значительное время за изучением работ математиков прошлого — Эйлера, Лагранжа, Гаусса, Абеля, — он избегал читать работы своих современников, считая, что это могло бы стать препятствием для появления оригинальных идей.

Математическая теория картографии, т. е. искусства создания карт, — это прикладная область, породившая интересные теоретические вопросы в геометрии и анализе, и неудивительно, что эта область заинтересовала Чебышёва. Она была также идеальной площадкой для применения его идей в теории приближений и интерполяции.

В 1856 году Чебышёв написал две статьи по картографии под названием «*Sur la construction des cartes géographiques*» (О построении географических карт). Две статьи с тем же названием опубликовал Лагранж за 57 лет до этого [5]. Вероятно, Чебышёв заинтересовался этой областью, прочитав статьи Лагранжа, а также Эйлера. В самом деле, Эйлер был тесно связан с географией; в Академии наук он имел официальный статус географа, и он опубликовал несколько работ по картографии. Чебышёв состоял в редакционном комитете во главе с В. Я. Буняковским при издании работ Эйлера по теории чисел, так что нет сомнения, что он видел работы Эйлера на различные темы, в том числе по картографии.

Проблема вычерчивания географических карт состоит в том, что нужно отобразить на евклидову плоскость, причем с минимальным искажением, подмножество искривленной поверхности, чаще всего сферы, представляющей Землю. Математикам, начиная с древних греков, было известно, что при таком отображении невозможно требовать сохранения



Карта СССР в чебышёвской проекции

расстояний с точностью до масштаба. Иначе говоря, такое отображение обязательно приносит искажение. Основной вопрос был в создании географических карт, имеющих минимальное искажение в некотором смысле, который требовалось уточнить. Неудивительно, что Чебышёв, который работал над практическими и теоретическими задачами, связанными с аппроксимацией и оптимизацией, заинтересовался этой темой.

Основой исследований Чебышёва по географическим картам послужили работы Лагранжа, составившие два мемуара [5] и, в свою очередь, продолжавшие работы Эйлера и Ламберта по картографии [5, р. 641]. В них рассматривается произвольное конформное, т.е. сохраняющее углы, отображение подмножества сферы в плоскость. На самом деле Лагранж рассматривал эллипсоид, то есть фигуру, полученную вращением эллипса вокруг оси; в то время уже было известно, что Земля — скорее эллипсоид, чем сфера. Чебышёв рассмотрел более простой случай сферической Земли. Он использовал формулу, установленную для величины, которую он назвал *коэффициентом увеличения*. Эта величина равна отношению элемента длины в точке сферы к его образу при конформном отображении. Обозначим координаты точки на сфере через (s, t) , где s — расстояние от точки до северного полюса, а t — ее долгота, то есть угол между плоскостью, содержащей центр сферы и меридиан этой точки, и соответствующей плоскостью, содержащей фиксированный меридиан, принятый за начало отсчета долготы. В силу конформности отображения коэффициент увеличения как модуль его комплексной производной не зависит от направления. В [центральной] плоскости, содержащей меридиан, Лагранж ввел ортогональные координаты (p, q) , где $p = \cos s$ и

$q = \sin s$, что приводит к элементу длины на сфере, равному $\sqrt{ds^2 + q^2 dt^2}$. Евклидова плоскость наделяется координатами (x, y) , а элемент длины равен $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Коэффициент увеличения в этих обозначениях равен

$$m = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{ds^2 + q^2 dt^2}}.$$

Задача состоит в том, чтобы выразить (x, y) через s и t , минимизировав интеграл от $\log m$ по рассматриваемой области. Эта задача относится к вариационному исчислению, где Лагранж был первопроходцем.

Введя новую переменную u с условием $du = ds/q$ и переходя к комплексным обозначениям, Лагранж пришел к формуле

$$m = \frac{\sqrt{f'(u+it)F'(u-it)}}{\frac{2}{e^u + e^{-u}}},$$

где f' и F' — произвольные функции. Эту формулу и использовал Чебышёв, и согласно его главному наблюдению отсюда вытекает, что

$$\log m = \frac{1}{2} \log[f'(u+it)] + \frac{1}{2} \log[F'(u-it)] - \log \frac{2}{e^u + e^{-u}}$$

и что сумма первых двух слагаемых является вещественной гармонической функцией, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Исходя из этого, Чебышёв свел поиск наилучшего отображения к отысканию решения уравнения Лапласа, которое определено в области с заданными граничными значениями. Главная теорема Чебышёва может быть сформулирована так. *Для данной страны (области на сфере) проекцией с наименьшей вариацией коэффициента увеличения будет та, для которой коэффициент искажения длины на границе представляемой области постоянен.*

Чебышёв также указал метод для вычисления коэффициента увеличения с эффективностью, зависящей от сложности границы отображаемой области.

Можно также отметить, как пример интереса Чебышёва к географии, его правило для приближенной оценки расстояний на поверхности Земли, содержащееся на с. 736 тома II его собрания сочинений [1].

Чебышёв не публиковал подробное доказательство своей теоремы. Она считалась трудной, и через несколько лет ряд математиков опубликовали ее доказательства. В 1911 году Гастон Дарбу опубликовал статью

с тем же названием, что у Чебышёва, где привел подробное доказательство, основанное на идее Чебышёва использовать уравнение Лапласа, и применил формулу Грина [2].

В 1894 году Д. А. Граве нашел новое доказательство теоремы Чебышёва и доложил его на годичном собрании Association française pour l'avancement des sciences (Французской ассоциации развития науки) — французского научного общества, в котором состоял Чебышёв. В 1911 г. Граве опубликовал статью [4], озаглавленную «Sur un théorème de Tchébychef généralisé», где дал доказательство несколько более общего результата. На самом деле Граве еще в 1896 году опубликовал статью по картографии, также с заглавием «Sur la construction des cartes géographiques», где рассматривал родственную задачу об отображениях сферы в плоскость, сохраняющих площадь [3].

Современное доказательство теоремы Чебышёва, также основанное на его идеях, было опубликовано, примерно через сто лет после того как его нашел П. Л. Чебышёв, Джоном Милнором [6], который также наметил пути дальнейшего развития и высветил значение случая, когда отображаемая область сферы геодезически выпукла. Милнор в своей статье писал: «Этот результат доступен более ста лет, но, насколько я знаю, он никогда реально не использовался составителями карт».

Вторая статья Чебышёва по картографии, зачитанная им на церемониальном собрании Императорского университета в Санкт-Петербурге 8 февраля 1856 года, предоставила ему случай высказать свой взгляд на согласие между теорией и практикой в математике. В этой статье он писал:

С глубокой древности Математические Науки являются предметом особого внимания. Сегодня они привлекают еще больший интерес в силу их влияния на Искусство и Промышленность. Согласие между теорией и практикой приносит самые благоприятные результаты. Практика — не единственная сторона, получающая выгоду от этих отношений: в свою очередь и наука развивается под влиянием практики. Последняя открывает новые предметы изучения для первой и предоставляет новые точки зрения на предметы, известные уже долгое время.

Несмотря на высокую степень развития, достигнутую Математическими Науками благодаря работам величайших геометров последних трех веков, практика ясно показывает, что эти науки не завершены во многих отношениях. Действительно, она адресует Науке вопросы, которые существенно новы, тем самым вызывая поиск методов, ранее неизвестных. Если теория получает большую пользу от новых применений старого метода или от новых продвижений, она получит даже больше от открытия новых методов. Таким образом, наука находит в практике надежного проводника.

Позвольте завершить эту статью другой цитатой из П. Л. Чебышёва [7, р. 45–46]:

Математика уже пережила две эпохи: одну, когда задачи ставились богами (например, задача удвоения куба), и другую, когда их ставили полубоги, подобные Ферма, Паскалю и другим; теперь мы вступили в третий период, когда вопросы, требующие решения, ставятся нуждами человечества.

Атанас Пападопулос (Athanase Papadopoulos)

Перевод Б. Р. Френкина

Литература

- [1] Сочинения Пафнутия Львовича Чебышева, изданные под редакцией и с предисловием А. А. Маркова и Н. Я. Сониной, орд. акад. Академии наук. Т. 1–2. СПб.: тип. Имп. Акад. Наук, 1899–1907.
- [2] Darboux G. Sur la construction des cartes géographiques // Bulletin des Sciences Mathématiques. 1911. Т. 35. Р. 23–28.
- [3] Gravé D. A. Sur la construction des cartes géographiques // J. Math. Pures Appl. Sér. 5. 1896. Т. 2. Р. 317–361. См. также: *Граве Д. А.* Об основных задачах математической теории построения карт. СПб., 1896.
- [4] Gravé D. A. Démonstration d'un théorème de Tchébychef généralisé // J. reine angew. Math. 1911. Bd. 140. S. 247–251.
- [5] Lagrange J. L. Sur la construction des cartes géographiques // Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles lettres de Berlin. Année 1779. Premier mémoire. Œuvres complètes. Т. 4. Р. 637–664. Second mémoire. Œuvres complètes. Т. 4. Р. 665–692.
- [6] Milnor J. A problem in cartography // The American Mathematical Monthly. V. 76, № 10. Р. 1101–1112.
- [7] Vassiliev A. V. P. Tchébychef et son œuvre scientifique // Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche. 1898. Т. I.

Александр Николаевич Коркин

(1837–1908)

Александр Николаевич Коркин, старший из учеников П. Л. Чебышёва, родился в деревне Жидовиново Тотемского уезда Вологодской губернии в семье государственного крепостного крестьянина. Крепостные крестьяне не имели право учиться в гимназии и тем более в университете. Отец, грамотный и умный крестьянин, во что бы то ни стало решил дать сыну образование. Он отвез сына в Вологду, где уговорил учителя гимназии взять Александра в семью для подготовки к поступлению в гимназию.

В семье своего первого учителя Иваницкого (кстати, ученика В. Я. Буняковского) Коркин выучил немецкий и французский языки, был увлечен чтением, естественнонаучными исследованиями и математикой. Затем отец добился от Вологодской казенной палаты увольнения сына от податного состояния для учебы в гимназии. Ради сына Коркин-отец пожертвовал гимназической церкви 200 рублей — огромные по тем временам деньги. К сожалению, отцу недолго пришлось радоваться успехам сына. В 1849 году он умер, оставив свою семью почти без средств.

В 1853 году Александр Коркин окончил гимназию с золотой медалью, а в 1854 году поступил в Петербургский университет, где слушал лекции О. И. Сомова, В. Я. Буняковского и П. Л. Чебышёва. За первую научную работу об условных экстремумах «Теория наибольших и наименьших величин функций» (1856) факультет наградил его золотой медалью. При окончании университета (1858) А. Н. Коркин был вынужден вновь обратиться в казенную палату с просьбой исключить его из податного состояния, был утвержден в степени кандидата и начал преподавать математику в Первом кадетском корпусе (1858–1861).



В 1860 году Коркин защитил магистерскую диссертацию «Об определении произвольных функций в интегралах уравнений с частными производными» (из-за отсутствия средств он не мог ее напечатать и потому написал от руки литографическими чернилами в небольшом количестве экземпляров) и перешел в Петербургский университет, где проработал почти 50 лет. В 1861 году по ходатайству Чебышёва был избран адъюнктом университета по кафедре чистой математики. В 1862–1864 гг. Коркин для подготовки к профессорскому званию был отправлен в Берлин и Париж, слушал лекции Шаля, Ламе, Лиувилля, Бертрана, Вейерштрасса, Кронекера и Куммера. А. Н. Коркин защитил докторскую диссертацию «О совокупных уравнениях с частными производными 1-го порядка и некоторых вопросах механики» (1868, оппонентами были Сомов и Чебышёв) и был избран экстраординарным профессором по кафедре чистой математики, а затем ординарным профессором (1873) и заслуженным профессором (1886).

После смерти Сомова, Буняковского и Чебышёва чтение важнейших курсов перешло к Коркину. В университете заслугой Коркина является постановка курса «Интегрирование дифференциальных уравнений и вариационное исчисление», который он взял после ухода Чебышёва в 1882 году и в который ввел значительный раздел обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, в том числе собственный способ их решения, и уравнений с частными производными. У себя на дому Коркин читал курс уравнений в частных производных для избранных слушателей. В университете такой курс выделился в отдельный только при В. А. Стеклове.

Свыше 30 лет Коркин работал также в Морской академии. А. Н. Крылов, слушавший в Академии в 1888 году курс его лекций по дифференциальному и интегральному исчислению, а также в 1891 году спецкурсы по отдельным разделам математической физики, писал:

Как на русском, так и на иностранных языках существовало множество курсов дифференциального и интегрального исчисления, но Коркин не придерживался ни одного из них и, можно сказать, не столько читал, как диктовал нам свой совершенно оригинальный курс, отличавшийся особенною точностью определений, краткостью, естественностью и изяществом выводов всех формул, отсутствием той излишней щепетильности и строгости, которая не поясняет для техников, каковыми мы были, а затемняет дело, и которая необходима лишь для математиков, изучающих математику как безукоризненную область логики, а не как орудие для практических приложений [5, с. 109].

В своей монографии «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах» (1913) Крылов всю вторую и частично третью главу воспроизводит

по лекциям Коркина. Заканчивая работу в Морской академии, Коркин рекомендовал на свое место Крылова как наиболее способного своего ученика.

Основные работы Коркина относятся к теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, уравнений в частных производных и их приложений к механике, а также теории чисел. К первой области относятся его магистерская и докторская диссертации. В теории чисел Коркин занимался теорией квадратичных форм и теорией сравнений. Совместно с Золотаревым ему удалось решить трудную задачу о точной оценке минимума положительных квадратичных форм с четырьмя и пятью переменными.

В работе «*Sur les formes quadratiques*» они впервые построили целочисленную квадратичную форму, известную сегодня под названием E_8 .

К числу учеников Коркина относили себя немало видных русских математиков; непосредственными его учениками считали себя Е. И. Золотарев, А. Н. Крылов, А. М. Ляпунов, А. А. Марков, С. П. фон Глазенап, Д. А. Граве, И. И. Иванов, Н. М. Гюнтер. А. Н. Коркин прекрасно владел французским языком и многие свои работы и письма иностранным математикам писал по-французски, знал латынь. Он любил астрономические вычисления, в частности, внес ряд поправок в учебник сферической астрономии А. Н. Савича.

Вот что писал Д. А. Граве:

Еженедельно у него были вечера, когда он принимал гостей. В небольшой гостиной стоял старый рояль, нечто вроде клавирина. Кроме рояля в гостиной стояла старомодная мебель: стол, большой диван, два кресла и несколько стульев и еще один небольшой стол около окна, на который во время приемов работница обыкновенно подавала самовар. Коркин сам заваривал чай и разливал в стаканы, причем к чаю подавались неизменные сухари. Эти вечера охотно посещались не только молодыми людьми, но и коллегами профессорами. Сидя на диване, Коркин вел интересную беседу, так как он был умный и образованный человек. Особенно были интересны его разговоры о математике. Я должен признать, что обе мои диссертации вытекали из этих разговоров, хотя в докторской диссертации большую роль играли Чебышёв и Марков [6, с. 223].

А. Н. Коркин похоронен на Смоленском православном кладбище.



Литература

- [1] *Ожигова Е. П.* Александр Николаевич Коркин. 1837–1908. Л.: Наука. 1968¹.
- [2] *Ермолаева Н. С.* Петербургские математики и теория аналитических функций. М.: ИИЕСТЕХ, 1988, 1989. (Препр. АН СССР. Ин-т истории естествознания и техники, № 27.)
- [3] *Никитенко Г. Ю., Соболев В. Д.* Дома и люди Васильевского острова. М.: Центрполиграф; СПб.: Русская тройка, 2013.
- [4] *Синкевич Г. И.* Александр Николаевич Коркин // Математический Петербург. История, наука, достопримечательности. СПб.: Образовательные проекты, 2018. С. 177.
- [5] *Крылов А. Н.* Собрание трудов. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1945. Т. 1, ч. 1.
- [6] Автобиографические записки Д. А. Граве (Публикация А. Н. Боголюбова) // Историко-математические исследования. Вып. 34. М.: Наука, 1993. С. 219–246.

Юлиан Кароль Сохоцкий (1842–1927)

Юлиан Кароль (Юлиан Васильевич) Сохоцкий родился в Варшаве (на тот момент — столица Царства Польского в составе Российской империи) 24 января 1842 года в семье чиновника невысокого ранга. 18-летний Сохоцкий, закончив с отличием гимназию, отправился в Петербург и 15 сентября 1860 года был зачислен на физико-математический факультет Петербургского университета. Петербург сотрясали студенческие волнения. С 10 апреля до 10 октября 1861 года университет был закрыт, митинги и протесты не прекращались. За участие в студенческих беспорядках 12 октября Сохоцкий был помещен в Петропавловскую крепость, а 17 октября переведен в Кронштадт, где просидел до 6 декабря. После этого он уехал на родину, проучившись, таким образом, всего полтора семестра.

В Варшаве Сохоцкий принимал участие в польском восстании (Январское восстание 1863–1864 гг.), помогал перевозить оружие в телеге с сеном. После подавления восстания в 1864 году Сохоцкий вернулся в Петербург, но восстановиться в университете ему не позволили. Он занимался самостоятельно. В 1865 году он сдал кандидатские экзамены по математике и механике и представил кандидатскую диссертацию (соответствует современной дипломной работе) по эллиптическим функциям, за что в 1866 году получил степень кандидата математики.

В 1868 году Сохоцкий представил магистерскую диссертацию (соответствует современной кандидатской диссертации) «Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями», в которой содержится его знаменитая теорема о поведении функции в окрестности существенно



особой точки: «Если данная функция в некоторой точке обращается в бесконечность бесконечного порядка, то непременно в этой точке функция должна принимать все возможные значения». Эта теорема сейчас носит название теоремы Казорати—Сохоцкого—Вейерштрасса, потому что ее также независимо друг от друга опубликовали итальянский математик Феличе Казорати (1868) и немецкий математик Карл Вейерштрасс (1876). Как отмечал сам Сохоцкий в предисловии, его стиль исследования «не уклоняется от простоты, с которой можно получить все общие случаи», что выгодно отличало его от современных ему исследователей.

С 1869 года Сохоцкий начал работать в Институте гражданских инженеров сначала приват-доцентом (соответствует ассистенту), затем доцентом. В 1873 году он защитил докторскую диссертацию «Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложении в ряды», в которой содержатся так называемые формулы Сохоцкого (позже названные формулами Сохоцкого—Племеля), поныне используемые в квантовой физике. Став профессором Института гражданских инженеров, Сохоцкий параллельно читал лекции и в Петербургском университете: профессор (1882), заслуженный профессор (1893).

Учебные курсы Сохоцкого «Высшая алгебра» (1882–1888) и «Теория определенных интегралов» (1901) были рекомендованы в качестве учебных пособий в Санкт-Петербургском, Казанском и Харьковском университетах. Опубликовав работу на русском языке, Сохоцкий сам переводил ее на польский и издавал на родине. В 1894 году он был избран членом-корреспондентом Краковской академии. Среди его учеников много известных математиков: Е. И. Золотарев, Г. Ф. Вороной, А. П. Киселев, И. Я. Депман, И. Л. Пташицкий, А. А. Адамов, Е. В. Борисов, И. И. Иванов, В. И. Станевич, А. М. Журавский.

Тяжелыми были последние годы жизни Сохоцкого. Его жена и трое детей умерли в голодном Петрограде. Вот два выразительных документа. Первый — извещение, отправленное Сохоцкому ректором университета А. А. Ивановым [10]:

Профессор Первого Петроградского университета Ю. В. Сохоцкий 10 апреля 1919 г. зачислен на усиленный продовольственный паек. Продукты будут выдаваться в распредпункте Комиссариата народного просвещения (Аничков дворец, кв. 15, 1-я парадная с Фонтанки, пройдя ворота). Хлеб будет выдаваться 1 раз в неделю. Просим взять с собой посуду для подсолнечного масла.

А вот датированное 10 июля 1922 года письмо самого Сохоцкого в комиссию по улучшению быта ученых [11]:

Проведя три зимы подряд в неотапливаемой квартире, я совершенно расстроил свое здоровье. В настоящее время, в виду моей слабости и в виду приближающейся зимы, я вынужден обратиться в Комиссию по улучшению быта ученых с просьбой устроить мне, если это окажется возможным, подходящее помещение, где я мог бы провести зимние месяцы в условиях сносных, не представляющих опасности для жизни. Ю. В. Сохоцкий. 10 июля 1922 г. Фонтанка 126, кв. 11.

Последние два года своей жизни Сохоцкий провел в доме-интернате для престарелых ученых на Миллионной, 27. Он умер 14 декабря 1927 года, похоронен на Новодевичьем кладбище. Недавно его могила была отреставрирована по инициативе и за счет средств СПбГАСУ. Крест был



заменен на католический, согласно обряду, по которому хоронили Сохоцкого. На его могилу возложили цветы от СПбГАСУ, где он проработал более 50 лет, от Санкт-Петербургского математического общества, председателем которого он был около 20 лет, от генерального консула Польши в Петербурге.

Г. И. Синкевич

Литература

- [1] Ермолаева Н. С., Нумеров С. Н. Юлиан Васильевич Сохоцкий (1842–1927) // Численные методы в задачах математической физики. Межвузовский сборник трудов. Л.: ЛИСИ, 1983. С. 30–36.
- [2] Ермолаева Н. С. Теория функций комплексного переменного в Петербургском-Петроградском университете в начале XX века // В. И. Вернадский и отечественная наука. Тезисы доклада Всесоюзной научной конференции по истории науки и техники, посвященной 125-летию со дня рождения В. И. Вернадского (Одесса, 18–21 апреля 1988 г.). Киев: «Наукова думка», 1988. С. 122–123.
- [3] Ермолаева Н. С. Петербургские математики и теория аналитических функций. АН СССР. Институт истории естествознания и техники. Препринт № 27 (1989). Москва, 1988.
- [4] Ермолаева Н. С. Из истории Санкт-Петербургского и Петроградского математических обществ // Труды СПбМО. Т. 2. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1993. С. 309–326.
- [5] Ермолаева Н. С. Аналитические исследования Ю.В Сохоцкого // Историко-математические исследования. Вып. 34. М.: Наука, 1993. С. 60–103.
- [6] Ermolaeva N. S. On the History of the St. Petersburg and Petrograd mathematical Societies // American Mathematical Society Transl. (2) 1994. Vol. 159. P. 213–221.
- [7] Ермолаева Н. С. Юлиан Васильевич Сохоцкий (1842–1927) // Труды СПбМО. Т. 4. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1996. С. 359–364.
- [8] Ermolaeva N. S. Julian Karol Sochocki — uzupełnienie biografii naukowej // Matematycy polskiego pochodzenia na obczyźnie. Materiały z XI Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki. Kolobrzeg 5–9 maja 1997 / Red. Stanisław Fudali. Szczecin: Wydawnictwo naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego. 1998. S. 47–65.
- [9] Ermolaeva N. S. Julian Vasil'evich Sokhotskii (1842–1927) // American Mathematical Society Transl. (2) 1999. Vol. 193. P. 247–250.
- [10] ЦГИА. Ф. 14. Оп. 1. Д. 6646. Л. 178.
- [11] ЦГИА. Ф. 184. Оп. 2. Д. 770. Л. 50.

Два результата Юлиана Васильевича Сохоцкого в исторической перспективе

В этой заметке мы рассмотрим два выдающихся результата, принадлежащих Ю. В. Сохоцкому: теорему Казорати—Сохоцкого—Вейерштрасса о поведении голоморфной функции вблизи ее существенной особенности и формулы Сохоцкого для граничных значений интегралов типа Коши. Мы покажем, какое видное место заняли эти результаты в комплексном анализе и как они повлияли на развитие этой области математики в XX веке, и обсудим, какие новые вопросы, задачи и результаты они, в свою очередь, породили.

Теорема Казорати—Сохоцкого—Вейерштрасса

Наше знакомство с результатами Сохоцкого начнем с теоремы, известной каждому изучившему стандартный университетский курс комплексного анализа. Это теорема о поведении голоморфной функции вблизи ее существенной особенности. Существует несколько ее формулировок, и мы сформулируем ее в общем контексте теории предельных множеств.

Пусть D — область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, пусть $a \in \overline{D}$, и пусть $f: D \setminus \{a\} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, где $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — стандартная одноточечная компактификация комплексной плоскости.

Множество $C_D(f, a)$ предельных точек функции f в точке a состоит из всех точек $w \in \widehat{\mathbb{C}}$, для которых существует такая последовательность $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ точек $z_n \in D \setminus \{a\}$, что $z_n \rightarrow a$ и $f(z_n) \rightarrow w$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, $C_D(f, a)$ — непустое замкнутое множество в $\widehat{\mathbb{C}}$. Множество предельных точек $C_D(f, a)$ называется *вырожденным*, если оно состоит из одной точки, и *тотальным*, если $C_D(f, a) = \widehat{\mathbb{C}}$. Предельное множество $C_D(f, a)$, которое не является ни вырожденным, ни тотальным, называется *субтотальным*.

Теория предельных множеств изучает свойства множеств $C_D(f, a)$ для функций f из различных классов (например, голоморфных, гармонических, реализующих различные квазирегулярные отображения, удовлетворяющих различным дифференциальным уравнениям или их системам).

Следующая теорема содержит точную формулировку упомянутого выше утверждения и при этом может считаться одним из самых ранних результатов в теории предельных множеств.

Теорема Казорати—Сохоцкого—Вейерштрасса. Пусть $a \in D$. Если f — мероморфная функция на $D \setminus \{a\}$, то множество $C_D(f, a)$ либо то-тально, либо вырожденно.

В российской традиции эта теорема известна как теорема Сохоцкого в силу того, что она содержалась в магистерской диссертации Ю. В. Сохоцкого, представленной и защищенной в Санкт-Петербурге в 1868 году. В то же время в западной традиции этот результат обычно называют теоремой Казорати—Вейерштрасса в связи с работами Ф. Казорати (1868) и К. Вейерштрасса (1876), опубликованными независимо. Есть также упоминание об этой теореме в первом издании книги Ш. Брио и Ж. Буке (1859), но оно опущено в ее последующих изданиях. Эти замечания об истории и терминологии можно найти в классических книгах, таких как «Теория функций комплексного переменного» А. И. Маркушевича и «Теория предельных множеств» Э. Ф. Коллингвуда и А. Дж. Ловатера. Ввиду сказанного наиболее подходящим представляется название «теорема Казорати—Сохоцкого—Вейерштрасса».

Доказательство этой теоремы довольно просто и получается из следующего рассуждения. Допустим, что множество $C_D(f, a)$ субтотально. Тогда существует такое $w \in \widehat{\mathbb{C}}$, что $w \notin C_D(f, a)$. Следовательно, функция

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z) - w}, & w \in \mathbb{C}, \\ f(z), & w = \infty, \end{cases}$$

голоморфна и ограничена в проколотой окрестности точки a . Отсюда следует, что a — устранимая особенность функции g , так что множество $C_D(g, a)$ вырожденно. Но отсюда немедленно следует, что множество $C_D(f, a)$ также вырожденно.

Теорема Казорати—Сохоцкого—Вейерштрасса была принципиально усилена замечательной теоремой Пикара, которая говорит, что если голоморфная функция f имеет существенную особенность в некоторой точке $a \in \widehat{\mathbb{C}}$, то в любой ее проколотой окрестности функция f принимает бесконечно часто все возможные комплексные значения, кроме, быть может, одного.

В XX веке многие результаты в теории функций одного или нескольких комплексных переменных были получены под влиянием или в связи с теоремами Казорати—Сохоцкого—Вейерштрасса и Пикара. Например, результаты похожей природы были получены для гармонических и полианалитических функций на $\mathbb{C}$, для квазирегулярных отображений на $\mathbb{R}^n$

и т. д. Однако развитие теории предельных множеств пошло по другому пути: в рамках этой теории началось изучение свойств множеств $C_D(f, a)$ в самом трудном случае, когда точка a лежит на границе области D , в которой определена функция f .

Формулы Сохоцкого для граничных значений интегралов типа Коши

Еще одно важное достижение Сохоцкого относится к граничному поведению интегралов типа Коши. Пусть Γ — спрямляемая замкнутая жорданова кривая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$; D — жорданова область с границей Γ ; D_∞ — область $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$. Заметим, что стандартные пространства Лебега $L^p(\Gamma)$, $p \geq 1$, корректно определены в случае меры на Γ , задаваемой длиной дуги. Для данной функции $f \in L^1(\Gamma)$ рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

которая корректно определена и голоморфна на $D \cup D_\infty$. Такую функцию традиционно называют интегралом типа Коши или преобразованием Коши для функции f (или для меры $f d\zeta$).

Интересный, важный и глубокий вопрос состоит в изучении поведения функции $F(z)$, когда z стремится к Γ . Разумеется, нужно уточнить, в каком смысле понимается граничное поведение функции $F(z)$. Здесь возможны следующие варианты.

а) Поскольку Γ спрямляема, у нее есть касательная почти всюду (относительно длины дуги как меры на Γ). Поэтому осмыслен вопрос об описании множества тех точек $\zeta \in \Gamma$, где существует граничное значение $F_i(\zeta)$ функции F в точке ζ для некасательных путей со стороны D . По определению $F_i(\zeta) = \lim F(z)$, где z стремится к ζ вдоль пути, лежащего в $D \cup \{\zeta\}$ и не касательного к Γ , если указанный предел существует и одинаков вдоль любого такого пути.

б) Аналогично возникает вопрос о существовании граничных значений $F_e(\zeta)$ функции F в точке ζ по некасательным путям со стороны D_∞ .

в) Можно также рассмотреть главное значение соответствующего сингулярного интеграла в точке $\zeta \in \Gamma$, т. е.

$$Cf(\zeta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus B(\zeta, \delta)} \frac{f(w) dw}{w - \zeta},$$

где $B(\zeta, \delta) = \{w : |w - \zeta| < \delta\}$.

Чтобы описать вклад Сохоцкого в рассматриваемую тематику, рассмотрим случай, когда исходная функция f непрерывна по Гёльдеру на Γ , т. е. существуют $M > 0$ и $\alpha > 0$, для которых $|f(\zeta) - f(\zeta')| \leq M|\zeta - \zeta'|^\alpha$ при всех $\zeta, \zeta' \in \Gamma$. Тогда без труда доказывается, что $Cf(\zeta)$ существует в каждой точке $\zeta \in \Gamma$, где Γ имеет касательную. А именно,

$$Cf(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w) - f(\zeta)}{w - \zeta} dw + \frac{f(\zeta)}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus B(\zeta, \delta)} \frac{dw}{w - \zeta}.$$

Первый интеграл сходится абсолютно (в силу непрерывности f по Гёльдеру), тогда как второй вычисляется явно и стремится к $1/2$: действительно, внутренний угол области D в граничной точке ζ равен π (поскольку Γ имеет касательную в точке ζ), и потому

$$Cf(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w) - f(\zeta)}{w - \zeta} dw + \frac{1}{2}f(\zeta).$$

Опустим все технические подробности; их можно найти, например, в упомянутой книге Маркушевича.

Аналогично для функции f , непрерывной по Гёльдеру, и для любых $z \in D$ и $\zeta \in \Gamma$ получаем

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w) - f(\zeta)}{w - z} dw + f(\zeta),$$

поскольку $\int_{\Gamma} (w - z)^{-1} dw = 2\pi i$. Предположив, что Γ имеет касательную в точке ζ , и устремив z к ζ по некасательному направлению, получаем

$$F_i(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w) - f(\zeta)}{w - \zeta} dw + f(\zeta),$$

где первый интеграл сходится абсолютно, как и в предыдущем случае. Таким образом, почти для всех $\zeta \in \Gamma$ выполнено равенство

$$F_i(\zeta) = Cf(\zeta) + \frac{1}{2}f(\zeta).$$

Наконец, для любых $z \in D_\infty$ и $\zeta \in \Gamma$ имеем

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w) - f(\zeta)}{w - z} dw,$$

откуда

$$F_e(\zeta) = Cf(\zeta) - \frac{1}{2}f(\zeta)$$

для всех ζ , где Γ имеет касательную.

Суммируя изложенное, мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема (формулы Сохоцкого). Пусть Γ — спрямляемая замкнутая жорданова кривая $\mathbb{C}$, а f — функция на Γ , непрерывная по Гёльдеру. Тогда величины $F_i(\zeta)$, $F_e(\zeta)$ и $Cf(\zeta)$ существуют почти для всех точек $\zeta \in \Gamma$, причем выполнены следующие формулы:

$$F_i(\zeta) = Cf(\zeta) + \frac{1}{2}f(\zeta), \quad F_e(\zeta) = Cf(\zeta) - \frac{1}{2}f(\zeta), \quad F_i(\zeta) - F_e(\zeta) = f(\zeta).$$

Формулы, связывающие $F_i(\zeta)$, $F_e(\zeta)$ и $Cf(\zeta)$ в только что сформулированной теореме, называются формулами Сохоцкого; впервые они были получены в его докторской диссертации, защищенной в 1873 году.

Традиционно формулы Сохоцкого называются также формулами Сохоцкого—Племеля, поскольку они были также получены (по-видимому, полностью независимо) Й. Племелем [1] в 1908 году.

Формулы Сохоцкого—Племеля открыли направление длительных исследований, связанных с граничным поведением интегралов типа Коши. Допущения, сделанные выше для получения формул Сохоцкого, оказались слишком ограничительными. Поэтому было интересно и важно получить наиболее общие условия, обеспечивающие существование граничных значений интегралов типа Коши.

Первый известный результат в этом направлении — знаменитая лемма Привалова — звучит следующим образом.

Теорема (лемма Привалова). Пусть Γ — спрямляемая замкнутая жорданова кривая на комплексной плоскости, и пусть $f \in L^1(\Gamma)$. Тогда величины $F_i(\zeta)$, $F_e(\zeta)$ и $Cf(\zeta)$ одновременно существуют или не существуют почти для всех точек $\zeta \in \Gamma$. Если эти величины существуют, то они связаны формулами Сохоцкого во всех точках $\zeta \in \Gamma$, где Γ имеет касательную.

Подчеркнем, что лемма Привалова оставляет открытым вопрос, насколько большим может быть множество точек, где не существуют граничные значения интеграла типа Коши. На его решение было затрачено много времени и усилий.

Отметим, что интегралы типа Коши можно определить не только для функций, но и для произвольной меры. А именно, для меры μ на Γ положим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\mu(w)}{w-z}, \quad z \in D \cup D_{\infty},$$

$$C\mu(\zeta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus B(\zeta, \delta)} \frac{d\mu(w)}{w-\zeta}, \quad \zeta \in \Gamma.$$

В этом случае можно проверить, что формулы Сохоцкого и лемма Привалова остаются верными, если положить $f = d\mu/dz$ (производная Радона—Никодима).

Поскольку определения всех величин $F_i(\zeta)$, $F_e(\zeta)$ и $Cf(\zeta)$ имеют локальную природу, можно определить эти объекты и для случая, когда Γ — произвольная спрямляемая кривая в $\mathbb{C}$, не обязательно замкнутая и/или жорданова. В этом случае $F_i(\zeta)$ и $F_e(\zeta)$ означают пределы функции $F(z)$ при z , стремящемся к ζ с одной стороны от Γ (слева или справа в зависимости от направления обхода Γ).

Следующий естественный вопрос таков: при каких ограничениях на спрямляемую кривую Γ величины $F_i(\zeta)$, $F_e(\zeta)$ и $Cf(\zeta)$ существуют почти для всех точек $\zeta \in \Gamma$ при всех $f \in L^1(\Gamma)$ или при всех конечных комплекснозначных борелевских мерах μ на Γ ?

Этот вопрос оказался очень трудным, и его решение потребовало много времени и очень серьезных усилий. Именно при исследовании этого вопроса А. П. Кальдероном и А. Зигмундом была создана и далеко развита глубокая теория сингулярных интегральных операторов. Следующий результат получен в конце 1970-х годов (через столетие после открытия формул Сохоцкого).

Теорема (существование $F_i(\zeta)$, $F_e(\zeta)$ и $Cf(\zeta)$). Пусть Γ — спрямляемая кривая на комплексной плоскости. Тогда для любой функции $f \in L^1(\Gamma)$ величины $F_i(\zeta)$, $F_e(\zeta)$ и $Cf(\zeta)$ существуют при почти всех $\zeta \in \Gamma$. То же верно для любой ограниченной комплекснозначной борелевской меры μ на Γ .

Этот результат вытекает из двух весьма известных работ. Первая принадлежит петербургскому математику В. П. Хавину [2], доказавшему в 1965 году, что граничные значения $F_i(\zeta)$ существуют при почти всех $\zeta \in \Gamma$ для произвольных мер, если они существуют для непрерывных функций. Соответствующая модификация рассуждений Хавина позволяет свести случай произвольной спрямляемой кривой к случаю липшицевой кривой с произвольно малой константой Липшица.

Вторая работа — это знаменитая работа А. П. Кальдерона 1977 года [3]. Кальдерон доказал, что если Γ — липшицева кривая с достаточно малой константой Липшица, то оператор C имеет слабый тип $(1, 1)$ и ограничен в $L^p(\Gamma)$ при $1 < p < \infty$, а $Cf(\zeta)$ существует при почти всех $\zeta \in \Gamma$ для любых $f \in L^p(\Gamma)$, $1 \leq p < \infty$.

Исчерпывающий обзор работ по описанию спрямляемых кривых Γ , для которых оператор C ограничен на $L^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, потребовал бы довольно длинных пояснений. Тем не менее дадим краткий очерк истории этого вопроса, так как она тесно связана с нашей темой и при этом ее отправной пункт — упомянутая работа Кальдерона. В 1982 году Р. Р. Койфман, А. Макинтош и И. Мейер [4] показали, что оператор C ограничен в $L^2(\Gamma)$ на произвольной липшицевой кривой Γ . Отметим, что если оператор C ограничен в $L^p(\Gamma)$ для некоторого p или имеет слабый тип $(1, 1)$, то он ограничен и имеет слабый тип $(1, 1)$ в $L^p(\Gamma)$ при всех p , $1 < p < \infty$.

Можно также проверить, что если S ограничен в $L^p(\Gamma)$ для некоторого p , $1 < p < \infty$, то Γ является кривой Карлесона, т. е. для любой точки $\zeta \in \Gamma$ и любого $r > 0$ имеем

$$\text{Length}(\{w \in \Gamma : |w - \zeta| < r\}) \leq Ar,$$

где $A > 0$ — константа, зависящая только от Γ . Последнюю точку в этой истории поставил в 1984 году Г. Давид, доказав, что S ограничен в $L^2(\Gamma)$ в точности тогда, когда Γ — кривая Карлесона (см. [5]).

Говоря о влиянии рассмотренных выше результатов и конструкций, следует упомянуть долгую историю проблемы Пенлеве об описании множеств устранимых особенностей для ограниченных голоморфных функций. Отсылаем читателя к прекрасному обзору по этой проблеме в статье М. С. Мельникова [6], где можно найти интересное изложение этой истории и несколько важных ссылок на относящиеся сюда работы таких авторов, как П. Маттиа, М. С. Мельников, Дж. Вердера, Х. Толса.

Таким образом, результаты, полученные Ю. В. Сохоцким в 1873 году, нашли достойное место в комплексном анализе. Более того, их можно связать по крайней мере с двумя интересными и важными направлениями комплексного анализа (а именно с теорией предельных множеств и теорией граничных свойств интегралов типа Коши), развитие которых существенно повлияло на математику XX века.

К. Ю. Федоровский, П. В. Парамонов

Литература

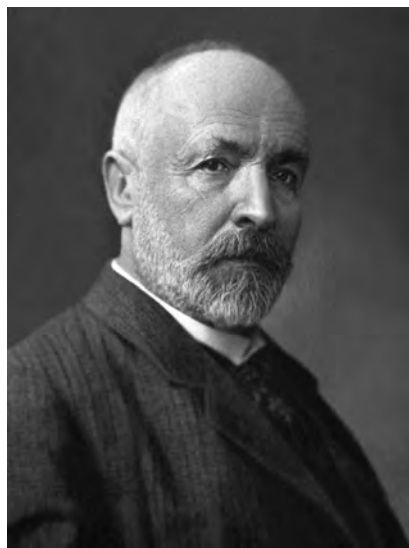
- [1] *Plemelj J.* Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend // *Monatsh. f. Mathematik und Physik.* 1908. Bd. 19. S. 205–210.
- [2] *Хавин В. П.* Граничные свойства интегралов типа Коши и гармонически сопряженных функций в областях со спрямляемой границей // *Матем. сб.* 1965. Т. 68, № 4. С. 499–517.
- [3] *Calderón A.-P.* Cauchy Integrals on Lipschitz Curves and Related Operators // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1977. V. 74, № 4. P. 1324–1327.
- [4] *Coifman R. R., McIntosh A., Meyer Y.* L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes // *Ann. Math.* 1982. V. 116, № 2. P. 361–387.
- [5] *David G.* Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe // *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* 1984. T. 17, № 1. P. 157–189.
- [6] *Мельников М. С.* Слага о проблеме Пенлеве и аналитической емкости // *Труды МИАН.* 2001. Т. 235. С. 157–164.

Георг Кантор (1845–1918)

Георг Кантор родился в Петербурге, где прошли первые 11 лет его жизни. Три предшествующих поколения его предков из Венгрии, Чехии, Дании, Португалии жили в Петербурге и трудились на благо петербургской культуры XVIII–XIX веков. Среди его петербургской родни были такие яркие таланты, как скрипачи Франц, Йозеф и Людвиг Бёмы, Мария Моравек, Гартвиг Мейер; создатель русского гражданского права Дмитрий Мейер, купцы и коммерсанты.

Будущий математик Георг Фердинанд Луи Филипп Кантор родился 3 марта (19 февраля по старому стилю) 1845 года в семье Георга Вольдемара Кантора и Марии Кантор, урожденной Бём. Его отец был маклером и торговцем на бирже, поселившимся в Петербурге в 1834 году и крестившимся по лютеранскому обряду. Он был родом из копенгагенских евреев, происходивших, в свою очередь, из Португалии. Мать Георга Кантора происходила из семьи живших в Петербурге музыкантов австрийского происхождения. Будущий математик был у Георга Вольдемара и Марии первенцем. Его крестили в той самой лютеранской церкви св. Екатерины (Большой проспект Васильевского острова, д. 1), прихожанином которой был Леонард Эйлер.

В отделе рукописей Российской национальной библиотеки сохранилось письмо Георга Вольдемара Кантора 1851 года к своему кузену Дмитрию Мейеру, в котором он описывает «суровую суматоху своей жизни», изматывающую конкуренцию, свою апатию, своих детей, гостей дома, холодные зимние вечера, отварную говядину на ужин и кипящий самовар. Вот что писал Георг Вольдемар о своем старшем сыне: «Старшего,



семилетнего, зовут Георг Фердинанд Луи Филипп, он одарен от природы стремлением к порядку, преобладающим над всем остальным, по характеру сангвиник».

Семья жила на Васильевском острове, на 11-й линии в доме купца Траншеля (современный адрес: 11-я линия В. О., 24). Сейчас на доме установлена мемориальная доска. В те же годы в этом доме жили молодые адъюнкты университета П. Л. Чебышёв и О. И. Сомов. В теплые дни окна были открыты, и они слышали, как дети Канторов под руководством своей матери учатся играть на скрипке. Георг Кантор на всю жизнь сохранил любовь к скрипке, а в студенческие годы даже организовал с друзьями скрипичный ансамбль. Под конец жизни Кантор выражал сожаление, что не стал скрипачом.

В 1854 году Георг начал учиться в Петришуле — старейшей школе Петербурга. Более всего Георгу нравилась география и математика.

Болезнь Георга Вольдемара Кантора (чахотка) вынудила его просить отпуск для поправления здоровья. Предполагалось, что он с семьей уезжает на год. Весной 1856 года семья покинула Петербург — как оказалось, навсегда.

Сначала они переехали во Франкфурт, затем в Галле. Отец хотел, чтобы Георг стал инженером, но сын выбрал математику, для изучения которой поступил в Политехникум в Цюрихе.

После смерти отца Георг Кантор переехал в Берлин и окончил Берлинский университет. Его учителями были Куммер, Кронекер и оказавший на него особенно большое влияние Вейерштрасс. Поколение студентов, выпущенное в эти годы, включает много известных имен. Среди сокурсников Кантора, с которыми он подружился, можно назвать Томе, Мертенса и Шварца. Каждую неделю друзья встречались, чтобы выпить вина и поговорить о математике. Дружба и переписка с ними продолжались много лет. Летний семестр 1866/67 года Кантор провел в Гёттингентском университете, где он слушал лекции философа Лотце, физика Вебера, математиков Миннигероде и Шеринга. Первые математические интересы Кантора относятся к теории чисел. В 1867 году в Берлине Кантор под руководством Куммера защитил диссертацию «О неопределенных уравнениях второй степени», за которую ему присудили ученую степень. Некоторое время Кантор работал в гимназии Фридриха Вильгельма для девочек в Берлине. В 1869 году Георг Кантор представил свою работу по теории чисел «О преобразовании тернарных квадратичных форм» под руководством Э. Гейне для права чтения лекций в Галле. Гейне заинтересовал Кантора проблемами анализа, в частности вопросами сходимости тригонометрических рядов. Кантор писал сестре:

Чем больше я смотрю на свою математику, тем больше я вижу, что она для моего сердца и ума ведет меня к счастью и удаче. Работа была и будет для меня подлинным смыслом моей жизни и моего желания, наполненным физическим ощущением и чувством удовлетворения, в ней я чувствую, что свободен в своей деятельности и в отношении приносимой пользы обществу, этой приятной возможности. Полагаю, что эта надежда прежде всего связана с Галле, там меня ожидает настоящее целостное поле деятельности, соответствующее моей работе, возможно, там я получу признание и мои стремления найдут применение.

В 1869 году Кантор получил звание приват-доцента университета Галле и стал преподавателем математического семинара факультета философии. Он проработал в этом университете всю жизнь. С 1872 по 1877 год он был экстраординарным профессором факультета естественной и общественной истории, с 1877 по 1913 год — ординарным профессором.

Ощущение необходимости нового понимания действительного числа и непрерывности витало в математической атмосфере XIX века. Начиная с 1822 года в работах Фурье возникла проблема сходимости тригонометрического ряда и единственности разложения функции в ряд. В 1829 году Дирихле сформулировал условия сходимости тригонометрических рядов. Но прикладные задачи требовали расширения класса функций, разложимых в ряд Фурье, а следовательно, анализа понятий числа и непрерывности.



Фрагмент письма Георга Кантора

Гейне начинал работать в Берлине с Дирихле, которого считал своим учителем, и продолжил его исследования по сходимости тригонометрических рядов. В 1870 году он опубликовал статью «О сходимости тригонометрических рядов», в которой формулировал достаточные условия сходимости. Размышления о сходимости рядов Фурье привели его в 1872 году к понятию равномерной непрерывности. Заметим, что термины «непрерывность» и «сходимость» понимались каждым математиком по-своему, были смутно-интуитивными. Например, видов равномерной сходимости было более семи. Прочих привычных нам терминов из анализа тогда тоже не было: Эдуард Гейне не узнал бы свою знаменитую лемму Гейне—Бореля в современной формулировке.

Кантор в 1870 году доказал, что для функции, непрерывной на интервале, ее представление тригонометрическим рядом единственно. Этот результат он распространил на функции, имеющие конечное число точек разрыва. Но Кантора интересовало, сохранится ли эта единственность, если множество точек разрыва окажется бесконечным, и именно в связи с этой задачей он пришел к исследованию подмножеств числовой прямой, а затем — и множеств вообще.

1872 год был годом рождения теории множеств. Гейне, Кантор и Дедекинд опубликовали свои работы по этой теме. Работа Кантора называлась «Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов» (*Über die Ausdehnung einer Satzes aus Theorie der trigonometrischen Reihen*). Она была его первой работой, посвященной тригонометрическим рядам, но в ней содержался анализ понятия числовой величины как предела фундаментальных последовательностей и было введено понятие предельной точки (точки сгущения). Тогда же, в 1872 году, Р. Дедекинд формулирует метод сечений.

Георг Кантор познакомился с Рихардом Дедекиндом в начале 1870-х годов во время летнего отдыха в Интерлакене. Это знакомство положило начало многолетней дружбе и переписке. Кантор продолжает размышлять о структуре числовых множеств. Он еще не сформировал свою терминологию («множество», «счетность», «мощность»), но рассматривает взаимно однозначное соответствие как основное понятие.

В 1873 году он пишет Дедекинду о своей попытке установить такое соответствие между целыми положительными и действительными числами, хотя отмечает, что этот вопрос не имеет практического интереса.

Идеи Кантора и его переписка с Дедекиндом оформились в построение, которое высоко оценил Вейерштрасс, навестивший Кантора в Берлине 23 декабря 1873 года и рекомендовавший опубликовать этот результат. Эта работа Кантора «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел» (*Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller*



Лютеранская церковь святой Екатерины (Большой проспект Васильевского острова, дом 1). В этой церкви Георга Кантора крестили; прихожанином этой церкви был Леонард Эйлер.

reellen algebraischen Zahlen) вышла в 1874 году. В ней Кантор рассматривает совокупность корней алгебраических уравнений с целыми коэффициентами и устанавливает взаимно однозначное соответствие между ними и целыми положительными числами. В 1878 году вышла первая крупная работа Кантора «К учению о многообразиях»¹ (Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre), в которой он вводит понятие эквивалентности или равномощности, доказывая существование взаимно однозначного соответствия между одномерными и многомерными непрерывными объектами. Здесь же впервые формулируется гипотеза континуума.

В 1879 году Кантор был избран членом-корреспондентом Общества наук в Геттингене. Вышла его работа «Об одной теореме из теории непрерывных многообразий» (Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten), в которой он продолжает устанавливать соответствие между объектами различной размерности.

В 1879 году Кантор опубликовал первую из серии статей «О бесконечных линейных точечных многообразиях» (Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten). В 1880, 1882 и 1883 годах выходят продолжения под номерами 2, 3 и 4; в 1883 году выходит продолжение № 5 под

¹ Термин «многообразие» (Mannigfaltigkeit) используется тут не в современном смысле.

названием «Основы общего учения о многообразиях. Математически-философский опыт учения о бесконечном» (*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre: Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen* — знаменитый «Пятый мемуар»); завершает этот цикл работа 1884 года «О бесконечных линейных точечных многообразиях» (*Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*).

Как писал Э. Цермело, серия работ, «публиковавшаяся в нескольких томах *Annalen* за 1879–1884 гг., выходит далеко за пределы, обозначенные ее названием, и фактически включает все результаты, полученные Кантором в области как абстрактного, так и прикладного учения о множествах, в частности теорию эквивалентности и мощности, а также упорядоченность и порядковые числа. В ней более подробно изложена также канторовская теория иррациональных чисел (№ 5, § 9), а также философская полемика с противниками актуально бесконечного. В работах этого цикла фактически содержится изложение всей теории множеств Кантора, а работы последующих лет комментируют и дополняют теорию». Заметим, что диагональный метод появляется в 1890/91 году в работе «Об одном элементарном вопросе учения о многообразиях» (*Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*).

Последующие работы Кантора являются извлечениями из его писем к Миттаг-Леффлеру как редактору журнала *Acta Mathematica*. Это работы 1883 года «О различных теоремах теории точечных множеств, расположенных в непрерывном пространстве n измерений. Сообщение первое» (*Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à n dimensions. Première communication: Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur*), 1884 года «О мощности совершенных точечных множеств» (*De la puissance des ensembles parfaits de points: Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur*), 1885 года «О различных теоремах из теории точечных множеств в n -кратно протяженном непрерывном пространстве G_n . Сообщение второе» (*Über verschiedene Theoreme aus Theorie der Punktmengen in einem n -fach ausgedehnten stetigen Raume G_n . Zweite Mitteilung*). Здесь впервые встречается утверждение о том, что всякая мощность является алефом.

1884 год был сложным для Кантора. Осознание своей работы как целостной теории вступало в противоречие с непониманием коллег. Кантор мечтал о работе в Берлинском университете, но этому противился его бывший учитель Л. Кронекер, который возглавлял там кафедру математики. Он осуждал теории Кантора, называя его развратителем молодежи. Кронекер был основателем конструктивной математики, а теория множеств Кантора исследовала свойства множеств без их конкретного представления. Кантор тяжело переживал его критику. Мнительный и склон-

ный к депрессии, он надолго замыкался и терял работоспособность после ситуаций, травмирующих его психику.

Кантор предпринимает попытки осмыслить и защитить свои исследования бесконечного, пишет цикл философских работ. Первая из них — это работа 1884 года «Принципы теории порядковых типов. Первое сообщение» (*Prinzipien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mitteilung: Auszug eines Schreibens an den Herausgeber*). Эту работу Миттаг-Леффлер печатать отказался, впервые она была опубликована в 1970 году.

С 1884 года Кантор вынужден лечиться в психиатрической клинике. Каждое обострение его болезни влекло изменение направленности интересов. В 1884 году он отказался читать лекции по математике и выразил желание читать философию, и тогда же по совету своей сестры Софии он занялся литературой елизаветинской эпохи, пожелав обосновать гипотезу, согласно которой подлинным автором произведений Шекспира являлся Фрэнсис Бэкон. Результаты своих изысканий он опубликовал в двух статьях в 1897 году. Также он обращался к работам немецкого теолога и визионера Якоба Бёме (1575–1624) и увлекавшегося магией английского мыслителя Джона Ди (1527–1609). Лекции Кантора по философии не пользовались успехом, и он отказался от этой затеи.

С этого времени его интересы смещаются в область философского обоснования теории множеств, он вступает в переписку с философами и теологами. Заметим, что, хотя Кантор был протестантского исповедания, он обратился к католическим богословам. Возможно, это обусловлено богатой литературой по вопросам бесконечности, и прежде всего работами такого классика католической теологии, как Фома Аквинский. Переписка Кантора по философским вопросам была опубликована в 1886–1888 гг.

Фактически вся теория множеств Кантора изложена в 24 его статьях. В 1889 году Кантор был принят в немецкую академию естественных наук Леопольдина (*Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina*), которая с 1878 года располагалась в Галле. Постепенно растет авторитет Кантора среди математиков. Всегда доброжелательно относился и высоко ценил Кантора Вейерштрасс. В 1890 году Кантор выступает инициатором создания Немецкого математического общества. Кантор стал первым председателем этого общества и издателем первых двух томов ежегодника общества. В сентябре 1891 года в Галле состоялось его первое заседание. Растет популярность теории множеств и ее признание среди европейских математиков.

В 1890/91 году вышла работа Кантора «Об одном элементарном вопросе учения о многообразиях» с изложением диагонального метода. В 1895–97 годах он написал последнюю незавершенную работу «К обоснованию учения о бесконечных множествах» (*Beiträge zur Begründung der transfi-*

niten Mengenlehre). Здесь он подводит итоги изложению своей теории, окончательно ее оформляет и обосновывает. К 1895–97 гг. относятся работы, в которых возникает теория трансфинитных чисел. В конце девяностых годов Кантор осознает наличие парадоксов теории множеств. В 1896 году Кантор обсуждает это с Гильбертом, а в 1897 году появляется работа Бурали—Форти об обнаруженном им парадоксе. В 1896 и 1897 годах выходят две работы Кантора о Шекспире.

В 1897 году Кантор был инициатором и участником Первого международного конгресса математиков в Цюрихе. На этом конгрессе Адольф Гурвиц в своем докладе выразил глубокое восхищение Кантором и его вкладом в теорию функций. Французский математик Жак Адамар также высоко оценил теорию множеств как необходимый инструмент исследования.

В сентябре 1903 года в Мюнхене Кантор сделал доклад о парадоксах теории множеств на втором заседании Математического общества, хотя в силу болезни снял с себя обязанности председателя. В том же году Кантор вновь попадает в клинику.

В августе 1904 года Кантор принял участие в Международном математическом конгрессе в Гейдельберге. На этом конгрессе математиков прозвучали критические замечания в адрес теории множеств, которые Кантор тяжело переживал.

В 1913 году Кантор ушел в отставку. Началась Первая мировая война. Условия жизни стали тяжелыми, началась нехватка продовольствия. Кантор страдал от бедности и недоедания. В 1915 году предполагалось европейское празднование 70-летнего юбилея Кантора, но из-за войны пришлось ограничиться небольшим домашним празднованием и поздравлениями немецких коллег. В июне 1917 года Кантор последний раз попал в клинику нервных болезней в Галле, где 6 января 1918 года умер от сердечного приступа.

Идеи Кантора постепенно распространялись по миру и обретали широкое признание. Теория множеств Кантора начинала играть роль языка основ математики, но она же вызывала настороженное отношение и споры математиков своими парадоксами, открытыми вопросами и гипотезами, что впоследствии породило возникновение различных логических и философских теорий, а также новых областей математики.

С 1909 года польский математик Вацлав Серпинский читал в Львовском университете полный курс теории множеств. Математики России, бывавшие в научных командировках в университетах Берлина, Гёттингена, читавшие журнал Крелле (его получали все университеты), познакомились с идеями теории множеств.

В 1894 году С. О. Шатуновский в Одессе опубликовал перевод работы Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа»; в 1896 году он

опубликовал статью «Доказательство существования трансцендентных чисел (по Кантору)».

В 1900–1901 гг. в Московском университете Б. К. Млодзеевский читал курс теории функций действительного переменного с привлечением теории множеств.

В 1904 году студент Московского университета П. А. Флоренский опубликовал работу «О символах бесконечности» — хороший пересказ учения Кантора.

С 1904 по 1908 гг. в издательстве Казанского университета несколькими выпусками вышли лекции «Введение в анализ» А. В. Васильева, пропагандиста теории множеств.

В 1905 году С. О. Шатуновский читал математический анализ в Одесском (тогда Новороссийском) университете, используя понятия и методы теории множеств. Этот курс был литографирован в 1906–1907 гг.; он оказал влияние на Г. М. Фихтенгольца, Д. А. Крыжановского, И. В. Арнольда. В 1910 году в Московском университете начал работу семинар Д. Ф. Егорова по теории функций. С него началась история московской школы теории функций, во главе которой стояли Егоров и Н. Н. Лузин. В 1914 году в Петербурге в 6-м выпуске «Новых идей в математике» под редакцией А. В. Васильева и в переводе русского философа и общественного деятеля П. С. Юшкевича (1873–1945) выходят три работы Кантора из «Основ общего учения о многообразиях». Заметим, что А. В. Васильев (1853–1829), казанский математик и популяризатор работ Кантора, высоко ценил и труды дяди Г. Кантора, профессора права Казанского и Петербургского университетов Дмитрия Ивановича Мейера. У Васильева дома висели два портрета — Николая Лобачевского и Дмитрия Мейера.

Несмотря на огромную популярность теории Кантора, его труды не спешили переводить на русский язык. Достаточно сказать, что по настоянию Л. С. Понтрягина было остановлено издание сочинений Кантора в русском переводе. Этот перевод был выполнен известным математиком А. И. Фетом (1924–2007), жившим в Новосибирске. Он перевел биографию Кантора, написанную А. Френкелем, а также все его сочинения. Этот великолепный перевод был выложен на сайте Открытого архива Сибирского отделения Российской академии наук.

В 1985 году «Труды по теории множеств» Г. Кантора вышли в издательстве «Наука» в переводах Ф. А. Медведева и П. С. Юшкевича под редакцией А. П. Юшкевича и А. Н. Колмогорова.

Г. И. Синкевич

Литература

- [1] Синкевич Г. И. Георг Кантор & Польская школа теории множеств. СПб.: Изд-во СПбГАСУ, 2012.
- [2] Синкевич Г. И. Идеи Кантора в России // Наука и техника: Вопросы истории и теории. Вып. XXVIII. СПб., 2012. С. 233–234.
- [3] Sinkevich G. Georg Cantor — Kindheit und Familiengeschichte // Mitteilungen der DMV. 2014. Bd. 22, № 2. S. 104–110.
- [4] Sinkevich G. The Fate of Russian Translations of Cantor // Notices of the Intern. Cong. of Chinese Mathem. International Press of Boston. 2015. V. 3, № 2. P. 74–83.
- [5] Синкевич Г. И. Георг Кантор из Санкт-Петербурга (с комментариями Георга Зингера). 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: СПбГАСУ, 2023.

Георг Кантор и основание теории множеств

Георг Кантор (1845–1918) — одна из ключевых фигур в истории математики. Его основополагающие работы, посвященные множествам и числам, ознаменовали появление новых методов в математике, опирающихся на понятие бесконечности и вместе с тем комбинаторных. Они открыли новое поле исследований — теорию множеств. Постоянно исходя из задач современной ему математики, вначале анализа, а затем развиваемой им теории трансфинитных кардиналов, Кантор в классическом интенциональном окружении¹ боролся за то, чтобы распространить и укрепить представления, связанные с расширяющейся областью бесконечных множеств и пределов. Тот факт, что сегодня можно о построениях и рассуждениях Кантора говорить кратко, как в этом тексте, — свидетельство того, насколько его образ мыслей стал привычен в современной математике.

Пройдя процедуру хабилитации в теории чисел, Кантор в 1870 г. начал работать в области действительного анализа, а именно над проблемой единственности разложения в тригонометрические ряды. При этом Кантор вскоре оказался перед необходимостью (нужда заставит!) ясной формулировки доказательств. Он дал *определение* действительных чисел — революционный шаг в то время — через фундаментальные последовательности; для произвольного множества P действительных чисел он определил множество P' его предельных точек, тем самым впервые введя операцию над бесконечными множествами; и он уже рассматривал возможность ее *трансфинитных итераций*, беря пересечения в пределе и индексируя их «символами бесконечности»:

$$P^{(\infty)} = \bigcap P^{(n)}, P^{(\infty+1)}, P^{(\infty+2)}, \dots, P^{(\infty \cdot 2)}, \dots, P^{(\infty^2)}, \dots, P^{(\infty^\infty)}, \dots$$

¹ Имеется в виду, что тогдашняя математика оперировала более конкретными и наглядными понятиями. — *Прим. пер.*

Несчетность и континуум-гипотеза

Занявшись изучением нумераций действительных чисел самих по себе, Кантор осознал следующее: поскольку множество алгебраических действительных чисел *считаемо*, т. е. допускает взаимно однозначное соответствие с множеством натуральных чисел, можно с помощью «счета элементов» установить существование трансцендентных чисел. Теория множеств родилась 7 декабря 1873 г., когда Кантор показал, что *множество действительных чисел несчитаемо*.

Доказательство Кантора основывалось на пределах и фундаментальных последовательностях. На современном языке его можно кратко изложить очень быстро: пусть $\{a_i\}_i$ — последовательность действительных чисел, занумерованных натуральными числами i . Рекурсивно определим следующую последовательность $\{I_i\}$ отрезков действительной оси: пусть $a_1 \notin I_1$, а I_{k+1} — такой отрезок в I_k , что $a_{k+1} \notin I_{k+1}$. Тогда любое действительное число в пересечении всех I_i не принадлежит последовательности.

После этого Кантор стал изучать мощности бесконечных совокупностей. Мы говорим, что две такие совокупности имеют *одинаковую мощность* (или *равномощны*), если между ними существует взаимно однозначное соответствие. В 1877 г. он дал аккуратное доказательство равномощности $[0, 1]^n$, то есть множества наборов из n действительных чисел на единичном отрезке $[0, 1]$, и самого отрезка $[0, 1]$. Казалось, это компрометирует развивавшуюся тогда теорию «непрерывных многообразий», но Дедекинд отметил, что «первым и важнейшим инвариантом непрерывного многообразия остается число измерений». Кантор согласился, и вскоре он и другие занялись условиями отсутствия «непрерывных» взаимно однозначных соответствий. Инвариантность размерности была окончательно установлена молодым Брауэром в 1911 году, и это было одним из первых результатов алгебраической топологии.

Оставляя в стороне непрерывность, Кантор свел рассмотрение вопросов мощности к «линейным многообразиям». В 1878 г. он высказал утверждение, что «линейные многообразия принадлежат к двум классам»: один состоит из многообразий, равномощных натуральным числам, а другой — из многообразий, равномощных единичному отрезку. Это была первая формулировка *континуум-гипотезы*. Кантор принялся сражаться с ней, пользуясь все более сложными арифметическими и комбинаторными методами, заставлявшими ставить фундаментальные вопросы существования множеств, — что мы продолжаем делать и до сих пор.

Трансфинитные числа

Чтобы работать с понятием мощности, Кантору потребовалось обобщение понятия нумерации: в своей магистерской диссертации 1883 г. он ввел *трансфинитные числа* и ключевое понятие *полного порядка*. Полные порядки сохраняют суть последовательной нумерации; трансфинитные числа больше не служат в качестве «символов бесконечности», а становятся средством оценивания полных порядков; и в новых обозначениях сами трансфинитные числа можно упорядочить:

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \omega (= \omega \cdot 2), \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots$$

Трансфинитные числа должны были создать контекст для двух подходов Кантора к континуум-гипотезе: через понятие мощности и через определимые множества действительных чисел. Что касается первого, Кантор установил для класса (II) тех трансфинитных чисел, которые соответствуют *счетным* полным порядкам, что сам этот класс несчетен, однако любое его подмножество либо счетно, либо имеет ту же мощность, что и (II). Таким образом, Кантор свел континуум-проблему к доказательству равномощности класса (II) и единичного отрезка. Что же касается второго подхода, то он развился из ранних работ Кантора по операции P' . Кантор определил понятие *совершенного* множества действительных чисел (непустого, замкнутого и не содержащего изолированных точек) и с помощью трансфинитного итерирования операции P' установил, что любое *замкнутое* несчетное множество действительных чисел является объединением совершенного и счетного множеств. Показав, что совершенное множество равномощно единичному отрезку, он свел континуум-гипотезу к доказательству существования замкнутого множества действительных чисел, равномощного классу (II).

В 1895–1897 гг. Кантор опубликовал «Beiträge», где представлена уже развитая теория трансфинитного. Теперь в ней имелись *кардинальные числа* и их арифметика; *порядковые типы* линейных порядков; а также *ординальные числа* и их упорядочение. Его доказательство равномощности множества действительных чисел и множества последовательностей действительных чисел свелось к нескольким росчеркам пера: $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Он охарактеризовал порядковый тип рациональных чисел как тип счетных плотных линейных порядков без концов. Он ввел нормальную форму для ординальных чисел. Но хотя теперь можно было сформулировать континуум-гипотезу в виде $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, он так и не достиг дальнейшего прогресса в ее доказательстве. Как бы то ни было, проблема континуума вдохновила создание нумерующих систем, которые стали

основой для дальнейшего развития теории множеств. И ключевую роль здесь сыграл конкретный метод, к которому пришел Кантор.

Диагональный метод

Почти через два десятилетия после открытия несчетности действительных чисел, в короткой заметке, вышедшей в 1891 г., Кантор опубликовал следующий результат: для любого множества L совокупность всех функций из L в фиксированное двухэлементное множество имеет мощность выше, чем L . При этом он сформулировал «общую теорему, что мощности множеств не имеют максимума». Следуя его собственным словам, мы можем засвидетельствовать первое появление *диагонального метода*, который заключается в следующем.

Пусть M — совокупность всех функций $L \rightarrow \{0, 1\}$. Допустим, что существует взаимно однозначное соответствие между L и M , так что

M можно ...представлять себе как однозначную функцию $\varphi(x, z)$ двух переменных x и z [пробегающих L], для которой ...каждому элементу $f(x) \in M$ соответствует одно определенное значение переменной z , для которого $f(x) = \varphi(x, z)$. Но это приводит к противоречию. Действительно, пусть $g(x)$ обозначает однозначную функцию переменной x , принимающую лишь значения 0 и 1 и отличную от $\varphi(x, x)$ при всех значениях x . Тогда, с одной стороны, $g(x)$ — элемент из M , а с другой стороны, $g(x)$ не может получиться из $\varphi(x, z)$ ни при каком значении $z = z_0$, поскольку $\varphi(z_0, z_0)$ не равно $g(z_0)$.

Благодаря этому рассуждению был достигнут новый уровень простоты, что стало возможно благодаря допущению универсальности, т. е. предположению о существовании совокупности *всех* функций некоторого рода. Один раз осознанный, этот метод превратится в техническое средство. Отделившись от первоначального примера применения, он окажется важен в развитии самой математической логики.

Лебег в 1905 году применил диагональный метод для построения трансфинитной иерархии борелевских множеств и бэровских функций. Этот подход будет применен в 1930-х годах Лузиным и его московской школой дескриптивной теории множеств при исследовании свойств «регулярности» вроде свойств совершенных множеств Кантора. В 1901 г. Бертран Рассел проанализировал применение диагонального метода Кантора к классу всех классов и пришел к знаменитому парадоксу Рассела. После этого Рассел создал сложную логическую структуру — разветвленную теорию типов, — на которой основано построение математики в его книге «Principia Mathematica» (1910–1913 гг.).

Молодой Гёдель, прочитав в ней об иерархии истинности и о парадоксе Ришара, основанном на диагональном методе, в 1930 году установил свою знаменитую теорему о неполноте, суть которой — в использовании парадокса Ришара в положительном смысле. В 1930-х годах теория рекурсии на основе работы Гёделя, постоянно используя диагональный метод, придет к поистине замечательной теореме о неподвижной точке — второй теореме Клини о рекурсии (1938 г.). К этому времени Гёдель построил внутреннюю модель конструктивных множеств как трансфинитное расширение расселовской разветвленной теории типов и показал, что в этой модели континуум-гипотеза выполняется. Таким образом, многие исследования были стимулированы канторовским диагональным методом, вплоть до совместности/непротиворечивости континуум-гипотезы.

Несмотря на то, что континуум-проблема Кантора неразрешима, ее продолжающееся исследование занимает сегодня центральное место в теории множеств. Разумеется, в силу результатов Гёделя и Коэна ее формальное решение невозможно, но именно Кантор первым заявил бы, что это не означает отсутствие ответа. Здесь достигнуты значительные успехи — например, для естественного расширения совокупности борелевских множеств до поля множеств, полученных из них непрерывными отображениями и операцией дополнения. В этом случае континуум-проблема решена благодаря неожиданному влиянию существования очень больших бесконечных мощностей. Это, в свою очередь, завершило аксиоматизацию теории чисел второго порядка.

Акихиро Канамори, У. Хью Вудин (Akihiro Kanamori, W. Hugh Woodin)
перевод Б. Р. Френкина

Егор Иванович Золотарёв (1847–1878)

Егор Золотарёв родился 31 марта 1847 года в Санкт-Петербурге в семье часового мастера, окончил с серебряной медалью V Петербургскую гимназию в 1863 году и уже в этом году начал посещать физико-математический факультет Санкт-Петербургского университета вольнослушателем (в силу возраста студентом он смог стать лишь в 1864 году). Математикой он начал увлекаться еще в гимназии под влиянием своих наставников — известных русских педагогов К. Д. Краевича и А. Н. Беляева. Лекции А. Н. Коркина, П. Л. Чебышёва и их советы оказали сильное влияние на развитие его способностей. После окончания университета, в 1867 году, Золотарёв, завершивший обучение со степенью кандидата (работа «Об интегрировании уравнения волчка»), был оставлен при университете для приготовления к экзамену на степень магистра и в возрасте 21 года допущен к чтению лекций по математике в качестве приват-доцента после публичной защиты диссертации *pro venia legendi* (на получение права читать лекции) «Об одном вопросе о наименьших величинах».



Проблема для исследования была рекомендована П. Л. Чебышёвым; Золотарёв, обобщив результат своего знаменитого учителя, привел решение более общей задачи с помощью эллиптических функций. Докторская диссертация Е. И. Золотарёва «Теория целых комплексных чисел с приложением к интегральному исчислению» была защищена им в *alma mater* (1874), оппонентами являлись П. Л. Чебышёв и А. Н. Коркин. В ней были решены, по выражению Коркина, «два вопроса, на которых остановился анализ» — это распространение теории идеальных чисел Куммера на область комплексных чисел и ее приложение к интегральному исчислению.



Первая страница статьи об интегрируемости эллиптических дифференциалов

Золотарёв построил теорию делимости и разложимости на идеальные числа для целых алгебраических чисел параллельно с Дедекиндом и независимо от него. Отправной точкой был вопрос интегрируемости в логарифмах эллиптического дифференциала $\frac{(x+A)dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)}}$, для интегрируемости было необходимо, чтобы α и β были целыми алгебраическими числами. Это теория обобщала теорию Куммера (для многочленов деления круга) на произвольные многочлены.

Коркин и Золотарёв нашли точное значение минимума квадратичной формы от четырех переменных как функцию от детерминанта формы и попутно определили квадратичную форму, порождающую знаменитую решетку E_8 .

Занимаясь задачами приближения функций, Золотарёв находит наименее уклоняющиеся от нуля многочлены с заданными первыми двумя коэффициентами.

Sur les formes quadratiques.

PAR A. KORRINE et G. ZOLOTAREFF à ST. PETERSBOURG.

Dans la théorie arithmétique des formes on attribue aux variables des valeurs entières arbitraires. Quant à leurs coefficients on les suppose ordinairement aussi entiers, mais quelques recherches arithmétiques et en particulier celles dont nous nous occupons dans ce Mémoire demandent la considération des formes à coefficients réels quelconques. Ne considérant d'abord que les formes quadratiques positives et faisant abstraction de la valeur zéro qu'elles obtiennent quand toutes les variables s'annulent, on voit facilement que de toutes les autres valeurs d'une telle forme il existe la plus petite.

Ce minimum est complètement déterminé lorsque les coefficients de la forme sont donnés; par conséquent il en est une fonction.

Considérons l'ensemble de toutes les formes positives à n variables de déterminant $-D$. On les obtient toutes en faisant varier d'une manière continue les coefficients de l'une d'elles. Le minimum de cette forme, comme fonctions des coefficients variera aussi d'une manière continue, et reviendra aux mêmes valeurs pour toutes les formes équivalentes. Il est évident, qu'il peut avoir des valeurs aussi petites qu'on voudra.

Il atteindra en variant un ou plusieurs maxima, qui correspondent aux formes non équivalentes et dont le nombre dépend essentiellement de n . Pour démontrer leur existence nous en donnons ici quelques-uns. Les quantités

$$(a) \quad 2\sqrt{\frac{D}{n+1}}, \quad \sqrt[3]{2^{n-2}D}, \quad 2\sqrt[4]{D}, \quad 2\sqrt[5]{\frac{D}{3}}, \quad \sqrt[7]{64D},$$

sont en effet des maxima du minimum de la forme considéré comme fonction des coefficients, si dans la première on suppose $n \geq 2$, dans la deuxième $n \geq 3$, dans la troisième $n \geq 3$; la quatrième n'est le maximum que pour $n = 6$, et la cinquième que pour $n = 7$.

On peut se rendre compte de l'existence de ces maxima en considérant les formes suivantes de déterminant $-D$.



Слева: первая страница статьи Коркина и Золотарёва о решетке E_8 .
Справа: страница из литографированных лекций Золотарёва по механике.

Стоит упомянуть, что Золотарёв придумал одно из самых коротких и красивых доказательств квадратичного закона взаимности.

Преподавательскую деятельность Е. И. Золотарёв начал в 20 лет, сначала преподавателем в Строительном училище (1867–1871), затем приват-доцентом (1869) и экстраординарным профессором (1870–1878) в Институте инженеров путей сообщения. Параллельно он работал в Санкт-Петербургском университете приват-доцентом (1868–1874, до защиты докторской диссертации), затем два года доцентом (1874–1876) и еще два — экстраординарным профессором (1876–1878). В результате им были написаны изданные литографским способом учебники по аналитической геометрии, дифференциальному исчислению, аналитической механике и др. Будучи прекрасным преподавателем, Золотарёв умел возбудить непреодолимый интерес к науке и безошибочно выделить среди слушателей своих лекций талантливых учеников и всячески им помочь.

Многие труды Е. И. Золотарёва стали отправной точкой в появлении новых направлений исследования в работах последователей и учеников. Его сочинения по теории алгебраических чисел нашли достойное продол-

жение в работах Ю. В. Сохоцкого, Д. А. Граве, Н. Г. Чеботарева. Труды по теории квадратичных форм (совместно с А. Н. Коркиным и самостоятельные) вызвали появление исследований талантливых учеников Е. И. Золотарёва — В. А. и А. А. Марковых, И. Л. Пташицкого, Г. Ф. Вороного, а затем и их учеников. Приложение Золотарёвым своей теории идеальных чисел к вопросу об интегрируемости алгебраических функций позволило обобщить результаты Абеля и Чебышёва в области интегрируемости функций в конечном виде и продвинуться в этом сложнейшем направлении.

Русское научное сообщество высоко оценило научную деятельность Золотарёва: 29-летний Золотарёв избран адъюнктом Академии наук по части прикладной математики (1876), а через два года получил звание экстраординарного академика. Труды молодого ученого стали известны в Европе в середине 70-х годов после его поездок в Берлин и Париж, где он встречался с Вейерштрассом, Куммером, Нейманом, Эрмитом, а также опубликовал ряд статей в западных журналах (*Mathematische Annalen*, *Nouvelles Annales*, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*). Кроме того, Егор Иванович стремился к установлению связей между учеными различных научных школ, как отечественных, так и зарубежных. А. Н. Коркин и Е. И. Золотарёв первыми (с 1873 года) вошли в число сотрудников реферативного журнала *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* от России, а их публикации знакомили западных ученых с достижениями отечественной математики.

Нелепая случайность оборвала жизнь молодого ученого: направляясь к родным на дачу, он попал под поезд и через несколько дней (7 июля 1878 года) скончался от сепсиса в возрасте 31 года. Егор Иванович Золотарёв похоронен на Митрофаньевском кладбище Петербурга, уничтоженном в XX веке. Судьба его трагична. Человек он был своеобразный, полностью погруженный в науку, обремененный семейными обязанностями (мать и четверо младших — три сестры и брат, которых нужно было обеспечивать). После смерти отца он стал единственной опорой семьи, ежегодно находил какие-то средства, чтобы вывезти семью на дачу... После его гибели семья осталась без средств к существованию, и Санкт-Петербургский университет выдал им пособие в 1000 рублей.

Всего 10 лет длилась научная жизнь Е. И. Золотарёва, но список его достижений весьма широк. Одаренность, глубина математических открытий, безусловная преданность науке и трагическая ранняя кончина Егора Золотарёва — все это напоминает биографию Нильса Хенрика Абеля, тоже рано ушедшего из жизни. Золотарёв был, по словам Ш. Эрмита, «гениальный математик, труды которого останутся в науке».

Литература

- [1] *Васильев А. В.* Золотарёв Егор Иванович // Русский биографический словарь. Т. 7: Жабокритский-Зяловский. Изд. под наблюдением пред. Имп. Рус. ист. о-ва А. А. Половцова.; под ред. Е. С. Шумигорского и М. Г. Курдюмова. СПб., 1897. С. 431–434.
- [2] Золотарёв Егор Иванович. Санкт-Петербургский университет. Биографика.
<https://bioslovhist.spbu.ru/person/679-zolotarev-yegor-ivanovich.html>
- [3] *Граве Д.* Золотарёв Егор Иванович // Биографический словарь профессоров и преподавателей Императорского С.-Петербургского университета за истекшую третью четверть века его существования 1869–1894: Том первый А–Л. СПб.: тип. и лит. Б.М. Вольфа, 1896. С. 264–265.
- [4] *Ожигова Е. П.* Егор Иванович Золотарёв, 1847–1878. Л.: Наука, 1966. 142 с.
- [5] Полное собрание сочинений Егора Ивановича Золотарёва. Вып. 1–2. Ленинград: изд-во АН СССР, 1931–1932.

Егор Золотарёв

и квадратичный закон взаимности

Квадратичный закон взаимности относится к классу утверждений, которые продолжают привлекать математиков на протяжении столетий. Частные случаи, полученные как экспериментальные факты, упоминаются в середине XVII века в заметках Пьера Ферма и его переписке с Френиклем. В 1775 году Лагранж, а в 1783 году Эйлер формулируют закон взаимности в виде серии теорем. Лежандр в 1788 году привел первое неполное доказательство. Он же определил символ, носящий ныне его имя¹, и придал формулировке теоремы современный вид (1798). Собственно, и само название «квадратичный закон взаимности» тоже введено в оборот Лежандром. Первое полное доказательство было опубликовано Гауссом в 1801 году [2]. Всего Гаусс предложил не менее восьми различных доказательств.

Квадратичный закон взаимности послужил исходной точкой для многочисленных обобщений. Сейчас в математике существуют законы взаимности Эйзенштейна, Вейля, степенные законы взаимности и многие другие. От того же корня развилась и целая область теории чисел — теория полей классов. За прошедшие два века непрерывно продолжали возникать новые и новые доказательства классического закона.

В книге [3], которая, видимо, является наиболее полным путеводителем по этой теме, упоминается более трехсот доказательств, последние из которых опубликованы за год до выхода книги. Конечно, не все эти доказательства содержат принципиально новые идеи: многие являются лишь вариациями на тему.

В 1872 году Егор Золотарёв опубликовал [4] доказательство, в котором впервые была явно использована связь между символом квадратичного вычета и перестановками. В списке доказательств из [3, с. 132–139] оно помещено под номером 49. В дальнейшем, как видно из того же списка, было опубликовано как минимум двенадцать доказательств, использующих эту идею Золотарёва.

¹ Что нарушает закон Стиглера [1], также известный как принцип Арнольда.

Как мы увидим ниже, основная лемма Золотарёва эквивалентна лемме Гаусса [5] из его третьего доказательства (1808). Однако ее использование делает доказательство интуитивно ясным. Другим преимуществом оказывается то, что доказательство леммы Золотарёва обобщается без малейших изменений на случай конечных полей.

Напомним читателю, о чем идет речь. Сначала зафиксируем некоторые обозначения. Мы будем всюду говорить о целых числах. Числа p и q всегда предполагаются нечетными простыми. Мы также будем часто обозначать $\frac{p-1}{2}$ через $\bar{p}$ и т. д. Полная система *ненулевых* вычетов по модулю p считается состоящей из чисел $\{1, \dots, p-1\}$, половинная система вычетов — из чисел $\{1, 2, \dots, \bar{p}\}$. Здесь и далее, говоря о системах вычетов, мы будем обычно опускать слово «ненулевых», поскольку вычет 0 не играет никакой роли в наших рассуждениях.

В теории сравнений естественно возникает вопрос о разрешимости двучленного квадратичного сравнения $x^2 \equiv a \pmod{p}$, где $(a, p) = 1$. Символ Лежандра $\left(\frac{a}{p}\right)$ принимает значения ± 1 в зависимости от того, разрешимо ли наше сравнение. В этих случаях мы будем говорить, что число a является квадратичным *вычетом* или *невычетом* по модулю p . Формально доопределяя символ в нуле соотношением $\left(\frac{0}{p}\right) = 0$, мы получаем характер на полной системе вычетов по модулю p .

Строго говоря, квадратичным законом взаимности называется тождество

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

Однако обычно неподалеку от этого утверждения в лекциях и книгах доказывают свойство мультипликативности символа Лежандра

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$$

и вычисляют символы $\left(\frac{-1}{p}\right)$ и $\left(\frac{2}{p}\right)$. Практическое значение этого набора свойств состоит в том, что он позволяет легко вычислить символ Лежандра, используя алгоритм, схожий по своей структуре и эффективности с алгоритмом Евклида. Мы будем обсуждать перечисленные свойства в целом, называя их все вместе *квадратичным законом взаимности*.

Путь доказательства, которым следовал Золотарёв, естественно разбивается на несколько шагов. Мы приведем несколько вариантов доказательств для ключевых утверждений. В результате, выбирая на каждом этапе понравившийся способ, заинтересованный читатель сможет получить несколько доказательств закона взаимности, включая и оригинальное доказательство Золотарёва.

Начнем с хорошо известного критерия Эйлера.

Предложение 1. Для простого числа $p > 2$ при $(a, p) = 1$ выполнено сравнение $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

Доказательство. Пользуясь малой теоремой Ферма и разложением $a^{p-1} - 1 = (a^{\bar{p}} - 1)(a^{\bar{p}} + 1)$, мы легко получаем, что всякий ненулевой вычет по модулю p удовлетворяет ровно одному из двух сравнений $a^{\bar{p}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$ или $a^{\bar{p}} \equiv -1 \pmod{p}$. Поскольку каждое из этих сравнений имеет не более чем $\bar{p}$ решений, нам достаточно установить, что всякий квадратичный вычет a удовлетворяет сравнению $a^{\bar{p}} \equiv 1 \pmod{p}$. Действительно, пусть $a \equiv b^2$. Тогда $a^{\bar{p}} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. $\square$

Утверждение Эйлера легко следует также из того, что мультипликативная группа вычетов по модулю p является циклической. Действительно, обозначая через g какой-либо первообразный корень и полагая $a = g^k$, мы убедимся, что всякий квадратичный вычет является четной, а всякий невычет — нечетной степенью g . Число $A = a^{\bar{p}} = g^{k\bar{p}}$, очевидно, удовлетворяет соотношению $A^2 \equiv 1$. Значит, если a — квадратичный вычет, то выполнено сравнение $A \equiv 1$, а для невычета такое равенство невозможно, иначе мы получили бы, что $k\bar{p}$ делится на $p-1$ для нечетного k . Таким образом, единственно возможным вариантом оказывается сравнение $A \equiv -1$. $\square$

Из взаимной простоты чисел a и p следует, что преобразование $x \mapsto ax$ задает перестановку (биекцию) σ_a на полной системе вычетов по модулю p .

Лемма 2 (Золотарёв). Значение символа Лежандра $\left(\frac{a}{p}\right)$ совпадает с четностью² перестановки σ_a .

Доказательство. Рассмотрим произведение

$$P(a) = \prod_{1 \leq i < j \leq p-1} (aj - ai) \pmod{p}.$$

Произведения $P(1)$ и $P(a)$ отличаются лишь порядком сомножителей и, возможно, знаками перед ними. Несложно видеть, что каждой инверсии в перестановке σ_a отвечает в точности один знак минус перед соответствующим сомножителем. Таким образом, мы получаем, что $\text{sign } \sigma_a = P(a)/P(1)$. С другой стороны, эти произведения отличаются множителем

$$a^{\frac{(p-2)(p-1)}{2}} \equiv a^{p-1} a^{\frac{(p-2)(p-1)}{2}} = a^{\frac{p(p-1)}{2}} \equiv a^{\bar{p}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right). \quad \square$$

²

Напомним, что инверсией в перестановке σ называется такая пара индексов $i < j$, что $\sigma(i) > \sigma(j)$. Четность перестановки — это четность числа инверсий, а ее знак $\text{sign } \sigma$ — минус единица в степени, равной числу инверсий.

И вновь, как и выше, альтернативное доказательство леммы Золотарёва опирается на существование некоторого первообразного корня g по модулю p . Действительно, умножение всех членов последовательности степеней $(g^0, g^1, \dots, g^{p-2})$ на g^k приводит к ее циклическому сдвигу на k . Из четности числа $p - 1$ следует, как хорошо известно, что четность соответствующей перестановки³ совпадает с четностью k . $\square$

Замечание 3. Для нечетного (не обязательно простого) числа m при $(a, m) = 1$ можно определить символ $\left(\frac{a}{m}\right)$ как знак перестановки $x \mapsto ax$ на полной системе вычетов по модулю m . Как отметил Руссо [6], пользуясь леммой Золотарёва, несложно проверить необходимый список свойств и показать, что такой символ совпадает с символом Якоби. Этим же способом лемма обобщается на конечные поля.

Из леммы Золотарёва моментально следует, что

- $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}};$
- $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$

Первое из равенств, как, впрочем, и мультипликативность, следует непосредственно из формулы Эйлера. Подсчитаем четность перестановки Золотарёва $(2, 4, \dots, p-1, 1, 3, \dots, p-2)$, соответствующей второму равенству. Инверсии в этой перестановке возникают только между парами вычетов разной четности. Вычет $2k+1$ будет участвовать в $\bar{p} - k$ инверсиях. Суммируя, мы получим, что знак перестановки имеет ту же четность, что и число $\frac{1}{2}\bar{p}(\bar{p}+1) = \frac{p^2-1}{8}$. $\square$

Посмотрим на преобразование $x \mapsto ax$ с несколько другой стороны.

Предположим, что a действует умножением на половинном наборе вычетов $\{1, 2, \dots, \bar{p}\}$. Каждое число ax может быть записано в виде $\pm u$, где $1 \leq u \leq \bar{p}$. Несложно убедиться, что в результате мы получим половинный набор вычетов, снабженных знаками. Обозначим через μ_a количество полученных знаков минус. Выполнено следующее утверждение.

Лемма 4 (лемма Гаусса). $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\mu_a}$ при $(a, p) = 1$.

Доказательство. Рассмотрим следующие произведения: $\prod_{x=1}^{\bar{p}} x$ и $\prod_{x=1}^{\bar{p}} ax$. Мы уже видели, что эти произведения (по модулю p) отличаются лишь множителем $(-1)^{\mu_a}$. С другой стороны, они отличаются на множитель $a^{\bar{p}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}$. $\square$

Несложно непосредственно установить эквивалентность утверждений лемм Гаусса и Золотарёва. Назовем перестановку σ полной системы нену-

левых вычетов зеркальной, если для всех значений k , $1 \leq k \leq \bar{p}$, верно, что $\sigma(k) \leq \bar{p}$ и $\sigma(k) + \sigma(p-k) = p$. Такая перестановка всегда является четной, поскольку в ней отсутствуют инверсии между числами, лежащими в разных ее половинах, а каждой инверсии между $\sigma(i)$ и $\sigma(j)$ для $1 \leq i, j \leq \bar{p}$ взаимно однозначно соответствует инверсия между $\sigma(p-i)$ и $\sigma(p-j)$. Рассмотрим теперь перестановку Золотарёва $(a, 2a, \dots, (p-1)a)$. Заметим, что $ka + (p-k)a \equiv 0 \pmod{p}$, то есть, чтобы сделать эту перестановку зеркальной, нам надо поменять местами элементы в тех парах $(ka, (p-k)a)$, в которых присутствует инверсия. А таких пар имеется ровно μ_a . Следовательно, знак перестановки $x \mapsto ax$ совпадает с $(-1)^{\mu_a}$. $\square$

Перейдем теперь к доказательству квадратичного закона взаимности.

Теорема 5. Пусть p и q — нечетные простые числа. Тогда выполнено тождество

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

Рассмотрим множество $M = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ и три биекции между M и множеством $\{0, 1, \dots, pq-1\}$. Наглядно можно представлять эти биекции как три варианта заполнения $(p \times q)$ -матрицы⁴ числами от 0 до $pq-1$:

- по строкам: $R_{ij} = qi + j$;
- по столбцам: $C_{ij} = i + pj$;
- по диагонали: $\begin{cases} D_{ij} \equiv i \pmod{p}, \\ D_{ij} \equiv j \pmod{q}. \end{cases}$

Китайская теорема об остатках гарантирует, что эта система сравнений задает биекцию.

Обозначим через τ_{RD} перестановку, переводящую расстановку R в расстановку D , и т. п. Ясно, что

$$\tau_{RC} = \tau_{DC} \circ \tau_{RD}. \quad (*)$$

Оказывается, уже это очевидное равенство содержит в себе доказательство квадратичного закона взаимности. Действительно, подсчитаем четности входящих в него перестановок. Преобразование τ_{RD} переводит элемент, стоящий на месте (i, j) , на место $(qi + j, j)$ и не меняет номера столбцов. Перестановки, возникающие внутри различных столбцов, отличаются наличием циклического сдвига на номер столбца и тем самым в силу нечетности p имеют одинаковый знак. Стало быть, перестановка каждого столбца имеет тот же знак, что и перестановка $x \mapsto qx$ на полной системе вычетов по модулю p . По лемме Золотарёва этот знак совпадает с $\left(\frac{q}{p}\right)$. Таким образом, $\text{sign } \tau_{RD} = \left(\frac{q}{p}\right)^q = \left(\frac{q}{p}\right)$. Аналогично, $\text{sign } \tau_{DC} = \left(\frac{p}{q}\right)$.

Применяя к соотношению (*) функцию sign , мы получим равенство

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = \text{sign } \tau_{RC}.$$

Нам осталось лишь вычислить четность перестановки τ_{RC} . Общий принцип будет очевиден из примера⁵. Рассмотрим преобразование 3×5 -матрицы от расстановки по строкам к расстановке по столбцам:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{array} \right) \xrightarrow{\tau_{RC}} \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 3 & 6 & 9 & 12 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \end{array} \right).$$

Ясно, что при таком преобразовании каждый элемент переставляется со стоящими ниже и левее его в исходной матрице. В матрице выше выделены инверсии для элемента 8. Таким образом, общее число инверсий для $p \times q$ -матрицы составит

$$\sum_{m=0}^{q-1} \sum_{n=0}^{p-1} mn = \left(\sum_{m=1}^{q-1} m \right) \left(\sum_{n=1}^{p-1} n \right) \equiv \frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2} \pmod{2}.$$

Полученное равенство $\text{sign } \tau_{CR} = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}$ доказывает квадратичный закон взаимности. $\square$

Следующее рассуждение принадлежит Руссо [8] и является сильной модификацией пятого доказательства Гаусса. Обозначим через $\mathbb{Z}_m^*$ мультипликативную группу приведенных вычетов по модулю m . Вычислим двумя различными способами произведение π всех элементов фактор-группы $(\mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_q^*)/\mathbb{Z}_2$, где подгруппа $\mathbb{Z}_2 = \{(1, 1), (-1, -1)\}$. С одной стороны, в качестве набора представителей смежных классов можно взять множество пар $\{(i, j) : i = 1, \dots, \bar{p}, j = 1, \dots, q-1\}$. Очевидно, произведение всех элементов группы равно $((\bar{p}!)^{q-1}, (q-1)!^{\bar{p}})$, и с учетом тождества $(\bar{p}!)^2 = (-1)^{\bar{p}}(p-1)!$ получаем

$$\pi = ((-1)^{\bar{p}\bar{q}}(p-1)!^{\bar{q}}, (q-1)!^{\bar{p}}). \quad (**)$$

С другой стороны, пользуясь изоморфизмом $\mathbb{Z}_{pq}^* \cong \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_q^*$ (китайская теорема об остатках), мы получим полный набор представителей смежных классов как образ в группе $\mathbb{Z}_{pq}^*$ множества целых чисел i , для которых $(i, pq) = 1$ и $1 \leq i \leq \frac{pq-1}{2}$. Вычислим сперва произведение чисел в этом

⁵ В [7] имеется красивая интерпретация этого вычисления как карточного фокуса.

интервале, взаимно простых с pq . Оно, очевидно, равно $\frac{(\frac{pq-1}{2})!}{p^{\bar{q}}\bar{q}!q^{\bar{p}}\bar{p}!}$. Сокращая дробь и приводя по модулям p и q , мы получим

$$\pi = \left(\frac{(p-1)!^{\bar{q}}}{q^{\bar{p}}}, \frac{(q-1)!^{\bar{p}}}{p^{\bar{q}}} \right).$$

Таким образом, с учетом формулы Эйлера имеем

$$\pi = \left((p-1)!^{\bar{q}} \left(\frac{q}{p} \right), (q-1)!^{\bar{p}} \left(\frac{p}{q} \right) \right).$$

Сравнивая последнее выражение с (**), мы немедленно получаем закон взаимности. Применяя к последнему равенству теорему Вильсона, можно получить следующее красивое, хотя и абсолютно бесполезное выражение:

$$\pi = \left(\left(\frac{-q}{p} \right), \left(\frac{-p}{q} \right) \right). \quad \square$$

До настоящего момента приводимые нами рассуждения выводили закон взаимности из леммы Золотарёва или непосредственно из критерия Эйлера. В заключение приведем для сравнения доказательство, основывающееся на лемме Гаусса. Следующее красивое рассуждение принадлежит, с некоторыми модификациями, Эйзенштейну [9]. Начнем с утверждения леммы $\left(\frac{a}{p} \right) = (-1)^{\mu_a}$. Заметим, что возникающий в процессе ее доказательства вычет ax получает знак минус в том и только том случае, когда $\left\{ \frac{ax}{p} \right\} > \frac{1}{2}$. Если это неравенство выполняется, целое число $\left[\frac{2ax}{p} \right] - 2 \left[\frac{ax}{p} \right]$ оказывается равным 1, в противном случае — нулю. Следовательно,

$$\mu_a = \sum_{x=1}^{\bar{p}} \left(\left[\frac{2ax}{p} \right] - 2 \left[\frac{ax}{p} \right] \right) \equiv \sum_{x=1}^{\bar{p}} \left[\frac{2ax}{p} \right] \pmod{2}. \quad (***)$$

Полагая a нечетным, вычислим символ

$$\left(\frac{2a}{p} \right) = \left(\frac{2a+2p}{p} \right) = \left(\frac{4\frac{a+p}{2}}{p} \right) = \left(\frac{\frac{a+p}{2}}{p} \right).$$

По лемме Гаусса $\left(\frac{\frac{a+p}{2}}{p} \right) = (-1)^{\mu_{\frac{a+p}{2}}}$, а по (***) имеем

$$\mu_{\frac{a+p}{2}} \equiv \sum_{x=1}^{\bar{p}} \left[\frac{(a+p)x}{p} \right] = \sum_{x=1}^{\bar{p}} \left[\frac{ax}{p} \right] + \frac{p^2-1}{8} \pmod{2}.$$

Заметим, что, подставляя в последние равенства $a = 1$, мы получаем новое доказательство того, что $\left(\frac{2}{p} \right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$. Пользуясь этим фактом и

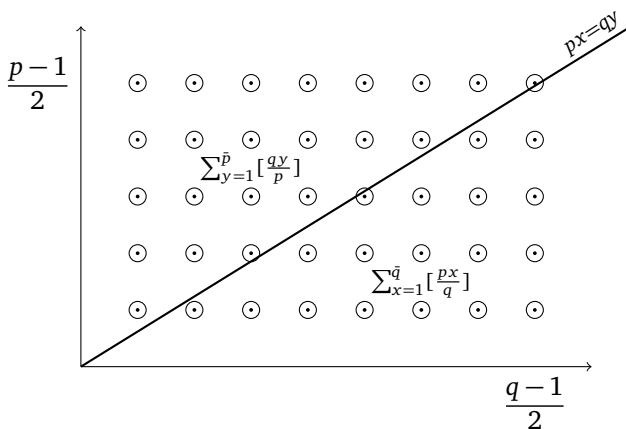
мультипликативностью символа Лежандра, получим

$$\mu_a \equiv \sum_{x=1}^{\bar{p}} \left[\frac{ax}{p} \right] \pmod{2}.$$

Таким образом, чтобы доказать квадратичный закон взаимности, нам осталось лишь убедиться, что для нечетных простых p и q выполнено равенство

$$\sum_{x=1}^{\bar{p}} \left[\frac{qx}{p} \right] + \sum_{y=1}^{\bar{q}} \left[\frac{py}{q} \right] = \frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}.$$

Доказательство последнего очевидно из следующего примера ($p = 11$, $q = 17$):



К сожалению, ограниченный объем текста не позволяет рассказать больше о разнообразных идеях, используемых в доказательствах квадратичного закона взаимности. За подробным изложением и ссылками мы отсылаем читателя к книге [3].

С. А. Ягунов

Литература

- [1] Stigler S. Stigler's law of eponymy // Trans. New York Acad. Sci. 1980. V. 39. P. 147–158.
- [2] Гаусс К. Ф. Арифметические исследования // Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел. М.: АН СССР, 1959. (Классики науки.) С. 7–583.
- [3] Baumgart O. The Quadratic Reciprocity Law. A Collection of Classical Proofs / Ed. and transl. by Franz Lemmermeyer. Switzerland: Springer Intern. Publ., 2015.
- [4] Zolotareff G. Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité de Legendre // Nouv. Ann. Math. Sér. 2. 1872. T. 11. P. 354–362.

- [5] Гаусс К. Ф. Новое доказательство одной арифметической теоремы // Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел. М.: АН СССР, 1959. С. 587–593. (Классики науки).
- [6] Rousseau G. On the Jacobi symbol // J. Number Theory. 1994. V. 48, № 1. P. 109–111.
- [7] Matt Baker's Math Blog. <https://mattbaker.blog/2013/07/03/quadratic-reciprocity-and-zolotarevs-lemma>
- [8] Rousseau G. On the quadratic reciprocity law // J. Austral. Math. Soc. 1991. V. 51, № 3. P. 423–425.
- [9] Eisenstein G. Geometrischer Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste // J. reine angew. Math. 1844. Bd. 28. S. 246–248.

Николай Яковлевич Сонин

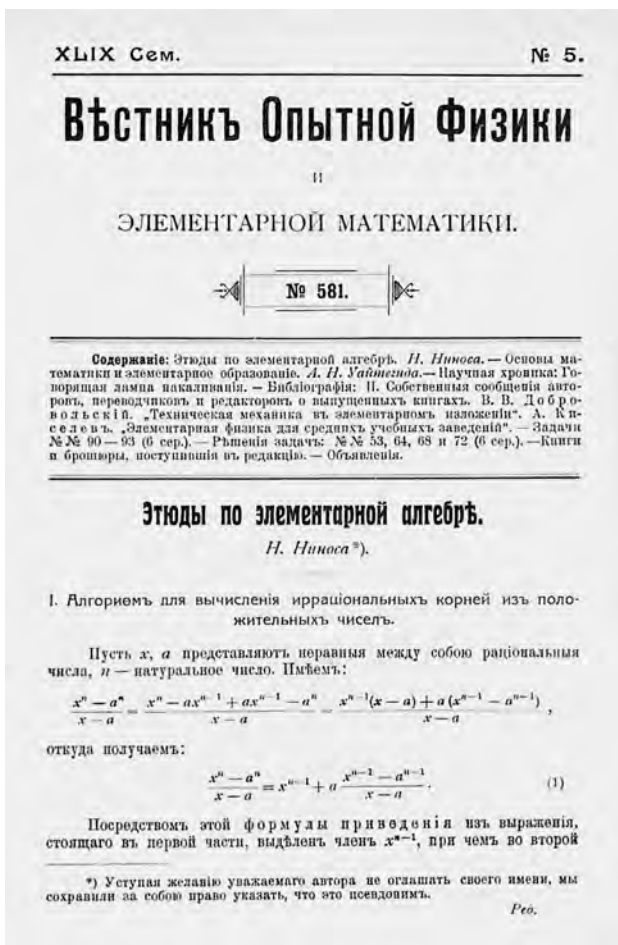
(1849–1915)

Николай Сонин — потомок старинного дворянского рода Тульской губернии. Он родился в Туле, но был в раннем возрасте перевезен в Москву, окончил 4-ю Московскую гимназию (1865), затем — физико-математический факультет Московского университета со степенью кандидата (1869) и был оставлен на два года в университете «для усовершенствования в науках».

Обе диссертации — магистерская «О разложении функций в бесконечные ряды» (1871) и докторская «Об интегрировании уравнений с частными производными второго порядка» (1874) — были защищены им в Московском университете. Преподавательскую деятельность Сонин начал в 1871 г. на Публичных курсах для женщин по программе мужских классических гимназий, размещавшихся в помещении Третьей московской мужской гимназии, а в 1872 году получил назначение в Варшавский университет, где работал в течение 20 лет сначала доцентом (1872–1877), а затем экстраординарным (1877) и ординарным (1879) профессором, при этом 6 лет являлся деканом физико-математического факультета.

После избрания членом-корреспондентом (1891), а затем — академиком Санкт-Петербургской академии наук Н. Я. Сонин жил и работал в Петербурге, преподавал на Высших женских курсах, в Санкт-Петербургском университете, активно участвовал в повседневной работе Академии наук, совместно с А. А. Марковым готовил к печати и редактировал собрание сочинений П. Л. Чебышёва. С 1899 года он занимался административной деятельностью на посту попечителя Санкт-Петербургского учебного округа, с 1901 года являлся председателем ученого комитета министерства народного





Первая страница статьи Н. Я. Сонины, опубликованной в 1913 году под псевдонимом Н. Нинос

просвещения. Сонины характеризовали как сторонника строгой законности и противника студенческого движения.

Научные интересы Н. Я. Сонины сформировались под влиянием петербургской школы и направлены на изучение различных специальных функций и их применение к вопросам математического анализа. Так, его магистерская диссертация посвящена объединению и обобщению результатов, полученных Э. Гейне и К. Нейманом относительно разложения дроби $1/(a - z)$ по сферическим и цилиндрическим функциям. В докторской диссертации, переведенной спустя 23 года на немецкий язык Ф. Энгелем, Сониным впервые решен вопрос о существовании общего интеграла первого порядка и приведен в окончательную форму способ интегрирования,

предложенный Дарбу. За семь работ, выполненных в 1886–1889 гг., по рекомендации П. Л. Чебышёва, В. Г. Имшенецкого и А. А. Маркова профессору Сонину была присуждена премия им. В. Я. Буняковского.

Всего Н. Я. Сонину принадлежат около 50 ученых трудов, принесших ему известность в России и Западной Европе. Основные результаты в них относятся к теории ортогональных полиномов, полиномов Я. Бернулли и теории цилиндрических функций. Особая роль в этой области принадлежит мемуару «О некоторых неравенствах, касающихся определенных интегралов» (1898). В нем Сониным предложен новый ортогональный базис (Сонина—Лагерра) с варьирующимся параметром a , отличный от уже имевшихся (базисы Лежандра, Лагерра, Дирихле, Якоби, где $a = 1$), и разработан метод ортогонализации системы функций.

Так как исследования Н. Я. Сонина не потеряли своей научной значимости до сих пор, основные из них были переизданы в сборнике «Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах» (1954), подготовленном Н. И. Ахиезером. В сборнике имеются, кроме статей, опубликованных Сониным на русском языке, переводы малоизвестных его мемуаров, напечатанных в иностранных журналах, а также подробные комментарии и статья Ахиезера «Работы Н. Я. Сонина по приближенному вычислению определенных интегралов».

Среди математических работ обращает на себя внимание статья по истории математики «Ряд Ивана Бернулли», посвященная выяснению роли И. Бернулли в создании ряда, носящего имя Тейлора. В ней Сонин аргументировано доказывает приоритет разработок И. Бернулли по сравнению с работами Тейлора и Маклорена. Кроме того, его перу принадлежит несколько биографических очерков, записок и речей (о В. Я. Буняковском, В. Г. Имшенецком, П. Л. Чебышёве, А. А. Маркове, К. Вейерштрассе, Ш. Эрмите, А. М. Ляпунове, Л. Линделёфе, В. Вольтерра, В. А. Стеклове и др.)

Как председатель ученого комитета министерства народного просвещения и член совета при министре просвещения Н. Я. Сонин организовывал работу по рассмотрению учебников и учебных пособий для школы, привлекая для этого маститых ученых и лучших учителей; на многие учебники он писал рецензии сам. Именно в помощь школе под псевдонимом Н. Нинос он издал свой последний труд «Этюды по элементарной алгебре» [6], который был доступен пониманию даже учеников гимназий. В нем изложен алгоритм автора для вычисления иррациональных корней из положительных чисел, новый вывод бинома Ньютона и простой способ вычисления натуральных логарифмов.

Именно к Н. Я. Сонину обратился с письмом Ф. Клейн (от 19 января 1909 года) с просьбой принять участие в работе международной комиссии

по математическому образованию. По инициативе Сониной такая комиссия от России была создана, в нее вошли, кроме академика Н. Я. Сониной, профессор Б. М. Коялович и директор 2-го Санкт-Петербургского реального училища К. В. Фохт, позднее — профессора К. А. Поссе и Д. М. Синцов. Первоначальному составу комиссии принадлежит перевод с французского книги «Международная комиссия по преподаванию математики. Предварительный доклад об организации комиссии и общем плане ее работ» (СПб., 1909). Вот что говорится о деятельности этой комиссии в работе [3]:

Национальная комиссия регулярно собиралась на заседания, к работе были привлечены ведущие математики страны, представлявшие различные ступени образования и типы учебных заведений крупнейших городов страны (вузы, реальные училища, кадетские корпуса и т. д.), такие как К. А. Поссе, С. П. Глазенап, М. Г. Попруженко, В. Г. Алексеев и др. Были собраны и опубликованы на европейских языках доклады о состоянии преподавания математики в России. Этот этап работы всех стран был представлен на V Международном конгрессе математиков в Кембридже в 1912 г.

Николай Яковлевич Сонин скончался в возрасте 66 лет после продолжительной болезни (рак желудка), похоронен на Смоленском кладбище в Санкт-Петербурге. Он не был петербуржцем по месту рождения и обучения, но, став одним из выдающихся математиков конца XIX — начала XX вв., по тематике и характеру исследований был очень близок к петербургской математической школе.

Н. В. Локоть

Литература

- [1] *Поссе К. Н. Я. Сонин (некролог)* // Вестник опыт. физики и элемент. математики. 1915. № 628–629. С. 73–74.
- [2] *Кропотов А. И. Николай Яковлевич Сонин (1849–1915)*. Ленинград: Наука, 1967. 135 с.
- [3] *Черказьянова И. В. Академик Н. Я. Сонин как чиновник Министерства народного просвещения* // Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2003. М.: Диполь-Г, 2003. С. 229–231.
- [4] *Сонин Н. Я. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах*. М.: Гостехиздат. 1954. 244 с.
- [5] *Сонин Н. Я. Ряд Ивана Бернулли*. СПб., 1897. 17 с.
- [6] *Сонин Н. Я. Этюды по элементарной алгебре*. Одесса, 1913. (Под псевдонимом Н. Нинос.) См. также: Вестник опыт. физики и элемент. математики. 1913. № 581–584, 586, 592.

Софья Васильевна Ковалевская

(1850–1891)

Имя С. В. Ковалевской известно всем студентам как минимум благодаря теореме Коши—Ковалевской о существовании решения дифференциальных уравнений. Она написала важные работы про кольца Сатурна и про абелевы интегралы. Ее работа о вращении тяжелого тела вокруг фиксированной точки опиралась на недавно сформулированную теорему о тэта-функциях и гиперэллиптических интегралах. Эта работа, где она исследует третий (первые два были изучены Эйлером и Лагранжем) интегрируемый случай, получила премию Французской академии наук в 1888 году.

Ковалевская написала отчасти автобиографический роман «Нигилистка», а также мемуары «Воспоминания детства». Она была первой женщиной, которая получила степень по математике, и первой женщиной, которая стала профессором в Северной Европе. Также она была первой женщиной — редактором математического журнала.

Софья Васильевна Ковалевская родилась в Москве. Она была второй дочерью генерала Василия Васильевича Корвин-Круковского и его жены Елизаветы Федоровны Шуберт, которая была на 20 лет моложе его. Как это было принято в обеспеченных семьях дворян, обучение детей начиналось с английской гувернантки и продолжалось с частными репетиторами. Софья была очарована математикой с ранних лет.

Она с большой охотой слушала разговоры между ее отцом и дядей на математические темы, даже если не понимала всех деталей разговора. Есть сведения о том, что ее любопытство было вызвано тем, что стены в детской были временно обклеены страницами лекций по высшей математике М. В. Остроградского (при ремонте не хватило обоев на одну комнату, и решили поклеить хоть что-нибудь).



Однажды сосед, профессор физики, которого звали Николай Никанорович Тиртов, подарил ее семье копию своего нового учебника по физике. Двенадцатилетняя Софья начала читать его. У нее были проблемы с формулами, включающими тригонометрические функции. Несмотря на это, она была настойчива и смогла понять их значение из контекста. Ее сосед был ошеломлен, когда она стала задавать ему вопросы по книге, показывающие, что она на самом деле поняла весь материал. Тиртов пытался убедить отца девочки разрешить ей продолжать занятия математикой.

Софья хотела получить высшее образование в сфере высшей математики, но для этого ей необходимо было покинуть дом и уехать за границу. Однако незамужняя женщина не могла сделать это без согласия отца. Поскольку он не был готов дать свое согласие, оставался только один выход: выйти замуж. Незадолго до своего 18-го дня рождения Софья вступила в фиктивный брак с Владимиром Ковалевским¹.

Ее жених активно выступал за права женщин получать образование и считал большой честью «освобождение русских дочерей», но родители Софьи об этой деятельности ее мужа, начинающего палеонтолога, не подозревали.

В следующем году новобрачные отправились в путешествие в Гейдельберг, для того чтобы Софья Ковалевская могла начать исследования по математике и естественным наукам. Но в то время женщины не могли официально поступить и в немецкие университеты.

После многих неудачных попыток ей в конце концов разрешили подать заявление, чтобы слушать лекции. Профессора, включая Лео Кёнигсбергера (ученика Карла Вейерштрасса), Германа Гельмгольца и Густава Роберта Кирхгофа, быстро обнаружили необыкновенный талант молодой женщины. Прочувшись три семестра, она переехала в Берлин по рекомендации Кёнигсбергера, чтобы продолжить свои исследования под руководством знаменитого Карла Вейерштрасса. Вейерштрасс про-



¹ Для выезда за границу был необходим паспорт и деньги. Девушки могли получить паспорт с согласия родителей или мужа. Возможно, отец Софьи не отказался бы сделать ей паспорт и без брака, так как незамужнюю сестру Софьи отпустили учиться в Европу вместе с Софьей и ее мужем, а Софья уговорила родителей своей незамужней подруги Ю. В. Лермонтовой отпустить ее с ней за границу. Еще одна их подруга — А. М. Евреинова — нелегально перешла границу без паспорта, и ее родители, приняв решение дочери, прислали деньги и паспорт в Гейдельберг. — *Прим. ред.*

игнорировал рекомендательные письма, которые она принесла, и дал соискательнице задачу, которую, к его большому удивлению, она быстро смогла решить. Поскольку университет, несмотря на ходатайство Вейерштрасса, не давал Софье разрешение даже на посещение лекций, Вейерштрасс нашел единственный способ помочь ей: он давал ей частные уроки три раза в неделю.

После того как в 1874 году Софья Ковалевская написала три статьи, Вейерштрасс счел ее достойной присуждения ученой степени.

В первой статье она опубликовала свое исследование о разрешимости уравнений в частных производных, во второй речь шла об абелевых интегралах, в третьей статье она усовершенствовала теорию Лапласа о физике колец Сатурна.

Тем не менее Вейерштрасс не сразу нашел университет в Германии, который бы признал эти работы как основание для присуждения кандидатской степени. В конце концов в Гёттингенском университете выразили желание сделать это и присудили Ковалевской заочно звание кандидата наук, в дополнение вручив диплом с отличием.

Вейерштрасс в качестве аргумента процитировал великого Карла Фридриха Гаусса, в 1837 году выразившего свое сожаление о том, что немецкие университеты не смогли присудить математику Софи Жермен степень кандидата наук при жизни. Это было задолго до того, как женщинам дали право и возможность заниматься научной работой.

Ковалевской и при жизни, и после смерти приходилось сталкиваться с предрассудками. Например, врач и невролог Пауль Мёбиус утверждал, что в идеях и научной работе Софьи Ковалевской нет ничего оригинального (это суждение появилось в главе «О женщинах в математике» в книге под названием «О естественной способности к математике», которую Мёбиус опубликовал в 1900 году). Когда в одной из работ Ковалевской о преломлении света была найдена ошибка, многие высказались о том, что эта ошибка ни в коем случае не могла быть сделана мужчиной.

Несмотря на научный титул и большое количество рекомендательных писем, Вейерштрасс не смог найти для Ковалевской вакансию в университете.

Бесчисленные отказы и разочарования повергли Ковалевскую в эмоциональный кризис, продолжавшийся шесть лет, во время которого она



прекратила занятия математикой. Она вернулась в Россию, где ее научная степень, полученная в Германии, не признавалась. Ее квалификацию признали достаточной только для того, чтобы учить маленьких девочек.

Софья родила дочь, но потом разошлась с мужем. Его самоубийство в 1883 году стало для Ковалевской потрясением, но после этого она вернулась к занятиям математикой с большей интенсивностью. Как вдова, она имела право путешествовать без ограничений².

Ковалевская смогла сделать шаг вперед, когда Магнус Гёста Миттаг-Леффлер, первый профессор математики, занявший должность в только что открытом Университете Стокгольма, ученик Шарля Эрмита и Карла Вейерштрасса, взял ее на работу преподавателем математики в Стокгольме на пять лет.

В течение первого года она читала лекции на немецком, но потом достаточно хорошо выучила шведский и могла преподавать на этом языке. В 1889 году она наконец получила звание профессора математики, будучи первой женщиной в современной истории науки, удостоенной этого.

Она читала лекции по математическому анализу, была редактором математического журнала и организовывала международные математические конференции. В 1886 году она была награждена премией Бордена во Французской академии наук, выиграв конкурс, на который она анонимно подала свои работы. Очень высоко оценив качество ее работ, судья увеличил сумму премии от 3000 до 5000 франков. В 1889 году она получила премию Шведской академии, а вследствие личного вмешательства П. Л. Чебышёва она стала членом-корреспондентом Санкт-Петербургской академии.

В расцвете нового периода творческой активности Софья Ковалевская умерла от легочной инфекции.

Хайнц Клаус Штрик (Heinz Klaus Strick)

Перевод Татьяны Блинковой

Впервые было опубликовано в 2010 году в журнале Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft Heidelberg. См. <https://www.spektrum.de/wissen/sofia-kowalewska-1850-1891/1017473>

Английская версия опубликована Европейским математическим обществом в 2013 году (перевод Дэвида Крамера), теперь лежит в архиве по истории математики Мактьютор. См. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Strick/index.html>

²

Согласно законам Российской империи того времени, муж определял срок действия паспорта жены и таким образом мог препятствовать ее поездкам за границу. — *Прим. ред.*

Литература

- [1] *Cooke R.* The mathematics of Sonya Kovalevskaya. New York: Springer-Verlag, New York, 1984.
- [2] The legacy of Sonya Kovalevskaya. Proceedings of a symposium held at Radcliffe College, Cambridge, Mass., October 27–28, 1985 / Ed. L. Keen. Providence, RI: AMS, 1987. (Contemporary Mathematics. V. 64).
- [3] *Ковалевская С. В.* Воспоминания. Повести. М.: Наука, 1974. 559 с.
- [4] *Кочина П. Я.* Софья Васильевна Ковалевская. 1850–1891. М.: Наука, 1981. 312 с.
- [5] *Воронцова Л. А.* Софья Ковалевская. М.: Молодая гвардия, 1959. 335 с. (ЖЗЛ).
- [6] *Вейерштрасс К. Т. В.* Письма Карла Вейерштрасса к Софье Ковалевской. 1871–1891. М.: Наука, 1973. 310 с.

Редукция абелевых интегралов и волчок Ковалевской

Еще в 1832 году Лежандр показал, что каждый из двух гиперэллиптических интегралов

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)(1-x^2x^2)}} \quad \text{и} \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{x(1-x^2)(1-x^2x^2)}}$$

можно выразить через два эллиптических интеграла первого рода посредством квадратичного преобразования. Интегралы первого рода выделил Абель в своем парижском мемуаре, наложив условие, что соответствующая абелева сумма постоянна. Это условие равносильно тому, что абелев интеграл является локально ограниченной функцией верхнего предела интегрирования.

Сразу же после этого Якоби отметил, что таким свойством обладают интегралы на гиперэллиптической кривой с уравнением

$$C: y^2 = R(x) = x(1-x)(1-\kappa\lambda x)(1+\kappa x)(1+\lambda x),$$

которая изоморфна кривой с аффинным уравнением

$$C: y^2 = x^6 - s_1x^4 + s_2x^2 - 1, \quad (1)$$

имеющей эллиптические инволюции $\sigma_{1,2}$, см. [1]. Факторизации $E_i = C/\langle\sigma_i\rangle$ — это эллиптические кривые

$$E_1: y^2 = x^3 - s_1x^2 + s_2x - 1 \quad \text{и} \quad E_2: y^2 = x(x^3 - s_1x^2 + s_2x - 1), \quad (2)$$

а якобиан кривой C с точностью до изогении представляется как $E_1 \times E_2$. Сейчас такие непростые абелевы многообразия интенсивно изучаются ввиду многообещающих приложений в постквантовой криптографии.

Более общие случаи редукции абелевых интегралов изучались Пикаром, Вейерштрассом и Пуанкаре, а гиперэллиптические кривые рода 3 подробно рассмотрены С. В. Ковалевской [4] в 1884 году со ссылкой на неопубликованные лекции Вейерштрасса, имевшие в те годы огромную ценность, см. статью П. М. Покровского [6]:

Опубликованные записки Вейерштрасса, в силу их краткости и неполноты доказательства, дают лишь приблизительное представление о его теории, которая, однако, полностью завершена. Нам удалось, в последнюю зиму в Берлине, ознакомиться с одним из рукописных курсов профессора...

В результате и тогда, и теперь ссылки на эти теоремы Вейерштрасса ведут лишь к статье Ковалевской [4]. См., например, переписку между Пуанкаре и Миттаг-Леффлером: «Мое внимание снова было привлечено к этой задаче благодаря мемуару г-жи Ковалевской, где упомянуты две теоремы г-на Вейерштрасса». В современных геометрических терминах Ковалевская изучала гиперэллиптические кривые рода 3, якобианы которых изогенны произведению эллиптических кривых. Такие гиперэллиптические кривые рода 3 вместе с соответствующими эллиптическими кривыми всегда появляются в современном изложении работ Ковалевской о движении твердого тела [2, 3, 7].

Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки в поле тяготения описывается в подвижном репере уравнениями Эйлера–Пуассона

$$\dot{\ell} = \ell \times \frac{\partial H}{\partial \ell} + g \times \frac{\partial H}{\partial g}, \quad \dot{g} = g \times \frac{\partial H}{\partial g}, \quad (3)$$

где $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ — вектор углового момента, $g = (g_1, g_2, g_3)$ — единичный вектор в направлении силы тяжести, H означает функцию Гамильтона, а $x \times y$ — векторное произведение двух векторов.

В 1889 году Ковалевская [5] решила следующую задачу: найти все твердые тела, вращающиеся вокруг неподвижной точки при наличии тяготения, для которых уравнения движения (3) интегрируемы. Последнее означает, что система допускает решения, которые содержат свободные параметры в количестве, на единицу меньшем количества степеней свободы. Это условие приводит к волчкам Эйлера и Лагранжа, а также к волчку Ковалевской. Последний представляет собой твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, с гамильтонианом

$$H = \ell_1^2 + \ell_2^2 + 2\ell_3^2 - 2bg_1, \quad b \in \mathbb{R},$$

и вторым интегралом движения

$$K = (\ell_1^2 + \ell_2^2)^2 + 4b(g_1(\ell_1^2 - \ell_2^2) + 2g_2\ell_1\ell_2) + 4b^2(g_1^2 + g_2^2),$$

которые находятся в инволюции, т. е. их скобки Пуассона тождественно равны нулю:

$$\{H, K\} = 0.$$

Скобки Пуассона на алгебре евклидовой группы $e(3)^*$ определяются формулами

$$\{\ell_i, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk} \ell_k, \quad \{\ell_i, g_j\} = \varepsilon_{ijk} g_k, \quad \{g_i, g_j\} = 0,$$

где ε_{ijk} — кососимметричный тензор. Для этих скобок существуют две функции Казимира

$$c_1 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2, \quad c_2 = g_1 \ell_1 + g_2 \ell_2 + g_3 \ell_3.$$

Зафиксировав их значения, получаем общий симплектический лист алгебры $e(3)^*$, который является четырехмерным симплектическим многообразием.

Решая уравнения Эйлера—Пуассона, Ковалевская вводит переменные

$$z_{1,2} = \ell_1 \pm i \ell_2,$$

для которых

$$H = -\frac{\dot{z}_1 \dot{z}_2 + R(z_1, z_2)}{(z_1 - z_2)^2}, \quad K = \frac{(\dot{z}_1^2 - R(z_1, z_1))(\dot{z}_2^2 - R(z_2, z_2))}{(z_1 - z_2)^4},$$

где $R(z_1, z_2)$ равно

$$R(z_1, z_2) = z_1^2 z_2^2 - (z_1^2 + z_2^2)H - 4b(z_1 + z_2)c_2 - 4b^2 c_1 + K.$$

Чтобы избавиться от смешанных слагаемых $\dot{z}_1 \dot{z}_2$, она применяет групповые операции к дивизору $D = (z_1, Z_1) + (z_2, Z_2)$:

$$\frac{dz_1}{Z_1} + \frac{dz_2}{Z_2} = \frac{dw_1}{W_1}, \quad \frac{dz_1}{Z_1} - \frac{dz_2}{Z_2} = \frac{dw_2}{W_2}$$

на эллиптической кривой

$$E: Z^2 = R(z, z) = z^4 - 2z^2 H - 8bc_2 z - 4b^2 c_1 + K.$$

Одновременно она приводит это уравнение для E к форме Вейерштрасса

$$E: W^2 = 4w^3 - g_2 w - g_3$$

и получает стандартные дифференциальные уравнения Абеля на гиперэллиптической кривой C . Смысл этих выкладок обсуждался многими авторами и более или менее ясен, см. [3, 8] и приведенные там ссылки.

Однако вместо того, чтобы решать эти уравнения Абеля, Ковалевская делает дополнительную замену переменных

$$w_{1,2} \rightarrow s_{1,2} + H/3 \quad (4)$$

и получает свои знаменитые разделяющиеся переменные

$$s_{1,2} = \frac{R(z_1, z_2) \pm \sqrt{R(z_1, z_1)} \sqrt{R(z_2, z_2)}}{2(z_1 - z_2)^2},$$

которые также удовлетворяют стандартным уравнениям Абеля

$$\frac{\dot{s}_1}{\sqrt{\mathcal{P}_5(s_1)}} + \frac{\dot{s}_2}{\sqrt{\mathcal{P}_5(s_2)}} = 0, \quad \frac{s_1 \dot{s}_1}{\sqrt{\mathcal{P}_5(s_1)}} + \frac{s_2 \dot{s}_2}{\sqrt{\mathcal{P}_5(s_2)}} = 1,$$

где

$$\mathcal{P}_5(s) = (4s^2 + 4Hs + H^2 - K)(4s^3 + 4Hs^2 + (4b^2c_1 + H^2 - K)s + 4b^2c_2^2),$$

и которые находятся в инволюции:

$$\{s_1, s_2\} = 0$$

относительно скобок Ли—Пуассона на $e^*(3)$.

Разумеется, Ковалевская не вычисляла скобки Пуассона между переменными $s_{1,2}$, так что не вполне ясно, чем вызвана дополнительная замена переменных (4). При этом мы не видим соответствующего обсуждения этой замены в обширном списке работ, посвященных волчку Ковалевской.

Можно лишь предполагать, что Ковалевская приводит эллиптическую кривую E к виду (2):

$$E: S^2 = \mathcal{P}_3(s), \quad \mathcal{P}_3(s) = 4s^3 + 4Hs^2 + (4b^2c_1 + H^2 - K)s + 4b^2c_2^2,$$

который появляется в ее исследовании приводимых абелевых интегралов и непростых абелевых многообразий, см. [4].

А. В. Цыганов

Литература

- [1] *Cassels J. W. S., Flynn V.* Prolegomena to a Middlebrow Arithmetic of Curves of Genus 2. Cambridge: CUP, 1996. (London Mathematical Society Lecture Note Series. V. 230.)
- [2] *Horozov E., van Moerbeke P.* The full Geometry of Kowalewski's top and (1, 2)-abelian surfaces // *Comm. Pure Appl. Math.* 1989. V. 42. № 4. P. 357–407.
- [3] *Magri F.* The Kowalewski's top revised // *Integrable Systems and Algebraic Geometry*. V. 1 / Ed. Ron Donagi and Tony Shaska. Cambridge: CUP, 2020. P. 329–355.
- [4] *Kowalevski S.* Über die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'scher Integrale 3^{ten} Ranges auf elliptische Integrale // *Acta Math.* 1884. V. 4. P. 393–414.

- [5] *Kowalevski S.* Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // *Acta Math.* 1889. V. 12. P. 177–232.
- [6] *Покровский П. М.* О преобразованиях ультра-эллиптических интегралов и функций I класса // *Матем. сб.* 1891. Т. 15, № 3. С. 397–572.
- [7] *Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A.* Lax representation with a spectral parameter for the Kowalewski top and its generalizations // *Lett. Math. Phys.* 1987. V. 14. P. 55–61.
- [8] *Weil A.* Euler and the Jacobians of Elliptic Curves // *Arithmetic and Geometry* / Artin M., Tate J. (eds). Boston: Birkhäuser, 1983. (Progress in Math. Vol. 35).

Евграф Степанович Федоров

(1853–1919)

Известнейший математик Борис Николаевич Делоне ставил Е. С. Федорова в один ряд с легендарными Платоном и Архимедом. В. И. Вернадский, основатель геохимии, считал его равным своим великим современникам Д. И. Менделееву и И. П. Павлову. Вместе с тем, в отличие от упомянутых знаменитостей, Федоров до сих пор малоизвестен за пределами своей страны и своей области науки.

Евграф Степанович Федоров родился в Оренбурге в 1853 году; его отец был военным инженером. Вскоре после рождения Евграфа семья перебралась в Санкт-Петербург, где и прошло его детство. Говорят, что он унаследовал от отца решительный характер, в то время как мать привила ему любовь к чтению и привычку к тяжелой работе. Также она дала ему музыкальное образование и научила его вязать кружевные скатерти. Именно узоры на скатертях были толчком, вызвавшим интерес к геометрии, который сохранился на всю жизнь. В возрасте десяти лет Евграф прочел учебник геометрии, принадлежавший старшему брату, за два дня. В шестнадцать лет, очарованный геометрией кристаллов, он приступил к написанию своей первой работы: «Начала учения о фигурах».

В течение десяти лет, пока Евграф Степанович работал над этой книгой, он рассматривал возможность карьеры медика и инженера, остановившись в конце концов на минералогии. В 1873 году он встретил свою будущую жену, Людмилу Васильевну Панютину, студентку-медика с Урала. Ее мемуары являются основным источником для этого и прочих очерков о жизни ее мужа. Помимо науки, в течение этого десятилетия Евграф Степанович был вовлечен в политику. Революционное общество «Земля и воля» отправило его за границу с целью установить





Аверс и реверс медали в честь столетия федоровской классификации кристаллографических групп

связь с революционерами Бельгии, Германии и Франции, что несомненно способствовало изучению им иностранных языков. Также он принимал участие в побеге князя Петра Алексеевича Кропоткина из тюремной больницы в Петербурге. В соответствии с семейной легендой Федоровых, он подал заранее оговоренный всем понятный сигнал, сыграв серенаду Шуберта на скрипке. Евграф и Людмила поженились в 1880 году, у них родились две дочери и сын.

В том же 1880 году Федоров поступил в престижный Горный институт в Петербурге. Основанный в 1873 году, Горный институт стал первым в России техническим вузом. Он привлекал студентов, в числе прочего, наличием библиотеки, столовой и правом организовывать мероприятия. Кроме того, институт обладал великолепной коллекцией минералов со всей России, которую начали собирать еще по приказу Екатерины Великой. Обогатившись впоследствии за счет подарков со всего мира, музей Горного университета стал (и остается по сей день) ресурсом для практических занятий студентов, научным и промышленным ресурсом мирового уровня, а также ведущей туристической достопримечательностью города.

В 1883 году Федоров закончил обучение в институте, став лучшим на курсе. Тем же летом он присоединился к геолого-картографической экспедиции на Северный Урал. Это была первая из большого числа трудных экспедиций, которые он совершит в эту и другие части России.

В 1890 году Е. С. Федоров опубликовал статью «Симметрия правильных систем фигур». Содержание статьи он кратко сформулировал так: «Здесь дается полный вывод правильных систем точек и намечен вывод возможных видов структуры кристаллов. Каждая система строго определяется алгебраическими выражениями. Простые системы, кроме урав-

нений, точно характеризуются графическим способом». Каждая такая система образует в алгебраическом смысле группу. Федоров привел 230 групп, исчерпав все возможные наборы свойств симметрии кристаллов. Годом позже вышла книга немецкого математика А. Шёнфлиса «Кристаллические системы и кристаллические структуры», где был предложен другой вывод тех же 230 групп. Федоров и Шёнфлис находились в творческом контакте, они находили друг у друга ошибки в построении своих разбиений, и Шёнфлис признавал приоритет Федорова.

Достижения Е. С. Федорова в десятилетний период с 1885 по 1895 год сделали его всемирно известным. Помимо сложного, кропотливого перечисления кристаллографических групп и в течение долгого времени откладывающейся публикации «Начала учения о фигурах», он целиком изменил практику минералогии и петрографии. Федоров считал, что группы определяют положение молекул в кристаллах, хотя эта точка зрения не была в то время общепринятой. Он также считал, что внутренняя структура кристаллов может быть выведена из их макроскопических свойств, и разработал инструменты для их измерения. «Оптическое поведение кристаллов зависит от направления движения света внутри кристалла, и измерение оптических свойств должно проводиться в определенных направлениях», — объясняет Дэниел Кайл [2]. Поэтому было разработано большое количество вращающихся устройств, предназначенных для того, чтобы должным образом сориентировать кристаллы. Универсальный столик Федорова, безусловно, является самым важным из таких устройств, и в течение более чем полувека (т. е. в докомпьютерную эпоху) он считался важнейшим устройством для петрографических работ. Е. С. Федоров разработал четырехосный универсальный столик в 1892 году, работая над задачей классификации минералов группы полевого шпата — основной группы порообразующих минералов. Его универсальный столик с независимо наклоняемыми и вращающимися осями облегчил эти измерения, предоставив полную свободу ориентации кристаллографических и оптических плоскостей образца. Столик Федорова получил приз на Международной выставке 1893 года в Чикаго.

В 1895 году Е. С. Федоров был назначен профессором геологии Московского сельскохозяйственного института (ныне Тимирязевская сельскохозяйственная академия); он также продолжал читать лекции и в Петербургском горном институте. Помимо этого, он продолжал проводить летние экспедиции, читать лекции, писать статьи и книги. В 1896 году он был избран членом Баварской академии наук, что символизировало растущее признание в международных кругах и стало первым из нескольких подобных достижений.

Однако времена были беспокойные, и российские вузы отнюдь не остались равнодушными к переменам. Столкнувшись с требованиями самоуправления со стороны преподавателей и студентов университетов и институтов, царь постановил, что советы факультетов могут избирать своих ректоров и помощников ректора при условии одобрения соответствующих министерств и что дисциплинарные меры в отношении студентов будут возложены на дисциплинарные суды факультетов. В 1905 году Федоров стал первым избранным ректором Горного института.

Федоров был переизбран ректором в 1908 году, но его второй срок был прекращен приказом министра внутренних дел России. Причина состояла в финансовой помощи студентам. Студенты Горного института объявили забастовку в ответ на секвестр статей бюджета института, связанных с финансовой помощью. Однако сокращения бюджета были продолжены, и министр снял Е. С. Федорова с поста ректора. Было ли это печальным концом блестящей карьеры? Нет, наша история на этом не заканчивается.

Е. С. Федоров пронес любовь к хорошей литературе через всю свою жизнь; он вряд ли оценил бы искусственный поворот сюжетной линии, задуманный автором для спасения героя. Тем не менее сам он дожил до того момента, когда его гипотеза о кристаллической структуре была подтверждена, если не во всех деталях, то в основном, именно благодаря появлению *deus ex machina*: открытию дифракции рентгеновских лучей. За несколько месяцев до своей смерти, посреди тягот гражданской войны в России, Е. С. Федоров был избран членом Академии наук.

Конечно, сейчас, сто лет спустя, имя Евграфа Степановича Федорова не звучит каждодневно. Но при этом Делоне и Вернадский не преувеличивали.

Марджори Уиклер Сенешаль (Marjorie Wickler Senechal)

Перевод Сергея Крыжевича

Литература

- [1] Федорова Л. В. Наши будни, радости и горести. Воспоминания. М.: Наука, 1992. (Научное наследство. Т. 20).
- [2] Kile D. The Universal Stage: the past, present, and future of a mineralogical research instrument // *Geochemical News*. gn140, Jul 2009.
- [3] Kassow S. D. Students, Professors, and the State in Tsarist Russia. Berkeley, Los Angeles, London: University of California Press, 1989.
- [4] Paufler P., Filatov S. K. E. S. Fedorov Promoting the Russian-German Scientific Interrelationship // *Minerals*. 2020. V. 10.

Е. С. Федоров и геометрия

Математик Б. Н. Делоне ставил Е. С. Федорова в один ряд с великими геометрами:

Традиция приписывает Платону открытие пяти правильных выпуклых многогранников, Архимеду — тринадцать выпуклых полуправильных многогранников, Кеплеру и Пуансо — четыре правильных невыпуклых тела, и Федоров нашел пять параллелоэдров.



Рис. 1. Экспозиция минералов и горнодобывающего оборудования в Горном музее Санкт-Петербургского Горного университета, Россия

Для кристаллографов фамилия Федоров ассоциируется с 230 кристаллографическими (или пространственными) группами и «столиком Федорова», сложным устройством для измерения кристаллов. Но, с точки зрения самого Федорова, эти три эпохальных достижения были лишь ступеньками в его более широком, но донкихотском стремлении восстановить атомную структуру кристаллов по их внешней форме и свойствам.

Каким образом расположение молекул и атомов в кристалле порождает их симметричные многогранные формы? До открытия дифракции рентгеновских лучей в 1912 году прямого ответа на этот вопрос не было. Но некоторые догадки имелись. Так, французский минералог Рене-Жюст Гаюи, работавший на рубеже XVIII–XIX веков, предположил, что кристаллы представляют собой стопки невидимых конгруэнтных кирпичиков (см. рис. 2).

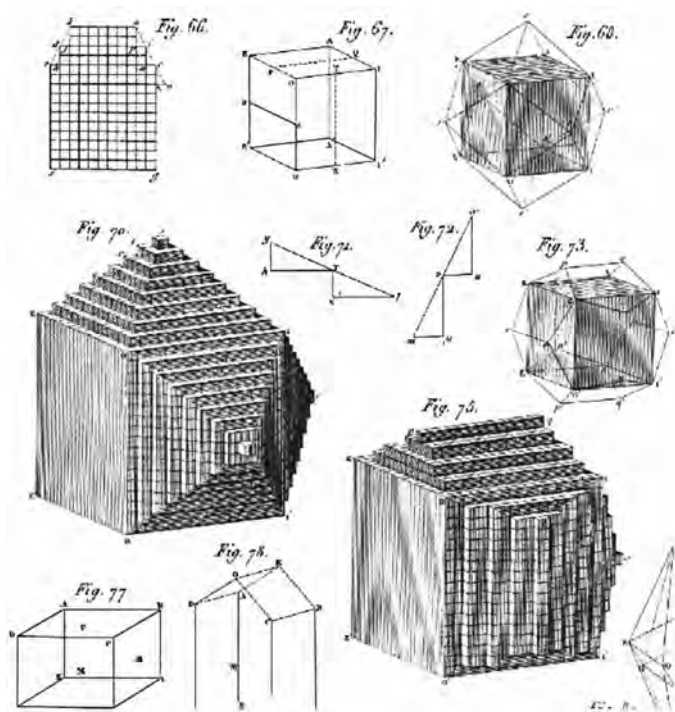


Рис. 2. Рисунок Р.-Ж. Гаюи (1801 г.), показывающий, как формы кристаллов могут быть аппроксимированы кубическими кирпичиками

Теория Гаюи учитывала формы, симметрии кристаллов и многое другое. Почему кристаллы одного вида могут иметь разные геометрические формы? Потому что стопки кирпичиков можно собирать по-разному! Почему пятиугольная додекаэдрическая форма пирита никогда не бывает

достаточно правильной? Потому что вершины кристаллов имеют рациональные координаты!

Но что это за кирпичики? Гаюи называл их *molécules intégrantes*, но это не были молекулы в современном смысле этого слова. На самом деле даже Гаюи не мог сказать, чем они были. Тогда его критики сменили вопрос с того, что такое кирпичики, на то, где они находятся, отмечая точками положения их центров. Французский ученый Огюст Браве в 1850 году перечислил так называемые решетки — группы точек, получаемые друг из друга сдвигами. Решетки Браве до сих пор являются одним из (если не единственным) краеугольных камней математической кристаллографии.

Но Федорова интересовали реальные кристаллы, а значит, и сами кирпичики. Как они выглядели? Точнее, какие выпуклые многогранники заполняют пространство при параллельном расположении? Определяя параллелоэдр P как такой многогранник, он показал, что он полностью характеризуется тремя свойствами.

1. P центрально симметричен.

2. Каждая грань P центрально симметрична.

Условия 1 и 2 вместе означают, что каждое ребро P принадлежит набору параллельных ребер, которые окружают P как пояс. Длина пояса — это количество ребер в нем.

3. Каждый пояс P имеет длину четыре или шесть.

С помощью этих трех условий и формулы Эйлера, связывающей количество граней, ребер и вершин многогранников, Федоров доказал, что

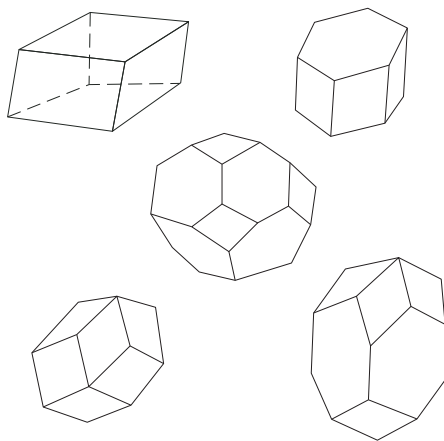


Рис. 3. Пять комбинаторных типов параллелоэдров. Верхний ряд: ромбический шестигранник и шестиугольная призма; в центре: усеченный октаэдр; нижний ряд: ромбический додекаэдр и удлиненный додекаэдр

каждый выпуклый параллеледр относится к одному из пяти комбинаторных типов (см. рис. 3).

Е. С. Федоров представил параллеледры в опубликованной в 1885 году книге, которую он назвал «Начало учения о фигурах». Ему потребовалось шесть лет, чтобы найти издателя. Как заявил ему П. Л. Чебышёв, современной математике эта тема была не интересна. Не будучи обескураженным, Федоров проявил настойчивость. Он знал, что Камиль Жордан в своей работе 1868 года «*Mémoire sur les groupes des mouvements*» обобщил понятие решетки на орбиты групп движений, сохраняющих ориентацию (вращения, сдвиги и винтовые вращения). Федоров добавил движения, меняющие ориентацию (отражения, скользящие симметрии и вращательные симметрии), таким образом увеличив список групп движений в четыре раза.

Независимо от этого, по предложению Феликса Клейна, Артур Шёнфлис в Германии начал работать над той же проблемой. Он и Федоров объединили свои усилия. «*Ich freue mich besonders, daß ich nun mit meiner Theorei nicht mehr allein stehe*¹», — писал Шёнфлис Федорову. Они оба находили ошибки в списках друг друга, пока наконец совместными усилиями в 1891 году не установили истинное число пространственных групп² — 230.

Шёнфлиса интересовали пространственные группы как таковые, Федорова же — их использование в кристаллографии. Он считал, что каждому кристаллу соответствует замощение пространства параллеледрами. Параллеледры, в свою очередь, можно разделить на конгруэнтные «стереоэдры», каждый из которых содержит молекулу кристалла. «Федоров неявно принял концепцию молекулы как конечной стадии материи, — объясняют его биографы, — и в принципе считал, что основной целью кристаллографии должна быть классификация всех возможных „вместилищ“ для этой конечной единицы».

Федоров знал, что не все 230 пространственных групп предоставляют собой такие «вместилища». В современной терминологии это можно описать так: каждая пространственная группа является произведением группы сдвигов и подгруппы группы $O(3)$, описывающей макроскопическую симметрию кристалла³. Только когда это расширение является полупря-

¹ Меня особенно радует, что я со своей теорией более не одинок (нем.)

² Шёнфлис отдавал приоритет Федорову («*Die Priorität gebe ich Ihnen gern zu*»), но версия Шёнфлиса оказала большее влияние. Немецкий был в то время международным языком науки, да и безотносительно к языковому барьеру работы Федорова, который в математике был самоучкой, были трудны для понимания.

³ Точнее говоря, расширением конечной подгруппы группы $O(3)$ с помощью группы сдвигов. — *Прим. ред.*

мым произведением, орбиты элементов могут быть разделены в соответствии с теорией кристаллической структуры Федорова. Он объявил другие группы «мнимыми» и продолжил свой классификационный проект с «настоящими» группами.

Научный мир того времени не проявил интереса к этой задаче; в 1891 году даже кристаллографы считали решетки в лучшем случае полезной выдумкой и откладывали работы по пространственным группам на библиотечные полки. Все внезапно изменилось в 1912 году.

«Вы сказали, что человеческий глаз никогда не увидит атомы... примерно в то время, когда люди видели атомы собственными глазами; если не сами атомы, то порожденные ими фотографические изображения», — писал Федоров своему другу-ученому, имея в виду эксперимент, который Макс фон Лауэ провел в Мюнхене «несколько недель назад». Фон Лауэ удалось разрешить загадку рентгеновских лучей. Ученые спорили, являются ли рентгеновские лучи волнами или частицами. Если бы они были волнами, они вели бы себя как волны: имела бы место дифракция на решетке подходящих размеров. И если бы пространственная теория кристаллической структуры была верна, кристаллы были бы именно такими решетками. Проверая обе гипотезы в одном эксперименте, фон Лауэ пропустил пучок рентгеновских лучей через кристалл и зафиксировал их на фотопластинке на противоположной стороне кристалла. На фотографиях видны четкие и яркие пятна, подтверждающие обе гипотезы.

Услышав эту новость, молодой У. Л. Брэгг, студент Кембриджского университета, испытал озарение: он понял, что дифракционные картины можно читать в обратном направлении, чтобы определить положения атомов, которые их породили. «Для нас, кристаллографов, это открытие имеет первостепенное значение, — продолжил Федоров в своем письме, — потому что теперь мы впервые можем иметь четкую картину того, на чем основаны теоретическая структура и анализ кристаллов».

Одним из первых кристаллов, строение которых установил Брэгг, была обычная соль. Сегодня его трехмерные шахматные доски из атомов натрия и хлора можно найти в каждом кабинете химии. Но в 1912 году его модель шокировала научные круги, во многом подобно открытию квазикристаллов семьдесят лет спустя. Все ожидали найти молекулы NaCl, расположенные в кристалле симметрично. Но, как показал Брэгг, в соли нет молекул (см. рис. 4). «Некоторые из этих выводов являются неожиданными, — добросовестно признал Федоров, — по крайней мере в том смысле, что в узлах решеток реальных систем можно было ожидать найти центры молекул, а эксперименты этого ученого позволяют сделать вывод, что там находятся центры атомов».

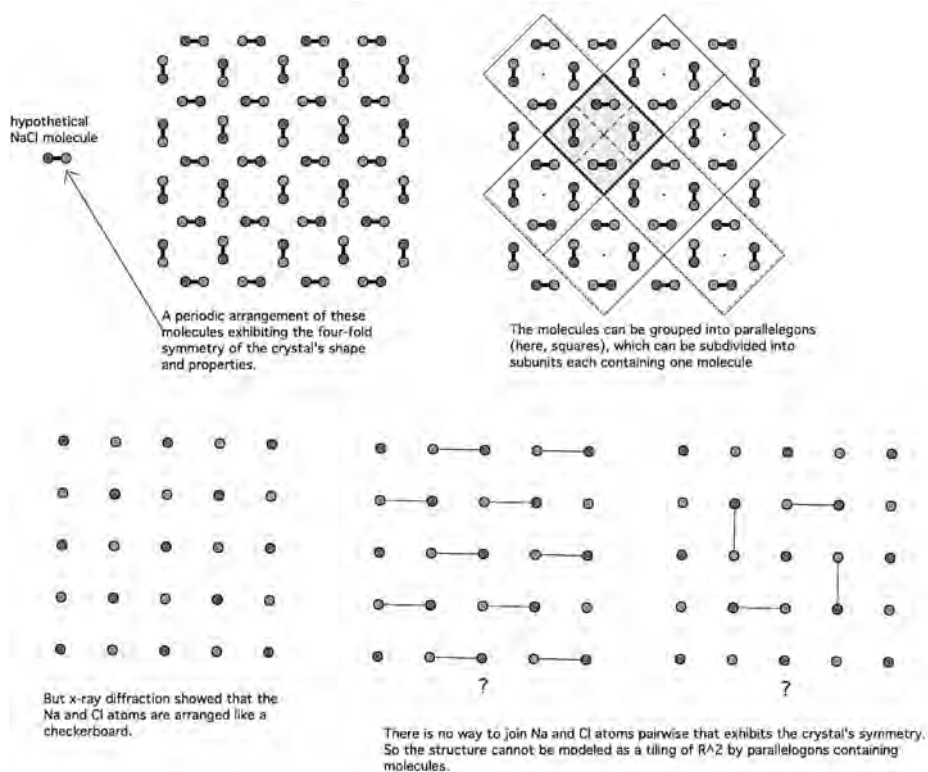


Рис. 4. Дифракция рентгеновских лучей показала, что кристаллическая структура каменной соли, известная как кубическая, представляет собой шахматное расположение атомов Na и Cl. Верхний ряд: Федоров ожидал увидеть такое расположение молекул NaCl. Нижний ряд: реальная структура. Оказалось, что сгруппировать атомы Na и Cl в пары невозможно.

Вкратце это означает, что «мнимые» группы Федорова тоже оказались реальными.

Наука мгновенно заинтересовалась кристаллической структурой, и работы по пространственным группам были сняты с полки. Но при этом, с возможностью «заглянуть» внутрь кристаллов, описание их формы перестало быть актуально. Отныне работы по морфологии стали музейными экспонатами. Книга «Царство кристаллов», массивный фолиант, который, по замыслу Федорова, он должен был оставить потомкам, устарел еще до его посмертной публикации в 1920 году.

Но значение вклада Федорова в геометрию это не умалило. Ему было бы приятно узнать, что многогранники, заполняющие пространство (произвольной размерности), представляют большой интерес в современ-

ной математике, химии, физике конденсированного состояния и даже в промышленном дизайне. А пространственные группы остаются основополагающим инструментом кристаллографии, науки, которая вышла далеко за рамки кристаллов.

Марджори Уиклер Сенешаль (Marjorie Wickler Senechal)
перевод Сергея Крыжевича

Литература

- [1] <https://www.iucr.org/publ/50yearsofxraydiffraction/full-text/fedorov>
- [2] *Burckhardt J. J.* Zur Geschichte der Entdeckung der 230 Raumgruppen // *Arch. Hist. Exact Sci.* 1967. V. 4, № 3. P. 235–246.
- [3] *Делоне Б. Н.* Федоров как геометр // *Труды ИИЕТ.* 1956. Т. 10. С. 5–12.
- [4] *Федоров Е. С.* Начала учения о фигурах. СПб.: тип. Имп. Акад. наук, 1885; М.: изд-во Акад. наук СССР, 1953.
- [5] *Федоров Е. С.* Симметрия правильных систем фигур. СПб.: тип. А. Якобсона, 1890.
- [6] *Jordan C.* Mémoire sur les groupes de mouvements // *Ann. Mat. Pura Appl.* 1868. Т. 2. P. 167–215, 322–345.
- [7] *Menailov A.* См. <https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-the-sauruses-pictures-and-press-releases/fyodorov-or-fedorov-evgraf-stepanovich>
- [8] *Schoenflies A.* Kristallsystem und Kristallstruktur. Leipzig: Drug und Verlag von B. G. Tebuner, 1891.
- [9] *Scholz E.* Crystallographic Symmetry Groups and Group Theory. 1850–1880 // *The History of Modern Mathematics. V. 2. Institutions and Applications* / D. Row and J. McCleary, eds. Academic Press, 1990.
- [10] *Senechal M., Galiulin R. V.* An Introduction to the Theory of Figures: the Geometry of E. S. Fedorov // *Structural Topology.* 1984. V. 10. P. 5–22.
- [11] *Shafranovskii I. I., Belov N. V.* E. S. Fedorov. 1853–1919 // *Fifty Years of X-Ray Diffraction* / Ed. P. P. Ewald. Springer, 1962. P. 341–351. См. <https://www.iucr.org/publ/50yearsofxraydiffraction/full-text/fedorov>
- [12] *Sohncke L.* Entwicklung einer Theorie der Krystallstruktur. Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Tebuner, 1879.

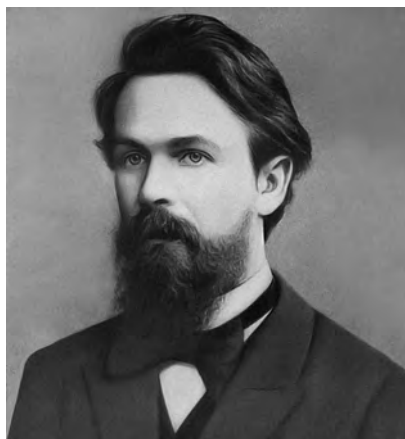
Андрей Андреевич Марков

(1856–1922)

Андрей Андреевич Марков родился в Рязани в семье чиновника Лесного департамента А. Г. Маркова. После переезда семьи в Петербург (в начале 60-х гг.) и окончания 5-й Петербургской гимназии (1874 г.) Андрей Марков поступил в Петербургский университет, с которым в дальнейшем была связана вся его научная биография. В 1886 году он стал профессором и академиком.

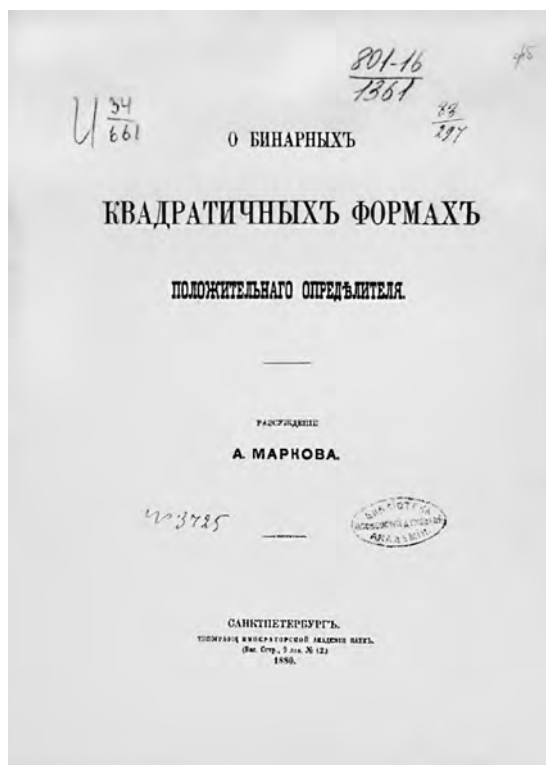
Увлечение математикой, возникшее в гимназические годы, переросло в самостоятельное изучение высшей математики, причем, по свидетельству отца, он ничем, кроме математики, более заниматься не хотел, что, естественно, сказалось на выпускных отметках. Не обошлось и без курьеза: Андрею Маркову показалось, что он изобрел новый метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами! Результаты его обращения по поводу мнимого открытия к известным петербургским математикам (В. Я. Буняковскому, Е. И. Золотареву и А. Н. Коркину) были, с одной стороны, печальны: ему разъяснили, что метод его не нов, и указали на погрешности. С другой стороны, гимназист Марков познакомился с профессорами Петербургского университета и стал вхож в дом Коркина, где часто бывал и Золотарев, что, несомненно, укрепило желание юноши связать свою дальнейшую судьбу с наукой.

В годы обучения в университете (1874–1878) А. Марков имел репутацию одного из самых способных студентов, его учителями были П. Л. Чебышёв, Е. И. Золотарев, А. Н. Коркин, Ю. В. Сохоцкий и другие, причем беседы с профессором Коркиным оказали сильное влияние на выбор предмета самостоятельных исследований Маркова. Именно по ходатайству Коркина А. А. Марков был оставлен при университете для подго-



товки к преподавательской деятельности (1878), которая началась уже в 1880 году после защиты магистерской диссертации.

Основные направления исследований А. А. Маркова относятся к теории чисел, теории дифференциальных уравнений, теории функций, теории приближения функций, и самые выдающиеся — к теории вероятностей. Так, магистерская диссертация «О бинарных квадратичных формах положительного определителя» явилась достойным продолжением исследований Е. И. Золотарева и А. Н. Коркина. По словам Б. Н. Делоне, эта работа «...принадлежит к числу самых острых достижений петербургской школы теории чисел, да, пожалуй, и всей русской математики» [2, с. 144].

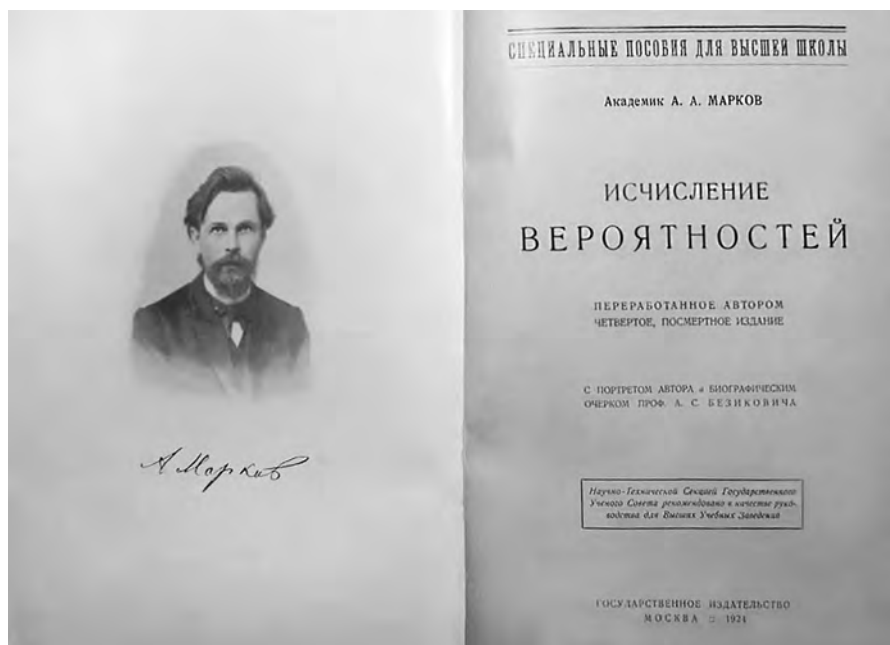


Другим крупным событием в российской науке стала докторская диссертация А. А. Маркова «О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей» (1885), продолжавшая изыскания П. Л. Чебышёва и развивавшая его учение о предельных величинах интегралов.

Она была первой в серии работ Маркова, посвященных теории моментов — инструменту для исследования как в области интерполирования и приближения функций, так и в теории вероятностей. Маркову принадлежит полное и строгое доказательство центральной предельной теоре-

мы теории вероятностей при достаточно общих условиях и существенное расширение сферы применения закона больших чисел и предельной теоремы. Серия его работ (1906–1912 гг.) по изучению стохастических процессов методами математического анализа положила начало современной теории «марковских процессов» и «цепей Маркова», имеющей широчайшее применение в науке, естествознании и технике.

Педагогическая деятельность А. А. Маркова продолжалась с 1880 года и почти до кончины (с небольшими перерывами). Даже выйдя в отставку, он не прерывал связь с alma mater, читая на физико-математическом факультете любимый курс по теории вероятностей. Два его широко известных учебника «Исчисление конечных разностей» (1886, литографированное издание) и «Исчисление вероятностей» (1900) стали востребованы не только на родине, но и за рубежом (появились иностранные переводы). В России, например, «Теория вероятностей» только прижизненно переиздавалась четыре раза. Кроме того, профессору А. А. Маркову мы обязаны появлением в российской математике таких ученых, как Н. М. Гюнтер, Г. Ф. Вороной, Б. М. Коялович, А. А. Марков-младший и др.



А. А. Марков всегда отличался активной жизненной позицией, обостренным чувством справедливости и абсолютным неприятием зла. Бескомпромиссный, прямолинейный и открытый, А. А. Марков всю свою жизнь боролся против того, что считал несправедливым и тормозящим

прогресс. Широко известна его позиция против отмены избрания М. Горького на заседании отделения языка и словесности Академии наук 25 февраля 1905 года почетным академиком.

В 1908 году, после выхода циркуляра Министерства народного просвещения, предписывающего преподавателям полицейские функции, Марков направил министру письмо, где сообщил о своем отказе «быть в университете агентом правительства». После отлучения Святейшим синодом Льва Толстого от церкви Марков отправил наделавшее много шума ходатайство с просьбой отлучить и его...

АКАДЕМИКЪ МАРКОВЪ—ВНЪ РЕЛИГІИ

Заслуженный профессор с-петербургскаго университета академикъ А. А. Марковъ отлученъ отъ церкви по его желанію

Неожиданный переходъ вызвалъ въ своемъ ходатайствѣ заслуженнаго профессора сибирскаго университета, ординарнаго академика академіи наукъ, известнаго математика д. с. с. Андрей Андреевича Маркова объ отлученіи его отъ церкви.

Въ своемъ прошеніи, подаваемомъ въ синодъ, академикъ А. А. Марковъ въ коррективной формѣ заявляетъ, что онъ въ теченіи 20 лѣтъ на основаніи выводовъ науки и собственнаго наблюденія пришелъ къ полному атеезму и въ разработку опредѣленный критическій взглядъ на догматы и обязанности всѣхъ церквей и религій.

Поэтому А. А. Марковъ проситъ св. синодъ отлучить его отъ церкви.

Онъ утверждаетъ, что это желаніе не извѣстная прихоть, а продуманная мысль.

Для болѣея убѣдительности А. А. Марковъ ссылается на рядъ своихъ сочиненій, въ

которыхъ онъ провозглашалъ безусловное отрицаніе церкви и религіи.

Св. синодъ передалъ прошеніе А. А. Маркова въ с-петербургскую духовную консисторію на усмотрѣніе митрополита с-петербургскаго и ливонскаго Антонія, по принадлежности епархіи.

Бесѣда съ архіепископомъ Антоніемъ Волынскимъ

По поводу необычайнаго ходатайства академика А. А. Маркова мы бесѣдали съ виднымъ членомъ св. синода архіепископомъ Антоніемъ Волынскимъ.

— Да, действительно, ходатайство А. А. Маркова объ отлученіи его отъ церкви въ синодѣ получено и передано по принадлежности митрополиту с-петербургскому и ливонскому Антонію—сказалъ намъ главный Антоній.

По правиламъ церкви, къ А. А. Маркову для узнанія были посланы протоіерей Онуатеній.

А. А. Марковъ остался при своемъ мнѣніи, Узнанія остались безуспѣшными.

Послѣ этого А. А. Марковъ былъ отлученъ отъ церкви.

Но почему-то все это носило единственно декларативную форму и отлученію отъ престола не была провозглашена анафема.

Вообще подобные случаи отлученій отъ церкви безъ перехода въ каноническую форму религіи весьма рѣдки.

У насъ на Волынѣ бывають отлученія въ католичество или шутку. Тамъ отлучившіе провозглашаются анафема при торжественной обстановкѣ.

А. Невский

В противовес организованному в 1913 году празднованию 300-летия дома Романовых по предложению академика Маркова Академия наук отметила 200-летие выхода в свет книги выдающегося швейцарского математика Я. Бернулли «Искусство предположений». Но порой, к сожалению, неприятие дипломатичности, так часто встречавшейся в академической среде, и неприятие авторитетов осложняло его отношения с коллегами. Так, Марков недооценивал труды С. В. Ковалевской, В. Г. Имшенецкого, К. Пирсона, П. А. Некрасова.

Мало кому известно, что А. А. Марков начиная с гимназических времен был страстным шахматистом, дружил с М. И. Чигориным — сильнейшим русским шахматистом и претендентом на звание чемпиона мира. После того как Марков в I Всероссийском турнире по переписке занял первое место (набрав 6 очков из 6 возможных), Чигорин выбрал его в спарринг-партнеры для подготовки к заочному матчу со Стейнцем

(1890). Эта страсть к шахматам не покидала А. А. Маркова всю жизнь. Так, за год до кончины Марков, плохо видящий из-за глаукомы, не глядя на доску (!), участвовал в турнире, проводимом на естественнонаучной станции в Новом Петергофе, играя с профессорами Н. Гюнтером, М. Виноградовым и др.

Скончался А. А. Марков в 1922 году в Петрограде, был похоронен на Митрофаниевском кладбище, перезахоронен на Литераторских мостках Волкова кладбища (1954).

Н. В. Локоть

Литература

- [1] *Гродзенский С. Я.* Андрей Андреевич Марков, 1856–1922. М.: Наука, 1987.
- [2] *Делоне Б. Н.* Петербургская школа теории чисел. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1947.
- [3] *Марков-мл. А. А.* Биография А. А. Маркова // Марков А. А. Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятностей / Под ред. Ю. В. Линника. М.: Изд. АН СССР, 1951. С. 599–613. (Классики науки).
- [4] *Никифоровский В. А.* Математик и гражданин // Вестник РАН. 1998. Т. 68, № 4. С. 338–340.
- [5] *Марков А. А.* Исчисление вероятностей. С портр. автора и биогр. очерком проф. А. С. Безиковича. 4-е изд., перераб. автором, посмертное. М.: Гос. изд., 1924.
- [6] *Марков А. А.* Исчисление конечных разностей. Т. 1, 2. СПб., 1889–1891.
- [7] *Марков А. А.* О бинарных квадратичных формах положительного определителя // Марков А. А. Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятностей / Под ред. Ю. В. Линника. М.: Изд. АН СССР, 1951. С. 9–84. (Классики науки).
- [8] *Марков А. А.* Двухстолетие закона больших чисел // Вестник опыт. физики и элемент. математики. 1914. № 603. С. 59–64. (Речь А. А. Маркова, произнесенная на торжественном собрании Академии наук 1 декабря 1913 г. в ознаменование 200-летия закона больших чисел.)

Числа Маркова в арифметике и геометрии

Андрей Андреевич Марков–старший (1856–1922) — выдающийся русский математик. Широко известны и общепризнаны его работы по теории вероятностей и математическому анализу. Разработанная им теория обширного класса стохастических процессов с дискретной и непрерывной временной компонентой, названных его именем, имеет бесчисленные применения в современных теоретических и прикладных исследованиях, ее влияние трудно переоценить. Огромный вклад внес А. А. Марков в теорию непрерывных дробей и исчисление конечных разностей. В теории распознавания образов и задачах искусственного интеллекта большинство алгоритмов используют понятие скрытой марковской модели, которое берет начало в работах Маркова.

Однако не менее известен А. А. Марков как специалист по теории чисел. Первый значимый результат он получил в своей магистерской диссертации «О бинарных квадратичных формах положительного определителя» [12, 13], см. также [5, 6]. Одним из центральных объектов диссертации является одно диофантово уравнение, которое впоследствии возникало во многих областях математики, довольно далеких от изначальной задачи о минимизации квадратичных форм. В настоящей заметке мы обсудим этот аспект обширного математического наследия А. А. Маркова.

Уравнение Маркова

Уравнение Маркова — это диофантово уравнение вида

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3x_1x_2x_3. \quad (1)$$

Решения этого уравнения сейчас известны как *тройки Маркова*, а *числа Маркова* — это все натуральные числа, появляющиеся в этих тройках. Пусть (x_1, x_2, x_3) — тройка Маркова. Рассмотрим следующие три преобразования:

$$\begin{array}{ccc}
 & (x_1, x'_2, x_3) & \\
 & \uparrow t_2 & \\
 & (x_1, x_2, x_3) & \\
 \swarrow t_1 & & \searrow t_3 \\
 (x'_1, x_2, x_3) & & (x_1, x_2, x'_3),
 \end{array} \tag{2}$$

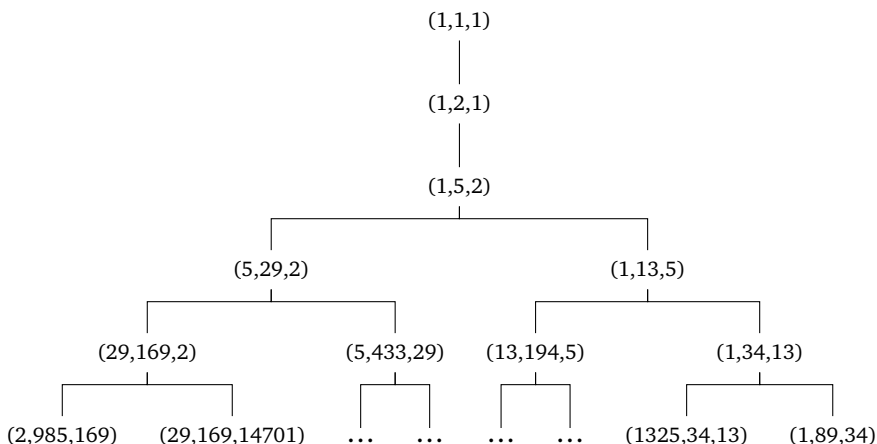
где

$$x'_i := \frac{3x_1x_2x_3}{x_i} - x_i.$$

По формулам Виета новые тройки

$$(x'_1, x_2, x_3), \quad (x_1, x'_2, x_3), \quad (x_1, x_2, x'_3) \tag{3}$$

также являются решениями уравнения Маркова, причем $x'_i \neq x_i$. Такое преобразование t_i называется *элементарной перестройкой* или *мутацией* в элементе x_i , а соответствующие тройки называются *соседними*. Можно показать, что если все три числа x_1, x_2, x_3 различны, то и все тройки (3) также различны. Более того, элементарная перестройка в максимальном элементе тройки уменьшает этот элемент. Например, если $x_1 = \max(x_1, x_2, x_3)$, то $x'_1 < \max(x_2, x_3) < x_1$. Отсюда следует, что любое решение уравнения Маркова получается из $(1, 1, 1)$ последовательным применением элементарных перестроек. Все тройки Маркова могут быть записаны в виде графа, в котором соседние тройки соединяются ребром. Граф имеет форму бесконного тривалентного дерева:



Легко видеть, что любое число Маркова является максимальным в некоторой тройке. В 1913 году Фробениус высказал следующую гипотезу.

Гипотеза (гипотеза единственности). *Тройка Маркова однозначно определяется своим максимальным элементом.*

Несмотря на многочисленные попытки, гипотеза до сих пор не доказана. Очень хорошее введение и исторический обзор см. в [1].

Геометрия поверхности Маркова

Рассмотрим поверхность X , заданную в аффинном пространстве $\mathbb{A}^3$ уравнением (1). Ее проективное замыкание $\bar{X} \subset \mathbb{P}^3$ является нодальной кубикой с единственной особой точкой, а граничный дивизор — объединение трех прямых, образующих «треугольник».

Отображения t_i являются автоморфизмами поверхности X (как аффинного многообразия). Можно проверить, что они порождают подгруппу $\Gamma_0 \subset \text{Aut}(X)$, изоморфную свободному произведению

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Полная группа автоморфизмов $\text{Aut}(X)$ порождается Γ_0 , перестановками и обращениями знака у пары координат [15]. При этом $\text{Aut}(X)$ действует транзитивно на множестве целых точек поверхности X , а ее подгруппа индекса 4, изоморфная $\text{PGL}_2(\mathbb{Z})$, действует транзитивно на множестве троек Маркова.

Проекция

$$\Psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

из начала координат является бирациональным отображением, т.е. она взаимно однозначна на непустых открытых по Зарисскому подмножествах $U \subset X$ и $V \subset \mathbb{P}^2$. Более того, Ψ задает вложение $\text{Aut}(X)$ в группу бирациональных преобразований плоскости так, что все элементы сохраняют, с точностью до знака, симплектическую форму

$$\frac{du \wedge dv}{uv}.$$

Таким образом, подгруппа индекса 2 в $\text{Aut}(X)$ вкладывается в симплектическую группу Кремоны [7].

Числа Маркова в теории приближений и теории квадратичных форм

В оригинальной работе Маркова уравнение (1) возникло в связи с задачей о нахождении арифметического минимума бинарных квадратичных форм.

Рассмотрим бинарную квадратичную форму

$$f(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Будем считать, что форма *неопределенная*, т.е. ее дискриминант

$$D := \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

положителен. *Константа Маркова формы* f — это число

$$\mu(f) := \frac{\sqrt{D}}{\min'(f)},$$

где $\min'(f)$ — арифметический минимум:

$$\min'(f) := \min \{|f(x, y)| : x, y \in \mathbb{Z}, (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

Спектр Маркова — это множество всех констант Маркова:

$$\mathbb{M} := \{\mu(f) : f \text{ — бинарная квадратичная форма с } D > 0\}.$$

Формы f и f' называются *эквивалентными*, если они получаются друг из друга целочисленной заменой координат. Ясно, что эквивалентные формы имеют один и тот же минимум.

Оказывается, что задача о вычислении арифметических минимумов квадратичных форм тесно связана с теорией диофантовых приближений. Хорошо известная теорема Гурвица утверждает, что для любого иррационального числа θ существует бесконечно много рациональных дробей $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, удовлетворяющих неравенству

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2},$$

при этом константу $\sqrt{5}$ в знаменателе нельзя заменить на бóльшую. В связи с этим возникает следующее естественное определение: *числом Лагранжа* для $\theta \in \mathbb{R}$ называется верхняя грань $\lambda(\theta)$ множества действительных чисел λ , для которых неравенство

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\lambda q^2} \tag{4}$$

имеет место для бесконечно многих рациональных дробей $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Таким образом, по теореме Гурвица для иррационального θ мы имеем $\lambda(\theta) \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$. *Спектр Лагранжа* — это множество

$$\mathbb{L} := \{\lambda(\theta) : \theta \in \mathbb{R}\}$$

всех возможных значений чисел Лагранжа. Числа $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ называются *эквивалентными*, если они принадлежат одной орбите действия группы $GL_2(\mathbb{Z})$ на $\mathbb{R}$ преобразованиями Мёбиуса. Ясно, что числа Лагранжа эквивалентных действительных чисел равны.

Заметим, что показатель 2 при q в правой части неравенства (4) нельзя увеличить: как было показано К. Ротом (1955), для любого иррационального алгебраического числа θ и для любого $\epsilon > 0$ неравенство

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}$$

имеет лишь конечное число решений с взаимно простыми p и q .

Результаты Маркова

Пусть $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 5, \dots$ — упорядоченная последовательность всех чисел Маркова. Положим

$$\lambda_m = \sqrt{9 - 4/m}.$$

Также по упорядоченной тройке Маркова (m, m', m'') , $m > m' > m''$, по некоторому явному правилу строится неопределенная квадратичная форма

$$F_{m,m',m''}(x, y).$$

Она называется *формой Маркова*. Принимая на веру гипотезу Фробениуса, можно считать, что $F_{m,m',m''}$ зависит только от максимального элемента: $F_{m,m',m''} = F_m$.

Теорема (Марков). Для неопределенной бинарной квадратичной формы $f(x, y)$ неравенство $\mu(f) < 3$ выполнено тогда и только тогда, когда f эквивалентна кратному формы F_m для некоторого числа Маркова m .

Гурвиц заметил, что методы доказательства этой теоремы позволяют непосредственно получить аналогичный результат для диофантовых приближений.

Теорема. Для иррационального действительного числа θ неравенство $\lambda(\theta) < 3$ выполнено тогда и только тогда, когда $\lambda(\theta) = \lambda_m$, где m — некоторое число Маркова. При этом θ эквивалентно корню уравнения $F_m(x, 1) = 0$.

В частности, отсюда следует, что на интервале $[0, 3)$ спектры Лагранжа и Маркова дискретны и совпадают:

$$\mathbb{L} \cap [0, 3) = \mathbb{M} \cap [0, 3) = \{\lambda_n\}.$$

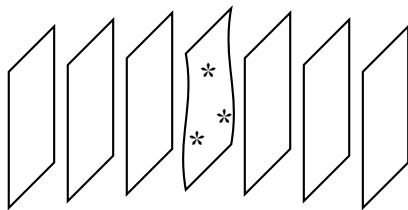
Напротив, в правой части вещественной прямой эти спектры непрерывны: Г. А. Фрейманом в 1975 году было доказано, что спектры Лагранжа и Маркова содержат интервал $[\lambda_F, +\infty]$ (луч Холла), где

$$\lambda_F := \frac{2221564096 + 283748\sqrt{462}}{491993569} \approx 4,52.$$

С другой стороны, поведение спектров Лагранжа и Маркова на интервале $[3, \lambda_F]$ довольно сложно и до сих пор до конца не изучено.

Числа Маркова в геометрии

Вырождения проективной плоскости. Рассмотрим аналитическое семейство $\{S_t\}_{t \in \Delta}$ компактных комплексных поверхностей над диском $\Delta \subset \mathbb{C}$, для которого при $t \neq 0$ слой S_t изоморфен проективной плоскости $\mathbb{P}^2$. В этой ситуации центральный слой S_0 называется *вырождением* $\mathbb{P}^2$.



В общем случае вырождения $\mathbb{P}^2$ могут быть устроены довольно сложно. М. Манетти [4] поставил проблему классификации вырождений $\mathbb{P}^2$, допускающих лишь *факторособенности*, т.е. особенности, аналитически эквивалентные факторам $\mathbb{C}^2/G$, где $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Эта проблема интересна, важна и мотивирована своими приложениями в теории модулей кривых и поверхностей, а также в программе минимальных моделей.

Напомним, что *взвешенная проективная плоскость* $\mathbb{P}(d_1, d_2, d_3)$ — это множество троек чисел $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ с отождествлением

$$(x_1, x_2, x_3) = (t^{d_1}x_1, t^{d_2}x_2, t^{d_3}x_3), \quad t \in \mathbb{C}^*.$$

Здесь d_1, d_2, d_3 — натуральные числа, называемые *весами*. Мы будем считать, что веса попарно взаимно просты. При $d_1 = d_2 = d_3 = 1$ мы получаем обычную проективную плоскость. В противном случае $\mathbb{P}(d_1, d_2, d_3)$ имеет факторособенности.

Теорема ([3]). Если взвешенная проективная плоскость является вырождением $\mathbb{P}^2$, то она имеет вид

$$\mathbb{P}(m_1^2, m_2^2, m_3^2),$$

где (m_1, m_2, m_3) — тройка Маркова. Обратно, каждая взвешенная проективная плоскость $\mathbb{P}(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$ является вырождением $\mathbb{P}^2$.

В работе [3] получена полная классификация вырождений $\mathbb{P}^2$, а также аналогичные результаты для вырождений двумерной квадррики и других поверхностей дель Пеццо.

Исключительные векторные расслоения на $\mathbb{P}^2$. Векторное расслоение $\mathcal{E}$ на комплексном неособом проективном алгебраическом многообразии X называется *исключительным*, если

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \mathbb{C} \quad \text{и} \quad \mathrm{Ext}^q(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0 \quad \text{при } q > 0.$$

Упорядоченный набор векторных расслоений $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ называется *исключительным*, если все $\mathcal{E}_i$ исключительны и

$$\mathrm{Ext}^q(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j) = 0 \quad \text{при } i > j \text{ и } q \geq 0.$$

Исключительный набор называется *полным*, если он порождает ограниченную производную категорию $\mathcal{D}^b(X)$ когерентных пучков на X . Наличие полных исключительных наборов накладывает на многообразие X очень сильные ограничения. Мы рассмотрим только случай проективной плоскости $X = \mathbb{P}^2$. В этом случае любое линейное расслоение является исключительным, а тройка

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$$

— полный исключительный набор. Более того, исключительный набор на $\mathbb{P}^2$ является полным тогда и только тогда, когда он состоит из трех элементов.

В работах А. Н. Рудакова [14] и А. Л. Городенцева и А. Н. Рудакова [2] был установлен поразительный факт: на множестве полных исключительных наборов векторных расслоений на $\mathbb{P}^2$ определены некоторые преобразования (перестройки), аналогичные перестройкам троек Маркова (2). В частности, ранги расслоений в полных исключительных наборах — это в точности тройки Маркова. Эти результаты имеют обобщения на произвольные поверхности дель Пеццо [11].

Числа Маркова в геометрии Лобачевского. Классическое тождество Фрике утверждает, что для любых матриц $A, B, C = AB \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ выполнено равенство

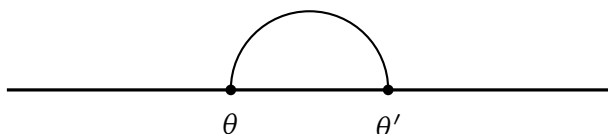
$$\mathrm{tr}(A)^2 + \mathrm{tr}(B)^2 + \mathrm{tr}(C)^2 = \mathrm{tr}(A) \mathrm{tr}(B) \mathrm{tr}(C) + \mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) + 2.$$

Если матрицы целочисленные, а коммутатор $ABA^{-1}B^{-1}$ является параболической матрицей, то $\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) = -2$ и числа

$$\mathrm{tr}(A)/3, \quad \mathrm{tr}(B)/3, \quad \mathrm{tr}(C)/3$$

образуют тройку Маркова. Это наблюдение позволяет переформулировать многие вопросы о числах Маркова в терминах действия модулярной группы $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ и ее конгруэнц-подгруппы $\Gamma(3)$ на плоскости Лобачевского.

Рассмотрим модель Пуанкаре $\mathbb{H}$ (верхнюю полуплоскость в $\mathbb{C}$) геометрии Лобачевского. При действии гиперболического преобразования $A \in \Gamma(3)$ на замыкании $\bar{\mathbb{H}}$ имеются две вещественные неподвижные точки θ и θ' . Окружность, проходящая через эти точки и перпендикулярная вещественной оси, — прямая геометрии Лобачевского,



а ее образ на факторе $\mathbb{H}/\Gamma(3)$ является геодезической γ_A . Оказывается, что γ_A не имеет самопересечений тогда и только тогда, когда $\lambda(\theta), \lambda(\theta') < 3$, а ее длина вычисляется через числа Маркова. Гипотеза единственности также имеет интерпретацию в этих терминах [1]. Такой подход, использующий геометрию Лобачевского, был применен Д. С. Горшковым [9] для того, чтобы передоказать результаты Маркова чисто геометрическими методами.

Числа Маркова в симплектической геометрии. Одна из интересных и важных проблем в симплектической геометрии — вопрос о классификации лагранжевых торов в комплексной проективной плоскости с симплектической формой, равной кэлеровой форме стандартной метрики Фубини—Штуди. В недавних работах Р. Виано [8] было получено существенное продвижение в этом направлении. В частности, было построено бесконечное семейство неэквивалентных лагранжевых торов, параметризуемое тройками Маркова.

В заключение отметим, что наш краткий обзор не является полным. Неожиданные применения троек Маркова продолжают появляться в самых разных частях математики. Мы надеемся, что будет еще много других появлений, а также будут найдены интересные связи между ними. Вот что писал выдающийся советский математик Б. Н. Делоне о магистерской диссертации А. А. Маркова [10]:

Эта работа, весьма высоко оцененная Чебышёвым, принадлежит к числу самых острых достижений петербургской школы теории чисел, да, пожалуй, и всей русской математики.

Литература

- [1] *Aigner M.* Markov's theorem and 100 years of the uniqueness conjecture. A mathematical journey from irrational numbers to perfect matchings. Springer, 2013. P. X+257.
- [2] *Gorodentsev A. L., Rudakov A. N.* Exceptional vector bundles on projective spaces // *Duke Math. J.* 1987. V. 54, № 1. P. 115–130.
- [3] *Hacking P., Prokhorov Yu.* Smoothable del Pezzo surfaces with quotient singularities // *Compositio Math.* 2010. V. 146, № 1. P. 169–192.
- [4] *Manetti M.* Normal degenerations of the complex projective plane // *J. reine angew. Math.* 1991. Bd. 419. S. 89–118.
- [5] *Markoff A. A.* Sur les formes quadratiques binaires indéfinies // *Math. Ann.* 1879. Bd. 15. S. 381–406.
- [6] *Markoff A. A.* Sur les formes quadratiques binaires indéfinies // *Math. Ann.* 1880. Bd. 17. S. 379–399.
- [7] *Usnich A.* On the Cremona group and it's subgroups: Ph.D. thesis / *Alexandr Usnich.* Université Pierre et Marie Curie – Paris VI. 2008.
- [8] *Vianna R. F. de Velloso* Infinitely many exotic monotone Lagrangian tori in $\mathbb{CP}^2$ // *J. Topol.* 2016. V. 9, № 2. P. 535–551.
- [9] *Горишков Д. С.* Геометрии Лобачевского в связи с некоторыми вопросами арифметики. Дис. ... канд. наук. Л.: Ленингр. гос. ун-т, 1953.
- [10] *Делоне Б. Н.* Петербургская школа теории чисел. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1947.
- [11] *Карпов Б. В., Ногин Д. Ю.* Трехблочные исключительные наборы на поверхностях дель Пеццо // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1998. Т. 62, № 3. С. 3–38.
- [12] *Марков А. А.* О бинарных квадратичных формах положительного определителя: Рассуждение А. Маркова : Квалификационная работа магистра / А. А. Марков; СПб.: тип. Имп. Акад. наук, 1880.
- [13] *Марков А. А.* О бинарных квадратичных формах положительного определителя // *Успехи матем. наук.* 1948. Т. 3, вып. 5. С. 7–51. См. также: *Марков А. А.* Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятностей / Под ред. Ю. В. Линника. М.: Изд. АН СССР, 1951. С. 9–84. (Классики науки).
- [14] *Рудаков А. Н.* Числа Маркова и исключительные расслоения на $\mathbb{P}^2$ // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1988. Т. 52, № 1. С. 100–112.
- [15] *Эль-Хути М. Х.* Кубические поверхности марковского типа // *Матем. сб.* 1974. Т. 93, № 3. С. 331–346.

Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918)

А. М. Ляпунов создал современную теорию устойчивости равновесия. До него вопросы об устойчивости обычно решались по первому приближению, то есть путем отбрасывания всех нелинейных членов уравнений, без выяснения законности такой линеаризации. Основным трудом в этой области является докторская диссертация Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения».

В 1900 году, готовясь к курсу лекций по теории вероятностей, Ляпунов предложил новый метод — метод характеристических функций; обобщая исследования П. Л. Чебышёва и А. А. Маркова (старшего), Ляпунов доказал центральную предельную теорему теории вероятностей при значительно более общих условиях, чем его предшественники.

Большой цикл исследований Ляпунова посвящен теории фигур равновесия равномерно вращающейся жидкости, частицы которой взаимно притягиваются по закону всемирного тяготения. До него были установлены эллипсоидальные фигуры равновесия для однородной жидкости¹, Ляпунов же впервые строго доказал существование фигур равновесия однородной и слабо неоднородной жидкости, близких к эллипсоидальным.

Дед великого математика, Василий Александрович Ляпунов (1778–1847), был синдиком правления Императорского Казанского университета, т. е. официальным представителем университета, уполномоченным на ведение его дел. У Василия Александровича и его жены Анастасии Евсеевны было девять детей: три сына и шесть дочерей. Все дети получили хорошее образование.



¹ Эллипсоиды Маклорена (1742) и Якоби (1831).

Михаил Васильевич Ляпунов (1820–1868), отец Александра Михайловича, окончил математический факультет Казанского университета с серебряной медалью в 1839 году. Математика и астрономия были его главными предметами. В 1840 году он был назначен астрономом-наблюдателем университетской обсерватории.

После пожара 1842 года в Казани Михаил Васильевич был командирован в Пулково следить за ремонтом пострадавшего во время пожара оборудования университетской обсерватории. В Пулкове он занимался астрономией под руководством В. Я. Струве, О. В. Струве, Е. Е. Саблера и др. В 1845 году Ляпунов вернулся в Казань, на прежнее место наблюдателя, в 1850 году получил пост директора Казанской обсерватории.

В 1853 году М. В. Ляпунов женился на Софье Александровне Шипиловой, которой было тогда 28 лет.



А. М. Ляпунов с женой (Болобоново, 1904). Из архивов А. Н. Ляпунова.

В 1855 г. М. В. Ляпунов был избран членом-корреспондентом университета и вскоре ушел в отставку. В 1856 году он получил должность директора Ярославского Демидовского лицея, и они с женой перебрались в Ярославль. Там у них 25 мая (6 июня) 1857 года родился сын Александр. Раннее детство Александр с матерью и братьями провел в селе Болобоново

Курмышского уезда Симбирской губернии. Сохранились письма матери, относящиеся к этому непростому времени. Только что отменили крепостное право, и ей было очень трудно строить новые отношения с крестьянами, она не знала, как с этим справиться, ни у кого из окружающих еще не было такого опыта.

В 1864 году Михаил Васильевич по состоянию здоровья ушел в отставку с поста директора Демидовского лицея; семья поселилась в Болобонове в деревянном (одноэтажном в 5 комнат) доме, только что построенном Михаилом Васильевичем в усадьбе, полученной Софьей Александровной от родителей.



Дом в Болобонове, в котором жили Ляпуновы после отставки Михаила Васильевича (1904). Слева — лингвист Борис Ляпунов, будущий академик АН СССР. Из архива А. Н. Ляпунова.

Здесь у М. В. Ляпунова была замечательная «библиотека, богатая сочинениями на русском, немецком и французском языках по специальностям не только математики, астрономии и естественных наук, но и по философии, истории, этнографии, политической экономии, литературе».

Первоначальное воспитание дети получали под руководством матери, но начиная с семилетнего возраста ученьем детей занимался отец, который целиком посвятил себя этому делу после выхода в отставку.

Когда умер отец, Александру было 11 с половиной лет. Он продолжил обучение в семье художника Рафаила Михайловича Сеченова, женатого на сестре его отца Екатерине Васильевне. Здесь он и его двоюродная сестра, будущая жена, Наталия Рафаиловна, годом моложе его, готовились по предметам гимназического курса и новым языкам под руководством наемных учительниц и тети Глафиры Васильевны Ляпуновой.

В 1870 году Александр вместе с матерью и братьями переехал в Нижний Новгород, где был принят в третий класс Нижегородской гимназии. Окончив в 1876 году гимназический курс с золотой медалью, Александр в том же году осенью поступил на физико-математический факультет Петербургского университета. Сначала он учился на отделении естественных наук, причем особенно усердно занимался химией у Д. И. Менделеева, но уже через месяц перешел на математическое отделение, где в это время преподавал Пафнутий Львович Чебышёв, который, по собственному признанию Александра Михайловича, «своими лекциями, а затем советами оказал существенное влияние на характер [моей] последующей ученой деятельности».

В 1880 году А. М. Ляпунов получил золотую медаль за сочинение, написанное на предложенную факультетом тему по теоретической механике, и напечатал в «Журнале физико-химического общества» две работы по гидростатике, предварительно сделав сообщение на заседании Общества.

После внезапной смерти матери в 1879 году Александр Михайлович взял на себя заботу о младшем брате Борисе. С 1881 по 1885 год они с братом жили в одной комнате в квартире сестры профессора физиологии Ивана Михайловича Сеченова. В то время А. М. Ляпунов любил работать по ночам. Раз в неделю в квартире хозяйки собирались родные, в том числе И. М. Сеченов, любивший отдохнуть в кругу учащейся молодежи, собиравшейся по воскресеньям у его сестры. А. М. Ляпунов в то время давал уроки Сеченову по тем отделам математических наук, которые считал особенно важными для физиолога. Иван Михайлович принимал самое теплое участие во всех научных успехах А. М. Ляпунова. В течение двух лет Ляпунов усердно работал над предложенной П. Л. Чебышёвым задачей. Хотя задачу Чебышёва и не удалось решить, он получил тесно связанный с ней результат об устойчивости эллипсоидов Маклорена и Якоби. В 1885 году А. М. Ляпунов защитил эту работу в качестве диссертации на степень магистра и осенью того же года перешел на должность приват-доцента в Харьковский университет.

Весь период работы в Харькове Ляпунов много и напряженно преподавал и считал это время целиком потерянным для науки, хотя и получил за этот период ряд замечательных результатов. Его знаменитая версия центральной предельной теоремы из теории вероятностей также свя-

зана с его преподавательской деятельностью. Во время зимних каникул Александр Михайлович приезжал в Петербург, где 17 января 1886 года обвенчался со своей двоюродной сестрой, племянницей И. М. Сеченова, Н. Р. Сеченовой, к которой он был глубоко привязан с раннего детства.

По словам его ближайшего ученика Владимира Андреевича Стеклова, Ляпунов работал изо дня в день до четырех или пяти часов ночи. Он не позволял себе почти никаких развлечений и если появлялся иногда (раз или два в год) в театре или в концерте, то лишь в самых исключительных случаях, например на редких концертах своего брата, известного композитора Сергея Михайловича Ляпунова. Вот что писал о нем В. А. Стеклов:

Отчасти потому и производил он на лиц, мало его знавших, впечатление молчаливо-хмурого, замкнутого человека, что зачастую был настолько поглощен своими научными размышлениями, что смотрел — и не видел, слушал — и не слышал, над чем так часто и так добродушно подсмеивался в кругу близких его тесть Рафаил Михайлович Сеченов.

Результаты, полученные Ляпуновым по устойчивости, составили предмет его докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения», защищенной в Московском университете в 1892 году. В 1900 году Александр Михайлович Ляпунов был избран членом-корреспондентом Академии наук, а в 1901 году — ординарным академиком по кафедре прикладной математики. В 1902 году Ляпунов переехал в Санкт-Петербург. Теперь он получил возможность целиком посвятить себя науке и работе над задачей Чебышёва.

В 1908 году А. М. Ляпунов был командирован на четвертый Международный математический конгресс в Риме. Он планировал лично познакомиться с Анри Пуанкаре, с которым его связывали общие научные интересы и научная переписка, начавшаяся в последнем десятилетии XIX века. К сожалению, из-за неудачной организации конгресса этим планам не суждено было сбыться, и он с Пуанкаре так и не встретился.

В командировке Ляпунов познакомился с французскими математиками Эмилем Пикаром, Жаком Адамаром и Эдуаром Гурса, с итальянскими математиками Вито Вольтерра, Джузеппе Веронезе и Туллио Леви-Чивита и многими другими.

А. М. Ляпунов опубликовал четыре грандиозных мемуара, содержащие полное решение задачи Чебышёва. После трагической смерти Ляпунова осталась полностью завершенная обширная рукопись, содержащая развитие его результатов.

Работу, совершенную А. М. Ляпуновым за последние 15 лет его жизни, нельзя назвать иначе как подвигом.

Летом 1917 года Александр Михайлович уехал в Одессу в надежде, что южный климат окажет благотворное влияние на сильно пошатнувшееся от туберкулеза здоровье его жены. В Петроград, где осталась квартира со всем имуществом, они вернуться уже не смогли.

Последний год его жизни был трагическим. Александр Михайлович с большим трудом прочел курс лекций в Новороссийском университете из-за полного истощения, надвигающейся слепоты (катаракта) и все ухудшающегося состояния его жены.

Редкие известия, которые до них с братом Борисом Михайловичем доходили от родных и коллег, не радовали. Однажды они получили сообщение, что любимый дом, построенный отцом, в котором они провели детство, был вместе с их библиотекой сожжен крестьянами.

31 октября 1918 года наступила трагическая развязка. Наталия Рафаиловна скончалась, а Александр Михайлович выстрелил в себя и был доставлен в хирургическую клинику с огнестрельным ранением, где он 3 ноября 1918 года скончался, не приходя в сознание. В оставленной им записке он завещал похоронить себя в одной могиле с женой.

Работы Ляпунова получили широкое признание. Еще при жизни он был избран почетным членом Петербургского, Харьковского и Казанского университетов, иностранным членом Академии наук деи Линчеи в Риме, членом-корреспондентом Парижской академии наук, иностранным членом Математического кружка в Палермо, почетным членом Харьковского математического общества, действительным членом Московского математического общества и др. Сейчас теория устойчивости Ляпунова изучается во всех университетах мира. В 1969 году АН СССР учредила золотую медаль имени А. М. Ляпунова, а после распада СССР Российская академия наук в 1995 году учредила премию имени А. М. Ляпунова. В Москве и в Харькове есть улицы Ляпунова, названные так в честь Александра Михайловича.

А. Г. Хованский, Т. В. Белокриницкая

Литература

- [1] *Стеклов В. А.* Александр Михайлович Ляпунов. 1857–1918. Некролог (Речь, произнесенная академиком В. А. Стековым в публичном заседании Российской Академии Наук 3 мая 1919 г.) // Изв. РАН. VI сер. 1919. Т. 13, вып. 8–11. С. 367–388.
- [2] *Ляпунов Б. М.* Краткий очерк жизни и деятельности А. М. Ляпунова // Изв. АН СССР. VII сер. Отд. физ.-матем. наук. 1930, вып. 1. С. 1–24.
- [3] *Крылов А. Н.* Александр Михайлович Ляпунов. 1857–1918. Некролог. (Речь, произнесенная академиком А. Н. Крыловым в публичном заседа-

нии Российской Академии Наук 3 мая 1919 г.) // Изв. РАН. VI сер. 1919. Т. 13, вып. 8–11. С. 389–394.

- [4] Белокриницкая Т. В. Наша ветвь рода Ляпуновых. М.: МЦНМО, 2019. 52 с.
- [5] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения (диссертация и статьи). Л.-М.: ОНТИ, 1935. 2 изд. (Приложен некролог, написанный акад. В. А. Стекловым.)
- [6] Ляпунов А. М. Собрание сочинений. Т. 1–5. М.: АН СССР, 1954–1965.
- [7] Лукомская А. М. Александр Михайлович Ляпунов / Под ред. акад. В. И. Смирнова. М.-Л.: АН СССР, 1953. 268 с.

Теория устойчивости Ляпунова

Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918) — великий русский математик. Его классические работы по качественной теории дифференциальных уравнений, механике, математической физике и теории вероятностей принесли ему всемирное признание. Его теория устойчивости имеет бесчисленные применения в современных теоретических и прикладных исследованиях, ее влияние трудно переоценить.

Теорема Ляпунова об устойчивости

Напомним фундаментальную и очень элегантную теорему об устойчивости стационарного решения, в той или иной степени знакомую каждому изучавшему математику.

Движение точки $y \in \mathbb{R}^n$ со скоростью $F(y, t)$, зависящей от положения точки и от времени t , описывается дифференциальным уравнением

$$y' = F(y, t) \quad (1)$$

и положением y_0 точки y в начальный момент t_0 .

Решение $y_0(t)$ уравнения (1) с начальным данным $y_0(t_0) = y_0$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если решение $y_1(t)$ с любым достаточно близким начальным данным y_1 в любой момент времени мало отличается от $y_0(t)$ (то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $|y_1 - y_0| < \delta$, то $|y_1(t) - y_0(t)| < \varepsilon$ при $t > t_0$, где $y_1(t)$ обозначает решение с начальным данным $y_1(t_0) = y_1$).

Решение $y_0(t)$ называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и существует такое $\delta > 0$, что если $|y_1 - y_0| < \delta$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) - y_0(t) = 0$.

Ниже мы рассматриваем автономные дифференциальные уравнения $y' = F(y)$, для которых $F(0) = 0$, и обсуждаем вопрос об устойчивости стационарного решения $y_0(t) \equiv 0$ таких уравнений.

Пусть $\tilde{y}' = A\tilde{y}$ — линеаризация уравнения $y' = F(y)$ в неподвижной точке $y = 0$ (где A — дифференциал вектор-функции F в точке 0). Обозна-

чим через $\Lambda(A)$ максимум вещественных частей собственных чисел дифференциала A .

Теорема Ляпунова. Если $\Lambda(A) < 0$, то стационарное решение $y(t) \equiv 0$ уравнения $y' = F(y)$ асимптотически устойчиво. Если $\Lambda(A) > 0$, то стационарное решение неустойчиво по Ляпунову.

Эта теорема почти всегда решает вопрос об устойчивости стационарного решения: она не работает лишь в исключительном случае $\Lambda(A) = 0$.

Теорема Ляпунова разбивает пространства полиномов Тейлора первой степени вектор-функции F , для которой $F(0) = 0$, на три множества:

1) устойчивое множество, определенное условием $\Lambda(A) < 0$, для которого независимо от остальных коэффициентов ряда Тейлора вектор-функции F стационарное решение устойчиво;

2) неустойчивое множество, определенное условием $\Lambda(A) > 0$, для которого независимо от остальных коэффициентов ряда Тейлора вектор-функции F стационарное решение неустойчиво;

3) нейтральное множество, определенное условием $\Lambda(A) = 0$, для которого устойчивость стационарного решения зависит от остальных коэффициентов ряда Тейлора вектор функции F .

Разбиение пространства 1-струй вектор-функций F на устойчивые, неустойчивые и нейтральные множества является полуалгебраическим: определить знак числа $\Lambda(A)$ можно, вычисляя значения конечного числа специальных полиномов от коэффициентов матрицы дифференциала A .

Относительная простота этого разбиения совершенно не означает, что вопрос об устойчивости прост. Аналогичное разбиение пространства k -струй вектор-функции F на устойчивые, неустойчивые и нейтральные множества при больших k чрезвычайно сложно (и заведомо не является полуалгебраическим).

Поэтому очень общий и относительно простой критерий устойчивости, найденный Ляпуновым, следует рассматривать как замечательный результат и редкую удачу. В 1892 году он опубликовал свой фундаментальный труд об общей задаче устойчивости движения. Сейчас теория устойчивости Ляпунова стала классической и входит в обязательную программу по математике в университетах всего мира.

Функция Ляпунова

Ляпунов нашел удивительно простое и гибкое доказательство своего критерия устойчивости.

Функция $G(y)$ называется *функцией Ляпунова* для динамической системы $y' = F(y)$, если при движении точки y по траектории динамической системы эта функция не возрастает, т. е. если $\frac{dG(y(t))}{dt} = \langle \nabla G, F \rangle \leq 0$,

где ∇G — градиент функции G и $\langle v, w \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов v и w .

Для всякой константы C область $G \leq C$ инвариантна относительно динамической системы. Следовательно, если функция Ляпунова G имеет строгий локальный минимум в точке y_0 , то $y(t) \equiv y_0$ является устойчивой по Ляпунову стационарной траекторией динамической системы. Если же дополнительно в некритических точках функции G выполняется строгое неравенство $\langle \nabla G, F \rangle < 0$, то это стационарное решение асимптотически устойчиво.

По дифференциалу A , для которого $\Lambda(A) < 0$, легко построить положительно определенную квадратичную форму, которая в окрестности точки нуль является функцией Ляпунова рассматриваемой системы. Из существования такой квадратичной формы сразу вытекает устойчивость по Ляпунову стационарного решения. Остальные утверждения теоремы проверяются столь же просто.

Представим себе механическую систему, энергия которой сохраняется или уменьшается со временем (например, из-за трения). Энергия является функцией Ляпунова этой системы. Затухающие малые колебания такой механической системы около положения равновесия дают наглядное представление о динамике системы около устойчивого положения равновесия, описанного в теореме Ляпунова.

Задача Чебышёва

В этой части заметки использовалась статья В. А. Стеклова, ближайшего ученика А. М. Ляпунова, посвященная творчеству его учителя. Когда А. М. Ляпунов был начинающим математиком, он впервые занялся решением задачи П. Л. Чебышёва, которой занимался до последних дней жизни. Вот как сформулировал свою задачу Чебышёв.

Известно, что жидкая однородная масса, частицы которой притягиваются по закону Ньютона и которая вращается равномерно вокруг некоторой оси, может сохранять форму эллипсоида, пока угловая скорость ω не превосходит некоторого предела.

Для значений ω , больших этого предела, эллипсоидальные фигуры равновесия становятся невозможными.

Пусть ω — какое-либо значение угловой скорости, которой соответствует эллипсоид равновесия E . Дадим угловой скорости достаточно малое приращение ε . Спрашивается, существуют ли для угловой скорости $\omega + \varepsilon$ иные фигуры равновесия, отличные от эллипсоидальных, непрерывно изменяющиеся при таком же изменении ε и при $\varepsilon = 0$ совпадающие с эллипсоидом E ?

Типы фигур равновесия в задаче Чебышёва [1]

Этот чрезвычайно сложный вопрос, связанный с задачей о возможных формах небесных тел, интересовал многих ученых.

Первый частичный результат, связанный с задачей Чебышёва, Ляпунов получил в своей магистерской диссертации в 1885 году.

Великий французский математик А. Пуанкаре тоже занимался этой задачей. Он исследовал первое приближение и на основе этого приближения к решению (без строгого доказательства и без оценки погрешности) пришел к выводу о существовании бесконечного числа различных форм равновесия, близких к эллипсоидам. Он не знал, что Ляпунов пришел к вполне аналогичным выводам за три года до этого. Результаты Пуанкаре рассматривались современниками как грандиозное достижение.

В 1901 году А. М. Ляпунов был избран действительным членом Академии наук и смог целиком посвятить себя научной деятельности. После этого он опубликовал ряд мемуаров, посвященных задаче Чебышёва, которые даже с чисто внешней стороны производят сильное впечатление: их объем составляет более 1000 страниц большого формата. Используя совершенно оригинальный подход, Ляпунов построил последовательные приближения любого порядка, доказал сходимость соответствующих рядов и тем самым получил полное решение задачи.

После трагической смерти А. М. Ляпунова осталась законченная рукопись объемом в 489 страниц, содержащая глубокие обобщения его опубликованных ранее результатов.

А. Г. Хованский

Литература

- [1] *Холшевников К. В.* О фигурах равновесия небесных тел (к 150-летию А. М. Ляпунова // КИО. 2008. № 2. См. <https://cyberleninka.ru/article/n/o-figurah-ravnovesiya-nebesnyh-tel-k-150-letiyu-a-m-lyapunova>

Георгий Феодосьевич Вороной (1868–1908)

В математике встречаются личности, которые появляются внезапно, их одержимость по отношению к своей науке поразительна, их открытия будоражат научное сообщество, привлекая учеников и последователей, они горят ярко и, быстро сгорая, определяют новые направления научных исследований на долгие годы вперед. Георгий Феодосьевич Вороной (1868–1908) был в российской математике именно таким явлением: он опубликовал всего 12 работ, и все они стали классическими. Его работы в основном относятся к трем крупным областям: алгебраической теории чисел, теории квадратичных форм и аналитической теории чисел, причем в них гармонически сочетаются арифметические, геометрические и аналитические методы.

Георгий Вороной родился 16 апреля 1868 года в селе Журавка Полтавской губернии в семье педагогов Феодосия Яковлевича и Клеопатры Михайловны Вороных.

Первую свою статью Вороной опубликовал еще в школе. В 1884 году профессор Киевского университета В. П. Ермаков начал издавать «Журнал элементарной математики», в котором среди прочего предлагались темы для ученических работ по математике. На одну из тем, а именно «Разложение многочленов на множители, основанное на свойствах корней квадратных уравнений», была представлена единственная работа — Вороным. Работа понравилась Ермакову, и он опубликовал ее в своем журнале в 1885 году.

В этом же году Вороной закончил гимназию и поступил в Санкт-Петербургский университет. В университете он усердно посещал курсы лекций по чистой математике, которая все более увлекала его. В его дневнике мы читаем: «Лекции профессора Сохоцкого по специальному курсу выс-



шей алгебры я предпочитаю всем остальным». По окончании университета Вороной по представлению профессоров А. А. Маркова, А. Н. Коркина, Ю. В. Сохоцкого, К. А. Поссе был оставлен для подготовки к магистерским экзаменам (1889).

Главное, что меня занимает, есть ли у меня достаточно способностей (...) в моменты, когда ум охватывает идею, которая раньше, как мячик, ускользала, я забываю, что я существую (...) моими последними успехами я обязан привычке мыслить без пера и бумаги. Все предложения, доказанные мною, возникали совершенно независимо... Я надеюсь, что эта привычка мыслить таким образом сослужит мне службу

— записывает в дневнике Вороной в 1887 году.

После успешной защиты диссертации Вороной был назначен профессором математики Императорского Варшавского университета по кафедре чистой математики, где он и проработал с небольшим перерывом до конца жизни. Здесь он познакомился и подружился с профессором математики и механики Николаем Борисовичем Делоне и его семьей. Борис Николаевич Делоне любил рассказывать, как Вороной приходил к ним в гости и допоздна засиживался за беседой с его отцом. Влияние Вороного на творчество Делоне впоследствии оказалось очень значительным.

По словам Делоне, Вороной мыслил геометрически, но вынужден был переводить ход своих рассуждений на арифметический язык, так как руководители петербургской школы и особенно А. А. Марков, основной оппонент по диссертации, не приветствовали геометрический характер изложения; диссертацию, написанную на геометрическом языке, могли бы не пропустить. Докторская диссертация была блестяще защищена Вороным в 1897 году в Петербургском университете. Обе его диссертации — магистерская («О целых числах, зависящих от корня уравнения третьей степени», 1894) и докторская («Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей», 1896) — посвящены решению важнейших проблем и были увенчаны премией имени Буняковского (1896).

Геометризации алгоритма Вороного были посвящены работы Б. Н. Делоне, а также часть известной монографии Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеева «Теория иррациональностей третьей степени». Диссертация Вороного была напечатана только по-русски, отчасти поэтому ее результаты долго



Изображение Г. Ф. Вороного на украинской монете номиналом 2 гривны

оставались малоизвестными за границей и некоторые из них переоткрывались на протяжении десятилетий.

Статья Г. Ф. Вороного «Об одной задаче из теории асимптотических функций» (1903), посвященная третьему направлению — аналитической теории чисел, стимулировала развитие этой ветви исследований в современной математике. Еще одно открытие Г. Вороного — метод Вороного обобщенного суммирования рядов (1902). К сожалению, он не получил широкой известности и был переоткрыт в 1919 году шведским математиком Нильсом Эриком Нёрлундом (1885–1981).

Г. Ф. Вороной был женат на Ольге Митрофановне Крицкой, девушке из дворянской семьи, чье имение Богданы находилось поблизости от его Журавки. Ольга Крицкая была его большой любовью еще с юности. У них было шестеро детей. Кроме своей многочисленной семьи, Вороной заботился также о семье его рано овдовевшей сестры. Все дети Георгия Феодосьевича, кроме умершей в детстве одной из дочерей, получили хорошее образование и стали специалистами — врачами и учителями. Младший сын Юрий Георгиевич Вороной (1896–1961) стал известным хирургом, доктором медицинских наук, прославился тем, что в 1933 году сделал первую в мире пересадку почки человеку. Две старшие дочери Александра и Мария и старший сын Александр и их семьи стали жертвами сталинских репрессий.

Научное наследие Вороного собрано в трехтомном издании и прокомментировано известными математиками Б. А. Венковым, Б. Н. Делоне, Ю. В. Линником, Н. Г. Чудаковым и И. Р. Шафаревичем [2].

Преподавательская деятельность профессора Вороного проходила в Варшавском университете (1894–1906, 1908) и в Политехническом институте (1898–1906, Варшава; 1907–1908, Новочеркасск), его учениками были В. Серпинский, Т. Банахевич и другие.

К сожалению, Г. Ф. Вороной рано ушел из жизни. Он скончался в Варшаве в возрасте 40 лет 7 (20) ноября 1908 года от желчнокаменной болезни и похоронен в Журавке (Украина).

Н. В. Локоть

Литература

- [1] Делоне Б. Георгий Феодосьевич Вороной // Петербургская школа теории чисел. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1947. С. 197–201.
- [2] Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. Т. 1–3. Киев: АН УССР, 1952–1953.
- [3] Брайтцев И. Р. Г. Ф. Вороной (Некролог) // Сообщения Харьковского матем. общества. Вторая серия. 1910. Т. XI. № 6. С. 197–210.
- [4] Долбилин Н. П. Георгий Феодосьевич Вороной (1868–1908) // Чебышевский сб. 2018. Т. 19. № 3. С. 318–327.

Г. Ф. Вороной: от чисел к параллелоэдрам

Будучи студентом Петербургского университета, Георгий Феодосьевич Вороной сделал яркую работу о бернуллиевых числах (1890). Эта работа очень понравилась А. А. Маркову, а Вороной был оставлен при университете «для подготовки к получению профессорского звания» (аналог аспирантуры). Под руководством Маркова он написал магистерскую (кандидатскую) диссертацию «О целых алгебраических числах, зависящих от корня уравнения 3-й степени», посвященную проблеме нахождения базиса кольца целых чисел кубического поля (1894). В докторской диссертации «Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей» (1897) был построен исключительно эффективный алгоритм для нахождения основных единиц кубического поля. В этой работе Вороному удалось проникнуть в суть вопроса гораздо глубже, чем его знаменитым предшественникам Е. И. Золотареву, Г. Минковскому и др. Конструкция Вороного существенно обобщала на трехмерные решетки алгоритм непрерывных дробей, созданный для двумерных решеток.

Исследования Вороного по алгебраической теории чисел были отмечены премией Буняковского Санкт-Петербургской академии наук.

Пусть

$$S(n) = \tau(1) + \tau(2) + \dots + \tau(n),$$

где $\tau(k)$ — количество делителей числа k . В работе «Об одной задаче из теории асимптотических функций» Вороной получил существенный прогресс в задаче Дирихле о делителях, а именно, для функции $S(n)$ он нашел более точную асимптотику, чем Дирихле ранее. Эта важная работа явилась отправной точкой для исследований выдающихся математиков В. Серпинского (ученика Вороного) и И. М. Виноградова.

В конце 1890-х гг. под влиянием работ Минковского по геометрии чисел Вороной приступил к исследованиям по теории квадратичных форм $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j}^n a_{ij}x_ix_j$. В 1904 году на математическом конгрессе в Гейдельберге во время личной встречи с Вороным создатель геометрии чисел Герман Минковский проявил интерес к этим исследованиям.

В большом мемуаре «Свойства положительных совершенных квадратичных форм» (1908) Вороной дал алгоритм нахождения всех локально экстремальных положительных квадратичных форм от n переменных. Геометрический смысл этой задачи состоит в отыскания всех локально плотнейших *решетчатых* упаковок пространства $\mathbb{R}^n$ равными шарами.

Свой последний, наиболее глубокий мемуар «Исследования о примитивных параллелоэдрах» (опубликован посмертно в 1909 году) Вороной посвятил изучению многогранников особого вида. В 1885 г. великий кристаллограф Е. С. Федоров ввел понятие *параллелоэдра* как выпуклого многогранника, параллельными копиями которого, приложенными друг к другу по целым граням, можно заполнить все пространство без перекрытий. Легко видеть, что двумерный аналог параллелоэдра есть либо параллелограмм, либо центрально симметричный шестиугольник (см. рис. 1). Параллелепипед и правильная шестиугольная призма являются примерами трехмерных параллелоэдров. Федоров нашел все пять комбинаторных типов трехмерных параллелоэдров (см. рис. 2).

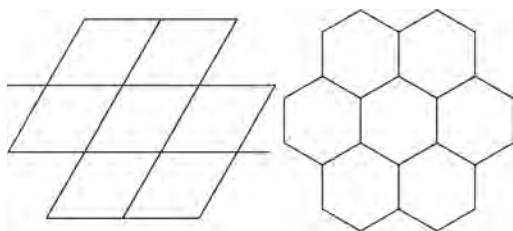


Рис. 1. Параллелоэдры на плоскости

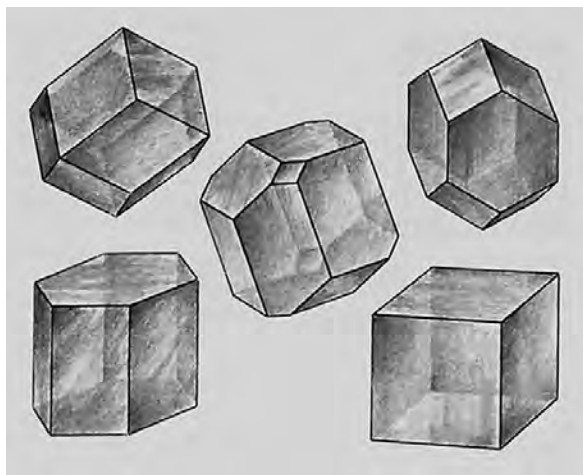


Рис. 2. Пять типов трехмерных параллелоэдров

Во второй половине 1890-х гг. Г. Минковский исследовал параллеледры и установил ряд их фундаментальных свойств. Именно на этом этапе Минковский открыл одну из самых замечательных теорем в теории выпуклых многогранников — о существовании и единственности выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями граней. Так как параллеледр замощает пространство параллельными копиями, каждая грань (в многомерном пространстве — гипергрань) имеет противоположную, равную и параллельную, грань. Отсюда и из своей общей теоремы о многогранниках Минковский вывел, что *параллеледр имеет центр симметрии (1) и все его грани (гиперграни в многомерном случае) также центрально симметричны (2)*. К этим двум условиям Б. Н. Делоне добавил еще одно: *проекция параллеледра вдоль ребра (грани коразмерности 2) на плоскость есть либо параллелограмм, либо центрально симметричный шестиугольник (3)*. Позднее выяснилось, что эти три условия не только необходимы, но и достаточны (Б. А. Венков, 1954).

Существует простой способ строить параллеледры. Для этого нужно взять решетку Λ целых точек относительно произвольного базиса (см. рис. 3) и для какой-либо точки $\lambda \in \Lambda$ построить ее *область Вороного*

$$V_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^d : |x\lambda| \leq |x\lambda'|, \forall \lambda' \in \Lambda\}.$$

Легко видеть, что область Вороного V_λ есть выпуклый многогранник, который является частным случаем параллеледра. Такие параллеледры называют сейчас *параллеледрами Вороного*.

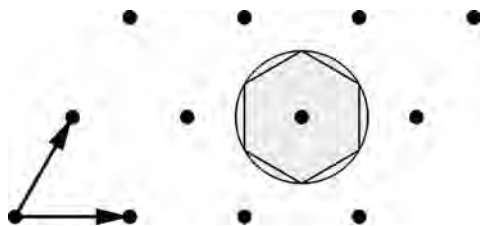


Рис. 3. Решетка и область Вороного

Геометрия параллеледра Вороного однозначно задается решеткой Λ и в конечном счете ее базисом. В свою очередь, базис в n -мерном евклидовом пространстве определяется $n(n+1)/2$ параметрами: длинами векторов и углами между ними. Однако не всякий параллеледр — это параллеледр Вороного. Так, например, параллеледр Вороного под действием аффинного преобразования переходит в многогранник, остающийся параллеледром, но уже не являющийся, вообще говоря, параллеледром Вороного. В случае плоскости параллеледры — это параллелограммы и

центрально симметричные шестиугольники, но параллелоэдрами Вороного будут только те, которые вписаны в окружность.

Вороной, развив геометрию положительных квадратичных форм, построил теорию n -мерных параллелоэдров Вороного и, в частности, предложил алгоритм нахождения для любого данного n всех комбинаторных типов n -мерных параллелоэдров Вороного.

А как быть с нахождением типов параллелоэдров, которые не являются параллелоэдрами Вороного? В своем последнем мемуаре Вороной рассмотрел *примитивные* параллелоэдры. Это такие параллелоэдры, что в каждой вершине разбиения n -мерного пространства сходится минимально возможное число, то есть $n + 1$, многогранников. Известно, что при $n = 2, 3$ примитивный параллелоэдр только один, при $n = 4$ их 3 из 52, а при $n = 5$ их 221 из 110244. С ростом n число примитивных параллелоэдров быстро растет и в то же время их доля в общем числе всех типов параллелоэдров падает. Вороной доказал, что *примитивный параллелоэдр (любой размерности) аффинно эквивалентен некоторому параллелоэдру Вороного*.

Доказательство опирается на две замечательные идеи Вороного, обе относительно подъема разбиения пространства на параболоид. Первая идея: разбиение Вороного для любого дискретного множества $X \subset \mathbb{R}^n$ (а не только для решетки) можно «поднять» на полиэдр, описанный около кругового параболоида $y = x_1^2 + \dots + x_n^2$ в пространстве $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^1$. Вороной назвал этот описанный полиэдр *женератрисой*. Женератриса проекти-

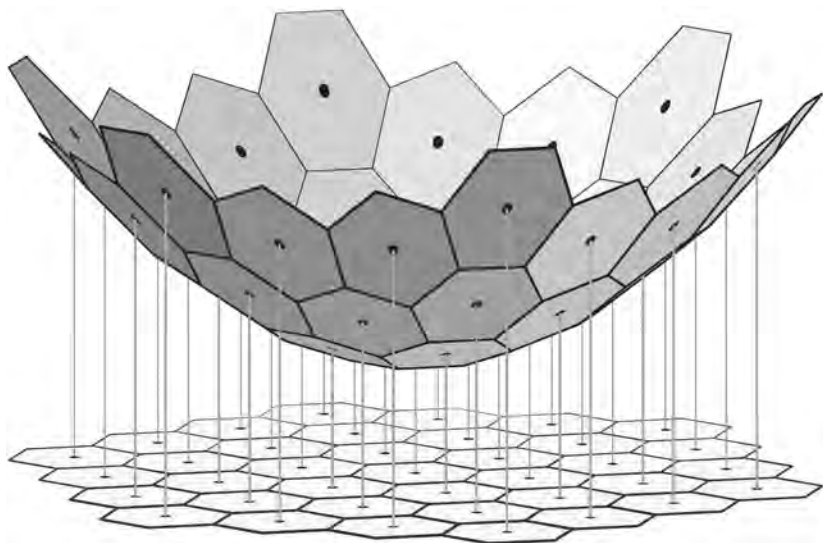


Рис. 4. Женератриса

руется в разбиение Вороного пространства $\mathbb{R}^n$ (см. рис. 4). При этом множество точек касания граней женератрисы проектируется в множество точек, для которых области Вороного являются проекциями соответствующих граней. Этот факт активно используется в вычислительной геометрии при исследовании диаграмм Вороного.

Труднореализуемой оказалась вторая идея: любое разбиение T пространства $\mathbb{R}^n$ на примитивные параллелоэдры можно поднять на полиэдр, описанный около некоторого *эллиптического* параболоида Π . Далее, если разбиение T поднято на полиэдр, описанный около параболоида Π , то подходящее аффинное преобразование φ , которое переводит эллиптический параболоид Π в круговой параболоид Π_V , одновременно переводит разбиение T на примитивные параллелоэдры в разбиение Вороного T_V , а примитивный параллелоэдр соответственно в параллелоэдр Вороного.

Этот фрагмент последнего сочинения Вороного, в котором доказывался аффинная эквивалентность примитивного параллелоэдра параллелоэдру Вороного, по мнению Б. Н. Делоне, является наиболее глубоким местом всего мемуара.

На пути к пониманию того, как устроены не только примитивные параллелоэдры, стоит с 1908 года проблема Вороного: доказать (или опровергнуть), что любой (а не только примитивный) параллелоэдр размерности n аффинно эквивалентен параллелоэдру Вороного. Сейчас, более века спустя, эта проблема положительно решена (помимо $n = 2, 3$) для $n = 4$ (Делоне, 1929) и $n = 5$ (А. Гарбер и А. Магазинов, 2019).

Автор благодарит Ярослава Кучериненко за создание рис. 4.

Н. П. Долбилин

Первые годы советского периода

Алексей Николаевич Крылов

(1863–1945)

А. Н. Крылов, будущий академик и генерал флота, родился в 1863 году в семье нижегородского помещика — отставного артиллерийского офицера. Среди родных семьи Крыловых — знаменитый физиолог И. М. Сеченов (1829–1905), офтальмолог В. П. Филатов (1875–1956) и один из крупнейших русских математиков академик А. М. Ляпунов (1857–1918). Высокоталантливая семья Ляпуновых, к которой принадлежала мать А. Н. Крылова, насчитывает за истекший век целую плеяду первоклассных ученых, композиторов, деятелей культуры. Когда Алексею Крылову было 10 лет, семья на несколько лет переехала в Марсель, где мальчик приобрел солидные познания во французском, а затем в Ригу, где он выучил немецкий и латынь. Крылов-старший считал очень важным для сына знание иностранных языков, которые следует учить методом погружения в новую языковую среду. В 15 лет Алексей поступил в Морское училище в Петербурге; одной из причин этого выбора, помимо старой военной традиции в семье, была его нелюбовь к древним языкам, которые не были обязательными для будущих морских офицеров (в отличие от студентов университетов). Однако солидное знание латыни, вынесенное из рижской гимназии, оказалось впоследствии очень полезным — оно позволило юноше читать труды Гаусса и Эйлера, а его перевод «Математических начал натуральной философии» Ньютона, выполненный уже в зрелом возрасте, стал классическим.

Юноша рано увлекся математикой и вопросами кораблестроения. После трех лет обучения в Морском училище он был произведен в мичманы. Его первая самостоятельная научная работа, опубликованная в 1887 году, была посвящена теории магнитной девиации корабельных компа-



сов, причем он опирался на трактат Гаусса о земном магнетизме и на оригинальные работы Фурье. В 1888–1890 гг. он продолжил обучение в Морской академии, после чего получил должность преподавателя в Морском училище, продолжая в то же время изучение математики в Петербургском университете, где он слушал лекции А. А. Маркова, А. Н. Коркина и Д. А. Граве. С преподаванием математики в Морском училище связано его новаторское для того времени использование методов приближенных вычислений. В то время студенты и инженеры-кораблестроители часто выполняли вручную громадные объемы вычислений с десятками десятичных знаков, не понимая при этом, что большая часть этих десятичных знаков была в действительности полностью бессмысленной при исходном уровне точности начальных данных. Простые замечания Крылова привели к колоссальному упрощению этих вычислений; они легли в основу его курса теории приближенных вычислений, который позже был опубликован несколько раз и постоянно расширялся и совершенствовался.

В 1895 году Крылов начал свои фундаментальные работы по теории качки корабля. В 1898 году его большой доклад о теории продольной качки был представлен в Лондоне Королевскому институту кораблестроения и получил золотую медаль этого знаменитого общества. Через много лет, в 1944 году, Королевский институт кораблестроения избрал А. Н. Крылова своим почетным членом. В своей работе Крылов вывел простые дифференциальные уравнения для 6 параметров (3 координаты центра масс и 3 угла Эйлера), определяющих положение корабля, следующего определенным курсом под заданным углом к направлению волнения. Эти дифференциальные уравнения были затем проинтегрированы методом последовательных приближений, что позволило явно вычислить силы, действующие на корабль, и определить связанные с ними напряжения в корпусе судна.

Другая важная тема, которой Крылов занимался на протяжении многих лет, — различные аспекты теории гироскопов, как в связи с задачами навигации (гирокомпасы), так и в связи с проблемами стабилизации судна при качке и корректировки артиллерийской стрельбы. Его работы по теории гироскопов составили позднее целый том в собрании его трудов. Как это характерно для работ Крылова, в этот том вошли как работы по общей теории гироскопов, так и многочисленные приложения, схемы практических вычислений и описание различных технических устройств, основанных на использовании гироскопов.

В начале века Крылов активно участвовал в разработке кораблестроительной программы русского флота, уделяя особое внимание концепции остойчивости, плавучести и живучести военных кораблей. Он указывал,

в частности, что даже если поврежденный корабль теряет плавучесть, его конструкция должна в максимальной возможной степени обеспечивать его устойчивость — корабль может затонуть, но не должен переворачиваться. Важность этой концепции (совершенно новой для того времени) драматическим образом подтвердилась во время русско-японской войны 1904–1905 гг., когда русский флот понес тяжелые потери. Тремя годами позже А. Н. Крылов был назначен на должность генерального инспектора кораблестроения. Это назначение пришлось на время больших изменений в мировом кораблестроении, связанных с изобретением тяжелых линейных кораблей класса дредноутов. Крылов активно участвовал в программе перевооружения российского флота накануне Первой мировой войны; он внес важный вклад в проектирование и строительство первых русских дредноутов.



В 1916 году Крылов был избран действительным членом Академии наук. После революции 1917 года он много сделал для того, чтобы сохранить Академию в новых исторических условиях. Вместе с академиком В. А. Стекловым он сыграл важнейшую роль в организации нового Физико-математического института, который он позднее, после смерти Стеклова, в течение ряда лет возглавлял вплоть до 1932 г., когда институт был разделен на два отдела — физический и математический, ставшие спустя 2 года, с переездом Академии наук в Москву, независимыми институтами. Он сохранял полную лояльность к новой власти, несмотря на то, что два его сына погибли во время гражданской войны, сражаясь на стороне

белых. В 1921 году он был послан советским правительством в Западную Европу для возобновления контактов с бывшими союзниками и восстановления русского флота, пострадавшего во время революции и гражданской войны. Он оставался за границей до 1927 года. В 1927 году его дочь вышла замуж за молодого советского физика П. Л. Капицу, будущего нобелевского лауреата, работавшего в то время в Кембридже в лаборатории Резерфорда. Многие из бывших коллег Крылова (например, выдающийся химик и военный инженер академик В. И. Ипатьев) после революции были вынуждены эмигрировать или подверглись репрессиям. Крылов избегал их судьбы и до конца жизни остался высокоуважаемым экспертом по вопросам кораблестроения. Во время Великой Отечественной войны он был эвакуирован в Казань вместе с большей частью сотрудников Академии наук, но успел вернуться в Ленинград и умер вскоре после окончания войны в возрасте 82 лет. Полное собрание его сочинений в 12 томах начало публиковаться еще при его жизни, в 1936 году, и завершилось уже после его смерти, в 1956 году. Его имя присвоено Морской инженерной академии в Ленинграде (ныне, после нескольких реорганизаций, она утратила это почетное наименование), в которой он много лет преподавал и которую в течение нескольких лет возглавлял после революции (1919–1920).

М. А. Семенов-Тянь-Шанский

Владимир Андреевич Стеклов

(1864–1926)

Математический институт им. В. А. Стеклова («стекловка») широко известен как главный математический центр Советского Союза, а затем и России. Создатель этого института, Владимир Андреевич Стеклов, сочетал в себе таланты прагматичного администратора и первоклассного математика. Днем он занимался административными делами, вечером спал несколько часов, а затем до 4-5 часов утра работал над научными проблемами.

Родился Владимир Андреевич Стеклов в 1864 году в семье преподавателя русской истории и еврейского языка в Нижегородской духовной семинарии, священника Андрея Ивановича Стеклова, и Екатерины Александровны, урожденной Добролюбовой¹. С детства интересовался естественными науками, вместе с дядей Иваном Стековым, священником, читал «Химию» Менделеева и производил многочисленные опыты в устроенном ими самими физическом кабинете. Стеклов, как и его родственники, обладал прекрасным баритоном, в молодости пел на вечеринках и праздниках и даже помышлял о оперной карьере, но страсть к математике взяла верх.

Обладая отличной памятью, Владимир в гимназии до 6-го класса учился без усердия. Отец Стеклова, желая его уязвить, как-то сказал: «Я думал, что ты только лентяй, а ты, по-видимому, просто неспособный». После этих слов Владимир за каникулы добросовестно прошел программу



¹ Ее брат, Николай Александрович Добролюбов (1836–1861), был известным литературным критиком. Семейные разговоры о покойном дяде и его убеждениях повлияли на мировоззрение Стеклова.

(греческий, латынь, русский, историю и т. д.) предыдущих пяти классов. Подобное повторилось и в университете: Владимир был отчислен с первого курса физико-математического факультета Московского университета (не ответив на вопрос «Какой самый долгий день в Москве?»), пробовал поступать на медицинский, но в итоге оказался в Харькове на физико-математическом факультете. Здесь уже он всерьез взялся за учебу². Стеклов организовывал кружки по математике и физике, после лекций самостоятельно читал книги до 8 часов в день.

В. А. Стеклов вел подробный дневник, но он до сих пор не опубликован, так что наиболее полной его биографией являются им же написанные около 1923 года «Воспоминания» [1]. В них он рассказывает, как в 1886 году, в 22 года, после неудачной влюбленности в свою троюродную сестру, он решил жить исключительно для науки. В это же время в Харьков переехал А. М. Ляпунов, и Стеклов сделался его учеником, а впоследствии и лучшим другом. В 1890 году Владимир Андреевич женится на Ольге Дракиной; у них родилась дочь Ольга, умершая в 1901 году от менингита.

В Харькове Стеклов активно участвует в общественной жизни, борется с университетским уставом 1884 года, существенно урезавшим автономию университетов. Однажды он даже был вызван на дуэль профессором-медиком, над чем лишь язвительно посмеялся. В 1904 году В. А. Стеклова избрали ректором университета, но он отказался от этой должности, взяв на себя лишь обязанности декана физико-математического факультета. Последний его год в Харькове, 1905, прошел бурно, со студенческими восстаниями и баррикадами. Стеклов выступал посредником между восставшими и прибывшими для подавления восстания войсками, предотвратив обострение ситуации.

В 1906 году Стеклов переезжает в Петербург, заняв ординатуру на кафедре математики, освободившуюся в связи с уходом А. А. Маркова на пенсию. Жалованье профессора было не таким большим, поэтому многие преподавали сразу в нескольких учебных заведениях, «растрачивая зря свои незаурядные силы и губя свои таланты», как выразился Стеклов, в пользу науки решительно отказавшийся от всякого совместительства. На Всемирном математическом конгрессе 1912 года в Кембридже он был вице-президентом, вместе с В. Вольтеррой и Ж. Адамаром.

Уже тогда Стеклов видел для России только два исхода — либо уничтожение монархии и последующая гражданская война, либо водворение грубейшего деспотизма. В первую очередь В. А. Стеклов был человеком науки и думал о ее нуждах, поэтому после революции 1917 года он вме-

² Впрочем, изредка позволял себе посещать оперу.



Академик Стеклов (второй слева) на праздновании двухсотлетия Академии наук. Ленинград, 1925 [6]

сте с Крыловым и другими стал сотрудничать с новой властью³, хлопотал об Академии наук, будучи ее вице-президентом с 1919 года. Стеклов добился постройки сейсмических станций по всей России и, среди прочего, создания в 1921 году Физико-математического института, который после смерти Стеклова стал носить его имя⁴.

В голодные годы гражданской войны Стеклов вместе с Горьким выхлопотали у Ленина и Луначарского особый ученый паек для членов Российской академии наук.

³ Можно утверждать, что Стеклов (вместе с А. Н. Крыловым, С. Ф. Ольденбургом и др.) спас Академию наук, так как многие большевики, пришедшие к власти, считали, что нужно создать новую академию на марксистских идеологических основаниях; Стеклову стоило больших усилий отстоять как само существование академии, так и ее финансирование. Например, новому правительству было совсем не ясно, стоит ли в условиях военного времени и голода тратить деньги на дрова для обогрева зоологических и анатомических музеев.

⁴ Изначально институт содержал отделения математики, физики, магнитологии и сейсмологии. В 1932 году институт было решено разделить на два: физический и математический; окончательное разделение произошло в 1934 г. В 1926 году Физико-математическому институту было присвоено имя его основателя В. А. Стеклова, которое впоследствии перешло к Математическому институту Академии наук СССР (МИАН им. В. А. Стеклова).

От недоедания и цинги в 1920 году умерла жена Владимира Андреевича Ольга. Оставшись совсем один, Стеклов с головой ушел в математику и нужды Академии наук⁵.

В. А. Стеклов участвовал в изучении Курской магнитной аномалии⁶. В 1925 году он серьезно простудился, но перенес болезнь на ногах, несколько не снижая своей активности. Из-за возникших осложнений Стеклов умер в 1926 году в Гаспре, куда приехал на лечение. Он похоронен рядом со своим дядей Н. А. Добролюбовым.

Что касается научных достижений Стеклова, мы лишь кратко опишем начало его творческого пути. А. М. Ляпунов поручил Стеклову разобраться с вопросом о движении бильярдного шара по шероховатой поверхности по работам Кориолиса. Выполнение задания должно было проверить не только знания Стеклова, но и его способность к самостоятельной работе. Стеклов блестяще справился с поставленной задачей, представил в феврале 1888 года свою работу и был по рекомендации Ляпунова оставлен при университете. Летом 1888 года, уже абсолютно независимо и самостоятельно, В. А. Стеклов изучал книгу Кирхгофа «Лекции по математической физике». Изучив весь имеющийся там материал о движении твердого тела в жидкости, Стеклов начал самостоятельно размышлять над задачей и нашел случай, не указанный Кирхгофом. Стеклов пишет: «Такого упоения от собственной научной работы, надо сказать, я затем никогда не испытывал. И тут первое ощущение оказывается наилучшим!» Ляпунов обрадовался успеху ученика, но прибавил, что, к сожалению, этот случай уже был открыт ранее Клебшем.

В 1893 году Стеклов защитил магистерскую работу «О движении твердого тела в жидкости», предъявив недостающий закон сохранения — первый интеграл в виде квадратичной формы от линейной и угловой скоростей твердого тела; в 1902 году он защитил докторскую диссертацию «Об-

⁵ В. А. Стеклов в 1923 году смог добиться принятия положения, согласно которому Российская академия наук стала главным распорядителем своего бюджета. Это положение действовало вплоть до 2013 года [4]. Как пишет В. И. Смирнов, «В. А. взял на себя работу как по административно-хозяйственной, так и по организационно-научной части в тот момент, когда, казалось, ничего нельзя сделать, все рассыпается. Но не в темпераменте В. А. было складывать руки в тяжелый момент. Чем затруднительнее положение, тем с большей энергией брался В. А. за дело. Он наладил печатание научных трудов и приобретение из-за границы книг и приборов, много поработал над восстановлением разоренной Сейсмической сети, организовал математический кабинет и затем Физико-математический институт» [2].

⁶ Крупнейшая магнитная аномалия в мире. В процессе работы Стеклов написал несколько научных статей об определении размеров и глубины залегания магнитного слоя по нескольким наблюдениям и по теории гравитационного вариометра Этвёша.

Sur le problème d'approximation ¹ des fonctions arbitraires
à l'aide ~~des~~ des polynômes de Tchebycheff.

Par W. Stekloff

(Présenté à l'Académie des Sciences le 12 mai 1926.)

1. Dans ma Note, présentée à l'Académie des Sciences de Russie le 20 janvier 1921, j'ai établi le théorème suivant:

Le polynôme de degré n

$$(1) \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^n A_k q_k(x), \quad A_k = \int_a^b p(x) f(x) q_k(x) dx,$$

où $q_k(x)$ ($k=0, 1, 2, \dots$) est une suite (orthogonale et normale) de polynômes de Tchebycheff correspondant à la fonction caractéristique

$$(2) \quad p(x) = (x-a)^\alpha (b-x)^\beta q(x),$$

Фрагмент рукописи В. А. Стеклова

щие методы решения основных задач математической физики». В 1908–1909 гг. Стеклов напечатал во Франции большой труд «Проблема движения жидкой несжимаемой массы эллипсоидальной формы, частицы которой притягиваются по закону Ньютона», тема которого была связана с проблемой формы небесных тел, которой занимался Ляпунов.

В. А. Стеклов занимался и классической задачей движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Решение задачи для случаев Эйлера и Лагранжа позволило построить теорию гироскопов, нашедшую широкое применение в технике, включая космическую навигацию. Еще один случай был найден С. В. Ковалевской. Затем исследователями рассматривались другие частные случаи, соответствовавшие специальному выбору начальных условий. Два таких случая обнаружил и Стеклов.

Полный (и весьма внушительный) перечень научных достижений Стеклова можно найти в обзорах [3, 4, 5].

Н. С. Калинин

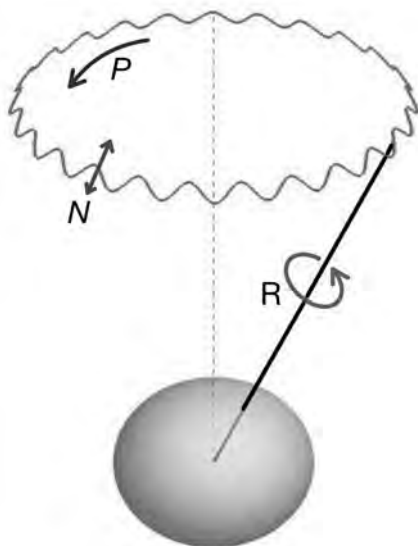
Литература

- [1] Стеклов В. А. Переписка с отечественными математиками. Воспоминания. Л.: Наука, 1991. (Научное наследство. Т. 17).
- [2] Смирнов В. И. Владимир Андреевич Стеклов (к 20-летию со дня смерти) // Успехи матем. наук. 1946. Т. 1, вып. 3–4. С. 17–22.

- [3] *Смирнов В. И.* Памяти В. А. Стеклова // Труды МИАН СССР. 1964. Т. 73. С. 5–13.
- [4] *Козлов В. В., Павлов В. П., Сергеев А. Г.* Владимир Андреевич Стеклов (1863–1926) // Труды МИАН. 2015. Т. 289. С. 7–16.
- [5] *Kuznetsov N., Kulczycki T., Kwásnicki V., Nazarov A., Poborchi S., Polterovich I., Siudeja B.* The Legacy of Vladimir Andreevich Steklov // Notices AMS. 2014. V. 61, № 1. P. 9–22.
- [6] ЦГАКФФД СПб Гр27123.

Волчок Стеклова

Большинство людей знает о самых существенных движениях Земли: Земля совершает оборот вокруг своей оси за 24 часа и обращается вокруг Солнца примерно за 365 дней. Но направление земной оси не фиксировано: подобно вращающемуся волчку или гироскопу, земная ось вычерчивает окружность. Это явление известно как прецессия и имеет период примерно 26 000 лет. Кроме того, ось слегка колеблется около этой окружности — подвергается нутации с периодом 18,6 года. Прецессия и нутация определяются взаимодействием Земли с гравитационным полем Солнца и Луны.



Прецессия и нутация

Другой вид нутации был предсказан в 1765 году Леонардом Эйлером, который предположил, что осесимметричное твердое тело с неодинаковыми экваториальным и полярным моментом инерции будет свободно

колебаться при вращении. Используя уравнения вращения свободного твердого тела вокруг его центра масс

$$\dot{M} = M \times \omega, \quad M = I \omega,$$

где I — тензор инерции Земли, а M, ω — угловой момент и вектор угловой скорости, Эйлер предсказал, что свободная нутация Земли должна иметь период около 10 месяцев. Однако согласно наблюдениям С. К. Чандлера, впервые опубликованным в 1891 году, действительный период составляет около 14 месяцев. В 1892 году С. Ньюкомб объяснил расхождение между теоретическим и экспериментальными периодами, рассмотрев Землю как тело с полостями, заполненными жидкостью.

В 1908 году Стеклов [1] получил уравнения движения твердого эллипсоида с полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, находящейся в равномерном вихревом движении. В своих рассуждениях он использовал общие методы, развитые им для решения краевых задач математической физики, и свел задачу о движении жидкости к решению проблемы Неймана, которую он называл главной задачей гидродинамики.

В работе [2] Стеклов рассмотрел частный случай уравнений движения, полученных им в [1], для случая, когда центр эллипсоида неподвижен, а жидкость совершает движение Дирихле. Стеклов доказал, что эта система уравнений имеет трехмерные инвариантные многообразия, заполненные периодическими орбитами, за исключением множества нулевой лебеговой меры. Для этого он использовал метод последнего множителя Якоби и метод малых параметров Пуанкаре. Затем он рассмотрел известные и новые случаи, интегрируемые в квадратурах, и оценил период прецессии Чандлера, толщину земной коры и т. д.

Более общее описание прецессии и нутации Земли приведено Пуанкаре в работе [4], продолжающей цикл его работ, посвященных построению уравнений типа Эйлера на конечных и бесконечных алгебрах Ли. Согласно Пуанкаре и Арнольду, обобщение уравнений Эйлера на произвольную алгебру Ли имеет вид

$$\dot{M} = \text{ad}_{\omega(M)}^* M,$$

где вектор M принадлежит пространству $\mathfrak{g}^*$, сопряженному алгебре Ли $\mathfrak{g}$, линейный самосопряженный оператор

$$\omega(M) : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$$

определяет гамильтониан $H = (M, \omega)/2$, а отображение $\text{ad}_\xi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ — линейное отображение $\eta \rightarrow [\xi, \eta]$, где $[\xi, \eta]$ означает скобки Ли.

В подходящем базисе уравнения Эйлера на $\mathfrak{so}^*(4) \cong \mathfrak{so}^*(3) \oplus \mathfrak{so}^*(3)$ имеют вид

$$\dot{s} = s \times \frac{\partial H}{\partial s}, \quad \dot{t} = t \times \frac{\partial H}{\partial t}, \quad s, t \in \mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{so}^*(3).$$

В случае Стеклова гамильтониан $H = b_1 H_1 + b_2 H_2$ является линейной комбинацией функций

$$H_1 = (As, As) - 2(s, A^\vee t), \\ H_2 = (A^\vee t, A^\vee t) - 2 \det A(s, At),$$

заданных симметричной матрицей $A = I^{-1}$, обратной к тензору инерции Земли I , и ее присоединенной матрицей $A^\vee$. Матрица A имеет диагональный вид $A = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$ в так называемой сопутствующей системе отсчета, которая жестко связана с эллипсоидом и оси которой совпадают с главными осями инерции. В [2] можно также найти объяснение физического смысла параметров $b_{1,2}$.

Два гамильтониана Стеклова $H_{1,2}$ определяют бигамильтоново векторное поле

$$\dot{x} = \{x, H_1\} = \{x, H_2\}', \\ \{H_1, H_2\} = \{H_1, H_2\}' = 0,$$

где $\{.,.\}$ — скобки Ли—Пуассона на $\mathfrak{so}^*(4)$, ассоциированные со скобками Ли $[.,.]$:

$$\{s_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk} s_k, \quad \{s_i, t_j\} = 0, \\ \{t_i, t_j\} = \varepsilon_{ijk} t_k,$$

а $\{.,.\}'$ — линейные скобки Пуассона, согласованные с $\{.,.\}$:

$$\{s_i, s_j\}' = 0, \quad \{s_i, t_j\}' = \frac{\varepsilon_{ijk}}{2a_i a_k} s_k, \\ \{t_i, t_j\}' = \frac{\varepsilon_{ijk}}{2} \left(\frac{s_k}{a_i a_j} - a_k^{-2} t_k \right).$$

Линейное отображение

$$f: \mathfrak{so}^*(4) \cong \mathfrak{so}^*(3) \oplus \mathfrak{so}^*(3) \rightarrow e^*(3) \cong \mathfrak{so}^*(3) \ltimes \mathbb{R}^3,$$

заданное формулами

$$f: p = s, \quad M = (A^2 - \text{tr} A^2)s - 2A^\vee t,$$

отвечает согласованным линейным скобкам Пуассона на $\mathfrak{so}^*(4)$ и $e^*(3)$:

скобки Ли—Пуассона	$\{.,.\}_{\mathfrak{so}^*(4)}$	$\{.,.\}_{e^*(3)},$
$f:$	$\nwarrow \nearrow$	$\nwarrow \nearrow$
вторые линейные скобки	$\{.,.\}'_{\mathfrak{so}^*(4)}$	$\{.,.\}'_{e^*(3)}.$

На этой диаграмме скобки Ли—Пуассона на алгебре $e^*(3)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\{M_i, M_j\} &= \varepsilon_{ijk} M_k, & \{M_i, p_j\} &= \varepsilon_{ijk} p_k, \\ \{p_i, p_j\} &= 0.\end{aligned}$$

Данное отображение Пуассона f отождествляет волчок Стеклова на $\mathfrak{so}^*(4)$ с волчком Стеклова—Ляпунова на $e^*(3)$, описывающим движение твердого тела в жидкости [3]. Обе эти системы допускают разделение переменных в терминах квадратур Абеля, построенных в обоих случаях Ф. Кёттером [5]. Соответствующие 2×2 -матрицы Лакса могут быть использованы для доказательства стандартной конечнозонной линеаризации динамики на якобиане гиперэллиптической кривой рода 2.

Существуют также нелинейные пуассоновские отображения, связывающие волчки Стеклова и Стеклова—Ляпунова с потенциальным движением по двумерной сфере:

$$\begin{aligned}p &= \alpha J - \beta(x \times J), & M &= J - Cz, \\ z_i &= \sum_{j,k=1}^3 |\varepsilon_{ijk}| x_j (x \times p)_k,\end{aligned}$$

где α, β и C удовлетворяют некоторым алгебраическим уравнениям, а векторы x и J — координаты на кокасательном пучке T^*S^2 к единичной сфере S^2 . Соответствующее уравнение Гамильтона—Якоби допускает разделение переменных в эллиптических или сфероконических координатах, которые после обратного пуассоновского отображения совпадают с разделенными переменными, построенными Кёттером [5].

Для волчка Стеклова известно также, что гамильтонианы $H_{1,2}$ коммутируют относительно некоторых нелинейных скобок Пуассона на $\mathfrak{so}^*(4)$, имеющих общее симплектическое слоение со скобками Ли—Пуассона $\{.,.\}$. Собственные значения соответствующего оператора рекурсии на симплектических листах общего положения алгебры $\mathfrak{so}^*(4)$ называются переменными Дарбу—Нейенхёйса и являются разделенными переменными для волчка Стеклова, отличными от переменных Кёттера. Дивизор этих разделенных переменных связан с дивизором переменных Кёттера с помощью арифметики дивизоров на гиперэллиптической кривой рода 2.

В итоге можно сказать, что Стеклов исследовал конкретную систему дифференциальных уравнений на алгебрах Ли—Пуассона $e^*(3)$ и $\mathfrak{so}^*(4)$, связанную с конкретной моделью Земли. Он не использовал соответствующие симметрии Ли и скобки Пуассона, лагранжев или гамильтонов формализм; он лишь явно построил интегралы движения и решения

дифференциальных уравнений, аналогичные постоянным вращениям; проанализировал влияние вязкости на динамику; нашел период прецессии Чандлера, толщину земной коры и т. д. Теперь у нас другая модель Земли, но тем не менее мы можем опираться на работу Стеклова, решая различные чисто математические задачи. Например, можно классифицировать согласованные полиномиальные и рациональные скобки Пуассона на $\mathfrak{so}^*(4)$, используя арифметику дивизоров и изогении алгебраических кривых, рассматривать скобки Дирака, ассоциированные с другими типами вязких жидкостей в электрическом и магнитном поле, изучать различные деформации волчка Стеклова на алгебрах Ли $\mathfrak{so}^*(4)$ и $\mathfrak{so}^*(3) \oplus \mathfrak{so}^*(3) \oplus \dots \oplus \mathfrak{so}^*(3)$ и т. д.

А. В. Цыганов

перевод Б. Р. Френкина

Литература

- [1] *Stekloff V. A.* Sur la théorie des tourbillons // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. Sér. 2. 1908. T. 10. P. 271–334.
- [2] *Stekloff V. A.* Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. Sér. 3. 1909. T. 1. P. 145–256.
- [3] *Стеклов В. А.* О движении твердого тела в жидкости. Харьков: тип. А. Дарре, 1893.
- [4] *Poincaré H.* Sur la precession des corps déformables // Bull. Astr. 1910. V. 27. P. 321–356.
- [5] *Kötter F.* Die von Steklow und Liapunow entdeckten integralen Falle der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit // Sitzungsberichte der königlichen preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1900. Bd. 6. S. 79–87.

Борис Григорьевич Галёркин (1871–1945)

Борис Григорьевич Галёркин, академик АН СССР, инженер-генерал-лейтенант — один из основоположников метода конечных элементов. Он развил многие направления в строительной механике и теории упругости. Исследования Б. Г. Галёркина, несмотря на сложность математического аппарата, доходили до совершенно конкретных результатов в форме, доступной для непосредственного приложения в практике.

Борис Григорьевич Галёркин (при рождении Берка Гиршевич Галёркин) родился 20 февраля 1871 года в бедной еврейской ремесленной семье (родители — Гирш-Шлейма Зорахович и Перл-Бася Шевелевна Галёркины) в деревне Прудок в Лепельском уезде Витебской губернии Российской империи. Начальное образование будущего академика состояло всего из двух классов — больше бедные родители, которые занимались кустарным промыслом, позволить себе не могли. Уже с 12 лет Борис вынужден был подрабатывать перепиской бумаг в сиротском суде. В Полоцке — самом древнем городе Белоруссии — он окончил реальное училище. В возрасте 22 лет Борис Григорьевич сдал экстерном экзамен в Минске, дававший право на поступление в высшую школу. Об этом эпизоде А. П. Филин — автор монографии «Очерки об ученых-механиках» — узнал в 1971 году в троллейбусе от родственника Бориса Григорьевича, который принимал участие в юбилейной конференции, посвященной 100-летию Б. Г. Галёркина. По словам Филина, «Отец Б. Г. Галёркина был крайних еврейских националистических взглядов. Он запрещал сыну изучать русский язык, и сын это делал тайком от отца, а затем сдал курс гимназии экстерном». В Петербург Бо-



рис Григорьевич приехал в 1893 году и в том же году поступил на механическое отделение Санкт-Петербургского технологического института.

Петербургский технологический институт он окончил в 1899 году. Его научным руководителем был профессор Виктор Львович Кирпичев — известный специалист по сопротивлению материалов и прочности конструкций.

Борис Григорьевич начал работать на Харьковском заводе Русского паровозостроительного и механического общества. В 1903 году он стал инженером на строящейся линии Китайско-Восточной железной дороги, через полгода — заведующим техотделом Северного механического и котельного завода в Санкт-Петербурге.

Еще в студенческие годы Борис Галёркин оказался вовлеченным в политическую жизнь, вошел в социал-демократический кружок. В год окончания института (1899) он стал членом РСДРП, а в 1906 году — членом Петербургского комитета РСДРП (во фракции большевиков Галёркин не состоял). Во время революции 1905 года он как член бюро Союза инженеров был арестован и содержался 35 дней в тюрьме. В начале 1906 года Галёркин активно участвует в организации российского профсоюза металлистов. 23 июля (5 августа) 1906 года полиция окружила дом номер 13 на Алексеевской улице и задержала почти всех участников заседания Петербургского комитета РСДРП. Петербургская судебная палата 13 (26) марта 1907 года приговорила Б. Г. Галёркина к полутора годам заключения. Этот срок он отбывал в тюрьме «Кресты».



Тюрьма «Кресты»

В заключении он написал первую свою научную работу «Теория продольного изгиба и применение ее к расчету конструкций» объемом 130 страниц (опубликовано в 1909 году). Эта работа вошла в ряд классических работ по строительной механике.

В 1913–15 гг. Галёркин выполнил проект стального фахверка — металлического здания котельной электростанции в Петербурге, первого в России крупного металлического здания, выдерживающего значительные нагрузки. Это здание по смелости и оригинальности принятых решений было одним из самых выдающихся сооружений Европы. В 2001 году дом включен Комитетом по государственному контролю, использованию и охране памятников истории и культуры Санкт-Петербурга в «Перечень вновь выявленных объектов, представляющих историческую, научную, художественную или иную культурную ценность». Позднее Борис Григорьевич был консультантом при проектировании и строительстве всех крупнейших гидростанций.

В эти же годы он публикует несколько важных научных работ: «Стержни и пластинки», «Прямоугольные пластинки», «Изгиб и сжатие», «К расчету тонких свободно опертых плит» и др. Расчет строительных конструкций потребовал четкой постановки задач, разработки новых математических методов определения напряженного состояния конструкции, ее прочности и устойчивости.

В 1915 году Б. Г. Галёркин опубликовал статью, где предложил приближенный метод решения дифференциальных уравнений, который оказал большое влияние на развитие теории уравнений в частных производных. В настоящее время метод Бубнова—Галёркина служит основой алгоритмов для решения большого числа задач в области математической физики, механики, термодинамики, электродинамики и др.

С 1909 года Б. Г. Галёркин преподает курс строительной механики на механическом отделении в Императорском Санкт-Петербургском политехническом институте, основанном 19 февраля 1899 года. В том же 1909 году Борис Григорьевич отправился за границу для осмотра интересующих его сооружений. Последующие четыре летних периода до начала войны он использовал для поездок в Европу с научными целями. Галёркин побывал в Германии, Австрии, Швейцарии, Бельгии и Швеции. Отметим, что он владел тремя языками: английским, французским и немецким.

В 1924–1929 гг. Б. Г. Галёркин преподавал также в Ленинградском государственном университете и Институте инженеров путей сообщения. В январе 1928 года он был избран членом-корреспондентом АН СССР, а в 1935 году он стал академиком.

С 1931 по 1941 год Б. Г. Галёркин являлся сотрудником Научно-исследовательского института гидротехники (НИИГ).

В 1934 году Б. Г. Галёркин получил две ученые степени: доктора технических наук и доктора математики, а также звание заслуженного деятеля науки и техники РСФСР. Он был признанным авторитетом в среде инженеров-проектировщиков. Его приглашали в качестве консультанта при проектировании и строительстве ряда крупных сооружений. В апреле 1936 года постановлением Совнаркома Борис Григорьевич был назначен председателем комиссии Совета строительства по экспертизе эскизного проекта стального каркаса с конструкциями стен и перекрытий Дворца советов в Москве, который стал бы в случае постройки самым помпезным зданием на планете, высотой 495 метров со шпилем.



Проект Дворца советов в Москве

Фундамент здания был готов к 1939 году, но в 1941 году строительство Дворца Советов было отложено.

Борис Григорьевич был одним из создателей (в 1939 году) и первым директором Института механики АН СССР, а также главным редактором журнала «Прикладная математика и механика». В 1939 году он возглавил кафедру строительной механики Военного инженерно-технического университета (ВИТУ) в Ленинграде, получил звание инженер-генерал-лейтенанта.

Б. Г. Галёркин умер в Москве в 1945 году и был похоронен на академическом участке Литераторских мостков Волковского кладбища Санкт-Петербурга.

И. И. Демидова

Литература

- [1] Крылов А. Н., Беляев Н. М., Кондыба Н. А. Академик Б. Г. Галёркин (к 70-летию со дня рождения) // Вестник АН СССР. 1941, № 4. С. 91–94.
- [2] Филин А. П. Очерки об ученых-механиках. М.: Издательский дом Стратегия. 2007. 784 с.
- [3] Демидова И. И. Борис Григорьевич Галёркин // Математический Петербург. История, наука, достопримечательности. СПб.: Образовательные проекты, 2018. С. 200.
- [4] Галеркин Б. Г. Собрание сочинений. Т. 1, 2. М.: АН СССР, 1952–1953.

Метод Галёркина

Теория уравнений в частных производных берет начало в XIX веке, когда математики стали изучать следующую задачу: найти такую функцию $u(x, y)$, что

$$\Delta u + f = 0 \text{ в области } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \Omega, \quad (1)$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой (или кусочно-гладкой) границей $\partial\Omega$. Было неизвестно, как решать такое уравнение и как его решение может зависеть от исходных данных. Само существование решения этой задачи также было предметом активных исследований.

Подобные вопросы возникали и в связи с другими задачами вида $\mathcal{L}u = f$, где $\mathcal{L}$ — дифференциальный оператор, отображающий банахово пространство X в банахово пространство Y . В то время дифференциальные уравнения изучались в рамках классического анализа и в качестве X рассматривалось пространство непрерывных функций с достаточным количеством производных, понимаемых в классическом смысле. Было установлено, что некоторые задачи имеют эквивалентные формулировки в терминах вариационного исчисления. Например, задача (1) может быть сформулирована как задача минимизации функционала энергии

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - fu \right) dx.$$

В 1909 году В. Ритц предложил искать приближенные решения вариационных проблем в виде

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i w_i(x), \quad (2)$$

где N — натуральное число, а координатные функции w_i принадлежат пространству X и составляют линейно независимую систему. Метод основан на определении весовых коэффициентов α_i , минимизирующих функционал энергии.

Однако не все уравнения можно связать с простым вариационным функционалом. Нужно было создать единообразный и математически

обоснованный подход, применимый к дифференциальным уравнениям всех типов. Было интуитивно ясно, что нужна аппроксимация v , минимизирующая невязку $\mathcal{L}v - f$, но каков должен быть критерий минимума и как выбрать множество координатных функций? Не найдя правильное решение этих вопросов, невозможно доказать, что u_N сходятся к точному решению u .

Идея метода Галёркина [3] состоит в том, чтобы найти α_i из следующего условия: *невязка уравнения $\mathcal{L}v - f$ должна быть ортогональна конечномерному подпространству пробных функций, причем условия ортогональности задаются в интегральной форме.*

После интегрирования по частям в задаче (1) этот принцип принимает вид

$$\int_{\Omega} \nabla u_N \cdot \nabla w_i \, dx = \int_{\Omega} f w_i \, dx \quad \forall w_i \in X_N, \quad (3)$$

где X_N содержит функции вида (2), которые обращаются в нуль на $\partial\Omega$. В более общих случаях множества координатных и пробных функций могут не совпадать, а условие ортогональности задается в форме

$$\langle \mathcal{L}u_N - f, \eta \rangle = 0 \quad \forall \eta \in Y_M, \quad (4)$$

где u_N определяется условием (1), а Y_M ($\dim Y_M = M$) — множество пробных функций $Y_M \subset Y'$; здесь Y' — пространство, сопряженное к Y , а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает сопряжение соответствующих пространств. Разумеется, следует выбрать такие Y_M и X_N , чтобы система (4) имела решение.

Этот подход очень гибок. Если X и Y — гильбертовы пространства, причем пространства X_N и Y_M совпадают, то его называют методом Бубнова—Галёркина. Это название использовалось С. Г. Михлиным [6], который первым доказал сходимости метода. Если интегральные соотношения ортогональности возникают из уравнения Эйлера, порожденного



Слева направо: В. Ритц, Б. Галёркин, И. Бубнов, Г. Петров

квадратичным функционалом, то мы имеем метод Ритца—Галёркина. Более общие схемы (такие, как (4)) изучались Г. Петровым, который распространил этот метод также на проблему собственных значений.

В конце XIX века оставался открытым вопрос о том, как гарантировать существование решений краевой задачи для уравнения в частных производных. В частности, интенсивно обсуждалась разрешимость простейшей задачи (1) в классическом смысле, т. е. решение искали в пространстве $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Ответ был получен лишь после многих лет исследований, полностью перестроивших теорию уравнений в частных производных. Новая концепция *обобщенных* (слабых) решений возникла из работ многих выдающихся математиков, таких как Д. Гильберт, А. Пуанкаре, С. Л. Соболев, Р. Курант, О. А. Ладыженская и многие другие.

Метод Галёркина способствовал повороту исследований этой проблемы в правильную сторону. Это можно заметить на примере интегрального соотношения (3). Действительно, устремим N к $+\infty$. Если мы ожидаем, что u_N будет стремиться (в каком-то смысле) к точному решению, то естественно рассмотреть предельный вид равенства (3), где X_N заменено бесконечномерным функциональным пространством $\tilde{X}$ (которое является замыканием совокупности конечномерных пространств $\{X_N\}$ в некотором подходящем смысле). Этот путь ведет к *обобщенной постановке* задачи (1): найти функцию $u \in \tilde{X}$, удовлетворяющую граничным условиям и такую, что

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx \quad \forall w \in \tilde{X}. \quad (5)$$

Теперь мы знаем, что если Ω — область с гладкой (или липшицевой) границей, то соответствующее замыкание порождает пространство Соболева $\dot{H}^1(\Omega)$ (состоящее из функций, которые равны нулю на границе и имеют обобщенные производные первого порядка, интегрируемые с квадратом).

Определение решений дифференциальных уравнений в терминах интегральных тождеств ныне общепринято (систематическое изложение соответствующей теории можно найти в [5]). Если $\tilde{X}$ — рефлексивное банахово пространство, то из (3) следует неравенство $\|\nabla u_N\|_{\Omega} \leq C \|f\|_{\Omega}$ с константой, не зависящей от N . Поэтому существует подпоследовательность в $\{u_N\}$, слабо сходящаяся к функции $u \in X$. Используя этот факт, нетрудно показать, что u_N сходится к функции u , которая удовлетворяет условию (5). Аналогичные рассуждения применимы и к другим краевым задачам. Таким образом, галёркинские приближения дают метод для доказательства существования слабых решений.

Э. Хопф применил эту идею для доказательства существования слабых решений у нестационарных уравнений Навье–Стокса. Подобный подход часто применяли О. А. Ладыженская и Н. Н. Уралцева [4, 5] для различных уравнений в частных производных.

Также необходимо отметить, что понятие обобщенного (слабого) решения и метод Галёркина тесно связаны с *принципом возможных перемещений* в механике, восходящим к Ж. Л. Даламберу, который применял его к механической системе твердых тел, и Ж.Л. Лагранжу, который обобщил его на случай сплошных сред. Однако уровень развития математики в то время был недостаточен, чтобы корректно определить понятие «множества виртуальных смещений» и правильно поставить соответствующие краевые задачи.

В 1943 году Р. Курант [2] предложил вариант метода Галёркина с локальными носителями базисных функций, который порождает геометрически гибкие численные схемы с разреженными разрешающими матрицами. Позже он был назван *методом конечных элементов*. Его анализ опирается на тот факт, что *галёркинская аппроксимация является ортогональной проекцией точного решения, и на проекционную теорему*. Последняя составляет основу теории погрешностей и утверждает, что расстояние между u и u_N определяется расстоянием между u и соответствующим конечномерным пространством X_N .

В том или ином виде большинство современных вычислительных методов используют идею метода Галёркина. Например, разрывный метод Галёркина использует (3) (или (4)) с разрывными пробными функциями. Многие другие методы (спектральный, конечных объемов, так называемый «слабый» метод Галёркина, изогеометрический (isogeometric), бессеточный (meshless)) можно рассматривать как усовершенствованные варианты первоначального метода Галёркина. Необходимость практической реализации метода Галёркина в научно-технических задачах стимулировала исследования по численной линейной алгебре и привела к созданию многосеточных (multigrid) итеративных методов и методов разбиения областей (domain decomposition).

Многосеточные методы позволяют решать очень большие системы линейных уравнений, используя несколько различных шкал дискретизации для оптимизации вычислений. Метод разбиения областей берет начало от метода Шварца. В этом методе области со сложной геометрией разбиваются на простые подобласти (например, прямоугольники или выпуклые многоугольники), для которых соответствующие множества базисных функций можно построить простыми методами.

В статье [7] читатель найдет дальнейшую информацию о развитии метода Галёркина, а также полезные ссылки. Книга [8] содержит система-

тическое изложение метода Галёркина применительно к эллиптическим, параболическим и гиперболическим уравнениям. О разрывном методе Галёркина см. [1] и указанную там литературу.

С. И. Репин

перевод Б. Р. Френкина

Литература

- [1] *Arnold D., Brezzi F., Cockburn B., Marini L.* Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems // *SIAM J. Numer. Anal.* 2002. V. 39, № 5. P. 1749–1779.
- [2] *Courant R.* Variational methods for some problems of equilibrium and vibration // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1943. V. 49. P. 1–23.
- [3] *Галёркин Б. Г.* Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок // *Вестник инженеров.* 1915. Т. 1. С. 897–908.
- [4] *Ladyzhenskaya O. A.* Solution “in the large” of the nonstationary boundary value problem for the Navier—Stokes system with two space variables // *Comm. Pure Appl. Math.* 1959. V. 12, № 3. P. 427–433.
- [5] *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
- [6] *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
- [7] *Repin S.* One Hundred Years of the Galerkin Method // *Computational Methods and Applied Mathematics.* 2017. V. 17, № 3. P. 351–357.
- [8] *Zeidler E.* Nonlinear functional analysis and its applications. II. A: Linear monotone operators. New York: Springer-Verlag, 1990.

Николай Максимович Гюнтер (1871–1941)

Николай Максимович Гюнтер, профессор и член-корреспондент АН СССР (1925), один из создателей ленинградской школы математической физики, президент Ленинградского физико-математического общества, всю свою жизнь посвятил науке и преподаванию в вузах Петербурга–Петрограда–Ленинграда.

Занимаясь дифференциальными уравнениями в частных производных, Николай Максимович одним из первых осознал важность рассмотрения решений, гладкость которых меньше требуемой уравнением в буквальном смысле. Эта ключевая для математики XX века идея привела его к созданию теории функций от областей. И хотя эта теория нынче позабыта, идеи Гюнтера послужили основой для теории обобщенных функций, построенной его учеником С. Л. Соболевым и Л. Шварцем.

Матерью Н. М. Гюнтера была крестьянка Тверской губернии Мария Петровна Андреева, он родился в Петербурге и был крещен в Казанском соборе. Он носил фамилию Иванов, и только в 1893 году, уже будучи студентом, был усыновлен своим отцом, незадолго до этого окрещенным в православную веру купцом Максом Ефимовичем Гюнтером.

В Петербургском университете учителями Гюнтера были П. Л. Чебышёв, А. Н. Коркин и А. А. Марков, который рекомендовал Гюнтера для подготовки к профессорской деятельности. В 1915 году Гюнтер защитил докторскую диссертацию и с 1916 года стал ординарным профессором по кафедре чистой математики. Помимо университета Гюнтер преподавал во многих других вузах города, при этом в изданных им многочисленных курсах лекций почти нет стереотипных, учтена специфика каждого вуза.



Второе десятилетие XX века в математической жизни Петербурга характеризуется значительным интересом физиков к новым идеям математики, составившим инструментарий развивающихся новых разделов физики. Общение с П. Эренфестом, Ю. А. Крутковым, позже с В. А. Фокм, А. А. Фридманом, Я. Д. Тамаркиным, братьями А. С. и Я. С. Безиковичами, В. И. Смирновым, С. Н. Бернштейном, С. П. Тимошенко, в научном кружке которых отчетливо формулировался запрос на развитие математической физики, побудило Гюнтера обратиться к этой проблематике. В 1920-х годах он начал вести в университете специальный семинар, посвященный приложениям теории функций к вопросам гидродинамики, теории потенциала и математической физики. Тогда же под руководством В. А. Стеклова и Н. М. Гюнтера создается Ленинградское физико-математическое общество, в которое вошли А. А. Фридман, А. С. Безикович, Б. Н. Делоне, Я. В. Успенский, Я. Д. Тамаркин, В. И. Смирнов, Г. М. Фихтенгольц, В. А. Фок, Ю. А. Крутков. Заседания проходили дважды в месяц, на них выступали и физики, и математики, ярко оформились темы астрономии, механики, теории потенциала, математической физики, гидродинамики, теории относительности, метеорологии, теории упругости.

Математические общества в Санкт-Петербурге существовали и ранее. Первое Математическое общество возникло в Петербурге в 1890 году, его председателями были В. Г. Имшенецкий, затем Ю. В. Сохоцкий. Заседания Общества проходили ежемесячно в Академии наук, затем, с 1895 года, — в университете. Общество насчитывало 89 членов. В 1920-е годы из математического кружка, вдохновляемого А. В. Васильевым, возникает Физико-математическое общество. В 1925 году председателем Общества зарегистрирован Гюнтер, и общество записано по его адресу.

1929 год стал «годом великого перелома на всех фронтах социалистического строительства». Сталин провозгласил мобилизационный курс развития и призвал к повороту в идеологической борьбе на всех фронтах, в том числе и научном. Лояльность ставилась выше компетентности. Группа «левых» математиков-марксистов начала борьбу с «гюнтеровщиной». В 1929 году предстояли выборы в Академию наук, и по значимости своих работ Гюнтер был достойным кандидатом в действительные академики. Но помимо Н. М. Гюнтера на эту же позицию претендовал И. М. Виноградов, работавший в области теории чисел.

Эту ситуацию умело использовали как часть проводимой политики по низвержению старой интеллигенции. В декабре 1928 г. образовалась математическая секция при Научном обществе марксистов в составе пяти человек. В 1931 году они называли себя Обществом математиков-материалистов при Ленинградском отделении Коммунистической академии.

С 1931 г. в книге «Весь Ленинград» впервые зарегистрировано «Общество марксистов-материалистов в ведении института философии». Функции: «сплочение математиков-материалистов Ленинградской обл. на научной работе по вопросам математического исследования, преподавания математики и приложение ее к технике, на основе диалект. материализма и революц. практики хозяйственного социалистического строительства».

Физико-математическому обществу было предъявлено обвинение в идеализме, «замкнутом профессорском характере», оторванности от задач социалистического строительства, лозунге «наука для науки», т. е. в «гюнтеровщине». В общесоюзном масштабе целью таких атак было подчинение Академии наук, университетов и научной интеллигенции руководящей роли партии, в масштабе Ленинграда — снижение роли старых профессоров, разгром Общества, при этом реализовывались карьерные амбиции «левых» фигурантов. И. М. Виноградов, чье участие в интриге подтверждено, стал академиком, минуя позицию члена-корреспондента. Коллеги, близкие Гюнтеру по духу, — А. С. Безикович, Я. Д. Тамаркин, Я. В. Успенский, Я. А. Шохат — к этому времени покинули Россию. Уже не было в живых В. А. Стеклова и А. А. Фридмана. Г. М. Фихтенгольц и Б. Н. Делоне перешли в Общество математиков-марксистов. 10 марта 1931 года осуждающую Гюнтера «Декларацию инициативной группы по реорганизации Ленинградского физико-математического общества» подписали академик И. М. Виноградов, профессора и научные работники Б. Н. Делоне, Л. В. Канторович, Г. М. Фихтенгольц и другие.

В тот же день Гюнтер был вынужден написать письмо в редакцию газеты «Ленинградский университет»:

Прочитав декларацию Общества математиков-материалистов, я считаю необходимым выступить с нижеследующим заявлением. Жизнь нашей страны столь быстро идет вперед, что многим приходится задумываться над своей прежней деятельностью и производить серьезную ее переоценку. Со своей стороны, я еще год тому назад увидел, что мною допущены существенные ошибки. Главной своей ошибкой я считаю, что в бытность мою председателем Физико-математического общества я не смог установить связи его деятельности с нуждами социалистического строительства, так что Общество фактически оставалось на почве старого лозунга «наука для науки». (...) Сознав год тому назад свою непригодность к занятию руководящих постов, я еще в декабре 1929 года говорил ректору университета о своем желании отказаться от кафедры в университете, что мною и исполнено; тогда же в январе я просил правление Общества освободить меня от председательствования и согласился остаться только временно до приведения в порядок финансовых дел Общества; своим педагогическим опытом и научной деятельностью однако я рассчитываю и впредь быть полезным. Н. Гюнтер.



Проф. Гюнтер беседует со студентами-отличниками (4.Ш.41. Фотохроника ТАСС. ЦГАКФД СПб)



Н. М. Гюнтер и С. Л. Соболев



Н. М. Гюнтер и его жена в президиуме юбилейного заседания в ЛГУ, посвященного Н. М. Гюнтеру. 1941 г.

В 1930 году Гюнтер ушел с поста председателя Общества, а в 1931 году по совету В. И. Смирнова оно было добровольно распущено. Общество математиков-материалистов, несмотря на поддержку Коммунистической академии, через два года прекратило свое существование. Н. М. Гюнтер был вынужден оставить заведование кафедрой, но остался профессором. До последнего года жизни он продолжал читать лекции.

Годы с 1932 по 1934 стали самыми продуктивными в его научной деятельности. Он опубликовал две большие монографии: по интегралам Стильтеса и по теории потенциала. С 1939 года он возобновил заведование кафедрой, в 1941 году получил звание заслуженного деятеля науки. Многолетний педагогический труд Гюнтера воплотился в 47 изданных курсах лекций, а также в «Сборнике задач по высшей математике», тринадцатое издание которого вышло в 2003 году. Огромное число математиков и инженеров считают его своим учителем.

Г. И. Синкевич

Литература

- [1] Бабич В. М. К истории открытия обобщенных функций // Математика XX века. Взгляд из Петербурга / Под ред. А. М. Вершика. М.: МЦНМО, 2010. С. 5–7.

- [2] Маркуш И. И. К вопросу о создании Петербургской–Ленинградской школы математической физики В. А. Стеклова // История и методология естественных наук. Вып. XVI. Математика, механика. М.: МГУ, 1974. С. 141–153.
- [3] На ленинградском математическом фронте. Сборник документов Общества математиков-материалистов при ЛОКА. М.-Л.: ГСЭИ, 1931. 44 с.
- [4] Смирнов В. И., Соболев С. Л. Николай Максимович Гюнтер. Биографический очерк. Список научных трудов // Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Под ред. акад. В. И. Смирнова и проф. Х. Л. Смолицкого. М.: Гостехиздат, 1953. С. 392–415.
- [5] Синкевич Г. И. Николай Максимович Гюнтер (1871–1941) // Математика в высшем образовании. 2019. Т. 17. С. 123–146.

Сергей Натанович Бернштейн (1880–1968)

В магистерской диссертации С. Н. Бернштейном было изложено частичное решение 19-й проблемы Гильберта. В докторской диссертации «О наилучшем приближении непрерывных функций посредством много-членов данной степени» был заложен фундамент новой области математики — конструктивной теории функций, одним из основателей которой математический мир по праву считает С. Н. Бернштейна.

С. Н. Бернштейн — автор более 200 научных публикаций, большинство его работ вошло в прижизненное собрание сочинений, подготовленное под его собственной редакцией.

Сергей Натанович Бернштейн родился в Одессе в семье Н. О. Бернштейна, доктора медицины, приват-доцента Новороссийского университета. В семье было еще двое детей — брат, в будущем известный психиатр, и сестра, которая училась в Париже, стала крупным микробиологом и работала до глубокой старости в институте Пастера. Математикой Сергей заинтересовался еще в старших классах Ришельевской гимназии и самостоятельно изучил аналитическую геометрию, основы высшей алгебры и математического анализа. Образование он завершил в Париже, за три года окончив четырехгодичный курс в Сорбонне и за два года — полный курс Парижской высшей электротехнической школы, получив диплом инженера-электрика. В поисках проблем для самостоятельных исследований С. Бернштейн переехал в Гёттинген для участия в семинаре Д. Гильберта, предложившего молодому коллеге заняться 19-й проблемой. Ее частичное решение Бернштейн защитил в качестве докторской диссертации пе-



ред комиссией, состоявшей из Ж. Адамара, Э. Пикара и А. Пуанкаре (Сорбонна, 1904). Диссертация начиналась словами: «Кажется, все математики и физики наших дней согласны, что область приложения математики не имеет других границ, кроме границ самого знания». Окончательное решение 19-й проблемы было получено Эннио де Джорджи в 1956 году¹.

После возвращения в Россию Бернштейн три года прожил в Петербурге, преподавая математику в частных средних школах и на Петербургских высших женских политехнических курсах, затем уехал в Харьков, где преподавал на Высших женских курсах и в университете, в 1929 году организовал и возглавил Научно-исследовательский математический институт. С 1924 года член-корреспондент, с 1929 года — академик АН СССР.

На съезде советских математиков в 1930 году в Харькове возникла конфронтация старой профессуры и новых советских ученых. Чтобы добиться участия зарубежных ученых (Ж. Адамара, А. Данжуа и др.), Бернштейн получил у наркома образования Украины Н. А. Скрыпника гарантии, что на съезде не будет сделано никаких политических заявлений. Тем не менее в ходе съезда заведующий кафедрой алгебры МГУ О. Ю. Шмидт предложил послать приветствие XVI съезду ВКП(б). Бернштейн категорически возражал, его поддержали Н. М. Гюнтер, Д. Ф. Егоров и другие. В результате компромисса было принято приветствие от партийной части съезда. После этого в Харькове прошли собрания, на которых Бернштейна осуждали как «идеалиста», «попутчика» и даже «монархиста» (слова будущего ректора Харьковского университета Я. С. Блудова). Выступать заставляли всех, лишь единицы находили мужество отказываться. В результате этих преследований Бернштейн уезжает в 1933 году в Ленинград.

В 1941 году С. Н. Бернштейн вместе с другими академиками был эвакуирован, а после войны в Ленинград не вернулся, жил в Москве, работал в Математическом институте АН им. В. А. Стеклова до конца жизни, в 1947–1957 годах заведовал там отделом конструктивной теории функций, а также до весны 1947 года читал лекции и вел научный семинар по конструктивной теории функций в МГУ.

Широкую известность получило пособие С. Н. Бернштейна для высшей школы «Теория вероятностей» (Харьков, литографированное издание, 1911), переиздававшееся несколько раз, и книга «Современное состояние теории вероятностей» (М.-Л., 1933).

В 1942 году под руководством С. Н. Бернштейна было разработано по-

¹ Работа Де Джорджи была важнейшим, прорывным шагом в решении 19-й проблемы Гильберта, а работы О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой завершили исследование 19-й и 20-й проблем для уравнений 2-го порядка, см. [6]. — *Прим. ред.*

собою для определения местонахождения кораблей по радиопеленгам, применение которого в практике вождения кораблей позволяло примерно в 10 раз ускорить штурманские расчеты. Штаб авиации дальнего действия, давая высокую оценку работе математиков, отметил, что ни в одной стране мира не были известны таблицы, равные этим по своей простоте и оригинальности.

С. Н. Бернштейн получил признание не только как математик и педагог, но и как историк науки, ее популяризатор, рецензент и переводчик. Особо следует отметить вышедшую под его редакцией книгу «Научное наследие П. Л. Чебышёва».

Заслуги С. Н. Бернштейна высоко оценены мировым научным сообществом: он был членом Парижской академии наук (третий россиянин после Петра I и П. Л. Чебышёва) и многих зарубежных математических обществ, имел многочисленные научные награды в СССР.

По воспоминаниям современников, Сергей Натанович был очень отзывчивым, мягким и доброжелательным человеком, всецело погруженным в науку, и при этом глубоко порядочным, честным и принципиальным. В Москве, будучи включенным в комиссию президиума АН СССР по «делу академика Лузина» (1936), С. Н. Бернштейн одним из очень немногих открыто встал на его защиту. А его вмешательство в судьбу члена-корреспондента АН СССР Николая Сергеевича Кошлякова, арестованного по сфабрикованному НКВД «делу Союза старой русской интеллигенции» и осужденного на 10 лет заключения в лагере, привело к тому, что условия жизни Кошлякова в лагере кардинально изменились: ему было установлено усиленное питание и для работы выдана бумага. Кроме того, одна из его научных статей, написанная в лагере и чудом попавшая в Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР, усилиями И. М. Виноградова и С. Н. Бернштейна была напечатана (под редакцией Ю. В. Линника и под псевдонимом Н. С. Сергеев, 1949).



Кстати, именно принципиальность академика Бернштейна помешала появлению в свет пятого издания его университетского учебника по теории вероятностей. В предыдущем четвертом издании среди множества примеров был приведен и обоснован один из основных законов генети-

ки — закон Менделя о наследовании признаков. Но после объявления генетики лженаукой на печально известной сессии ВАСХНИЛ (1948) Бернштейну было предложено в пятом издании его учебника эти примеры, связанные с законом Менделя и вообще теорией наследственности, исключить, однако Сергей Натанович категорически отказался это сделать.

Сергей Натанович Бернштейн умер 26 октября 1968 года в Москве, похоронен на Новодевичьем кладбище.

Н. В. Локоть

Литература

- [1] Александров П. С., Ахиезер Н. И., Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Сергей Натанович Бернштейн (некролог) // Успехи матем. наук. 1969. Т. 24, вып. 3. С. 211–218.
- [2] Члены Российской академии наук в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН. К 75-летию юбилею МИАН. Биографический словарь-справочник. Под общей редакцией академика В. В. Козлова. / Авторы-составители: Э. П. Зимин, С. В. Кисляков, Г. С. Монахтина, В. П. Павлов. М.: Янус-К, 2009.
- [3] Виденский В. С. Академик Сергей Натанович Бернштейн (к 120-летию со дня рождения) // Вестник молодых ученых. Прикладная математика и механика. 2000. № 2. С. 2–11.
- [4] Bernstein S. Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du seconde ordre // Math. Ann. 1904. Bd. 59. S. 20–76.
- [5] Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. В 4 т. М.: Изд-во АН СССР, 1951–1964.
- [6] Серегин Г. А., Уральцева Н. Н. Ольга Александровна Ладыженская (к 80-летию со дня рождения) // Успехи матем. наук. 2003. Т. 58, вып. 2. С. 181–206.

Неравенство Бернштейна в теории приближений

Неравенство

$$\|P^{(m)}\|_{[-1,1]} \leq T_n^{(m)}(1) \cdot \|P\|_{[-1,1]}$$

для любого алгебраического полинома P степени не более n с комплексными коэффициентами было впервые доказано Владимиром Андреевичем Марковым в 1892 году. Здесь T_n обозначает полином Чебышёва степени n , определенный формулой $T_n(\cos \theta) := \cos(n\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, а $\|f\|_A$ обозначает супремум-норму комплекснозначной функции f , заданной на A . В. А. Марков был братом более известного математика Андрея Андреевича Маркова, который доказал приведенное неравенство для $m = 1$ в 1889 году, отвечая на вопрос Д. И. Менделеева. Сергей Натанович Бернштейн предложил более короткое вариационное доказательство неравенства В. А. Маркова в 1938 году. Отметим, что $T_n'(1) = n^2$. На рис. 1 изображен график полинома T_{12} на $[-1, 1]$, поясняющий, почему значение $T_n'(1)$ велико.

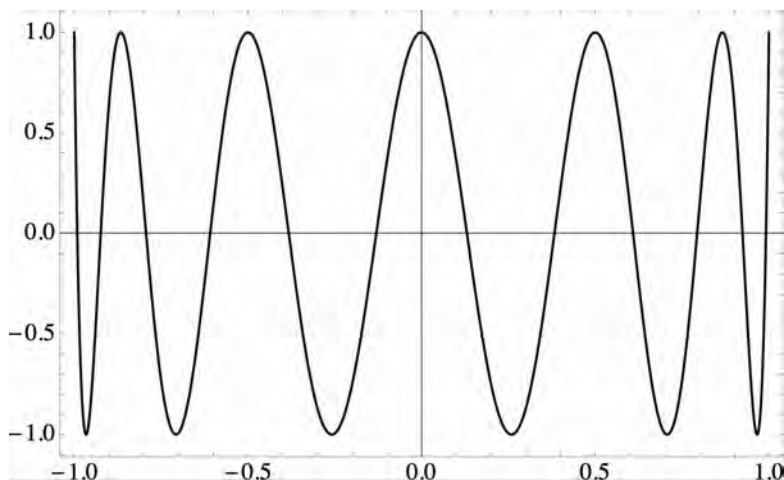


Рис. 1

Наиболее простое из известных доказательств неравенства Маркова для старших производных принадлежит Даффину и Шефферу [6], которые также предложили различные обобщения этого результата.

Неравенство

$$|P'(y)| \leq \frac{n}{\sqrt{1-y^2}} \|P\|_{[-1,1]}, \quad y \in (-1, 1),$$

справедливо для любого алгебраического полинома P степени не более n с комплексными коэффициентами и известно как неравенство Бернштейна. Имеются различные аналоги двух приведенных неравенств, в которых интервалы, супремум-нормы и семейство функций соответственно заменяются на более общие множества, нормы (или другие метрики) и семейства функций. Эти неравенства называются неравенствами типа Маркова и Бернштейна. Если норма в обеих частях неравенства одна и та же, то говорят о неравенстве типа Маркова, в противном случае — о неравенстве типа Бернштейна (это терминологическое различие не вполне стандартно). Неравенства типа Маркова и Бернштейна известны для различных областей комплексной плоскости и n -мерного евклидова пространства, для различных норм, включая L_p -нормы с весом, и для многих классов функций, таких как полиномы с различными ограничениями, рациональные функции, экспоненциальные суммы с n слагаемыми и др. Неравенства типа Маркова и Бернштейна представляют самостоятельный интерес, а также играют фундаментальную роль в теории аппроксимации.

Неравенство

$$\|T'\|_{\mathbb{R}} \leq n \|T\|_{\mathbb{R}}$$

для всех тригонометрических полиномов T степени не более n также называется неравенством Бернштейна. Оно было доказано С. Н. Бернштейном в 1912 году с константой $2n$ вместо n , но Валле-Пуссен нашел ошибку в доказательстве. Пол Неваи подробно исследовал раннюю историю неравенства Бернштейна. В своей новой книге [14] он пишет:

Таким образом, имеется печатное свидетельство того, что в 1914 году, перед тем как разразилась Первая мировая война, мощная группа венгерских математиков дала по меньшей мере пять независимых доказательств неравенства Бернштейна с константой n : по одному доказательству предложили Фейер и Ф. Рисс, а М. Рисс — три, а возможно и больше.

Точное неравенство, возможно, впервые появилось в статье Марселя Рисса [16]. Его остроумное доказательство, основанное на подсчете нулей, можно найти во многих книгах, в которых идет речь о теории аппроксимации. Для вещественных тригонометрических полиномов это

доказательство выглядит следующим образом. Пусть T — вещественный тригонометрический полином степени не более n , причем $\|T\|_{\mathbb{R}} < 1$ и $T'(t_0) > n$. Положим $Q_\alpha(t) := \cos(nt - \alpha)$ и выберем $\alpha \in \mathbb{R}$ так, что $Q_\alpha(t_0) = T(t_0)$ и $Q'_\alpha(t_0) > 0$. Заметим, что $T'(t_0) > Q'_\alpha(t_0)$ и, следовательно, $T - Q_\alpha$ — вещественный тригонометрический полином степени не более n , имеющий по меньшей мере $2n + 2$ различных вещественных нуля на периоде. Поэтому $T - Q_\alpha$ должен тождественно равняться 0, что противоречит условию $T'(t_0) > n$. Это доказательство проиллюстрировано на рис. 2.

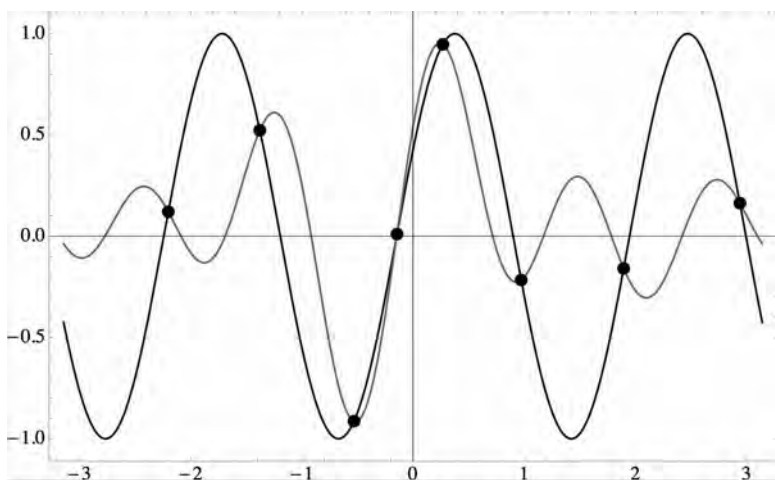


Рис. 2

В книгах неравенство Маркова для первой производной получается комбинированием неравенства Бернштейна и неравенства Рисса—Шура

$$\|P\|_{[-1,1]} \leqslant (n+1)\|P(x)(1-x^2)^{1/2}\|_{[-1,1]}$$

для любого алгебраического полинома P степени не более n с вещественными коэффициентами. Неваи [13] заметил, что неравенство Бернштейна для вещественных тригонометрических полиномов и приведенное выше неравенство Рисса—Шура эквивалентны в том смысле, что каждое из них может быть выведено из другого с помощью коротких элементарных рассуждений.

С. Н. Бернштейн использовал свое неравенство для получения обратных теорем аппроксимации, а некоторые другие обратные теоремы аппроксимации могут быть получены с помощью простых модификаций его метода. Именно поэтому неравенства типа Бернштейна и Маркова играют фундаментальную роль в теории аппроксимации. О прямых и

обратных теоремах аппроксимации и связанных с ними вопросах можно прочесть во многих книгах по теории аппроксимации, в том числе [9], [4] и [10].

Пусть $\mathcal{T}_n$ — класс всех вещественных тригонометрических полиномов степени не более n . Пусть $\mathbb{T} := \mathbb{R} \pmod{2\pi}$. Для $f \in C(\mathbb{T})$ положим

$$E_n(f) := \inf \{ \|T - f\|_{\mathbb{T}} : T \in \mathcal{T}_n \}.$$

Пример так называемой прямой теоремы аппроксимации заключается в следующем. Если функция f на $\mathbb{T}$ дифференцируема m раз и $f^{(m)} \in \text{Lip}_\alpha$ для некоторого $\alpha \in (0, 1]$, то существует такая константа C , не зависящая от n , что $E_n(f) \leq Cn^{-(m+\alpha)}$ для всех n . Доказательство см., например, в [9].

Обратная теорема к приведенному результату может быть сформулирована следующим образом. Если $m \geq 1$ — целое число, $\alpha \in (0, 1)$, $f \in C(\mathbb{T})$ и существует такая константа $C > 0$, не зависящая от n , что $E_n(f) \leq Cn^{-(m+\alpha)}$ для каждого n , то функция f на $\mathbb{T}$ непрерывно дифференцируема m раз и $f^{(m)} \in \text{Lip}_\alpha$.

Тождество

$$T'(\theta) = \sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^{\nu+1} \lambda_\nu T(\theta + \theta_\nu), \quad \text{где } \lambda_\nu := \frac{1}{4n \sin^2(\theta_\nu/2)}, \quad \theta_\nu := \frac{2\nu-1}{2n} \pi,$$

для всех комплексных тригонометрических полиномов T степени не более n было установлено М. Риссом [16] и называется интерполяционной формулой Рисса. Полагая здесь $T(\theta) := \sin(n\theta)$ и выбирая точку $\theta = 0$, получаем, что $\sum_{\nu=1}^{2n} \lambda_\nu = n$. Это тождество может быть использовано не только для доказательства неравенства Бернштейна, но и для получения его L_p -версии для всех $p \geq 1$. А именно, комбинируя неравенство треугольника и неравенство Гёльдера с интерполяционной формулой Рисса, а затем интегрируя обе части, получим

$$\int_0^{2\pi} |T'(\theta)|^p d\theta \leq n^p \int_0^{2\pi} |T(\theta)|^p d\theta$$

для всех комплексных тригонометрических полиномов T степени не более n . Это неравенство Бернштейна было обобщено на случай произвольного $p > 0$ Арестовым [1]. Этой работе предшествовала статья Мате и Неваи [11], где для всех p , $0 < p < 1$, был получен множитель Бернштейна $11^{1/p}n$. Короткое и элегантное доказательство результата Арестова, принадлежащее Голичеку и Лоренцу, приведено в книге [4]. О теореме

Арестова см. также в [7]. Для вещественных тригонометрических полиномов T верно неравенство Бернштейна—Сегё

$$T'(\theta)^2 + n^2 T(\theta)^2 \leq n^2 \|T\|_{\mathbb{R}}^2, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Существуют также различные обобщения этого неравенства. Имеется неравенство Бернштейна на открытом (или замкнутом) единичном круге D , или, что эквивалентно, на единичной окружности S комплексной плоскости. Оно утверждает, что

$$\|P'\|_D \leq n \|P\|_D$$

для любого алгебраического полинома P степени не более n с комплексными коэффициентами. Пол Эрдёш предположил, что

$$\|P'\|_D \leq \frac{n}{2} \|P\|_D$$

для любого алгебраического полинома P степени не более n с комплексными коэффициентами, не имеющего нулей в открытом круге D . Питер Лакс (Peter Lax) доказал это утверждение в 1944 году.

Для Эрдёша неравенства типа Маркова и Бернштейна были интересны сами по себе, и он изучал, что происходит, когда класс полиномов каким-то образом ограничен. С. Н. Бернштейн отметил, что неравенство Маркова для монотонных алгебраических полиномов не может быть улучшено по сравнению с общим случаем. Он доказал, что если n нечетно, то

$$\sup_P \frac{\|P'\|_{[-1,1]}}{\|P\|_{[-1,1]}} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2,$$

где супремум берется по всем алгебраическим полиномам P степени не более n с вещественными коэффициентами, которые монотонны на $[-1, 1]$. Это удивительно, поскольку можно было бы предположить, что если полином столь далек от равномерной осцилляции, присущей полиному Чебышёва T_n , то улучшение неравенства Маркова должно быть более значительным. В небольшой статье [8] Эрдёш привел класс алгебраических полиномов, для которого множитель Маркова n^2 улучшается до cn . Он доказал, что существует такая абсолютная константа c , что неравенство

$$|P'(y)| \leq \min \left\{ \frac{c\sqrt{n}}{(1-y^2)^2}, \frac{en}{2} \right\} \|P\|_{[-1,1]}$$

имеет место для каждого $y \in (-1, 1)$ и для любого алгебраического полинома P степени не более n , имеющего лишь вещественные нули, причем вне интервала $(-1, 1)$. Этот результат стимулировал изучение неравенств

типа Маркова и Бернштейна для полиномов с ограничениями на нули и при некоторых других ограничениях. Результаты Эрдеша были развиты в различных направлениях несколькими авторами, включая Лоренца (G. G. Lorentz), Шейка (John T. Scheick), Сабадоша (József Szabados), Варму (Arun Kumar Varma), Мате (Attila Máté), Рахмана (Quazi Ibadur Rahman), Говила (Narendra K. Govil) и Мохапатру (Ram Mohapatra). Многие из этих результатов содержатся в следующей практически точной оценке, принадлежащей Питеру Борвейну и Тамашу Эрдеи [3]: существует такая абсолютная константа c , что

$$|P'(y)| \leq c \min \left\{ \sqrt{\frac{nk}{1-y^2}}, nk \right\} \|P\|_{[-1,1]}$$

для $y \in (-1, 1)$ и для любого алгебраического полинома P степени не более n с вещественными коэффициентами, имеющего не более $k-1$ нулей в открытом единичном круге, $0 \leq k-1 \leq n$.

Говорят, что целая функция f имеет экспоненциальный тип $\tau > 0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая вещественная константа A_ε , что

$$|f(z)| \leq A_\varepsilon e^{(\tau+\varepsilon)|z|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

В 1926 году С. Н. Бернштейн доказал, что

$$\|f'\|_{\mathbb{R}} \leq \tau \|f\|_{\mathbb{R}}$$

для всех целых функций f экспоненциального типа $\tau > 0$. В предположении, что $\|f\|_{\mathbb{R}} < \infty$, равенство имеет место тогда и только тогда, когда $f(z) = ae^{i\tau z} + be^{-i\tau z}$, где $|a| + |b| = \|f\|_{\mathbb{R}}$. Красивое доказательство этого результата есть в книге Рахмана и Шмайссера [15]. Оно использует интерполяционную формулу

$$f'(x) = \frac{4\tau}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} f\left(x + \frac{2k+1}{2\tau} \pi\right),$$

доказанную Ральфом Боазом (Ralph Boas) в 1937 году.

Книги, перечисленные в списке литературы, являются хорошими источниками информации о неравенствах типа Маркова, Бернштейна и Никольского и связанных с ними результатах. В некоторых из них можно найти полные доказательства результатов, упомянутых в этой краткой заметке без точной ссылки.

Мы признательны Майклу Моссингхофу (Michael Mossinghoff) за подготовку иллюстраций.

Тамаш Эрдеи, Пауль Неваи (Tamás Erdelyi, Paul Nevai)

Перевод Михаила Лифшица

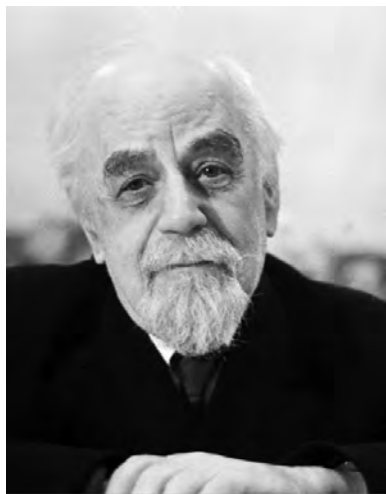
Литература

- [1] Арестов В. В. Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, № 1. С. 3–22.
- [2] Borwein P., Erdélyi T. Polynomials and Polynomial Inequalities. New York: Springer-Verlag, 1995. (Graduate Texts in Math. V. 161).
- [3] Borwein P., Erdélyi T. Markov-Bernstein-type inequalities for classes of polynomials with restricted zeros // Constr. Approx. 1994. V. 10, № 3. P. 411–425.
- [4] DeVore R. A., Lorentz G. G. Constructive Approximation. Berlin: Springer-Verlag, 1993. (Grund. der Math. Wiss. V. 303).
- [5] Ditzian Z., Totik V. Moduli of Smoothness. New York: Springer, 1987. (SSCM. V. 9).
- [6] Duffin R. J., Schaeffer A. C. A refinement of an inequality of the brothers Markoff // Trans. Amer. Math. Soc. 1941. V. 50. P. 517–528.
- [7] Erdélyi T. Arestov's theorems on Bernstein's inequality // J. Approx. Theory. 2020. V. 250, Article 105323.
- [8] Erdős P. On extremal properties of the derivatives of polynomials // Ann. Math. 1940. V. 41, № 2. P. 310–313.
- [9] Lorentz G. G. Approximation of Functions. 2nd ed. Providence, RI: AMS Chelsea Publ., 1986.
- [10] Lorentz G. G., von Golitschek M., Makovoz Y. Constructive Approximation: Advanced Problems. New York: Springer-Verlag, 1996. (Grund. der Math. Wiss. V. 304.)
- [11] Máté A., Nevai P. Bernstein's inequality in L^p for $0 < p < 1$ and $(C, 1)$ bounds for orthogonal polynomials // Ann. Math. 1980. V. 111, № 1. P. 145–154.
- [12] Milovanović G. V., Mitrinović D. S., Rassias Th. M. Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros. Singapore: World Scientific, 1994.
- [13] Nevai P. and anonymous. The Bernstein inequality and the Schur inequality are equivalent // J. Approx. Theory. 2014. V. 182. P. 103–109.
- [14] Nevai P. The True Story of n vs. $2n$ in the Bernstein Inequality. In preparation, 2022.
- [15] Rahman Q. I., Schmeisser G. Analytic theory of polynomials. Oxford: Clarendon Press-Oxford, 2002.
- [16] Riesz M. Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynôme trigonométrique // C. R. Acad. Sci. 1914. T. 158. P. 1152–1154.

Владимир Иванович Смирнов

(1887–1974)

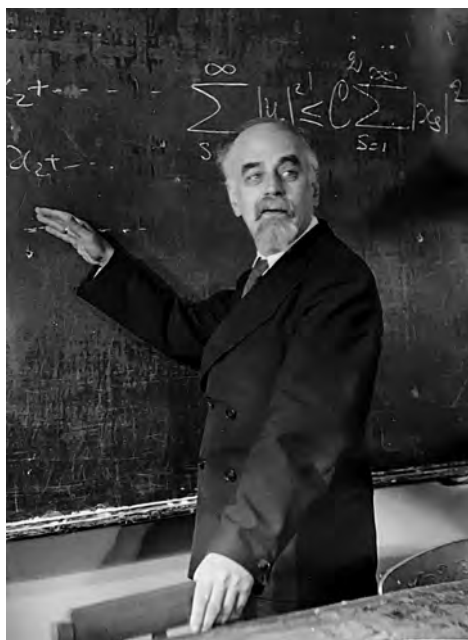
В. И. Смирнов родился 29 мая 1887 года в Петербурге в семье протоиерея, законоучителя Александровского лицея. После окончания с золотой медалью знаменитой Второй гимназии (старейшей гимназии Российской империи) поступил на физико-математический факультет Петербургского университета, который окончил в 1910 году с дипломом I степени. В 1918 году защитил магистерскую диссертацию (руководитель В. А. Стеклов). Во время гражданской войны, с 1918 по 1921 год, Смирнов преподавал в Таврическом университете. После взятия Крыма большевиками его жена была расстреляна, а сам он чудом избежал гибели. В 1921 году Владимир Иванович вернулся в Петроград. В 1934 году вторично женился, а в 1935 году у него родился сын Никита.



В. И. Смирнов преподавал во многих учебных заведениях города, в 1929–1935 гг. работал в Сейсмологическом и Математическом институтах АН СССР. Однако главным для него был Петербургский (Ленинградский) университет, в котором он работал с 1915 года до своей смерти. Во время войны вместе с частью университета Смирнов был эвакуирован в Елабугу, где организовал группу, выполнявшую ряд важных оборонных работ. С 1932 года — член-корреспондент, а с 1943 года — академик АН СССР.

Владимир Иванович был выдающимся организатором науки. По его инициативе в ЛГУ был создан НИИ математики и механики, ныне носящий его имя. Целый ряд научных направлений и даже школ появился в Ленинграде усилиями В. И. Смирнова, в частности, благодаря организованным им семинарам. Среди них — городской семинар по математической физике им. В. И. Смирнова, который в 2022 г. отметил свое 75-летие.

Благодаря феноменально широкой образованности и глубокому пониманию математики как единого целого Смирнов мог продвигать даже те области математики, в которых он никогда не работал сам, например, функциональный анализ и спектральную теорию операторов. В послевоенные годы в связи с катастрофической нехваткой профессоров Смирнов руководил (последовательно, а иногда и одновременно) несколькими кафедрами ЛГУ: теории упругости, гидроаэромеханики, ТФКП, математического анализа. Но как только появлялись подходящие кандидаты, Владимир Иванович передавал заведование молодым коллегам. До конца жизни он заведовал лишь созданными им кафедрами высшей математики (физический факультет, с 1933 года) и математической физики (матмех, с 1956 года).



Смирнов был непревзойденным преподавателем. По словам Ф. Яноуха, «На лекциях профессора Смирнова математические функции оживали, они имели свои судьбы, переживали свои несчастья и случайности, которые позволяли вычислить интеграл или решить дифференциальное уравнение».

Как вспоминал В. А. Залгаллер,

Владимир Иванович начинал с эталонных примеров, с изложения классических теорем, а потом менял тембр голоса и за последние 10 минут каждой лекции излагал материала примерно в 3 раза больше того, что было до этого, причем прослеживались всевозможные обобщения,

как чисто математические, так и с сохранением физического смысла... Каждый из нас мог выбрать, до каких пор он в силах понимать, — без малейшего унижения самолюбия слушателя... Этот удивительный талант одновременно учить людей разной подготовки отличал манеру преподавания В. И. Смирнова.

Делом жизни Владимира Ивановича явилось создание уникального «Курса высшей математики», начатого им совместно с Я. Д. Тамаркиным в 20-е годы и выросшего в дальнейшем в подлинную математическую энциклопедию в 5 томах. Работа над курсом продолжалась более 50 лет. «Курс» выдержал множество переизданий и был переведен на 8 языков. Без всякой натяжки можно сказать, что создание такого курса — это подвиг.

Область научных интересов В. И. Смирнова весьма обширна. Его основные труды посвящены теории функций комплексной переменной. Также широко известны работы Смирнова по уравнениям в частных производных. Однако (по словам С. В. Валландера)

свою роль в науке он оценивал очень скромно, считая, что (...) в основном он является катализатором научной жизни в математическом мире, который ускоряет идущие в нем процессы.



Обложки 3-го (1929 г.) и 24-го (2008 г.) изданий I тома «Курса высшей математики»



Комиссия АН СССР по истории физико-математических наук. Сидят: С. И. Вавилов, А. Н. Крылов, В. И. Смирнов. Стоят: М. И. Радовский, Т. П. Кравец

В. И. Смирнов внес фундаментальный вклад в историю математики. Благодаря ему мы располагаем развернутой историей развития математики от 40-х годов XIX века до 1970 года. Он был редактором и автором трудов о жизни и творчестве Д. Бернулли, П. Л. Чебышёва, А. М. Ляпунова и других выдающихся математиков.

После ранней смерти своего талантливого ученика И. А. Лаппо-Данилевского Смирнов совместно с Н. Е. Кочиным изучил его рукописи и черновики, заполнил все лакуны и издал 12 работ под именем Лаппо-Данилевского. Эта работа, занявшая несколько лет, сравнима с деятельностью художника-реставратора и, пожалуй, уникальна в истории науки.

В конце 50-х годов под руководством Смирнова было начато систематическое исследование архива Эйлера — рукописей, писем и записных книжек. В итоге были опубликованы несколько томов работ Эйлера, включая 438-страничный аннотированный указатель к переписке.

Владимир Иванович всегда стремился к объединению математиков Ленинграда. В 1920-х годах он был одним из создателей городского физико-математического общества (распущенного в 1930 г. по политическим мотивам). В 1957 году Смирнов организовал общематематический семинар, на основе которого в 1959 году было возрождено Математическое

общество. Владимир Иванович отказался стать его президентом и был единогласно избран почетным президентом.

Одним из основных увлечений В. И. Смирнова на протяжении всей его жизни была музыка. Он прекрасно играл на рояле, хотя музыкального образования не имел, а научился играть в детстве у старших братьев — профессиональных музыкантов. Смирнов регулярно устраивал у себя дома концерты, где исполнялись симфонии и квартеты в переложении для фортепиано в четыре руки. Среди его музыкальных партнеров в разные годы были Я. Д. Тамаркин, Д. К. Фаддеев и Д. Д. Шостакович.

Владимир Иванович любил дальние прогулки, причем обычно ходил очень быстро, так что его попутчики с трудом успевали за ним. В молодые годы еще одним хобби Смирнова была карточная игра «винт». По отзывам, он играл вдохновенно и мастерски.

Владимир Иванович был глубоко верующим человеком. Хотя в советское время воцерковленность, мягко говоря, не поощрялась, а иногда даже была опасной для жизни, он много лет состоял членом приходского совета Князь-Владимирского собора в Ленинграде. Важно отметить, что в его религиозности никогда не было ничего показного.

В годы сталинского террора В. И. Смирнов неоднократно писал письма властям и выступал в защиту арестованных знакомых. Однажды, будучи вызванным в НКВД и не подтвердив наветы на коллегу, он после жуткого молчания услышал: «А вы очень смелый человек!»

Огромно число людей, обязанных Смирнову возможностью остаться в математике. Владимир Иванович сражался за талантливых студентов, как лев.

Закончим наш очерк словами В. Н. Кошлякова:

За свою долгую жизнь этот необыкновенный человек совершил множество добрых, мудрых и полезных дел. Они столь же неотделимы от него, как был неотделим от них он сам.

Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров

Литература

- [1] Владимир Иванович Смирнов. 1887–1974 / отв. ред. О. А. Ладыженская, В. М. Бабич. М.: Наука, 2006. 328 с.
- [2] *Apushkinskaya D., Nazarov A. I. Vladimir Ivanovich Smirnov (1887–1974) // Complex Variables and Elliptic Equations. 2018. V. 63, № 7–8. P. 897–906.*
- [3] *Матвиевская Г. П., Ожигова Е. П. Владимир Иванович Смирнов. 1887–1974. СПб.: Наука, 1994. 288 с.*
- [4] *Никифоровская Н. А. Владимир Иванович Смирнов: Воспоминания. СПб.: Изд. БАН, 2002. 72 с.*

- [5] Смирнов В. И. Избранные труды. Комплексный анализ. Математическая теория дифракции. Л.: ЛГУ, 1988. 278 с.
- [6] Смирнов В. И. Избранные труды. Аналитическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1996. 274 с.

Вклад В. И. Смирнова в комплексный анализ: каноническая факторизация и другие фундаментальные результаты

Владимир Иванович Смирнов (1887–1974) — автор ряда наиболее важных и полезных результатов теории пространств Харди, в основном опубликованных в трех статьях [1], [2] и [3]. Вследствие достойных сожаления драматических обстоятельств (в основном связанных со сталинским режимом, который пресек контакты российских ученых с границей) эти результаты Смирнова совершенно не замечались международным сообществом многие десятилетия (первые две статьи даже не реферировались ни в *Mathematical Reviews*, ни в *Zentralblatt für Mathematik*). Тем не менее они предвосхитили некоторые важнейшие достижения в теории пространств Харди. Его результаты, гораздо позже переоткрытые, применялись в бесчисленном множестве работ — всюду, где используется аппарат пространств Харди.

Мы затронем в основном следующие темы:

- (1) доказательство теоремы о канонической факторизации (1929);
- (2) цикличность «внешних функций Бёрлинга» (1928);
- (3) интегральный («универсальный») принцип максимума и класс Смирнова D (1932);
- (4) области Смирнова Ω в $\mathbb{C}$ и формула Коши в $E^1(\Omega)$ (1932).

Теорема о канонической факторизации

Теорема В. И. Смирнова о канонической факторизации, CFT [2], утверждает, что любая ненулевая функция класса Харди $f \in H^p(\mathbb{D})$, $p > 0$, на единичном диске

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

представляется единственным образом в виде произведения

$$f = \lambda B[f]S$$

константы $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, произведения B дробно-линейных функций (множитель Бляшке), «максимальной функции Г. Сегё» $[f]$ и «сингулярной

свободной от нулей функции» S . Множитель Бляшке B был ранее выделен Ф. Риссом (1923): $f = BF$, $F \in H^p(\mathbb{D})$, где F не имеет нулей в круге $\mathbb{D}$,

$$B(z) = \prod_n b_{\lambda_n}(z), \quad b_{\lambda} = \frac{\lambda - z}{1 - \bar{\lambda}z} \cdot \frac{|\lambda|}{\lambda},$$

а $(\lambda_n)_n$ обозначает последовательность всех нулей функции f в диске $\mathbb{D}$ (перечисленных с учетом кратностей); известно, что $(\lambda_n)_n$ удовлетворяет «условию Бляшке» $\sum_n (1 - |\lambda_n|) < \infty$; $b_0(z) := z$. «Максимальная функция» была определена Г. Сегё (1921) при изучении форм Тёплица на $H^2(\mathbb{D})$ формулой

$$[f](z) = \exp \left\{ \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log |f(\zeta)| dm(\zeta) \right\}, \quad z \in \mathbb{D},$$

где m — нормированная мера Лебега на окружности $\mathbb{T}$. Сингулярный множитель S появился в статье Смирнова (не получив конкретного названия) в виде

$$S(z) = \exp \left\{ \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu_f(\zeta) \right\}, \quad z \in \mathbb{D},$$

где μ_f — сингулярная (относительно m) неположительная мера на $\mathbb{T}$.

Отметим, что пространства Харди $H^p(\mathbb{D})$ были определены Г. Х. Харди в 1915 году. Они быстро заняли стратегическое положение на пересечении теории голоморфных функций и вещественного анализа. Стремительное развитие теории пространств H^p в течение XX века играло ведущую роль в этих областях математики.

Теорема Смирнова о канонической факторизации (CFT) — краеугольный камень теории классов Харди и источник ее важнейших применений (некоторые из них найдены самим Смирновым). В теории пространств Харди CFT играет ту же роль, что в алгебре «основная теорема» (о разложении многочлена на линейные множители), а в теории целых функций — теорема Вейерштрасса о факторизации.

Однако по стечению обстоятельств авторство В. И. Смирнова теоремы CFT не было признано в течение нескольких десятилетий, что создало длительную и очевидную историческую несправедливость. Например, во многих публикациях источником теоремы CFT была указана книга Р. Неванлинны (1936), хотя в ней такое утверждение даже не содержится. Других исследователей сбивали исторические замечания во влиятельных монографиях К. Хоффмана (1962) (где авторами теоремы названы Ф. Рисс и Г. Герглотц), а позднее Дж. Гарнетта (1980), П. Кусиса (1980) и У. Рудина (1987) (в этих трех книгах автор теоремы не указан). Напротив, многие другие источники указывают на авторство В. И. Смирнова, см.

И. Привалов (1950), П. Дюрен (1970), М. Павлович (2014), Н. Никольский (2020).

В действительности В. И. Смирнов доказал теорему о факторизации в той же форме, но для более широкого функционального класса (A) (ныне часто обозначаемого N , следуя Р. Неванлинне) функций f , голоморфных на диске $\mathbb{D}$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{\mathbb{T}} \log^+ |f(rt)| dm(t) < \infty$$

(в этом случае мера μ_f просто сингулярна, не обязательно неположительна). Он назвал эту теорему «теоремой о параметрическом представлении» и настаивал на важности *свободного (типа интегрируемости) характера параметров*, определяющих голоморфную функцию f : 1) последовательности $(\lambda_n) \subset \mathbb{D}$, где $\sum_n (1 - |\lambda_n|) < \infty$, 2) функции $w = |f| \geq 0$, где $\log(w) \in L^1(\mathbb{T})$, и 3) сингулярной меры μ_f на окружности $\mathbb{T}$. Эта точка зрения концептуально весьма способствовала успешному применению теоремы о факторизации в спектральной теории сжатий гильбертовых пространств на функциональной модели Секефальви—Надя и Фояша.

Теорема CFT принципиально важна в доказательствах работы А. Бёрлинга [5] об инвариантных подпространствах оператора сдвига. Бёрлинг сгруппировал унимодулярные функции в каноническом разложении $BS := f_{\text{in}}$ и назвал произведение f_{in} внутренним множителем, а функцию $\lambda[f] := f_{\text{out}}$ — внешним множителем: $f = f_{\text{in}} f_{\text{out}}$.

Проблема полноты Бёрлинга

Проблема полноты (closure problem) Бёрлинга (1949) была решена в... 1928 году. Только что упомянутая работа А. Бёрлинга [5] очень существенно повлияла на теорию пространств H^p и смежные области. Главная аналитическая проблема состояла в определении того, для каких функций $f \in H^2$ множество «весовых многочленов» $fP = \{pf : p \text{ является многочленом}\}$ плотно в пространстве H^2 (так называемая «проблема замыкания» или «задача о циклических функциях»). Ответ А. Бёрлинга (« f циклична тогда и только тогда, когда она внешняя») в своей существенной части «тогда» (часть «только тогда» тривиальна в силу CFT) был получен на самом деле уже в статье Смирнова [1]: если функция f внешняя, то fP плотно в H^2 . Доказательство Смирнова (в слегка отличной терминологии) содержится в теореме 2 статьи [1], а именно, в импликации «(26) $\Rightarrow$ (20)» в обозначениях этой работы (а эта импликация, в свою очередь, основана на теории весовых ортогональных многочленов Г. Серё, 1920/21).

Через 35 лет В. И. Смирнов вернулся к этой теме и, применив ту же самую идею (в своей совместной с Н. А. Лебедевым книге [4], гл. III, § 2), получил полезные достаточные условия цикличности в пространстве Бергмана $L_a^2(\mathbb{D}, dx dy)$, внося тем самым вклад в изучение этого важного пространства. Эти факты также остались не замечены специалистами по пространствам голоморфных функций.

Интегральный принцип максимума (1929), класс Смирнова D и общий принцип максимума (1932)

Статья Смирнова [3] содержит определение, свойства и важные приложения замечательного «класса D », ныне часто обозначаемого N_+ : функция f на единичном диске $\mathbb{D}$ принадлежит классу D в точности тогда, когда она принадлежит N и при этом $\mu_f \leq 0$. Смирнов показал, что $\bigcup_{p>0} H^p(\mathbb{D}) \subset D$, и доказал «универсальный принцип максимума» (UMP): если $f \in D$ и $(f|T) \in L^r(T)$ ($1 \leq r \leq \infty$), то $f \in H^r$ (предварительная форма UMP содержится уже в статье 1929 года). В дальнейшем он нашел конформно инвариантное описание класса D и распространил UMP (по крайней мере для $r = \infty$) на любые односвязные области с достаточно регулярной границей.

Много позже Х. Хельсон в своих «Lectures on invariant subspaces» (1964) развил аналогичный подход к классическим принципам Фрагмена—Линделёфа (не заметив, как и все профессиональное сообщество, результатов Смирнова...). См. подробный анализ этих подходов и вывод «самого общего» принципа Фрагмена—Линделёфа с помощью класса Смирнова D в книге [6].

Ряд важных приложений класса D , открытых самим Смирновым (см. [3]), принадлежит теории полиномиальных приближений: условно говоря, если многочлены не плотны в некотором весовом пространстве голоморфных функций, то «препятствия» к аппроксимации (и тем самым к полноте множества многочленов) можно описать в терминах класса D ; подробности см. в [6].

Области Смирнова и формула Коши в E^1 (1932)

В своей статье [3] В. И. Смирнов вводит и изучает важный аналог пространств Харди для областей $\Omega \subset \mathbb{C}$, конформно эквивалентных единичному кругу $\mathbb{D}$ (и имеющих спрямляемую границу $\partial\Omega$): при $p > 0$ класс $E^p(\Omega)$ состоит из голоморфных функций f , для которых

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{\partial\Omega(r)} |f(z)|^p ds < \infty,$$

где $\Omega(r) = \varphi(r\mathbb{D})$, а символ φ обозначает конформное отображение $\varphi = \varphi_\Omega: \mathbb{D} \rightarrow \Omega$. Фундаментальная теорема Смирнова утверждает, что голоморфная на Ω функция f принадлежит $E^1(\Omega)$ в точности тогда, когда она почти всюду на границе имеет пределы и выполнена классическая формула Коши. Пространства Смирнова $E^p(\Omega)$ широко используются в теории двойственности для экстремальных задач, развитой много позже (в 1960-е годы) Г. Ц. Тумаркиным и С. Я. Хавинсоном.

Та же статья 1932 года содержит определение и некоторые приложения того, что теперь называется областями Смирнова (класс таких областей обозначается (S)): это такие области Ω , для которых производная φ'_Ω — внешняя (максимальная) функция на $\mathbb{D}$. В. И. Смирнов показал, что многочлены плотны в пространстве $E^2(\Omega)$ в точности тогда, когда $\Omega \in (S)$, и аналогичное утверждение выполнено для классического принципа максимума: неравенство

$$|f(z)| \leq \sup_{\zeta \in \partial\Omega} |f(\zeta)| \quad \forall z \in \Omega$$

выполнено для любой функции $f \in N_+(\Omega)$ в точности тогда, когда $\Omega \in (S)$. В дальнейшем были открыты многие другие интересные и важные свойства областей Смирнова; см. их (неполный) список в [6].

В. И. Смирнов заметил, что если аргумент $\zeta \mapsto \arg(\varphi'_\Omega(\zeta))$ принадлежит $L^1(\partial\Omega, ds)$, то $\Omega \in (S)$, и склонялся к мнению, что все области Ω — области Смирнова. Контрпример был найден М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым (1937): любая нетривиальная (отличная от окружности $\mathbb{T}$) псевдоокружность ограничивает область, не являющуюся областью Смирнова; ими был приведен пример такой кривой.

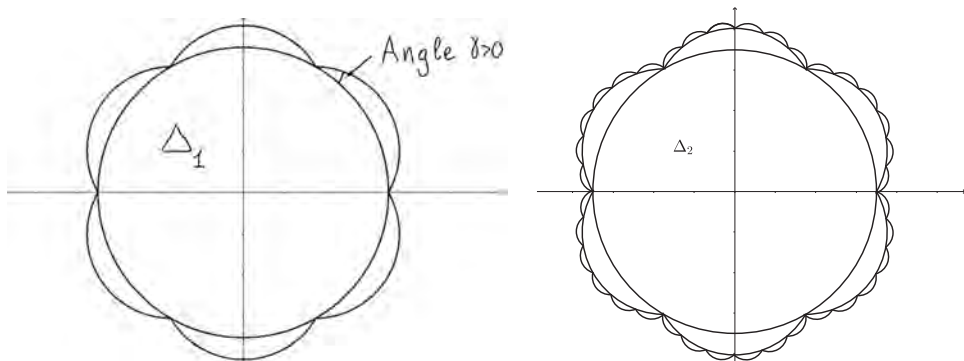


Иллюстрация к примеру Келдыша и Лаврентьева: область, не являющаяся областью Смирнова. Конструкция напоминает снежинку фон Коха (1904), однако граница изометрична окружности $|z| = 1$, как в известной теореме Дж. Нэша о вложении (1954). Области $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \dots$ приближают конструируемую область.

В дальнейшем П. Дюрен, Г. Шапиро и А. Шилдс (1966) показали, что конформное отображение φ , производная которого φ' — сингулярная внутренняя функция, определяет псевдоокружность $\varphi(\mathbb{T})$, если соответствующая сингулярная мера мала и удовлетворяет «условию гладкости Зигмунда».

Обзор многих других достижений В. И. Смирнова в комплексном анализе и их многочисленных приложений см. в [6].

Н. К. Никольский

Литература

- [1] *Smirnov V. I.* Sur la théorie des polynômes orthogonaux à une variable complexe // Журнал Лен. физ.-мат. общ. 1928. Т. 2, вып. 1. С. 155–179.
- [2] *Smirnov V. I.* Sur les valeurs limites des fonctions régulières à l'intérieur d'un cercle // Журнал Лен. физ.-мат. общ. 1929. Т. 2, вып. 2. С. 22–37.
- [3] *Smirnov V. I.* Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes qui s'y rattachent // Изв. АН СССР. VII серия. Отд. матем. и естеств. наук. 1932. Т. 3. С. 337–372.
- [4] *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1964. 438 с.
- [5] *Beurling A.* On two problems concerning linear transformations in Hilbert space // Acta Math. 1949. V. 81. P. 239–255.
- [6] *Никольский Н. К., Хавин В. П.* Результаты В. И. Смирнова по комплексному анализу и их последующее развитие // *Смирнов В. И.* Избранные труды. Комплексный анализ. Математическая теория дифракции. Л.: ЛГУ, 1988. С. 111–145.

Александр Александрович Фридман (1888–1925)

Александр Фридман родился в Санкт-Петербурге в семье музыкантов (отец учился в консерватории и был артистом балетной труппы; мать преподавала игру на фортепиано). Во 2-й Санкт-Петербургской гимназии Александр Фридман и Яков Тамаркин были двумя лучшими учениками в классе и окончили ее в 1906 году с золотыми медалями. Будучи близкими друзьями, они почти всегда были вместе: в школе, в Санкт-Петербургском университете (в 1906–1910 году оба были студентами математического отделения физико-математического факультета) и в политической деятельности; оба были лидерами студенческих забастовок во время революции 1905 года. Из-за забастовок лекции читались нерегулярно или вообще не читались, поэтому экзамены можно было сдавать круглый год, по мере подготовки. Необходимость серьезной самостоятельной работы привела к появлению многочисленных студенческих кружков. Фридман участвовал в организации математического и физического кружков. Фридман и Тамаркин всегда упоминаются вместе в дневниках В. А. Стеклова за 1908 год, когда они посещали его лекции и много раз навещали его дома, принося конспекты лекций для вычитывания и последующей литографической печати. У друзей были также вопросы по математике для обсуждения с профессором. Вот характерная запись в его дневнике:



22 ноября. Вечером были Тамаркин и Фридман (...) Все расспрашивали меня о своих копаниях в теории ортогональных функций. Печатают заметку в журнале Крелля. Бойкие парни! Ушли в 12 1/2, после ужина.

Упомянутая 11-страничная статья Фридмана и Тамаркина, опубликованная в *Journal für die reine und angewandte Mathematik* в 1909 году, ка-

сается функции $[x]$ и чисел Бернулли. Их интерес к этим числам возник, когда они еще учились в гимназии и в 1905 году послали Гильберту работу «Sur les congruences du second degré et les nombres de Bernoulli»; она была опубликована в *Mathematische Annalen* в следующем году.

Стеклов рекомендовал Фридмана и Тамаркина для продолжения учебы в магистратуре, необходимые экзамены они сдали к 1913 году. Затем Фридман был принят на работу в Аэрологическую обсерваторию, расположенную недалеко от Санкт-Петербурга. Там он начал изучать метеорологию и даже, незадолго до начала Первой мировой войны в 1914 году, провел некоторое время в Лейпциге с В. Бьеркнесом, ведущим специалистом в области теоретической метеорологии.

После начала войны Фридман решил присоединиться к добровольческому авиационному отряду и вскоре начал летать на самолете, участвуя в бомбардировках. В письме Стеклову от 5 февраля 1915 года он пишет:

Моя жизнь течет достаточно ровно, если не считать таких случайностей, как разрыв шrapнели в 20 шагах, разрыв взрывателя австрийской бомбы в полшаге, кончившийся для меня почти благополучно, и падение на лицо и голову, кончившееся разрывом верхней губы и головными болями. Но, конечно, ко всему этому привыкаешь, особенно когда видишь кругом вещи в тысячу раз более тяжелые.

Стоит отметить, что Фридман был награжден Георгиевским крестом за храбрость.



А. А. Фридман оставался математиком даже на передовой. Например, он разработал подход к вычислению траектории бомбы. Поскольку вычисления были основаны на предположении Стеклова, Фридман написал ему: «Оказалось, что бомбы падали почти так, как предсказывает теория». Летом 1915 года Фридмана направили в Киев на Центральную авиационную станцию читать летчикам лекции по воздухоплаванию; несколько месяцев спустя он стал заведовать этой станцией и переехал вместе с ней в Москву в апреле 1917 года. Однако через полгода к власти пришли большевики, начавшие мирные переговоры с Германией. Центральная аэронавигационная станция перестала работать, и Фридман написал Стеклову, что он подавлен неуверенностью в своем будущем. К счастью, еще в 1916 году был основан Пермский университет, и Стеклов, участвовавший в его организации, в феврале 1918 года направил письмо, рекомендовавшее Фридмана, в котором он подчеркивал: «Привлечение его в качестве преподавателя механики в Пермский университет я считаю весьма желательным. Университет найдет в нем достойного работника и научную силу». Фридман был избран экстраординарным профессором физико-математического факультета и в апреле 1918 года прибыл в Пермь, где застал А. С. Безиковича, И. М. Виноградова, А. Ф. Гаврилова и Р. О. Кузьмина, ранее приехавших из Петрограда.

Осенью 1918 года было организовано Пермское физико-математическое общество, и Фридман принял на себя обязанности его секретаря и члена редакционной коллегии нового журнала *Journal de la Société des Mathématiques et de Physique à l'Université à Perm*. (Во втором томе этого журнала А. С. Безикович, еще один член редакционной коллегии, опубликовал свое решение известной задачи об иголке — так называемой задачи Какейя.)

Однако вскоре Пермь стала прифронтовым городом и 24 декабря 1918 года была оккупирована белой армией; период «Колчаковии» (Фридман использовал этот термин, потому что адмирал Колчак объявил себя верховным правителем России) длился до августа 1919 года. В январе на заседании ученого совета университета Фридмана (к счастью, без последствий) обвинили в симпатиях к советской власти. Летом, когда красная армия подошла к Перми, все сотрудники университета, за исключением Безиковича, покинули город. В отличие от своих коллег, настроенных против советской власти, Фридман вскоре вернулся, и его последнее письмо Стеклову из Перми, отправленное в ноябре 1919 года, было криком о помощи: «Университету нужны кадры!»

Весной 1920 года Фридман вернулся в Петроград; количество назначений, полученных им, впечатляет. Он возглавил созданное по его инициативе математическое бюро в Главной геофизической обсерватории,

продолжил преподавать в Петроградском университете, Институте инженеров путей сообщения и Военно-морской академии, а также был избран профессором Петроградского политехнического института; наконец, он проводил исследования в атомной комиссии Государственного оптического института. Конечно, математическое бюро было его основным занятием; уже в самом начале военной службы Фридман подумывал создать в обсерватории теоретический отдел. Для реализации этого проекта он привлек нескольких блестящих молодых исследователей, в том числе И. А. Кибеля, В. А. Фока, Н. Е. Кочина и П. Я. Полубаринову-Кочину (последние трое впоследствии стали академиками). У каждого из них была своя тема для исследования, а результаты представлялись на научном семинаре.

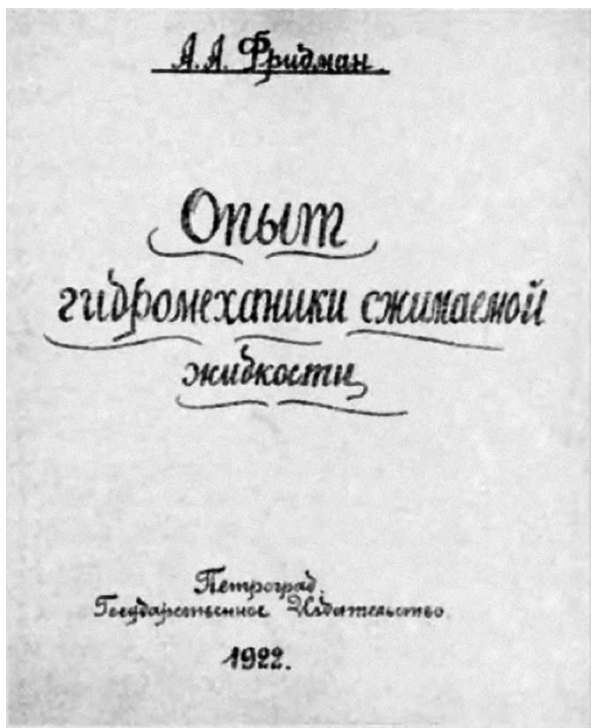
В своих собственных исследованиях Фридман рассматривал общие уравнения, описывающие движение сжимаемой жидкости, что важно для динамической метеорологии. Работа в этой области была начата в 1916 году, когда в *Comptes rendus* появилась краткая заметка «*Sur les tourbillons dans un liquide à température variable*». В начале 1921 года он завершил магистерскую диссертацию на эту тему; она была опубликована



Портрет А. А. Фридмана работы М. М. Девятова. Хранится в Главной геофизической обсерватории им. А. И. Воейкова (Санкт-Петербург)

в 1922 году под скромным названием «Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости». Фактически это был исчерпывающий трактат, переизданный в виде монографии с комментариями Н. Е. Кочина в 1934 году. Помимо важных результатов, диссертация содержала много интересных открытых проблем, которые впоследствии были решены самим Фридманом и его учениками. Его работы в гидродинамике и метеорологии получили признание еще при жизни; например, в письме, отправленном из Делфта в 1924 году, он писал о первом международном конгрессе по теоретической и прикладной механике:

Конгресс прошел очень хорошо, к русским было прекрасное отношение; в частности, меня включили в число членов комитета по созыву следующего конгресса. (...) Работами моими и моих сотрудников заинтересовались Блюменталь, Карман и Леви-Чивита.



Вскоре после возвращения в Петроград Фридман приступил к изучению общей теории относительности, о которой он упомянул в письме П. Эренфесту, написанном примерно в конце 1920 года: «Занимался аксиоматикой малого принципа относительности». Поскольку он использовал общую теорию относительности, в которой введенная Эйнштейном кос-

мологическая постоянная приводила к стационарности Вселенной, первая реакция Эйнштейна на работу Фридмана была быстрой и отрицательной. В заметке, опубликованной в *Zeitschrift für Physik*, Эйнштейн писал: «Результаты, касающиеся нестационарного мира, содержащиеся в работе, кажутся мне подозрительными. На самом деле описанное решение не удовлетворяет уравнениям поля». Несколько месяцев спустя Эйнштейн признал свою ошибку и написал в журнал:

В своей предыдущей заметке я критиковал названную выше работу [Фридмана «О кривизне пространства»]. Однако моя критика, как я убедился из письма Фридмана, переданного мне г-ном Крутковым, была основана на ошибке в моих расчетах. Я считаю, что результаты г-на Фридмана верны и проливают новый свет.

Наряду со своими исследованиями, упомянутыми выше, Фридман опубликовал популярную книгу «Мир как пространство и время». Другой его проект, пятитомная монография «Основы теории относительности», которую он планировал написать в сотрудничестве с В. К. Фредериксом, не был реализован из-за безвременной смерти Фридмана от брюшного тифа в сентябре 1925 года. За несколько недель до своей кончины он участвовал в рекордном полете на воздушном шаре на высоту 7400 метров, во время которого Фридман провел интересные метеорологические и медицинские наблюдения. За свои выдающиеся научные работы А. А. Фридман был посмертно награжден Ленинской премией в 1931 году.

Н. Г. Кузнецов
Перевод А. Авдюшенко

Литература

- [1] Фридман А. А. Избранные статьи. М.: Наука, 1966.
- [2] Фок В. А. Исследования А. А. Фридмана по теории гравитации Эйнштейна // Успехи физич. наук. 1963. Т. 80, вып. 3. С. 353–356.
- [3] Френкель В. Я. Александр Александрович Фридман: биографический очерк // Успехи физич. наук. 1988. Т. 155, вып. 3. С. 481–516.
- [4] Тропп Е. А., Френкель В. Я., Чернин А. Д. Александр Александрович Фридман: жизнь и деятельность. М.: Наука, 1988.

Значение работ Фридмана по космологии

Историческое введение. Значение работ А. А. Фридмана по космологии трудно переоценить. По образованию Фридман был математиком, но обладал исключительной универсальностью, позволившей ему сделать важный вклад и в другие области, например в метеорологию. Мало того, летом 1917 года, в разгар бурных событий в России, он основал завод «Аэроприбор» в Москве, который производил приборы для самолетов, и стал его первым директором. Этот завод существует и поныне.

Тем не менее важнейший вклад А. А. Фридмана в науку, несомненно, заключен в двух отличавшихся принципиальной новизной работах, появившихся в 1922 и 1924 гг. в немецком журнале *Zeitschrift für Physik* [11], [12]¹. В этих статьях он показал, что уравнения поля Эйнштейна с космологической константой (которые он назвал *Weltgleichungen*, т. е. мировые уравнения) допускают не только статическое решение с наличием материи, найденное Эйнштейном в 1917 году, и вакуумное решение де Ситтера 1917 года, также явно статическое. Существуют и динамические решения, описывающие расширение и сжатие Вселенной. Соответствующие уравнения в настоящее время называются уравнениями Фридмана или Фридмана—Леметра и образуют основу современной космологии. В 1923 году Фридман опубликовал книгу по космологии, которая раскрывает также его общие философские идеи [13]².

В 1920-х годах работы Фридмана не оказывали достаточного влияния [8]. В те годы главное внимание уделялось попыткам установить, есть ли наблюдаемая разница между решениями Эйнштейна и де Ситтера. Несомненно также, что работы Фридмана не были известны Жоржу Леметру, написавшему в 1927 году другую работу революционного характера, мало

¹ В работе [11] фамилия автора была передана по-немецки как Friedman, но обычная практика состоит в том, чтобы писать Friedmann.

² Редактор немецкого перевода [13] предполагает, что заглавие «Мир как пространство и время» (*Die Welt als Raum und Zeit*) напоминает о главном труде А. Шопенгауэра «Мир как воля и представление» (*Die Welt als Wille und Vorstellung*).

оцененную в то время: он связал формальные решения для случая расширяющейся или сжимающейся Вселенной с красным смещением и, таким образом, с наблюдениями. Эйнштейн, прочитав первую статью Фридмана, вначале подумал, что его решения ошибочны. Позже он признал, что решения математически корректны, но (по его мнению) не имеют физического смысла. Это показывает, насколько глубоко в тогдашних представлениях укоренилась идея статической Вселенной.

Часто утверждается, что Фридмана в его уравнениях интересовала лишь математика, а не физическое содержание. По нашему мнению, это верно лишь отчасти. Бесспорно, на Фридмана сильно повлияли математики Г. Вейль и Д. Гильберт, особенно идея последнего об аксиоматизации³. Но в своих работах он четко утверждал, что геометрия мира должна определяться теоретической физикой и астрономическими наблюдениями⁴. В конце своей статьи 1922 года он дает для последующего сжатия Вселенной оценку в 10^{10} лет, что близко к современной оценке возраста нашей Вселенной.

А. А. Фридман, в частности, интересовался вопросом о конечности или бесконечности нашего мира (как трехмерного пространства). Это побудило его в 1924 году изучить случай отрицательной кривизны [12]. Он нашел, что, в противоположность случаю замкнутого пространства, рассмотренному в 1922 году, вопрос для случая отрицательной кривизны остается открытым. Работа 1924 года завершается словами: «Вот почему, по нашему мнению, мировых уравнений Эйнштейна без дополнительных допущений все же недостаточно для заключения о конечности нашего мира»⁵. Имеет ли смысл говорить об актуальных бесконечностях в физике (в отличие от математики) — вопрос интригующий, и он обсуждается по сей день [10], так что интуиция Фридмана продолжает вдохновлять современные исследования.

Уравнения Фридмана⁶. Отправной точкой служит уравнение поля Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^3}T_{\mu\nu}. \quad (1)$$

³ Фридман посетил Гёттинген в 1923 году.

⁴ В 1924 году он даже дал своему ученику А. Б. Шехтеру в качестве темы вопрос о том, можно ли на астрономических расстояниях с помощью тригонометрических наблюдений сделать выбор между различными геометриями мира. Статья на эту тему опубликована Фредериксом и Шехтером через три года после смерти Фридмана [8].

⁵ Немецкий подлинник: “Dies ist der Grund dafür, daß, unserer Meinung nach, Einsteins Weltgleichungen ohne ergänzende Annahmen noch nicht hinreichen, um einen Schluß über die Endlichkeit unserer Welt zu ziehen.”

⁶ Всестороннее обсуждение материала этого и следующего разделов можно найти во многих книгах, например [17], [16], [9] и [4].

Наблюдения показывают, что Вселенная приблизительно изотропна относительно нашего расположения. В основном наблюдения относятся к спектру анизотропии реликтового излучения. Если принять космологический принцип («все точки Вселенной подобны друг другу»), следует предположить (приближенную) изотропию вокруг *каждой* точки. Тогда можно строго доказать, что наша Вселенная должна быть и (приближенно) однородной. Геометрия однородного и изотропного пространства-времени характеризуется линейным элементом

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2)$$

где $a(t)$ — масштабный коэффициент. Для параметра k возможны варианты $k = 0$ (плоская пространственная геометрия), $k = 1$ (положительная кривизна), $k = -1$ (отрицательная кривизна). Фридман рассматривал лишь два последних случая. Современные наблюдения говорят в пользу плоского пространства, хотя все еще существуют разногласия [7]. Заданное значение параметра k не фиксирует топологию нашего пространства, и чрезвычайно увлекательный вопрос — определить космическую топологию из наблюдений [15].

Подстановка анзаца (2) в (1) приводит к уравнениям Фридмана⁷. Первое уравнение является ограничением уравнения Райчаудхури на однородную и изотропную Вселенную:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a, \quad (3)$$

где ρ и p — плотность энергии и давление материи соответственно. Если материя подчинена условию на плотность энергии $\rho + 3p \geq 0$, то уравнение (3) дает вогнутые решения для $a(t)$, т. е. для модели мира с особенностью в начале координат. Второе уравнение Фридмана имеет вид

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - k. \quad (4)$$

В отличие от (3) это уравнение содержит лишь производные по времени не выше *первого* порядка, так что может интерпретироваться как *ограничение*. На самом деле это версия Фридмана для гамильтоновского ограничения в общей теории относительности [14].

Из (3) и (4) выводится третье уравнение:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (5)$$

7

Здесь и далее мы полагаем $c = 1$.

где $H := \dot{a}/a$ — параметр Хаббла (его оценка на сегодняшний день называется константой Хаббла и обозначается H_0). Комбинация $\rho + p$, присутствующая в (5), называется плотностью инертной массы. В этих уравнениях Фридмана мы, следуя современной практике, включили космологическую константу Λ в плотность ρ (однако это было предложено Шрёдингером уже в 1919 году), поскольку Λ влияет на «плотность энергии в вакууме» $\rho_\Lambda := \Lambda/8\pi G$. Соответствующее уравнение состояния имеет вид $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$, так что из (5) мы получаем, что ρ_Λ постоянна. Для баротропных уравнений состояния $p = w\rho$, $w \neq -1$, находим из (5) решение

$$\rho a^{3(1+w)} = \text{const}, \quad (6)$$

которое включает такие частные случаи:

- пыль ($p = 0$) $\rightarrow \rho \propto a^{-3}$;
- излучение ($p = \rho/3$) $\rightarrow \rho \propto a^{-4}$;
- вещество ($p = \rho$) $\rightarrow \rho \propto a^{-6}$.

Кинематическое соотношение $a_0/a = 1 + z$, где a_0 — текущий масштабный коэффициент, связывает ρ с наблюдаемым красным смещением z . Случай излучения относится к ранней Вселенной, тогда как случай вещества выглядит пока что нереалистичным. Сегодня во Вселенной господствуют пыль (около одной трети) и вакуумная энергия (около двух третей), что приводит к эволюции во времени

$$a(t) = a_0 \left(\frac{3\Omega_0 H_0}{\Lambda} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3}{2} t \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \right), \quad (7)$$

где Ω_0 — сегодняшняя плотность материи в терминах критической плотности; согласно наблюдениям она составляет примерно 1/3. Наблюдения также показывают, что возраст нашей Вселенной — около 13,8 миллиардов лет. Для больших промежутков времени закон эволюции (7) дает асимптотически пространство де Ситтера⁸. Наблюдения над реликтовым излучением дают веские указания на то, что наша Вселенная подверглась квазиэкспоненциальному расширению (с очень большим Λ) уже в очень ранней фазе своей истории, которую называют инфляцией. Представление об инфляции позволяет объяснить появление структуры во Вселенной.

8

Для поздних этапов расширения с положительной константой ρ_Λ говорят о *темной энергии*, но возможно также, что эффективная плотность вакуумной энергии меняется со временем, и в этом случае говорят о *квинтэссенции*. Последняя считается происходящей из материальных источников и часто моделируется скалярным полем ϕ , зависящим от времени.



Обложка книги «Мир как пространство и время», 1923, Петроград

Вместо баротропных уравнений состояния часто используются динамические модели материи, обычно со скалярным полем ϕ . В пределе Фридмана это поле зависит, разумеется, лишь от времени. В случае безмассового поля нужно в уравнении (4) выбрать плотность $\rho_\phi = \dot{\phi}^2/2$.

За рамками приближения Фридмана. Кроме непосредственной и очевидной полезности уравнений Фридмана для применений в космологии есть несколько важных и перспективных направлений дальнейших исследований, которые опираются на достижения Фридмана. За недостатком места отметим лишь два из них, а именно: (i) первые шаги в направлении теории квантовой гравитации и (ii) обобщение изотропического анзаца (2) в поисках фундаментальной симметрии природы.

Адаптируя анзац (2) к квантовомеханическому контексту, говорят о так называемом *минусуперпространственном приближении*, в котором полное суперпространство геометродинамики, будучи пространством модулей всех трехмерных метрик с точностью до пространственных диф-

феоморфизмов, ограничено до нескольких однородных степеней свободы, таких как скалярный коэффициент a . Этот предел вначале был рассмотрен Девиттом в его основополагающей статье по канонической квантовой гравитации [6]. Это дает огромное упрощение, поскольку в этом приближении можно игнорировать ключевые технические вопросы, такие как неперенормируемость пертурбативной квантовой гравитации. Более того, возможно изучение различных концептуальных вопросов квантовой гравитации и квантовой космологии. А именно, прямое каноническое квантование второго уравнения Фридмана (4) приводит к частному случаю уравнения Уилера—Девитта [14], [4], которое мы приведем для случая безмассового однородного скалярного поля:

$$\left[\frac{4G\hbar^2}{3\pi a^2} \frac{\partial}{\partial a} \left(a \frac{\partial}{\partial a} \right) - \frac{\hbar^2}{a^3} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{3\pi}{4G} ka \right] \Psi(a, \phi) = 0,$$

где выбрано конкретное упорядочение множителей. Волновая функция $\Psi(a, \phi)$ — простой пример «волновой функции Вселенной». В частности, можно анализировать ее поведение вблизи сингулярности, где $a \rightarrow 0$. Уравнение Уилера—Девитта не содержит внешнего временного параметра, но можно использовать скалярный множитель a , чтобы проследить эволюцию степеней свободы материи относительно этого «внутреннего времени». (Отметим, что уравнение Уилера—Девитта для минисуперпространства является гиперболическим относительно a .) Ключевые открытые вопросы касаются физической интерпретации функции Ψ , построения соответствующего гильбертова пространства и смысла наблюдаемых; обзор и дальнейшее обсуждение см. в книге [14].

Другое направление развития состоит во включении неоднородных степеней свободы. На феноменологическом уровне эволюция нашей Вселенной, в приближении однородного и изотропного пространства, успешно описывается уравнениями Фридмана, но малые неоднородности необходимо учесть, чтобы понять свойства реликтового излучения в рамках космологической теории возмущений. Далее, точное понимание того, как сформировались галактики и скопления галактик, требует численного анализа уравнений Эйнштейна (1) и их ньютоновского предела. Включение неоднородностей является решающим также для лучшего понимания возникновения Вселенной, так как неоднородности имеют масштаб порядка a^{-6} , подобно веществу, и потому преобладают очень близко к сингулярности Большого взрыва. Это ключевой вопрос инфляционной космологии, и его решение зависит от анзаца (2). Наконец, остаются трудные вопросы, связанные с построением общековариантной усредняющей процедуры в теории Эйнштейна, что создало бы твердую основу для приближения Фридмана [3].

В более математическом аспекте ключевым продвижением стал анализ типичного поведения решений уравнений Эйнштейна вблизи пространственно-подобной сингулярности. Он был проведен В. А. Белинским, И. М. Халатниковым и Е. М. Лифшицем (ВКЛ) в работах [1], [2]. При этом анзац (2) нужно обобщить до

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2 + b^2(t)dy^2 + c^2(t)dz^2,$$

тем самым отказываясь от изотропии, но сохраняя пространственную однородность. Удивительный результат, получающийся из этого анализа, — появление хаотических осцилляций метрических коэффициентов a, b, c при приближении к сингулярности. Этот результат показывает, что «предел метрики вблизи сингулярности» проявляет гораздо более сложное поведение, чем можно предположить, скажем, на основании рассмотрения метрики Шварцшильда. Тем самым показан и предел применимости допущения об изотропии.

ВКЛ-анализ обобщался во многих направлениях. В частности, более глубокое изучение соответствующего предела указало на сильную бесконечномерную симметрию индефинитного типа Каца—Муди, которая далеко обобщает известные двойственности из теории супергравитации и теории струн. Эта новая симметрия, возможно, послужит руководящим принципом в объединении фундаментальных взаимодействий [5].

Клаус Кифер, Герман Николаи (Claus Kiefer, Hermann Nicolai)

Перевод Б. Р. Френкина

Литература

- [1] Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М. Колебательный режим приближения к особой точке в релятивистской космологии // Успехи физ. наук. 1970. Т. 102, вып. 3. С. 463–500.
- [2] Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М. О построении общего космологического решения уравнений Эйнштейна с особенностью по времени // ЖЭТФ. 1972. Т. 62, вып. 5. С. 1606–1613 (1972); поправка — там же. 1975. Т. 68, вып. 5. С. 1968.
- [3] Buchert T., Carfora M., Ellis G. F. R., Kolb E. W., MacCallum M. A. H., Ostrowski J. J., Räsanen S., Roukema B.F., Andersson L., Coley A. A., Wiltshire D. L. Is there proof that backreaction of inhomogeneities is irrelevant in cosmology? // Classical and Quantum Gravity. 2015. V. 32, № 21. 215021.
- [4] Calcagni G. Classical and Quantum Cosmology. Switzerland AG: Springer Nature, 2017.
- [5] Damour T., Henneaux M., Nicolai H. E_{10} and a Small Tension Expansion of M-Theory // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89, № 22. 221601.
- [6] DeWitt B. S. Quantum theory of gravity. I. The canonical theory // Phys. Rev. 1967. V. 160, № 5. P. 1113–1148.

- [7] *Di Valentino E. et al.* Cosmology Intertwined IV: The Age of the Universe and its Curvature. arXiv preprint. 2020. arXiv:2008.11286 [astro-ph.CO].
- [8] *Ellis G. F. R.* The expanding universe: a history of cosmology from 1917 to 1960 // *Einstein and the History of General Relativity.* / Ed. by D. Howard, J. Stachel. Boston: Birkhäuser, 1989. P. 367–431. (Einstein studies. EINSTEIN, Vol. 1).
- [9] *Ellis G. F. R., Maartens R., MacCallum M. A. H.* Relativistic Cosmology. Cambridge: CUP, 2012.
- [10] *Ellis G. F. R., Meissner K. A., Nicolai H.* The physics of infinity // *Nature Physics.* 2018. V. 14. P. 770–772.
- [11] *Friedman A.* Über die Krümmung des Raumes // *Zeitschrift für Physik.* 1922. Bd. 10. № 1. S. 377–386.
- [12] *Friedman A.* Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes // *Zeitschrift für Physik.* 1924. Bd. 21. № 1. S. 326–332.
- [13] *Фридман А. А.* Мир как пространство и время. Петербург: Academia, 1923; 2-е изд. М.: Наука, 1965.
- [14] *Kiefer C.* Quantum Gravity. 3 ed. Oxford: OUPress, 2012.
- [15] *Luminet J.-P.* Cosmic Topology // интернет-ресурс Scholarpedia. http://www.scholarpedia.org/article/Cosmic_Topology
- [16] *Mukhanov V.* Physical Foundations of Cosmology. Cambridge: CUP, 2005.
- [17] *Вейнберг С.* Гравитация и космология. Принципы и приложения общей теории относительности. М.: Мир, 1975.

Яков Давидович Тамаркин

(1888–1945)

Диапазон научных интересов Я. Д. Тамаркина был весьма широк, что отразилось и в тематике его научных изысканий: это теория чисел и теория функций, общая теория суммируемости и суммируемость рядов Фурье, проблемы моментов, дифференциальные и интегральные уравнения, краевые задачи и формула Грина, проблемы математической физики и аппроксимации. Все эти работы, посвященные важнейшим проблемам современной математики, и результаты, в них полученные, немедленно находили отклик в исследованиях современников и последователей, что, безусловно, способствовало дальнейшему развитию математики. 22 его ученика защитили диссертации, многие из них стали известными профессорами математики (Элмер Толстед, Эйнар Хилле). Его специальные лекции для аспирантов были уникальны, они ежегодно обновлялись, причем для их подготовки он использовал новейшие статьи из польских, французских, немецких, английских и русских научных журналов.



Яков Тамаркин родился в Чернигове в семье врача, но вырос в Петербурге, где учился в одной из лучших гимназий — во Второй Санкт-Петербургской, которую окончил с золотой медалью (1906). Математику в старших классах ему преподавал Я. В. Иодынский, замечательный педагог, под влиянием которого гимназисты начали заниматься изучением основ высшей математики, посещать городской семинар для гимназистов, где занятия проводили университетские профессора (в том числе А. А. Марков). В 1906 году, совместно с А. Фридманом, одноклассником и другом, Тамаркиным была написана первая научная статья о числах Бернулли, опубликованная в немецком журнале *Mathematische Annalen*.

Стремление изучать математику привело друзей на математическое отделение физико-математического факультета Санкт-Петербургского университета, где они усиленно занимались теорией чисел в научном кружке под руководством В. Я. Успенского. Написанное на втором курсе, в 1909 году, совместное сочинение Тамаркина и Фридмана «Решение уравнений второй степени в целых числах» получило золотую медаль и было опубликовано по представлению Д. Гильберта в еще одном серьезном журнале *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.

Кроме того, Я. Тамаркин и А. Фридман активно участвовали в работе издательской комиссии на факультете, вели записи лекций В. А. Стеклова для их печатания литографским способом, создали математическую читальню и математический кружок, где изучали результаты новейших исследований западных ученых, в частности, по теории ортогональных функций. С 1907 года Тамаркин и Фридман (их называли «мальчиками из Второй гимназии») посещали семинар П. Эренфеста по новой физике.

На последнем году обучения Тамаркин занимался задачей о колебании упругого твердого стержня и тонких пластинок под руководством В. А. Стеклова, рекомендовавшего оставить его для приготовления к профессорскому званию (1910), так как

г. Тамаркин отлично выдержал все испытания и в достаточной мере владеет языками французским и немецким, свободно читает математические книги на английском и итальянском языках... За двадцать лет моей преподавательской деятельности я не встречал столь даровитых молодых людей... Их во что бы то ни стало надо удержать для науки и дать им возможность посвятить себя научной работе...

В 1913–1919 гг. Тамаркин преподавал в вузах Петрограда (в Институте инженеров путей сообщения, в Электротехническом и в Политехническом институтах). Получив приглашение занять профессорскую должность в Пермском университете, он уехал в Пермь в надежде на более спокойное и обеспеченное существование, причем вместе с женой, направленной Петроградским университетом в качестве секретаря (1919). В Перми он читал лекции, принимал участие в организации кабинета приближенных вычислений, короткое время был деканом физико-математического факультета. Но скоро гражданская война докатилась и до Урала, Пермь переходила от белых к красным и наоборот... Когда Тамаркина командировали в Петроград и Москву для закупки оборудования кабинета приближенных вычислений (март 1920), он в Пермь не вернулся. 20 мая 1920 года Стеклов записывает:

В 11 явились неожиданно Тамаркин и Фридман, ехали 12 дней в особой теплушке. Они везли с собой книги, которые библиотека Пермского уни-

верситета возвращала Петроградскому. А заодно и некоторое количество продуктов, которое у друзей-математиков чуть было не реквизируют — велась борьба со «спекулянтами» и «мешочниками». Все, однако, уладилось.

В Петрограде Тамаркин возобновил работу в прежних местах работы, а дополнительно — в Морской академии, в Центральном бюро погоды, в Физико-техническом институте и в Атомной комиссии при Государственном оптическом институте. Столь обширный список рабочих мест объяснялся просто: нужно было содержать семью (в 1922 году родился сын Павел), а к зарплате прилагался еще и набор продовольственных карточек, необходимых для выживания.

Яков Давидович не только успешно занимался наукой, опубликовав большое число статей по различным вопросам прикладной математики совместно с такими авторами, как В. А. Стеклов, А. А. Фридман, А. С. Беликович, Г. М. Фихтенгольц, А. Н. Крылов, но и писал новые учебники для студентов.

Меньшевистское прошлое Я. Тамаркина, интерес ГПУ к его личности, вполне обоснованные опасения за жизнь семьи, страх перед голодом привели его к мысли об эмиграции. На окончательное решение покинуть страну, вероятно, повлияла и встреча на международном конгрессе математиков в Торонто в 1924 году с Я. Шохатом, к тому времени уже эмигрировавшим из России и преподававшим в Мичиганском университете.

В 1924 году Я. Д. Тамаркин вместе с контрабандистами-профессионалами перешел латвийскую границу и предстал перед американским консулом, усомнившимся, что странный посетитель — профессор математики из Петрограда, и попытавшимся его экзаменовать. Об этом «экзамене» (консул спросил уравнение эллипса и еще что-то из аналитической геометрии), сыгравшем такую важную роль в его дальнейшей судьбе, Тамаркин часто рассказывал впоследствии своим американским студентам.

В марте 1925 года на корабле Тамаркин достиг берегов Америки, причем первый день знакомства с США надолго остался у него в памяти — он часто делился с друзьями этими незабываемыми впечатлениями. Прямо «с корабля на бал» он, страстный любитель музыки, по ней изголодавшийся, отправился на концерт в Нью-Йоркскую филармонию слушать симфонию Брамса, а после концерта позволил себе отведать «королевский банан» — огромных размеров мороженое со всякого рода соусами и подливками.

В эмиграции Я. Д. Тамаркин жил и работал в США, сначала в Дартмутском колледже (1925–1927), а затем в Брауновском университете (1927–1945), где читал курсы лекций по интегральным уравнениям и по топо-

логическим группам, теории рядов и теории полиномиальной аппроксимации функций, по дифференциальным уравнениям в частных производных и по субгармоническим функциям.

Американское научное сообщество высоко оценило вклад Я. Д. Тамаркина. В его некрологе написали так:

Он появился как чужестранец на наших берегах два десятка лет тому назад, вскоре стал играть активную роль в американской математической жизни... (цитируется по статье [6]).

Тамаркин был членом совета (с 1931 года) и вице-президентом (в 1942–1943 гг.) Американского математического общества, членом Американской математической ассоциации и Американской академии искусств и наук, инициатором и редактором реферативного журнала *Mathematical Reviews*, заместителем редактора другого реферативного журнала *Zentralblatt für Mathematik*, где поместил множество обзоров. Коллеги ценили его за эрудицию, критичность ума, готовность помочь и поддержать авторов новых идей. Именно Тамаркин убедил Норберта Винера, будущего «отца кибернетики», систематически изложить его результаты о теоремах тауберова типа и способствовал приобретению им статуса серьезного ученого среди американских математиков. Друзья и знакомые любили этого огромного, громогласного и простого в общении русского, любили его гостеприимный дом с неизменными музыкальными концертами и невиданным русским хлебосольством, называя его за глаза просто «Джей Ди» (от Jacob David).

Н. В. Локоть

Литература

- [1] *Tamarkine J., Friedmann A.* Sur les congruences du second degré et les nombres de Bernoulli // *Math. Ann.* 1906. Bd. 62. S. 409–412.
- [2] *Friedmann A., Tamarkine J.* Quelques formules concernant la théorie de la fonction $[x]$ et des nombres de Bernoulli. (Extrait d'une lettre adressée à K. Hensel) // *J. reine angew. Math.* 1909. Bd. 135. S. 146–156.
- [3] Остапенко Е. Н., Ощуркова Р. А. Тамаркин Яков Давыдович // Профессора Пермского государственного университета (1916–2001). Пермь: Изд-во Пермского ун-та, 2001. С. 110.
- [4] Толстед Э. Воспоминания о профессоре Я. Д. Тамаркине (публикация, перевод и комментарии Н. С. Ермолаевой) // Историко-математические исследования. Сер. 2. Вып. 1 (36), № 2. С. 108–118. М.: Янус, 1996.
- [5] Ермолаева Н. С. Яков Давыдович Тамаркин: материалы к биографии // Историко-математические исследования. Сер. 2. Вып. 1 (36), № 2. С. 100–108. М.: Янус, 1996.

- [6] Ермолаева Н. С. В Америке Тамаркина звали Джей Ди // Российская научная эмиграция. Двадцать портретов. М.: УРСС, 2001. С. 57–71.
- [7] Ильин Ф. Тамаркин Яков Давидович. См. сайт Второй Санкт-Петербургской гимназии: <http://2spbg.kobr.gov.spb.ru/alumnus/tamarkin-id/>
- [8] Hille E. Jacob David Tamarkin — his life and work // Bull. Amer. Math. Soc. 1947. V. 53, № 5. P. 440–457.
- [9] Круликовский Н. Н. Пути развития спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов. Исторический очерк. Томск: Том. гос. ун-т, 2008. См. https://old.math.tsu.ru/EEResources/pdf/spectral_theory.pdf
- [10] Ермолаева Н. С. Примечания к статье Э. Толстеда Воспоминания о профессоре Я. Д. Тамаркине // Историко-математические исследования. Сер. 2. Вып. 1 (36), № 2. С. 115–118. М.: Янус, 1996.

О работах Я. Д. Тамаркина, их влиянии и развитии в асимптотической теории и спектральной теории операторов

Яков Давидович Тамаркин поступил на математическое отделение физико-математического факультета Санкт-Петербургского университета в 1906 году. Уже в первые годы обучения в университете он проявил незаурядные способности к исследовательской работе в математике и совместно со своим приятелем А. Фридманом опубликовал две статьи в немецких журналах *Mathematische Annalen* и *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Следует отметить, что эти первые его работы относились к теории чисел и диофантовым уравнениям. Они были высоко оценены специалистами, но существенно не повлияли на его дальнейшие интересы в математике. Его научным руководителем стал В. А. Стеклов, и Яков увлекся задачами о разложении функций в ряды по собственным функциям уравнения Штурма—Лиувилля и уравнения четвертого порядка, описывающего колебания стержня. Именно эти задачи в то время более всего интересовали В. А. Стеклова.

Отметим, что Стеклов [1], [2] был первым, кто доказал возможность разложения произвольной непрерывно дифференцируемой функции, обращаемой в нуль на концах отрезка, в ряд по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля с условиями Дирихле. Эта теорема Стеклова предвосхитила знаменитую теорему Гильберта—Шмидта о представлении произвольной функции гильбертова пространства рядом по собственным функциям самосопряженного оператора. Отметим, что теоремы Стеклова и Гильберта—Шмидта разные. В первом случае утверждается равномерная сходимость (по норме пространства непрерывных функций), а во втором случае по норме пространства квадратично суммируемых функций L_2 .

В. А. Стеклов по достоинству оценил яркое дарование Тамаркина и рекомендовал оставить его для подготовки к профессорскому званию. С 1910 года Я. Д. Тамаркин преподает в университете и других вузах Санкт-Петербурга. Он тесно сотрудничает с В. А. Стекловым, А. А. Фридманом, Г. М. Фихтенгольцем, А. Н. Крыловым. С этими известными математиками он написал несколько статей. Самостоятельно опубликовал

книгу «Курс анализа». Но главным его трудом стала магистерская диссертация, опубликованная как книга [3] в 1917 году. Некоторые ее фрагменты Тамаркин впоследствии опубликовал совместно с А. С. Безиковичем на немецком языке [4], а позже основные ее результаты в более концентрированном виде — в статье [5] на английском языке. Важным дополнением к этим работам явилась статья [6], где по существу доказана (в частном случае краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений) ныне хорошо известная теорема о голоморфной оператор-функции.

После эмиграции в 1924 году в США Тамаркин быстро вошел в число признанных международных авторитетов в математике. Он пишет совместные работы с М. Стоуном и А. Зигмундом. Основным его соавтором становится молодой, яркий математик Э. Хилле (E. Hille), который начал работать с Тамаркиным по существу как его ученик. Позже Хилле приобрел международное признание как один из создателей такого важного раздела современного функционального анализа, как теория полугрупп операторов.

Основные результаты работ Хилле—Тамаркина посвящены теории суммирования рядов Фурье разными методами. Результаты этих работ в свое время были высоко оценены, но после выхода в свет энциклопедических монографий А. Зигмунда и Н. К. Бари предшествующие статьи и книги стали реже цитироваться. С течением времени актуальность этой тематики снижалась. А вот книге [3] выпала счастливая судьба. Она стала основной в творческом наследии Я. Д. Тамаркина и до сих пор широко цитируется в работах по теории обыкновенных дифференциальных операторов. На то есть несколько причин, о которых, а также о полученных в [3] результатах скажем подробнее.

Существо дела связано с получением асимптотических разложений для решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большим спектральным параметром. Асимптотическая теория — основной инструмент для изучения спектральных характеристик обыкновенных дифференциальных операторов и изучения сходимости разложений по собственным функциям таких операторов. Насколько известно автору этой заметки, первые формулы для далеких собственных значений задачи Штурма—Лиувилля получил Я. Хорн [7] (см. также более ранние работы Хорна, ссылки на которые имеются в [7]). Хорн рассмотрел самосопряженную задачу Штурма—Лиувилля

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = \lambda^2 \rho(x)y, \quad (1)$$

$$y'(0) = hy(0), \quad y'(1) = Hy(1), \quad h, H \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где p, q, ρ — гладкие функции, причем p и ρ положительны на всем отрезке $[0, 1]$. Уравнение (1) Хорн привел к интегральному и методом последовательных приближений показал, что существует пара решений этого уравнения, имеющих асимптотическое представление на положительной полуоси вида

$$y_{\pm}(x) = e^{\pm \lambda \beta(x)} \left(\varphi_{\pm}^0(x) + \frac{\varphi_{\pm}^1(x)}{\lambda} + \dots \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где $\beta(x) = \int_0^x \sqrt{\rho(t)} dt$. Подставляя эти решения в краевые условия, Хорн нашел ныне хорошо известные асимптотические формулы для больших собственных значений и соответствующих собственных функций. Конечно, это было значительным достижением для своего времени. Более того, в отличие от авторов многочисленных предшествующих работ по асимптотической теории (имеется в виду асимптотика не по большому параметру, а по независимой переменной), Хорн понял и обосновал, что решения (3) действительно являются решениями уравнения (1), а не только формально удовлетворяют этому уравнению.

Работы Хорна послужили источником общей теории, которую развил Дж. Биркгоф [8], [9]. Он рассмотрел уравнения с большим параметром общего вида

$$\frac{d^n}{dx^n} + \lambda p_{n-1}(x, \lambda) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + \lambda^n p_0(x, \lambda) y = 0, \quad (4)$$

где функции

$$p_j(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{jk}(x) \lambda^{-k}$$

аналитические при больших $|\lambda|$ и гладкие по переменной x на некотором конечном отрезке $[a, b]$. В случае, если $p_{jk}(x) \equiv 0$ при $k \geq j$, мы получаем уравнение с полиномиальной зависимостью от большого параметра λ :

$$l_n(y) + \lambda l_{n-1}(y) + \dots + \lambda^{n-1} l_1(y) + \lambda^n l_0(y) = 0, \quad (5)$$

где

$$l_j(y) = p_{j0}(x) y^{(j)} + p_{j1}(x) y^{(j-1)} + \dots + p_{jj}(x) y, \quad p_{n0}(x) \equiv 1, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (6)$$

— дифференциальные выражения порядка j . Ясно, что основную роль при изучении асимптотического поведения решений уравнения (5) играют старшие коэффициенты p_{j0} . Уравнению (5) отвечает характеристическое уравнение

$$\omega^n + p_{n-1,0}(x) \omega^{n-1} + \dots + p_{1,0}(x) \omega + p_0(x) = 0.$$

В случае, если корни $\omega_j(x)$ этого уравнения зависят от x , каких-либо значительных результатов получить не удастся. Если же ω_j — постоянные, то уравнения

$$\operatorname{Re} \lambda \omega_k = \operatorname{Re} \lambda \omega_j, \quad k \neq j,$$

определяют в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ проходящие через начало координат прямые, которые делят всю плоскость $\mathbb{C}$ на секторы Γ_s (их число не превосходит $n^2 - n$). Биркгоф показал, что в каждом таком секторе Γ_s можно выбрать фундаментальную систему решений уравнения (4), которые имеют асимптотические представления

$$y_j(x, \lambda) = e^{\omega_j \lambda x} \left(\tau_0(x) + \frac{\tau_1(x)}{\lambda} + \dots \right), \quad j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Gamma_s$. Функции τ_k в этих разложениях могут быть последовательно определены через функции p_{jk} из формулы (4) и их производные, хотя информация о том, как их определять, не уточнялась.

Далее Биркгоф рассмотрел важный частный случай, когда в (5) все дифференциальные выражения $l_k(y)$ равны нулю при $k = 1, \dots, n-1$, а $l_0(y) = q_0(x)y$, $q_0(x) \equiv 1$. Этот случай соответствует задаче на собственные значения для общего обыкновенного дифференциального оператора порядка n

$$y^{(n)} + q_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + q_1(x)y' + q_0(x)y = -\lambda^n y,$$

к которому Биркгоф присоединяет краевые условия вида

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{kj} y^{(k)}(0) + b_{kj} y^{(k)}(1) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

где a_{kj} и b_{kj} — произвольные числовые коэффициенты. Для таких операторов (краевых задач) Биркгоф дает определение понятия регулярности (в определении участвуют коэффициенты a_{kj} и b_{kj} и функция q_{n-1}). Для регулярных операторов он выписывает асимптотические формулы для собственных значений, доказывает, что обратный к регулярному оператору — интегральный оператор, ядро которого $G(x, \xi, \lambda)$ (называемое функцией Грина) допускает оценку

$$|G(x, \xi, \lambda)| \leq \operatorname{const} |\lambda|^{1-n}$$

вне кругов фиксированного радиуса с центрами в собственных значениях и что любая n раз дифференцируемая функция f , подчиненная краевым условиям, может быть представлена равномерно сходящимся рядом по собственным и присоединенным функциям оператора.

Конечно, эти работы — огромный шаг вперед в сравнении с результатами Хорна, которые относились к оператору $l(y) = -(p(x)y')' + q(x)y$ с

краевыми условиями Штурма $y'(0) + hy(0) = 0$, $y'(1) + Hy(1) = 0$ при дополнительных условиях вещественности функций p и q , а также чисел h и H , которые обеспечивают самосопряженность оператора.

Опираясь на изложенную предысторию, мы теперь можем сказать о вкладе Я. Д. Тамаркина в развитие асимптотической теории. Тамаркин [3] рассмотрел системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка¹

$$y' + Q(x, \lambda)y = \lambda A(x)y, \quad x \in [a, b], \quad (9)$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, Q и A — $(n \times n)$ -матрицы с достаточно гладкими по x элементами, причем матрица Q как функция от λ является аналитической на бесконечности, точка ∞ является для нее регулярной, а матрица A приводится к диагональному виду:

$$A(x) = \text{diag}(a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)), \quad a_k(x) \neq a_j(x) \text{ при } k \neq j. \quad (10)$$

При таком условии на матрицу A получить значимые результаты не удастся. Однако для важного случая, когда на диагонали матрицы A стоят коллинеарные функции $a_j(x) = a_j \rho(x)$, $\rho(x) > 0$, а (комплексные) числа a_j различны между собой, Тамаркину удалось развить достаточно полную теорию. В этом случае он показал, что прямые $\text{Re}(a_j \lambda) = \text{Re}(a_k \lambda)$ при $k, j = 1, \dots, n$, $k \neq j$, разбивают комплексную λ -плоскость на несколько (не более чем $n^2 - n$) секторов Γ_i , в каждом из которых существует фундаментальная матрица решений вида

$$Y(x, \lambda) = \{y_{jk}(x, \lambda)\}_{j,k=1}^n = e^{a_k \lambda x} \tau_k(x) (\delta_{kj} + r_{jk}(x, \lambda)), \quad (11)$$

где δ_{kj} — символ Кронекера, а $|r_{jk}(x, \lambda)| = O(\lambda^{-1})$ равномерно по $x \in [a, b]$ и $\lambda \rightarrow \infty$ в выбранном секторе Γ_i . Тамаркин, как Хорн и Биркгоф, показал, что решения с указанной асимптотикой являются истинными, а не только формальными. Далее, в указанном случае он ввел понятие регулярности для краевой задачи, порожденной уравнением (9) и краевыми условиями вида

$$U_0 y(0) + U_1 y(1) = 0, \quad (12)$$

где U_0, U_1 — числовые $(n \times n)$ -матрицы. Для регулярных задач он доказывает дискретность спектра, получает оценку функции Грина G обратного интегрального оператора

$$|G(x, \xi, \lambda)| \leq \text{const}$$

вне кругов фиксированного радиуса с центрами в собственных значениях и доказывает теорему о возможности разложения гладкой вектор-функ-

¹ Ранее Л. Шлезингер [10] рассматривал системы первого порядка с большим параметром, но его результаты не имели достаточно законченную форму.

ции, подчиненной краевым условиям, в равномерно сходящийся ряд по собственным и присоединенным функциям.

Далее Тамаркин переходит к изучению краевых задач, порожденных уравнением (4) и (5) и краевыми условиями (8). Он дает определение регулярности таких краевых задач (Биркгоф давал определение регулярности только для линейного оператора) и доказывает возможность разложения произвольной гладкой функции, подчиненной краевым условиям, в ряд по корневым функциям задачи. При этом остался незамеченным тот факт, что разложение в этом случае не будет единственным. Эти результаты Тамаркин получил, показав возможность сведения задачи (5), (8) к системе (9), (12). Тем самым полученные для систем результаты являются более общими, нежели для полиномиально зависящих от спектрального параметра краевых задач. Однако именно задачи с полиномиально зависящим спектральным параметром получили впоследствии широкое и бурное развитие и способствовали частому цитированию книги Тамаркина [3]. Скажем об этом подробнее.

Рассмотрим уравнение общего вида

$$A_0 \frac{d^n u}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{du}{dt} + A_n u = 0, \quad u = u(t), \quad (13)$$

где $t \geq 0$, а A_j — операторы в гильбертовом пространстве H . Здесь уравнение записано в абстрактной форме, но подразумевается, что A_j — дифференциальные операторы в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, действующие в пространстве $H = L_2(\Omega)$. Если уравнение (13) с переменными (t, x) , $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, гиперболическое, то для этого уравнения разумна постановка задачи Коши с n начальными условиями

$$u(0) = f_0, \dots, u^{(n-1)}(0) = f_{n-1}. \quad (14)$$

Решение методом Фурье уравнения (13) (подстановка $u(x, t) = e^{\lambda t} v(x)$) приводит к изучению спектральной задачи с нелинейным вхождением спектрального параметра (полиномиального пучка операторов)

$$(\lambda^n A_0 + \lambda^{n-1} A_1 + \dots + \lambda A_{n-1} + A_n) v(x) = 0. \quad (15)$$

Собственные функции v_k , отвечающие собственным значениям λ_k этого пучка, порождают элементарные решения $u_k(x, t) = e^{\lambda_k t} v_k(x)$ уравнения (13). Если решение задачи (13), (14) мы ищем в виде суммы ряда $u(x, t) = \sum_k c_k u_k(x, t)$, то выполнение начальных условий эквивалентно выполнению равенства

$$\sum_k c_k v_k(x) = (f_0, \dots, f_{n-1}), \quad (16)$$

где c_k — числовые коэффициенты, а $v_k = (v_k, \lambda_k v_k, \dots, \lambda_k^{n-1} v_k)$ — вектор-функции в пространстве $H^n = H \oplus \dots \oplus H$, называемые производными по

Келдышу цепочками (здесь и далее для простоты мы предполагаем, что присоединенные функции у пучка (15) отсутствуют). Именно М. В. Келдыш [11], [12] ввел понятие производных цепочек и поставил задачу о кратной полноте: *при каких условиях пучок (15) обладает в пространстве H^n , состоящем из n копий пространства H , полной системой производных цепочек $\{v_k\}_k$?* Конечно, наличие свойства полноты гарантирует нам, что удовлетворить начальным условиям мы можем только с некой произвольной точностью, рассматривая конечные суммы элементарных решений. Для построения точных решений необходимо доказывать теоремы о разложении или о базисности производных цепочек.

В случае гиперболического уравнения (13) спектр пучка (15) лежит в некоторой полосе, содержащей мнимую ось, и в разложении (16) можно допускать участие всех производных цепочек, поскольку все элементарные решения $u_k(x, t) = e^{\lambda_k t} v_k(x)$ в этом случае растут при $t \rightarrow \infty$ не быстрее некой экспоненты конечного порядка. В случае эллиптического уравнения (13) (в этом случае $n = 2m$) нужно брать элементарные решения с условием $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ (затухающие решения) и часть решений, для которых $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$ (отбор производится исходя из принципов излучения, если речь идет о конкретных физических задачах, а в абстрактных задачах вводится понятие знаковой характеристики вещественного собственного значения). Возникает так называемая проблема половины (half range problem) в спектральной теории пучков операторов. В частности, возникает важная задача: *является ли полной в пространстве H^m , $m = n/2$, система производных цепочек $v_k = (v_k, \dots, \lambda_k^{m-1} v_k)$ половинной длины, построенных только по выбранной половине собственных функций?*

Эта задача тесно связана с факторизацией пучков операторов, а именно с задачей о возможности представления

$$A(\lambda) = A_-(\lambda)A_+(\lambda),$$

где степень пучков $A_{\pm}(\lambda)$ равна $m = n/2$, а спектр $A_+(\lambda)$ содержит все собственные значения пучка $A(\lambda)$ в правой полуплоскости и часть собственных значений на мнимой оси. Тем самым возникает круг сложных проблем, которые сейчас относят к общей теории несамосопряженных операторов. Даже в случае конечномерного пространства H (т.е. когда коэффициенты операторных пучков являются матрицами) решение этих задач сложно².

2

Задаче о факторизации полиномиальных пучков операторов с матричными коэффициентами посвящены статьи и книги многих математиков, среди которых укажем на работы И. Ц. Гохберга, Р. Касхука (R. Kaashoek), П. Ланкастера (P. Lancaster) и Л. Родмана (L. Rodman).

Первая очень значимая работа, в которой были заложены основы аналитического направления в теории несамосопряженных операторов, была выполнена М. В. Келдышем [11] в 1951 году. Детальное изложение доказательств результатов этой работы вышло в свет только спустя 20 лет, в 1971 году [12]. В частности, Келдыш показал, что при компактном возмущении самосопряженного оператора система собственных и присоединенных векторов сохраняет свойство полноты. Точнее, система собственных и присоединенных векторов оператора $A = (I + S)T$ является полной, если S — компактный оператор, I — тождественный оператор, а $T = T^*$ — оператор конечного порядка, т. е. $\sum \lambda_k^{-p} < \infty$ при некотором $p < \infty$ (здесь λ_k — собственные значения оператора T и мы предполагаем, что T — неограниченный самосопряженный оператор, хотя в работах Келдыша и других математиков до 80-х годов результаты представлялись для операторов в ограниченной записи). В этих же работах [11], [12] Келдыш рассмотрел пучки операторов

$$A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \dots + \lambda^n A_n,$$

где $A_0 = I + S_0$, $A_j = S_j T^j$, $A_n = (I + S_n)T^n$, S_j — компактные операторы, $j = 1, \dots, n$, а T — оператор конечного порядка (ныне такие пучки носят название пучков Келдыша). Келдыш показал, что система собственных и присоединенных векторов таких пучков n -кратно полна в пространстве H^n , т. е. производные цепочки, о которых мы говорили выше, образуют полную систему в пространстве H^n . Для доказательства нужно было развить весьма сложный аналитический аппарат, ключевым результатом в котором является следующее утверждение: *резольвента $A^{-1}(\lambda)$ рассматриваемого пучка Келдыша является мероморфной оператор-функцией конечного порядка роста p* . Это глубокий результат, требующий значительной предварительной работы. А именно, нужно определить понятие регуляризованного определителя для оператора конечного порядка p , развить теорию сингулярных чисел компактных операторов (или неограниченных операторов с дискретным спектром), показать, что этот определитель является целой функцией порядка не выше p , а потом получить оценки резольвенты для оператора конечного порядка для случая, когда этот оператор не имеет собственных значений.

Конечно, Келдыш начинал не на пустом месте: работы по характеристическим определителям и определителям возмущения для ядерных операторов и операторам конечного порядка были ранее. Но эффективных оценок в них не было. Оценка вольтеррова оператора Гильберта—Шмидта, т. е. оператора порядка 2, не имеющего собственных значений, была проведена в замечательной работе Т. Карлемана [13], которая использовала оценки для сингулярных чисел операторов, полученные Г. Вейлем.

Но не было оценок резольвент как мероморфных функций, тем более для оператор-функций, нелинейно зависящих от спектрального параметра.

В своих работах [11], [12] Келдыш ссылался только на статьи Биркгофа [8], [9], книгу Тамаркина [3] и статью Карлемана [13]. Задачи с нелинейным вхождением спектрального параметра, возникшие у Биркгофа и Тамаркина, до появления работы [11] оставались «вещью в себе», не была ясна их связь с дифференциальными уравнениями в частных производных. Заметка [11] поменяла ситуацию кардинально. Тематика, связанная с задачами полноты и базисности собственных векторов несамосопряженных и нормальных операторов, привлекла внимание многих известных математиков, в частности, И. М. Гельфанда, М. Г. Крейна, И. Ц. Гохберга, Ф. Баудера, С. Агмона, В. Б. Лидского, А. С. Маркуса, В. И. Мацаева, М. С. Аграновича и других. Читатель может познакомиться с историей вопроса и результатами в книгах М. А. Наймарка [14], И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [15], А. С. Маркуса [16], обзорах Г. В. Радзиевского [17] и М. С. Аграновича [18]. Подробное изложение истории тематики, включая новые результаты последних лет, имеется в статье автора [19].

Хотя Биркгоф был первым, кто ввел понятие регулярного обыкновенного дифференциального оператора и рассмотрел нелинейные (в частности, полиномиальные) спектральные задачи, важнейшее понятие регулярности для полиномиальных спектральных задач ввел Тамаркин [3]. Только спустя почти половину столетия понятие регулярности для операторов с частными производными появилось в работах Я. Б. Лопатинского [20] и других математиков. Важность понятия регулярности заключается в том, что для регулярных операторов получаются оценки для их резольвенты, подобные оценкам, известным для самосопряженных операторов. Оценки для резольвенты пучков операторов с частными производными вскоре были получены независимо С. Агмоном [21] и в более общем виде М. С. Аграновичем и М. И. Вишиком [22]. Современное изложение соответствующей теории (не только в L_2 , но и в L_p) можно найти в книге Трибеля [23].

Как уже было отмечено, при изучении полиномиальных спектральных задач возникают понятия кратной полноты, кратных разложений, кратной базисности. Однако изучение кратных разложений в пространстве H^n , состоящем из n копий исходного пространства H (как рассматривал Келдыш), не является естественным. В работе [24] для пучков обыкновенных дифференциальных операторов и в работе [25] для пучков общего вида в гильбертовом пространстве H было замечено, что теоремы о базисности производных по Келдышу цепочек в пространствах H^n получить, вообще говоря, нельзя. Дело в том, что линеаризация пучков в пространстве H^n приводит к операторам, которые не являются замыка-

емыми в этом пространстве. Нужно заметить, что от функций, фигурирующих в постановке начальных условий (14), естественно требовать их принадлежности пространствам разной гладкости (начальная функция f_j должна принадлежать пространству большей гладкости, нежели функция f_{j+1} , определяющая последующую производную). В абстрактном случае при изучении пучков вида (13) разумно ввести естественные ограничения на коэффициенты, например потребовать, чтобы были справедливы представления $A_j = B_j T^j$, где B_j — ограниченные операторы, а T — самосопряженный положительный оператор, по которому строится шкала гильбертовых пространств $H_\theta = \mathcal{D}(T^\theta)$, $\theta > 0$, $H_0 = H$ (здесь $\mathcal{D}(T^\theta)$ — область определения оператора T^θ). Естественно полагать, что гладкость начальных функций в наборе $f = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ равномерно ухудшается с ростом нижнего индекса. Поэтому вектор-функцию f естественно вкладывать не в пространство H^n , а в сумму пространств переменной гладкости $H_{\theta+n-1} \oplus H_{\theta+n-2} \oplus \dots \oplus H_\theta$ при некотором $\theta > 0$. Выбор параметра θ нужно проводить с учетом теорем о следах в абстрактных пространствах Соболева $W_p^n(0, \infty; H)$ (см. [26]). При таком подходе получаются результаты о кратной полноте и базисности, в которых гармонично сочетаются методы теории интерполяции, теории следов, теории возмущений, современной теории уравнений в гильбертовых и банаховых пространствах, интенсивно развивавшейся после появления основополагающей работы Агмона и Ниренберга [27].

Задача о полноте, минимальности и базисности производных по Келдышу цепочек половинной длины (half range problem) для самосопряженных или диссипативных пучков операторов также решается в сумме пространств переменной гладкости (если, конечно, $n > 2$). Однако ее решение получается на более трудном пути и требует развития новых идей. Имеющиеся по этой проблеме результаты изложены в работе автора [24].

Наиболее значительное развитие теории Тамаркина краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальной зависимостью от спектрального параметра получила в работе [24]. Мы уже отмечали, что теорема Тамаркина о разложении гладкой функции в ряд по собственным функциям краевой задачи не обеспечивает единственность разложений, не гармонирует с приложениями. Нужно рассматривать кратные разложения. При этом важным оказывается вопрос о том, в каких пространствах их следует рассматривать (в абстрактной ситуации этот вопрос уже обсуждался). Особые трудности возникают, если краевые условия также зависят от спектрального параметра (в этом случае ранее намеченный абстрактный подход не работает). В работе [24] был предложен общий подход к трактовке краевых задач с полиномиальным вхождением спектрального параметра, который позже без существенных

изменений был перенесен на аналогичные задачи с частными производными [28], [29]. Была предложена конструкция построения линеаризаторов краевой задачи (5), (8) в общем случае, когда коэффициенты не только уравнения, но и краевых условий a_{kj}, b_{kj} зависят от λ полиномиально.

Наиболее значимый результат работы [24] заключается в следующем. При любом целом $r \geq 0$ в предположении достаточной гладкости коэффициентов уравнения (5) (которая точно указывается в зависимости от r) можно построить линейный оператор $\mathcal{L}_r$ в пространстве $\mathcal{W}_{r,U}^r$, являющемся подпространством в $W_2^{r+n-1} \oplus \dots \oplus W_2^r + \mathbb{C}^{N_r}$ (здесь $W_2^k = W_2^k[a, b]$ — пространство Соболева и число $N_r \geq 0$ целое), который линеаризует краевую задачу, в частности, спектры задачи и оператора $\mathcal{L}_r$ совпадают, а собственные и присоединенные функции задачи совпадают с первыми координатами собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_r$. Конструкции оператора $\mathcal{L}_r$ и подпространства $\mathcal{W}_{r,U}^r$, в котором он действует, предъявляются явно. Число N_r монотонно убывает с ростом r , и $N_r = 0$ при всех достаточно больших $r \geq r_0$. В случае регулярности краевой задачи (определение регулярности Тамаркина [3] уточняется и упрощается) собственные функции линеаризатора $\mathcal{L}_r$ образуют безусловный базис (возможно, из конечномерных подпространств ограниченной размерности) в пространстве $\mathcal{W}_{r,U}^r$. В частности, при больших r производные по Келдышу цепочки образуют безусловный базис.

Сравнительно недавно возродился интерес к изучению операторов, порожденных системами первого порядка, которые изучал Тамаркин [3]. Дьяков и Митягин [30] доказали, что собственные функции оператора, порожденного (2×2) -системой Дирака с L_2 -потенциалом и регулярными краевыми условиями, образуют безусловный базис (возможно, из подпространств размерности не выше 2) в пространстве $(L_2)^2$. Эта теорема для L_∞ -потенциалов получается из общих результатов Маркуса и Мацаева, опубликованных в 80-е годы (см. [19]). Ослабление условия на потенциал потребовало развития в [30] более тонкой техники для доказательства. Маламуд и Оридорога [31] установили теорему о полноте системы собственных функций оператора, порожденного системой (9), в которой матрица A имеет вид $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ с различными числами a_j , и краевыми условиями, которые были названы почти регулярными. Савчук и Шкаликков [32] получили теорему о безусловной базисности собственных функций регулярного оператора Дирака с L_1 -потенциалом и получили новые теоремы об асимптотике собственных значений таких операторов с потенциалами из L_p .

Работы по уточнению асимптотических формул для фундаментальных матриц решений рассмотренных Тамаркиным систем и получению

асимптотических формул при менее ограничительных условиях, нежели в [3], стали появляться начиная с 50-х годов прошлого столетия. Достаточно подробно история вопроса изложена в недавней работе Савчука и Шкаликова [33]. В этой работе асимптотические формулы для матриц фундаментальных решений получены в наиболее общем случае, только в предположениях суммируемости коэффициентов в системе. Кроме того, проведен анализ остаточных членов в асимптотических разложениях. В работе [34] было модифицировано определение регулярности Тамаркина и Биркгофа—Лангера [35] для систем и на основе результатов [33] и методов [19], [24] предъявлен набросок доказательства теоремы о безусловной базисности собственных функций регулярных операторов. В работе [36] выделен класс систем, которые названы гиперболическими, и определено понятие регулярности и полурегулярности операторов, порожденных такими системами. Для регулярных операторов, порожденных гиперболическими системами, приведен набросок доказательства теоремы о безусловной базисности собственных функций, а для полурегулярных операторов такого класса установлено, что они порождают сильно непрерывные полугруппы в пространствах $(L_2)^n$.

Эти последние работы показывают, что идеи Я. Д. Тамаркина [3] даже после прошествия столетия остаются актуальными и получают дальнейшее развитие.

А. А. Шкаликов

Литература

- [1] *Стеклов В. А.* Общие методы решения основных задач математической физики. Харьков: Паровая Типо-Литография М. Зильберберг и сыновья, 1901.
- [2] *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. Пб.: Рос. гос. акад. тип., 1922–1923.
- [3] *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград: Тип. М. П. Фроловой, 1917.
- [4] *Tamarkin J., Besikowitsch A.* Über die asymptotischen Ausdrücke für die Integrale eines Systems linearer Differentialgleichungen, die von einem Parameter abhängen // *Math. Z.* 1924. Bd. 21, № 1. S. 119–125.
- [5] *Tamarkin J.* Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansions of an arbitrary functions in series of fundamental functions // *Math. Z.* 1928. Bd. 27, № 1. S. 1–54.
- [6] *Tamarkin J. D.* On Fredholm's integral equations, whose kernels are analytic in a parameter // *Ann. Math.* 1926–1927. V. 28, № 1/4. P. 127–152.
- [7] *Horn J.* Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen // *J. reine angewo. Math.* 1908. Bd. 133. S. 19–67.

- [8] *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1908. V. 9, № 2. P. 219–231.
- [9] *Birkhoff G. D.* Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1908. V. 9, № 4. P. 373–395.
- [10] *Schlesinger L.* Über asymptotische Darstellungen der Lösungen linearer Differentialsysteme als Funktionen eines Parameters // *Math. Ann.* 1907. Bd. 63. S. 277–300.
- [11] *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // *Докл. АН СССР.* 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.
- [12] *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // *Успехи матем. наук.* 1971. Т. 26, вып. 4. С. 15–41.
- [13] *Carleman T.* Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen // *Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig.* 1936. Bd. 88. S. 119–132.
- [14] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1969.
- [15] *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
- [16] *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинев: Штиинца, 1986.
- [17] *Радзиевский Г. В.* Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // *Успехи матем. наук.* 1982. Т. 37, вып. 2. С. 81–145.
- [18] *Агранович М. С.* Спектральные свойства задач дифракции // *Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н.* Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977. С. 289–416.
- [19] *Шкаликов А. А.* Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром в спектральной теории оператор-функций // *Успехи матем. наук.* 2016. Т. 71, вып. 5. С. 113–174.
- [20] *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // *Укр. матем. журнал.* 1953. Т. 5, вып. 2. С. 123–151.
- [21] *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // *Comm. Pure Appl. Math.* 1962. V. 15, № 2. P. 119–147.
- [22] *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // *Успехи матем. наук.* 1964. Т. 19, вып. 3. С. 53–161.
- [23] *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
- [24] *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // *Труды сем. им. И. Г. Петровского.* 1983. Т. 9. С. 140–179.

- [25] Шкаликов А. А. Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними // Труды сем. им. И. Г. Петровского. 1989. Т. 14. С. 140–224.
- [26] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
- [27] Agmon S., Nirenberg L. Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space // Comm. Pure Appl. Math. 1963. V. 16, № 2. P. 121–239.
- [28] Шкред А. В. О линейризации спектральных задач с параметром в граничном условии и свойствах производных цепочек М. В. Келдыша // Матем. заметки. 1989. Т. 46, вып. 4. С. 99–109.
- [29] Шкаликов А. А., Шкред А. В. Задача об установившихся колебаниях трансверсально-изотропного полуцилиндра // Матем. сб. 1991. Т. 182, № 8. С. 1222–1246.
- [30] Djakov P., Mityagin B. Riesz bases consisting of root functions of 1D Dirac operators // Proc. Amer. Math. Soc. 2013. V. 141, № 4. P. 1361–1375.
- [31] Malamud M. M., Oridoroga L. L. On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first order systems of ordinary differential equations // J. Funct. Anal. 2012. V. 263, № 7. P. 1939–1980.
- [32] Savchuk A. M., Shkalikov A. A. The Dirac operator with complex-valued summable potential // Math. Notes. 2014. V. 96, № 5–6. P. 777–810.
- [33] Савчук А. М., Шкаликов А. А. Асимптотический анализ решений обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями // Матем. сб. 2020. Т. 211, № 11. С. 129–166.
- [34] Шкаликов А. А. Регулярные спектральные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Успехи матем. наук. 2021. Т. 76, вып. 5. С. 203–204.
- [35] Birkhoff G. D., Langer R. E. The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order // Proc. Amer. Acad. Arts Sci. 1923. V. 58, № 2. P. 51–128.
- [36] Шкаликов А. А. Регулярные спектральные задачи гиперболического типа для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Матем. заметки. 2021. Т. 110, вып. 5. С. 796–800.

Борис Николаевич Делоне

(1890–1980)

Борис Николаевич Делоне — ученик Д. А. Граве, профессор ЛГУ (1922–1935) и МГУ (1935–1958), член-корреспондент АН СССР (1929). Он работал в области алгебры, теории чисел, вычислительной геометрии, математической кристаллографии и истории математики.

Б. Н. Делоне получил явную оценку на количество целых решений кубических уравнений Пелля, а затем и произвольных диофантовых уравнений третьей степени с отрицательным дискриминантом. Дальнейшее развитие геометрического подхода к решению уравнений в радикалах привело его к геометрическому изложению теории Галуа, а затем к обратной задаче теории Галуа для разрешимых групп. Он дал полную классификацию четырехмерных параллелепипедов, исследовал правильные разбиения n -мерного пространства с произвольной федоровской группой, установил наличие 24 типов трехмерных решеток в зависимости от комбинаторного строения области Вороного—Дирихле и расположения элементов симметрии относительно нее. В 1959 году Борис Николаевич был награжден премией Федорова АН СССР за работы по кристаллографии.

Борис Николаевич Делоне родился в Петербурге в семье профессора механики Н. Б. Делоне. Прадед Б. Н. Делоне, Пьер Делоне (Pierre Delaunay), был фельдшером в наполеоновской армии, попал в плен во время войны 1812 года. После освобождения он работал врачом в России, получил дворянство и женился на русской.

С ранних лет Борис проявлял интерес к музыке и математике, играл все сонаты Бетховена, сочинял сам; в 12 лет знал основы анализа, самостоятельно приступил к исследованиям по алгебре и теории чисел. В семье часто бывал Г. Ф. Вороной, работы которого впоследствии оказали



влияние на Делоне. В 1904 году Борис с отцом приехали в Гейдельберг на Международный математический конгресс — послушать великих математиков Давида Гильберта и Германа Минковского.

В 1906 году семья поселилась в Киеве. Под влиянием Н. Е. Жуковского отец Бориса организует первый в России воздухоплавательный кружок, участником которого был, в частности, И. И. Сикорский, будущий знаменитый конструктор вертолетов. В течение двух лет Борис строит планеры, совершенствуя их конструкцию и совершая на них полеты (один раз он упал с высоты 15 метров, по счастью, на недавно вспаханную землю).

В 1908 году Борис Николаевич поступил на физико-математический факультет Киевского университета, одновременно с О. Ю. Шмидтом. Годом позднее сюда же поступил и Н. Г. Чеботарев. Они активно включились в работу семинара профессора Д. А. Граве. В этом семинаре на долгие годы определилась область научных интересов Бориса Николаевича — алгебраическая теория чисел.

Еще студентом Делоне интересовался алгебраической теорией чисел и написал сочинение «Связь между теорией идеалов и теорией Галуа» (1912), за что был удостоен Большой золотой медали. Сразу после университета он начал цикл исследований по теории неопределенных уравнений, прежде всего кубического уравнения Пелля.

По окончании университета (1913) Б. Н. Делоне преподавал там же. С 1922 до 1935 года он жил в Петрограде/Ленинграде, преподавал в университете, в 1923 году стал профессором, в 1930–1934 гг. возглавлял кафедру алгебры и теории чисел. Б. Н. Делоне был членом Ленинградского физико-математического общества. В 1928 году ездил в Германию и Италию для чтения лекций. С 1932 года работал в Математическом институте, с 1934 — член его ученого совета; в 1945–1960 гг. заведовал отделом алгебры, с 1960 года — отделом геометрии. С 1935 года преподавал в МГУ, где заведовал кафедрой высшей геометрии (1935–1943). С 1944 года — член ученого совета Института кристаллографии АН СССР.

Проведенные Б. Н. Делоне исследования теории кубических иррациональностей включают также блестящее геометрическое изложение алгоритма Вороного. Делоне разрабатывал также вопросы приведения квадратичных форм и теорию решетчатых покрытий пространства сферами. Он написал несколько работ, посвященных истории алгебры и геометрии (об Эйлере, Гауссе, Федорове), книгу о Чебышёве и Золотареве «Петербургская школа теории чисел» (1947). Результаты Б. Н. Делоне по теории неопределенных уравнений и теории кубических иррациональностей, а также его идеи, получившие развитие в работах его учеников, изложены в монографии «Теория иррациональностей третьей степени» (1940, совместно с Д. К. Фаддеевым).

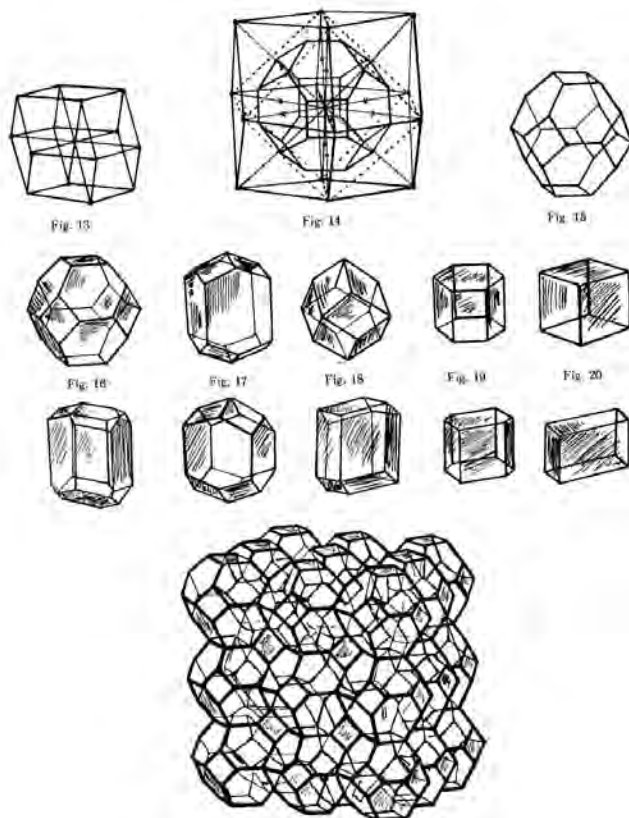
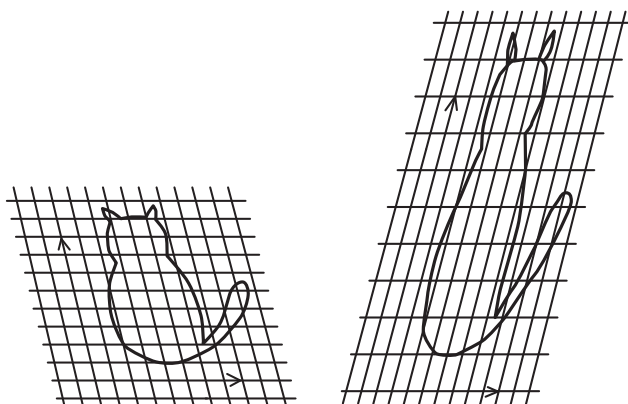


Иллюстрация из доклада Б. Н. Делоне «Sur la sphère vide» на Международном конгрессе математиков 1924 года



Иллюстрация, которую Делоне использовал в лекции об аффинных преобразованиях



Пик Делоне (справа)

Учениками Делоне считали себя А. Д. Александров, И. Р. Шафаревич и Д. К. Фаддеев.

Б. Н. Делоне был отличным преподавателем и много работал над тем, чтобы передать геометрическую суть происходящего. В курсе аналитической геометрии на лекции по аффинным преобразованиям Делоне рисовал кота и показывал, как меняется его изображение. Слушать эту лекцию приходили студенты всех курсов.

Весной 1934 года Делоне организовал в Ленинграде первую математическую олимпиаду для школьников.

Б. Н. Делоне стал одним из основоположников советского альпинизма. Любовь к горам Делоне привил отец, с которым они в 1903 году совершили поход в Альпы. Делоне был мастером спорта СССР по альпинизму; его перу принадлежит книга «Вершины Западного Кавказа» (1938). Б. Н. Делоне разработал принципы классификации горных восхождений (пять категорий сложности) и в соответствии с ними расклассифицировал более 200 маршрутов на вершины Кавказа, Средней Азии и Алтая. В честь него названы пик Делоне на Аккемской стене горы Белухи и перевал Делоне на Катунском хребте Горного Алтая.

Даже в преклонном возрасте Делоне не отказывался от своего увлечения. Например, в 1975 году в возрасте 86 лет за один день он проделал сле-

дующий маршрут: провел ночь на высоте 4200 метров у подножья пика Хан-Тенгри в Киргизии при двадцатиградусном морозе, утром на вертолете спустился во Фрунзе (ныне Бишкек), где стояла сорокоградусная жара, затем рейсовым самолетом долетел до Москвы. Глубокой ночью, добираясь до своей подмосковной дачи в Абрамцеве, он заблудился в лесу. Тем не менее к утру Борис Николаевич благополучно возвратился домой — только рюкзак пришлось оставить.

Г. И. Синкевич

Литература

- [1] Delaunay Pierre-Charles. Петр Карлович Делоне. Материалы с Всероссийского генеалогического древа. <https://forum.vgd.ru/?t=76335>
- [2] Долбилин Н. П. Многогранный Делоне // Квант. 2010. № 1, 2. https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/431055/Mnogogrannyi_Delone
- [3] Борис Николаевич Делоне (биография и библиография) / Епифанова А. П. (ред.). Вступительная статья Д. К. Фаддеева. М.: Наука, 1967. 58 с.
- [4] МГУ. Из истории кафедры высшей геометрии и топологии. <http://higecom.math.msu.su/history/russian.html>

Б. Н. Делоне и диофантовы уравнения третьей степени

В начале 1910-х гг. в Киевском университете Дмитрий Александрович Граве, представитель знаменитой петербургской школы теории чисел, организовал алгебраический семинар, в который влились несколько исключительно одаренных молодых людей, ставших впоследствии выдающимися математиками: Б. Делоне, О. Шмидт, Н. Чеботарев, А. Островский. Мы расскажем об исследованиях одного из них, Бориса Николаевича Делоне. За блестящую дипломную работу Б. Делоне был удостоен большой золотой медали университета и оставлен «для подготовки к профессорскому званию». В это время началась Первая мировая война; Б. Делоне, не оставляя научной работы, работал в военном госпитале на рентгеновском аппарате. Летом 1915 года, когда фронт приблизился к Киеву, университет был эвакуирован в Саратов и возобновил работу лишь осенью 1916 года.

В этих чрезвычайных обстоятельствах темой будущих исследований Борис Делоне выбрал фундаментальную проблему в теории чисел: неопределенные уравнения третьей степени. Прогресс в теории чисел всегда определялся достижениями выдающихся математиков. Теория неопределенных уравнений античного периода связана с именами Пифагора и Диофанта. Решение простейших диофантовых уравнений — уравнений первой степени с двумя неизвестными — появилось в сочинениях крупнейшего индийского математика Ариабхаты (VI век). Решение простейшего квадратного неопределенного уравнения — уравнения Пелля — было полностью исследовано в работах других индийских математиков Брахмагупты (VII век) и Бхаскары (XII век). Это уравнение называют именем британского математика XVII века Дж. Пелля, потому что решение этого важного уравнения было ошибочно приписано ему Эйлером. Последняя точка в теории квадратных неопределенных уравнений была поставлена великим Лагранжем. Кубические же диофантовы уравнения оставались практически неисследованными еще около ста лет, вплоть до работ А. Туэ и Б. Делоне. Норвежский математик Аксель Туэ доказал (1909), что уравнение вида $f(x, y) = a$, где f — неприводимая форма сте-

пени не ниже 3 от двух переменных над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, может иметь лишь конечное число целочисленных решений.

В середине 1910-х гг. Б. Н. Делоне, зная о работах Лагранжа по теории неопределенных уравнений второй степени, но не зная о работах Туэ, приступил к исследованию уравнения вида

$$x^3a + y^3 = 1, \quad (1)$$

где a — целое, но не куб целого. В случае, когда a — куб целого, форма $x^3a + y^3$ разлагается в произведение линейного и квадратного многочленов от двух переменных с целыми коэффициентами и решение кубического уравнения (1) сводится к решению диофантовых уравнений степени 1 и 2 соответственно. Уравнение (1) является кубическим аналогом важного диофантова квадратного уравнения $x^2a - y^2 = 1$ — уравнения Пелля, о котором шла речь выше. Уравнение (1) всегда имеет тривиальное решение $(0, 1)$. Как найти все остальные решения, если они существуют? Для этого Делоне рассмотрел кольцо

$$\sigma = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{a}] = \{z\sqrt[3]{a^2} + x\sqrt[3]{a} + y : x, y, z \in \mathbb{Z}\},$$

получающееся в результате присоединения к кольцу $\mathbb{Z}$ числа $\sqrt[3]{a}$. Пусть (x, y) — решение (в целых числах) уравнения (1); рассмотрим элемент $\varepsilon = x\sqrt[3]{a} + y \in \sigma$. Легко видеть, что элемент

$$\varepsilon^{-1} = x^2\sqrt[3]{a^2} - xy\sqrt[3]{a} + y^2 \in \sigma$$

является обратным к ε . Обратимый элемент называют также единицей кольца. Итак, любое решение уравнения (1) соответствует некоторой единице ε кольца, причем *двучленной* в том смысле, что в выражении для ε отсутствует $\sqrt[3]{a^2}$.

Таким образом, вопрос о существовании для уравнения (1) нетривиальных решений и их нахождении сводится к вопросу о существовании и нахождении двучленных единиц в кольце σ . Легко видеть, что если ε — единица кольца, то ему обратный элемент $1/\varepsilon$ и им противоположные числа $-\varepsilon$ и $-1/\varepsilon$ также являются единицами кольца. Очевидно, что из этой четверки чисел только одно будет положительным и меньшим 1. Эта единица, обозначим ее через ε , называется положительной прямой единицей: $0 < \varepsilon < 1$. Обратная ей единица $1/\varepsilon$, $1 < 1/\varepsilon$, называется положительной обратной единицей. В силу знаменитой теоремы Дирихле о единицах любая положительная единица кольца σ есть целая степень m так называемой основной (также положительной) единицы ε_0 . Таким образом, задача решения уравнения (1) сводится к нахождению тех положительных целых значений m , при которых двучленна либо прямая единица $\varepsilon = \varepsilon_0^m$, либо обратная к ней единица.

Сначала Делоне доказал, что положительная обратная основная единица, как и любая ее положительная степень, обязательно трехчленная. Таким образом, вопрос свелся к изучению положительных степеней m прямой положительной основной единицы ε_0 : $\varepsilon = \varepsilon_0^m$. При помощи остроумных рассуждений Делоне показал, что если основная единица ε_0 двучленная, то никакая ее положительная степень ε_0^m , $m \neq 1$, не является двучленной единицей. На следующем этапе, потребовавшем еще большей изобретательности, Делоне установил, что если основная положительная единица ε_0 трехчленная, то есть $\varepsilon_0 = z_0 \sqrt[3]{a^2} + x_0 \sqrt[3]{a} + y_0$, то и ε_0^m , $m > 0$, также является трехчленной единицей. Таким образом, в кольце σ не может быть более одной положительной двучленной единицы, причем эта единственная двучленная единица должна быть обязательно прямой положительной основной единицей.

Тем самым Делоне получил окончательный результат для уравнения (1). Помимо решения $(0, 1)$, уравнение может иметь еще не более одного решения в целых числах. Чтобы найти это решение, нужно найти в кольце σ основную единицу ε_0 . Если она трехчленна, то нетривиальных решений нет. Если ε_0 двучленна, $\varepsilon_0 = x \sqrt[3]{a} + y$, то имеется только одно нетривиальное решение (x, y) .

В 1897 году Г. Ф. Вороной построил эффективный алгоритм нахождения основной единицы в кубическом случае. Эта работа Вороного в свое время произвела сильное впечатление на его научного руководителя А. А. Маркова. Вороной был другом отца Бориса Николаевича, Николая Борисовича Делоне, так что, будучи подростком, Борис Делоне лично знал Вороного. В студенческие годы Делоне глубоко изучил и его знаменитую работу о единицах. Впоследствии эта работа Вороного подтолкнула Делоне к исследованиям, которые полностью закрыли вопрос о решении кубического аналога уравнения Пелля.

Вдохновленный успехом, Б. Н. Делоне приступил к более общей проблеме: найти решения уравнения

$$f(x, y) = 1, \quad (2)$$

где $f(x, y) = x^3 + ax^2y + bxy^2 + cy^3$ — кубическая форма с двумя переменными с отрицательным дискриминантом. Отрицательность дискриминанта означает, что ассоциированное с формой $f(x, y)$ уравнение

$$t^3 + at^2 + bt + c = 0 \quad (3)$$

имеет лишь один вещественный корень ρ .

Естественно предполагать, что ρ иррационально, иначе форма $f(x, y)$ была бы разложимой и решение уравнения (2) свелось бы к решению диофантовых уравнений степеней 1 и 2. В этом общем случае Делоне также

рассмотрел кольцо $\sigma = \mathbb{Z}[\rho]$ алгебраических чисел $x + y\rho + z\rho^2$, свел проблему нахождения решений уравнения (2) к проблеме нахождения двучленных единиц вида $x + y\rho$ в кольце σ и доказал фундаментальную теорему.

Для любого кубического диофантова уравнения (2) с отрицательным дискриминантом число решений (целых) не превосходит 5; лишь одно конкретное уравнение вида (2) имеет ровно 5 решений; еще два уравнения вида (2) имеют четыре решения; все остальные уравнения вида (2) имеют не более трех решений.

Делоне построил так называемый «алгоритм повышения», при помощи которого рассмотрел ряд уравнений вида (2) и для каждого нашел все решения. Несмотря на остроумие этого метода и возможность применять его к любому уравнению (2), Б. Делоне не дал никакой оценки сверху для числа шагов, гарантирующего нахождение всех решений.

Вопрос об эффективной верхней оценке для весьма широкого класса диофантовых уравнений степени выше 2 был решен полвека спустя английским математиком Аланом Бейкером (Филдсовская медаль 1970 года). Рассмотрим диофантово уравнение $f(x, y) = m$, где $m > 0$ — целое число, $f(x, y)$ — неприводимая бинарная форма степени $n \geq 3$ с целыми коэффициентами. Бейкер показал, что существует такая константа C , явно выражающаяся через коэффициенты формы $f(x, y)$, что для любого решения (x_0, y_0) диофантова уравнения $f(x, y) = m$ имеет место оценка $\max(|x_0|, |y_0|) < C$.

Из работы Бейкера следует, что теоретически можно найти все решения кубических уравнений, исследованных Делоне. Однако это обстоятельство не умаляет значения работ Делоне, в которых раскрывается природа решений неопределенных кубических уравнений. Ближайший ученик Бориса Николаевича Дмитрий Константинович Фаддеев так охарактеризовал эти работы Делоне:

По конкретности анализа, простоте и ясности цикл работ Б. Н. Делоне, посвященных неопределенным уравнениям, является исключительным в математике XX в. с ее часто громоздким аппаратом и абстрактными построениями. По своему стилю этот цикл близок к лучшим образцам классических работ Гаусса и Чебышёва.

Н. П. Долбилин

Абрам Самойлович Безикович (1891–1970)

А. С. Безикович родился в Бердянске Таврической губернии Российской империи в многодетной семье караимского ювелира. После окончания бердянской гимназии (1908) он учился на математическом отделении Петербургского университета.

Состав курса в 1908–1912 гг. подобрался очень сильный и инициативный (Владимир Смирнов, Николай Розе, Абрам Безикович, Яков Тамаркин, Александр Фридман, Яков Шохат и т. д.). Они активно работали в научном кружке при кафедре чистой математики под руководством А. А. Маркова и Я. В. Успенского, посещали «домашний семинар» работавшего в то время в России австрийского физика Пауля Эренфеста, где знакомились с новейшими достижениями физики. Сразу после университета, а возможно и на старших курсах, Абрам Безикович принимал участие в другом математическом кружке, организованном выпускниками университета А. Фридманом, Я. Тамаркиным и А. Гавриловым. Члены «научного кружка без руководителя» работали по собственной программе, изучая не только классические труды, но и новые тогда направления математического анализа, которые были вне круга интересов старшего поколения петербургских математиков. После окончания университета по ходатайству академиков А. А. Маркова и В. А. Стеклова Безикович был оставлен при университете для приготовления к профессорскому званию (1912). Но степень магистра в России ввиду революционной ситуации он так и не получил, хотя магистерские экзамены сдал (1915). В 1916 году А. С. Безикович перешел в православие, чтобы жениться. Тогда же в «Известиях Академии наук» появилась и его первая научная статья «Новый вывод предельного выражения вероятности для случая независимых испытаний». Защита диссертации (оппоненты —



Г. М. Фихтенгольц и Я. Д. Тамаркин), намеченная на 31 декабря 1917 г., не состоялась, скорее всего, из-за революционной нестабильности в стране.

В 1917 году Абрам Безикович — приват-доцент Петербургского университета — вместе с группой молодых математиков был отправлен в Пермский университет, где работал в качестве экстраординарного профессора по кафедре математики физико-математического факультета. Атмосферу научного поиска alma-mater молодые профессора-петербуржцы перенесли на пермскую землю: уже в 1918 году они организовали Пермское физико-математическое общество и издавали «Журнал физико-математического общества при Пермском государственном университете», где печатали свои труды.

В пермский период Абрам Безикович как представитель университета в городском комитете по народному образованию много занимался делами просвещения и просветительства в пермском крае, в июне 1919 года был назначен ректором, а в октябре того же года — деканом физико-математического факультета, создавал на базе Пермского университета «рабочий факультет». Ректорские обязанности ему пришлось исполнять менее полугода, правда, в сложнейших условиях гражданской войны. При отступлении армии Колчака и занятии города Красной армией университет подвергся разрушениям, но молодой 29-летний ректор умело и четко организовал спасение университетских книг и других научных ценностей.



А. С. Безикович в детстве

Единственный человек, здраво размышлявший и спасший оставшееся имущество, был Б., по-видимому, ученик Маркова не только в области математики, но и в области решительных, точных и определенных действий, — писал академику Стеклову А. А. Фридман (Пермь, август 1919 года).

Деканом А. С. Безикович тоже пробыл только год, так как по решению совета Пермского университета был отправлен в заграничную научную командировку (1920). Добраться удалось только до Петрограда, где он был принят в качестве приват-доцента на работу в университет и на профессорскую должность — в Педагогический институт. Последствия гражданской войны, разруха и полуголодное существование не способствовали занятиям наукой, но именно в эти годы Абрам Безикович пло-

дотворно работал над вопросами дифференцируемости непрерывных функций, дополняя результаты Вейерштрасса и Данжуа, и проблемой связи максимума и минимума модуля целой функции порядка меньше единицы, доказав одну из важных теорем Дж. Литтлвуда.

Благодаря содействию П. Эренфеста, отправившего научные работы Безиковича в Данию (Х. Бору), Голландию (Н. Г. ван дер Корпту) и в Англию (Дж. Литтлвуду и Г. Харди), Безикович получил стипендию Рокфеллеровского фонда для научных занятий за рубежом (ноябрь 1924 года), но разрешения на выезд ему не дали. Поэтому он нелегально перешел границу (по одним сведениям — финскую, по другим — латвийскую) и отправился в Копенгаген, где в течение года под руководством Х. Бора занимался исследованиями в области квазипериодических функций. Затем он перебрался в Оксфорд к Г. Харди, обеспечившему ему чтение лекций в университете Ливерпуля. С 1927 года А. С. Безикович жил и работал в Кембридже, занимал должность лектора университета, затем стал членом Тринити-колледжа, а с 1950 года возглавил кафедру математики. Скончался Абрам Самойлович в Кембридже 2 ноября 1970 года.

За выдающиеся работы по почти периодическим функциям, по теории меры и интегрирования, а также за труды во многих других областях теории функций А. С. Безикович был избран членом Лондонского королевского общества, награжден медалью О. Моргана — высшей премией Лондонского математического общества — и медалью Дж. Сильвестра.

Называя себя знатоком «патологии математики», Безикович в течение многих лет вел в газете Кембриджского университета еженедельную рубрику «спорных проблем» — к удовольствию и для пользы студентов, тщательно читая и аннотируя их решения.

Научное наследие А. С. Безиковича составляет более 130 работ в области теории почти периодических функций, плоской топологии, теории меры, мер Хаусдорфа и других разделов математики. Важный класс функций называется почти периодическими функциями Безиковича. Большой резонанс в современной математике имели исследования А. С. Безикови-



Портрет А. С. Безиковича работы Евы Кокстер (Eve Goldsmith-Coxeter). Хранится в галерее Тринити-колледжа

ча по развитию результатов Хаусдорфа в области размерности множеств. По словам Б. Мандельброта, если Хаусдорфа можно назвать отцом нестандартной размерности, то Безикович, несомненно, заслужил себе звание ее матери.

Безикович был талантливым математиком и не менее талантливым педагогом, обаятельным и остроумным. Русскому «Бесси (Bessi)», как нежно называли его студенты (а язык его лекций называли «Basic English»), был прощен плохой английский с неправильными оборотами и без артиклей только за одну шутку: «Джентльмены, 50 миллионов англичан говорят по-английски, как вы, но 150 миллионов русских говорят по-английски, как я». По воспоминаниям его учеников, многие из которых стали известными учеными (Р. Кейнс, Г. Бонди, Дж. Гиллис, О. Эйберт и др.), о его лекциях в Кембридже существовали легенды, из уст в уста передавались парадоксальные задачи, например: «В закрытом цирке находятся голодный лев и христианин, обладающие одинаковой максимальной скоростью. Какую тактику нужно избрать христианину, чтобы лев его не поймал? И как нужно двигаться льву, чтобы позавтракать?» Безикович был мастером сложных конструкций, которые могли открыть парадоксальные истины, он не стремился к абстракциям и обобщениям, он был решателем проблем, а не строителем систем, но его вклад в развитие математики достоин уважения и заслуженно почитаем в научном мире.

Н. В. Локоть

Литература

- [1] Ермолаева Н. Безикович Абрам Самойлович // Русское зарубежье. Золотая книга эмиграции. Первая треть XX века. М.: РОССПЭН, 1997. С. 71–73.
- [2] Бячков А. Б., Думкин В. В., Ошуркова Р. А., Шеретов В. Г. Безикович Абрам Самойлович // Профессора Пермского государственного университета (1916–2001). Пермь: Изд-во Пермского ун-та, 2001. С. 18–20.
- [3] Безикович Абрам Самойлович // Костицын В. И. Ректоры Пермского университета. 1916–2006. Пермь: Изд-во Пермского ун-та, 2006. 2-е изд., перераб. и доп. С. 35–44.
- [4] Ульянкина Т. И. Российская научная эмиграция в Великобритании (1917–1940-е гг.) // Культурное и научное наследие российской эмиграции в Великобритании (1917–1940-е гг.) / Ред. О. Б. Василевская. М.: Русский путь, 2002. С. 91–122.
- [5] Трубецков Д. И., Трубецкова Е. Г. Фрактальная геометрия в лицах и судьбах // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 6. С. 4–36.

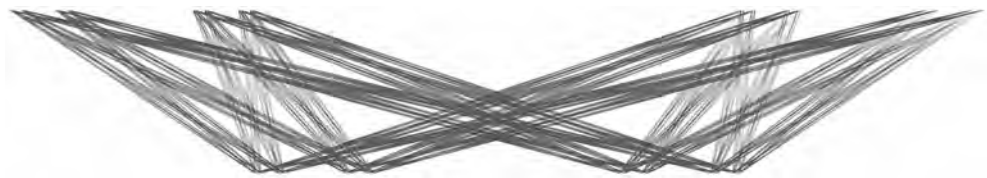
Теорема Безиковича о проекциях и множества Безиковича

А. С. Безикович создал геометрическую теорию меры. Но прежде чем говорить о ней, обсудим его ранний результат 1919 года об интегрировании по Риману. Эта работа имела и до сих пор имеет огромное влияние на современный гармонический анализ и другие области математики. Можно спросить, каким же образом работа столетней давности, когда интегрирование по Риману уже было обобщено до интегрирования по Лебегу, может иметь сегодня такое значение. На самом деле важен здесь не результат, а созданный Безиковичем метод.

Вопрос состоял в том, для всякой ли интегрируемой по Риману функции f на плоскости найдется такой поворот ρ , что функция $y \mapsto f(\rho(x, y))$ будет интегрируемой по Риману при всех x . Безикович показал, что это не всегда возможно. Он построил на плоскости компакт B нулевой лебеговой меры, содержащий единичный отрезок каждого направления. Тогда контрпримером служит характеристическая функция подмножества B , состоящего из всех точек, хотя бы одна координата которых рациональна. Множества наподобие B ныне называются множествами Безиковича или Какейи.

Статья Безиковича была опубликована в пермском журнале и, вероятно, не привлекла большого внимания. В 1917 году С. Какейя поставил следующий вопрос, о котором Безикович явно не знал: какова наименьшая площадь плоской области, в которой можно непрерывно вращать прямой линейный отрезок длины 1? Позже, когда Безикович услышал об этом вопросе, он снова опубликовал свою конструкцию в 1928 году в журнале *Mathematische Zeitschrift*. Его метод показывает, что такое возможно сделать внутри области произвольно малой площади.

Конструкция Безиковича технически сложна, но использует лишь элементарную геометрию. Позже она усовершенствовалась и упрощалась многими авторами. Возможно, самый изящный способ был найден самим Безиковичем в 1960-х годах. Прежде чем перейти к описанию построения, объясним, как Безикович пришел к геометрической теории меры.



Аппроксимация множества типа Безиковича, которое содержит «иглы» всех направлений от $(1, -1)$ до $(1, 1)$

В начале прошлого века А. Лебег разработал теорию меры. Один из ее аспектов состоял в определении внешней меры, которая принимает неотрицательное значение на любом подмножестве евклидова n -мерного пространства $\mathbb{R}^n$, а применительно к хорошо устроенным множествам согласована с любым другим разумным определением объема.

В 1914 году К. Каратеодори построил для каждого целого $k = 1, \dots, n - 1$ внешнюю меру $\mathcal{H}^k$, играющую роль k -мерной площади гладких k -мерных поверхностей и других k -мерных объектов. Теперь эта мера называется хаусдорфовой, поскольку в 1919 году Ф. Хаусдорф показал, что ее конструкция распространяется на нецелые значения k , и применил ее к канторовым множествам.

Для $k = 1$ получаем длину $\mathcal{H}^1$, и возникает вопрос: что можно сказать о строении множеств положительной конечной длины? Очевидные примеры таких множеств — спрямляемые кривые и их подмножества положительной длины. Но есть много примеров и среди фракталов. Пусть, скажем, C_1 — стандартное канторово множество хаусдорфовой размерности $1/2$ на отрезке $[0, 1]$, которое получается, если сначала из отрезка $[0, 1]$ удалить среднюю часть $[1/4, 3/4]$, затем из оставшихся отрезков длины $1/4$ удалить средние части длины $1/8$ и так далее. Тогда множество $C = C_1 \times C_1$ имеет положительную конечную длину и пересекает любую спрямляемую кривую по множеству нулевой длины.

Это нетрудно показать: у любой спрямляемой кривой есть касательная почти во всех ее точках, но множество C вообще не имеет касательных. Значит, эти два множества могут пересекаться лишь по множеству нулевой длины. Если существуют столь различные примеры, то что же вообще можно сказать о множествах положительной конечной длины? Безикович показал, что любое множество конечной длины можно представить единственным, с точностью до множества нулевой длины, образом как объединение *регулярного* множества со свойствами, похожими на свойства спрямляемых кривых, и *иррегулярного* множества, чьи геометрические свойства прямо противоположны и напоминают свойства канторова множества C .

Безикович доказал, что регулярные — а тем самым и иррегулярные — множества можно охарактеризовать аналогами теоремы Лебега о точках плотности, а также многими геометрическими свойствами: например, регулярное множество покрывается счетным объединением спрямляемых кривых с точностью до множества меры нуль и почти всюду имеет касательные, определенные в терминах теории меры.

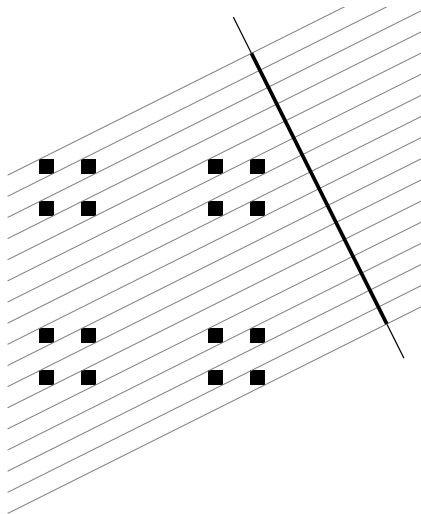
Другая, особенно интересная характеристизация была сформулирована в терминах ортогональных проекций. Безикович доказал, что множество конечной длины иррегулярно в точности тогда, когда его проекция на почти любую проходящую через начало координат прямую имеет нулевую длину. Это теорема Безиковича о проекциях.

Теорема. Пусть $\mathcal{H}^1$ -измеримое множество $E \subset \mathbb{R}^2$ имеет конечную длину, т. е. $\mathcal{H}^1(E) < \infty$. Равенство $\mathcal{H}^1(\Gamma \cap E) = 0$ справедливо для любой спрямляемой кривой Γ тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}^1(P_e(E)) = 0$ для почти всех единичных векторов $e \in S^1$, где P_e — ортогональная проекция на прямую $\{te : t \in \mathbb{R}\}$.

Существенная часть здесь «только тогда», обратное утверждение доказывается легко. Так что нужно показать, что длина проекции иррегулярного множества на почти всякое направление равна нулю. Безикович доказал это в 1939 году остроумным рассуждением. Не считая технических усовершенствований, до сих пор это единственное известное доказательство.

Вернемся к множествам Безиковича. В 1964 году, через 45 лет после его первой конструкции и через 25 лет после теоремы о проекциях, Безикович нашел между ними красивую взаимосвязь. Используя полярное соответствие между точками и прямыми на плоскости, а также свою теорему о проекциях, он усилил свой результат: существуют борелевские множества меры нуль, содержащие целую прямую любого направления. Он исследовал в большей общности регулярные и иррегулярные множества прямых и их связи с множествами точек, используя двойственность. Идею построения множеств Безиковича можно объяснить чуть проще с помощью следующей параметризации прямых: если $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, то пусть $l(a, b)$ обозначает прямую $y = ax + b$.

При $A \subset \mathbb{R}^2$ объединение $l(A) := \bigcup_{(a,b) \in A} l(a, b)$ содержит прямую любого наклона $a \in [0, 1]$, если проекция $\pi(A)$ на первую координатную ось содержит $[0, 1]$. Взяв объединение четырех образов множества $l(A)$ при вращениях, получаем множество, содержащее прямую любого направления. Поэтому достаточно найти такое множество A , что $\pi(A)$ содержит отрезок, а $l(A)$ имеет нулевую площадь. Далее, $l(A) = \{(x, y) : y = ax + b, (a, b) \in A\}$, откуда $l(A) \cap \{x = t\} = \{t\} \times \pi_t(A)$, где $\pi_t(a, b) = ta + b$. Отображение π_t по существу является проекцией, а теорема Безиковича о проекци-



Множество C (квадрат одномерного канторова множества) и его проекция на прямую $y = -2x$

ях говорит нам, что $\mathcal{H}^1(\pi_t(A)) = 0$ для почти всех t , если A иррегулярно и $\mathcal{H}^1(A) < \infty$. Тогда A имеет нулевую площадь по теореме Фубини. Так что остается лишь найти иррегулярное множество конечной длины, одна из проекций которого — отрезок. Примером может служить рассмотренное выше двумерное канторово множество C .

Вызывает восхищение, насколько сильно описанная выше работа Безиковича повлияла и продолжает влиять на несколько областей совершенно разного характера. Вначале обратимся к спрямляемым, т. е. регулярным, множествам. Г. Федерер в 1940-х годах обобщил большинство результатов Безиковича на высшие размерности и вместо терминов «регулярный» и «иррегулярный» ввел ставшие общеупотребительными «спрямляемый» и «вполне неспрямляемый». В частности, он доказал многомерную теорему о проекциях, существенно опираясь на доказательство Безиковича для плоского случая.

Спрямляемость и теорема Безиковича—Федерера о проекциях позже сыграли важнейшую роль в геометрическом вариационном исчислении. В 1960 году Федерер и В. Флеминг построили геометрическую теорию потоков, позволившую поставить в очень общем и удобном виде задачу Плато: найти и описать k -мерные поверхности минимальной площади с заданной граничной поверхностью. Минимизирующие соответствующий функционал потоки существуют по простым соображениям слабой компактности, но априори это объекты очень общей природы (обобщенные функции). В теории Федерера и Флеминга основной является

теорема компактности для спрямляемых потоков, которая гарантирует спрямляемую структуру минимальных потоков. Доказательство основано на теореме Безиковича—Федерера о проекциях.

Однако еще примечательнее роль множеств Безиковича в современном гармоническом анализе. Связанные с ними методы обычно называются методами Какейи. В 1971 году Ч. Фефферман применил их в решении проблемы о шаровом мультипликаторе. Пусть B — шар в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Определим мультипликатор Фурье T_B , положив $\widehat{T_B f} = \chi_B \widehat{f}$. По теореме Планшереля этот оператор ограничен в L^2 . Фефферман показал, что он неограничен в L^p при всех p , $1 \leq p \leq \infty$, кроме $p = 2$.

Воспользовавшись двойственностью, М. Дэвис в 1971 году доказал, что множества Безиковича на плоскости имеют максимальную хаусдорфову размерность, то есть два. Есть гипотеза (так называемая гипотеза Какейи), что то же верно и в высших размерностях: согласно этой гипотезе, множества Безиковича в $\mathbb{R}^n$ должны иметь хаусдорфову размерность n . Многими авторами получены частичные результаты, но при $n \geq 3$ вопрос остается открытым. Он интересен, так как если гипотеза ложна, то ложны и многие важные гипотезы в гармоническом анализе — например, следующая гипотеза Стейна об ограничении: верно ли, что для гладких функций f выполнено неравенство

$$\|\widehat{f}\|_{L^p(S^{n-1})} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ при } 1 \leq p < 2n/(n+1)?$$

Если окажется, что гипотеза Какейи верна, это не докажет ни одну из упомянутых задач гармонического анализа, но есть большая надежда, что это привело бы к продвижению в них, поскольку Ж. Бургейн и многие другие начиная с 1990-х годов применяли методы Какейи для доказательства неравенств типа приведенной выше оценки ограничения.

Данный ниже список литературы содержит лишь некоторые книги, где обсуждаются эти вопросы и где можно найти дальнейшие ссылки.

Пертти Маттила (Pertti Mattila)

Перевод Б. Р. Френкина

Литература

- [1] Falconer K. J. Geometry of Fractal Sets. Cambridge: CUP, 1985.
- [2] Federer H. Geometric Measure Theory. Springer-Verlag, 1969. Имеется перевод: Федепер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
- [3] Mattila P. Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Fractals and Rectifiability. Cambridge: CUP, 1995.
- [4] Mattila P. Fourier Analysis and Hausdorff Dimension. Cambridge: CUP, 2015.
- [5] Wolff T. H. Lectures on Harmonic Analysis. AMS, 2003.

Иван Матвеевич Виноградов

(1891–1983)

И. М. Виноградов обогатил теорию чисел многими новыми важными результатами и методами.

В 1934 году он улучшил оценки в методе тригонометрических сумм (так называемый метод Виноградова) и получил выдающиеся результаты в трудных классических задачах аналитической теории чисел. В 1937 году он решил тернарную проблему Гольдбаха для достаточно больших нечетных чисел. Многие иностранные академии избирают его своим почетным членом. Он первым в СССР получил Сталинскую премию, дважды ему было присвоено звание Героя социалистического труда. Был награжден золотой медалью имени М. В. Ломоносова — высшей научной наградой Академии наук СССР.

И. М. Виноградов родился в 1891 году в селе Милолюб Великолукского уезда в семье сельского священника. После окончания реального училища в Великих Луках, в 1910 году, он поступил на физико-математический факультет Петербургского университета. В университете Виноградов написал, под руководством Я. В. Успенского, диплом о распределении квадратичных вычетов и невычетов, и за эту работу в 1915 году он был оставлен при университете для подготовки к профессорской деятельности.

В 1920 году он стал профессором Пермского, а затем Петербургского университета.

На основе курса, который И. М. Виноградов читал в университете, возникла книга «Основы теории чисел», неоднократно издававшаяся на разных языках. Многие известные советские математики начинали свой путь в науку с изучения этой книги. В 1927 году Виноградов получил



новое решение проблемы Варинга (о представимости любого натурального числа в виде фиксированного числа n -х степеней натуральных чисел), усовершенствовав метод Харди—Литтлвуда. В 1929 году Виноградов избран действительным членом Академии Наук СССР.

И. М. Виноградов возглавлял Демографический институт в Ленинграде (1930–1932). Он был директором Физико-математического института (1932–1934), при разделении которого в 1934 году на две части стал директором математической части (Математический институт им. В.А. Стеклова, МИАН СССР) и вместе с институтом в 1934 году переехал в Москву.

Руководство институтом для Виноградова было главным делом его жизни, он отдавал ему много сил, оставаясь директором до 1983 года, с перерывом на военные годы 1941–1944, когда директором был С. Л. Соболев. Начиная с 50-х годов Виноградов не принимал на работу евреев, что совпадало с линией партии (хотя и официально не объявляемой). При этом сам Виноградов никогда не был членом КПСС (хотя членство в партии было, как правило, необходимым условием для руководителя такого ранга).



Директор Демографического института И. М. Виноградов в 1931 году. На фотографии справа — предположительно Н. И. Бухарин (расстрелян в 1938 году, посмертно реабилитирован в 1988 году). В то время владельцы фотографий, на которых они были изображены вместе с репрессированными, обычно затирали их лица из опасения обвинения в сочувствии к «врагам народа».



И. М. Виноградов (слева) и Н. Н. Боголюбов на Международном математическом конгрессе в Эдинбурге (1958 год).

Виноградов был волевым директором, но спорить с ним иногда было можно. По словам И. Р. Шафаревича, любая просьба, обращенная к Виноградову как директору, сначала натывалась на его спонтанное сопротивление, даже когда было совершенно ясно, что он должен был ей сочувствовать. Доносы и жалобы, которые писали сотрудники МИАН, он не передавал дальше в органы, а складывал в чемодан, который перед смертью попросил сжечь.

В 1934 году Виноградов создал новый метод оценки тригонометрических сумм (метод Виноградова), который позволяет значительно улучшить оценки во многих проблемах аддитивной теории чисел. В 1937 году он доказал, что любое достаточно большое нечетное число представимо в виде суммы трех простых.

В 1955 году И. М. Виноградов подписал известное «Письмо трехсот» в поддержку советских генетиков и против группы Т. Д. Лысенко.

И. М. Виноградов с детства был очень силен. Обучаясь в реальном училище, Ваня Виноградов посещал кружок акробатики, где занимался специальными силовыми упражнениями. В его воспоминаниях есть такие слова:

Моим первым стадионом был лес, первыми преподавателями — деревенские мальчишки: загорелые, подвижные, крепкие... Целыми днями я пропадал в лесу или на пруду, где в пять лет построил свой первый плот и отправился на нем в плавание...

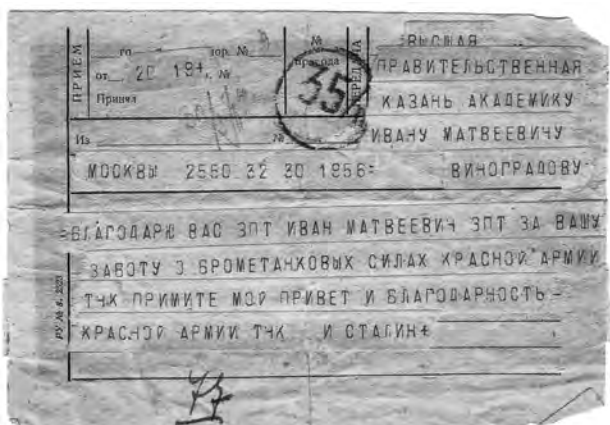
Шуткой далекой молодости называл 90-летний ученый историю с роялем. Дело было в Англии в 1946 году. На одном из приемов, который устроило Лондонское математическое общество, Иван Матвеевич (он плохо знал английский язык) одиноко стоял у окна в большом зале, где ученые оживленно обсуждали математические проблемы. Посреди зала стоял большой концертный рояль. Виноградов подлез под него, приподнял и при притихшем зале пронес его на некоторое расстояние. Раздались аплодисменты. После этого некоторые из присутствующих тоже захотели продемонстрировать свою силу, но куда им до Виноградова! Чтобы оправдаться перед иностранными коллегами, Иван Матвеевич прикинулся простачком и сказал, что таким образом хотел посмотреть марку рояля.

И. М. Виноградов всему отдавался со страстью: если играть в шахматы, то сотни партий, если в карты — несколько дней подряд, если идти в поход — то в далекий и трудный.

Из интервью И. М. Виноградова шахматному журналу:

Помню, будучи профессором Ленинградского политехнического института, я иной раз предлагал студентам, пришедшим сдавать зачет, сыграть партию в шахматы. И, знаете, предэкзаменационная атмосфера за поединком разряжалась, настроение улучшалось и у экзаменатора, и у экзаменуемых.

В музее Виноградова в Великих Луках хранится телеграмма Виноградову от Сталина. В 1941 году Виноградов перечислил все свои сбережения в фонд обороны на строительство танков. Это была распространенная практика, но далеко не все получали благодарственные телеграммы от Сталина.



Благодарственная телеграмма хранится в доме-музее И. М. Виноградова в Великих Луках

И. М. Виноградов никогда не женился, не имел детей, вел аскетический образ жизни. Круглый год он в четверг уезжал на дачу в подмосковном поселке Абрамцево и жил там до понедельника. Там у академика был отдельный кабинет, в котором он, если не занимался физической работой, сидел за письменным столом и работал с завидной продуктивностью. Скончался И. М. Виноградов 20 марта 1983 года.

Из речи И. М. Виноградова на открытии Международной конференции по аналитическим методам теории чисел и анализа, 1981 год:

В заключение я хочу сказать несколько слов, которые могут быть полезны лицам, желающим посвятить свою жизнь занятию математикой.

Надо пытаться решать важные задачи, не считаясь с их трудностью. Их решения навсегда войдут в историю науки и принесут людям большую пользу. Так поступали наши великие предшественники. Не следует увлекаться решением легких и малонужных задач только потому, что они не требуют больших усилий. Ученые, которые это делают, могут увлечь на тот же неправильный путь и своих учеников. Выбрав достойную тему, следует наметить план работы и не оставлять его, пока теплится хоть малейшая надежда на успех. Важно знать работы классиков — содержащиеся в них идеи могут оказать решающее действие на успех собственный.

Н. С. Калинин

Работы И. М. Виноградова по тригонометрическим суммам

И. М. Виноградов добился исключительных результатов в глубоких вопросах аналитической теории чисел. Эти идеи продолжают и сегодня стимулировать новые исследования. Давайте взглянем на четыре проблемы, где проявилось влияние работ Виноградова по тригонометрическим суммам.

Квадратичные невычеты. Пусть p — нечетное простое число. Целое число n , $1 \leq n < p$, является *квадратичным вычетом*, если существует целое x , для которого $n \equiv x^2 \pmod{p}$. В противном случае n является *квадратичным невычетом*. Имеется $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и $\frac{p-1}{2}$ квадратичных невычетов по модулю p .

Наименьший квадратичный вычет по модулю p — всегда 1. Но каков же наименьший квадратичный невычет по модулю p (назовем его n_p)? Этот вопрос имеет отношение к сложным проблемам аналитической теории чисел.

Элементарное рассуждение показывает, что для любого простого p число n_p тоже должно быть простым. Как ведет себя n_p при $p \rightarrow \infty$? Известно, что n_p не может быть равномерно ограничено сверху. Действительно, для любого натурального N найдется бесконечно много простых p , для которых $1, 2, 3, \dots, N$ — квадратичные вычеты по модулю p . Это можно доказать, используя квадратичный закон взаимности, китайскую теорему об остатках и теорему Дирихле о бесконечности количества простых в арифметической прогрессии. Тем не менее Виноградов предположил, что n_p не может расти очень быстро и что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая константа C_ε , что $n_p \leq C_\varepsilon p^\varepsilon$ для всех простых p . Этот вопрос остается открытым.

Ферма, Эйлер, Лагранж, Лежандр, Гаусс — все они изучали квадратичные вычеты. Лежандр ввел символ $\left(\frac{n}{p}\right)$, равный $+1$, если n — квадратичный вычет по модулю p , и равный -1 , если n — квадратичный невычет по модулю p (если $p \mid n$, то $\left(\frac{n}{p}\right) = 0$). Это пример характера Дирихле, и тем самым гипотеза Виноградова вписывается в важный контекст вопро-

сов о суммах характеров. Для любого характера Дирихле χ_q по модулю q интересно изучить при $1 \leq H \leq q$ суммы

$$S(\chi_q, H) = \sum_{1 \leq n \leq H} \chi_q(n).$$

Можно охарактеризовать n_p как наименьшее целое $H \geq 1$, для которого $S\left(\left(\frac{n}{p}\right), H\right) < H$.

В 1918 году Виноградов доказал (одновременно с Д. Пойа), что

$$|S(\chi_q, H)| \leq Cq^{1/2} \log q$$

для любого неглавного характера Дирихле по модулю q . Ключевая идея состояла в том, чтобы использовать разложение Фурье по модулю q . Кроме того, Виноградов нашел прием, распространяющий его результат на n_p : он показал, что если $S\left(\left(\frac{n}{p}\right), H\right) < H$ для некоторого H , то $n_p \leq H^{1/\sqrt{e}+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$. Тем самым Виноградов показал, что $n_p \leq p^{1/(2\sqrt{e})+\varepsilon}$.

В 1942 году Ю. В. Линник показал, что гипотеза Виноградова верна, если верна обобщенная гипотеза Римана. (И в этом случае существует детерминированный полиномиальный алгоритм для отыскания n_p .) Линник также показал без дополнительных предположений, что для любого $\varepsilon > 0$ количество простых p , для которых $N^\varepsilon < p \leq N$ и $n_p > p^\varepsilon$, ограничено независимо от N . Таким образом, гипотеза Виноградова может не выполняться лишь для множества простых, имеющего нулевую плотность (в множестве всех простых). Сегодня наилучшая известная оценка имеет вид $n_p \leq p^{1/(4\sqrt{e})+\varepsilon}$. Она получается, если объединить прием Виноградова с оценкой на $S\left(\left(\frac{n}{p}\right), H\right)$ при $H \approx p^{1/4+\varepsilon}$ (Бёрджесс, 1957).

Гипотеза Виноградова до сих пор представляет большой интерес в силу своей связи с суммами характеров, L -функциями Дирихле и соответствующими гипотезами Римана и даже (как заметил Т. Тао в 2015 году) с теорией решета, которая используется, например, для решения задачи об ограниченных промежутках между соседними простыми числами.

Проблема Варинга. В 1770 году Э. Варинг высказал утверждение, что для любого $k \geq 2$ существует такое $s = s_*(k)$, что любое натуральное N можно представить в виде $N = x_1^k + \dots + x_s^k$ с целыми $x_i \geq 0$ (утверждения Варинга содержатся в пунктах (5) и (9) теоремы XLVII в его *Meditationes Algebraicae* — см. рис. 1). Гипотезу Варинга доказал Д. Гильберт в 1909 году. (Мы знаем, что $s_*(k) \geq 2^k + \lfloor (3/2)^k \rfloor - 2$, но остается открытым вопрос, оптимальна ли эта оценка в общем случае.) Сегодня в центре внимания другой вопрос: сколько решений $x_i \geq 1$ имеет это уравнение для данного (достаточно большого) N ?

5. Omnis integer numerus est quadratus; vel e duobus, tribus vel quatuor quadratis compositus.

6. Quantitates $a^2 - b^2$, vel $a^2 - b^2 + 2$, ubi a & b vel sunt integri numeri vel 0, possunt conficere quemlibet numerum.

7. Quantitas $pa^2 + qb^2 + rc^2 + sd^2$; ubi p, q, r & s sunt numeri inter se primi; & a, b, c & d sunt quilibet integri numeri vel 0: vel magis generaliter $pa^2 + ha + qb^2 + kb + rc^2 + lc + sd^2 + md + n + \alpha ab + \beta ac + \gamma ad + \delta bc + \varepsilon bd + \zeta cd$, ubi $b, k, l, m, n, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ sunt etiam integri numeri, potest conficere quemlibet numerum, qui superat datum numerum investigandum.

8. Quantitas $(a^2 \pm ab + b^2) + (p^2 \pm pq + q^2)$; ubi a & b, p & q sunt integri numeri, potest æquari cuicunque numero.

9. Omnis integer numerus vel est cubus; vel e duobus, tribus, 4, 5, 6, 7, 8, vel novem cubis compositus: est etiam quadrato-quadratus; vel e duobus, tribus, &c. usque ad novemdecim compositus, & sic deinceps: consimilia etiam affirmari possunt (exceptis excipiendis) de eodem numero quantitatum earundem dimensionum.

Гипотеза Варинга содержится в утверждениях (5) и (9) теоремы XLVII его работы «Meditationes algebraicae»

В круговом методе, созданном Г. Харди, С. Рамануджаном и Дж. Литлвудом в 1920-х годах, число решений $r_{s,k}(N)$ выражается в виде интеграла

$$\sum_{1 \leq x_1, \dots, x_s \leq N^{1/k}} \int_0^1 e^{2\pi i \alpha (x_1^k + \dots + x_s^k - N)} d\alpha,$$

затем главный член извлекается из «больших дуг» (интервалов с центрами в рациональных числах a/q , где q достаточно мало) и доказывается, что оставшиеся «малые дуги» дают вклад лишь в остаточный член. Пока s достаточно велико по сравнению с k , этот метод работает хорошо и показывает, что $r_{s,k}(N)$ асимптотически близко к $c_{s,k}(N)N^{s/k-1}$ при $N \rightarrow \infty$, где $c_{s,k}(N) > 0$ при $s \geq \max\{5, k+2\}$.

Каково наименьшее количество переменных s , для которого можно аккуратно вычислить $r_{s,k}(N)$ таким способом? Изначально Харди и Литлвуд доказали, что можно положить $s \approx k2^{k-1}$ (предполагается, что при помощи кругового метода можно решить данную задачу при $s \geq 2k+1$). Ключевой шаг данного подхода состоит в оценке тригонометрических сумм вида $S(\alpha, X) = \sum_{1 \leq x \leq X} e(\alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k)$. В 1930-х годах Виноградов начал

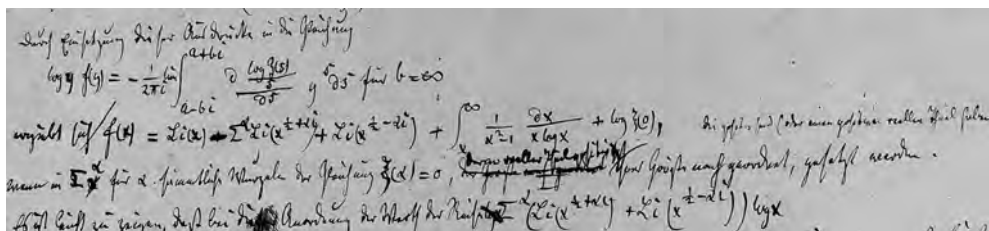
поиск оценки для $S(\alpha, X)$ через оценку для среднего значения

$$J_{s,k}(X) = \int_{(0,1]^k} |S(\alpha, X)|^{2s} d\alpha.$$

Виноградов выдвинул главную гипотезу: $J_{s,k}(X) \ll X^\varepsilon (X^s + X^{2s - \frac{1}{2}k(k+1)})$ для всех натуральных s, k . Широко известны достижения Виноградова в исследовании этой проблемы. Он показал, как извлечь из $J_{s,k}(X)$ верхние границы для $S(\alpha, X)$. В 1935 году он достиг новых рекордных оценок в проблеме Варинга.

Главная гипотеза в программе Виноградова относительно $J_{s,k}(X)$ хотя и привлекала большое внимание, но оставалась недоказанной в течение 80 лет. Вули (для $k=3$) и Бургейн, Димитер и Гут (для $k \geq 4$) добились решающего успеха и завершили ее доказательство в статьях 2016 года. Более того, их методы породили новые интересные вопросы на стыке теории чисел и гармонического анализа.

Дзета-функция Римана. В 1859 году Б. Риман начал изучение дзета-функции $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$ от комплексной переменной s . Его исследования показали, что ключ к подсчету количества $\pi(x)$ простых $p \leq x$ лежит в понимании расположения нулей $s = \sigma + it$ функции $\zeta(s)$ в критической полосе $0 < \sigma < 1$. Именно, для каждого δ , $0 < \delta \leq 1/2$, утверждение, что $\zeta(s) \neq 0$ при всех $\sigma > 1 - \delta$, равносильно тому, что $\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x^{1-\delta+\varepsilon})$ при всех $\varepsilon > 0$.



В рукописи Римана 1959 года (хранится в Гёттингенском университете) в последней строке присутствует обозначение $\sum^a$ — сумма по всем нулям дзета-функции

Чтобы найти область, свободную от нулей дзета-функции, Виноградов исследовал суммы вида $\sum_{N < n < M} n^{-it}$. Лучший результат, известный до сих пор, — теорема Виноградова—Коробова, которая гласит, что в области, заданной условиями $t \geq 3$, $\sigma \geq 1 - C(\log t)^{-2/3}(\log \log t)^{-1/3}$, нет нулей дзета-функции Римана.

Тернарная проблема Гольдбаха. В 1740-х годах в переписке Х. Гольдбаха с Л. Эйлером возникли бинарная проблема Гольдбаха (каждое чет-

ное число $N > 2$ является суммой двух простых) и *тернарная проблема Гольдбаха* (каждое нечетное число $N > 5$ является суммой трех простых). В 1923 году Харди и Литлвуд положительно решили тернарную проблему Гольдбаха для всех достаточно больших N в предположении выполнимости обобщенной гипотезы Римана. В 1937 году Виноградов доказал то же самое без дополнительных предположений и даже подсчитал количество таких представлений, используя анализ экспоненциальных сумм типа $S(\alpha, X)$. В 2013 году Х. Хельфготт решил тернарную проблему Гольдбаха для всех $N > 5$. Бинарная проблема Гольдбаха остается маняще открытой.

Лилиан Б. Пирс (Lilian B. Pierce)
перевод Б. Р. Френкина

Владимир Александрович Фок

(1898–1974)

В. А. Фок работал в области квантовой механики и теории поля, теории дифракции, гравитации. Самые известные его достижения — открытие динамической $O(4)$ -симметрии атома водорода, подход ко вторичному квантованию (пространство Фока и уравнение Клейна—Гордона), приближенные вычисления в теории многоэлектронных систем (метод Хартри—Фока), метод параболического уравнения в теории дифракции.

Владимир Александрович Фок родился 10 (22) декабря 1898 года в Петербурге в семье инспектора корпуса лесничих (сейчас бы он назывался биологом — специалистом по лесу) А. А. Фока. Его прадед Николай Антонович Фок приехал в Россию на работу в качестве гидроинженера в начале XIX века из Голштинии. Другой прадед, Николай Михеевич Архангельский, был основателем физико-математического факультета Харьковского университета.

В 1916 году В. А. Фок поступил в Петроградский университет, но счел, что не сможет там учиться из-за прогрессирующей глухоты, и решил отправиться добровольцем на фронт. После пятилетних курсов в Константиновском артиллерийском училище он получает звание прапорщика и в сентябре 1917 г. попадает на румынский фронт, где к тому моменту царила полная неразбериха. В феврале 1918 года его бригада была распущена и всем было предложено возвращаться домой своими силами. В Петербурге Владимир Александрович работал некоторое время бухгалтером под руководством Михаила Чехова, брата писателя (откуда в домашней библиотеке сохранилась книга «Учебник двойной бухгалтерии»). Поскольку его семья разъехалась, он жил один в квартире в доме 22 на 9-й линии. К нему подселили вечно пьяных матросов, кото-



705



Reissert & Fliege
Fotografische Anstalt, Berlin, W.

Владимиръ Александровичъ Фокъ.

Карточка для съема съ меня, сына Львовича
мѣстнаго Станискаго Советника; В. Рогов.

Л,

рые его били и воровали вещи. Он подал на них в суд, и матросов убрали. Этот эпизод он вспоминал всю жизнь как главный аргумент в пользу его лояльности к советской власти, которая его «защитила».

В начале 1919 года по предложению Д. С. Рождественского В. А. Фок поступил на работу в только что основанный Оптический институт и восстановился в университете. Рождественский даже выхлопотал ему паек, что, вместе с помощью близких, спасло его от голода. Как бывший офицер он подлежал призыву в армию, но в конце концов ему удалось от него уклониться, ссылаясь на прогрессирующую глухоту. Преподавание в университете было почти индивидуальным, и глухота создавала гораздо меньше проблем, чем раньше. Чаще других Владимир Александрович вспоминал среди своих учителей, конечно, Д. С. Рождественского, а также Ю. А. Круткова, В. Р. Бурсиана, В. К. Фредерикса и А. А. Фридмана. В 1922 году В. А. Фок оканчивает университет, но остается там «для подготовки к профессорскому званию», что аналогично современной аспирантуре. Благодаря одной из лекций Д. С. Рождественского Владимир Александрович заинтересовался квантовой механикой, ставшей главным предметом его размышлений на многие годы. Однако параллельно он делает несколько чисто прикладных работ, в основном по расчету электрических кабелей. В 1927 году по рекомендации П. Эренфеста он получает стипендию фонда Рокфеллера, которая позволила ему в течение года с августа 1927 года стажироваться в Гёттингене. Пересечение границ на тот момент проблем не представляло, и единственным документом, необходимым его будущей жене А. В. Лермонтовой, приехавшей к нему, была справка от дворника. В Гёттингене Фок работает прежде всего с М. Борном.

В последующее десятилетие он написал свои самые выдающиеся работы по квантовой механике и теории поля. Видя, как вокруг исчезают его коллеги и друзья, Владимир Александрович уходит целиком в науку. Но 5 февраля 1937 года арестовали и его. Его жена позвонила А. Н. Крылову, у которого гостил П. Л. Капица, и сказала: «Владимир Александрович к вам сегодня обедать не придет...» Смысл фразы был понятен, и в тот же день П. Л. Капица написал письмо Сталину, которое, к счастью, сработало: Владимир Александрович был перевезен в Москву и освобожден прямо в кабинете Ежова. Владимир Александрович всю жизнь был благодарен П. Л. Капице за спасение. Он сам писал много писем, прося за своих арестованных коллег и знакомых, но, к сожалению, безрезультатно.

Несмотря на избрание в АН СССР (членом-корреспондентом в 1932 году и действительным членом в 1939 году), его жизнь была очень непростой. Денег не хватало даже на еду и дрова. Зимой в квартире было около десяти градусов. До конца своей жизни он покупал белую бумагу в огромных количествах, помня, как ему приходилось основные свои работы пи-



В. А. Фок (справа) и П. Л. Капица

сать на полях газет и оберточной бумаге. Летом, впрочем, семья снимала дом в деревне около Ораниенбаума, куда в 1939 году приезжал П. Дирак, несмотря на запрет, поскольку дача формально находилась в погранзоне. Война застала Владимира Александровича на отдыхе в Кисловодске, откуда он писал семье, что не надо никуда двигаться, поскольку война скоро кончится. Все же он сразу вернулся в Ленинград. В сентябре 1941 года его с семьей под угрозой ареста эвакуируют на самолете в сопровождении пяти истребителей сначала в Москву, а затем в Елабугу. В Елабуге он сделал работу по радиолокации, в результате чего его летом 1943 года вызвали вместе с семьей в Москву, дали квартиру в двух шагах от Кремля и назначили продовольственный паек. Его дочь Наталья Владимировна говорит, что никогда так хорошо не питалась, как в 1943 году в Москве.

В 1944 г. В. А. Фок был приглашен занять кафедру теоретической физики МГУ, но, обнаружив, что его взгляды противоречат взглядам руководства факультета, а его подпись на некоторых документах подделана, Владимир Александрович отказался от этой должности через несколько месяцев. Кроме того, сказался антагонизм с Д. И. Иваненко, которого он считал виновным в аресте и гибели М. П. Бронштейна.

С 1945 г. Владимир Александрович живет и работает в Москве и в Ленинграде, ему даже удалось получить двойную прописку в паспорт. Лето и выходные он проводил на даче в Комарове.

С тридцатых годов Владимир Александрович пытался участвовать в философских дискуссиях с радикальными марксистами, считая своим долгом защищать науку от их нападков. В результате его записали в марксистские философы и стали приглашать на соответствующие конференции. Как-то в конце жизни он признался, что, к сожалению, его здоровье не позволяет заниматься чем-либо другим, более содержательным.

Несмотря на лояльность, Владимир Александрович старался держаться по возможности независимо, не подписывать писем с осуждением коллег и не участвовать в соответствующих заседаниях. Известна его фраза, сказанная довольно громко (из-за глухоты он не мог говорить тихо) после очередной обличительной речи: «Трусость не влияет на вероятность отсидки». С 1954 года его стали выпускать за границу; многие помнят его слова «Я вам не оброчный мужик» в ответ на требование сдать заработанные там деньги. Однако в 1969 году ему не простили отсутствие возражений на проведение очередной конференции по гравитации в Израиле, и (по доносу А. З. Петрова) он стал невыездным.

В молодости Владимир Александрович ходил в церковь, но, как и большинство людей его круга, к зрелому возрасту он стал относиться к любой религиозности крайне отрицательно.

Владимир Александрович умер 27 декабря 1974 года в Ленинграде. Он похоронен на Комаровском кладбище.

В. В. Фок

Николай Евграфович Кочин

(1901–1944)

Николай Евграфович Кочин (1901–1944) — выдающийся ученый в области гидромеханики и механики сплошных сред, действительный член АН СССР. Им решены важнейшие проблемы метеорологии, изучены поверхности разрыва в сжимаемой жидкости, решена классическая задача о распаде произвольного разрыва в совершенном газе. Н. Е. Кочиным также решена задача об обтекании тонкого крыла, развита теория неравномерного движения тел под поверхностью идеальной жидкости, получено новое решение задачи Коши—Пуассона для волн на воде, решена плоская задача о подводном крыле, а также получены формулы для расчета сопротивления корабля с учетом взаимодействия корпуса корабля и воды.

Николай Евграфович Кочин родился 19 мая 1901 года в Петербурге в семье мелкого служащего. Его отец, Евграф Самойлович, и мать, Елизавета Николаевна (в девичестве — Комарова), происходили из крестьян. В восемь лет он был принят сразу во второй класс начального училища и по его окончании поступил в Первую классическую Санкт-Петербургскую гимназию. Николай отличался прекрасными успехами почти по всем предметам. После выпуска из гимназии (уже Первой Петроградской) в 1918 году он поступил на математическое отделение физико-математического факультета Петроградского университета и в том же году был призван в Красную армию. В октябре 1919 года Кочин участвовал в сражениях под Ямбургом и чудом остался жив. В 1920 году получил направление в Петроградскую технико-артиллерийскую школу РККА, где служил в команде телефонной связи, одновременно посещая лекции



в Петроградском университете. В 1922 г. он вернулся в университет, который и окончил в 1923 году.

Учителем Н. Е. Кочина в области гидродинамики был А. А. Фридман (автор знаменитого космологического решения уравнения Эйнштейна, описывающего три сценария эволюции Вселенной). В 1922 году, еще до окончания университета, Н. Е. Кочин начинает работу в организованном А. А. Фридманом математическом бюро в Главной геофизической обсерватории и работает там вплоть до переезда в Москву в 1935 году, занимая последовательно ряд должностей от вычислителя до профессора и директора Института теоретической метеорологии. В это же время Н. Е. Кочин занимается преподавательской деятельностью в Военно-морской академии, в Горном институте и в Ленинградском университете. Уже в 1933 году он получает звание профессора, а в 1936 году — степень доктора физико-математических наук.

А. А. Фридман поставил Н. Е. Кочину задачу, решение которой сразу принесло ему известность в метеорологии. Им было найдено решение уравнений гидродинамики сжимаемой жидкости с учетом вращения Земли, представляющее модель циклонических вихрей. Эта модель существенно обобщила наиболее полную к тому времени модель А. А. Фридмана. Полученные результаты, и в частности траектории частиц газа, хорошо совпадали с имевшимися наблюдениями. Во время работы в Главной геофизической лаборатории Н. Е. Кочин ставит и разрешает важнейшие проблемы метеорологии, изучает поверхности разрыва в сжимаемой жидкости, решает классическую задачу о распаде произвольного разрыва в совершенном газе. Однако главным объектом его исследований были поверхности, разделяющие в атмосфере потоки или массы воздуха с разными параметрами, определяющие важнейшие атмосферные явления и представляющие собой тангенциальные разрывы, на свойства которых существенно влияет сила Кориолиса. Он исследует проблему линейной устойчивости подобных течений, что само по себе является очень сложной задачей. В ряде работ Н. Е. Кочиным проанализированы возможные выводы о движении фронтов по поверхности Земли, которые могут быть сделаны на основании проведенного им изучения поверхностей разрыва.

Н. Е. Кочиным получены основополагающие результаты также и в теории общей циркуляции атмосферы. Он первый обратил внимание на влияние трения атмосферного воздуха о Землю, которым ранее пренебрегали. Была оценена толщина пограничного слоя на поверхности Земли, в котором существенную роль играет сила Кориолиса. Еще одной пионерской работой является построенная Н. Е. Кочиным модель влажного циклона. Эти и другие работы Н. Е. Кочина заложили фундамент для дальнейших исследований в метеорологии.



Н. Е. Кочин и П. Я. Полубаринова

В 1925 году Николай Евграфович женился на Пелагее Яковлевне Полубариновой (1899–1999), с которой познакомился ранее на почве взаимных научных интересов. В семье Кочиных было две дочери.

Параллельно с научными исследованиями Н. Е. Кочин преподает в Ленинградском университете, где ведет занятия по математике и механике и читает спецкурсы. С 1932 года он по совместительству начинает работать в Физико-математическом институте АН СССР. После раздела института на физический и математический Н. Е. Кочин в 1935 году как заведующий отделом механики Математического института им. В.А. Стеклова переезжает в Москву. В 1935–1938 гг. он работает также и в Центральном аэрогидродинамическом институте (ЦАГИ), где в то время велась работа над проблемами, связанными с развивающейся авиацией, движением судов, в том числе подводных. Н. Е. Кочин активно включается в исследование новых проблем, которые решаются им в рамках теории идеальной несжимаемой жидкости. Речь идет о теории волн на воде и неравномерного движения тел под поверхностью жидкости. Кочин исследовал эти задачи с помощью разработанного им нового метода, основанного на введении функции, названной впоследствии «обобщенной циркуляцией». Н. Е. Кочиным также решена задача об обтекании тонкого крыла, получено новое решение задачи Коши—Пуассона для волн на воде, исследованы крутильные колебания коленчатых валов поршневых машин, исследованы возможные формы, принимаемые тросом аэростата под действием ветра, меняющегося с высотой.

После переезда в Москву Н. Е. Кочин преподает в Московском университете. Сначала он читает там специальные курсы по теории волн, а с 1938 года и до конца жизни заведует кафедрой гидромеханики. В 1938–1940 гг. он был ученым секретарем Московского математического общества, в 1939 году избран сразу действительным членом Академии наук СССР, минуя звание члена-корреспондента. В том же году создается Институт механики АН СССР, куда Н. Е. Кочин переходит работать заведующим отделом. В начале войны Н. Е. Кочин вместе с Институтом механики выезжает в Казань.

Работы Н. Е. Кочина, выполненные в предвоенные годы, принесли большую практическую пользу в решении оборонных задач. Особенно следует отметить предложенный им метод решения плоской задачи о подводном крыле, а также получение формулы для расчета сопротивления корабля с учетом взаимодействия корпуса корабля и воды. Во время Великой Отечественной войны Кочин осуществил разработку и решение комплекса задач по теории круглого крыла, что давало возможность рассчитывать силы, действующие на крыло самолета во время полета.

Помимо отдельных научных работ, Н. Е. Кочиным были написаны обобщающие книги, составившие эпоху в метеорологии и гидромеханике. Его огромный вклад в метеорологию подытожен в двухтомнике «Динамическая метеорология» (1935 г.). Им написан учебник «Векторное исчисление и начала тензорного исчисления», выдержавший много изданий, и, наконец, совместно с А.И. Кибелем и Н.В. Розе написан выдающийся двухтомный курс «Теоретическая гидромеханика» [1], который до сих пор активно используется для изучения гидромеханики студентами-механиками университетов России.

В начале 1943 года врачи обнаружили у Николая Евграфовича рак кости. Н. Е. Кочин был госпитализирован и перенес ампутацию ноги. После операции наступило улучшение, и Николай Евграфович снова напряженно и энергично работает в Институте механики и в Московском университете. Но в августе 1944 года болезнь вновь обострилась, и Николай Евграфович умер 31 декабря 1944 года в возрасте 43 лет.

Основные работы Н. Е. Кочина вошли в двухтомное собрание сочинений [2]. Полный список более 100 его научных трудов приведен в биографии [3]. Анализ развития идей и методов Н. Е. Кочина, а также очень интересные воспоминания ученых, которые работали вместе с Н. Е. Кочиным или были лично с ним знакомы, содержатся в материалах конференции [4], посвященной 80-летию со дня рождения ученого.

Вызывает удивление и восхищение огромная плодотворная работа, проделанная Н. Е. Кочиным за его очень короткую жизнь. Полученные им результаты и намеченные тенденции развития определили на много

лет вперед и продолжают определять поныне лицо гидроаэродинамики и метеорологии.

А. Т. Ильичев, А. Г. Куликовский

Литература

- [1] *Кочин Н. Е., Кибель И. А. Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, М.: Физматгиз, 1963.
- [2] *Кочин Н. Е.* Собрание сочинений. Т. 1, 2. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1949.
- [3] *Полубаринова-Кочина П. Я.* Николай Евграфович Кочин, 1901–1944. М.: Наука, 1979. 317 с.
- [4] *Н. Е. Кочин и развитие механики.* М.: Наука, 1984. 254 с.

Н. Е. Кочин и задача о распаде произвольного разрыва

Задача о распаде произвольного разрыва — задача о построении аналитического решения нестационарных уравнений механики сплошной среды в применении к распаду произвольного разрыва. Она часто возникает в широком круге задач механики сплошной среды, где в непрерывном потоке образуются разрывы, а также задач, где разрывы изначально имеют место в распределении физических параметров среды. Эта задача была решена Н. Е. Кочиным в работах, относящихся к 1924–1925 гг., и сыграла и продолжает играть важную роль не только в газовой динамике, но и во всей механике сплошных сред.

Задача ставится следующим образом. При $t = 0$ область пространства (x, y, z) , $x < 0$, заполнена однородным газом с параметрами вектора скорости v (с компонентами v_x, v_y, v_z), давления p , плотности ρ и удельной внутренней энергии e (зависящей от плотности и давления) v_0, p_0, ρ_0, e_0 , а область $x > 0$ — однородным газом с, вообще говоря, другими параметрами v_1, p_1, ρ_1, e_1 . Соотношения между этими параметрами в общем случае произвольны. Требуется найти движение газа при $t > 0$. Газ считается невязким и нетеплопроводным, а также совершенным, т. е. это обычный разреженный газ с внутренней энергией $e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$, $\gamma = \text{const}$. Если начальные данные (соотношения между параметрами v_0, p_0, ρ_0, e_0 и v_1, p_1, ρ_1, e_1) произвольны, то с течением времени указанный разрыв, вообще говоря, перестает существовать и должен распадаться.

Возникающее при распаде произвольного разрыва движение является автомодельным, т. е. безразмерные параметры $\frac{v}{a_0}, \frac{p}{p_0}, \frac{\rho}{\rho_0}, \frac{e}{e_0}$ являются функциями одной переменной $\frac{x}{a_0 t}$ ($a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ — скорость звука) и постоянных параметров $\frac{v_0}{a_0}, \frac{v_1}{a_0}, \frac{p_1}{p_0}, \frac{\rho_1}{\rho_0}, \frac{e_1}{e_0}$. Решения, зависящие от x/t , хорошо известны. Это центрированные волны Римана и ударные волны [1]. К этим нетривиальным решениям уравнений газовой динамики, распространяющимся по газу, следует добавить тангенциальные разрывы, на ко-

торых должны выполняться условия непрерывности давления и нормальной компоненты скорости газа

$$[p] = 0, \quad [v_x] = 0. \quad (1)$$

Квадратные скобки означают изменение (скачок) величины, заключенной в скобках, при переходе через разрыв. Тангенциальный разрыв не накладывает ограничения на $[v_y]$ и $[v_z]$. Если $[v_y] = 0$ и $[v_z] = 0$, то разрыв называется контактным.

В волнах Римана и ударных волнах меняются ρ , v_x и p , причем изменения этих величин связаны между собой, т. е. изменения ρ и v_x можно считать функциями изменения p . Величины v_y и v_z не меняются, так что на месте начального разрыва в газе остается тангенциальный разрыв с неизменными, т. е. совпадающими с начальными разрывами, $[v_y]$ и $[v_z]$.

Таким образом, решение задачи о распаде произвольного разрыва должно состоять из центрированных волн Римана и ударных волн, подобранных так, чтобы на месте начального разрыва остался тангенциальный разрыв, на котором выполняются равенства (1).

Н. Е. Кочин использовал, во-первых, то, что для волн Римана значения x/t , соответствующие волне, являются характеристиками уравнений газовой динамики, и, во-вторых, то, что по состоянию за ударной волной характеристики догоняют ударную волну. Это позволило сформулировать утверждение, что в каждую сторону от тангенциального разрыва по газу может распространяться только одна волна, либо ударная, либо центрированная волна Римана. В самом деле, первая ударная волна распространяется по газу за ней со скоростью, меньшей скорости звука, тогда как вторая ударная волна распространяется по газу перед ней со скоростью, большей скорости звука, а волна Римана — со скоростью, равной скорости звука. При автомодельном движении это невозможно. В случае, если по газу распространяется центрированная волна Римана, ее задний фронт перемещается по газу со скоростью звука, а следующая за ней ударная волна — со скоростью, большей скорости звука (по частицам газа перед волной). Для автомодельных движений эта ситуация невозможна. Если вслед за волной Римана распространяется волна Римана, то ширина однородной зоны, разделяющей эти две волны, остается постоянной (так как скорости волн Римана равны между собой), что также невозможно при автомодельном движении. Из изложенного следует, что имеет место следующий результат.

Теорема ([2]). При распаде произвольного разрыва возможно образование лишь трех различных волновых конфигураций:

1) имеет место тангенциальный разрыв, и в каждую сторону от него распространяется по одной ударной волне;

2) по одну сторону от тангенциального разрыва распространяется ударная волна, а по другую — центрированная волна Римана;

3) в обе стороны от тангенциального разрыва распространяется по одной центрированной волне Римана.

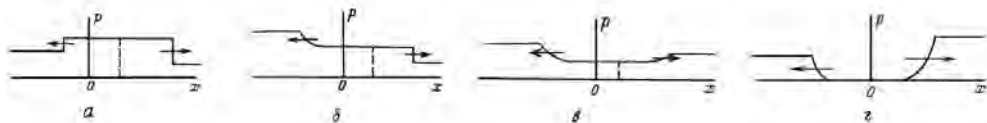
Во всех этих случаях в промежутке между расходящимися волнами образуется область, занятая газом с постоянными значениями давления и скорости, включающая поверхность тангенциального разрыва, на которой в общем случае терпит разрыв плотность газа.

Для расчета параметров расходящихся волн были исследованы зависимости между изменениями величин v_x и p в волне Римана, в которой p убывает (после прохождения волны Римана давление p меньше, чем до ее прохождения), а также зависимость между изменениями этих величин в ударных волнах, в которых p растет. На плоскости (v_x, p) наличие таких связей приводит к тому, что значения v_x и p после прохождения волны (Римана или ударной) принадлежат некоторой кривой, проходящей через точку, соответствующую начальным значениям v_x и p . Такое построение можно проделать с каждой из сторон рассматриваемого начального произвольного разрыва. Пересечение построенных кривых обеспечивает выполнение условий (1) на тангенциальном разрыве и позволяет найти значения v_x и p в его окрестности и, таким образом, определить тип и интенсивность волн, распространяющихся в каждую из сторон.

В случае распада разрыва с образованием двух волн Римана возможен отрыв одной массы газа от другой. Это происходит, если модуль разности нормальных начальных скоростей достаточно велик. При этом газы при расширении не могут заполнить область, образующуюся при разлете, и между передними фронтами расширяющихся газов образуется зона вакуума.

Изложенное показывает, что в момент времени, отличный от начального, образуется решение одного из изображенных ниже типов.

Н. Е. Кочин нашел критерии образования того или иного решения и привел формулы, описывающие соответствующее решение. Распад произвольного разрыва на две ударные волны происходит, например, если начальные значения параметров отличаются лишь направлением скорости и скорости направлены к поверхности раздела (задача о симметричном соударении двух масс газа). Распад на ударную волну и волну Римана возникает, например, если газы по обе стороны от разрыва вначале покоятся, но имеют разное давление (задача о выравнивании давления). Распад произвольного разрыва на две волны Римана имеет место, например, если при одинаковых начальных давлении и плотности начальные



Четыре возможных случая распада произвольного разрыва. Пунктирной линией обозначен тангенциальный разрыв. Произвольный разрыв распадается а) на две ударные волны, распространяющиеся в обе стороны от тангенциального разрыва; б) на центрированную волну Римана, распространяющуюся влево, и ударную волну, распространяющуюся вправо от тангенциального разрыва; в) на две центрированные волны Римана, распространяющиеся в обе стороны от тангенциального разрыва. г) Образование промежуточной зоны вакуума в случае в)

скорости направлены от поверхности разрыва (задача о разлете двух масс газа).

Решение задачи о распаде произвольного разрыва означает не только решение задачи с начальными данными, но также решение задачи о столкновении ударных волн, которое возможно при их встречном и попутном движении, а также задачи о столкновении ударной волны с тангенциальным разрывом.

Упомянем дальнейшее развитие идей Н. Е. Кочина, содержащееся в его работах. Прежде всего, это работы, относящиеся к одномерным движениям сред с более сложными, чем в совершенном газе, уравнениями, выражающими внутреннюю энергию e через p и ρ . В этом случае в каждую сторону от тангенциального разрыва может распространяться некоторая определенная система волн, состоящая из комбинации разрывов и волн Римана. Для решения таких задач было введено понятие обобщенной ударной адиабаты [3].

Было обнаружено, что в определенных случаях решение задачи о распаде начального разрыва может оказаться неединственным. В таких случаях оказалось необходимым введение дополнительных критериев для отбора «допустимых» ударных волн, для того чтобы решение о распаде произвольного разрыва оказалось единственным. В качестве такого критерия предлагалось требование существования структуры у ударной волны.

Задача о распаде произвольного разрыва изучалась также в других моделях сплошной среды, в частности в магнитной гидродинамике и нелинейной теории упругости. В случае магнитной гидродинамики, например, чтобы удовлетворить условиям на остающемся от начального разрыва контактном разрыве, необходимо распорядиться амплитудами трех волн различного типа, распространяющихся в каждую сторону. Вообще,

можно сказать, что, по общепринятым в механике сплошной среды представлениям, каждая новая модель сплошной среды с уравнениями гиперболического типа должна быть обязательно проверена на разрешимость и единственность решения задачи о распаде произвольного разрыва.

Важно также отметить, что многие численные методы (методы Годуновского типа) основаны непосредственно на решениях задач о распаде произвольного разрыва на каждой грани разбиения областей, где строится решение.

Таким образом, постановка и решение Н. Е. Кочиным задачи о распаде произвольного разрыва в газе оказали очень большое влияние на дальнейшее развитие механики сплошных сред.

А. Т. Ильичев, А. Г. Куликовский

Литература

- [1] Черный Г. Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
- [2] Кочин Н. Е. Собрание сочинений. Т. 2. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1949.
- [3] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1978. 688 с.

Послевоенная математика

Андрей Андреевич Марков-младший (1903–1979)

А. А. Марков-младший известен результатами в теоретической физике, небесной механике, динамических системах, теории кос, топологической алгебре, логике и криптографии.

А. А. Марков доказал неразрешимость проблемы равенства в ассоциативных системах и проблемы гомеоморфизма в топологии. Он доказал теорему о семействе отображений, имеющих общую неподвижную точку (теорема Маркова—Какутани). Он является автором принципа Маркова («ленинградский принцип» в конструктивной математике, ослабленный вариант закона двойного отрицания), ввел понятие нормального алгоритма.

Вместе с Н. А. Шаниным и Г. С. Цейтиным он создал школу конструктивной математики и логики в СССР. В 1942–1953 гг. он был директором ЛОМИ. С 1936 по 1953 год заведовал кафедрой геометрии в ЛГУ. С 1954 года жил в Москве. В 1953 году стал членом-корреспондентом АН СССР, был заведующим кафедрой логики мехмата МГУ (1959–1979).

9 сентября 1903 года в семье известного математика академика Андрея Андреевича Маркова (1856–1922) и Марии Ивановны Марковой (урожденной Вальватъевой) после 20 лет супружеской жизни появился долгожданный сын Андрей. Родители вывозили болезненного мальчика летом на модный немецкий курорт Баден-Баден, а осенью либо в Италию, либо на юг Швейцарии.

Как большинство мальчиков, живших в знаменитом доме Академии наук, учился Андрей в 8-й Петербургской мужской гимназии (9-я линия Васильевского острова, д. 8). На психике мальчика не мог не сказаться затянувшийся (с 1912 года) выход отца из православия, его безапелляционный, не терпящий возражений стиль общения с окружающими. В 1919 го-



ду Андрей Марков по окончании уже «единой трудовой школы» (так теперь называли гимназии) поступает на физико-математический факультет Петроградского университета (физическое отделение). По окончании учебы в университете в 1924 году он становится научным сотрудником Государственного физико-технического института, а в 1925 году поступает в аспирантуру Астрономического института.

Первая статья А. А. Маркова, опубликованная в 1927 году в журнале *Zeitschrift für Physik*, была посвящена свойству минимальности волновых групп Шрёдингера. Остальное время в аспирантуре (вплоть до 1928 года) Андрей Марков пытался решить в общем виде знаменитую задачу небесной механики о трех телах, но у него получается результат лишь для частного случая [2]. Итогом была статья 1929 года в «Журнале Ленинградского физико-математического общества» [3], в которой рассматривались простые соударения в общей задаче трех тел, а предметом работы являлось исследование движения тела, не участвующего в соударениях.

В 1930 году А. А. Марков принял участие в работе 1-го Всесоюзного математического съезда в Харькове, выступив с двумя докладами: «О почти периодических отображениях» и «Доказательство теоремы об исчислимости модуля почти периодических отображений». Ранее, в 1927 году, еще будучи аспирантом, А. А. Марков также принял участие в работе Всероссийского съезда математиков в Москве, где сам не выступал.

С 1933 года А. А. Марков стал преподавать в Ленинградском государственном университете им. А. С. Бубнова (ЛГУ). В июне 1934 году в Ленинграде проходил 2-й Всесоюзный математический съезд. На этом съезде А. А. Марков сделал шесть докладов (больше всех): два доклада на секции «Топология» («Об изотопии компактных множеств в евклидовых пространствах» и «О некоторых пространствах конечной размерности»), два доклада на секции «Анализ II» («Почти периодичность и гармонизируемость» и критический обзор математического содержания монографии 1932 года Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова «Исследование продольной устойчивости аэроплана» в докладе «О теории стационарных колебательных процессов академика Н. М. Крылова и д-ра Н. Н. Боголюбова») и по одному докладу на секциях «Анализ I» и «Приближенные вычисления» («Арифметическая характеристика тригонометрических полиномов» и «О приборах, облегчающих построение функциональных прямолинейных шкал») [4].

Пolemический ответ Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова на критику А. А. Маркова тогда не помешал присвоению А. А. Маркову в 1935 году степени доктора физико-математических наук (без защиты), а в 1936 году — звания профессора. В том же 1936 году он возглавил кафедру геометрии на математико-механическом факультете ЛГУ.



Почетная грамота, которой А. А. Марков был в 1934 году награжден от имени руководства НИИ математички и механики имени А. С. Бубнова (подразделение ЛГУ). Подписана, как выражались в советское время, «треугольником» (директор, секретарь парторганизации, руководитель профсоюзного комитета).

В 1936 году в журнале «Математический сборник» на немецком языке вышла статья А. А. Маркова «О свободной эквивалентности замкнутых кос» [5]. Полное решение проблемы (см. [6]) получил в 1939 г. аспирант Маркова Ной Моисеевич Вайнберг (родился в 1914 году, погиб на фронте в 1942 году [7]). К этой тематике А. А. Марков обращается еще раз в 1945 году в работе «Основы алгебраической теории кос» [8].

В 1938 году вышла статья А. А. Маркова «О средних значениях и внешних плотностях» [9], сыгравшая важную роль в развитии теории меры. В ней установлена возможность построения общей топологической теории меры и интегрирования в нормальных пространствах.

В вышедшей в 1939 году статье «К определению понятия комплекса» [10] А. А. Марков предлагает свое «определение конечного евклидовского симплициального комплекса, позволяющее сделать очевидным, что в

результате малого шевеления вершин получим вновь евклидовский симплициальный комплекс». В 1944 и 1945 гг. выходят его статьи о свободных топологических группах [11], [12], в которых А. А. Марковым указан некоторый общий способ построения топологических групп.

С 1948 года А. А. Маркова все более интересуют проблемы конструктивного направления в математике и общей теории алгоритмов (Марков писал «алгорифм»). В статье [13] указывается, что в этой теории он увидел не только «мощные технические, но и богатые общелогические возможности» и что в итоге им «было разработано понятие нормального алгорифма, оказавшееся очень удобным для многих целей», «существенно дополнена имеющая принципиальное значение теорема С. К. Клини о представлении частично рекурсивных функций через примитивно рекурсивные», получены «очень интересные результаты о сложности нормальных алгорифмов, вычисляющих булевы функции».

Еще в 1946 году А. А. Марков доказал алгоритмическую неразрешимость ряда массовых проблем алгебры. В 1958 году, продолжая тематику неразрешимости, А. А. Марков публикует в ДАН СССР две важные статьи: «Неразрешимость проблемы гомеоморфии» и «О неразрешимости некоторых проблем топологии» [15], [16].

В 1947 году в обзоре по топологии в книге «Математика в СССР за тридцать лет 1917–1947» А. А. Марков посвятил две страницы результатам из неопубликованной рукописи «Мощности в топологии» своего аспиранта М. Я. Перельмана, погибшего в 1942 г. Следует сказать, что еще в 1953 году А. А. Марков переехал в Москву и начал работать в Вычислительном центре АН СССР, где он создал лабораторию математической логики и структуры машин, которой руководил около 20 лет. Кроме того, он трудился до 1972 года в МИАН им. В. А. Стеклова. С 1959 года и до конца жизни А. А. Марков заведует кафедрой математической логики мехмата. МГУ. Среди его московских учеников отметим А. Г. Драгалина (1941–1998), Н. М. Нагорного (1928–2007), Б. А. Кушнера (1941–2019), которые, наряду с его ленинградскими учениками Н. А. Шаниным (1919–2011) и Г. С. Цейтиным (1936–2022), продолжили исследования по конструктивной математике.

В 1953 году А. А. Марков был избран членом-корреспондентом АН СССР. В том же году он был принят в члены КПСС. Тем не менее пятнадцать лет спустя, в 1968 году, он подписывает известное «письмо 99» против принудительной госпитализации математика-диссидента Александра Есенина-Вольпина (1924–2016) в психиатрическую больницу. Скончался Андрей Андреевич Марков 11 октября 1979 года. В заключение мне хотелось бы привести две строфы из популярного среди математиков 60-х годов шуточного стихотворения А. А. Маркова «Демон» [17]:

Сидел и ел один шпинат
дух отрицанья, дух сомненья
И мрачен был, как экспонат
музея здравоохраненья...

На эти странные явления
да будет яркий свет пролит:
дух отрицанья, дух сомненья
болел болезнью «колит».

В. П. Одинец

Литература

- [1] Линник Ю. В., Шанин Н. А. Андрей Андреевич Марков (к пятидесятилетию со дня рождения) // Успехи матем. наук. 1954. Т. 9. вып. 1. С. 145–149.
- [2] Markov A. A. Über einige Bewegungsfälle in Dreikörperproblem // Бюлл. Астрон. Ин-та. 1928. Т. 21. С. 5–10.
- [3] Марков А. А. Закон десяти третей и классификация соударений в общей задаче трех тел // Журнал Лен. физ.-мат. общ. 1929. Т. 2, вып. 2. С. 81–97.
- [4] Труды 2-го Всесоюзного математического съезда. Т. 2. Секционные доклады. Л.: Изд-во АН СССР, 1936.
- [5] Markoff A. Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe // Матем. сб. 1936. Т. 1, № 1. С. 73–78.
- [6] Вайнберг Н. М. О свободной эквивалентности замкнутых кос // Докл. АН СССР. 1939. Т. 23, № 3. С. 215–216.
- [7] Одинец В. П. О ленинградских математиках, погибших в 1941–1944 годах. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2020.
- [8] Марков А. А. Основы алгебраической теории кос // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1945. Т. 16. С. 3–54.
- [9] Markov A. A. On mean values and exterior densities // Матем. сб. 1938. Т. 4, № 1. С. 165–191.
- [10] Markov A. A. On the definition of a complex // Матем. сб. 1939. Т. 5, № 3. С. 545–550.
- [11] Марков А. А. О свободных топологических группах // Докл. АН СССР. 1941. Т. 31, № 4. С. 299–302.
- [12] Марков А. А. О свободных топологических группах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1945. Т. 9, № 1. С. 3–64.
- [13] Нагорный Н. М., Шанин Н. А. Андрей Андреевич Марков (к шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи матем. наук. 1964. Т. 19, вып. 3. С. 207–223.
- [14] Марков А. А. Невозможность некоторых алгоритмов в теории ассоциативных систем // Докл. АН СССР. 1947. Т. 55, № 7. С. 587–590.
- [15] Марков А. А. Неразрешимость проблемы гомеоморфии // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121, № 2. С. 218–220.
- [16] Марков А. А. О неразрешимости некоторых проблем топологии // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123, № 6. С. 978–980.
- [17] Марков А. А. Стихотворения // Звезда. 2001. № 12. С. 179–181.

От движений Маркова к следам Маркова

Андрей Андреевич Марков-младший (не путать с тезкой-отцом) хорошо известен среди топологов благодаря важному, хотя и изолированному в его математическом творчестве результату. Этот результат называется теоремой Маркова; он относится к классификации узлов и зацеплений с помощью кос и формулируется в терминах так называемых движений Маркова. Хотя он восходит к 1930-м годам, он вызвал неожиданное эхо спустя полвека в связи с понятием следа Маркова.

Узлы и зацепления. Чтобы сформулировать теорему Маркова, начнем с краткого введения в теорию узлов и зацеплений. Для математика *узел* — это замкнутая кривая без самопересечений в трехмерном пространстве. Два узла считаются *эквивалентными*, если можно непрерывно деформировать один узел в другой, не допуская самопересечений. Уже в XIX веке было известно, что существует бесконечно много попарно неэквивалентных узлов. Выяснение того, эквивалентны ли два данных узла, — фундаментальный и трудный вопрос. Не легче выяснить даже, является ли данный узел *тривиальным*, то есть эквивалентным «незаузеленному» узлу, такому как окружность на плоскости.

Математиков интересуют также зацепления: *зацепление* — это объединение конечного множества узлов в пространстве без пересечений. Как и в случае узлов, два зацепления эквивалентны, если можно непрерывно деформировать одно в другое, не разрезая их. И снова можно спросить, эквивалентны или нет два данных зацепления. На рис. 1 (слева на-

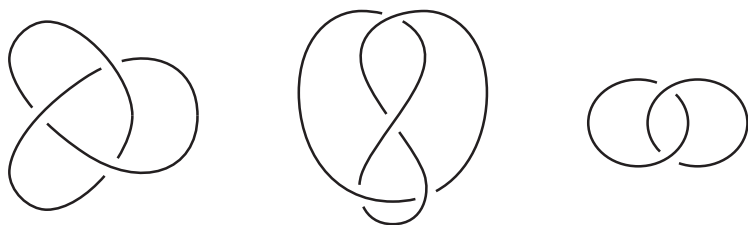


Рис. 1. Узлы и зацепление

право) изображены два узла — трилистник и восьмерка — и зацепление Хопфа. Количество узлов, образующих зацепление, не меняется при деформации; поэтому зацепление Хопфа, составленное из двух узлов, не может быть эквивалентно двум остальным узлам, которые неэквивалентны и между собой.

Очевидно, узел можно обходить в двух направлениях; выбор ориентации узла состоит в выборе одного из этих направлений. Если выбрать ориентацию для каждого из узлов, составляющих зацепление, то мы получим *ориентированное зацепление*. Два ориентированных зацепления эквивалентны, если существует деформация одного в другое, сохраняющая ориентацию.

Косы. Один из способов построить ориентированное зацепление — взять замыкание косы. Чтобы наглядно показать, что такое коса, поместим n крючков на горизонтальной прямой и к каждому крючку привяжем нить. Затем переплетем их и привяжем нижний конец каждой нити к одному из n крючков на другой горизонтальной прямой, параллельной первой, но проходящей ниже. Мы построили то, что называется *косой*. На нитях косы можно ввести естественную ориентацию: будем считать, что нить идет сверху вниз. На рис. 2 приведен пример косы с четырьмя нитями.

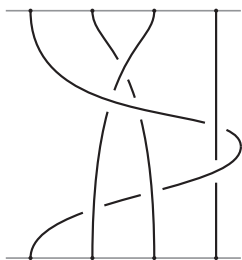


Рис. 2. Коса

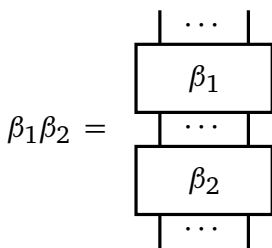


Рис. 3

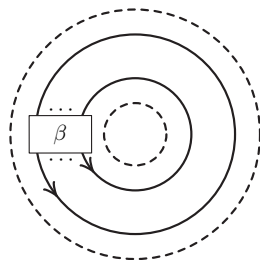


Рис. 4. Замыкание косы

Как и в случае узлов и зацеплений, косы рассматриваются с точностью до деформации. Приятное свойство кос с фиксированным количеством нитей состоит в том, что они образуют группу: чтобы получить произведение двух кос, нужно одну косу приставить сверху к другой и склеить соответствующие концы (рис. 3). Эта группа, введенная Э. Артином в 1920-х годах, с тех пор интенсивно изучается.

Пусть дана коса β с n нитями. Соединим верхние концы нитей с нижними посредством n дуг окружностей, как на рис. 4. Получается зацепление, которое мы обозначим $\hat{\beta}$. Это зацепление наследует от косы ориентацию сверху вниз.

В начале 1920-х годов американский математик Джеймс У. Александер (1888–1971) доказал в работе [1], что любое ориентированное зацепление эквивалентно замыканию некоторой косы. Такая коса не единственна. Действительно, А. А. Марков нашел три преобразования кос, которые при замыкании порождают эквивалентные ориентированные зацепления. Эти преобразования называются *движениями Маркова*. Первое движение Маркова использует групповую структуру, упомянутую выше: оно заменяет произвольную косу β на сопряженную, которая имеет вид $\beta' = \alpha\beta\alpha^{-1}$, где α , а следовательно, и β' имеют то же количество нитей, что и β . Второе и третье движения Маркова переводят косу β в косу с дополнительной нитью: справа к β присоединяется еще одна нить, которая переплетается с самой правой нитью в β ; здесь возможны два варианта, как показано на рис. 5.

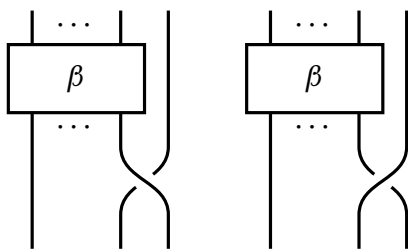


Рис. 5. Движения Маркова

Теорема Маркова. Мы говорим, что две косы (возможно, с неодинаковым количеством нитей) M -эквивалентны, если их можно связать конечной последовательностью движений Маркова и обратных к ним. Нетрудно убедиться, что M -эквивалентные косы имеют эквивалентные замыкания как ориентированные зацепления. Теорема Маркова утверждает, что верно и обратное, а именно: *две косы имеют эквивалентные замыкания в точности тогда, когда эти косы M -эквивалентны.*

Теорема Маркова появилась в статье [4] на немецком языке с резюме на русском языке. Текст основывался на докладе, сделанном Марковым 5 сентября 1935 года на Первой международной топологической конференции, которая прошла в Москве и была первой в истории по-настоящему международной конференцией, специально посвященной топологии. Марков дал лишь набросок доказательства своей теоремы. Первое полное доказательство появилось спустя 38 лет в монографии Джоан Бирман [2].

Следы Маркова. Теорема Маркова вновь привлекла к себе внимание в 1980-х годах после впечатляющего открытия нового инварианта зацеплений, которое сделал Воган Джонс (1952–2020; филдсовская медаль 1990 года).

Задать *инвариант зацепления* — значит сопоставить каждому зацеплению некоторую величину (число, многочлен...), которая принимает равные значения для эквивалентных зацеплений. Инварианты зацеплений позволяют различать неэквивалентные зацепления. Раньше были известны лишь очень немногие инварианты зацеплений.

Побуждаемые открытием Джонса, Н. Ю. Решетихин и В. Г. Тураев из ЛОМИ (Ленинградское отделение Математического института им. В. А. Стеклова) вскоре обнаружили бесконечно много новых инвариантов зацеплений. Их конструкция основывается на теории квантовых групп Дринфельда и Джимбо (возникновение которой отчасти можно проследить вплоть до работ школы Л. Д. Фаддеева). В некоторых случаях эта конструкция существенно связана со следствием из теоремы Маркова: любая функция, заданная на косах (с любым количеством нитей), инвариантная относительно движений Маркова, порождает некоторый инвариант зацеплений. Такая функция называется *следом Маркова*; она очень часто возникает как отображение следа для подходящего семейства матричных представлений групп кос. За последние десятилетия построены многочисленные важные примеры следов Маркова.

Читатель найдет дальнейшие подробности в монографии [3].

Кристиан Кассель (Christian Kassel)

перевод Б. Р. Френкина

Литература

- [1] *Alexander J. W.* A lemma on systems of knotted curves // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1923. V. 9, № 3. P. 93–95.
- [2] *Birman J. S.* Braids, links, and mapping class groups. Princeton, N.J.: PUP, 1974. (Ann. of Math. Studies, Vol. 82).
- [3] *Kassel C., Turaev V.* Braid groups. New York: Springer, 2008. (Graduate Texts in Mathematics, V. 247.) Имеется перевод: *Кассель К., Тураев В. Г.* Группы кос. М.: МЦНМО, 2014.
- [4] *Markoff A.* Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe // Матем. сб. 1936. Т. 1, № 1. С. 73–78.

Дмитрий Константинович Фаддеев (1907–1989)

Дмитрий Константинович Фаддеев родился в городе Юхнов Смоленской губернии (ныне Калужская область) 30 июня 1907 года в имении деда по материнской линии. Дед Дмитрия Константиновича по отцовской линии происходил из крестьян Самарской губернии, и фамилия его возникла вместе с вольной, которую он получил незадолго до отмены крепостного права.

С ранних лет главными увлечениями Д. К. Фаддева были математика и музыка. В 1923 году он поступил физико-математический факультет Ленинградского университета, а в 1929 поступил в класс композиции Ленинградской государственной консерватории. В дальнейшем недостаток времени вынудил его оставить консерваторию, но любовь к музыке осталась с ним навсегда, и на фортепиано он играл на вполне профессиональном уровне.

Первыми учителями Д. К. Фаддеева были такие выдающиеся математики, как И. М. Виноградов и Б. Н. Делоне. У первого он писал диплом, а у второго учился в аспирантуре. Как рассказывал сам Дмитрий Константинович, после окончания университета найти работу по специальности было достаточно трудно, и до 1930 года он работал в разных местах, в том числе и в Палате мер и весов, где пристратился к курению из-за больших перерывов в наблюдениях за приборами. И все же ему хватило силы воли позднее бросить эту вредную привычку. Любопытная деталь — характерной чертой того времени был дефицит практически всего, в том числе и бумаги, поэтому свои вычисления, а они были достаточно большими, Дмитрию Константиновичу приходилось проводить на обратной стороне обоев.



С 1930 года Дмитрий Константинович начинает вести преподавательскую работу в различных вузах Ленинграда. С 1933 года и до своей кончины в 1989 году он преподавал в Ленинградском университете. В 1935 году он защитил диссертацию, за которую ему сразу была присуждена докторская степень. С 1937 года — профессор. В 1952–54 гг. Д. К. Фаддеев был деканом математико-механического факультета.

В Математическом институте им. В. А. Стеклова Академии наук СССР (МИАН) Дмитрий Константинович работал с 1932 до 1934 года (когда институт переехал в Москву) и с открытия Ленинградского отделения (ЛОМИ) в 1940 году до своей кончины. В 1964 году Д. К. Фаддеев был избран членом-корреспондентом АН, многие годы руководил лабораторией алгебраических методов в ЛОМИ, был президентом Ленинградского математического общества. Дмитрий Константинович был основателем и бессменным руководителем общегородского алгебраического семинара, ныне носящего его имя. За монографию [1], написанную совместно со его женой Верой Николаевной, они в 1981 году были удостоены Государственной премии. Дмитрий Константинович скончался 20 октября 1989 года и был похоронен на кладбище в Комарово.



Слева направо: Л. В. Канторович, И. П. Натансон, Д. К. Фаддеев (фотография 1938 года)

Д. К. Фаддеев внес вклад во многие разделы математики — теорию функций, теорию вероятностей, геометрическую кристаллографию; надо также отметить очень весомый вклад в численные методы математики. Но в центре его творчества была алгебра. Он существенно развил теорию Галуа и особенно задачу погружения в теории Галуа. Его творчество дало толчок к развитию теории представлений неполупростых объектов (колец, модулей), целочисленных представлений конечных групп.

Занимаясь задачей погружения, Дмитрий Константинович столкнулся с формализмом так называемых «систем факторов», все время в этой связи встречающихся, и обнаружил, что он является частным случаем гораздо более общей конструкции. Так была открыта теория когомологий групп [5] (независимо и одновременно ее открыли С. Эйленберг и С. Маклейн). По воспоминаниям сына Дмитрия Константиновича, когда они находились в эвакуации в городе Казани в 1943 году, в какой-то из вечеров отец возбужденно ходил по комнате и восклицал, что он открыл нечто замечательное (то, что он открыл, потом называли коциклами). Сын спросил его: «А сколько людей в мире поймет то, что ты сейчас сделал?» — «Ну, человек, может быть пять», — ответил отец.

Дмитрий Константинович был блестящим преподавателем и активно разрабатывал концепцию преподавания. «Сборник задач по высшей алгебре» [2], написанный им совместно с И. С. Соминским, выдержал множество переизданий. Его учебник «Лекции по алгебре» [3] пользуется большой популярностью. Ему (с соавторами) принадлежат также учебники по алгебре для школы.

Основной свой подход к обучению и написанию учебников он формулировал так:

Я считаю, что абстрактные понятия следует вводить по мере того, как удастся возбудить в учащихся потребность в обобщении или, по крайней мере, если имеется возможность достаточно иллюстрировать общие понятия более конкретным материалом.

Дмитрий Константинович стоял у истоков математических олимпиад для школьников, первая из которых состоялась в Ленинграде в 1934 году. Он был одним из основателей замечательного интерната № 45. Ныне это Академическая гимназия при Санкт-Петербургском государственном университете, носящая его имя.

Особо следует сказать о человеческих качествах Дмитрия Константиновича. Ему было присуще доброжелательное внимание к собеседнику, успехи коллег радовали его, как его собственные успехи. Ему было органически чуждо высокомерие. Все это сказалось и на общей благожелательной и творческой атмосфере в сообществе математиков Ленинграда.

Д. К. Фаддеев постоянно вне лекционных сеток вел замечательный кружок для первокурсников, желающих всерьез заниматься алгеброй и теорией чисел, что тогда было совершенно естественным, а нынче, пожалуй, показалось бы многим экзотикой. Среди участников кружка 1963 года был и автор этой заметки.

О вкладе Д. К. Фаддеева в мировую математику академик И. Р. Шафаревич написал (см. [4]):

Зная, как легко Дмитрий Константинович отдает свои идеи, как мало склонен подчеркивать личный вклад, как много сил готов тратить на обсуждение работ учеников и коллег, можно было предсказать, что его влияние на развитие математики не будет столь наглядно видно и так широко признано, как оно того заслуживает. Д. К. Фаддееву очень подходят слова о Жуковском, которому он и в других отношениях близок по духу, сказанные Пушкиным: «Его переводили бы на все языки, если бы он сам не переводил так много». Только «переводить» надо заменить, например, на «цитировать». Вклад Дмитрия Константиновича в математику оценен, как нам представляется, совершенно недостаточно...

Самого Дмитрия Константиновича такое положение несколько не огорчало. И он был, конечно, глубоко прав. Если справедлив принцип «рукописи не горят», то тем более «не горят» математические идеи. И не только в том смысле, что будущие математики или историки математики восстановят истинное положение вещей. Гораздо существеннее то, что для самого Дмитрия Константиновича важна была лишь красота создаваемых им математических идей, а эта красота будет существовать всегда и будет нести в себе отпечаток его индивидуальности.

В 1930-е годы, из-за изоляции от математики Запада, много сил, которые можно было бы потратить на собственные исследования, уходило на продумывание и понимание уже давно сложившихся и неизвестных только у нас разделов. А нередко работа в таких областях грозила тем, что радовавшее душу открытие оказывалось лишь переоткрытием известного результата. Но именно здесь сказалась удивительная черта Дмитрия Константиновича. Он был редким математиком, готовым с радостью выслушать собеседника, что бы тот ни хотел ему рассказать. В его реакции на математический результат отступало на задний план то, кем он был получен, — шла ли речь о его собственном открытии, или о результате того, кто ему об этом рассказывал, или о старой, но раньше неизвестной говорящему теореме — основную роль играла красота результата.

В 1963 году Дмитрий Константинович предложил мне преподавать в только что образованном 45-м интернате. Через некоторое время он пришел на мое занятие с инспекторской проверкой. Я был тогда совсем молодым человеком и рассказывал материал, что называется, со звериной серьезностью, скрупулезно доказывая любые, даже очевидные факты. По-

сле урока Дмитрий Константинович публично похвалил меня, а затем, когда мы остались одни, сказал: «Мне кажется, у вас наука господствует над разумом». Этот афоризм я запомнил на всю жизнь, и он сильно повлиял на мою дальнейшую стратегию преподавания.

С. В. Востоков

Литература

- [1] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1960.
- [2] Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: ГТТЛ, 1953 и последующие издания.
- [3] Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.
- [4] Востоков С. В., Шафаревич И. Р. Гармония в алгебре. К столетию со дня рождения член-корреспондента АН СССР Дмитрия Константиновича Фаддеева // Вестник РАН. 2007. Вып. 7. С. 634–639. См. https://www.euler-foundation.org/?page_id=39
- [5] Фаддеев Д. К. К теории гомологий в группах // Изв. АН СССР. 1952. Т. 16. С. 17–22.

Д. К. Фаддеев: диофантовы уравнения, теория Галуа, гомологическая алгебра

Круг научных интересов Д. К. Фаддеева был очень широк. Но конечно, прежде всего мы вспоминаем его как одного из самых выдающихся алгебраистов своего времени. Его исследования затронули почти все разделы алгебры. Первые его результаты относятся к теории диофантовых уравнений, которыми он заинтересовался под влиянием своего учителя Бориса Николаевича Делоне. Они были впечатляющи: Дмитрию Константиновичу удалось весьма существенно расширить класс уравнений 3-й и 4-й степеней, которые можно решить до конца.

Как известно, решения бинарных уравнений третьей степени образуют группу относительно естественного умножения, и классическая теорема Морделла—Вейля утверждает, что эта группа конечно порождена; однако вычислить ее ранг непросто. В ряде случаев Д. К. Фаддееву удалось найти такие оценки этого ранга, которые позволяют найти все решения уравнения. Например, уравнения $x^3 + y^3 = A$ удалось полностью решить для всех $A \leq 50$. Для того чтобы оценить силу этого результата, отметим, что до исследований Д. К. Фаддеева удавалось только показать, что для некоторых A у этого уравнения есть лишь тривиальные решения.

Очень красив и результат, касающийся уравнения $x^4 + Ay^4 = \pm 1$: для него Д. К. Фаддеев доказал, что при любом целом A оно имеет не более одного нетривиального решения и это решение отвечает основной единице некоторого чисто мнимого поля алгебраических чисел 4-й степени и существует лишь тогда, когда основная единица трехчленная. Эти и другие результаты вошли в замечательную монографию [1], написанную Дмитрием Константиновичем вместе с Б. Н. Делоне.

Диофантовы уравнения продолжали интересовать Д. К. Фаддеева и в последующие годы. В цикле работ он доказывает конечность группы классов дивизоров нулевой степени для кривой Ферма степеней 4, 5, 7; отсюда вытекают очень сильные результаты о самих уравнениях. Так, существует лишь конечное число квадратичных полей, в которых уравнение $x^4 + y^4 = 1$ имеет нетривиальное решение, и в каждом из этих полей есть лишь конечное число решений. Результатов такого рода раньше не было.

Конечно, с сегодняшней точки зрения, когда решены многие классические проблемы теории диофантовых уравнений, эти результаты видятся по-другому, но в то время они были рекордными.

Вторым направлением, которое заинтересовало Д. К. Фаддеева в первые годы его научной деятельности, стала теория Галуа. Особенно его интересовала так называемая обратная задача теории Галуа (и до сих пор не решенная полностью): построить расширение заданного основного поля с предписанной группой Галуа.

Первые результаты Д. К. Фаддеева в этой области относятся к построению расширений с небольшими группами Галуа — подгруппами группы подстановок четырех элементов, метациклическими транзитивными группами подстановок простого числа элементов, группами кватернионов и кватернионных единиц. При этом используется красивый геометрический подход: искомое поле интерпретируется как подмножество некоторого векторного пространства, на котором действие группы Галуа описывается достаточно просто. Многие полученные здесь результаты нашли изящную геометрическую формулировку. Так, расширения поля рациональных чисел с кватернионной группой Галуа оказываются в тесной связи с тройками попарно ортогональных векторов с рациональными компонентами в трехмерном евклидовом пространстве.

Однако для дальнейшего продвижения в этом направлении разработанные им в этих работах приемы оказываются недостаточными: они слишком сильно используют индивидуальные особенности групп и не допускают существенных обобщений. Следующим шагом должно бы было стать решение задачи для разрешимых групп. И естественный подход здесь такой: надо научиться строить цепочки расширений, каждое последующее из которых — расширение предыдущего с абелевой группой Галуа.

Так возникает более общая, чем обратная задача, проблема погружения Галуа: погрузить заданное расширение Галуа в более широкое поле с заданной группой Галуа и с заданным эпиморфизмом этой группы на группу Галуа исходного расширения. Одной из первых работ, в которой начато систематическое исследование задачи погружения, стала замечательная статья 1944 года [2], написанная им опять с Б. Н. Делоне. В параграфах этой статьи, принадлежащих Д. К. Фаддееву, он формулирует необходимое условие разрешимости задачи погружения — условие согласности: оно состоит в аддитивной разрешимости задачи (от решения требуется, чтобы оно было векторным пространством, на котором действует группа операторов, согласованная должным образом с группой Галуа погружаемого поля, и совершенно не требуется существование умножения). Тут же доказывается, что согласность достаточна для

погружаемости, если ядро рассматриваемой задачи погружения — циклическая группа порядка, не делящегося на 8.

Кроме того, в той же работе Д. К. Фаддеев доказывает, что если задача погружения с абелевым ядром для числовых полей допускает решение, являющееся алгеброй Галуа, то существует и поле, решающее ее. Значение этих результатов для дальнейшего развития исследований по обратной задаче и задаче погружения трудно переоценить.

Условие согласности оказалось очень глубоким и в ряде случаев очень близким к достаточному условию погружаемости. Неудивительно, что переоткрывший его четыре года спустя выдающийся немецкий алгебраист Хельмут Хассе предположил и пытался доказать, что оно является и достаточным условием погружаемости (по крайней мере в случае абелева ядра). Но почти сразу Д. К. Фаддеев и И. Р. Шафаревич построили примеры, опровергающие эту гипотезу Хассе. Особенно прост пример Д. К. Фаддеева: в нем ядро задачи погружения — циклическая группа 8-го порядка. Позднее Д. К. Фаддеев вместе с его аспирантом Р. А. Шмидтом нашли необходимое и достаточное условие погружаемости для такого ядра.

Исследования Д. К. Фаддеева по теории Галуа оказали большое влияние на дальнейшее развитие этой теории. Они, вместе с его результатами о когомологиях групп, самым существенным образом были использованы при доказательстве разрешимости обратной задачи теории Галуа для разрешимых групп и числовых полей (И. Р. Шафаревич) и при решении задачи погружения для случая абелева ядра (А. В. Яковлев). Результаты многолетних исследований Д. К. Фаддеева и других математиков в этом направлении подытожены им в монографии [3], написанной вместе с В. В. Ишхановым и Б. Б. Лурье.

В 1947 г. вышла статья Д. К. Фаддеева [4], в которой он определяет то, что мы теперь называем группами когомологий для групп. Одновременно и независимо эти группы были введены американскими математиками С. Эйленбергом и С. Маклейном. Когомологии групп стали мощнейшим средством исследований в различных областях алгебры. Представляется вероятным, что Д. К. Фаддеев пришел к этим понятиям, стремясь создать аппарат для изучения задачи погружения полей: многие его последующие результаты по гомологической алгебре явно навеяны конструкциями, естественными для теории Галуа. И действительно, когомологии оказались идеальным аппаратом для изучения проблем погружения полей, построения полей с разрешимыми группами и других задач, связанных с теорией Галуа и ее приложениями.

Вклад Д. К. Фаддеева в гомологическую алгебру не ограничивается только определением групп когомологий. Ему принадлежат также весьма важные содержательные результаты. Отметим его замечательную

теорему, связывающую когомологии подгруппы в некотором модуле с когомологиями всей группы в некотором модуле над всей группой. Важнейшую роль, особенно для отечественных математиков, сыграли написанные Д. К. Фаддеевым вместе с З. И. Боровичем работы «Теория гомотопий в группах. I, II», опубликованные в 1956 и 1959 гг. в «Вестнике ЛГУ»; в них впервые была систематически изложена теория когомологий групп. В этих статьях авторы не только дают обзор состояния теории, но и получают много новых важных результатов. Например, в них впервые построены минимальные проективные резольвенты для модулей над локальными кольцами и при помощи таких резольвент показано, что у любой нециклической p -группы существует бесконечно много попарно неизоморфных неразложимых p -адических представлений.

Д. К. Фаддеев применял гомологические методы, в создании которых он сам активно участвовал, и к другим интересным задачам. Так, он построил теорию простых алгебр над полем алгебраических функций и вычислил группу Брауэра поля рациональных функций над полем характеристики 0, намного опередив свое время. Дальнейшим развитием этого результата стала знаменитая теорема Меркурьева—Суслина, ставшая одним из ярких достижений ленинградской алгебраической школы, созданной Дмитрием Константиновичем.

Дмитрий Константинович Фаддеев был человеком высочайшей культуры и интеллигентности. В молодости он учился в консерватории и был большим знатоком и ценителем классической музыки, прекрасным пианистом. Для всех, кто знал и любил его, Дмитрий Константинович навсегда останется высочайшим авторитетом. Нам повезло, что посчастливилось работать и постоянно общаться с этим замечательным человеком.

А. В. Яковлев

Литература

- [1] Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К. Теория иррациональностей третьей степени. М.-Л., АН СССР, 1940.
- [2] Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К. Исследования по геометрии теории Галуа // Матем. сб. 1944. Т. 15, № 2. С. 243–284.
- [3] Ишханов В. В., Лурье Б. Б., Фаддеев Д. К. Задача погружения в теории Галуа. М.: Наука, 1990.
- [4] Фаддеев Д. К. О фактор-системах в абелевых группах с операторами // Докл. АН СССР. 1947. Т. 58, № 3. С. 361–364.
- [5] Яковлев А. В. Д. К. Фаддеев и Петербургская алгебраическая школа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2008. Т. 11, вып. 1. С. 1–4.

Соломон Григорьевич Михлин (1908–1990)

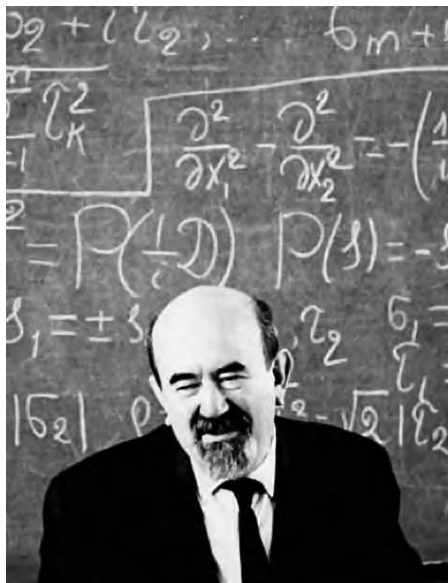
С. Г. Михлин родился в белорусском городке Холмече, в еврейской семье скромного достатка (по паспорту он Залман Гиршевич Михлин). Он был самым младшим из пяти детей. Закончив среднюю школу в Гомеле в 1923 году, он поступил в Ленинградский государственный педагогический институт имени Герцена в 1925 году. В январе 1927 года он перевелся на второй курс факультета математики и механики Ленинградского государственного университета, сдав экзамены за первый курс без посещения лекций.

Сергей Львович Соболев учился с Михлиным в одной группе. Среди их университетских преподавателей были Николай Максимович Гюнтер и Владимир Иванович Смирнов. Последний стал научным руководителем Михлина. Темой дипломной работы, защищенной в 1929 году, была сходимость двойных степенных рядов.

В 1930 году С. Г. Михлин начал свою педагогическую карьеру и преподавал два года в различных ленинградских институтах. В 1932 году он получил должность научного сотрудника в Сейсмологическом институте Академии наук СССР, где работал до 1941 года. Ему присудили степень доктора физико-математических наук в 1935 году, минуя степень кандидата, и в 1937 году он стал профессором. Во время Великой отечественной войны С. Г. Михлин — профессор в Государственном университете Алма-Аты. В 1944 году Михлин вернулся в Ленинградский государственный университет.

С 1964 по 1986 год С. Г. Михлин возглавлял лабораторию численных методов в Исследовательском институте математики и механики в том же университете. С 1986 года и до самой смерти в 1990 году Михлин продолжал работать старшим научным сотрудником этой лаборатории.





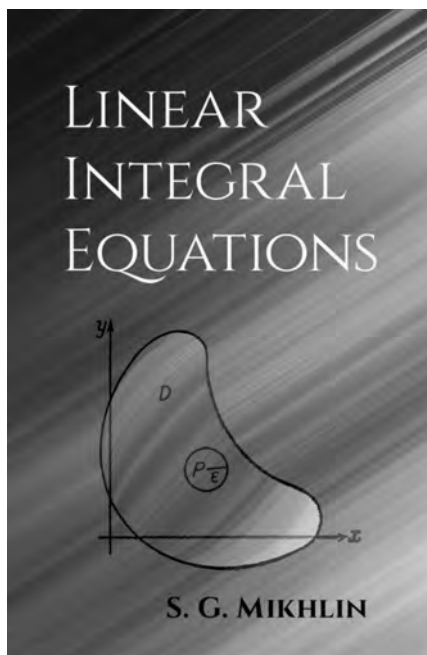
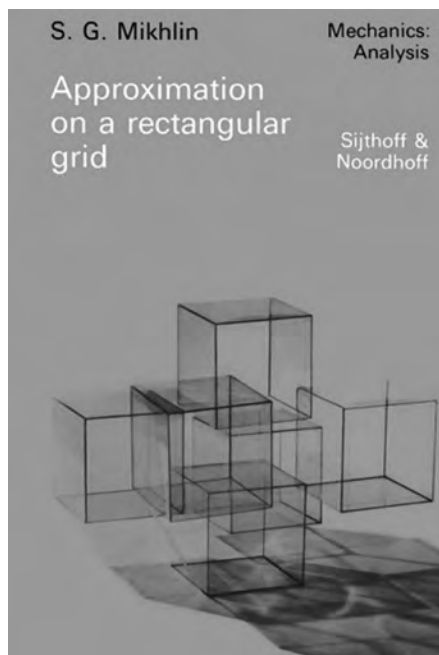
С. Г. Михлин был автором более 220 научных работ, включая около 30 прекрасно написанных книг и учебников. В целом С. Г. Михлин разделял свои исследования на «работы», каждая из которых состояла из статей и, как правило, заканчивалась написанием книги. В книгах он результаты «работы» собирал и упорядочивал, считая это своим долгом.

Как правило, С. Г. Михлин начинал свою «работу», побуждаемый не столько собственным любопытством, сколько мыслями об объективной пользе соответствующей теории для развития математики и ее приложений. Конечно, научное любопытство тоже играло роль, но, как мне казалось, второстепенную. Спортивная сторона математики была ему абсолютно чужда. Монографии и учебники Михлина замечательны с точки зрения педагогики, особенно те, которые посвящены вариационным методам и интегральным уравнениям. Их ясный стиль и доступность для неподготовленного читателя принесли Соломону Григорьевичу широкую известность в сообществе инженеров, что было редким достижением для математика. Почти все его книги были переведены на иностранные языки (в частности, на английский, немецкий, китайский, японский и венгерский). Они ощутимо повлияли на профессиональную подготовку многих молодых математиков.

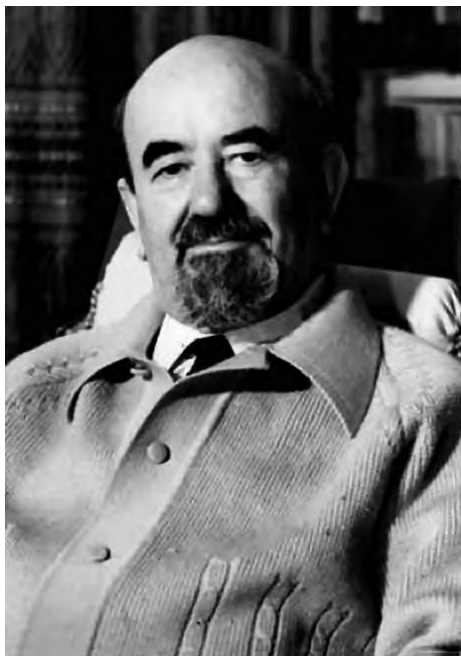
Любимыми направлениями исследований Михлина были теория упругости, теория интегральных операторов, численные методы в математической физике и краевые задачи для дифференциальных уравнений. И. Ц. Гохберг [1] писал:

Михлин считал теорию сингулярных интегральных уравнений своим любимым изобретением. Его исследования вскоре привели к возникновению аппарата псевдодифференциальных операторов. Введенное им в 1936 году понятие символа сингулярного оператора стало краеугольным камнем новой теории, которая совершила революцию в дифференциальных уравнениях в частных производных.

Согласно Г. Фикера [2], Михлин был одним из основоположников современного численного анализа вместе с Борисом Галёркиным, Александром Островским, Джоном фон Нейманом, Вальтером Ритцем и Мауро Пиконе.



Математическим кумиром Михлина был Ж. Адамар, с которым он впервые встретился в 1934 году в Москве, когда Соломон Григорьевич оказался одним из экскурсоводов Адамара во время прогулок по городу. Эта встреча была знаменательным событием для молодого Михлина, пятью годами ранее обобщившего в своей дипломной работе формулу Коши—Адамара для радиуса сходимости двойного степенного ряда. Я помню, что однажды в 1960 году Соломон Григорьевич с гордостью рассказал мне, что некто находил внешнее сходство между ним и этим знаменитым французским математиком. Другим математическим кумиром Михлина был его однокурсник С. Л. Соболев. Последний, между прочим, всегда называл Михлина его уменьшительно-ласкательным именем Зяма.



Соломон Григорьевич был наделен прирожденным чувством юмора. Он заливался смехом, читая произведения обэриутов, доступные в 60-е годы только в самиздате. Он знал наизусть поэму «Плих и Плюх» Вильгельма Буша в переводе Д. Хармса и многие стихотворения Эдварда Лира, переведенные С. Маршаком, такие как «Кот и сова», «В страну Джамблей», «Поббл, у которого нет пальцев на ногах» и другие.

Соломон Григорьевич никогда не ходил на концерты, объясняя это тем, что он воспринимает музыку только как шум.

Он самокритично утверждал, что у него нет способностей к иностранным языкам, хотя я, бывало, слышал, как он говорил по-английски или по-французски. Будучи убежденным атеистом, Соломон Григорьевич знал Пятикнижие и, кстати, упрекал Томаса Манна в слишком вольной интерпретации Библии в «Иосифе и его братьях».

Михлину не нравился ни вышеупомянутый роман, ни «Мастер и Маргарита» Булгакова. В общем, было сложно спорить с Соломоном Григорьевичем на гуманитарные темы из-за его уверенности в своих убеждениях, эрудиции и силе аргументации. Его речь всегда была логична и афористична.

Михлин никогда не подсказывал пути развития темы своим аспирантам и любил цитировать Ильфа и Петрова: «Спасение утопающих — дело рук самих утопающих».

Соломон Григорьевич знал, что я вырос без отца, погибшего на фронте в 1941 году, и, я бы сказал, много лет заботился обо мне, как отец. Он часто приглашал меня к себе домой, рассказывал о своей жизни, отвечал на самые разные вопросы.

Имея в виду партию и чиновников в администрации университета, Михлин однажды сказал мне: «У них только власть, а у нас теоремы. Поэтому мы сильнее».

В 1961 году С. Г. Михлин получил орден «Знак Почета». Он был избран доктором *honoris causa* Политехнического университета Карл-Маркс-Штадта (ныне Хемниц) в 1968 году. Он также стал членом Германской академии естествоиспытателей «Леопольдина» в 1970 году и членом Национальной академии деи Линчеи в 1981 году. Когда ему не разрешили приехать в Италию, чтобы принять награду, итальянский математик Г. Фикера и его жена привезли в Ленинград маленькую золотую рысь — награду академика. Они вручили ее Соломону Григорьевичу у него дома. Я и моя жена Татьяна были единственными гостями на этой «церемонии».

Соломон Григорьевич для многих его учеников и друзей — не только выдающийся математик, но также человек высокой нравственности, доброго сердца и глубокого ума. Замечательные качества С. Г. Михлина как человека и ученого пробудили во многих молодых сердцах любовь к математике и интерес к научным исследованиям.

В. Г. Мазья
перевод *Т. Блинковой*

Литература

- [1] *Gohberg I. Vladimir Maz'ya: Friend and Mathematician. Recollections // Israel Gohberg and Friends. On the Occasion of his 80th Birthday / H. Bart, T. Hempfling, M. A. Kaashoek eds. Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2008. P. 209–212.*
- [2] *Fichera G. Solomon G. Mikhlin (1908–1990) // Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis., Mat. Nat., IX. Ser., Rend. Lincei. 1994. Suppl. 5 (1). P. 49–61.*

С. Г. Михлин и многомерные сингулярные интегралы

Почти полувековая работа Соломона Григорьевича Михлина (1908–1990) существенно повлияла на развитие анализа и математической физики. Цель нашей статьи — обрисовать лишь одну часть его творческого наследия, а именно теорию многомерных сингулярных интегральных операторов. Эта теория, в свою очередь, послужила основанием исчисления псевдодифференциальных операторов — одного из важнейших инструментов современного математического анализа.

Предметом рассмотрения указанной теории являются интегральные операторы вида

$$u(x) \mapsto a(x)u(x) + (Su)(x), \quad (1)$$
$$(Su)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y-x)u(y)dy, x \in \mathbb{R}^d.$$

Здесь $K(x, y-x) = \frac{f(x, \theta)}{r^d}$, $\theta = \frac{y-x}{r}$, $r = |x-y|$. В данном случае сингулярность ядра настолько сильна, что интеграл, понимаемый в классическом смысле, расходится. Поэтому его следует понимать в смысле главного значения по Коши. Для такой сходимости, очевидно, даже в случае хороших функций u необходимо условие

$$\int_{|\theta|=1} f(x, \theta)d\theta = 0. \quad (2)$$

Операторы вида (1) можно естественным образом определить на замкнутых гладких многообразиях посредством локализации и обобщить на вектор-функции $u(x)$ с квадратной матрицей $K(x, y-x)$ в качестве ядра.

Интеграл, фигурирующий в формуле (1), обычно называют сингулярным. В одномерном случае ($d=1$) уравнения с такими интегралами появились в начале XX века в статьях Д. Гильберта и А. Пуанкаре о некоторых краевых задачах для уравнений с частными производными, а также

в комплексном анализе. Даже в одномерном случае теория Фредгольма неприменима к этому классу уравнений, поскольку оператор (1) не компактен.

Одномерный случай изучался в основном при помощи комплексного анализа. Иначе обстояло дело в многомерном случае, когда сингулярные интегралы естественно возникают в теории эллиптических краевых задач. Здесь до работ Михлина было известно очень мало (Ф. Трикоми, 1926, 1928, $d = 2$, и Ж. Жиро, 1934–1936, $d > 2$, решали уравнения специального вида). Настоящий прорыв был совершен С. Г. Михлиным. В его статьях в «Докладах АН СССР» и «Математическом сборнике», опубликованных в 1936 году ([4], [5]), он заложил основы общей теории сингулярных интегральных уравнений. В случае $d = 2$ Соломон Григорьевич разложил функцию f в тригонометрический ряд $f(x, \theta) = \sum_{n \neq 0} b_n(x) e^{in\theta}$. Модифицировав этот ряд, он определил функцию, которую назвал символом оператора $a(x) + S$:

$$\Phi(x, \theta) = a(x) + \sum_{n \neq 0} a_n(x) e^{in\theta},$$

$$a_n(x) = \frac{2\pi i^n}{n} b_n(x).$$

Восхищаясь работой Михлина [4], Жиро [2] писал: «Остроумная процедура, указанная С. Михлиным, позволяет рассматривать уравнения с двойными главными интегралами очень общего типа». Жиро обобщил конструкцию Михлина и опубликовал формулу, использующую сферические гармоники, для символа сингулярного интегрального оператора в евклидовом пространстве произвольной размерности. Жиро привел свою формулу без доказательства. Доказательство было впервые опубликовано С. Г. Михлиным в 1955 году, через двенадцать лет после смерти Жиро.

Оператор восстанавливается по своему символу с точностью до компактного слагаемого. Существует соответствие между суммами и произведениями операторов и их символов, также с точностью до компактного слагаемого.

Главные темы исследований С. Г. Михлина в этой области были таковы:

- условия ограниченности оператора S в различных функциональных пространствах;
- анализ разрешимости уравнений вида

$$(Au)(x) \equiv a(x)u(x) + (Su)(x) = v(x), \quad (3)$$

где $a(x)$, $v(x)$ — заданные функции, соответственно матричная и векторная.

В качестве замены явных формул для решений уравнения (3) Соломон Григорьевич предложил процедуру регуляризации. Речь идет о построении сингулярного интегрального оператора $\mathbf{R} = b(x) + \tilde{\mathbf{S}}$, для которого операторы $\mathbf{AR} - \mathbf{I}$ и $\mathbf{RA} - \mathbf{I}$ компактны в соответствующих пространствах. Когда такой регуляризатор найден, сингулярное интегральное уравнение сводится к уравнению для компактного оператора. Обратимость символа обеспечивает существование регуляризатора.

Понятие символа позволяет рассматривать многие задачи, связанные с сингулярными интегралами. Например, С. Г. Михлин установил, что ограниченность символа при некотором дополнительном условии гладкости гарантирует ограниченность оператора в $L_2(\mathbb{R}^d)$.

В течение 15 лет С. Г. Михлин был единственным исследователем, работавшим в теории многомерных сингулярных интегральных операторов. Фундаментальная работа А. Кальдерона и А. Зигмунда [1] появилась только в 1952 году. Они обобщили теорему Рисса о L_p -ограниченности преобразования Гильберта:

$$(Hu)(x) = (\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{y-x} dy.$$

Кальдерон и Зигмунд показали, что многомерный сингулярный оператор типа свертки $u \mapsto \frac{f(x/|x|)}{|x|^d} * u$ ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, если функция f удовлетворяет условиям (2) и

$$\int_{|\theta|=1} (1 + \log^+ |f(\theta)|) |f(\theta)| d\theta < \infty. \quad (4)$$

В дальнейшем Кальдерону и Зигмунду удалось распространить свои результаты на широкий класс сингулярных интегралов несверточного типа. А именно, если ядро $Q(x, y)$ удовлетворяет условиям $|Q(x, y)| \leq C|x-y|^{-d}$ и

$$|Q(x, y+h) - Q(x, y)| + |Q(x+h, y) - Q(x, y)| \leq Ch^\alpha |x-y|^{-d-\alpha}, \\ \alpha \in (0, 1), \quad 2h \leq |x-y|,$$

определим оператор $\mathbf{T}_Q$ билинейной формой

$$\langle \mathbf{T}_Q \varphi, \psi \rangle = \iint \psi(x) Q(x, y) \varphi(y) dx dy,$$

где функции $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ имеют непересекающиеся носители. Если оператор $\mathbf{T}_Q$ продолжается до ограниченного оператора в пространстве L_2 ,

т. е. при всех $g, h \in C_0^\infty$ выполнена оценка $|\langle T_Q g, h \rangle| \leq C \|g\|_{L_2} \|h\|_{L_2}$, то оператор ограничен на пространстве L_p при любом $p \in (1, \infty)$. Тем самым проблема ограниченности сводится к единственному случаю $p = 2$. В этом последнем случае существенного прогресса достигли И. Стейн, А. Макинтош, М. Крист и др. В частности, в силу замечательной $T1$ -теоремы оператор с ядром Кальдерона—Зигмунда Q ограничен в L_2 в точности тогда, когда T_Q и его сопряженный T'_Q отображают лишь одну функцию, а именно, тождественную единицу, в пространство ВМО (подробности и ссылки см., например, в [3]).

Соломон Григорьевич исследовал для многомерного случая понятие *индекса* оператора, т.е. разности размерностей ядер оператора и его сопряженного, введенное для одномерного случая в работах Ф. Нётера в 1920-х годах. В этой теории занял центральное место и нашел многочисленные применения введенный Михлиным символ сингулярного оператора. Соломон Григорьевич доказал, что скалярный эллиптический сингулярный интегральный оператор в многомерном случае имеет индекс нуль. Гораздо более сложным оказался матричный случай. В 1960-х годах общую проблему индекса решили М. Атья и И. Зингер. Их результат имел важные приложения в анализе, алгебраической топологии, некоммутативной геометрии и теоретической физике.

Соломон Григорьевич, с его идеями и результатами в области сингулярных интегральных операторов, стал предтечей стремительного развития 1960-х годов в анализе, породившего теорию псевдодифференциальных операторов, которая охватывает и сингулярные интегральные, и дифференциальные операторы с их резольвентами. Р. Т. Сили, один из пионеров этой области, так оценивает вклад в нее Михлина, см. [8]: «Будет ясно, что автор глубоко обязан работам Михлина, в которых введены многие понятия и поставлены вопросы, рассмотренные здесь».

Результаты С. Г. Михлина в теории многомерных сингулярных интегралов, как и ее дальнейшее развитие, представлены в книгах [6], [7].

В. Г. Мазья, Г. В. Розенблум

Перевод Б. Р. Френкина

Литература

- [1] Calderón A. P., Zygmund A. On the existence of certain singular integrals // Acta Math. 1952. V. 88. P. 85–139.
- [2] Giraud G. Sur une classe générale d'équations à intégrales principales // C. R. Acad. Sci. 1936. T. 202. P. 2124–2127.
- [3] Hofmann S., McIntosh A. Boundedness and applications of singular integrals and square functions: a survey // Bull. Math. Sci. 2011. V. 1, № 2. P. 201–244.

- [4] *Михлин С. Г.* Композиция двойных сингулярных интегралов // Докл. АН СССР. 1936. Т. 2, № 1. С. 3–6.
- [5] *Михлин С. Г.* Сингулярные интегральные уравнения с двумя независимыми переменными // Матем. сб. 1936. Т. 1, № 4. С. 535–552.
- [6] *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
- [7] *Mikhlin S. G., Prössdorff S.* Singular Integral Operators. Springer-Verlag, 1986.
- [8] *Seeley R. T.* The index of elliptic systems of singular integral operators // Journ. of Math. Anal. and Appl. 1963. V. 7, № 2. P. 289–309.

Сергей Львович Соболев

(1908–1989)

С. Л. Соболев начал свой трудовой путь в теоретическом отделе Сейсмологического института; придумал пространства Соболева и теоремы вложения для них; был одним из заместителей И. В. Курчатова в проекте по созданию атомной бомбы; наконец, он инициировал создание Сибирского отделения Академии наук в Новосибирске.

Сергей Львович Соболев родился 23 сентября (6 октября) 1908 года. Его отец Лев и мать Наталья познакомились, когда были сосланы в Саратов за революционную деятельность. После ссылки родители вернулись в Петербург, отец работал адвокатом, мать преподавала в гимназии. В 1919 году Наталья с детьми переезжает в Харьков к родственникам из-за отсутствия работы в Петрограде и надвигающегося голода. В Харькове заработка взрослых не хватало на еду, поэтому дети тоже работали — и Сережа читает учебники, выпасая коз. В 1923 году они вернулись в Петроград.

Поступать в университет можно было лишь с 17 лет, а Сергей закончил школу в 16, поэтому он поступил в класс фортепиано в художественную студию, в которой продолжил учиться после поступления в университет. В этой же студии в 1927 году Соболев знакомится со своей будущей женой. Однажды в присутствии Л. В. Канторовича Соболев сказал: «Мы с Леонидом Витальевичем поступили в университет в один год, но меня не взяли по возрасту¹ и я целый год провел впустую, играя на фортепьяно и в шахматы».

В университете на лекциях профессора Гюнтера по математической физике у Соболева вызвала сомнения рассказанная теорема Салтыкова.



¹ Канторович был младше Соболева на 4 года.

Н. М. Гюнтер предложил Соболеву прочитать оригинал работы Н. Н. Салтыкова. Когда Соболев разобрался в ней и предъявил контрпример, Гюнтер был крайне удивлен и сразу выделил его среди других студентов.

В 1930 году на Первом всесоюзном съезде математиков в Харькове Ж. Адамар сказал Соболеву, сделавшему доклад о задаче Коши для гиперболических уравнений: «Я буду очень счастлив, молодой коллега, если вы будете держать меня в курсе дальнейших ваших работ, чрезвычайно меня заинтересовавших». В 1935 году С. Л. Соболев ввел понятие обобщенной функции. Приведем фрагмент из его статьи [1]:

Как мы увидим дальше, очень близкими к этому кругу идей оказываются исследования проф. Н. М. Гюнтера, посвященные уравнениям теории потенциала и теории тепла. В них проф. Гюнтер показывает, что для этих задач математической физики сплошь и рядом бывает полезным отказаться от дифференциального уравнения в его классическом виде и перейти к исследованию некоторых интегральных равенств, содержащих производные низших порядков, чем основное дифференциальное уравнение. Для решения задачи дифракции на логарифмических поверхностях, которая представляет собою вторую часть нашей работы, нам будет необходимо использовать некоторые функции, являющиеся решениями волнового уравнения в некотором обобщенном смысле. Эти решения не только могут не иметь первых производных, но могут быть даже сами неограниченными.

Молодой ученый обратил на себя внимание сильными работами; в 1933 году в возрасте двадцати пяти лет он был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР, а через шесть лет — академиком. Долгое время С. Л. Соболев был самым молодым академиком в СССР. Перечислим некоторые достижения Соболева в математической физике. Он создал теорию распространения сейсмических волн, заложил основы теории обобщенных функций как функционалов, ввел понятие обобщенных производных как локально интегрируемых функций, определил обобщенные решения дифференциальных уравнений. Также, занимаясь задачей Дирихле для области, граница которой содержит многообразия разных размерностей, он ввел в математику новые функциональные пространства, теперь называемые пространствами Соболева, и доказал для них теоремы вложения, теперь называемые теоремами вложения Соболева.

Соболева всегда интересовали приложения науки: студентом он проходил практику на заводе «Электросила» и рассчитывал поперечные колебания несимметричных валов электрогенераторов, после университета занимался теоретическими вопросами сейсмологии вместе с В. И. Смир-

Сов. секрет 5
Только лично

Товарищу Берия Л.П.

Академик С. Л. Соболев до настоящего
времени был ознакомлен с материалами
Бюро №2 только в той части, кото-
рая относилась к диффузионному
методу. В связи с назначением его
на должность заместителя начальника
лаборатории №2 АН СССР, я прошу
Вашего разрешения ознакомить академика
Соболёва с.п. с материалами Бюро №2
по всем вопросам.

Согласен
2/10/47.
Л. Маков
Зам. е.и.и.и.
9.02.47

И. В. Курчатов

Письмо И. В. Курчатова к Л. П. Берии с просьбой дать С. Л. Соболеву полный доступ к секретным материалам.

новым и С. Г. Михлиным. В 1943 году он переходит на работу в Институт атомной энергии, работает с И. К. Кикоиным², становится заместителем И. В. Курчатова. Во время пятнадцатилетней работы над атомным проектом Соболеву приходится детально разбираться в методе обогащения урана посредством диффузии газообразного гексафторида урана через полупроницаемые мембраны, координировать расчеты, необходимые для кон-

²

Исаак Константинович Кикоин (1908–1984), физик, с 1943 года вместе с Курчатовым был одним из главных организаторов и научных руководителей советского атомного проекта.

струкции мембран и устойчивой работы каскадов диффузионных машин, разрабатывать методы верификации расчетов и т. д. В это же время Соболев увлекся вычислительной математикой и кибернетикой; по завершении атомного проекта он переходит в МГУ, где заведует первой в стране кафедрой вычислительной математики и вычислительным центром. Как и для Л. В. Канторовича, для Соболева оценка точности и скорости вычислений — предмет функционального анализа и может быть сделана только после выбора подходящего функционального пространства.

Для Соболева была важна и эстетическая сторона науки:

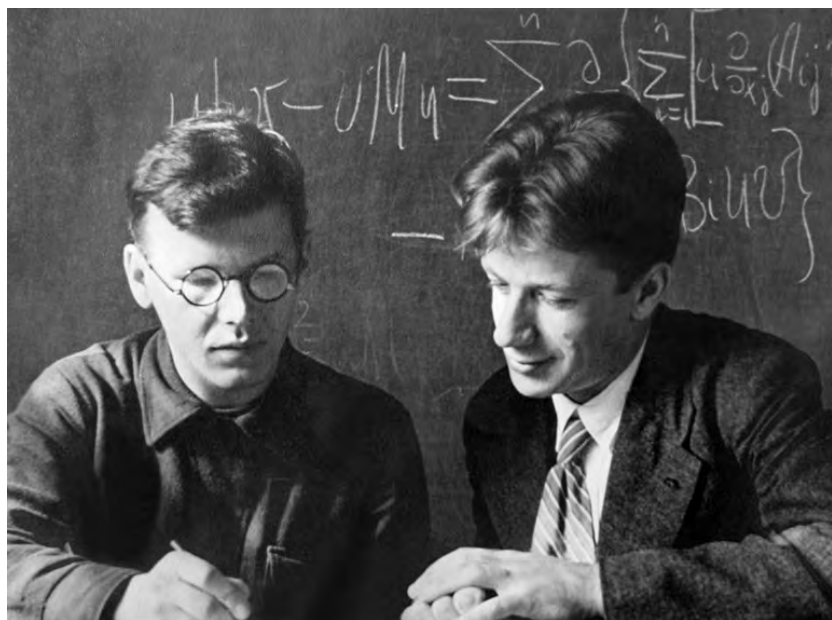
Если математик не умеет любоваться хорошими результатами, понимать в них не только точности или неточности, а видеть, что красиво, что некрасиво, он никогда ничего не сделает. Эстетические критерии играют огромную роль... Я думаю, что это одно из самых главных качеств человека, решившего посвятить себя математике, — уметь увидеть красоту решения, конструкции, построения... В математике без чувства красоты нечего делать. Я помню, как у нас, юных студентов Ленинградского университета, раскрылись глаза на огромный мир движения, на глубину связей и причин всего кругом происходящего, когда нам впервые на лекциях показали, как можно вычислить частоту колебаний маятника, зная его длину и закон сопротивления среды, в которой он качается. Это было откровением, оставившим неизгладимое впечатление на всю жизнь... Я не взялся бы объяснить, откуда появляются и как действуют внутренние законы математической науки. Здесь как раз немалую роль играет эстетическое чувство. Любой математик знает, что такое «красивый результат», «изящное доказательство». Иногда это неожиданная мысль, вдруг приводящая к решению трудной, долго не поддававшейся задачи. Иногда — смелое обобщение, умение увидеть в конкретной ситуации законы, управляющие явлениями. А иногда стройность и мудрость сложного замысла, радующего в конце длинного пути выкладок и рассуждений ярким результатом... Я твердо знаю, что часто во время размышлений возникает желание делать то, что подсказывается каким-то внутренним чувством.

Соболев был эмоциональным человеком. Когда он занимался расчетами по атомной бомбе, в его кабинет постучали, но замок не открывался. Тогда он открыл дверь ударом ноги. После этого врач нашел у него какой-то перелом и на полгода запретил выходить из дома — и именно в это время Соболев написал свою фундаментальную книгу «Некоторые применения функционального анализа в математической физике». Из его интервью:

Важны, наверное, эмоции, но в основном нужно уметь вжиться в предмет, нужны трудолюбие и интуиция. Интуиция начинает работать только после того, как вы вжились в проблему, а это требует времени. Если вас какой-то вопрос заинтересовал, увлек, необходимо, чтобы он стал «своим» в вашей голове. Только тогда начинают появляться свежие мысли.



С. Л. Соболев в молодости



Н. Н. Боголюбов (слева) и С. Л. Соболев

Процессу творчества предшествует большая подготовительная работа. На вдохновение нужно много потрудиться. Само по себе оно не приходит... Все это должно сложиться в какую-то систему. Чтобы заработала интуиция, нужно знать предмет чрезвычайно хорошо.

Соболев участвовал в политической жизни страны. Например, он защищал генетику (был одним из подписантов «письма 300»), кибернетику, применение математических методов в экономике. С другой стороны, Соболев был одним из активных участников антилузинской кампании 1936 года³. В 1956 году вместе с академиками М. А. Лаврентьевым и С. А. Христиановичем он обратился в ЦК КПСС с предложением создать Сибирское отделение Академии наук. Предложение было одобрено.



На строительстве Новосибирского академгородка

В 1958 году Сергей Львович переезжает на постоянную работу в Новосибирск, директором Института математики Сибирского отделения Академии наук. Соболев заботился о том, чтобы там были представлены все важнейшие направления современной математической науки. Сергей Львович сам никогда не занимался ни кибернетикой, ни математической экономикой, но делал все для их развития в институте.

³

См. подробнее [4].

Закончим текст пожеланием Соболева молодым ученым:

Что главное должен воспитывать в себе ученый? Нужно избавиться от излишнего честолюбия. Не следует думать, что счастливым может быть только гений. Нужно приучиться ценить даже маленькое достижение, радоваться ему и никогда не переоценивать себя. Нужно выработать в себе трудолюбие. Нужно понять и воспитать в себе радость познания, которая почти то же, что и радость жизни. Счастье в том, чтобы дело твоей жизни было нужно людям.

Н. С. Калинин

Литература

- [1] Соболев С. Л. Общая теория диффракции волн на римановых поверхностях // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1935. Т. 9. С. 39–105.
- [2] Соболева Т. С. Соболев Сергей Львович. Грани таланта. (Великие математики XX века.) / Сост. Т. С. Соболева, Г. А. Чечкин. М.: КУРС, 2017.
- [3] Ибрагимова З. В «пространствах Соболева» // Созвездие земляков. Знаменитые мужи Новосибирска / Сост. Л. Т. Демьяненко, Т. В. Пендюрина. Новосибирск: Светоч. 2008. См. <https://bsk.nios.ru/content/v-prostranstvah-soboleva>.
- [4] Демидов С. С., Есаков В. Д. «Дело академика Н. Н. Лузина» в коллективной памяти научного сообщества. СПб., 1999.

Теоремы вложения Соболева

Сергей Львович Соболев внес основополагающий вклад в развитие современной математики, в формирование крупнейших научных школ, в становление и развитие новых направлений прикладной математики. Заложенные С. Л. Соболевым основы применения функционального анализа в математической физике (понятие обобщенной производной, обобщенного решения дифференциального уравнения, теоремы вложения, обобщенные функции) получили развитие в многочисленных исследованиях в нашей стране и за рубежом. В истории науки имя Сергея Львовича навсегда будет связано с одной из наиболее фундаментальных математических концепций XX века — теорией обобщенных функций, открывшей широкие возможности для исследований в области дифференциальных уравнений в частных производных, теоретической физике, механике.

Обобщенными функциями Соболев назвал функционалы на пространстве финитных (т. е. равных нулю вне некоторой ограниченной области) функций определенной гладкости. Для обобщенных функций были введены понятия линейных операций, дифференцирования, умножения на достаточно гладкую функцию. С. Л. Соболев применил теорию обобщенных функций к изучению решений гиперболических и эллиптических уравнений в частных производных.

На основе теории обобщенных функций С. Л. Соболев ввел в науку функциональные пространства $W_p^{(l)}$, называемые теперь пространствами Соболева.

Пусть f и g — локально суммируемые на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функции. Функция g называется обобщенной производной $D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ функции f , где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $|\alpha| = \sum \alpha_i$, если для любой бесконечно дифференцируемой финитной в области Ω функции φ выполняется равенство

$$\int_{\Omega} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx.$$

Совокупность всех заданных в области Ω функций f , у каждой из которых все обобщенные производные $D^\alpha f$ порядка l ($|\alpha| = l$) существуют и интегрируемы со степенью $p \geq 1$, образует банахово пространство $W_p^{(l)}(\Omega)$ с нормой

$$\|f\|_{W_p^{(l)}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Здесь $L_p = L_p(\Omega)$ — пространство Лебега интегрируемых в степени p функций с нормой $\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}$.

С. Л. Соболев изучил связи пространств $W_p^{(l)}(\Omega)$ с пространствами Лебега и с пространствами непрерывных функций и охарактеризовал пространства следов функций из пространств $W_p^{(l)}(\Omega)$ на поверхностях различных размерностей. Эти исследования, называемые теперь теоремами вложения Соболева, заложили основу нового направления исследований в теории функций и в теории уравнений с частными производными. Опишем эти результаты Сергея Львовича.

Основные результаты, касающиеся вложения пространств $W_p^{(l)}(\Omega)$, относятся к областям Ω , удовлетворяющим условию конуса. Это означает, что каждая точка Ω может служить вершиной расположенного в Ω конуса постоянных высоты и раствора. Будем считать далее, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ такова.

Пусть Ω_m , где $1 \leq m \leq n$, обозначает сечение области Ω плоскостью размерности m , $\Omega_n = \Omega$ и $1 < p < q < \infty$. Приведем теоремы вложения Соболева в пространство $L_q(\Omega_m)$ функций, интегрируемых на Ω_m в степени q , и в пространство $C(\Omega)$ функций, непрерывных и ограниченных на Ω с нормами $\|f\|_{L_q(\Omega_m)}$ и $\|f\|_{C(\Omega)} = \sup_{\Omega} |f|$ соответственно.

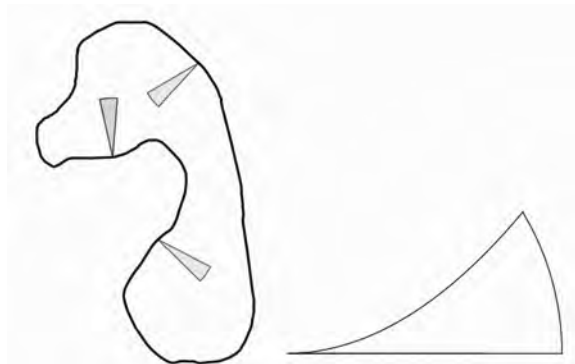


Рис. 1. Области с гладкой границей, такие как изображенная слева, удовлетворяют условию конуса. В областях с внешними пиками, таких как область справа, соотношения между параметрами в теоремах вложения оказываются другими.

ГЛАВА II

СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРОСТРАНСТВАМИ $L_p^{(\alpha)}$

§ 6. Новое определение производной

Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — некоторая функция переменных $x_1, \dots, x_n$, суммируемая в области D . Пусть D' — какая-нибудь другая область, лежащая внутри D вместе со своей границей.

Рассмотрим какую-нибудь функцию $\psi(x_1, \dots, x_n)$, имеющую непрерывные производные до порядка α включительно и уничтожающуюся вне D' . Если функция φ сама имеет непрерывные производные до порядка α , то справедливы равенства

$$\int \dots \int_D \left(\varphi \frac{\partial^{\alpha} \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} + (-1)^{\alpha-1} \psi \frac{\partial^{\alpha} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right) dx_1 \dots dx_n = 0. \quad (6, 1)$$

Мы будем рассматривать это равенство как определение производной и называть производной от φ ,

$$\frac{\partial^{\alpha} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

такую функцию переменных $x_1, \dots, x_n$, суммируемую по любой ограниченной части области D , которая удовлетворяет условию (6, 1) при всяких ψ .

Рис. 2. Отрывок из статьи С. Л. Соболева в «Математическом сборнике» 1938 г.

Пусть $1 < p \leq q < \infty$. Тогда

$$W_p^{(l)}(\Omega) \subset L_q(\Omega_m) \quad \text{при } l - n/p + m/q \geq 0, \quad (1)$$

$$W_p^{(l)}(\Omega) \subset C(\Omega) \quad \text{при } l - n/p > 0. \quad (2)$$

Необходимо пояснить, что в теории пространств Соболева (как и в теории пространств Лебега) эквивалентные, т. е. отличающиеся на множестве меры нуль, функции отождествляются. Так что вложение (2) означает, что каждая функция из $W_p^{(l)}(\Omega)$ эквивалентна непрерывной. Вложение (1) в случае $m < n$ показывает, что следы функций из $W_p^{(l)}(\Omega)$ на Ω_m принадлежат $L_q(\Omega_m)$. При этом след функции f на Ω_m определяется для непрерывной функции f как сужение функции f на Ω , а для произвольной функции $f \in W_p^{(l)}(\Omega)$ — как предел в $L_q(\Omega_m)$ следов последовательности непрерывных на Ω функций, аппроксимирующих f в $W_p^{(l)}(\Omega)$.

Вложения (1) и (2) означают не только факт принадлежности каждой функции из $W_p^{(l)}(\Omega)$ соответственно пространствам $L_q(\Omega_m)$ и $C(\Omega)$, но и выполнение неравенств

$$\|f\|_{L_q(\Omega_m)} \leq C \|f\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}, \quad \|f\|_{C(\Omega)} \leq C \|f\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}$$

для всех функций $f \in W_p^{(l)}(\Omega)$; постоянная C в этих неравенствах не зависит от f .

С. Л. Соболевым были установлены вложение (1) при $m = n$ и вложение (2). В случае $m < n$ вложение (1) им было установлено при $p = q = 2$. Для других значений p и q в этом случае доказательства принадлежат В. И. Кондрашову и В. П. Ильину.

Для доказательства вложений (1) и (2) Сергей Львович предложил новый метод исследования — метод интегральных представлений функций многих переменных через производные. Такое представление имеет вид

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq l-1} x^\alpha \int_{\Omega} \zeta_\alpha(y) f(y) dy + \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|^n} \sum_{|\alpha|=l} \omega_\alpha(y, x) D^\alpha f(y) dy$$

(здесь $x^\alpha = (x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n})$). Главная часть представления — интегралы типа потенциала от производных функции. С помощью интегрального представления вопрос доказательства теорем вложения был сведен к получению нужных оценок для интегралов типа потенциала.

После основополагающих работ С. Л. Соболева теория вложения функциональных пространств активно развивалась во многих различных направлениях. Были расширены условия на область, при которых справедливы вложения (1) и (2), получены возможные теоремы вложения в зависимости от вида области Ω , изучены пространства типа пространств Соболева, в нормы которых входят не все производные порядка l , исследованы анизотропные пространства Соболева, нормы в которых составлены из норм производных различных порядков по разным переменным. Особое внимание было уделено изучению точных характеристик следов функций из пространства $W_p^{(l)}(\Omega)$ на границе области Ω . Такие характеристики были даны в терминах других пространств функций положительной гладкости, что стимулировало развитие теории этих пространств. Все направления развития теории вложений функциональных пространств трудно перечислить.

Теория теорем вложения Соболева и применение этой теории к решению дифференциальных уравнений изложены в книге «Некоторые приложения функционального анализа в математической физике», 1950 г., изд. ЛГУ. Третье издание этой книги (1988 г.) содержит полезные дополнения и примечания, а также далеко не полный список работ, отражающих развитие теории обобщенных функций и функциональных пространств Соболева и многие ее приложения.

О. В. Бесов

Георгий Рудольфович Лоренц (1910–2006)

Российский и американский математик Георгий Рудольфович Лоренц родился в Петербурге и прожил почти 20 лет своей жизни в Ленинграде, окончил Ленинградский университет. Своими учителями он называл Г. М. Фихтенгольца, Н. С. Кошлякова и А. М. Журавского. Лоренц преподавал в ЛГУ, а во время Великой отечественной войны оказался в оккупации в Кисловодске. Как этнический немец, был перемещён в Польшу, затем в Германию. После войны жил и работал в Канаде, затем в США, где преподавал в университете Мичигана и занимался теорией приближений, теорией интерполяции операторов и функциональным анализом.

Российский и американский математик Георгий Рудольфович Лоренц (George G. Lorentz) родился в семье инженера путей сообщения Рудольфа Федоровича Лоренца, который работал на Московско-Виндаво-Рыбинской железной дороге. Это была частная железная дорога. Рудольф Федорович был уволен из государственных железных дорог за сочувствие рабочим во время забастовки 1906 года. Мать Георгия, Милена Николаевна, была дочерью князя, подполковника и преподавателя Николаевского кадетского корпуса Н. В. Чегодаева. В 1912 году Р. Ф. Лоренц перешел на работу в Кавказские железные дороги, семья жила в Армавире (1913–1918), затем в деревне под Сочи (1919–1922), затем в Тифлисе (Тбилиси). Георгий учился в русской школе (1923), затем в немецкой. В 1926 году Георгий Лоренц поступил на политехнический факультет Тбилисского государственного университета. Его успехи по математике были так значительны, что его преподаватели, Н. И. Мухелишвили и А. М. Размадзе, посоветовали ему поступить в Ленинградский университет.

В 1927 году Лоренц поступил на первый курс Ленинградского университета. Г. Р. Лоренц называл себя учеником Г. М. Фихтенгольца, Н. С. Кошлякова и А. М. Журавского. В 1935 году он окончил университет, в 1935 году защитил кандидатскую диссертацию по полиномам Бернштейна. С 1936 по 1942 год Г. Р. Лоренц был доцентом кафедры математического анализа, читал курс математического анализа. Некоторое время он также читал лекции в Педагогическом институте им. А. И. Герцена. Он опубликовал несколько работ: «О методах линейного суммирования» (1932), «Функционалы и операции в пространствах числовых последовательностей» (1935), «О сильной сходимости полиномов Стильбеса–Ландау» (1936), «К теории полиномов Бернштейна» (1937) — две последние по теме своей диссертации. Редактировал книгу Я. С. Безиковича по приближенным вычислениям.

В 1937 году в Тбилиси был арестован отец Лоренца, профессор железнодорожного машиностроения в Политехническом институте Тбилиси, и,



29 марта 1931 года — выпуск математического факультета Ленинградского университета. Справа внизу Г. Р. Лоренц. Фото из личного архива И. И. Гордона. Опубликовано Е. И. Гордоном в журнале «Семь искусств» 2011, 11(24). Выражаю признательность Г. М. Полотовскому, приславшему мне эту фотографию

как тогда водилось, по ложному обвинению в шпионаже был приговорен к восьми годам заключения в лагере, где умер на следующий год. Это удручающе подействовало на Г. Р. Лоренца. Он писал, что, несмотря на поддержку Г. М. Фихтенгольца и организованный им годовой отпуск, так никогда и не закончил наполовину написанный учебник по функциональному анализу и до 1942 года почти не занимался наукой. В январе 1942 года в рамках дела номер 555 «Союза старой русской интеллигенции» были арестованы многие математики, в их числе Б. И. Извеков, чья семья была близка с семьей Лоренца. самого Лоренца стали вызывать в НКВД, над ним нависла опасность. Когда началась Великая Отечественная война, Лоренц был мобилизован рядовым в корпус ПВО. В апреле 1942 года Г. Р. Лоренц с женой, Татьяной Беликовой, в составе Педагогического института эвакуировался в Кисловодск. Вскоре Кисловодск был захвачен немцами, и Лоренц был зарегистрирован как этнический немец. В начале января 1943 года, после того как немцы оставили Кисловодск, Лоренц с женой вместе с другими беженцами были отправлены в лагерь перемещенных лиц в Польше. Там родился его сын Рудольф.

В 1943 году Лоренц послал две своих статьи Конраду Кноппу и в 1944 году был приглашен в Тюбингенский университет¹, где стал помощником Э. Камке; под руководством Кноппа защитил диссертацию «*Einige Fragen der Limitierungstheorie*» и получил докторскую степень. После войны он получил хабилитацию (т. е. право на чтение лекций) в Тюбингене, преподавал в уни-

¹Лоренц в автобиографии пишет: «Нам повезло, мы хотели быть как можно дальше от советского влияния» [3, с. 5]. С женой и новорожденным сыном они переехали в Тюбинген. Там у Лоренцев родились еще четыре дочери [ibid., с. 19].

верситете Франкфурта (1946–1948). По окончании Второй мировой войны Тюбинген оказался под контролем французов. Французские власти отнесли к Лоренцу как к нежелательному иностранцу и не позволили ему стать штатным преподавателем в университете Тюбингена. Весной 1946 года Лоренц перешел в американскую зону оккупации, где получил удостоверение личности как лицо без гражданства. С этим документом Лоренц жил 13 лет до своей натурализации в США. В 1946 году Георгий (Georg) Рудольфович Лоренц изменил свое имя на, как он пишет, произвольно придуманное имя Георг Гюнтер Лоренц, позже на Джордж Г. Лоренц (George G. Lorentz), которое и сохранил до конца жизни.

Немецкий период своей жизни Лоренц вспоминает как тяжелый и полный лишений, но научно плодотворный. В этот период он написал около 20 статей по теории дифференциальных уравнений, о суммировании, о рядах Фурье, об использовании перестановок, в том числе совместные с Камке и Кноппом, читал профессорско-преподавательскому составу лекции по банаховым пространствам.

Лоренц имел возможность прибегнуть к Администрации помощи и восстановления Объединенных Наций (UNRRA), но они с женой хотели оказаться как можно дальше от советской зоны оккупации² и сделали самостоятельный выбор: Канада.

В 1949 году Лоренц получил стипендию канадского благотворительного фонда и переехал в Торонто. Там он опубликовал свою первую книгу «Полиномы Бернштейна». В 1953 году Лоренцу предложили должность полного профессора в США в государственном университете Уэйна (Wayne State University, штат Мичиган), где он начал заниматься теорией приближений и преподавал до 1959 года. Затем он работал как профессор в Сиракузском университете (1958–1969, Syracuse University, штат Нью-Йорк), где написал свою известную книгу «Approximation of Functions»; с 1969 по 1980 год Лоренц был профессором в Техасском университете в Остине (University of Texas at Austin). 1973 год Лоренц провел в Штутгарте и за научные достижения был награжден премией Гумбольдта. Многие ученики Лоренца стали успешными учеными. В 1980 году Лоренц вышел в отставку, но еще в течение 15 лет продолжал свои научные исследования.

Основные исследования Лоренца лежат в области анализа: фундаментальные результаты в теории приближений, теории интерполяции операторов, функциональный анализ. Занимался он также теорией чисел. В своих книгах он знакомил читателя с работами русских математиков. Пространства Лоренца как обобщения пространств L^p были им введены в двух работах: «Some

²Указ Президиума Верховного Совета СССР от 19 апреля 1943 года «О мерах наказания для немецко-фашистских злодеев, виновных в убийстве и истязаниях советского гражданского населения и пленных красноармейцев, для шпионов, изменников Родины из числа советских граждан и для их пособников» предусматривал смертную казнь через повешение для «изменников» и ссылку на каторжные работы сроком от 15 до 20 лет — для «пособников».

new function spaces» (1950) и «On the theory of spaces Λ » (1951). Лоренца называли королем современной теории аппроксимации. Подробнее см. [1, 2], особенно рекомендую статью самого Г. Лоренца «Математика и политика в Советском Союзе 1928–1942» [3].

Евгений Израилевич Гордон, любезно согласившийся ответить на мои вопросы о Г. Лоренце, пишет в своем письме: «Мой отец с Лоренцем учились в одной группе в Ленинградском университете. Они были очень близкими друзьями, даже как-то летом вдвоем ходили через Клухорский перевал [...] Мой отец долгое время ничего о судьбе Лоренца не знал, кроме того, что он ушел с немцами. А где-то в 50-х годах Фихтенгольц с возмущением говорил ему, что Лоренца в оккупации видели чуть ли не в эсэсовской форме. Мой отец, который был человеком очень антисоветски настроенным, этому не поверил. Он считал, что это специально распространяет КГБ, а Фихтенгольц, как человек очень советский, этому верит. Как Вы понимаете, разыскивать Лоренца и даже пытаться что-то о нем узнать в Советском Союзе было опасно.

Однако в 1966 году на Международном математическом конгрессе в Москве отец подошел к топологу Маклейну, который знал его имя по «кольцам Гордона», и спросил о Лоренце. Тот рассказал ему, что Лоренц — профессор в Техасе и что у него семеро детей. [...] [Во время эвакуации, в Кисловодске] был еще и Арон Григорьевич Пинскер, который рассказывал своему ученику, покойному Владимиру Ароновичу Гейлеру, что как-то ночью Лоренц прибежал к нему и предупредил, что на завтра назначено уничтожение евреев в Туапсе. Они предупредили еще несколько человек, и они все ушли ночью из города и спаслись. Мне это рассказывал сам Володя Гейлер — мой очень близкий друг [...]

Из присланной мне Тихомировым заметки я узнал адрес Лоренца и написал ему письмо, где рассказал о жизни моих родителей, послал фотографию их группы и спросил про тех, кто изображен на фотографии [...] Он довольно быстро ответил, [...] назвал фамилии всех изображенных на фотографии, коротко охарактеризовал их как математиков, но написал, что об их судьбе ему ничего не известно. [...] Я обратил внимание на последнюю фразу его письма, уже в PS: «Я ни в какой армии, ни в советской, ни в немецкой никогда не служил»».

Г. И. Синкевич

Литература

1. de Boor C., Nevai P. In memoriam George G. Lorentz (1910-2006) // J. Approx. Theory, 2009. 156 (1). P. 1-27.
2. de Boor C., Nevai P. In memoriam George G. Lorentz (1910-2006) // J. Approx. Theory. 2010. 162 (2). P. 465-491.
3. Lorentz G.G. Mathematics and Politics in the Soviet Union from 1928 to 1953 // Journal of Approximation Theory. 2002, 116. P. 169-223.

Пространства Лоренца

Знание функций, описывающих физические, химические и биологические процессы, нередко играет важнейшую роль в науке и технике. Их поиск формирует в математике такие дисциплины, как вещественный, комплексный и функциональный анализ. В первом приближении функции обычно классифицируются либо по величине значений, либо по степени гладкости, либо по свойствам самоподобия. Самыми ранними характеристиками величины функции были ограниченность и интегрируемость. Гладкость помогает понять, как значения функции зависят от малых изменений аргумента. Это понятие породило множество других, связанных с дифференцируемостью. Примерами самоподобия служат периодичность и фрактальные структуры.

Лучшими известными критериями для оценки порядка величины функции являются L_p -нормы Лебега (в формулировке М. Рисса). Пусть (Ω, μ) — пространство с мерой. Нормированное линейное пространство $L_p := L_p(\Omega, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, состоит из всех вещественнозначных μ -измеримых функций f , заданных на пространстве (Ω, μ) , для которых конечна норма

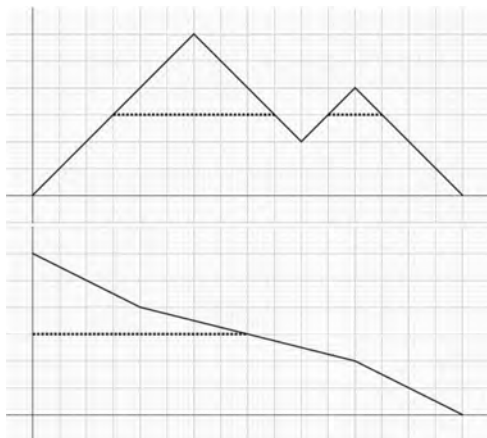
$$\|f\|_{L_p} := \|f\|_{L_p(\Omega, \mu)} := \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases} \quad (1)$$

В своих работах Г. Харди и Дж. Литтлвуд показали важность того факта, что пространство L_p *перестановочно инвариантно*. Чтобы объяснить смысл этого термина, введем для любой μ -измеримой функции f ее *функцию распределения*

$$\mu_f(y) := \mu\{x \in \Omega : |f(x)| > y\}, \quad y \geq 0. \quad (2)$$

Эта функция убывает на $\mathbb{R}^+$. Все L_p -нормы функции f определяются по

Георгий Рудольфович Лоренц (1910–2006) родился в Ленинграде, в 1935 году закончил Ленинградский университет и в том же году защитил кандидатскую диссертацию. С 1953 года работал в США.



Функция и ее невозрастающая перестановка

μ_f согласно тождеству

$$\|f\|_{L_p}^p = p \int_0^\infty y^{p-1} \mu_f(y) dy, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (3)$$

Таким образом, при оценке величин посредством L_p -нормы мы можем пользоваться тем, что если функции распределения двух функций f и g равны почти всюду, то f и g имеют равную L_p -норму независимо от того, на каких измеримых пространствах они определены изначально.

Две измеримые функции f и g считаются равноизмеримыми, если $\mu_f(y) = \mu_g(y)$ почти всюду на $\mathbb{R}^+$ относительно меры Лебега. Заметим, что функция μ_f всегда определена на $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$. Среди всех равноизмеримых функций можно выбрать в качестве представителя функцию

$$f^*(t) := \inf\{y : \mu_f(y) \leq t\}, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

причем эта функция не возрастает на $\mathbb{R}^+$. Функция f^* называется *невозрастающей перестановкой* функции f . Она содержит всю информацию о порядке величины f , связанную с L_p -нормами. Например,

$$\int_\Omega |f|^p d\mu = \int_0^\infty [f^*(t)]^p dt, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (5)$$

В своей основополагающей статье [8] Дж. Г. Лоренц предложил использование перестановки f^* в качестве общего способа определения пространств функций с заданным порядком величины. Идея состоит в том, чтобы измерять норму функции по f^* . Лоренц предложил целый

набор вариантов. Важнейшими из них оказались пространства Лоренца $L_{p,q} := L_{p,q}(\Omega, \mu)$, состоящие из всех заданных на Ω измеримых относительно μ функций f , для которых конечна величина

$$\|f\|_{L_{p,q}} := \begin{cases} \left\{ \int_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}, & 1 \leq p, q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t), & 1 \leq p < \infty, q = \infty. \end{cases} \quad (6)$$

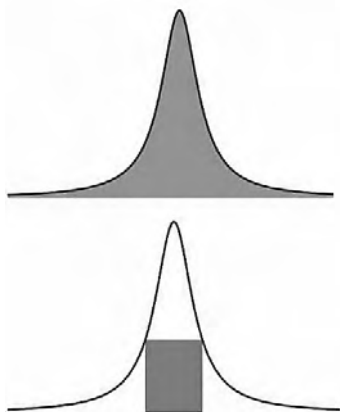
Заметим, что эти пространства совпадают с L_p , $1 \leq p < \infty$, если положить $q = p$, но дают интересный набор пространств, близких к L_p , когда число p фиксировано, а q изменяется. Важнейшим из этих вариантов оказывается случай $q = \infty$, которому соответствуют пространства $L_{p,\infty}$. Обычно их называют слабыми L_p -пространствами. Условие принадлежности слабому пространству L_p имеет вид

$$\mu\{x \in \Omega: |f(x)| > y\} \leq C y^{-1/p}, \quad y > 0, \quad (7)$$

где C — абсолютная константа.

Работа [8] в дальнейшем оказала глубокое влияние на целый ряд областей математики, включая гармонический анализ, теорию аппроксимации, уравнения с частными производными и функциональный анализ. С одной стороны, новые пространства Лоренца $L_{p,q}$ использовались в анализе при объяснении свойств важнейших операторов, например преобразований Фурье, Гильберта и Рисса. С другой стороны, они послужили прототипом при построении новых пространств функций, например классов Бесова и аппроксимативных классов, которые по сей день остаются важными для понимания численных методов. Может быть, самым важным последствием стало развитие новой ветви анализа, которая называется теорией интерполяции. Она позволила объединить несколько математических дисциплин.

Что касается последнего, возникновение современной теории интерполяции по праву следует связать с работами М. Рисса, который интересовался среди прочего свойствами преобразования Фурье $\mathcal{F}$. Неравенство Хаусдорфа—Юнга гласит, что преобразование $\mathcal{F}$ отображает L_p , $1 \leq p \leq 2$, в $L_{p'}$, где p' — сопряженный показатель, заданный равенством $1/p + 1/p' = 1$. Рисс показал, что неравенство Хаусдорфа—Юнга в действительности вытекает из общего принципа: любой линейный оператор, осуществляющий ограниченное отображение из L_1 в L_∞ и из L_2 в себя, осуществляет ограниченное отображение из L_p в $L_{p'}$ при $1 \leq p \leq 2$. Позже этот результат был формализован в интерполяционных теоремах (таких как теорема Рисса—Торина) и положил начало изучению интерполяции операторов. Пространства Лоренца сыграли здесь большую роль в нескольких существенных аспектах.



L_1 -норма соответствует площади подграфика (для положительных функций); $L_{1,\infty}$ -норма соответствует максимальной площади вписанного «прямоугольника»

Одну из важных глав гармонического анализа составляет теория Кальдерона—Зигмунда изучения свойств фундаментальных операторов, возникающих в теории дифференциальных уравнений. Сюда относятся сингулярные интегралы и максимальные операторы, например известный максимальный оператор Харди—Литтлвуда. Главная движущая сила в доказательстве свойств операторов — теория интерполяции, о которой шла речь выше. Типичный пример для теории Кальдерона—Зигмунда — преобразование Гильберта. М. Рисс показал, что этот оператор отображает L_p в себя при $1 < p < \infty$, но не отображает в себя L_1 . Это типичный пример «непрозрачности» оператора в предельном случае. Поведение в предельном случае успешно описывается с помощью пространств Лоренца. В случае преобразования Гильберта оказывается, что оно отображает L_1 в слабое L_1 , т. е. в $L_{1,\infty}$. Хотя этот результат интересен сам по себе, верно даже больше. А именно, любой оператор, осуществляющий ограниченное отображение пространства L_1 в слабое L_1 , а L_2 в себя, будет обязательно осуществлять ограниченное отображение пространства L_p в себя при $1 < p \leq 2$. Иначе говоря, чтобы проверить сильные свойства линейных операторов, достаточно проверить слабые свойства на парах пространств и вывести сильные свойства путем интерполяции для промежуточных пространств.

Изучение интерполяции линейных операторов стало формироваться в единую дисциплину в конце 1960-х годов (см. монографии [2, 1]). А. Кальдерон разработал комплексный метод интерполяции [4] и последовательно применял перестановки для изучения слабой интерполяции [5]. Более

или менее в то же время на первый план вышел вещественный метод, который предложили Ж.-Л. Лионс и Ж. Петре. Суть этого метода в том, чтобы показать, что линейный оператор T , осуществляющий ограниченное отображение банаховых пространств $X_i \rightarrow Y_i$, $i = 0, 1$, автоматически осуществляет отображение $X \rightarrow Y$ для целого набора новых пространств X, Y . Эти новые пространства определяются с помощью функционала K , который в простейшем случае, когда X_1 непрерывно вкладывается в X_0 , имеет вид

$$K(f, t) := K(f, t; X_0, X_1) := \inf_{g \in X_1} \|f - g\|_{X_0} + t\|g\|_{X_1}, \quad 0 < t < \infty. \quad (8)$$

Примерами новых промежуточных пространств X служат (θ, q) -пространства $X_{\theta, q} = (X_0, X_1)_{\theta, q}$, состоящие из всех $f \in X_0$, для которых

$$\|f\|_{X_{\theta, q}}^q := \int_0^\infty [t^{-\theta} K(f, t)]^q dt/t, \quad 0 < \theta < 1, \quad 0 < q < \infty, \quad (9)$$

с очевидной модификацией для $q = \infty$. Довольно легко показать, что оператор T , о котором шла речь выше, осуществляет ограниченное отображение пространства $X_{\theta, q}$ в $Y_{\theta, q}$ для каждого $\theta \in (0, 1)$ и $0 < q \leq \infty$. Сходство этих пространств с пространствами Лоренца очевидно. Более того, здесь все возвращается на круги своя: если мера μ конечна, то

$$K(f, t; L_1, L_\infty) = \int_0^t f^*(s) ds, \quad t > 0, \quad (10)$$

и

$$(L_1, L_\infty)_{\theta, q} = L_{p, q}, \quad \theta = 1 - 1/p. \quad (11)$$

Подобные связи возникают при рассмотрении пространств гладких функций. Действуя вполне аналогично случаю пространств Лоренца, О. В. Бесов [3] ввел удобную классификацию пространств гладкости, которая носит его имя. Пространство $B_q^s(L_p(\Omega))$ состоит из функций в L_p с гладкостью порядка s , причем q играет ту же роль уточняющего параметра, что и в случае пространств Лоренца. Связь с пространствами Лоренца становится еще яснее, если учесть, что пространства Бесова — это пространства интерполяции между L_p и пространствами Соболева $W^r(L_p(\Omega))$, где $r > s$. Действительно, функционал K для этой пары — не что иное, как модуль гладкости $\omega_r(f, t)_p$, так что норма в пространстве Бесова принимает вид (9). Ныне пространства Бесова широко применяются при изучении решений уравнений с частными производными и в численном анализе таких уравнений. В завершение отметим, что интерполяционные пространства, которые могут рассматриваться как «потомки» пространств Лоренца, также играют важнейшую роль в теории

аппроксимации, позволяя характеризовать функции с конкретным порядком приближения (см. [7]).

Рональд Девор (Ronald DeVore)
перевод Б. Р. Френкина

Литература

- [1] *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of Operators. N.Y.: Academic Press, 1988.
- [2] *Bergh J., Löfström J.* Interpolation of Operators. Springer-Verlag, 1976. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, V. 223.)
- [3] *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126, № 6. С. 1163–1165.
- [4] *Calderón A. P.* Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz // Studia Math. 1966. V. 26. P. 301–304.
- [5] *Calderón A. P.* Intermediate spaces and interpolation, the complex method // Studia Math. 1964. V. 24. P. 113–190.
- [6] *Calderón A. P., Zygmund A.* On the existence of certain singular integrals // Acta Math. 1952. V. 88. P. 85–139.
- [7] *DeVore R., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, 1993. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, V. 303.)
- [8] *Lorentz G. G.* Some new functional spaces // Ann. Math. 1950. V. 51, № 1. P. 37–55.

Леонид Витальевич Канторович (1912–1986)

Леонид Канторович внес вклад как в чистую, так и в прикладную математику и всегда стремился выявлять и использовать взаимосвязи между ними. По сей день он остается единственным российским/советским — и даже единственным восточноевропейским — лауреатом Нобелевской премии по экономике. Л. В. Канторович внес значительный вклад в такие области математики, как теория векторных решеток, теория транспортных задач (задача Монжа—Канторовича), методы приближенных вычислений (особенно в связи с функциональным анализом) и линейное программирование. Как экономист он известен тем, что стоял у истоков совершенно новой области исследований, впоследствии способствуя использованию методов оптимизации в планировании. Эти события затем назовут «математической революцией» в советской экономике [8].

Л. В. Канторович родился в 1912 году в Санкт-Петербурге, в зажиточной еврейской семье. Он поступил в университет в 14 лет и закончил его в 18, уже опубликовав более 10 работ на русском и французском языках. При поддержке своих учителей Г. М. Фихтенгольца и В. И. Смирнова он очень быстро стал одним из молодых лидеров ленинградской математической школы, а также установил связи с московским математическим сообществом.

Л. В. Канторович начал свои математические исследования в области вещественного анализа. Уже в начале своей карьеры он заинтересовался и прикладными задачами — как численными методами (особенно в поиске методов решения уравнений с частными производными), так и методами оптимизации. Ключевые достижения Канторовича в области чистой математики — создание теории векторных решеток (1935–1937),

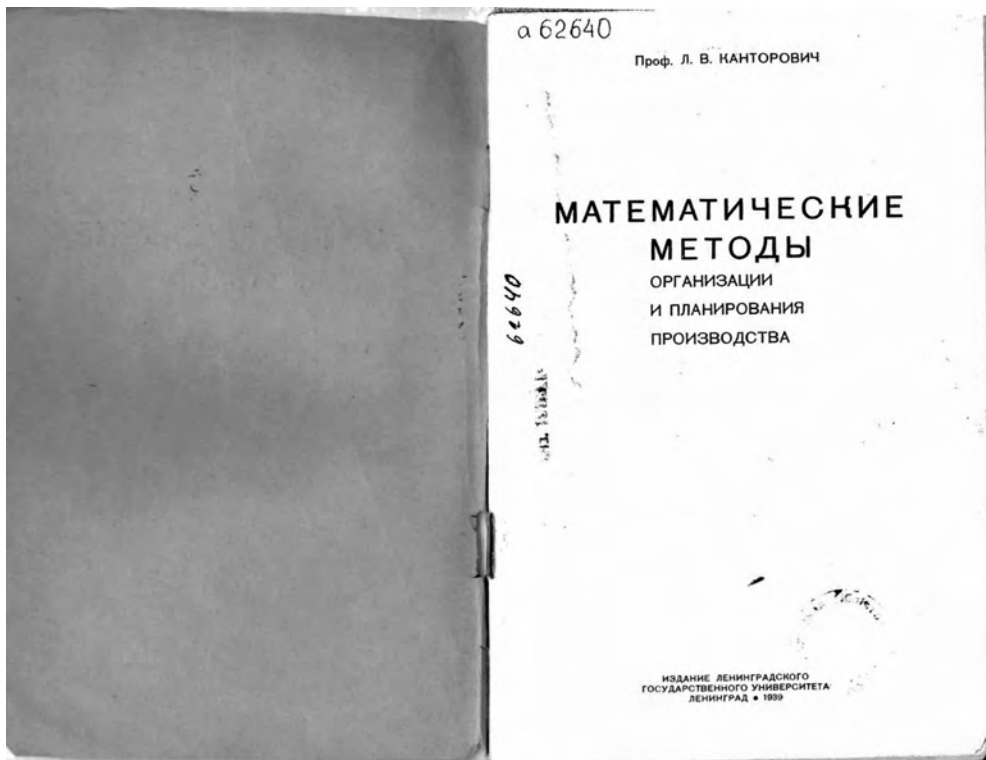


абстрактная формулировка транспортной задачи (1942) и ряд важных результатов в ней. Один из значительных послевоенных результатов в прикладной математике (теорема Канторовича, 1948) касается сходимости метода Ньютона.

В 1938 году в ответ на просьбу группы инженеров фанерного треста Л. В. Канторович сформулировал и решил задачу об оптимальном раскрое фанеры, относящуюся к области, которую позже называли линейным программированием (линейная оптимизация с линейными ограничениями). То, как он использовал теорию выпуклости и методы вещественного анализа при решении экономических задач, а также, что очень важно, интерпретация двойственных переменных как цен стало новаторским вкладом в экономическую науку [5].

В 1942 году, во время Второй мировой войны, Канторович вместе с семьей был эвакуирован из Ленинграда. Мать Леонида Витальевича скончалась, а его девятимесячный сын умер во время эвакуации. В том же 1942 году, несмотря на тяготы войны, Канторович закончил большую рукопись по экономике и стал горячим сторонником применения новых методов оптимизации, призванных усовершенствовать практику советского планирования. В конце 1940-х годов Л. В. Канторович и его бывший студент В. А. Залгаллер работали над применением методов оптимизации в оптимальном раскрое материалов [6]. Усилия Канторовича по реализации своих идей, возобновленные после XX съезда КПСС, состоявшегося в 1956 году, и волны десталинизации, были встречены враждебно как органами планирования, так и советскими экономистами. При этом первые просто сопротивлялись переменам, а вторые подозревали, что подход Канторовича к оптимальному планированию противоречит официальной доктрине марксистской политэкономии. Из-за этого книга, которую он в основном закончил в 1942 году, была опубликована лишь спустя 17 лет.

Канторович пытался изменить не только экономику Советского Союза, но и культуру ее анализа. Но если с первой задачей он определенно не справился, то во второй добился некоторых успехов. Его влияние возросло после того, как в 1949 году он получил Сталинскую премию за работы по функциональному анализу и прикладной математике, а также — негласно — за успешные расчеты для советского атомного проекта. Опираясь на свой устоявшийся авторитет в Академии наук, связи с влиятельными советскими учеными, такими как А. Н. Колмогоров, С. Л. Соболев и М. А. Лаврентьев, и на поддержку математически мыслящих советских экономистов, например В. С. Немчинова, В. В. Новожилова и А. Л. Вайнштейна, Канторович сумел институционализировать то, что позже получило название «математические методы в экономике» как в научных ис-



следованиях, так и в преподавании [3]. Так родилась советская математическая экономика. В этой новой области линейная и нелинейная оптимизация, анализ межотраслевого баланса и даже теория игр преподавались и исследовались во многих советских вузах и научных центрах. Это стало возможным благодаря усилиям Л. В. Канторовича.

В 1956 году голландско-американский экономист Тьяллинг Купманс связался с Канторовичем, прочитав его короткую работу по теории транспортных задач. В результате были опубликованы несколько статей и книга Канторовича на английском языке [7], последовало почти всеобщее признание приоритета Канторовича в формулировке и решении основных задач линейной оптимизации и в разработке ключевых ее методов [2].

В 1960 году Л. В. Канторович переехал в Новосибирск, чтобы принять участие в создании Сибирского отделения Академии наук СССР. В то время математические методы в экономике получили официальное признание, считалось, что математика способна усовершенствовать советскую экономическую систему и тем самым способствовать успехам социалистического строительства. В Новосибирске Канторович и его коллеги

(в частности, Г. Ш. Рубинштейн и В. Л. Макаров) продолжали развивать идеи «оптимального планирования», включая его динамические версии. Также велась работа над отдельными применениями линейной оптимизации [4].

Этот период карьеры Л. В. Канторовича и последующие годы не очень хорошо документированы. Архивные данные по-прежнему недоступны как в Новосибирске, так и в Москве, куда он переехал в 1971 году и где работал сначала в Государственном комитете по науке и технике, а затем, с 1976 года, в основанном незадолго до того Институте системных исследований. Возможно, в ближайшие годы мы узнаем больше о роли Канторовича в советских научных и управленческих дискуссиях.

В 1975 году Л. В. Канторович разделил с Т. Купмансом Нобелевскую премию по экономике. Купманс был недоволен тем, что Нобелевский комитет не присудил премию Джорджу Данцигу, математику, который разработал симплекс-метод, мощный инструмент решения задач линейного программирования, и в целом способствовал формированию линейной оптимизации как отдельной области прикладной математики. Купманс даже предложил совместно отказаться от премии, чего в итоге не произошло. Другие осложнения были политическими: в том же году Андрей Дмитриевич Сахаров получил Нобелевскую премию мира. Прессу в Стокгольме меньше волновало оптимальное планирование, а больше то, как Канторович, в то время совершенно лояльный советский гражданин и бюрократ, отнесся к получению премии одновременно с Сахаровым.

В последние десятилетия своей жизни Канторович был менее активен в академической сфере, но оставался весьма деятельным в качестве эксперта в разных областях советской экономической политики и всячески поддерживал исследования в математической экономике и смежных областях [9]. Его математические идеи, необычайная способность вникать в экономические задачи и находить их оригинальные решения, а также пронизательность как в академическом, так и в управленческом контексте сделали его важнейшей фигурой в советской науке и за ее пределами.

Немало биографических документов доступны (на русском языке) в книге [1].

И. А. Болдырев
перевод *Нодара Лахути*

Литература

- [1] Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый: В 2 т. / Под ред. В. Л. Канторовича, С. С. Кутателадзе, Я. И. Фета. Новосибирск: Изд-во СО РАН, Филиал «Гео», 2002.

- [2] *Bockman J., Bernstein M. A. Scientific community in a divided world: economists, planning, and research priority during the Cold War // Comparative Studies in Society and History. 2008. V. 50, № 3. P. 581–613.*
- [3] *Boldyrev I., Düppe T. Programming the USSR. Leonid V. Kantorovich in context // The British Journal for the History of Science. 2020. V. 53, № 2. P. 255–278.*
- [4] *Ellman M. Planning problems in the USSR: the contribution of mathematical economics to their solution, 1960–1971. Cambridge: CUP, 1973.*
- [5] *Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. Л.: Издательство ЛГУ, 1939.*
- [6] *Канторович Л. В., Залгаллер В. А. Расчет рационального раскроя промышленных материалов. Л.: Лениздат, 1951.*
- [7] *Kantorovich L. V. The best use of economic resources / Ed. by G. Morton. Cambridge: Harvard University Press, 1965. (Transl. from the Russian.)*
- [8] *Zauberman A. The mathematical revolution in Soviet economics. London: Oxford University Press, 1975.*
- [9] *Канторович Л. В., Катышев П. К., Кирута А. Я., Полтерович В. М. О некоторых направлениях исследований в математической экономике // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Т. 19. М.: ВИНТИ, 1982. С. 3–21.*

Влияние Л. В. Канторовича на теорию оптимальной транспортировки

Происхождение задачи

В 1781 году французский математик Гаспар Монж заинтересовался задачей, которую можно переформулировать следующим образом.

Есть несколько мест, из которых надо вывезти грунт (скажем, для выравнивания поверхности) и несколько мест, куда этот вывезенный грунт надо доставить (скажем, чтобы засыпать овраги). Считая, что стоимость перевозки грунта пропорциональна его весу и расстоянию, как организовать перевозку, чтобы ее стоимость была наименьшей?

В своем мемуаре [10] Монж рассмотрел задачу в двумерном и трехмерном варианте, проявив ее глубокое понимание и показав открывающиеся перспективы. В частности, Монж осознал, что в размерности 3 оптимальные траектории транспортной задачи должны быть ортогональны некоторому однопараметрическому семейству поверхностей.

Через 150 с лишним лет, в 1938 году, советский математик Леонид Канторович заложил основы линейного программирования. Затем он в 1942 году исследовал вариант задачи оптимальной транспортировки, который мы теперь опишем.

Пусть X — компактное метрическое пространство с функцией расстояния d . Пусть μ_0 и μ_1 — вероятностные меры на X , а $\Pi(\mu_0, \mu_1)$ обозначает пространство вероятностных мер на $X \times X$, для которого μ_0 и μ_1 являются частными распределениями. Множество $\Pi(\mu_0, \mu_1)$ называется множеством *транспортных планов*. Л. В. Канторович рассмотрел задачу отыскания величины

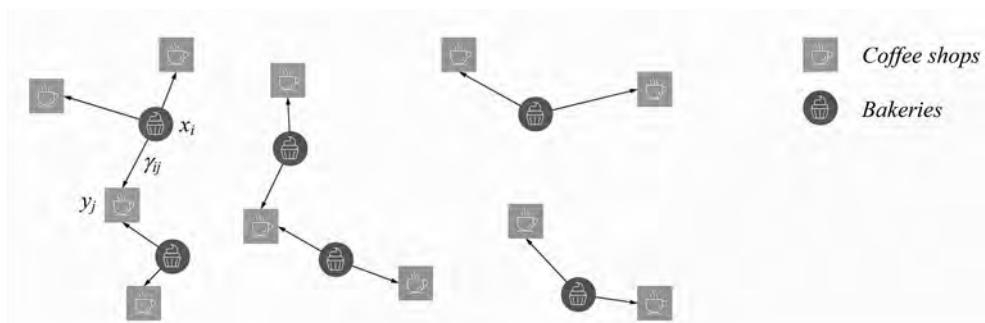
$$K(\mu_0, \mu_1) := \inf_{\gamma \in \Pi(\mu_0, \mu_1)} \int_{X \times X} d(x, y) d\gamma(x, y). \quad (1)$$

Чтобы пояснить смысл этой задачи, рассмотрим случай, когда $\mu_0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{x_i}$ и $\mu_1 = \sum_{j=1}^M \beta_j \delta_{y_j}$. Наглядный пример таков: пусть имеется N пекарен, расположенных в точках $(x_i)_{i=1, \dots, N}$, и M кондитерских, находящихся в точках $(y_j)_{j=1, \dots, M}$, причем i -я пекарня производит хлеб в коли-

честве $\alpha_i \geq 0$, а j -й кондитерской требуется количество $\beta_j \geq 0$. Допущение $\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = 1$ означает, что спрос равен предложению.

Задача состоит в отыскании матриц $(\gamma_{ij})_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M}$ со следующими свойствами:

- (i) $\gamma_{ij} \geq 0$ (количество хлеба, поступающего из x_i в y_j , неотрицательно);
- (ii) $\alpha_i = \sum_{j=1}^M \gamma_{ij}$ для всех i (полное количество хлеба, посланного во все кондитерские, равно всей продукции пекарен);
- (iii) $\beta_j = \sum_{i=1}^N \gamma_{ij}$ для всех j (полное количество хлеба, вывезенного из всех пекарен, равно спросу кондитерских);
- (iv) γ_{ij} минимизирует величину $\sum_{i,j} d(x_i, y_j) \gamma_{ij}$ (полную стоимость транспортировки из пекарен в кондитерские).



Существенно отметить, что область, заданная условиями (i), выпукла, ограничения (ii) и (iii) линейны и целевая функция из (iv) также линейна (все это — относительно γ_{ij}). Иначе говоря, формулировка Канторовича означает минимизацию линейной функции при выпуклых/линейных ограничениях.

Благодаря компактности пространства X нетрудно доказать, что минимум в задаче (1) всегда достигается. Однако хотелось бы понять структуру множеств, на которых он достигается. В работе [5] Канторович установил следующую основную теорему двойственности.

Теорема 1.

$$K(\mu_0, \mu_1) = \max \int_X \varphi(x) d(\mu_0 - \mu_1)(x),$$

где максимум берется по всем функциям φ , которые 1-липищевы относительно расстояния d , то есть удовлетворяют условию

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq d(x, y) \quad \text{при всех } x, y \in X.$$

Эти 1-липшицевы функции Канторович назвал *потенциалами*. План транспортировки γ называется *потенциальным планом*, если существует такой потенциал φ , для которого

$$\varphi(x) - \varphi(y) = d(x, y) \quad \text{почти всюду относительно } \gamma.$$

Теорема 1 является бесконечномерным аналогом классической теоремы двойственности линейного программирования: значение нижней грани в исходной задаче равно значению верхней грани в «двойственной» задаче. Важно напомнить, что в то время не существовало теории двойственности для бесконечномерных оптимизационных задач.

Из теоремы 1 Канторович вывел, что план транспортировки оптимален в точности тогда, когда он потенциален. А в 1947 году Л. В. Канторович увидел труды конференции к двухсотлетию со дня рождения Гаспара Монжа, состоявшейся в Ленинграде, и осознал, что поверхности Монжа — это в точности множества уровня оптимальных потенциалов, которые Канторович ввел за несколько лет до этого [6].

Современная формулировка

Сегодня общая транспортная задача в версии Монжа формулируется следующим образом. Даны две вероятностные меры μ_0 и μ_1 , заданные соответственно на измеримых пространствах X_0 и X_1 . Требуется найти такое измеримое отображение $T: X_0 \rightarrow X_1$, что $T_{\#}\mu_0 = \mu_1$ (т. е. $\mu_1(A) = \mu_0(T^{-1}(A))$ для каждого измеримого $A \subset X_1$) и стоимость транспортировки минимальна. Последнее условие означает, что

$$\int_{X_0} c(x, T(x)) d\mu(x) = \min_{S_{\#}\mu = \nu} \int_{X_0} c(x, S(x)) d\mu(x),$$

где $c: X_0 \times X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ — заданная ценовая функция. Если выполнено условие транспортировки $T_{\#}\mu_0 = \mu_1$, то говорят, что T является *транспортным отображением*, а если при этом T минимизирует стоимость, то оно называется *оптимальным транспортным отображением*.

В этой общей постановке транспортная задача оптимизации в формулировке Канторовича может быть записана в виде

$$\inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma(x, y). \quad (2)$$

В таких терминах задача Монжа становится частным случаем задачи Канторовича благодаря следующему наблюдению:

$$T_{\#}\mu_0 = \mu_1 \quad \Rightarrow \quad \gamma_T := (\text{id} \times T)_{\#}\mu_0 \in \Pi(\mu_0, \mu_1).$$

Иначе говоря, каждое транспортное отображение индуцирует транспортный план. Нетрудно также проверить, что T и γ_T дают одинаковую стоимость транспортировки. Таким образом, задача Монжа соответствует частному случаю задачи Канторовича, где рассматриваются только планы транспортировки, индуцированные отображениями.

Оказывается, результат о двойственности «в духе Канторовича» выполняется в большой общности, и именно в нем состоит суть доказательства существования и единственности оптимальных отображений (см. например [4, Chapter 2]). В частности, теория двойственности играет ключевую роль в доказательстве теоремы Бренье для квадратичной стоимости в $\mathbb{R}^n$ [1], которая является краеугольным камнем в теории оптимизации транспортировки.

Расстояния Канторовича—Васерштейна

Пусть X — компактное метрическое пространство, а $P(X)$ — пространство вероятностных мер на X . Можно определить так называемые расстояния Васерштейна на $P(X) \times P(X)$ следующим образом: при $p \geq 1$ положим

$$W_p(\mu_0, \mu_1) := \left(\inf_{\gamma \in \Pi(\mu_0, \mu_1)} \int_{X \times X} d(x, y)^p d\gamma(x, y) \right)^{1/p}.$$

Можно доказать, что W_p является расстоянием на пространстве вероятностных мер, метризирующим слабую сходимость (см. например [4, Ch. 3]). Отметим, что если $p = 1$, то W_1 совпадает с расстоянием Канторовича K из формулы (1). Кроме того,

$$W_p(\delta_x, \delta_y) = d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Иначе говоря, вложение

$$(X, d) \ni x \mapsto \delta_x \in (P(X), W_p)$$

является изометрией при любом $p \geq 1$.

В работе [7] Л. В. Канторович и Г. Ш. Рубинштейн отметили, что расстояние Канторовича $K = W_1$ можно продолжить до нормы на множестве зарядов $M(X)$ на X . Такое расширение обычно называют *нормой Канторовича—Рубинштейна*. Это свойство специфично для показателя $p = 1$; оно обеспечивает явное изометрическое вложение произвольного метрического пространства (X, d) в банахово пространство. Кроме того, в силу теоремы 1 норма Канторовича—Рубинштейна на метрическом пространстве (X, d) может быть охарактеризована как максимальная норма $\|\cdot\|$ на $M(X)$, согласованная с расстоянием в том смысле, что $\|\delta_x - \delta_y\| = d(x, y)$ при всех $x, y \in X$.

Заинтересованный читатель найдет полный исторический обзор результатов Л. В. Канторовича в статье [15].

Замечание о терминологии. Термин «расстояние Васерштейна» принадлежит Р. Л. Добрушину [2]: при изучении вопроса о существовании и единственности случайных полей с данной системой условных распределений оказалось удобно использовать расстояние Канторовича K . Однако Добрушину была известна лишь статья Васерштейна [14] (Васерштейн работал в возглавляемой им лаборатории), но не публикации Канторовича. Поэтому Добрушин ввел термин «расстояние Васерштейна» (в латинской транскрипции фамилия превратилась в Wasserstein). Хотя и несправедливый по отношению к Канторовичу, термин «расстояние Васерштейна» стал очень популярен, и теперь почти все статьи по транспортной задаче его используют.

Расстояния Канторовича—Васерштейна и оценки сходимости

Расстояния Канторовича—Васерштейна очень полезны в задачах, где нужно количественно оценить расстояние между двумя мерами, особенно если некоторые меры являются атомарными.

Классический пример можно найти во второй статье Р. Л. Добрушина по кинетической теории [3], где он исследовал сходимость ньютоновской динамики частиц к так называемому уравнению Власова. В этой статье с помощью теоремы о неподвижной точке, используя подходящий вариант расстояния W_1 , он доказал существование и единственность решений уравнений Власова с гладкими полями сил. Этот результат и этот подход стали важнейшим ориентиром для специалистов по кинетической теории.

Упомянем еще ряд примеров; подробности и дальнейшие ссылки можно найти в [4, Ch. 5].

Центральная предельная теорема. Центральная предельная теорема утверждает, что если $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — последовательность независимых случайных переменных с одинаковым законом распределения, средним значением 0 и дисперсией 1, то распределение среднего $\bar{X}_k := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i$ при $k \rightarrow \infty$ сходится к стандартному гауссову. Хотелось бы придать этому утверждению количественную форму: насколько далеки от гауссова может быть распределение $\bar{X}_k$? Расстояния Канторовича—Васерштейна — очень полезный инструмент в изучении этого вопроса.

Случайная выборка точек. Пусть $X_1, \dots, X_k$ обозначают k независимых точек, равномерно распределенных в кубе $[0, 1]^d$. Рассмотрим (случайную) эмпирическую меру $\mu^k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \delta_{X_k}$, ассоциированную с k

точками. При росте k можно ожидать, что μ^k будет приближаться к равномерно распределенной мере на $[0, 1]^d$. Тогда очень естествен следующий вопрос: какова скорость сходимости к нулю случайной переменной $W_p(\mu^k, dx|_{[0,1]^d})$?

Выпуклость вдоль геодезических Васерштейна

Пусть (X, d) — геодезическое пространство (т.е. полное сепарабельное метрическое пространство, в котором любую пару точек можно соединить геодезической, минимизирующей длину пути между ними). Рассмотрим пространство $P_2(X)$ вероятностных мер с конечным вторым моментом, наделенное расстоянием Канторовича—Васерштейна W_2 . Оказывается, $(P_2(X), W_2)$ — также геодезическое пространство.

Пусть теперь даны две меры $\mu_0, \mu_1 \in P_2(X)$, и пусть $(\mu_t)_{t \in [0,1]}$ — геодезическая постоянной скорости, соединяющая μ_0 с μ_1 . Ключевая идея, нашедшая множество применений, состоит в том, что поведение кривой μ_t содержит информацию о геометрии соответствующего пространства.

Точнее, зафиксируем эталонную меру ν на пространстве X и рассмотрим следующие функционалы на $P_2(X)$. Произвольную меру $\mu \in P_2(X)$ запишем в виде $\mu = \rho \nu + \mu^s$, где μ^s — сингулярная часть меры μ относительно ν . Далее положим

$$H_N(\mu) = - \int_X \rho^{1-1/N} d\nu, \quad N \geq 1,$$

$$H_\infty(\mu) = \begin{cases} \int_X \rho \log(\rho) d\nu & \text{при } \mu^s \equiv 0, \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если $X = \mathbb{R}^n$, ν — мера Лебега и $N \geq n$, то, как доказал Макканн в [9], указанные функционалы выпуклы вдоль геодезических Васерштейна. Этот факт послужил отправной точкой многих приложений, которые мы теперь кратко опишем.

Градиентные потоки. В работе [11] Ф. Отто установил, что многие уравнения в частных производных, описывающие эволюцию, можно интерпретировать как градиентные потоки некоторых «функционалов энергии» в пространстве $P_2(\mathbb{R}^d)$ относительно W_2 . Например, в случае функционала H_∞ градиентный поток соответствует уравнению теплопроводности, а в случае H_N — уравнению пористой среды. В частности, если эти функционалы энергии выпуклы вдоль геодезических, такая интерпретация оказывается чрезвычайно удобной при изучении существования, единственности, устойчивости и асимптотического поведения решений.

Геометрические и функциональные неравенства. Выпуклость вдоль геодезических может использоваться для доказательства некоторых геометрических и функциональных неравенств. В качестве примера рассмотрим два открытых ограниченных множества $A, B \subset \mathbb{R}^n$ и вероятностные меры $\mu_0 = \frac{1_A}{|A|}$, $\mu_1 = \frac{1_B}{|B|}$. Как показано в [9], выпуклость функционала H_n вдоль геодезических позволяет доказать неравенство Брунна—Минковского:

$$|A + B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n}.$$

Поскольку такое доказательство опирается лишь на выпуклость H_n вдоль геодезических, оно непосредственно распространяется на любое риманово многообразие, где это условие выполнено.

Римановы многообразия и границы кривизны Риччи. В качестве естественного обобщения результата Макканна [9] можно задаться вопросом о выпуклости функционалов H_N и H_∞ вдоль геодезических на римановом многообразии (M, g) с эталонной мерой $\nu = \text{vol}_g$. Результаты многих авторов можно просуммировать в следующем утверждении, связывающем выпуклость вдоль геодезических и кривизну Риччи.

Теорема 2. Пусть $(X, \nu) = (M, \text{vol}_g)$, и пусть $N \geq \dim M$. Тогда функционал H_N (соответственно H_∞) является выпуклым вдоль геодезических в точности тогда, когда $\text{Ric}_g \geq 0$.

Этот результат дает робастную (устойчивую к случайным выбросам) характеризацию геометрического условия $\text{Ric}_g \geq 0$ (существуют также его обобщения, характеризующие $\text{Ric}_g \geq Kg$, $K \in \mathbb{R}$) в терминах выпуклости подходящих функционалов. Он послужил отправной точкой для работ Лотта—Виллани и Штурма [8, 12, 13], в которых показан смысл нижних границ кривизны Риччи в метрическом измеримом пространстве. Эта теория и поныне активно развивается.

Заключение

В этой короткой заметке мы показали решающее влияние Л. В. Канторовича на развитие теории оптимизации транспортировки. Мы описали также примеры применения расстояний Канторовича—Васерштейна в теории вероятностей, уравнениях с частными производными и геометрии. Для ознакомления с теорией оптимизации транспортировки и другими приложениями этих результатов можно обратиться к недавней книге [4] и цитированным в ней работам.

Алессιο Фигалли (Alessio Figalli)
перевод Б. Р. Френкина

Литература

- [1] Brenier Y. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions // *Comm. Pure Appl. Math.* 1991. V. 44, № 4. P. 375–417.
- [2] Добрушин Р. Л. Задание системы случайных величин при помощи условных распределений // *Теория вероятн. и ее примен.* 1970. Т. 15, вып. 3. С. 469–497.
- [3] Добрушин Р. Л. Уравнения Власова // *Функц. анализ и его прил.* 1979. Т. 13, вып. 2. С. 48–58.
- [4] Figalli A., Glaudo F. *An Invitation to Optimal Transport, Wasserstein Distances, and Gradient Flows.* Berlin: EMS Press, 2021.
- [5] Канторович Л. В. О перемещении масс // *Докл. АН СССР.* 1942. Т. 37, № 7–8. С. 227–229.
- [6] Канторович Л. В. Об одной проблеме Монжа // *Успехи матем. наук.* 1948. Т. 3, вып. 2. С. 225–226.
- [7] Канторович Л. В., Рубинштейн Г. III. Об одном пространстве вполне аддитивных функций множества // *Вестник ЛГУ.* 1958. Т. 13, вып. 7. С. 52–59.
- [8] Lott J., Villani C. Ricci curvature for metric measure spaces via optimal transport // *Ann. Math.* 2009. V. 169, № 3. P. 903–991.
- [9] McCann R. J. A convexity principle for interacting gases // *Adv. Math.* 1997. V. 128, № 1. P. 153–179.
- [10] Monge G. Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais // *Hist. de l'Acad. des Sciences de Paris.* 1781 (1784). P. 666–704.
- [11] Otto F. The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation // *Comm. Partial Diff. Eq.* 2001. V. 26, № 1–2. P. 101–174.
- [12] Sturm K.-T. On the geometry of metric measure spaces // *Acta Math.* 2006. V. 196. P. 65–131.
- [13] Sturm K.-T. On the geometry of metric measure spaces. II // *Acta Math.* 2006. V. 196. P. 133–177.
- [14] Васерштейн Л. Н. Марковские процессы на счетном произведении пространств, описывающие большие системы автоматов // *Пробл. передачи информ.* 1969. Т. 5, вып. 3. С. 64–72.
- [15] Vershik A. M. Long history of the Monge-Kantorovich transportation problem // *Math. Intelligencer.* 2013. V. 35, № 4. P. 1–9.

Александр Данилович Александров (1912–1999)

Немало написано про академика Александра Даниловича Александрова (А. Д., как, говоря о нем, его сокращенно называли большинство из тех, кто его знал), но я почти ничего не нашел по-английски, кроме глубокого и великолепного эссе Семена Кутателадзе [3]. Оно мне нравится больше, чем моя заметка, но никак не подходит по формату для этого сборника. (В своем тексте я использую обозначение [СК] для вольного перевода цитат из этого эссе.) Поэтому я согласился написать некий текст по-английски. Уже было запланировано, что я сделаю пересказ своей статьи на русском, хотя, ознакомившись уже потом с живыми яркими воспоминаниями А. М. Вершика [2], тщательным историческим очерком О. А. Ладыженской [4], обзором Ю. Д. Бураго [1], да и вообще со сборником статей об А. Д. [5], я понял, что в этом мало смысла. Я очень рекомендую в первую очередь работы [1], [3], [4], с них надо начинать, мой текст — только небольшое добавление. Тем не менее ниже следует такой пересказ, сделанный А. Г. Никифоровой, с моей небольшой редактурой. Замечу, что по-русски я бы писал совсем иначе и в расчете на другого читателя, знакомого с советскими реалиями. Бывают и слова, которые невозможны в английском тексте, например, «хреногеометрия» и «СыкВтыкКар». Я не хочу, заимствуя выражение А. М. Вершика (из частной переписки), делать из Александра Даниловича Александрова «глянцевую икону». А. Д. был невероятно ярким, выдающимся человеком, очень благородным и, конечно, сложным и даже противоречивым. Видимо, убежденный марксист (что мне лично скорее симпатично, пусть я и не в восторге от этой идеологии), А. Д. помогал диссидентам и деятелям науки и культуры, которые были не обласканы властью или даже на-



ходились в опале. Хотя не все было возможно даже для него, например, несмотря на длительные усилия Александра Даниловича, Р. И. Пименова в конце концов сослали в Сыктывкар на 7 лет. Отсюда «СыкВтыкКар». А про «хреногеометрию» бытует мнение, что это слово было придумано недоброжелателями А. Д., высмеивавшими его увлечение хроногеометрией. Может, это и так, но я сам слышал это слово от А. Д., он произносил его со вкусом и юмором, и тут уже смеялся он сам.

В основу нижеследующего повествования легли мои воспоминания о совершенно поверхностном знакомстве с А. Д. в самые последние годы его жизни. Кроме того, я расскажу о моем собственном восприятии некоторых из множества особенностей жизни А. Д., которое у меня сложилось в результате чтения разных источников и разговоров с людьми. Эти суждения — не более чем спекуляции; я — не историк математики.

Поразительно, что гениальность А. Д. проявлялась во всех областях, которые его привлекали, все, к чему он прикасался, расцветало. Не только в математике, где значимость достижений А. Д. совершенно очевидна. Несомненны выдающиеся заслуги А. Д. перед научным сообществом и в поддержке талантливых людей в те непростые времена. Хочется отметить вклад А. Д. в методику преподавания математики в школе, включая работу над книгой по геометрии для школьников. «Александровская школа» и Александровский семинар имели огромное влияние на развитие математики в СССР. Широкий был круг интересов А. Д. в культуре, включая поэзию, историю математики и философию. А еще альпинизм, физика... У А. Д. рождалось невероятное количество идей, и он был фантастически щедр в желании ими поделиться. Он мог прийти на семинар и сказать всего одну фразу, которая в дальнейшем служила началом нового направления, большого количества математических исследований и вовлекала в работу многих математиков.

Безумно сложно рассказывать об А. Д., очень много уже о нем написано. Было бы глупо с моей стороны рассказывать о математике Александрова: она очень многообразна. Я хорошо знаю лишь маленькие части сферы деятельности А. Д. Одна из них дала начало направлению, называемому сегодня александровской геометрией. На самом деле их существуют две, совершенно различные, с верхней и нижней границами



для кривизны. Начальная технология в них одинакова, но в дальнейшем они абсолютно расходятся по духу. Более трети книги объемом свыше 450 страниц, написанной мной в соавторстве с Сергеем Ивановым и моим отцом, посвящено александровской геометрии, а также моя лекция на Международном математическом конгрессе в 1998 году в основном касалась применения александровской геометрии для $k \leq 0$ в динамике. Кроме того, существует связанная с этим область, заслуживающая упоминания, — теория поверхностей с ограниченным интегралом положительной части кривизны (это условие может быть переформулировано без интегрирования, через «дефект» углов в треугольнике). Несмотря на тот факт, что теория двумерна, она оказалась очень сложной и далеко не тривиальной. Достаточно вспомнить задачу Александрова, формулировка которой совершенно элементарна и похожа на упражнение, и при этом она до сих пор остается открытой, и многие математики «сломали зубы», пытаясь ее решить. Выдающийся математик С.-Т. Яу даже включил эту задачу в свой список 50 наиболее важных задач в геометрии. В задаче спрашивается: какова максимально возможная площадь двумерной сферы с внутренней метрикой неотрицательной кривизны и внутренним диаметром ≤ 1 ? Оптимальная поверхность — определенно не круглая сфера. Заметим, что данная метрика может быть реализована как индуцированная метрика на поверхности выпуклого тела в $\mathbb{R}^3$ (возможно, вырожденного, т. е. дважды покрытой области на плоскости). Кстати, это утверждение существует тоже благодаря А. Д. Александрову и известно как теорема Александрова (одна из многих с таким названием).

Конечно, я мог бы попробовать рассказать и о замечательных работах А. Д. в выпуклой геометрии, скажем, о неравенстве Александрова—Фенхеля, но это превратило бы этот очерк в математический текст. В любом случае, если я буду писать о математике Александрова, я неизбежно буду повторяться. Существуют также результаты А. Д., о которых я слышал только в интерпретации других людей. Например, так писала О. А. Ладыженская:

Годы директорства А. Д. — это годы его личного расцвета. С одной стороны, он не только не покидает математику, но и покоряет еще одну из ее вершин, объединенную под принятым теперь названием «Принцип максимума Александрова». Часть его замечательных результатов будет глубоко понята лишь спустя четверть века. Она является одним из краеугольных камней в построении теории разрешимости для полностью нелинейных уравнений эллиптического, а потом и параболического типов. При построении теории вязкостных решений будут востребованы эти и более ранние результаты А. Д. по выпуклым функциям. В 1975 году А. Д. избирается в старейшую Академию — Итальянскую национальную «академию сорока».

Я сам могу писать, только основываясь на своих воспоминаниях, в основном 38-33-летней давности, на нескольких историях, рассказанных мне моим отцом, А. М. Вершиком и другими, и существующей литературе. Я не беру тексты в кавычки, если не уверен, что точно передаю слова говорившего, это скорее то, что осталось в моей памяти по прошествии многих лет, или переводы. Но я беру в кавычки тексты, опубликованные по-русски.

Впервые я лично познакомился с А. Д. Александровым, будучи студентом. Я посещал его курс даже при том, что уже неплохо знал этот раздел математики. Я наслаждался шоу. На первой лекции А. Д. встал за партой, а затем просто на нее запрыгнул, оттолкнувшись одновременно обеими ногами. Казалось бы, не удивительно, он был очень хорошим альпинистом, но возраст... Затем предложил молодым повторить за ним. Это весьма болезненно: удариться лодыжками о край стола... Затем А. Д. сказал примерно следующее: «Раз вы не умеете прыгать, давайте я вас хоть математике поучу». А. Д. на тот момент было за 70...

А. Д. притягивал к себе студентов, умея всегда их удивить, увлечь, а затем учил математике очень четким, но отнюдь не скучным способом. Полагаю, его манера преподавать повлияла на многих, включая меня. Он сбегал вниз по лестнице, перескакивая через три ступеньки, и кричал студентам: пропустите меня, у вас много времени, а у меня нет! В своих лекциях он использовал нестандартную (по крайней мере на то время) терминологию и приводил много аналогий. Он называл последовательность точек в метрическом пространстве «пунктиром». Он любил рассказывать истории и, будучи энциклопедически образованным, имел огромный запас занимательных и нетривиальных «рассказок». Позже мы нередко встречались на кафедре геометрии, и А. Д. слегка выделял меня среди прочих студентов. Не из-за моих знаний по математике, хотя у меня уже были некоторые результаты. А. Д. любил приводить цитаты из различных книг, много знал наизусть и часто спрашивал: откуда это? Я сравнительно часто мог ответить. Его интересы были очень разнообразны. Он увлекался не только математикой и альпинизмом, но и философией, литературой и искусством, физикой. Мой отец рассказывал, что, когда А. Д. влюбился в свою будущую жену Светлану, он писал ей стихи по-английски. Я помню начало захватывающей лекции А. Д. на международной конференции, конечно, на английском. Ему было 80. А. Д. сказал: «В моем возрасте только дурак будет говорить о своих собственных достижениях, но вчера мне позвонил друг из Новосибирска и поделился двумя красивыми теоремами». И далее он потратил лекцию на объяснение этих результатов. А когда закончил, спускаясь со сцены по лестнице, сказал весьма внятно, по-русски: «Почему не дают старику



Удостоверение А. Д. Александрова — инструктора по альпинизму

спокойно умереть?» И необычный шум прокатился по всей аудитории: понимающие по-русски слушатели переводили эти слова своим соседям. После лекции кто-то спросил А. Д., как ему удалось так хорошо выучить английский. Я абсолютно уверен, что А. Д. читал таких лингвистически сложных авторов, как, скажем, Моэм, и, кроме того, несомненно, много английской поэзии, но А. Д. не любил очевидных ответов. Он сказал: я читал О. Генри...

Я заметил, что А. Д. на одной руке всегда носил черную перчатку. Я спросил своего отца: почему? И он рассказал мне, что много лет назад А. Д. перенес энцефалит, нерв был поврежден и одна рука мерзла даже в жару. Несмотря на это, А. Д. совершал альпинистские восхождения экстра-класса и после того, как (почти полностью) восстановился после этого часто смертельного заболевания.

А. Д. был Джентльменом с большой буквы. Он всегда одевался и вел себя, как аристократ в десятом поколении. Я пару раз был в его квартире в Ленинграде, много лет назад. Я был нелепым юношей, только закончившим университет, а А. Д. был академиком и бывшим ректором ЛГУ. Он всегда, провожая, помогал мне надеть пальто. Я стараюсь перенять у него эту привычку, я был впечатлен, а у него это просто было в крови.

А. Д. ненавидел ложь, даже при том, что знал, что в советские времена иногда ложь была неизбежна. Вот примечательный пример. Формально Г. Перельман был в ЛОМИ аспирантом А. Д., хотя его фактическим руководителем являлся мой отец. Почему? Перельман — этнический еврей, и единственным способом взять его в ЛОМИ в те времена было прибегнуть к такому небольшому обману. Тем не менее мой отец рассказал мне следующую историю. На защите Перельмана Л. Д. Фаддеев, бывший председателем диссертационного совета, спросил А. Д., не может ли тот сказать несколько слов как руководитель. А. Д. ответил: «Я почти ничего не понимаю в результатах Перельмана, Вы хотите, чтоб я объяснил, почему он мой аспирант?» Фаддеев ответил: «Нет, спасибо».

Речь А. Д. всегда была предельно ясной и точной, иногда даже резкой, при этом всегда вежливой по форме (но не обязательно по сути им сказанного...). С другой стороны, казалось, что А. Д. даже доставляло удовольствие, если кто-то отвечал ему дерзко. Думаю, он принимал это за проявление индивидуальности, характера у собеседника.

Я лично познакомился с А. Д., когда ему было уже 70. Он был невероятно ярким, энергичным, ясно и оригинально мыслящим молодым пожилым человеком. Мне трудно представить, каким же он был в свои 30.

После защиты диплома (с отличием) «Вычисление энергии двухвалентных атомов по методу Фока» А. Д. рекомендовали остаться в аспирантуре. Он отказался, сказав, что не может обещать, что всегда будет делать то, что положено (видимо, в те времена это означало скорее то, что требуют), за что попал в немилость у администрации, но зато получил похвалу от руководителей. В. А. Фок (известный физик-теоретик, академик) сказал: «Вы слишком порядочный человек»; Б. Н. Делоне (известный математик, член-корреспондент академии): «Александр Данилович, вы слишком не карьерист!»

Оба учителя А. Д. были правы, хотя в то время вряд ли могли предвидеть всю сложную череду событий, определяемую невероятным талантом А. Д. и его выдающейся личностью, что в советский период неизбежно приводило к многочисленным противоречиям и противостояниям.

С одной стороны, карьера А. Д. была фантастической. Он был членом Коммунистической партии (неоднозначный успех, но... см. ниже), избран членом Академии наук СССР, какое-то время был ректором Ленинградского государственного университета, был отмечен большим количеством самых престижных наград и званий. Он помогал многим, кто были в немилости, и неоднократно препятствовал продвижению негодяев на руководящие позиции. Он поддерживал Р. И. Пименова, который работал в одной комнате с моим отцом и В. А. Залгаллером, пока не был выслан на 7 лет в Сыктывкар, несмотря на яростные попытки А. Д. его за-

щитить. Он остановил представление на университетскую руководящую должность бесчестного лжеученого Презента, протеже Лысенко, даже при том, что Хрущев, глава СССР, в 1955 году, через 2 года после смерти Сталина, когда почти все жили в глубоком страхе, кричал на А. Д., примерно следующее: «Как вы, ректор, не выполняете указания, в сталинские времена вам бы вынесли смертельный приговор!» В ответ А. Д. только [СК] «...оскалился». Это была [СК] «...реакция злостью на опасность». Это не означает, что А. Д. был лишен чувства страха, но, очевидно, он умел его преодолеть.

Существует много историй, подобных этим двум, в контексте кошмаров тех времен, например, связанных с так называемым «делом академика Н. Н. Лузина». Следует сказать и (см. подробности у [СК]) о «смелой позиции...» А. Д. «...в отношении статьи Н. П. Дубинина “Биологическая и социальная наследственность...”». «А. Д. оценил это произведение как выдающийся образец антинаучной литературы». «Чтение статьи Н. П. Дубинина и полемики вокруг нее, по моему убеждению, столь же полезно молодому ученому любой специальности, как и изучение стенограммы печально известной августовской сессии ВАСХНИЛ 1948 года».

Огромной заслугой А. Д. было приглашение в университет В. Рохлина, великого математика и человека, который находился в глубокой опале, а также многих других.

В то же время А. Д. и сам изрядное время был в немилости у властей предрежащих. В этом было огромное противоречие. Он не был ни «ручным», ни «лояльным», это очевидно, и тем не менее его назначили ректором второго по величине университета. В моем понимании, он стал членом Коммунистической партии в значительной мере потому, что это давало ему дополнительную возможность для хороших дел. Кто-то скажет сегодня, что быть членом партии — успех только для амбициозного человека или карьериста, но времена-то были другие. Я не могу поверить, что А. Д., человек бесконечно и абсолютно честный, мог вступить в партию из чисто практических соображений, даже по причине престижности, упомянутой выше. Подозреваю, что ситуация была гораздо сложнее. По воспоминаниям выглядит так, что А. Д. симпатизировал идеям марксизма-ленинизма, как и многие замечательные люди того времени. Не удивительно: несправедливость и несовершенство старой общественной системы были очевидны. Кто теперь скажет, возможно, верность этим идеям из прошлого влияла на решения Александра Даниловича. А. М. Вершик мне рассказывал, что А. Д. очень по-разному относился к Сталину, Ленину и Марксу. Только уроки XX века в конце концов показали, что следование этим идеям ведет к еще большим несправедливости и жестокости, и А. Д. наверняка это осознавал. Однако, будучи свиде-

лем перестройки и первых последующих лет, А. Д. ее не приветствовал и не очень принял. Из того, что мне известно, его очень огорчало, что происходило с научным сообществом и образованием как следствие или побочный результат перестройки. Возможно, то, что теперь известно как «криминальный Петербург», также значительно повлияло на взгляды А. Д. в его последние годы, сделав его еще большим сторонником идей социализма и коммунизма, часто обобщенно называемых марксизмом. Может быть, А. Д. был скорее антикапиталистом, сомневаюсь, что кто-нибудь сейчас ответит, но, возможно, оглядываясь назад, А. Д. грустил по утраченным идеалам советских времен, независимо от корявости их воплощения.

И при всем при том бывали моменты, когда сам А. Д. оказывался на грани исключения из партии. Его, по сути, вынудили покинуть пост ректора, хотя ушел он якобы по собственному желанию. Это может прозвучать забавно, но он был «выслан» в Петергоф вместе с университетом. Наиболее вероятно, что власти просто старались держать непокорных подальше от Ленинграда.

Согласно [3] можно сказать, что существует устойчивый стереотип: любой ненавидящий А. Д. является потенциальным или актуальным негодяем. По мнению студентов, друзей и родственников, А. Д. был исключительно добрым, даже нежным, очень внимательным и щепетильным. Будучи человеком страсти, он всегда оставался самокритичным. Как сказал В. И. Смирнов, А. Д. управлял университетом, используя «силу морального авторитета». А. Д. много знал о религии, всегда противопоставлял религиозную веру и научное понимание [3]. Он любил повторять, что ни во что не верит. Это утверждение обычно вызывало реакцию аудитории: «И в коммунизм тоже?» Что всегда сопровождалось утвердительным ответом А. Д. Нечего говорить, что после лекций А. Д. в местные партийные инстанции часто отправлялись доносы.

В. А. Залгаллер сохранил в своей памяти следующие строки:

My heart is full of burning wishes,
My soul is under spell of thine,
Kiss me: your kisses are delicious.
More sweet to me than myrrh and wine.
Oh lean against my heart with mildness,
And I shall dream in happy silence,
Till there will come the joyful day
And gloom of night will fly away.

Эта интерпретация стихотворения А. С. Пушкина была написана А. Д. еще в 1925 году. А в 1993 С. С. Кутателадзе получил от А. Д. следующие строки, написанные неровным почерком:

Since legs, nor hands, nor eyes, nor strong creative brain,
But weakness and decay oversway their power,
I am compelled forever to refrain
From everything but waiting for my hour.

Д. Ю. Бураго

Литература

- [1] *Бураго Ю. Д.* Александр Данилович Александров // Математический Петербург. История, наука, достопримечательности. СПб.: Образовательные проекты, 2018. С. 230.
- [2] *Вершик А. М.* Вспоминая А. Д. Александрова // Звезда. 2013. № 7. С. 194–205.
- [3] *Kutateladze S. K.* Traits. http://www.math.nsc.ru/LBRT/g2/english/ssk/memory_e.html
- [4] *Ладыженская О. А.* О жизни и деятельности Александра Даниловича Александрова // Академик Александр Данилович Александров / Под ред. Г. М. Иддиса и О. А. Ладыженской. М.: Наука, 2002.
- [5] Академик Александр Данилович Александров / Под ред. Г. М. Иддиса и О. А. Ладыженской. М.: Наука, 2002.
- [6] *Кутателадзе С. С.* Штрихи к биографии А. Д. Александрова // Владикавказ. матем. журн. 2001. Т. 3, № 2. С. 3–18.

Теорема Александрова о вложении многогранников

Введение

Нас будет интересовать *внутренняя метрика* (т. е. метрика, задающаяся длинами кратчайших путей между точками) на поверхности выпуклого многогранника. Напомним, что сумма углов при вершине многогранного выпуклого угла меньше 2π ; это утверждение можно найти в школьном учебнике [6, п. 325]. Нетрудно видеть, что поверхность выпуклого многогранника гомеоморфна сфере. Из вышесказанного получаем, что поверхность выпуклого многогранника, наделенная естественной внутренней метрикой, является примером *многогранной метрики на двумерной сфере с суммой углов вокруг каждой вершины, не превосходящей 2π* ; метрика называется *многогранной*, если сфера допускает такую триангуляцию, что каждый ее треугольник равен плоскому треугольнику.

Теорема Александрова гласит, что обратное верно, если включить в рассмотрение *дважды покрытые многоугольники*. Иначе говоря, мы допускаем многогранники, вырождающиеся в плоские многоугольники; под их поверхностью понимается результат склеивания по границе двух экземпляров одного и того же многоугольника.

Везде далее мы предполагаем, что многогранник может вырождаться в плоский многоугольник.

Теорема Александрова. 1. *Многогранная метрика на сфере изометрична поверхности выпуклого многогранника тогда и только тогда, когда сумма углов при любой ее вершине не превосходит 2π .*

2. *Более того, с точностью до конгруэнтности выпуклый многогранник определяется внутренней метрикой на своей поверхности.*

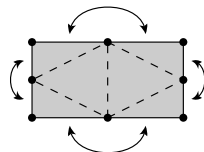
У Александра Даниловича много замечательных теорем, но с нашей точки зрения эта теорема особенно замечательна. При этом ее доказательство вполне элементарно, его можно объяснить любому, кто знаком с азами топологии.

Эта теорема имеет огромное число приложений. В частности, она используется в доказательстве ее обобщения [4], дающего полное описа-

ние внутренних метрик на сфере, изометричных замкнутым выпуклым поверхностям евклидова пространства (не обязательно многогранным). Последняя теорема является фундаментальным результатом в разделе современной математики — так называемой *александровской геометрии*.

Первая часть теоремы является основной, она называется *теоремой существования*. Вторая часть называется *теоремой единственности*; это лишь небольшая вариация теоремы Коши о многогранниках. (Есть еще и другая теорема А. Д. Александрова о единственности, обобщающая теорему Минковского о многогранниках.)

Согласно теореме выпуклый многогранник полностью определяется внутренней метрикой своей поверхности. Значит, зная метрику на поверхности, можно в принципе узнать, где пройдут ребра многогранника. Однако на деле это сделать непросто. Например, поверхность, склеенная из прямоугольника, как показано на картинке, определяет тетраэдр. При этом некоторые линии склеек оказываются внутри граней тетраэдра и часть ребер тетраэдра (штрихованные линии) вовсе не идут вдоль сторон прямоугольника.



Теорема доказана А. Д. Александровым в 1941 году [3]; мы приведем набросок его доказательства. Полное доказательство лучше всего написано в книжке самого Александра Даниловича [2]. Еще одно доказательство, основанное на деформации трехмерного многогранного пространства, было предложено Ю. А. Волковым в его кандидатской диссертации [8].

Пространства многогранников и метрик

Пространство многогранников. Обозначим через Φ пространство всех выпуклых многогранников в евклидовом пространстве, включая многогранники, вырождающиеся в плоский многоугольник. Многогранники в Φ будут рассматриваться с точностью до движения пространства, а все пространство Φ будет рассматриваться с естественной топологией (достаточно интуитивного понимания близости многогранников друг к другу).

Через Φ_n будем обозначать многогранники в Φ с ровно n вершинами. Поскольку любой многогранник в Φ имеет по крайней мере три вершины, пространство Φ разбивается на счетное число подмножеств $\Phi_3, \Phi_4, \dots$

Пространство многогранных метрик. Пространство всех многогранных метрик на сфере с суммой углов вокруг каждой точки не более 2π будет обозначаться Ψ . При этом метрики в Ψ будут рассматриваться с точностью до изометрии, а все пространство будет рассматриваться

с естественной топологией (опять же достаточно интуитивного понимания близости двух метрик).

Точка на сфере, вокруг которой сумма углов строго меньше 2π , будет называться *существенной вершиной*. Подмножество в Ψ , состоящее из метрик с ровно n существенными вершинами, будет обозначаться Ψ_n . Нетрудно видеть, что любая метрика в Ψ имеет по крайней мере три существенные вершины, так что Ψ разбивается на счетное число подмножеств $\Psi_3, \Psi_4, \dots$

От многогранника к его поверхности. Напомним, что поверхность выпуклого многогранника является сферой с такой многогранной метрикой, что сумма углов вокруг каждой точки не более 2π . Таким образом, переход от многогранника к его поверхности определяет отображение

$$\iota: \Phi \rightarrow \Psi.$$

Заметим также, что число вершин многогранника равно числу существенных вершин его поверхности. Иначе говоря, $\iota(\Phi_n) \subset \Psi_n$ для любого $n \geq 3$.

О доказательстве

Используя обозначения, введенные в предыдущем пункте, можно дать следующую более точную формулировку теоремы Александрова.

Переформулировка теоремы. Для любого целого $n \geq 3$ отображение ι является биекцией из Φ_n в Ψ_n .

Приведенный ниже набросок основан на оригинальном доказательстве А. Д. Александрова. Главное в нем — построение однопараметрического семейства многогранников, которое начинается с произвольного многогранника и заканчивается многогранником с поверхностью, изометричной данной. Подобный ход рассуждений называется *методом непрерывности*; он часто используется в теории дифференциальных уравнений.

Две части первой формулировки теоремы доказываются отдельно.

Часть 2. Докажем, что отображение $\iota: \Phi_n \rightarrow \Psi_n$ инъективно; иначе говоря, выпуклый многогранник определяется внутренней метрикой на своей поверхности с точностью до движения пространства.

Последнее утверждение является уточнением теоремы Коши о многогранниках. Его доказательство практически повторяет доказательство Коши. Теорема Коши утверждает, что грани многогранника вместе с правилом склейки полностью определяют выпуклый многогранник; ее доказательство приводится во многих классических популярных текстах [1], [5], [7].

Часть 1. Докажем, что отображение $\iota: \Phi_n \rightarrow \Psi_n$ сюръективно. Эта часть доказательства разбивается на следующие леммы.

Лемма. *Пространство Ψ_n связано для любого целого $n \geq 3$.*

Доказательство этой леммы несложное, но требует изобретательности; его можно провести явным построением непрерывного однопараметрического семейства метрик в Ψ_n , соединяющего две данные метрики. Такое семейство можно получить путем последовательного применения следующего построения и ему обратного.

Пусть M — сфера с метрикой из Ψ_n , а v и w — две существенные вершины в M . Разрежем M вдоль кратчайшей линии от v до w . Заметим, что кратчайшая не проходит через другие существенные вершины в M . Далее заметим, что существует трехпараметрическое семейство заплаток, которыми можно заклеить разрез так, чтобы полученная метрика осталась в Ψ_n ; в частности, полученная метрика все еще будет иметь ровно n существенных вершин (при этом вершины v и w могут перестать быть существенными).

Лемма. *Отображение $\iota: \Phi_n \rightarrow \Psi_n$ открыто, т. е. образ открытого множества в Φ_n открыт в Ψ_n .*

В частности, для любого $n \geq 3$ множество $\iota(\Phi_n)$ открыто в Ψ_n .

Это утверждение очень близко к так называемой теореме об инвариантности области, утверждающей, что непрерывное инъективное отображение между многообразиями равной размерности открыто.

Согласно части 1 отображение $\iota: \Phi_n \rightarrow \Psi_n$ инъективно. Доказательство теоремы об инвариантности области теоремы проходит в нашем случае, так как оба пространства Φ_n и Ψ_n имеют размерность $3n - 6$ и оба похожи на многообразия, хотя, формально говоря, таковыми не являются. На более техническом языке можно сказать, что оба пространства Φ_n и Ψ_n имеют естественную структуру $(3n - 6)$ -мерного орбиобразия и отображение ι уважает эту структуру.

Мы только убедимся в том, что размерность обоих пространств Φ_n и Ψ_n равна $3n - 6$.

Выберем многогранник P в Φ_n . Заметим, что P однозначно определяется $3n$ координатами своих n вершин. Мы можем считать, что первая вершина совпадает с началом координат, у второй две координаты нулевые, а у третьей одна координата равна нулю; таким образом, для описания многогранников, близких к P , достаточно $3n - 6$ параметров. При этом если многогранник не имеет симметрий, то это описание можно сделать взаимно однозначным; в этом случае окрестность точки P в Φ_n является $(3n - 6)$ -мерным многообразием. Если группа симметрий P нетривиальна, то данное описание не является взаимно однозначным, однако это не влияет на размерность Φ_n .

Случай многогранных метрик аналогичен. Необходимо построить разбиение сферы на плоские треугольники используя только существенные вершины. По формуле Эйлера, получаем, что число ребер в данном разбиении равно $3n - 6$. При этом длины ребер однозначно определяют метрику и небольшое изменение длин ребер дает метрику с теми же свойствами.

Лемма. *Отображение $\iota: \Phi_n \rightarrow \Psi_n$ замкнуто, то есть образ замкнутого множества в Φ_n замкнут в Ψ_n .*

В частности, для любого $n \geq 3$ множество $\iota(\Phi_n)$ замкнуто в Ψ_n .

Выберем замкнутое множество Z в Φ_n . Обозначим через $\bar{Z}$ замыкание множества Z в Φ ; заметим, что $Z = \Phi_n \cap \bar{Z}$. Предположим, что $P_1, P_2, \dots \in Z$ — последовательность многогранников, сходящихся к многограннику $P_\infty \in \bar{Z}$. Заметим, что $\iota(P_n)$ сходится к $\iota(P_\infty)$ в Ψ . В частности, $\iota(\bar{Z})$ замкнуто в Ψ .

Поскольку $\iota(\Phi_n) \subset \Psi_n$ для любого $n \geq 3$, получаем, что $\iota(Z) = \iota(\bar{Z}) \cap \Psi_n$, чем и завершается доказательство леммы.

Итак, множество $\iota(\Phi_n)$ непусто, замкнуто и открыто в Ψ_n , при этом Ψ_n связно для любого $n \geq 3$. Значит, $\iota(\Phi_n) = \Psi_n$, т. е. $\iota: \Phi_n \rightarrow \Psi_n$ сюръективно. $\square$

Мы благодарим С. Б. Александер, Ю. Д. Бураго и Ж. Цукахара за помощь.

Н. Д. Лебедева, А. М. Петрунин

Литература

- [1] Aigner M., Ziegler G. M. Proofs from THE BOOK. Springer-Verlag, 2004. Имеется перевод: Айгнер М., Циглер Г. Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней. М.: Мир, 2006.
- [2] Александров А. Д. Выпуклые многогранники. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
- [3] Александров А. Д. Существование выпуклого многогранника и выпуклой поверхности с заданной метрикой // Матем. сб. 1942. Т. 11, № 1–2. С. 15–65.
- [4] Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
- [5] Долбилин Н. П. Жемчужины теории многогранников. М.: МЦНМО, 2000.
- [6] Киселев А. П. Геометрия по Киселеву / Под ред. Н. А. Ершова, А. М. Петрунина, С. Л. Табачникова. arXiv preprint. 2018. arXiv:1806.06942 [math.HO]
- [7] Fuchs D., Tabachnikov S. Mathematical omnibus. AMS, 2007. Имеется перевод: Табачников С. Л., Фукс Д. Б. Математический дивертисмент. 30 лекций по классической математике. М.: МЦНМО, 2016.
- [8] Волков Ю. А. Существование многогранника с данной разверткой // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2018. Т. 476. С. 50–78.

Юрий Владимирович Линник

(1915–1972)

Ю. В. Линник добился исключительно сильных результатов в двух областях: в теории чисел и теории вероятностей. В теории чисел он разработал и применил новые оригинальные методы: *метод большого решета*, *эргодический* и *дисперсионный* методы. С помощью последнего он решил проблему Харди—Литтлвуда о представимости произвольного натурального числа суммой простого числа и двух квадратов.

Ю. В. Линник получил новое простое доказательство теоремы Виноградова о том, что любое достаточно большое нечетное число представляется в виде суммы трех простых (тернарная проблема Гольдбаха), установил равномерность распределения целых точек на сфере.

В области теории вероятностей и математической статистики наиболее важные его работы относятся к теории больших уклонений, к разложению вероятностных законов, к характеристизации распределений и статистическим задачам с мешающим параметром. Вместе со своими сотрудниками в середине 60-х годов он решил (в отрицательном смысле) знаменитую проблему Беренса—Фишера.

Юрий Владимирович Линник родился в г. Белая Церковь (ныне Украина) в семье (на тот момент) школьных учителей. В 1926 году семья переехала в Ленинград, где отец Юрия (физик-оптик, впоследствии ставший академиком АН СССР) работал в Государственном оптическом институте; в том же институте Юрий после школы был лабораторным ассистентом, затем поступил на физико-математический факультет ЛГУ, отучился три года, и перешел на новообразованный математико-механический факультет (по словам из его автобиографии — «чувствуя неодолимое влечение к высшей арифметике»). К окончанию университета в 1938 году он уже имел опубликованную работу.



Зимой 1939/40 года Ю. В. Линник был призван на советско-финскую войну, где служил командиром артиллерийского взвода до демобилизации в 1940 году. Вернувшись, он защитил диссертацию по арифметике квадратичных форм, за которую ему была присуждена (минуя кандидатскую степень) степень доктора (в 25 лет!).

В июле 1941 года Линник ушел в ополчение и участвовал в боях, но осенью того же года в связи с дистрофией был демобилизован и эвакуирован в Казань для работы в МИАН. Вероятно, это спасло ему жизнь – блокада Ленинграда немецкими войсками продолжалась 872 дня, более полумиллиона жителей умерли от голода. В 1943 году Юрий Владимирович нашел элементарное доказательство того, что любое достаточно большое натуральное число представляется в виде суммы семи кубов натуральных чисел (проблема Варинга). В 1944 году он вернулся в Ленинград и с этого времени совмещал работу в ЛОМИ и в ЛГУ, где в 1948 году создал кафедру теории вероятностей и математической статистики.

Когда в 60-х годах очередной административный приказ запретил сотрудникам Академии наук совместительство в вузах, Юрий Владимирович преподавал бесплатно в течение двух лет, вплоть до отмены этого нелепого запрета. Учеников своих Линник делил на два типа: одним он ставил конкретные задачи и строго следил за прогрессом, а другим в основном рассказывал о том, чем и почему занимается сам. Например, он мог послать телеграмму с просьбой перезвонить, затем по телефону звал прийти к нему домой и, быстро приготовив какую-нибудь еду, часами увлеченно рассказывал о своих новых результатах.

Трудолюбие его было необычайно, но труд этот был источником радости. Как-то раз, получив очередной выдающийся результат, он сказал: «Да, сложная теорема, три дня подряд доказывал». Он часто любил говорить, что, начиная новую область исследования,

...надлежит выбрать в ней трудную, но хорошо поставленную проблему; при попытках решить ее будут попутно появляться новые задачи, а сама эта проблема будет служить пробным камнем для возникающих методов. Путь этот постепенно приведет к созданию теории и методов общего характера.

Как-то он участвовал в научной конференции в Риге. Днем председательствовал, в перерывах и по вечерам беседовал с коллегами. В 11 часов ночи Юрий Владимирович позвонил Б. М. Бредихину: «У меня есть новая идея». Бредихин зашел к нему в номер гостиницы в момент, когда от него выходил один из участников конференции. А сам Бредихин вышел от хозяина в первом часу ночи и у дверей номера встретился со следующим приглашенным посетителем.

On the representation of large numbers as sums of seven cubes

U. V. Linnik (Leningrad)

§ 1

In the present paper we prove that $G(3) \leq 7$, i. e. every sufficiently large number is the sum of 7 non-negative cubes. This is an improvement of a result of E. Landau [1]: $G(3) \leq 8$. Our proof is based on some elementary identities as well as on our previous results on the theory of positive ternary quadratic forms. In particular, we use the following

Theorem [2]. Every positive ternary quadratic form $F(x, y, z)$ with odd invariants $[\Omega, 1]$ such that there exists a prime ω/Ω with $\left(\frac{F}{\omega}\right) = \left(\frac{-1}{\omega}\right)$ represents all sufficiently large numbers that are prime to 2Ω and satisfy the genus conditions of F^* .

In particular, such forms that $\left(\frac{F}{\omega}\right) = \left(\frac{-1}{\omega}\right)$ for any ω/Ω are called «convenient» [2]; they represent also every even number $m \equiv 0 \pmod{4}$ satisfying the conditions: $(m, \Omega) = 1$, $\left(\frac{m}{\omega}\right) = \left(\frac{-1}{\omega}\right)$, $m > c_0(\Omega)$.

As one can prove by the methods of [2], the reciprocal to convenient forms $f(x, y, z)$ have genus conditions modulus 8 only and represent, in particular, every number $m \equiv 0 \pmod{4}$, for which the congruence $m \equiv f(\xi, \eta, \zeta) \pmod{8}$ is solvable and $m \equiv 1 \pmod{5}$, when $m > c_0(\Omega)$ and $\Omega \equiv 1 \pmod{5}$. Such forms will be used here **. Such are, in particular, the forms

$$f(x, y, z) = A_1^2 x^2 + A_2^2 y^2 + A_3^2 z^2,$$

where A_1, A_2, A_3 are primes satisfying the conditions:

$$\left(\frac{A_1 A_2}{A_3}\right) = \left(\frac{-1}{A_3}\right); \quad \left(\frac{A_1 A_3}{A_2}\right) = \left(\frac{-1}{A_2}\right); \quad \left(\frac{A_2 A_3}{A_1}\right) = \left(\frac{-1}{A_1}\right), \quad (1)$$

and τ_1, τ_2, τ_3 are odd; $A_1 \equiv A_2 \equiv A_3 \equiv 1 \pmod{5}$.

* As for G. Pall remarks (Math. Rev., November 1941), see [4].

** To prove it by the methods of [2] the following quaternion equations should be considered: $b + L = Q \cdot P \cdot X$ where $L^2 = -\Omega m$; Norm $P = \Omega$; Norm $Q = 5^k$; $b \equiv \pm 1 \pmod{5}$; $b \equiv 0 \pmod{\Omega}$.

Начинал Линник с теории чисел, но потом стал работать и в теории вероятностей. Одной из причин был совет А. Я. Хинчина: «Работать нужно по крайней мере в двух разных областях, чтобы, когда не получается в одной области, переключаться на другую; и такой дополнительной областью могла бы быть теория вероятностей». И в теории чисел, и в теории вероятностей Ю. В. Линника привлекали трудные аналитические проблемы, которые он с успехом решал. Здесь уместна будет цитата из предисловия А. Вейля к его «Основам теории чисел»:

Уже давно (после основополагающих работ Хинчина и Колмогорова) стало ясно, что теория вероятностей — это прикладной анализ, другими словами, анализ, применяемый к некоторым вполне определенным типам задач. В точности то же самое можно сказать об аналитической теории чисел.

Ю. В. Линник интересовался военной историей, аккуратно и настойчиво собирал военные мемуары, литературу по истории. Его познания в этой области были весьма обширны, и благодаря своей необыкновенной памяти он помнил точные даты огромного числа событий. Он также был депутатом Ленинградского городского совета, хотя и не состоял в партии.

Ю. В. Линником и его сотрудниками выполнены циклы работ по применению статистических и вероятностных методов для практических приложений: к анализу режимов энергосистем, к исследованию качества шлифованной поверхности, к теории гироскопов.

Вместе с коллегой он написал «аксиоматическую теорию партии».

Аксиома: от каждого по способностям, каждому по потребностям.

Теорема существования: рассмотрим, например, кладбище — обе части аксиомы, очевидно, удовлетворяются.

Теорема: генеральная линия партии — прямая. Доказательство: действительно, она вся состоит из точек перегиба.

У Ю. В. Линника были многочисленные контакты с зарубежными коллегами, он любил путешествовать. Юрий Владимирович свободно владел английским, французским (по его словам, «все же хуже, чем русским»), немецким, говорил на украинском, польском, сербском, итальянском, любил читать книги на иностранных языках и сам писал остроумные стихи на русском, немецком и французском языках.

В 1953 году он был избран членом-корреспондентом, в 1964 году — академиком АН СССР. Юрий Владимирович умер в июне 1972 года от инфаркта.

Н. С. Калинин

Литература

- [1] *Ибрагимов И. А., Мороз Б. З.* О жизни и творчестве Юрия Владимировича Линника // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, № 3. С. 7–19.
- [2] *Ибрагимов И. А. Ю. В. Линник.* Некоторые работы 50-х годов // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3, вып. 3. С. 206–215.
- [3] *Ибрагимов И. А., Лозинский С. М., Малышев А. В., Петров В. В., Прохоров Ю. В., Саогов Н. А., Фаддеев Д. К.* Юрий Владимирович Линник (некролог) // Успехи матем. наук. 1973. Т. 28, вып. 2. С. 197–213.
- [4] *Никитин Я. Ю., Романовский И. В.* К 100-летию со дня рождения Юрия Владимировича Линника // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2015. Т. 2, вып. 3. С. 487–491.
- [5] *Ибрагимов И. И., Малышев А. В., Петров В. В.* Юрий Владимирович Линник (к пятидесятилетию со дня рождения) // Успехи матем. наук. 1965. Т. 20, вып. 2. С. 221–236.
- [6] *Хинчин А. Я.* Три жемчужины теории чисел. 3-е изд. / под ред. А. Б. Шидловского. М.: Наука, 2006.
- [7] *Каган А. М.* Как важно знать достаточные статистики: история моего знакомства с Юрием Владимировичем Линником (к 90-летию со дня рождения Ю. В. Линника) // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. 2005. Вып. 4. С. 34–37.

Владимир Абрамович Рохлин

(1919–1984)

Основные результаты В. А. Рохлина лежат в маломерной топологии, топологии вещественных алгебраических многообразий и теории меры. В теории меры Рохлин определил пространства Лебега и развил теорию их измеримых разбиений. Также он получил значимые результаты в теории энтропии.

В. А. Рохлин ввел группы кобордизмов и вычислил их в размерностях 3 и 4, открыл делимость на 16 сигнатуры замкнутых спинорных четырехмерных многообразий, доказал в совместной работе с А. С. Шварцем комбинаторную инвариантность классов Понтрягина и в совместной работе с С. П. Новиковым установил аддитивность сигнатуры.

Рохлин ввел технику алгебраической топологии в геометрию вещественных алгебраических многообразий, что позволило ему доказать сравнение для эйлеровой характеристики максимальных вещественных алгебраических многообразий.

Владимир Абрамович Рохлин родился в Баку. Его мать, Генриетта Эммануиловна Левенсон, происходила из обеспеченной еврейской семьи, получила медицинское европейское образование и работала начальником санитарно-эпидемиологической станции Баку. Там же она была убита в 1923 году во время массовых волнений, вызванных эпидемией. Ее сводным братом был известный детский писатель К. И. Чуковский.

Отец В. А. Рохлина, Абрам Вениаминович Рохлин, экономист и член РСДРП, во время революции публично выступал против большевиков, в 1918 году был комиссаром по продовольствию эсеров-меньшевистского правительства «Диктатуры Центрокаспия» в Баку. Позже он был гласным Думы при Демократической партии турецких федералистов «Мусават».



В 1920 году он вступил в ВКП(б), но был исключен при чистке в 1921 году. В 1930 году А. В. Рохлин был сослан в Казахстан, затем арестован и казнен в 1941 году.

В 1934 году пятнадцатилетний В. А. Рохлин экстерном закончил с отличием школу в Алма-Ате и в 1935 году был принят на механико-математический факультет Московского государственного университета (мехмат). Учился он у классиков: П. С. Александрова, А. Н. Колмогорова, И. М. Гельфанда, Л. А. Люстерника, Л. С. Понтрягина и А. И. Плеснера.

Все они дали Рохлину рекомендации в аспирантуру. Уже в свои студенческие годы В. А. Рохлин опубликовал две научные работы. Кроме того, в 1940 году Рохлин написал большой обзор о гомотопических группах и записал лекции Плеснера по спектральной теории операторов гильбертовых пространств. Эти два обзора (второй — в соавторстве с Плеснером) были опубликованы в «Успехах математических наук», одном из главных математических журналов СССР, лишь в 1946 году, когда В. А. Рохлин сидел в лагере, то есть без его участия. По этим двум работам учились несколько поколений математиков.

Дипломная работа Рохлина была посвящена измеримым разбиениям и положила начало серии его известных работ по основам теории меры.

В начале войны, в 1941 году, В. А. Рохлин был на первом курсе аспирантуры. Он был отправлен в ополчение, которое сразу же попало в так называемый вяземский котел: под Вязьмой большая группа войск (более полумиллиона человек) попала в окружение и была разгромлена. Раненый в обе ноги, Рохлин был оставлен в деревне на попечение местных. Раны не заживали, его переместили в местную больницу. Когда территория была оккупирована немцами, Рохлина арестовали и отправили в лагерь для военнопленных. Там он заболел тифом, выздоровел, пытался бежать несколько раз, был перемещен в другой лагерь в Белоруссию, а затем в Польшу.

Рохлину удалось скрыть свою национальность. Он рассказывал, что как-то к ним в лагерь нагрянул специалист, который мог по форме черепа опознать евреев. Специалист со вздохом сказал Рохлину, что у русских такое разнообразие черепов, что он ничего ни про кого сказать не может. Рохлин с детства свободно говорил по-немецки, и охранники охотно с ним болтали. Отступающие немцы таскали пленных за собой, но однажды пленные узнали, что завтра немцы снимаются и отступают дальше, а пленных расстреляют. Их барак охранял один солдат; пленные его убили и ушли навстречу советским войскам.

Военные действия происходили уже на территории Германии, и советской армии нужны были переводчики с немецкого; в этом качестве Рохлин и пригодился. В последний день войны Рохлина с другими бывшими

военнопленными погрузили в теплушки и под конвоем повезли в Коми на государственную проверку. Их допрашивали с целью выяснить, не сотрудничали ли они с немцами во время плена. Логика советских властей предписывала отправить их на лесоповал. Если будут ударно работать и выполнять норму — значит свои. Если же будут от работы отлынивать — значит предатели, должны получить по заслугам. Конвою же было сказано, что их подопечные — власовцы, и обращались с ними сообразно.

Позже Рохлин рассказывал, что на допросах во время проверки он утверждал, что не помнит никого из немецких лагерей, потому что был тяжело ранен. Это гарантировало, что его показания не будут противоречить ничьим другим и он никого не оговорит. Большинство московских математиков были в то время уверены, что Рохлин погиб во время войны, но он смог послать весточку о себе. А. Н. Колмогоров и Л. С. Понтрягин написали письмо начальнику НКВД с просьбой освободить В. А. Рохлина. К тому времени, как это письмо дошло, с Рохлина уже были сняты обвинения и, как часто делали, его определили служить в охрану.

Вот два фрагмента переписки математиков с работниками госбезопасности, касающейся Рохлина.

Народному комиссару внутренних дел СССР
тов. Круглову
от лауреатов Сталинской премии
академика А. Н. Колмогорова
и члена-корреспондента АН СССР Л. С. Понтрягина

Настоящим просим Вас обратить внимание на судьбу Владимира Абрамовича Рохлина, возвратившегося из немецкого лагеря для пленных и находящегося в настоящее время в Коми.

[...] мы считаем, что в интересах развития советской математики было бы крайне желательно предоставить В. А. Рохлину возможность в ближайшее время вернуться в аспирантуру, для продолжения научной работы под нашим руководством.

13 февраля 1946 г.

Директору Института Математики
Профессору В. В. Степанову

По вашему письму от 5/09 1946 г., в отношении возвращения Рохлина Владимира Абрамовича в Московский университет, ГУЛАГом МВД СССР дано указание об увольнении из охраны Рохлина В. А. и направлении в Ваше распоряжение.

Начальник управления охраны и режима ГУЛАГа МВД СССР
полковник И. Смирнов.
4 декабря 1946 г.

Через войну и лагерь В. А. Рохлин пронес тетрадь, где он записывал свои идеи и планы, и в течение полутора лет после прохождения проверки он защитил обе диссертации (кандидатскую и докторскую). Л. С. Понтрягин был слеп и этим аргументировал необходимость взять Рохлина своим ассистентом и секретарем в Московский математический институт им. Стеклова, где Рохлин и работал вплоть до защиты докторской диссертации.

Редактируя статьи Понтрягина по топологии, Рохлин заинтересовался вопросами вычисления гомотопических групп сфер геометрическим методом (безынвариантным, как называл его Понтрягин) и вычислил третью стабильную гомотопическую группу сфер. Затем последовали другие глубокие результаты в алгебраической топологии, о которых написано в [1] и прилагающейся математической статье.

Во второй половине сороковых годов А. Н. Колмогоров, Л. С. Понтрягин, И. М. Гельфанд, А. И. Плеснер писали восторженные отзывы о диссертации В. А. Рохлина, его статьях и педагогической деятельности. Однако начало 50-х годов было отмечено в Советском Союзе антисемитской кампанией, и после защиты докторской диссертации Рохлин был уволен из Института Стеклова (ему сказали, что не смогут там его оставить, даже если он вычислит все гомотопические группы всех сфер).

В. А. Рохлину пришлось покинуть Москву вместе с семьей. Сначала они переехали в Архангельск, потом в Иваново, потом в Коломну (недалеко от Москвы, так что можно было ездить на семинары), где Рохлин был профессором математики в педагогическом и техническом институтах с большой педагогической нагрузкой.

Упомянем о его известном вкладе в теорию динамических систем — колмогоровской энтропии, возникшей как результат исправления ошибки, которую Рохлин нашел в работах Колмогорова.

В это время Рохлин был яркой фигурой в математическом сообществе, и его влияние на многих молодых математиков (С. П. Новиков, Я. Г. Синай, В. И. Арнольд и др.) было велико. Но только в 1960 году Рохлин получил работу, соответствующую его статусу — ректор Ленинградского государственного университета, геометр А. Д. Александров, пригласил его в Ленинград.

С 1960 до 1980 года В. А. Рохлин был профессором в Ленинградском университете. Он немедленно стал одним из неформальных лидеров ленинградских математиков. В частности, сразу по приезде он организовал два семинара, топологический и эргодический, привлекавшие лучших студентов, многие из которых позднее стали выдающимися учеными.

В Ленинграде В. А. Рохлин участвовал в модернизации программы математико-механического факультета, ввел обязательный курс топологии,

интересующийся Дмитрий Андреевич,
спешу ответить на Ваше письмо от 24.4, которое
пришло давно сегодня. Хотел, что и мне
дойдет не очень скоро.

Прежде всего я хочу поблагодарить Вас
за широкую информацию. Здесь у нас раз-
вивается деятельность, которая сильно с ней
пересекается, и некоторые Ваши результаты
уже доказаны. Так, В. Харламов (мой
дипломник) доказал, что поверхность,
полученная из нее сравнением типа Армстронга
и, в частности, доказал, что genus некото-
рой поверхности равен нулю (с RP^3)
не превосходит 10. В действительности для
поверхностей genus n и сравнения Вашего
типа (тип 8). Дело в том, что мне удалось
найти более доказательство сравнения RP^3
тип 8; не исключено, что уже некая
связь с тем, что поверхность RP^3 имеет
первое число Бетти, тем самым RP^3
и доказательство некоторого специального
свойства; в частности, оно применимо
к поверхности в RP^3 .

Иногда и другие результаты. Я часто
обсуждал все это с Вами, как и с некоторым
другим Харламов, который, впрочем, не совсем
уверен, и Ваш проект совершенно действителен,
но перспектива такого события пре-
восходит мои силы, тем более, что я и без
того беспрерывно пишу (мы с Д. Фуксом
закончили закончить и сейчас пишу книгу
по топологии). Могу ли Вы прислать в
Ленинград? Иной номер 448158. Встреча
6.5-12.5 я (предположительно) буду в Москве.

Хотел, что кто-то посоветует Вам эки-
пировать Ваше дело; я бы с ним по-
говорил. Во всяком случае, Вашему делу
нужно больше, чем просто денег (многоли-
ней) доказательство, тем лучше, со специ-

альными инвариантами, как бы и очень ин-
тересным топологически.
С Орлом и Деметрием Тимомской конферен-
ции у меня все вышло хорошо.
Сам я приглашений не получал. Думаю,
что это объясняется отсутствием интереса
и что Ваши усилия скорее всего
послужат доказательством на доказательство.

С самыми наилучшими пожеланиями

Ваш В. А. Рохлин

2 мая 1972.

Письмо В. А. Рохлина Д. А. Гудкову. В нем Рохлин рассказывает о новых своих (и его ученика В. М. Харламова) результатах по топологии вещественных алгебраических многообразий и упоминает о своей работе, совместно с Д. Б. Фуком, над учебником по гомотопической топологии (выйдет в свет в 1977 году).

первый в стране и, возможно, в мире. Его аспиранты поколение за поколением вели кружки для студентов. Топологический семинар В. А. Рохлина долгое время был одним из главных математических семинаров СССР в одном ряду с семинарами Арнольда, Гельфанда и др.

В. А. Рохлин был прекрасным лектором и щедро делился со своими студентами новыми идеями и целыми научными направлениями. Он всегда был элегантным, любезным и вежливым, пунктуальным, ироничным и остроумным.

У Рохлина была сложная и трагичная жизнь. Его друзьям и ученикам он запомнился стойкими моральными принципами, глубокими теоремами и тем, что оставил после себя целое поколение сильных математиков — ленинградскую топологическую школу.

Н. С. Калинин

Литература

- [1] *Рохлин В. А. Избранные работы. Воспоминания о В. А. Рохлине. Материалы к биографии.* М.: МЦНМО, 2010.
- [2] *Арнольд В. И., Вершик А. М., Виро О. Я., Колмогоров А. Н., Новиков С. П., Синай Я. Г., Фукс Д. Б. Владимир Абрамович Рохлин (некролог) // Успехи матем. наук.* 1986. Т. 41, вып. 3. С. 159–163.
- [3] *À la recherche de la topologie perdue / Ed. by L. Guillou, A. Marin.* Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser, 1986. (Progress in Math. Vol. 62.) Имеется перевод: *В поисках утраченной топологии / Под ред. Л. Гийу и А. Марена.* М.: Мир, 1989.
- [4] *Topology, ergodic theory, real algebraic geometry. Rokhlin's memorial / Ed. by V. Turaev, A. Vershik.* Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2001. (AMS Trans. Ser. 2. Vol. 202.)
- [5] *Полотовский Г. М. Дмитрий Андреевич Гудков: документы — переписка — воспоминания.* Н. Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2018.
- [6] *Вершик А. М. В. А. Рохлин в Ленинграде (1960–1984). Добавление ко второму изданию (2009 год).*
<https://mathsoc.spb.ru/pantheon/rokhlin/vershik1.pdf>;
<https://mathsoc.spb.ru/pantheon/rokhlin/vershik2.pdf>.

Теоремы Рохлина о сигнатуре

Диапазон рохлинской математики. В. А. Рохлин внес выдающийся вклад в несколько областей: в теорию меры, эргодическую теорию, топологию и вещественную алгебраическую геометрию. Примерно раз в пять лет он менял область своих исследований. В каждый из таких периодов ему удалось получить фундаментальные результаты. Затем он обращался к новой области, привлеченный трудной проблемой.

Первой областью Рохлина были теория меры и эргодическая теория. Результаты его кандидатской диссертации (1947) представлены в статье «Об основных понятиях теории меры». Его докторская диссертация, защищенная вскоре после кандидатской (1951), называлась «О важнейших метрических классах динамических систем». Первый период работы Рохлина в эргодической теории окончился в 1950 году. В конце 50-х годов он вернулся к эргодической теории в исследованиях, посвященных энтропии динамических систем. Первая же половина пятидесятых — время топологии.

Исходная задача. Когда Рохлин обратился к топологии, его целью было найти третью стабильную гомотопическую группу сфер, то есть $\pi_{n+3}(S^n)$ при $n \geq 5$. Ранее Понтрягин вычислил группы $\pi_{n+2}(S^n)$ с $n \geq 2$ и $\pi_{n+1}(S^n)$ с $n \geq 3$, используя свой метод, связавший теорию гомотопий и дифференциальную топологию. Технически вычисления Понтрягина сводились к изучению кривых и поверхностей, лежащих в евклидовом пространстве и снабженных тривиализацией нормального расслоения. Топологии трех- и четырехмерных гладких многообразий, необходимой для аналогичного вычисления групп $\pi_{n+3}(S^n)$, еще не было.

Основополагающие результаты. С поразительным *tour de force* Рохлин развил технику, позволившую ему доказать, что $\pi_{n+3}(S^n) = \mathbb{Z}/24$ при $n \geq 5$, и оказался в новом кругу идей, проблем и основополагающих открытий. Ниже мы проследим результаты, опубликованные Рохлиным в четы-

рех заметках 1951–52 годов, в которых он вычислил $\pi_{n+3}(S^n)$. Эти результаты выросли из вычисления групп кобордизмов Ω_3 и Ω_4 . (Понятие кобордизма и группы Ω_n и $\mathfrak{N}_n$ были введены Рохлиным в этих же заметках.)

- *Всякое ориентированное замкнутое гладкое трехмерное многообразие ограничивает компактное ориентированное четырехмерное многообразие. (Другими словами, $\Omega_3 = 0$.)*

Рохлин также ввел сигнатуру $\sigma(M)$ ориентированного замкнутого $4n$ -мерного многообразия M . Сигнатура $\sigma(M)$ — это разность между числом положительных и числом отрицательных коэффициентов в диагонализации формы пересечения $H_{2n}(M; \mathbb{R}) \times H_{2n}(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Открытие Рохлиным приведенных ниже свойств сигнатуры сделало ее одним из основных инвариантов топологии многообразий.

- *Сигнатура ориентированного гладкого замкнутого $4n$ -мерного многообразия равна нулю, если это многообразие является краем ориентированного гладкого компактного $(4n+1)$ -многообразия. (Другими словами, сигнатура задает гомоморфизм $\Omega_{4n} \rightarrow \mathbb{Z}$.)*
- *Ориентированное гладкое замкнутое четырехмерное многообразие M ограничивает компактное ориентированное пятимерное многообразие тогда и только тогда, когда $\sigma(M) = 0$. Более того, ориентированное гладкое замкнутое четырехмерное многообразие M кобордантно несвязной сумме $\sigma(M)$ копий комплексной проективной плоскости. (В частности, $\Omega_4 = \mathbb{Z}$.)*
- *Сигнатура ориентированного гладкого замкнутого четырехмерного многообразия M равна одной трети числа Понтрягина $p_1(M)[M]$.*
- *Сигнатура ориентированного гладкого замкнутого четырехмерного многообразия M с $w_2(M) = 0$ делится на 16.*

Большинство этих достижений часто приписывают другим авторам, открывшим их позже. Однако последнее утверждение из нашего списка стоит здесь особняком. Именно его обычно называют *теоремой Рохлина* и рассматривают как наиболее знаменитый из его результатов. Эта теорема не раз сыграла значительную роль в последующем развитии топологии. Ниже мы рассмотрим несколько таких случаев, представляющихся нам наиболее важными.

Переформулировки теоремы Рохлина. Для неспециалиста утверждение теоремы Рохлина звучит несколько загадочно и чересчур технически. Вглядымся в него более пристально. Теорема устанавливает соотношение между двумя основными характеристиками ориентированного гладкого замкнутого четырехмерного многообразия M — его вторым

классом Штифеля—Уитни $w_2(M)$ и сигнатурой $\sigma(M)$. Утверждается, что если $w_2(M) = 0$, то $\sigma(M) \equiv 0 \pmod{16}$.

Что же означает условие $w_2(M) = 0$? Классы Штифеля—Уитни $w_k(M) \in H^k(M; \mathbb{Z}/2)$ измеряют сложность касательного расслоения TM . Ориентируемость многообразия M означает, что $w_1(M) = 0$. Для ориентированного гладкого замкнутого четырехмерного многообразия M класс $w_2(M)$ является единственным препятствием к тому, чтобы M оказалось почти параллелизуемым, т. е. допускающим четыре касательных векторных поля, линейно независимых во всех точках, кроме, быть может, одной. Имея это в виду, мы можем переформулировать теорему Рохлина следующим образом.

- Сигнатура почти параллелизуемого гладкого замкнутого четырехмерного многообразия делится на 16.

Гладкое замкнутое многообразие M допускает спинорную структуру в том и только том случае, когда $w_1(M) = 0$ и $w_2(M) = 0$. Поэтому теорему Рохлина можно переформулировать еще и следующим образом.

- Сигнатура замкнутого гладкого четырехмерного спинорного многообразия делится на 16.

Для ориентируемого гладкого замкнутого четырехмерного многообразия M условие $w_2(M) = 0$ выполнено в том и только том случае, когда $\mathbb{Z}/2$ -форма пересечения $H_2(M; \mathbb{Z}/2) \times H_2(M; \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ четна, т. е. четен индекс самопересечения любой замкнутой поверхности, вложенной в M . Эта интерпретация не зависит от гладкой структуры или касательного пучка многообразия M . И здесь мы получаем еще одну переформулировку.

- Если ориентированное гладкое замкнутое четырехмерное многообразие M имеет четную $\mathbb{Z}/2$ -форму пересечения, то $\sigma(M) \equiv 0 \pmod{16}$.

Причины делимости: топология или алгебра. Делимость какого-то целого числа на 16 выглядит довольно загадочно. Шестнадцать — большое составное натуральное число. Как мы увидим, половина этой делимости, а именно делимость на 8, может быть получена чисто алгебраическими методами из простых топологических наблюдений, которые не являются специфическими для гладких четырехмерных многообразий. Напротив, последняя двойка, входящая множителем в шестнадцать, представляет решающее препятствие к тому, чтобы топологическое многообразие обладало гладкой структурой.

В силу двойственности Пуанкаре форма пересечений $H_2(M) \times H_2(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ ориентированного замкнутого четырехмерного многообразия M является целочисленной симметрической унимодулярной формой. Если $\omega_2(M) = 0$, то эта форма четна, поскольку ее приведение по модулю 2 есть часть $\mathbb{Z}/2$ -формы пересечения, четной при $\omega_2(M) = 0$. Сигнатура целочисленной симметрической унимодулярной четной формы делится на 8. Это чисто алгебраический факт.

Теорема Рохлина утверждает, что $\sigma(M)$ делится не только на 8, что гарантирует алгебра, но и на 16. Таким образом, теорема Рохлина налагает ограничение на симметрические унимодулярные четные формы, реализуемые как форма пересечений ориентированного замкнутого гладкого четырехмерного многообразия M с $\omega_2(M) = 0$. А именно, сигнатура реализуемой формы не может быть сравнима с 8 по модулю 16. Например, форма E_8 (знаменитая целочисленная унимодулярная четная форма ранга и сигнатуры 8) оказывается запрещенной.

Препятствия к гладкости или кусочной линейности четырехмерного многообразия. Предположение о гладкости многообразия M в теореме Рохлина является существенным. Как было показано М. Фридманом (1982), всякую унимодулярную целочисленную симметрическую форму можно реализовать как форму пересечений ориентированного замкнутого односвязного четырехмерного топологического многообразия. Если соответствующая форма пересечения четна и ее сигнатура не делится на 16 (как, скажем, в случае формы E_8), то теорема Рохлина запрещает существование на таком многообразии гладкой структуры. В младших размерностях этот эффект не наблюдается: при $n < 4$ всякое n -мерное многообразие допускает гладкую структуру.

В размерности четыре сглаживаемость эквивалентна существованию кусочно линейной структуры (PL-структуры). Таким образом, теорема Рохлина дает препятствие и к существованию PL-структуры.

Ключ к PL в старших размерностях. В 80-х годах С. Дональдсон обнаружил многочисленные новые препятствия к существованию кусочно линейных или гладких структур на четырехмерных многообразиях. Однако новые препятствия оказались менее стабильными в следующем смысле. Теорема Рохлина формулируется в терминах, инвариантных относительно кобордизмов, и может быть поднята до результатов в высших размерностях. Новые препятствия этим свойством не обладают.

Например, пусть M — замкнутое односвязное четырехмерное многообразие с сигнатурой, не делящейся на 16 (и, следовательно, не допускающее PL-структуры по теореме Рохлина). Тогда $M \times (S^1)^n$ для всякого $n > 0$ тоже не допускает PL-структуры. Это опять же выводится из теоремы Рохлина.

Полные препятствия к существованию или эквивалентности PL-структур на многообразиях размерности ≥ 5 (полученные Р. Кирби и Л. Зибенманном в 70-е годы) также опираются на теорему Рохлина.

Еще о теореме Рохлина. Ввиду ограниченного объема публикации, наше изложение весьма неполно. Мы не упомянули о многочисленных обобщениях теоремы Рохлина, ее приложениях, доказательствах, заблуждениях и т. п. Все это может быть найдено в заметках [1], а также в книге [2].

О. Я. Виро, С. М. Финашин, В. М. Харламов

Литература

- [1] *Finashin S., Kharlamov V.* A glimpse into Rokhlin's Signature Divisibility Theorem. arXiv preprint. 2012. arXiv:2012.06389 [math.GT].
- [2] *Guillou L., Marin A.* A la recherche de la topologie perdue. I Du côté de chez Rohlin. II Le côté de Casson, Birkhäuser, 1986. Имеется перевод: В поисках утраченной топологии / Под ред. Л. Гийу и А. Марена. М.: Мир, 1989).

Виктор Абрамович Залгаллер

(1920–2020)

Виктор Абрамович Залгаллер — человек драматической, но счастливой судьбы, фронтовик-связист, прошедший всю войну, от Ленинграда до Рюгена, яркий ученый геометрической школы А. Д. Александрова, автор не только теоретических, но и прикладных инженерных работ, выдающийся педагог, один из основателей физико-математической школы № 239, человек исключительной нравственности и принципиальности, судьба которого тесно связана с математико-механическим факультетом ЛГУ (ныне СПбГУ).

В геометрии основными направлениями исследований Виктора Абрамовича были теория выпуклых тел, теория выпуклых поверхностей, внутренняя геометрия нерегулярных поверхностей, многогранники и экстремальные задачи. Не менее важными в его исследованиях были прикладные задачи, в первую очередь методы рационального раскроя материалов.

Виктор Абрамович родился 25 декабря 1920 года под Новгородом, в семье инженера А. Л. Залгаллера и адвоката Т. М. Шаббад-Залгаллер. Ораторские способности Татьяны Марковны еще сыграют свою роль — она обучит сына красноречию, и Виктор Абрамович станет лектором-легендой ленинградского матмеха. Когда в 1982 году его попросили прочесть (очередную в сетке часов пятого курса) лекцию о методике преподавания математики, в большую поточную аудиторию петергофского здания матмеха пришли и студенты, и аспиранты, и преподаватели — все. Это был настоящий бенефис В. А., он одновременно и рассказывал, и показывал, как надо. «Чтобы слушатели взбодрились, — сказал В. А. среди прочего, — обязательно расскажите в середине лекции смешную байку или анекдот. Чем больше слушателей,



тем анекдот должен быть ярче. А в маленькой аудитории достаточно иронической улыбки». После лекции зал взорвался бурными аплодисментами, Виктор Абрамович, довольный, раскланивался.

Судьба Виктора Абрамовича (он принадлежал к поколению, выбитому в войну почти полностью) не была простой. С первых дней войны он добровольцем вступил в ряды народного ополчения и почти сразу был отправлен на фронт. Почти всю войну он был связистом. Боевой путь был нелегким: оборона Ленинграда, Ораниенбаумский плацдарм, ранение при снятии блокады, штурм Выборга, бои в Прибалтике, штурм Данцига, выход на Эльбу... Виктор Абрамович был награжден орденом Красной Звезды, медалью «За отвагу», тремя медалями «За боевые заслуги», медалью «За оборону Ленинграда» и другими. Закончил войну в звании старшего сержанта. Его старший брат, лейтенант Леонид Залгаллер, погиб в 1942 году, попав в окружение под Мясным Бором. Виктор Абрамович оставил замечательные военные мемуары «Быт войны». Вот короткий отрывок, переносящий читателя в те дни:



...несем Бориса на носилках. В рану видно, как бьется сердце. Прикрываем ватой. У носилок нас трое. Уже открытые поля. Ни души. Зной. Двое несут, один отдыхает, меняемся. Трижды заходит немецкий самолет, стараясь расстрелять на солнечной дороге длинную тень носилок. «Вам трудно нести. Я спою». И он поет: «Руки, две больших и теплых птицы, как вы летали, как озаряли все вокруг...» Голос пропадает, когда он теряет сознание, и появляется снова... «Руки, как вы легко могли обвиться...»

После войны Виктор Абрамович вернулся на матмех, который с отличием окончил в 1948 году. В том же году поступил на работу в ЛОМИ (ныне — ПОМИ РАН), где проработал более 50 лет.

Виктор Абрамович был выдающимся преподавателем с необычайной способностью наглядно демонстрировать самые сложные идеи. Его отличало особенное дружелюбие по отношению к студентам и вообще молодежи. Преподавать он начал в кружке Дворца пионеров.

«У меня были неплохие мальчики, — вспоминал Виктор Абрамович, — Юра Решетняк, Гаральд Натансон, Миша Соломяк — все это мальчики из моего кружка». (Все трое впоследствии стали крупными математиками.)

И далее Виктор Абрамович всегда любил работать со школьниками и студентами. Он был в числе организаторов специализированной математической школы № 239, для которой разработал первую учебную программу и в которой сам преподавал.

В своей монографии «Выпуклые многогранники с правильными гранями» автор благодарит двенадцать учеников 239 школы, помогавших ему в вычислениях. Это редкий случай благодарности школьникам в серьезном научном труде.

История этой задачи такова. Любому математику, знающему о пяти платоновых телах, приходит в голову вопрос: а какие бывают (выпуклые) многогранники, у которых все грани — правильные многоугольники, но не обязательно одинаковые между собой? Этот вопрос гораздо сложнее, чем может показаться на первый взгляд, и В. А. Залгаллеру принадлежит его решение: существует ровно 28 простых (не составленных из других) правильных многогранников, не считая призм и антипризм. В. А. решил привлечь школьников к решению этой задачи.

Борис Белинский, один из участников этого проекта, вспоминает:

Он как сказку рассказывал, так было все понятно. Я помню его пример о том, как надо привязать собаку, чтобы она могла охранять в точности половину круга. Позже я узнал, что это — часть серьезной геометрической проблемы. А потом Виктор Абрамович затеял проект по описанию правильных многогранников, в котором я имел счастье участвовать. Вот тогда мы осознали, что одно дело — получить пятерку за то, что тебе объяснил учитель, а другое — пытаться сделать то, что до тебя никто не делал. И появилась статья, а потом книга, где против некоторых лемм в скобках были наши фамилии. Присутствующие знают это ощущение — впервые увидеть свое имя напечатанным.

Первые научные работы были написаны В. А. Залгаллером под влиянием его учителя Александра Даниловича Александрова. В. А. пришел в школу Александрова в период ее расцвета. У нас нет цели ни охватить рассказом все научное наследие Виктора Абрамовича, ни даже описать его главные достижения. Остановимся на двух его работах, настолько наглядных, что их формулировки понятны неспециалисту.

Один из результатов Залгаллера (совместный с Ю. Д. Бурого), навеянный ранними теоремами Дж. Нэша, состоит в том, что каждое двумерное многообразие с полиэдральной метрикой допускает кусочно линейное изометрическое погружение в трехмерное евклидово пространство. Переупрощая, можно сказать, что если у вас есть набор бумажных (то есть нерастяжимых и несжимаемых) треугольников с правилами склейки, которые задают поверхность — сферу с ручками и пленками, то эти склейки можно реализовать в трехмерном пространстве, если разрешить



В. А. Залгаллер с внуком Васей

сгибать треугольники гармошкой и разрешить самопересечения поверхности.

Для доказательства потребовался следующий нетривиальный результат о том, что каждый многоугольник может быть разбит на прилегающие по целым сторонам остроугольные треугольники. (Хорошее упражнение для читателя: попробуйте так триангулировать тупоугольный треугольник.) Идея конструкции состояла в том, что сначала осуществлялось специальное разбиение на остроугольные треугольники, возможно не прилегающие по целым сторонам. Затем это разбиение измельчалось, и нужная триангуляция получалась за счет малых сдвигов вершин измельченного разбиения вдоль сторон исходного. Удивительно, что здесь «выстреливает» известная теорема об одновременной хорошей аппроксимации набора чисел рациональными с общим (сколь угодно большим) знаменателем.

Отметим еще одно замечательное достижение, полученное в период жизни В. А. Залгаллера в Израиле: в возрасте восьмидесяти лет, совместно с А. Ю. Соляным, он доказал старую гипотезу Пойя и Сегё о том, что логарифмическая емкость плоского n -угольника заданной площади достигает минимума на правильном n -угольнике. Их доказательство кра-

сиво и непросто. Оно состоит из двух частей, геометрической и аналитической, и как раз первая принадлежит Виктору Абрамовичу. Здесь потребовалась очень специальная триангуляция n -угольника: многоугольник покрыт треугольниками с неперекрывающимися соседними секторами так, что отношения a_k к площади T_k не зависят от k . Здесь a_k — угол треугольника T_k напротив стороны A_{k+1} многоугольника. Как Виктор Абрамович рассказывал коллегам, он непрерывно размышлял об этой задаче больше года, и в конце концов ее решение открылось ему во сне. Доказательство этой гипотезы стало одним из лучших подарков на его 80-летие. В 2004 году этот результат был опубликован в престижнейшем журнале *Annals of Mathematics*.

В. А. Залгаллер — автор нескольких книг, вошедших в золотой фонд математической литературы. Наиболее известны и любимы геометрами следующие две.

Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, «Геометрические неравенства» — настоящая энциклопедия, посвященная разнообразным неравенствам для подмножеств евклидовых и римановых пространств, настольная книга лекторов по геометрии на математических факультетах.

Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, «Введение в риманову геометрию» — единственный учебник римановой геометрии на русском языке, где изложение ведется с точки зрения «римановой геометрии в целом» и при этом подходит для начального знакомства с предметом.

Коллеги, ученики, друзья и близкие помнят о Викторе Абрамовиче Залгаллере как о замечательном разностороннем ученом с непростой биографией — и в то же время как о чрезвычайно добром человеке с мягкой и обаятельной улыбкой.

Г. Ю. Панина

Ольга Александровна Ладыженская (1922–2004)

О. А. Ладыженская родилась 7 марта 1922 года в городе Кологриве (ныне Костромская область). Способности к математике у нее проявились очень рано. В 1937 году ее отец — учитель математики, бывший офицер — был расстрелян. По этой причине в 1939 г. Ольга не смогла поступить в ЛГУ, несмотря на блестяще сданные экзамены. Ее приняли лишь в Ленинградский педагогический институт им. Покровского. После начала войны Ольга вернулась в Кологрив, где преподавала математику в школе. В 1943 году она поступила на второй курс МГУ. Защитив диплом с отличием в 1947 году (научный руководитель — И. Г. Петровский), она вышла замуж и переехала в Ленинград, где поступила в аспирантуру ЛГУ (научный руководитель — С. Л. Соболев). В 1949 году защитила кандидатскую диссертацию, в 1953 году — докторскую. С 1950 года — преподаватель кафедры высшей математики физфака ЛГУ (с 1955 г. — профессор). С 1954 года Ольга Александровна работала в ЛОМИ, с 1961 по 1998 год — руководитель созданной ею лаборатории математической физики, с 1999 года — главный научный сотрудник ПОМИ. Член-корреспондент АН СССР (1981), академик (1990).



О. А. Ладыженская — автор более 250 научных работ, в том числе 7 монографий и учебника. Ее труды отмечены многочисленными престижными премиями, включая высшую награду РАН — Большую золотую медаль им. Ломоносова. Она была избрана иностранным членом Германской академии «Леопольдина» (1985), Национальной академии деи Линчеи (1989), Американской академии наук и искусств (2001), почетным доктором Боннского университета (2002). В 2020 году Национальный комитет математиков России, Санкт-Петербургский университет и Оргкомитет

Международного конгресса математиков учредили специальную награду (медаль) в честь О. А. Ладыженской. С именем Ольги Александровны связаны пионерские результаты по спектральной теории общих эллиптических операторов, теории дифракции, обоснованию сходимости метода Фурье для гиперболических уравнений. В 60-е годы О. А. в соавторстве со своей ученицей Н. Н. Уралцевой выполнила цикл работ по регулярности решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений. В частности, в этих работах было завершено решение 19-й и 20-й проблем Гильберта.

Во второй половине XX века Ладыженская была «законодателем моды» в теории уравнений в частных производных, настоящим математическим стратегом. Важно отметить, что она интересовалась в первую очередь не столько решением, сколько постановкой новых задач. Во многом именно ей мы обязаны такими понятиями, как обобщенные постановки и обобщенные решения.

Фундаментален вклад О. А. Ладыженской в математическую гидродинамику. Она первая доказала глобальную однозначную разрешимость начально-краевой задачи для двумерной системы Навье—Стокса, а также (совместно с А. А. Киселевым) установила ряд теорем об разрешимости трехмерной системы. Ольга Александровна также ввела понятие аттрактора двумерной системы Навье—Стокса и доказала его существование, что легло в основу общей теории глобальной устойчивости для эволюционных уравнений в частных производных.

В течение многих лет Ольга Александровна читала спецкурсы для студентов двух факультетов ЛГУ (матмеха и физфака) одновременно. Обаяние ее личности, умение выделять способных студентов, готовность помочь начинающим позволили ей воспитать блестящих ученых. В их числе Л. Д. Фаддеев, Н. Н. Уралцева, В. А. Солонников, В. С. Буслаев и другие, чьи имена составляют славу петербургской школы уравнений в частных производных и математической физики.

С момента организации В. И. Смирновым городского семинара по математической физике (1947) Ольга Александровна принимала в нем самое активное участие, а в дальнейшем много лет была его руководителем. Почти все специалисты по уравнениям в частных производных и их приложениям, учившиеся в Ленинграде (Петербурге), были или являются участниками этого семинара. Возможность выступить с докладом перед Ольгой Александровной считали для себя честью математики из многих городов Советского Союза. Выступали на семинаре и видные зарубежные ученые, в том числе Р. Курант, Ж. Лере, П. Лакс и другие.

С момента возрождения Санкт-Петербургского математического общества в 1959 году О. А. Ладыженская стала одним из самых активных

его членов. Более 40 лет она была членом правления, вице-президентом, а с 1990 по 1998 год — президентом СПбМО. В 1998 году она была избрана почетным членом СПбМО.

Несмотря на свои многочисленные регалии, Ольга Александровна всегда с большим интересом и уважением относилась к собеседникам. С ней можно было спорить и не соглашаться, она не навязывала своих взглядов и не боялась пересмотреть свою точку зрения. Она была человеком глубоко верующим, но никогда не выставляла это напоказ. Ее отношение к людям определялось не словами «ради Бога», но «ради человека». Она была верна девизу «Кто, если не я?», всегда готовая прийти на помощь окружающим, не ожидая их просьб. Эта помощь могла быть разнообразной: деньгами, одеждой, жильем, организацией дежурств у больного, административными хлопотами... Она неоднократно заступалась за студентов с «плохой анкетой», которых подвергали дискриминации при приеме в аспирантуру. В тяжелые девяностые годы Ольга Александровна ходила с карманами, набитыми мелочью, и раздавала ее нищим.

Ольга Александровна была личностью необычной и многогранной. Она интересовалась почти всем на свете, прекрасно разбиралась в литературе, живописи, музыке. Общение с ней высоко ценили известные поэты, писатели, музыканты и художники, среди них И. Бродский, А. Солженицын, Б. Тищенко. Ладыженская была включена Солженицыным в список 257 «свидетелей Архипелага ГУЛАГ».

Отдельно следует упомянуть дружбу Ладыженской с Анной Ахматовой. Несмотря на значительную разницу в возрасте, их отношения были очень близкими: О. А. была в числе 11 человек, которым Ахматова давала читать рукописи «Поэмы без героя» и «Реквиема». Более того, Ольга Александровна убедила Анну Андреевну сделать магнитофонную запись «Реквиема» и более 20 лет тайно хранила пленку. Подчеркнем, что обнаружение такой записи КГБ могло серьезно поставить под угрозу профессиональную карьеру ее хранителя. Сегодня благодаря Ладыженской мы можем слышать бессмертные строки «Реквиема» в исполнении автора. Ольге Александровне посвящено известное стихотворение Ахматовой «В Выборге».

Все знавшие Ольгу Александровну отмечали ее неутомимость — как в математике, так и на экскурсиях и в туристских походах. Для нее было совершенно естественным несколько часов расспрашивать докладчика о тонкостях доказательства. С той же легкостью она могла во время зарубежной поездки посетить за день четыре художественные выставки (и это в весьма почтенном возрасте!). А о ее склонности теряться в горах во время похода ходили легенды.



О. А. Ладыженская и А. А. Ахматова, начало 1960-х годов



Этот портрет Ольги Александровны стоял у А. Д. Александрова на рабочем столе

Наконец, невозможно умолчать о том, что Ольга Александровна была очень красивой женщиной. В поздравительном адресе к ее 60-летию А. Д. Александров написал: «Такое сочетание красоты и таланта в одном человеке кажется нереальным, если бы не Ольга Александровна». Французский математик Ж. Лере после посещения Ленинграда говорил, что видел Эрмитаж, Петергоф и Ладыженскую.

Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров

Литература

- [1] *Friedlander S. et al.* Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya (1922–2004) // Notices AMS. 2004. V. 51, № 11. P. 1320–1331.
- [2] *Dumbaugh D. et al.* The ties that bind. Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya and the 2022 ICM in St. Petersburg // Notices AMS. 2020. V. 67, № 3. P. 373–381.
- [3] *Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I.* The Queen of rhymes and the Queen of formulas (around the poem «In Vyborg»). Universität des Saarlandes. 2019. Preprint № 403. См. <https://www.math.uni-sb.de/preprints/preprint403.pdf>

О. А. Ладыженская и проблема глобальной однозначной разрешимости уравнений Навье—Стокса

Одной из наиболее важных моделей в математической гидродинамике является система уравнений Навье—Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad (1)$$

в $\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$, описывающая течения вязкой несжимаемой жидкости. Неизвестными в системе (1) являются векторное поле u и скалярная функция p , играющие роль поля скоростей жидкости и давления соответственно. Один из центральных вопросов, касающихся этой системы, — это вопрос о том, обеспечивает ли данная модель детерминистическое описание динамики жидкости, или, другими словами, однозначно ли определяет задание начальных данных

$$u|_{t=0} = u_0 \quad (2)$$

для системы (1) решение во все последующие моменты времени.

Для ответа на эти и подобные вопросы в XX столетии в теории уравнений в частных производных началась разработка новых подходов, широко использующих методы функционального анализа. Среди ученых, внесших вклад в развитие новых идей, можно назвать Н. М. Гюнтера, С. Л. Соболева, Ж. Лере, Р. Куранта, К. Фридрихса и многих других. В частности, используя концепцию слабых производных, введенных С. Л. Соболевым, Ж. Лере доказал (см. [14]) глобальное существование слабых решений (впоследствии названных решениями Лере—Хопфа) и установил существование сильных решений на конечном промежутке времени. К настоящему времени единственность решений Лере—Хопфа является открытым вопросом. С другой стороны, сильные решения единственны в классе решений Лере—Хопфа, однако их глобальное существование неизвестно.

В 1957 вышла работа [3] «О существовании и единственности решения нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости». Можно сказать, что уже в этой работе определилась позиция Ольги Александровны, которой она придерживалась в своих исследованиях уравнений

Навье—Стокса на протяжении всей жизни. Ольга Александровна всегда считала первичным вопрос о единственности решений нестационарных задач (а не об их регулярности) и считала правильной постановку задачи, в которой рассматривается вопрос о нахождении таких функциональных классов, в которых можно одновременно доказать как глобальное существование решений, так и их единственность. Несмотря на то, что для уравнений Навье—Стокса вопрос о единственности решений тесно связан с вопросом об их регулярности (для системы Навье—Стокса имеет место «слабо-сильная» (weak-strong) теорема единственности: из существования гладкого решения вытекает, что всякое слабое решение — решение Лере—Хопфа — обязано с ним совпадать), Ольга Александровна допускала, что решения уравнений, описывающих динамику вязких жидкостей, с течением времени в принципе могут образовывать особенности, но, несмотря на это, математически должны описываться моделями, дающими детерминистическое описание таких течений.

В работе [3] представлены различные варианты функциональных классов, в которых справедлива теорема единственности решений начально-краевых задач для уравнений (1), а также доказано существование решений в этих классах на конечном интервале времени (с оценкой снизу длин соответствующих интервалов). Философии этой работы Ольга Александровна придерживалась всю свою жизнь — искать функциональные классы, в которых имеется глобальная однозначная разрешимость. При этом она полагала, что класс решений Лере—Хопфа недопустимо широк и в нем нет единственности. Этот вопрос все еще открыт, но работа [2] отчасти подтверждает ее правоту.

В 1958 году в работах [4], [5] О. А. Ладыженская доказывает глобальную однозначную разрешимость начально-краевой задачи для двумерных уравнений Навье—Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0 \end{cases}$$

в $Q_T := \Omega \times (0, T)$, где Ω — произвольная область в $\mathbb{R}^2$. Это обобщение результатов Ж. Лере [15] для двумерной задачи Коши, которое она, в отличие от Ж. Лере, выполнила в рамках своей концепции выбора правильно-го функционального класса. Ее доказательство основано на интерполяционном неравенстве

$$\|u\|_{L_4(\mathbb{R}^2)}^4 \leq 2 \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2 \|\nabla u\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

которое в настоящее время называется неравенством Ладыженской.

В дальнейшем Ольга Александровна продолжала поиски случаев, для которых глобальная однозначная разрешимость уравнений Навье—Стокса имеет место. В 1961 году вышло первое издание ее книги [6]. Эта книга, переведенная на английский язык в 1963 году, на долгие годы стала базовым учебником по математической теории уравнений Навье—Стокса для многих поколений математиков всего мира. В 1968 году вышла работа [9], в которой доказывается глобальная однозначная разрешимость задачи Коши для уравнений Навье—Стокса при осесимметричных начальных данных без угловой компоненты скорости (близкие результаты получены в работе [18], также опубликованной в 1968 году). В работе [8] О. А. доказывает, что теорема единственности для трехмерных уравнений Навье—Стокса имеет место в классе слабых решений с конечной нормой

$$\int_0^T \|u(\cdot, t)\|_{L_s(\Omega)}^l dt < +\infty, \quad \frac{3}{s} + \frac{2}{l} \leq 1, \quad s \in (3, +\infty], \quad l \in [2, +\infty] \quad (3)$$

(отметим, что ранее класс (3) уже появлялся в работах [16] и [17]). В той же работе О. А. Ладыженская также устанавливает гладкость решений, удовлетворяющих условию (3). В то же время для осесимметричных уравнений Навье—Стокса без угловой компоненты скорости Ладыженская в работе [10] строит пример неединственности слабых решений с конечной энергетической нормой. В построенном контрпримере рассматривается начально-краевая задача в осесимметричной области Q_T , заданной в цилиндрических координатах (r, φ, z) соотношением

$$Q_T := \{t \in (0, T), r, z \in (a\sqrt{t}, b\sqrt{t})\}, \quad 0 < a < b.$$

Построенные О. А. Ладыженской неединственные решения принадлежат классу Лере—Хопфа и, более того, удовлетворяют условию (3) с любыми $s > 3$, $l \geq 2$, удовлетворяющими условию

$$\frac{3}{s} + \frac{2}{l} > 1.$$

О. А. Ладыженская отметила, что построенный пример неединственности дает основания полагать, что и в задаче Коши для уравнений Навье—Стокса класс решений Лере—Хопфа, возможно, также является слишком широким для единственности и в энергетическом классе начально-краевая задача для уравнений Навье—Стокса может быть некорректна. Это была весьма смелая по тем временам гипотеза.

С другой стороны, при исследовании трехмерных уравнений Навье—Стокса О. А. Ладыженская считала также неправомерным намеренное сужение функционального класса «физически корректных» решений до

класса бесконечно гладких функций. Она всегда подчеркивала (см., например, [11]), что первостепенным вопросом, касающимся уравнений Навье—Стокса, является вопрос о глобальной однозначной разрешимости (т. е., по сути, вопрос о нахождении функционального класса, в котором можно установить как глобальное существование решений, так и их единственность). Она считала, что формулировка «шестой проблемы тысячелетия», предложенная Ч. Фефферманом (см. [1]) и заменяющая проблему детерминистического описания динамики жидкости вопросом об исследовании глобального существования гладких решений, в какой-то степени переводит задачу из философской плоскости в категорию чисто спортивных достижений. Свои взгляды на «шестую проблему тысячелетия» О. А. Ладыженская изложила в статье [11], а также в своем докладе на семинаре 3 мая 2001 года в Принстонском университете.

В связи с этим, параллельно с исследованием уравнений Навье—Стокса, Ольга Александровна искала также и другие нелинейные гидродинамические модели, которые, с одной стороны, допускали бы существование негладких решений, а с другой стороны, для которых была бы справедлива глобальная однозначная разрешимость в энергетическом классе. Такие модели были анонсированы ею в 1966 году в докладе [7] на Математическом конгрессе в Москве и в настоящее время называются «моделями Ладыженской» (в дальнейшем выяснилось, что данный класс включает в себя многие модели, хорошо известные в механике жидкостей и теории турбулентности, в частности, обобщенные ньютоновские жидкости и модель Смагоринского). Доказательство глобальной однозначной разрешимости «модифицированных уравнений Навье—Стокса» (как их называла сама О. А.) опубликовано в работах [12], [13]. В дальнейшем, в 90-е годы XX века, эти уравнения становятся излюбленной темой Ольги Александровны, и их исследованию она посвящает многочисленные работы.

Г. А. Серёгин, Т. Н. Шилкин

Литература

- [1] Fefferman C. L. Existence and smoothness of the Navier—Stokes equations // Millennium Prize Problems / Ed.: J. Carlson, A. Jaffe, and A. Wiles. Providence, RI: AMS, 2006. P. 57–67.
- [2] Sverak V., Jia H. Are the incompressible 3d Navier—Stokes equations locally ill-posed in the natural energy space? // J. Funct. Anal. 2015. V. 268, № 12. P. 3734–3766.
- [3] Киселев А. А., Ладыженская О. А. О существовании и единственности решения нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21, № 5. С. 655–680.

- [4] *Ладыженская О. А.* Решение «в целом» краевой задачи для уравнений Навье—Стокса в случае двух пространственных переменных // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123, № 3. С. 427–429.
- [5] *Ladyzhenskaia O. A.* Solution «in the large» of the nonstationary boundary value problem for the Navier—Stokes system with two space variables // Comm. Pure Appl. Math. 1959. V. 12, № 3. P. 427–433.
- [6] *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961; Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1970.
- [7] *Ладыженская О. А.* О некоторых нелинейных задачах теории сплошных сред // Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966 г.). М.: Мир, 1968. С. 560–573.
- [8] *Ладыженская О. А.* О единственности и гладкости обобщенных решений уравнений Навье—Стокса // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1967. Т. 5. С. 169–185.
- [9] *Ладыженская О. А.* Об однозначной разрешимости в целом трехмерной задачи Коши для уравнений Навье—Стокса при наличии осевой симметрии // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1968. Т. 7. С. 155–177.
- [10] *Ладыженская О. А.* Пример неединственности в классе слабых решений Хопфа для уравнений Навье—Стокса // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33, № 1. С. 240–247.
- [11] *Ладыженская О. А.* Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье—Стокса, существование и гладкость // Успехи матем. наук. 2003. Т. 58, вып. 2. С. 45–78.
- [12] *Ладыженская О. А.* О новых уравнениях для описания движений вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач // Труды МИАН СССР. 1967. Т. 102. С. 85–104.
- [13] *Ладыженская О. А.* О модификациях уравнений Навье—Стокса для больших градиентов скоростей // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1968. Т. 7. С. 126–154.
- [14] *Leray J.* Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace // Acta Math. 1934. V. 63, № 1. P. 193–248.
- [15] *Leray J.* Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique // J. Math. Pures Appl. 1933. T. 12. P. 1–82.
- [16] *Prodi G.* Un teorema di unicità per le equazioni di Navier—Stokes // Ann. Mat. Pura Appl. 1959. T. 48. P. 173–182.
- [17] *Serrin J.* On the interior regularity of weak solutions of the Navier—Stokes equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1962. V. 9, № 1. P. 187–195.
- [18] *Уховский М. Р., Юдович В. И.* Осесимметричные течения идеальной и вязкой жидкости, заполняющей все пространство // Приклад. матем. мех. 1968. Т. 32, вып. 1. С. 59–69.

Михаил Соломонович Бирман

(1928–2009)

Вклад М. С. Бирмана в спектральную теорию операторов и математическую физику трудно переоценить. Особенно широко известен принцип Бирмана—Швингера в теории дискретного спектра, который служит отправной точкой в задачах квантовой механики. Работы М. С. Бирмана по математической теории рассеяния во многом определили становление и развитие этой области. Им был открыт принцип инвариантности волновых операторов. Знаменитый результат — формула Бирмана—Крейна, связывающая матрицу рассеяния и функцию спектрального сдвига. Вместе с М. З. Соломяком он построил теорию двойных операторных интегралов; разработал метод кусочно полиномиальных приближений функций из классов Соболева и на его основе получил точные оценки и асимптотики спектра дифференциальных и интегральных операторов. Вместе с учениками и коллегами М. С. Бирман развил спектральную теорию оператора Максвелла в негладкой ситуации; исследовал дискретный спектр, появляющийся в лакунах самосопряженного оператора при его возмущении. Вместе с Т. А. Суслиной он внес значительный вклад в спектральную теорию периодических дифференциальных операторов — в решение проблемы абсолютной непрерывности спектра и в разработку теоретико-операторного подхода в теории усреднения.

Михаил Соломонович (Шлёмович) Бирман родился 17 января 1928 года в Ленинграде. Его отец был ученым — специалистом по теоретической механике, занимал должность профессора в Ленинградском институте холодильной промышленности. Мать была школьной учительницей.

В годы войны семья жила в эвакуации в Свердловске, где Михаил окончил среднюю школу. После окончания войны и возвращения в Ленинград



он поступил в Ленинградский электротехнический институт (ЛЭТИ). Преподаватель математики в ЛЭТИ обратил внимание на незаурядные математические способности Михаила и посоветовал ему перевестись на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета (ЛГУ). Михаил последовал его совету.

В годы учебы на матмехе он специализировался по методам вычислений. Своими учителями Михаил Соломонович считал Марка Константиновича Гавурина, который был руководителем его дипломной работы, и Леонида Витальевича Канторовича. Еще будучи студентом, Михаил подрабатывал в Ленинградском отделении математического института (ЛОМИ) в лаборатории Канторовича. Леонид Витальевич выделил молодого сотрудника за сильный интеллект и независимое мышление и стал поручать ему задания, уровень которых намного превосходил стандартные технические вычисления. В 1950 году Михаил Соломонович окончил матмех ЛГУ. Хотя он был одним из лучших студентов на курсе, в аспирантуру его не взяли из-за существовавших в то время негласных антисемитских ограничений.

В 1947 году Михаил Соломонович женился на своей однокурснице Татьяне Петровне Ильиной. В 1948 году у них родился сын Женя. С Татьяной Петровной они счастливо прожили всю жизнь. Она ушла из жизни двумя годами раньше него. Благодаря ее любви, преданности, терпению и заботе он мог всецело посвящать себя любимому делу — занятиям математикой.

После окончания университета М. С. Бирман работал в Ленинградском горном институте на кафедре высшей математики ассистентом. Несмотря на очень большую педагогическую нагрузку, он активно занимался научными исследованиями. В 1954 году успешно защитил кандидатскую диссертацию.

В 1956 году, когда государственная политика смягчилась, М. С. Бирман, по инициативе и при серьезной поддержке В. И. Смирнова и О. А. Ладыженской, перешел в ЛГУ на кафедру математической физики физического факультета. Рассказывают, что В. И. Смирнов поставил ректору ультиматум: «Или вы берете Бирмана, или я ухожу из ЛГУ».

Требование Смирнова было удовлетворено, а Бирман со временем стал одним из лучших лекторов физического факультета. В 1962 г. он защитил докторскую диссертацию на тему «Спектр сингулярных граничных задач». На кафедре математической физики Михаил Соломонович проработал до конца жизни — более 50 лет.

Вместе со своим коллегой Михаилом Захаровичем Соломяком он создал сильную научную школу по спектральной теории операторов, известную во всем мире. Многие его ученики сами стали известными



Большую роль в научном становлении М. С. Бирмана сыграло его активное участие в работе ленинградского семинара по математической физике, организованного в 1947 году по инициативе Владимира Ивановича Смирнова (сейчас семинар носит имя В. И. Смирнова). Впоследствии в течение многих лет Михаил Соломонович руководил семинаром имени В. И. Смирнова вместе с Ольгой Александровной Ладыженской. На переднем плане: М. З. Соломяк, Н. Н. Уральцева, Н. Ф. Морозов, М. С. Бирман, М. М. Смирнов. Фотография 1968 года

учеными и работают сейчас в ведущих университетах России и на Западе.

Михаил Соломонович Бирман — автор более 160 научных статей и двух книг. Он много занимался редакторской деятельностью, был членом редколлегии журналов «Алгебра и анализ», «Функциональный анализ и его приложения». Его заслуги отмечены званиями заслуженного деятеля науки РФ, почетного профессора СПбГУ и премией им. Чебышёва правительства Санкт-Петербурга. Работы Бирмана получили международное признание и обильно цитируются в мировой литературе. Он многократно был пленарным докладчиком на международных конференциях. Его приглашали с визитами в ведущие университеты и научные центры мира.

Расскажем немного о научном стиле Михаила Соломоновича. Он редко думал в терминах отдельных задач, как бы интересны и важны они ни



Михаил Соломонович был блестящим лектором. Его лекции были не только содержательными и хорошо продуманными, но и вдохновляющими. Он был одним из лидеров кафедры и обладал высочайшим авторитетом. У него всегда были очень высокие профессиональные требования. И прежде всего, эти требования он предъявлял самому себе. Михаил Соломонович был очень внимателен к людям. Многие коллеги испытывали его влияние как прекрасного профессионала и мудрого человека.

были сами по себе. Для него типичен такой подход: сначала строится общая схема, включающая рассматриваемую задачу, затем она всесторонне анализируется. Возникающая при этом теория оказывается применимой к широкому кругу проблем данного типа. Наконец, выясняется, как реализуются объекты общей теории в случае рассматриваемого конкретного вопроса. Как правило, этот путь приводит к исчерпывающему анализу не только исходной задачи, но и всего рассматриваемого класса проблем.

Сказанное не означает, что Михаил Соломонович был слабее в решении конкретных задач. Его работы изобилуют техническими находками, получившими в дальнейшем широкое применение.

Его всегда влекло вперед, хотя он не пренебрегал разработкой уже начатой тематики. Михаил Соломонович любил повторять: «Я всю жизнь



М. С. Бирман с О. А. Ладыженской, поход, Кавказ (Азау), 1972.

пишу одну работу», хотя он внес значительный вклад в разные области математической физики. Но когда он переходил от одной тематики к другой, всегда прослеживались ниточки, связывающие эти темы между собой.

Склад его ума не был чисто математическим. При выборе тем для исследования он часто руководствовался прямыми приложениями к естественным физическим задачам. Он обладал многими талантами, и математике повезло, что именно она оказалась его избраницей.

Общение Михаила Соломоновича с его многочисленными студентами было очень тесным и далеко не ограничивалось чисто математическими темами. В частности, авторы этого текста много почерпнули от него именно в человеческом плане. Михаил Соломонович обладал острым умом и был широко образован. Слушать его было поучительно и интересно. Он постоянно думал о различных событиях, происходивших в мире, и, по его собственному выражению, всегда пытался создать правильную картину мира. Иногда эта картина была чересчур романтической. Он писал стихи, любил природу, совершал загородные прогулки пешком или на велосипеде, ходил в походы, прекрасно знал Петербург и его окрестности.

Несмотря на плохое состояние здоровья в последние годы, он сохранял творческую активность до последних дней жизни. Михаил Соломонович Бирман скончался 2 июля 2009 года.

Т. А. Суслина, Д. Р. Яфаев

Литература

- [1] Буслаев В. С., Гельфанд И. М., Ладыженская О. А., Павлов Б. С., Соломяк М. З., Фаддеев Л. Д., Яфаев Д. Р. Михаил Шлёмович Бирман (к шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи матем. наук. 1988. Т. 43, вып. 3. С. 201–202.
- [2] Buslaev V., Solomyak M., Yafaev D. On the scientific work of Mikhail Shlemovich Birman // Differential operators and spectral theory: M. Sh. Birman's 70th anniversary collection. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999. P. 1–15. (AMS Transl. Ser. 2, Vol. 189).
- [3] Буслаев В. С., Вершик А. М., Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Ладыженская О. А., Соломяк М. З., Фаддеев Л. Д., Яфаев Д. Р. Михаил Шлёмович Бирман (к семидесятилетию со дня рождения) // Успехи матем. наук. 2000. Т. 55, вып. 1. С. 204–207.
- [4] Буслаев В. С., Соломяк М. З., Яфаев Д. Р. Михаил Шлёмович Бирман (к 75-летию со дня рождения) // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16, вып. 1. С. 5–14.
- [5] Solomyak M., Suslina T. On the scientific work of M. Sh. Birman in 1998–2007 // Spectral theory of differential operators: M. Sh. Birman 80th anniversary collection. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008. P. 1–15. (AMS Trans. Ser. 2. Vol. 225).
- [6] Бабич В. М., Буслаев В. С., Вершик А. М., Гиндикин С. Г., Кисляков С. В., Лаптев А. А., Марченко В. А., Никольский Н. К., Пастур Л. А., Пламеневский Б. А., Соломяк М. З., Суслина Т. А., Уральцева Н. Н., Фаддеев Л. Д., Хавин В. П., Яфаев Д. Р. Михаил Шлемович Бирман (некролог) // Успехи матем. наук. 2010. Т. 65, вып. 3. С. 185–190.
- [7] Solomyak M., Suslina T., Yafaev D. Obituary: Mikhail Birman, 17.01.1928–2.07.2009 // Math. Model. Nat. Phenom. 2010. V. 5, № 4. P. 1–3.
- [8] Соломяк М. З., Суслина Т. А., Яфаев Д. Р. О математическом творчестве М. Ш. Бирмана // Алгебра и анализ. 2011. Т. 23, вып. 1. С. 5–60.
- [9] Сайт М. С. Бирмана. <http://www.pdmi.ras.ru/~birman/>
- [10] Суслина Т. А., Вершик А. М., Яфаев Д. Р., Уральцева Н. Н., Филонов Н. Д. Заседание, посвященное памяти Михаила Соломоновича Бирмана (1928–2009) (видео). Совместное заседание Санкт-Петербургского математического общества и секции математики Дома ученых. 17 апреля 2013. https://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=6627

М. С. Бирман:

спектральная теория и теория рассеяния

Теория возмущений имеет важное значение для спектральной теории самосопряженных операторов. Она дает заключения о самосопряженном операторе B на основании информации о более простом операторе A , в некотором смысле близком к B . В случае абсолютно непрерывного спектра теорию возмущений называют теорией рассеяния.

Первоначально М. С. Бирман не был специалистом по теории рассеяния. В пятидесятых годах он написал ряд основополагающих работ о существенном и дискретном спектрах самосопряженных дифференциальных операторов. В частности, он доказал устойчивость существенно-го спектра эллиптических операторов для широкого класса возмущений их коэффициентов и соответствующих граничных условий. Что касается дискретного спектра, отметим лишь известную оценку полного числа N отрицательных собственных значений оператора Шрёдингера $-\Delta + V(x)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$:

$$N \leq \frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{V_-(x)V_-(y)}{|x-y|^2} dx dy.$$

Это была первая количественная оценка отрицательного спектра в многомерном случае. Она была независимо найдена Дж. Швингером и обычно называется оценкой Бирмана—Швингера. Ее доказательство опирается на общий результат теории операторов, известный ныне как принцип Бирмана—Швингера.

Михаил Соломонович заинтересовался абсолютно непрерывным спектром после того, как в 1957 году появилась известная теорема Т. Като и М. Розенблума. В этой теореме рассматривается пара самосопряженных операторов A и B , действующих в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве. Теорема утверждает, что если разность $B - A$ является ядерным оператором, то существуют волновые операторы, определяемые как сильные пределы

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iBt} e^{-iAt} P_{ac}(A) =: W_{\pm}(B, A);$$

здесь $P_{\text{ac}}(A)$ — ортогональный проектор на абсолютно непрерывное подпространство оператора A . В частности, из этого результата следует, что абсолютно непрерывные части операторов A и B унитарно эквивалентны.

Волновые операторы естественно возникают в квантовой механике. В самом деле, рассмотрим две системы, заданные в момент времени $t = 0$ векторами f_0 и f и описываемые соответственно «свободным» гамильтонианом A и «возмущенным» гамильтонианом B . Их эволюции во времени описываются унитарными группами $e^{-iAt} f_0$ и $e^{-iBt} f$. Оказывается, их эволюции асимптотически близки при $t \rightarrow \pm\infty$, т. е. $e^{-iAt} f_0 \sim e^{-iBt} f$, если $f = W_{\pm}(B, A)f_0$ для соответствующего волнового оператора.

Если волновые операторы существуют, то оператор рассеяния

$$S := W_+^*(B, A)W_-(B, A)$$

коммутирует с A и, значит, в диагональном представлении последнего действует как умножение на операторнозначную функцию $S(\lambda)$. Оператор рассеяния S и матрица рассеяния $S(\lambda)$ очень интересны для задач математической физики, поскольку они связывают начальные (при $t \rightarrow -\infty$) и финальные (при $t \rightarrow +\infty$) характеристики процесса непосредственно, не нуждаясь в его рассмотрении в промежуточные моменты времени. Этим и объясняется термин «теория рассеяния», заимствованный из физики.

Красивая и очень эффективная в общем контексте теории операторов теорема Като—Розенблума не может непосредственно применяться к дифференциальным операторам, где $B - A$ является оператором умножения. Естественно, проблема применения этого общего результата привлекла внимание самого Т. Като, С. Т. Куроды и многих других математиков. Решающий вклад в эту высоко конкурентную область внес Михаил Соломонович.

Изучение абсолютно непрерывного спектра было для него естественным продолжением анализа существенного спектра. Их связала его работа 1962 года, где была доказана инвариантность абсолютно непрерывного спектра при возмущении границы и граничных условий для эллиптических операторов в неограниченных областях. Исходная и, как позже оказалось, очень плодотворная идея Бирмана состояла в том, чтобы рассмотреть подходящие функции φ (например, обратные степени) операторов A, B и применить теорему Като—Розенблума к паре $(\varphi(A), \varphi(B))$.

Инвариантность абсолютно непрерывного спектра позволила Михаилу Соломоновичу предположить, что если разность $\varphi(B) - \varphi(A)$ ядерна, то не только сохраняется абсолютно непрерывный спектр, но и существуют волновые операторы $W_{\pm}(\varphi(B), \varphi(A))$, причем

$$W_{\pm}(\varphi(B), \varphi(A)) = W_{\pm}(B, A).$$

Этот результат, доказанный им в 1963 г., был впоследствии назван *принципом инвариантности*. Он составляет важное обобщение теоремы Като—Розенблюма, которое может непосредственно применяться к дифференциальным операторам.

В тот же период, совместно с М. Г. Крейном, М. С. Бирман нашел связь теории рассеяния с теорией функции спектрального сдвига. Понятие функции спектрального сдвига $\xi(\lambda)$ появилось в физике в начале пятидесятых годов. Оно было введено в статьях И. М. Лифшица в связи с формулой следа

$$\text{Tr}(\varphi(B) - \varphi(A)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\lambda) \xi(\lambda) d\lambda.$$

Соответствующая математическая теория создана М. Г. Крейном, который доказал для широкого класса функций φ формулу следа для пары самосопряженных операторов с ядерной разностью. Формула следа может в большой мере рассматриваться как далеко идущее обобщение равенства матричного и спектрального следов в конечномерном случае.

М. С. Бирман и М. Г. Крейн показали, что матрица рассеяния $S(\lambda)$ отличается от тождественной на ядерный оператор (так что ее определитель корректно определен), и нашли замечательную формулу

$$\text{Det } S(\lambda) = \exp(-2\pi i \xi(\lambda)),$$

справедливую для почти всех λ из абсолютно непрерывного спектра. Эта изящная формула (известная как формула Бирмана—Крейна) часто используется как определение функции спектрального сдвига на абсолютно непрерывном спектре.

Имея в виду приложения, Михаил Соломонович развивал теорию рассеяния в разнообразных направлениях. Так, он перенес (совместно с М. Г. Крейном) теорему Като—Розенблюма на унитарные операторы, ввел локальные волновые операторы, соответствующие некоторому интервалу спектральной оси, и построил теорию рассеяния для самосопряженных операторов A и B в разных гильбертовых пространствах.

Михаил Соломонович был блестящим лектором. Он обладал исключительной способностью представлять трудные вещи в чрезвычайно прозрачном виде и находить нетривиальные взаимосвязи между внешне различными фактами. Надо отметить, что он всегда четко владел аудиторией, что приносило большую пользу всем.

Читатель может дополнить этот очень схематичный очерк более подробной статьей: Соломяк М. З., Суслина Т. А., Яфаев Д. Р. О математическом творчестве М. Ш. Бирмана // Алгебра и анализ. 2011. Т. 23, № 1. С. 5–60.

Т. А. Суслина, Д. Р. Яфаев

Аскольд Иванович Виноградов (1929–2005)

Аскольд Иванович Виноградов внес большой вклад в теорию чисел. Его самый знаменитый результат — это носящая имя Бомбьери и Виноградова теорема о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях с оценкой, усредненной по разностям прогрессий. Во многих задачах аналитической теории чисел этот результат заменяет расширенную гипотезу Римана. А. И. Виноградов доказал эту теорему в работе [1], а независимо от него ее доказал Э. Бомбьери в работе [2]; при этом доказательство Бомбьери¹ основано на развитии метода большого решета Ю. В. Линника.

Аскольд Иванович Виноградов родился 1 октября 1929 года в Ленинградской области, во Всеволожском районе, в поселке около Шлиссельбургской крепости². Его родители, Мария Александровна Сорихина (Виноградова) и Иван Георгиевич Виноградов, были выходцами из крестьян Тверской губернии. Во время Великой Отечественной войны поселок, где вместе с матерью жили молодой Аскольд и его младшая сестра Диана, находился на передовой: кольцо блокады Ленинграда замкнулось 8 сентября 1941 года, и правый берег Невы и крепость Шлиссельбург контролировались советскими войсками,



¹ За эту и другие работы Э. Бомбьери в 1974 году получил Филдсовскую медаль.
² Крепость, называемая также «Орешек», до 1919 года служила тюрьмой. Здесь, за покушение на Александра III, был казнен Александр Ульянов, старший брат В. И. Ленина. После революции близлежащий поселок по правую сторону Невы был переименован в рабочий поселок имени народовольца Н. А. Морозова. Там находился пороховой завод, где, вероятно, и работал И. Г. Виноградов.

а левый берег — немцами. В феврале 1942 года Аскольд убежал³ из дома через Ладожское озеро, в Вологде был задержан и отправлен в детский дом. Летом 1942 года он был переведен в другой детский дом в Вологодской области, где в 1945 году закончил 7 классов. Мать с сестрой эвакуировались из Ленинграда в марте 1942 году. Мать разыскала Аскольда в 1944 году, в июне 1945 года он уехал к ней, а в 1947 году мать с Дианой вернулись в Ленинград.

Далее процитируем автобиографию 1991 года из архива ЛОМИ⁴:

В 1945 году поступил в Бакинское Военно-Морское Подготовительное училище. Через 2 года наше училище было перебазировано в г. Калининград (бывший г. Кёнигсберг), где в 1948 году окончил Подготовительное училище и был переведен на 1-й курс 2-го Балтийского Высшего Военно-Морского училища, которое было создано на базе нашего Подготовительного училища. Высшее Военно-Морское училище окончил в 1952 году по минно-торпедной специальности и получил диплом офицера-торпедиста номер 743413. При распределении специальным приказом военно-морского министра был уволен в запас и отправлен в Москву в аспирантуру МИАН СССР им В. А. Стеклова к академику Виноградову Ивану Матвеевичу. Хотя вся эта операция была проделана по специальной просьбе тогдашнего президента АН СССР С. И. Вавилова, но на самом деле за его спиной стояли И. М. Виноградов и Ю. В. Линник, кто следил за моей судьбой все годы моей учебы в Военно-морском училище.

Таким образом, имея семилетний военный стаж, 15 ноября 1952 года молодой Аскольд Виноградов поступил в аспирантуру МИАН к Ивану Матвеевичу Виноградову. А. И. Виноградов выучил знаменитый метод И. М. Виноградова в теории чисел и, по рассказам друзей, сказал Ивану Матвеевичу «Сейчас буду вашим методом решать задачи». Иван Матвеевич это будто бы прокомментировал так: «Если бы какие интересные были, то я бы и сам решил. Пошлю вас в Ленинград учиться другим вещам в аспирантуру к Линнику». 15 февраля 1953 года А. И. Виноградов был переведен в ЛОМИ, его научным руководителем стал Юрий Владимирович Линник.

24 декабря 1953 года Виноградов сдал аспирантский экзамен Ю. В. Линнику, Л. В. Канторовичу и А. А. Маркову. Темы вопросов такие: интеграл Коши, интеграл Фурье, понятие кривой Жордана, оценка — отлично. В отчете за 1953 год имеется список книг, которые Виноградов прочитал за первый год аспирантуры в ЛОМИ: Г. М. Фихтенгольц «Дифференциаль-

³ Согласно автобиографии 1952 года. Согласно автобиографии 1991 года, он был эвакуирован из Ленинграда по «Дороге жизни» в марте 1942 года.

⁴ ЛОМИ — Ленинградское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Академии наук СССР.

ное и интегральное исчисление», три тома; И. И. Привалов «Введение в теорию функций комплексного переменного»; И. М. Виноградов «Метод тригонометрических сумм в теории чисел»; А. Э. Ингам «Распределение простых чисел»; Е. К. Титчмарш «Теория дзета-функции Римана».

На утверждении ежегодного отчета в 1954 году Линник так характеризует Виноградова: «Я думаю, что Аскольд Иванович справится со своей темой: он человек напористый».

После защиты в 1955 году кандидатской диссертации «Аддитивные задачи с двумя простыми числами и дополнительными слагаемыми» Аскольд Иванович был оставлен в ЛОМИ на должности младшего научного сотрудника. В это время Юрий Владимирович Линник интересовался алгебраической геометрией и вел семинар по книге А. Вейля «Foundations of algebraic geometry».

Дело в том, что из гипотезы Римана для дзета-функций алгебраических кривых над конечным полем, доказанной Андре Вейлем в 1940 году, вытекает предельная оценка для специальных тригонометрических сумм, сумм Клоостермана. Оценка Вейля недоступна для обычных методов теории тригонометрических сумм, включая метод И. М. Виноградова, и Ю. В. Линник хотел понять и обобщить этот результат. Аскольд Иванович вспоминает, что основным докладчиком на семинаре был ученик Линника Б. Ф. Скубенко, замечательный специалист в геометрии чисел, и каждый доклад начинался обращением Линника: «Борис Фаддеевич, напомните, пожалуйста, определение пучка»⁵.

4 января 1963 года Аскольд Иванович защищает докторскую диссертацию «Исследование свойств отрезков эйлеровских произведений дзета-функций различных алгебраических полей и их приложение к задачам аналитической и алгебраической теории чисел»; с 1964 года он работает старшим научным сотрудником ЛОМИ, а с 1986 года — ведущим научным сотрудником. Как уже отмечалось выше, в 1965 году Аскольд Иванович доказал усредненную плотностную гипотезу для L -рядов Дирихле. Этот замечательный результат не был по-настоящему оценен в то время; только в 1998 году А. И. Виноградов получил премию имени И. М. Виноградова за эту работу.

Начиная с середины 60-х годов прошлого века научные интересы Аскольда Ивановича существенно расширяются. Так, в 1967 году он принял попытку (не успешную) доказать известную гипотезу Куммера

⁵ Возможно, что это апокриф, тем паче что в книге Вейля пучки не упоминаются. Л. Д. Фаддеев рассказывал, что когда он в ЛГУ выступал с лекциями на студенческом семинаре по квантовой теории поля, О. А. Ладыженская начинала каждый доклад с обращения «Людвиг, напомните, пожалуйста, определение операторов рождения и уничтожения».

о распределении аргументов кубических сумм Гаусса, предложил интересный подход к аналитическому продолжению L -рядов Артина и их связи с законом взаимности. Переломным для научного мировоззрения Аскольда Ивановича стал 1973 год, когда он оказался на лекциях Л. Д. Фаддеева о формуле следа Сельберга на математической школе в Вильнюсе. А. И. Виноградов одним из первых понял, что спектральная теория автоморфных функций может дать новый мощный метод в аналитической теории чисел, и целиком посвятил себя этой тематике⁶. Полный список работ А. И. Виноградова можно найти на его странице на Math-Net.Ru [3].



Начиная с этого момента завязывается дружба Виноградова с Л. Д. Фаддеевым и его молодыми учениками А. Б. Венковым и Л. А. Тахтаджяном. Аскольд Иванович активно участвует в жизни ЛОМИ, организует еженедельный семинар по современным методам теории чисел с участием А. Б. Венкова, Н. В. Проскурина, М. М. Скриганова и Л. А. Тахтаджяна. На семинаре выступали Б. Б. Венков и Б. Ф. Скубенко, приезжали из Москвы С. А. Степанов и А. Н. Тюрин и многие другие. Аскольд Иванович активно поддерживал Н. В. Кузнецова в сложные моменты его жизни. Новые идеи привели Н. В. Кузнецова к «формуле следа Кузнецова» — одному из базовых элементов современной аналитической теории чисел. Из Москвы также приезжал молодой В. А. Быковский, выпускник МГУ и ученик

⁶ Начиная с пионерских работ Н. В. Кузнецова — «формула следа Кузнецова» — этот метод с успехом применялся к различным задачам теории чисел. Мы отсылаем читателя к статьям работающего в США польского математика Хенрика Иванца, американского математика Питера Сарнака и их соавторов.

Н. М. Коробова. Он был на распутье, так как И. М. Виноградов во время беседы с ним посоветовал «подвинуть» границу нулей дзета-функции Римана. А. И. Виноградов познакомил Быковского с формулой следа Кузнецова, и с того времени началась успешная работа Виктора в теории чисел: в 1982 году Л. Д. Фаддеев представляет его заметку в «Доклады Академии наук СССР»; сейчас В. А. Быковский — известный российский математик, член-корреспондент РАН.

Совместная работа Аскольда Ивановича с Л. А. Тахтаджяном «Дзета-функция аддитивной проблемы делителей и спектральное разложение автоморфного лапласиана» была признана в 1984 году лучшей математической работой года Отделения математики АН СССР.

Аскольд Иванович принимал активное участие в научной и общественной жизни ЛОМИ, во всех неформальных мероприятиях лаборатории математических проблем физики, руководимой Л. Д. Фаддеевым. Этому способствовала и география кабинетов на 5-м этаже ЛОМИ: 506 — Л. Д. Фаддеев, 507 — А. Б. Венков и Л. А. Тахтаджян, 508 — А. И. Виноградов. Аскольд Иванович приходил по присутственным дням, в понедельник и четверг, и его кабинет становился центром общения, научного, литературного и общественно-политического. Аскольд Иванович традиционно устраивал чаепития, собирающие друзей как из соседних кабинетов, так и с других этажей ЛОМИ; Б. Б. Венков и Б. Ф. Скубенко были частыми участниками.

При жизни И. М. Виноградова у Аскольда Ивановича были хорошие отношения с сотрудниками МИАН, которые осложнились после кончины И. М. Виноградова в 1983 году в результате внутренних противоречий в МИАН. Вследствие этого в 1987 году Аскольд Иванович переехал к Н. В. Кузнецову и В. А. Быковскому в Хабаровск, где с 15 февраля 1987 года работал главным научным сотрудником в Институте прикладной математики Дальневосточного отделения АН СССР. В декабре 1991 года он вернулся в ЛОМИ. В эти годы А. И. Виноградов работает только над основными задачами теории чисел, до конца своих дней оставаясь уверенным в возможностях спектральной теории автоморфных функций.

Аскольд Иванович был уникальным человеком: морской офицер — истинный джентельмен, как это понимали в XIX веке, известный математик, приятный собеседник для беседы и дискуссии, ни при каких обстоятельствах не повышающий голос, поклонник балета и художественной гимнастики (в молодые годы) и спортсмен-самбист, который мог поставить на место любого хулигана. Учась в Военно-морском училище, Аскольд Иванович был членом ВЛКСМ, в 1956 году ездил на уборку урожая с целинных земель в Казахстан, а в 1957–1961 гг. был инструктором ЛОМИ по ПВО. В партию он не вступал, относясь критически ко многим явле-



ниям внутренней и внешней политики КПСС и к ее идеологии. Одновременно Аскольд Иванович был патриотом своей страны, с глубоким уважением относясь к Великой Отечественной войне и верховному главнокомандующему⁷. Он, как и Б. Ф. Скубенко, очень увлекался мемуарной литературой о войне и запоем читал воспоминания как советских военачальников, так и немецких генералов.

Аскольд Иванович вел очень скромный образ жизни и был постоянен во всех своих привычках. Так, в советское время он ежегодно летом ездил отдыхать в Новый Свет в Крыму, старался максимально ходить пешком, регулярно приезжал в Комарово и во время прогулок с Л. А. Тахтаджяном любил обсуждать новые подходы к различным задачам теории чисел. Из напитков мог позволить чуть пригубить шампанское, в то же время снисходительно относясь к вкусам и пристрастиям своих коллег. Был очень щедр и всегда помогал попавшим в беду старым друзьям. Хабаровский период жизни Аскольда Ивановича отражен в обзоре В. А. Быковского [4].

Аскольд Иванович часто удивлялся, читая в желтой прессе о «контактах с инопланетянами» и о людях, якобы похищенных для опытов. Он говорил: «Если бы я с ними встретился, то сразу спросил, как доказывать гипотезу Римана!» Возможно, сейчас он знает...

Л. А. Тахтаджян

Литература

- [1] Виноградов А. И. О плоскостной гипотезе для L -рядов Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29, № 4. С. 903–934.
- [2] Bombieri E. On the large sieve // Mathematica. 1965. V. 12. P. 201–225.
- [3] http://www.mathnet.ru/php/person.phtml?option_lang=rus&personid=21757
- [4] Быковский В. А. О научном творчестве Аскольда Ивановича Виноградова // Чебышевский сб. 2019. Т. 20, № 3. С. 22–26.

Виктор Петрович Хавин

(1933–2015)

В. П. Хавин, выдающийся специалист по комплексному и гармоническому анализу, был одним из лидеров математического сообщества Ленинграда—Санкт-Петербурга в течение 50 лет, начиная с середины 1960-х годов. Он основал и сформировал современную санкт-петербургскую школу анализа, которая по-прежнему продолжает производить новые поколения блестящих ученых. Его основные научные достижения относятся к области комплексной аппроксимации, теории пространств аналитических функций, теории потенциала и к различным проявлениям неопределенности в гармоническом анализе.

Виктор Петрович Хавин родился 7 марта 1933 года в Ленинграде. Его отец, Петр Яковлевич Хавин, был филологом-русистом, одним из организаторов отделения (позднее факультета) журналистики Санкт-Петербургского университета. Во время Великой Отечественной войны он служил в отделе пропаганды Советской армии и был награжден несколькими медалями. Остальные члены семьи были эвакуированы в Ташкент, тем самым избежав ужасов блокады Ленинграда. Мать Виктора, Дина Яковлевна Хавина, была музыкантом, скрипачкой Ленинградского филармонического оркестра и оркестра Михайловского (Малого) оперного театра.

После возвращения в Ленинград Хавин окончил в 1950 году одну из лучших школ города, бывшую Первую Санкт-Петербургскую гимназию. По его собственным словам, в это время Виктор Петрович больше склонялся к научной карьере в гуманитарных науках. Он свободно говорил как минимум на трех иностранных языках (немецкий, французский и английский), и естественным выбором для него был бы филологический



факультет университета. Однако внезапно отец категорически запретил ему даже думать о филологии и предложил на выбор физику или математику в качестве предмета будущей специализации. Причиной этого была публикация «научного» труда И. В. Сталина «Марксизм и вопросы языкознания» и вполне обоснованные опасения отца, что филология станет ареной идеологических чисток, как это произошло в тот же период с биологией. К счастью для ленинградского математического сообщества, Виктор выбрал математику и в 1950 году поступил на математико-механический факультет (известный просто как матмех).

Среди учителей Хавина в Ленинградском университете были автор знаменитого курса анализа Г. М. Фихтенгольц, будущий лауреат Нобелевской премии по экономике Л. В. Канторович и автор популярного «Курса высшей математики» В. И. Смирнов. Хавин регулярно участвовал в исследовательском семинаре кафедры анализа. В 1953 году он сделал там серию докладов по новой и влиятельной в то время теории двойственности, за которыми последовал обзор по «аналитическим функционалам» П. Леви; позднее Хавина пригласили повторить эти доклады на знаменитом семинаре Гельфанда в Москве.

В 1955 году Виктор Хавин начал обучение в аспирантуре под руководством Л. В. Канторовича и, неформально, В. И. Смирнова. Хавин всегда считал их влияние на свое математическое образование очень значительным. Однако ни один из них не был научным руководителем в традиционном смысле слова: никто не направлял молодого аспиранта в выборе темы для будущих исследований. Например, Канторович сразу сказал, что сейчас он занят приложениями к экономике и что Хавин может сам выбрать себе направление исследований. Таким образом, В. П. Хавин в некотором смысле оказался самоучкой в математике.

В. П. Хавин защитил кандидатскую диссертацию в 1959 году. В этот момент у него уже было опубликовано 6 журнальных статей и он был автором нескольких замечательных результатов. Одним из них было решение задачи (поставленной известным аналитиком В. В. Голубевым в 1920-х годах) о представлении функции, аналитической в дополнении к простой спрямляемой кривой, обобщенным рядом Лорана. Другой важный результат этого периода относится к задаче о разделении особенностей — к этой теме Хавин не раз возвращался впоследствии. Задача здесь состоит



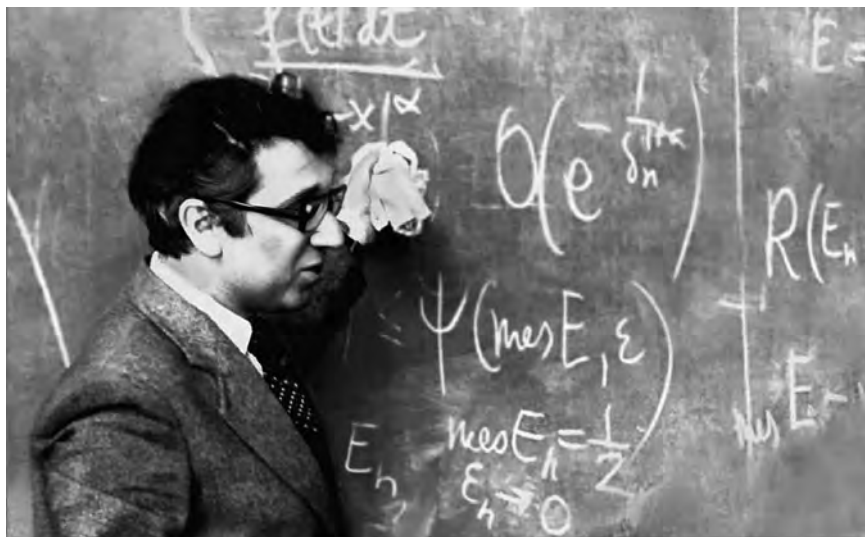
в том, чтобы представить функцию, аналитическую в пересечении двух областей, в виде суммы функций, аналитических в соответствующих областях. Применяя методы двойственности, В. П. Хавин получил короткое доказательство важных результатов Ароншайна.

Однако, несмотря на блестящую защиту кандидатской диссертации, сразу после этого Хавину пришлось пережить тяжелый период жизни. В силу антисемитских ограничений, широко (но, разумеется, неофициально) распространенных в Советском Союзе в то время, ему было отказано в преподавательских должностях в нескольких ленинградских технических вузах. Огромную поддержку в этой отчаянной ситуации ему оказал профессор Д. К. Фаддеев, добившийся с помощью своего авторитета у администрации университета, чтобы В. П. Хавина приняли на работу.

Вся жизнь В. П. Хавина была связана с математико-механическим факультетом Санкт-Петербургского (Ленинградского) университета — сначала в качестве ассистента (1959–1962 гг.), затем доцента (1962–1970 гг.); в 1971 году Хавин был избран профессором — эту должность он занимал до своей смерти в 2015 году. В 1997–2004 годах В. П. Хавин был заведующим кафедрой математического анализа.

В 1960-е годы В. П. Хавин сыграл ключевую роль в усовершенствовании преподавания математического анализа в Ленинградском университете. Вместе с Г. П. Акиловым (одним из его учителей и близким другом) он модернизировал курс анализа, в частности, включив в базовый курс теорию интеграла Лебега и интегрирование дифференциальных форм в $\mathbb{R}^n$. Для того времени это был революционный шаг, сделанный раньше, чем это произошло в Сорбонне, МГУ и других ведущих университетах мира. С тех пор Хавин прочитал этот курс 17 раз и опубликовал учебник на основе своих лекций. Он также прочел множество спецкурсов как в Ленинграде—Санкт-Петербурге, так и в качестве приглашенного профессора во многих городах бывшего Советского Союза и за рубежом (так, в 1995–2002 годах В. П. Хавин преподавал несколько семестров в университете Макгилла в Монреале). Всегда глубокое и современное содержание лекций Хавина, так же как и очень живое и ясное изложение, всегда собирали полные аудитории и привлекали наиболее талантливых студентов.

Приведем краткий обзор математических интересов и основных достижений В. П. Хавина в области комплексного и гармонического анализа. Одним из его ранних важных результатов стал интегральный аналог теоремы Витушкина о равномерной рациональной аппроксимации. Как оказалось, в случае среднеквадратичного приближения роль аналитической емкости играет классическая логарифмическая емкость. В. П. Хавин



Во время лекции в Уфе, 1980

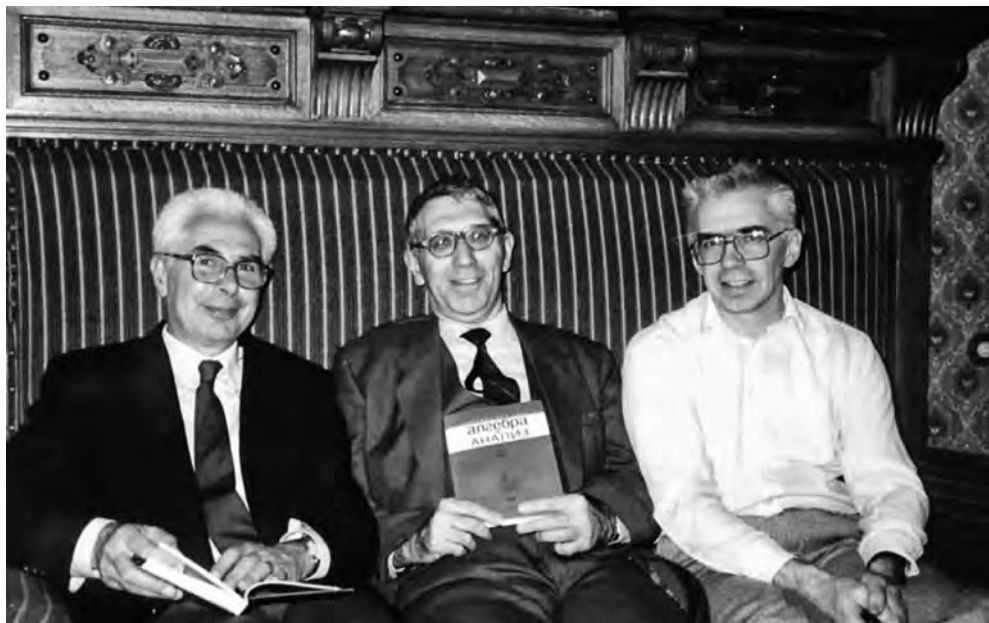
несколько раз возвращался к задаче о разделении особенностей с оценками (например, в классе ограниченных функций), в частности, в совместных статьях с А. Нерсесяном и Ж. Ортега-Серда. Его последняя работа на эту тему появилась в 2007 году.

В 1970-е годы Хавин открыл и изучил явление двукратного падения гладкости аналитической функции по сравнению с гладкостью ее модуля на границе (считается, что это свойство было впервые отмечено Л. Карлсоном и С. Якобсом, которые, однако, не опубликовали его). Еще одна серия статей Хавина относилась к свойствам аналитических функций, представимых интегралами Коши комплексных мер.

В многолетнем сотрудничестве с В. Г. Мазьей Хавин разработал так называемую нелинейную теорию потенциала, которая была с успехом применена к изучению задач единственности и аппроксимации для аналитических и гармонических функций, а также к исследованию задачи Коши для уравнения Лапласа.

В серии совместных работ с Е. Малинниковой и С. Смирновым были исследованы аппроксимационные свойства гармонических векторных полей и дифференциальных форм; были доказаны многомерные аналоги теорем Рунге и Хартогса—Розенталя, а также показано, что локализационный принцип Бишоп перестает быть справедливым в размерностях выше двух.

Одним из любимых сюжетов Хавина был так называемый *принцип неопределенности* — эвристический принцип, утверждающий, что функ-



Ж.-П. Кахан, В. П. Хавин (с самым первым номером журнала «Алгебра и анализ» в руках) и Н. К. Никольский после доклада Кахана в ЛОМИ, 1989

ция и ее преобразование Фурье не могут быть малы одновременно. Классическим примером служит принцип неопределенности Гейзенберга, однако «малость» может быть интерпретирована многими различными способами (малость носителя, быстрое убывание на бесконечности и т. д.), многие из которых приводят к глубоким и важным задачам. В серии статей (частично совместных с его ученицей Бурглинд Ёрикке) Хавин обнаружил новые «принципы неопределенности» для операторов свертки. Другой глубокий результат Хавина относится к принципу неопределенности для потенциалов М. Рисса и (не)возможности его обобщения на высшие размерности.

Кульминацией работы В. П. Хавина в области принципа неопределенности стала его фундаментальная монография «The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis», написанная совместно с Б. Ёрикке и опубликованная издательством Шпрингер в 1994 году. Это настоящая энциклопедия, содержащая не только все классические результаты в области принципа неопределенности (часто с новыми и более концептуальными доказательствами), но и многочисленные оригинальные результаты, полученные участниками семинара Хавина.

Список публикаций В. П. Хавина (насколько это возможно, полный) можно найти в [1].

Однако, возможно, самый важный математический результат В. П. Хавина, его «главная теорема», — это созданная им математическая школа. Эта школа сформировалась вокруг объединенного семинара университета и Математического института им. В. А. Стеклова (ЛОМИ) по теории функций и теории операторов. В 1963 году, когда Хавин организовал свой семинар, в нем участвовали только четверо его молодых учеников. Увеличиваясь со временем, он стал одним из важнейших культурных событий для всего ленинградского математического сообщества, «обязательным для посещения» для всех аналитиков Ленинграда—Санкт-Петербурга. Многие выдающиеся аналитики начинали свою математическую жизнь в этом семинаре.

Значительную часть своего времени и сил В. П. Хавин уделял воспитанию молодых талантов. Он был научным руководителем 31 кандидатской и PhD диссертации, и, согласно данным с сайта «Математическая генеалогия» (Mathematics Genealogy Project), число его «потомков» в настоящее время превышает 170. Четверо из его бывших студентов (А. Александров, Ф. Назаров, С. Смирнов, А. Логунов) получили престижную премию Салема в области гармонического анализа; еще 6 премий Салема у его математических «внуков» (А. Вольберг, С. Треиль, Н. Макаров, С. Петермихль, Жан Дапенг, Д. Челкак). В 2010 году Станислав Смирнов был награжден медалью Филдса.

Огромный успех в создании этой среды, настоящего инкубатора талантов, безусловно, был в значительной степени обязан харизматической личности В. П. Хавина и его энтузиазму. Хавин создавал удивительную творческую атмосферу, в которой математические идеи, казалось, витали в воздухе. Виктор Петрович неизменно привлекал учеников и коллег своей доброжелательностью, открытостью, интеллектуальной щедростью. Это был удивительно добрый и порядочный человек, причем, что очень редко встречается, абсолютный бесребренник, никогда не задумывавшийся о том, что такое деньги.

Научная и педагогическая деятельность В. П. Хавина получила заслуженное (хотя, на наш взгляд, запоздалое и неполное) признание. Он получил несколько российских и международных наград. В 1993 году В. П. Хавину было присуждено звание Doctor Honoris Causa университета Линчёпинга (Швеция), он был выбран Спенсеровским лектором университета штата Канзас (США, 1996) и Онзагеровским профессором университета Тронхейма (Норвегия, 2000). В 2004 году его тонкие результаты о допустимых мажорантах для модельных подпространств были удостоены премии Робинсона Канадского математического общества. Также Хавин был награжден премией Чебышёва правительства Санкт-Петербурга (2011) и был избран почетным профессором Санкт-Петербургского университета.



В. П. Хавин и Дж. Бреннан, Институт Эйлера, 2008

В 2003 году ему было присвоено звание «Заслуженный деятель науки Российской Федерации», а в 2011 году он был награжден орденом Дружбы.

Очень важную роль в жизни Хавина играли классическая музыка и литература. Среди его любимых авторов следует упомянуть Льва Толстого, особенно «Войну и мир» (эту книгу В. П. изучал, как Библию), Пушкина, Тютчева, Булгакова и Гроссмана. С его замечательными способностями к языкам Хавин предпочитал читать иностранных авторов в оригинале, особенно на немецком (Гёте, Гейне, Томас Манн) и французском (например, романы и эссе Ж.-П. Сартра). В. П. Хавин часто использовал в повседневной жизни литературные цитаты, если они отвечали его мыслям и переживаниям в данный момент. Один из его последних математических шедевров, чисто вещественное и, возможно, самое прямое доказательство знаменитой теоремы Берлинга—Мальявена о мультипликаторах, появилось в 2005 году в статье «Теорема Бёрлинга—Мальявена о мультипликаторах: седьмое доказательство». Название подчеркивало тот факт, что уже существовало несколько (около шести) различных доказательств этой исключительно глубокой теоремы. В то же время это была аллюзия к знаменитому роману М. А. Булгакова «Мастер и Маргарита». В качестве эпиграфа Виктор Петрович выбрал следующую цитату: *«...На это существует седьмое доказательство, и уж самое надежное! И вам оно сейчас будет предъявлено»*. (Напомним, что Булгаков/Воланд говорит о доказательстве существования дьявола.)

В. П. Хавин также всю жизнь проявлял глубокий интерес к философии. К сожалению, не осталось никаких письменных следов этого интереса, за одним важным исключением — текста его выступления на церемонии присуждения звания Doctor Honoris Causa в университете Линчёпинга (Mathematics as a source of certainty and uncertainty [2]) — замечательно-го короткого эссе о мировоззренческой и философской ценности математического мировосприятия.

Подробную математическую биографию В. П. Хавина можно найти в сборнике «50 Years with Hardy Spaces: A Tribute to Victor Havin» [1], в то время как публикации [4], [5] содержат живые воспоминания самого Хавина о его молодых годах на матмехе.

А. Д. Баранов, Н. К. Никольский

Литература

- [1] *Baranov A., Kisliakov S., Nikolski N.* Victor Petrovich Havin, A Life devoted to Mathematics // 50 Years with Hardy Spaces. A Tribute to Victor Havin / Eds. A. Baranov, S. Kisliakov, N. Nikolski. Birkhäuser, 2018. P. 3–66. (Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 261).
- [2] *Havin V. P.* Mathematics as a source of certainty and uncertainty // 50 Years with Hardy Spaces. A Tribute to Victor Havin / Eds. A. Baranov, S. Kisliakov, N. Nikolski. Birkhäuser, 2018. P. 67–73. (Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 261).
- [3] Памяти Виктора Петровича Хавина // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3, вып. 1. С. 173–177.
- [4] *Хавин В. П.* Интервью // Матмех ЛГУ-СПбГУ. Шестидесятые и не только: от истоков до дней недавних. Сборник воспоминаний / Под ред. Д. Эпштейна, Я. Шапиро, С. Иванова. СПб.: ООО “Копи-Р Групп”, 2012. С. 113–136. См. http://www.mathsoc.spb.ru/history/mmh_mem.pdf.
- [5] *Хавин В. П.* О Владимире Ивановиче Смирнове // Матмех ЛГУ-СПбГУ. Шестидесятые и не только: от истоков до дней недавних. Сборник воспоминаний / Под ред. Д. Эпштейна, Я. Шапиро, С. Иванова. СПб.: ООО “Копи-Р Групп”, 2012. С. 137–145. См. http://www.mathsoc.spb.ru/history/mmh_mem.pdf.
- [6] *Никольский Н. К.* К математической биографии В. П. Хавина — 50 лет в пространствах Харди (видео) // Заседание Санкт-Петербургского математического общества, посвященное памяти В. П. Хавина (1933–2015). 29 декабря 2015. http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=eng&presentid=13240

В. П. Хавин и принцип неопределенности в гармоническом анализе (VP и UP)

Одна из главных областей исследований Виктора Петровича (VP) Хавина и многих его учеников носит название принцип неопределенности (UP — Uncertainty Principle) в гармоническом анализе. Она представляет собой обширное собрание математических проблем и глубоких результатов и основывается на идеях, высказанных Норбертом Винером в 1920-х годах. Исходный постулат этого принципа относится к анализу Фурье и может быть сформулирован так.

Функция (мера, распределение) f и ее преобразование Фурье $\hat{f}$ не могут одновременно быть малыми.

Название принципа явно отсылает к физике, поскольку соотношение Гейзенберга является одним из ранних его примеров. Это соотношение означает, что вторые моменты функции и ее преобразования Фурье не могут одновременно быть малыми:

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} x^2 |\hat{f}(x)|^2 dx \geq \frac{\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^4}{16\pi^2}.$$

Оказалось, что «малость» в общей формулировке Винера может пониматься многими различными способами (малость носителя, быстрое убывание на бесконечности, большой размер множества нулей и т. д.), нередко приводящими к глубоким и важным проблемам. В настоящее время область применимости UP вышла далеко за первоначальные границы и ныне, кроме проблем классического анализа Фурье, включает исследование базисов и реперов в банаховых пространствах, гармонический анализ на группах, спектральные задачи для дифференциальных операторов и многие другие проблемы, см. например [4] или [10].

Как и в нескольких других областях анализа, вклад В. П. Хавина в исследование UP широк и значителен. Он включает не только оригинальные результаты, но также преподавание и пропаганду этой тематики среди его многочисленных коллег и друзей в сообществе петербургских спе-



VP и UP: f и $\hat{f}$

циалистов по анализу. Благодаря его усилиям многие классические задачи, связанные с UP, изучались и были решены членами этого сообщества, а на семинаре Хавина—Никольского был сделан ряд выдающихся докладов.

Как наставник, VP обладал редким даром правильно выбрать задачу для каждого из своих учеников. Задача должна была удовлетворять двум необходимым условиям: во-первых, VP не должен был знать, как ее решать. Во-вторых, VP должен был знать, благодаря своей колоссальной интуиции, что решение задачи лежит где-то в пределах возможностей данного студента. Многие достижения в области UP появились таким образом.

Один из системообразующих результатов VP в области UP состоит в утверждении, крайне удивительном для своего времени, что UP выполняется не только для преобразования Фурье, но и для многих операторов свертки, что поставило естественный вопрос об описании ядер с таким свойством. Эта идея развилась в подробные теории «эпсилон-локальных» и «антилокальных» операторов с многочисленными естественными примерами (детали см. в [7], часть II, глава 5).

Как пример выхода темы UP за пределы анализа Фурье, рассмотрим общеизвестную теорему М. Рисса: если мера и ее потенциал Рисса равны нулю на одном и том же непустом открытом множестве в $\mathbb{R}^n$, то мера равна нулю тождественно. В своей статье [5] VP существенно усилил эту теорему в одномерном случае, доказав, что если мера абсолютно непрерывна с гёльдеровской плотностью некоторого определенного порядка, то открытое множество из утверждения Рисса можно заменить произвольным борелевским множеством положительной меры. Проблема распространения этого результата на $\mathbb{R}^n$ и замены гёльдеровости на непрерывность плотности оставалась открытой много лет, и VP исследовал ее вместе с несколькими своими учениками. В итоге проблема была решена для $\mathbb{R}^n$ в отрицательном смысле В. П. Хавиным и Д. Беляевым (его «математическим внуком») в статье [1]. Их сложная конструкция отчасти использует технику Ж. Бургена и Т. Вольфа.

Одна из самых глубоких теорий, связанных с UP, — известная теория Бёрлинга—Мальявена (BM-теория), которая породила знаменитую теорему о полноте семейств экспоненциальных функций $\{e^{i\lambda_n z}\}$ в пространстве $L^2(0, 1)$. Первоначальные доказательства, появившиеся в 1960-х годах [2, 3], продолжают до сих пор восхищать специалистов по гармоническому анализу. Значительная часть работы VP по UP относилась к изучению и пропаганде BM-теории среди его учеников и коллег. На протяжении многих лет он сделал ряд существенных улучшений и обобщений в различных частях теории, что открыло возможности для дальнейших исследований, которые продолжаются до сих пор силами многих математиков. Одна из жемчужин этого направления работы VP — статья «Седьмое доказательство...», совместная с его бывшими учениками Ж. Машреги и Ф. Назаровым. Заглавие этой статьи отсылает к известному сюжету из романа М. Булгакова «Мастер и Маргарита», а ее текст содержит, среди прочего, единственное «вещественное» доказательство теоремы Бёрлинга—Мальявена о мультипликаторе, принадлежащее Ф. Назарову. В статье ставятся естественные вопросы о так называемых допустимых мажорантах, на которые позже был дан ответ учениками VP А. Барановым и Ю. Беловым — независимо или совместно с VP.

Кульминацией работы В. П. Хавина в области UP стала основополагающая книга «The uncertainty principle in harmonic analysis» [7], написанная совместно с его ученицей Б. Ёрикке (более короткий обзор, содержащий изложение этой книги, см. в [6]). Книга охватывает классические результаты по UP, дает новые доказательства некоторых из них, во многих случаях усовершенствованные самими авторами, и включает полное изложение BM-теории. Для некоторых теорем приведены три различных доказательства. Представленные результаты образуют две группы: те, которые

могут быть доказаны вещественными методами, и те, которые требуют применения комплексного анализа.

Книга, написанная в 1980-х годах, стала результатом большого исследовательского проекта, осуществленного авторами в тесном сотрудничестве со многими участниками семинара Хавина—Никольского (в основном учениками VP), включая Ф. Назарова, С. Хрущева, А. Боричева, А. Вольберга и ряд других. Их глубокие оригинальные результаты вошли в книгу как параграфы и главы после долгих часов работы, проведенных в трехкомнатной квартире VP на острове Голодай. Неустанное стремление к совершенству воплотилось в текст, предназначенный еще многие годы быть справочником для специалистов. Вместе с книгой «The Logarithmic Integral» [9] П. Кусиса, друга и коллеги VP по университету Макгилла, книга Хавина и Ёрикке принадлежит к числу самых значительных публикаций в области UP.

А. Г. Полторацкий

Литература

- [1] *Beliaev D. B., Havin V. P.* On the uncertainty principle for M. Riesz potentials // *Ark. Mat.* 2001. V. 39, № 1. P. 223–243.
- [2] *Beurling A., Malliavin P.* On Fourier transforms of measures with compact support // *Acta Math.* 1962. V. 107, № 3–4. P. 291–309.
- [3] *Beurling A., Malliavin P.* On the closure of characters and the zeros of entire functions // *Acta Math.* 1967. V. 118. P. 79–93.
- [4] *Folland G. B., Sitaram A.* The uncertainty principle: A mathematical survey // *J. Fourier Anal. Appl.* 1997. V. 3, № 3. P. 207–238.
- [5] *Хавин В. П.* Принцип неопределенности для одномерных потенциалов М. Рисса // *Докл. АН СССР.* 1982. Т. 264, № 3. С. 559–563.
- [6] *Havin V. P.* On the Uncertainty Principle in Harmonic Analysis // *Twentieth Century Harmonic Analysis* / Ed. J. S. Byrnes. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. Springer, 2001. P. 3–29.
- [7] *Havin V., Jörnicke B.* The uncertainty principle in harmonic analysis. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, 1994.
- [8] *Mashreghi J., Nazarov F. L., Havin V. P.* Beurling—Malliavin multiplier theorem: the seventh proof // *St. Petersburg Math. J.* 2006. V. 17, № 5. P. 699–744.
- [9] *Koosis P.* The Logarithmic Integral. V. I. Cambridge: CUP, 1988.
- [10] *Poltoratski A.* Toeplitz Approach to Problems of the Uncertainty Principle. AMS/NSF, 2015. (CBMS Regional Conference Series in Mathematics. V. 121).

Людвиг Дмитриевич Фаддеев (1934–2017)

Людвиг Дмитриевич Фаддеев был одним из гигантов математической физики. Его фундаментальный вклад в науку включает решение квантовой задачи трех тел, развитие квантования калибровочных теорий, открытие полной интегрируемости по Гамильтону уравнения Кортевега—де Фриза, создание основ интегрируемых квантовых теорий поля и квантовых групп. Он создал одну из самых влиятельных в мире исследовательских групп в математической физике, в течение многих лет был директором Ленинградского отделения Математического института имени Стеклова Академии наук СССР, а затем России. В 1987–1990 годах он был президентом Международного математического совета (IMU).

Людвиг Фаддеев родился в Ленинграде (ныне Санкт-Петербург) в семье математиков Дмитрия Константиновича и Веры Николаевны Фаддеевых. Его отец был еще и талантливым пианистом, поэтому Людвиг рос окруженный математикой и классической музыкой. Ближе к окончанию школы он все-таки задумывался о карьере профессионального музыканта, но все же решил поступать в университет. В то время его отец был деканом факультета математики и механики, поэтому Людвиг поступил на физический факультет Ленинградского университета. Когда он учился на третьем курсе, на факультете было создано подразделение, специализирующееся на математической физике (кафедра математической физики). Л. Д. Фаддеев и Н. Н. Уральцева были в числе первых 5 студентов, окончивших обучение в этой группе.

Студентом Фаддеев посещал семинар О. А. Ладыженской по книге К. О. Фридрихса «Математические аспекты квантовой теории поля». Ольга Александровна Ладыженская стала его научным руководителем. Пер-



вым делом она предложила Людвигу изучить работы Н. Левинсона по обратной теории рассеяния и представить их на семинаре. Это было важное событие: задачи обратного рассеяния очень долго влияли на его исследования. Он писал об О. А. Ладыженской: «Я навсегда благодарен ей за то направление, которое она мне дала...» Портрет Ладыженской он хранил на своем рабочем столе до последнего дня своей жизни.

В 1956 году он закончил университет и поступил в аспирантуру к О. А. Ладыженской. В своей кандидатской диссертации Фаддеев решил обратную задачу рассеяния для одномерного оператора Шрёдингера на прямой с быстро убывающим потенциалом. Он защитил кандидатскую диссертацию в 1959 году. Это было началом долгой и плодотворной жизни Фаддеева в математической физике.

После защиты кандидатской диссертации он продолжил работу над задачами рассеяния. Он нашел полное решение задачи трехчастичного рассеяния, решил обратную задачу для трехмерного оператора Шрёдинера и получил другие важные результаты, такие как исследование модулярных функций методами теории рассеяния. Затем он перешел к совершенно другой теме — к квантованию калибровочных полей. Вместе с В. Н. Поповым он разработал теорию возмущений для квантовой теории Янга—



Слева направо: А. Седрикян, В. Гарзадян, А. Поляков, А. Б. Мигдал, Рената Каллош, А. А. Мигдал и Л. Д. Фаддеев на конференции в Цахкадзоре (1983 год).

Миллса. Эти результаты, известные как фиксация калибровки Фаддеева—Попова, стали революционным открытием. Они до сих пор используются в теоретической физике высоких энергий. После этого Фаддеев снова сменил тему. Он сосредоточился на солитонных уравнениях и вместе с В. Е. Захаровым показал, что уравнение Кортевега—де Фриза — это гамильтонов поток бесконечномерной полностью интегрируемой гамильтоновой системы. Это был первый пример интегрируемой бесконечномерной гамильтоновой системы. Вместе с Л. А. Тахтаджяном и В. Е. Захаровым он доказал полную интегрируемость двумерной релятивистской теории поля, известной как уравнение синус-Гордона.

Для Фаддеева исследование интегрируемой нелинейной классической теории поля было шагом на пути к построению непертурбативной квантовой теории поля. Поэтому он начал работать над квантованием классических интегрируемых теорий поля и сделал полезные открытия, такие как алгебраический анзац Бете, а также ввел термин «уравнение Янга—Бакстера». Эта серия работ привела к открытию квантовых групп. Многие работы в этот период были выполнены в сотрудничестве с его младшими коллегами по лаборатории математических проблем физики в ЛОМИ. Подробный рассказ об этом, а также детальное описание вклада Фаддеева в науку можно найти в [1].

Л. Д. Фаддеев любил спорт. В молодые годы он был гребцом восьмерки и членом команды факультета по лыжным гонкам. Любовь к лыжам и походам он сохранил на всю жизнь. Он любил литературу, историю, му-



Кафедра математической физики на физфаке ЛГУ. Стоят, слева направо: В. Л. Олейник, Б. С. Павлов, В. Б. Матвеев, И. А. Молотков, В. Ф. Лазуткин, С. Ю. Славянов, А. Р. Игс, А. Н. Попов. Сидят, слева направо: В. С. Буслаев, Л. Д. Фаддеев, М. С. Бирман, В. С. Булдырев, Н. В. Смирнов

зыку. Среди его любимых произведений были «Ада» В. Набокова и «Пан» К. Гамсуна. У него была прекрасная коллекция музыки, и он очень гордился ею. Изадор Зингер вспоминал, что во время первого визита Людвиг в Бостон они провели ночь, посещая джаз-бары.

Математическая физика стала самостоятельной областью науки примерно в 1950–1960-х годах. Существует много взглядов на то, что такое математическая физика, насколько математически строгой она должна быть и насколько она должна быть близка к физике. По мнению Л. Д. Фаддеева, цель математического физика состоит не в том, чтобы сделать строгим то, что уже установлено физиками с достаточной степенью достоверности, а в том, чтобы идти дальше и выше, открывая новые явления и структуры, используя физическую и математическую интуицию на основе математических знаний. В одной из статей, рассчитанных на широкую аудиторию, он сказал: «Если бы меня спросили, кто из физиков XX века произвел на меня наибольшее впечатление, я бы ответил: Поль Дирак, Герман Вейль и Владимир Фок». Это интересная иллюстрация к его тезису о математической физике: Фаддеев считал Г. Вейля математическим физиком. На вопрос о направлениях в математической и теоретической физике Фаддеев всегда отвечал: «Есть только одно направление и цель: понимание структуры материи и пространства-времени».

В области физики он считал себя продолжателем традиций В. А. Фока. С математической стороны на него повлиял знаменитый семинар В. И. Смирнова по математической физике в Ленинграде. Во многом Фаддеев был продолжателем петербургской математической школы, восхо-



Л. Д. Фаддеев с Ч. Янгом и Р. Д. Бакстером

дядей к Эйлеру и включающей такие имена, как М. В. Остроградский, П. Л. Чебышёв, А. М. Ляпунов, А. А. Марков, В. И. Смирнов и многие другие.

У Л. Д. Фаддеева было много друзей и коллег по всему миру. Питер Лакс, Луис Ниренберг, Изадор Зингер, Юрген Мозер были среди математиков, дружбу с которыми Людвиг особенно ценил.

В 1972 году он стал заведующим лабораторией математических проблем физики Ленинградского отделения Математического института Академии наук (ЛОМИ) в Москве. В 1976 году он был избран действительным членом Академии наук СССР и стал директором ЛОМИ.

Л. Д. Фаддеев инициировал выдающуюся серию конференций «Квантовые солитоны», проходивших каждый год в конце 1970-х — начале 1980-х годов.

Во время распада Советского Союза наука, финансируемая государством, стала одной из первых жертв стремительного перехода к рыночной экономике: не имея иных источников денег, она оказалась в трудном положении. Л. Д. Фаддеев был одним из немногих людей в академической среде своей эпохи, кто не покидал страну на длительные периоды времени. В это время ему предложили стать директором Института теоретической физики в Стони Брук. Директором института тогда был Янг Чжэньнин, который собирался уходить на пенсию. Хотя Фаддеев был очень рад этому предложению, он отказался.

Он всегда считал важным, что наука по природе интернациональна, так что вполне естественно, что в 1987–1990 гг. он был президентом Международного математического союза.

Л. Д. Фаддеев был избран в ведущие академии, включая Шведскую королевскую академию (1989), Национальную академию США (1990), Французскую академию наук (2002) и Лондонское королевское общество (2010). Среди многих премий и наград, присужденных ему, медаль Дирака (1995), медаль имени Макса Планка (1996), медаль Эйлера (2002), премия Пуанкаре (2006), премия Шао (совместно с В. Арнольдом, 2008) и Большая золотая медаль им. М. В. Ломоносова (2013).

Немало подробностей о жизни и работе Л. Д. Фаддеева можно найти на сайте faddeev.com.

Автор признателен Л. Тахтаджяну за комментарии и предложения и возможность познакомиться с черновиком его статьи о Людвиге Дмитриевиче Фаддееве, написанной для Лондонского королевского общества. Кроме того, автор благодарит Ф. Смирнова за многочисленные полезные комментарии.

*Н. Ю. Решетихин
перевод Б. Р. Френкина*

Литература

- [1] Тахтаджян Л. А., Алексеев А. Ю., Арефьева И. Я., Семенов-Тянь-Шанский М. А., Склянин Е. К., Смирнов Ф. А., Шаташвили С. Л. Научное наследие Л. Д. Фаддеева. Обзор работ // Успехи матем. наук. 2017. Т. 72, вып. 6. С. 3–112.

Рассеяние и солитоны.

Три избранные работы Л. Д. Фаддеева

Здесь мы кратко рассмотрим три статьи Л. Д. Фаддеева, общая тема которых — спектральная теория и квантовая теория рассеяния. Первая статья основана на кандидатской диссертации Л. Д. Фаддеева. Вторая посвящена его основополагающим результатам в решении проблемы трех тел в квантовой теории рассеяния. В последней статье, совместной с В. Е. Захаровым, авторы показывают, что уравнение Кортевега—де Фриза (КдФ) является бесконечномерной интегрируемой гамильтоновой системой. Здесь существенно использованы результаты первой статьи.

Мы даже не будем пытаться описать, возможно, самое фундаментальное открытие Фаддеева, духи Фаддеева—Попова [11]. Эта революционная статья лежит в основе всех вычислений, которые выполняются физиками в стандартной модели. Нобелевский лауреат 1957 года Янг Чжэньнин в предисловии к избранным работам Л. Д. Фаддеева писал: «Многие, включая меня, чувствовали, что Фаддеев должен был разделить Нобелевскую премию 1999 г. с Хофтом и Велтманом». Подробнее об этой и других работах, не упомянутых здесь, см. [1].

1. Одномерное уравнение Шрёдингера

В своей кандидатской диссертации «Свойства S -матрицы для рассеяния на локальном потенциале», опубликованной в [4], Л. Д. Фаддеев полностью изучил прямое и обратное спектральное отображение в случае одномерного оператора Шрёдингера¹:

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x). \quad (1)$$

Если потенциал достаточно гладкий и быстро убывает на бесконечности, L имеет двукратно вырожденный абсолютно непрерывный спектр и конечное множество изолированных собственных значений. Фаддеев дока-

¹ Мы используем нестандартное обозначение L для оператора Шрёдингера, имея в виду применения к уравнению КдФ, где он известен как оператор Лакса.

зал, что потенциал $u(x)$ однозначно восстанавливается по так называемым данным рассеяния. Чтобы определить данные рассеяния, рассмотрим решения Йоста для дифференциального уравнения $Lf = k^2 f$:

$$f_1(x, k) = e^{ikx} + o(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad f_2(x, k) = e^{-ikx} + o(1), \quad x \rightarrow \infty.$$

Эти решения можно аналитически продолжить в верхнюю полуплоскость. Коэффициенты перехода определяются соотношением

$$f_2(x, k) = a(k)f_1(x, -k) + b(k)f_1(x, k),$$

где $|a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2$, выполненным при $k \in \mathbb{R}$. Коэффициент $a(k)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, причем выполнено следующее дисперсионное соотношение:

$$a(k) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |r(k)|^2)}{k - p} dp\right) \prod_{l=1}^N \frac{k - i\kappa_l}{k + i\kappa_l}, \quad (2)$$

где $r(k) = \frac{b(k)}{a(k)}$ называется коэффициентом отражения, $a(k)$ в правой части понимается как предел со стороны верхней полуплоскости, а нули κ_l функции $a(k)$ определяют дискретный спектр оператора L с собственными значениями $-\kappa_l^2$. Данные рассеяния — это тройка $(r(k), \kappa_l, m_l)$, где $r(k)$ и κ_l определены выше, а m_l — нормировочная константа, заданная формулой $(m_l)^{-1} = ia'(i\kappa_l)/c_l$, где c_l определяется соотношением $f_1(x, i\kappa_l) = c_l f_2(x, \kappa_l)$.

В своей кандидатской диссертации Фаддеев доказал, что потенциалы $u(x)$, удовлетворяющие условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|u(x)|dx < \infty,$$

биективно соответствуют данным рассеяния, т. е. тройкам $(r(k), \kappa_l, m_l)$.

Этот результат изящен, но его подлинное значение проявилось лишь при изучении уравнений солитонов (см. ниже обзор статьи Фаддеева об интегрируемости уравнения КдФ).

2. Проблема трех тел в квантовой механике

Одна из самых известных работ Л. Д. Фаддеева — решение задачи рассеяния трех частиц в квантовой механике [5], [6], [7], [8].

Рассмотрим дифференциальный оператор квантового гамильтониана, который описывает систему трех взаимодействующих нерелятивистских квантовых частиц с координатами $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{V}_{12} + \mathbf{V}_{23} + \mathbf{V}_{13}. \quad (3)$$

Он действует в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^9)$. Здесь $\mathbf{V}_{ij} = v_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ — потенциалы попарного взаимодействия, а

$$\mathbf{H}_0 = -\frac{1}{2m_1}\Delta_1 - \frac{1}{2m_2}\Delta_2 - \frac{1}{2m_3}\Delta_3$$

— гамильтониан, описывающий три невзаимодействующие частицы с массами m_1, m_2, m_3 . Предполагается, что потенциалы $v_{ij}(\mathbf{x})$ гладкие и быстро убывают.

Задача рассеяния трех частиц состоит в описании спектра оператора $\mathbf{H}$ и построении оператора рассеяния. Это унитарный оператор, который отображает входящие состояния рассеяния в исходящие. Оператор рассеяния, известный как $\mathbf{S}$ -матрица, играет центральную роль в физических приложениях. В простейших случаях, в том числе в двухчастичном рассеянии, непрерывный спектр оператора $\mathbf{H}$ совпадает с непрерывным спектром оператора $\mathbf{H}_0$. Как следствие, резольвента $\mathbf{R}(z) = (\mathbf{H} - z)^{-1}$ определяется интегральным уравнением с компактным ядром. Это означает, что итерации сходятся быстро и можно применять численные методы. В этом случае $\mathbf{S}$ -матрица определяется формулой

$$\mathbf{S} = (\mathbf{U}^+)^* \mathbf{U}^-,$$

где $\mathbf{U}^\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{it\mathbf{H}} e^{-it\mathbf{H}_0}$ — волновые операторы.

Трудность задачи рассеяния трех частиц состоит в том, что непрерывный спектр операторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}_0$ различен. Причиной является существование направлений в $(\mathbb{R}^3)^{\times 3}$, в которых потенциал $\mathbf{V}_{12} + \mathbf{V}_{23} + \mathbf{V}_{13}$ не исчезает на бесконечности.

После отделения координат и импульсов центра масс Фаддеев перешел к координатам $(\mathbf{k}_{12}, \mathbf{p}_3)$, которые фурье-сопряжены к $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$. Другие естественные варианты выбора координат в том же пространстве: $(\mathbf{k}_{23}, \mathbf{p}_1)$ и $(\mathbf{k}_{31}, \mathbf{p}_2)$. Обозначим их все через $(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)$. Считая полный импульс равным нулю, т. е. $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0$, получаем $\mathbf{k}_{12} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ и т. д. В системе центра масс после преобразования Фурье гамильтониан $\mathbf{H}$ превращается в интегральный оператор, действующий на $L_2(\mathbb{R}^6)$ (причем координатами в $\mathbb{R}^6$ может служить любая пара (k_α, p_α)), а $\mathbf{H}_0$ является оператором умножения на

$$\widehat{\mathbf{H}}_0 = -\frac{1}{2m_1}\mathbf{p}_1^2 - \frac{1}{2m_2}\mathbf{p}_2^2 - \frac{1}{2m_3}\mathbf{p}_3^2 = \frac{\mathbf{k}_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_\alpha^2}{n_\alpha}.$$

Здесь правая часть равенства не зависит от выбора α , а m_α, n_α легко выражаются через m_1, m_2, m_3 . Оператор умножения на $V_\alpha(\mathbf{x}_\alpha)$ становится интегральным оператором с ядром

$$V_\alpha(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha; \mathbf{k}'_\alpha, \mathbf{p}'_\alpha) = v_\alpha(\mathbf{k}_\alpha - \mathbf{k}'_\alpha) \delta(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}'_\alpha).$$

Предположим теперь, что для каждой из двух частиц дискретный спектр гамильтониана $-\frac{\Delta_i}{2m_i} - \frac{\Delta_j}{2m_j} + V_{ij}$ состоит из единственной точки (единственного собственного значения), а на нижнем конце непрерывного спектра нет виртуальных уровней (первое предположение несущественно, подробнее см. [8]).

Фаддеев блестяще разобрался со структурой резольвенты гамильтониана (3). Вычитая первые три сингулярные интерации и доказывая, что полученное уравнение имеет компактное ядро, он вывел интегральные уравнения для резольвенты (для Т-оператора, определяющего резольвенту), которые можно решить методом итераций (поскольку ядро компактно). Эти уравнения известны как *уравнения Фаддеева* для рассеяния трех частиц. Используя эти уравнения, он доказал следующее.

1. Проекция гамильтониана $\mathbf{H}$ на подпространство абсолютно непрерывного спектра в пространстве $L^2(\mathbb{R}^6)$ унитарно эквивалентна оператору

$$\widehat{\mathbf{H}} = \widehat{\mathbf{H}}_0 \oplus \widehat{\mathbf{H}}_{12} \oplus \widehat{\mathbf{H}}_{31} \oplus \widehat{\mathbf{H}}_{23},$$

где $\widehat{\mathbf{H}}_0$ такой, как выше, а

$$\widehat{\mathbf{H}}_\alpha = \frac{\mathbf{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} - \kappa_\alpha^2.$$

Здесь $-\kappa_\alpha^2$ является собственным значением соответствующего двухчастичного гамильтониана, а операторы $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_\alpha$ действуют как операторы умножения в пространстве

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_{12} \oplus \mathfrak{H}_{31} \oplus \mathfrak{H}_{23},$$

где $\mathfrak{H}_0 = L^2(\mathbb{R}^6)$ — функции от $(\mathbf{k}_\alpha, p_\alpha)$ (переход к другому значению α приводит к простому преобразованию координат), а $\mathfrak{H}_\alpha = L^2(\mathbb{R}^3)$ — функции от $\mathbf{p}_\alpha$.

2. Л. Д. Фаддеев также доказал существование компонент $\mathbf{U}_0^\pm: \mathfrak{H}_0 \rightarrow L^2(\mathbb{R}^6)$ и $\mathbf{U}_\alpha^\pm: \mathfrak{H}_\alpha \rightarrow L^2(\mathbb{R}^6)$ для волновых операторов. Здесь $L^2(\mathbb{R}^6)$ — трехчастичное гильбертово пространство с выделенным центром масс, а $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_\alpha$ таковы, как выше. Операторы $\mathbf{U}_0^\pm, \mathbf{U}_\alpha^\pm$ определены как

$$\mathbf{U}_0^\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{it\mathbf{H}} \mathbf{J}_0 e^{-it\widehat{\mathbf{H}}_0}, \quad \mathbf{U}_\alpha^\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{it\mathbf{H}} \mathbf{J}_\alpha e^{-it\widehat{\mathbf{H}}_\alpha}.$$

Здесь J_0 отождествляет $\mathfrak{H}_0$ с исходным пространством $L^2(\mathbb{R}^6)$, а J_α вкладывают $\mathfrak{H}_\alpha$ изометрически в $L^2(\mathbb{R}^6)$:

$$(J_\alpha f)(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha) = \phi_\alpha(\mathbf{k}_\alpha) f(\mathbf{p}_\alpha),$$

где $\phi_\alpha(\mathbf{k}_\alpha)$ — преобразование Фурье собственной функции соответствующего двухчастичного гамильтониана. Фаддеев определил волновые операторы $U^\pm : \mathfrak{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^6)$ как

$$U^\pm = U_0^\pm \oplus U_{12}^\pm \oplus U_{31}^\pm \oplus U_{23}^\pm$$

и доказал, что они удовлетворяют тождествам

$$(U^\pm)^* U^\pm = I, \quad U^\pm (U^\pm)^* = I - P, \quad H U^\pm = U^\pm \widehat{H},$$

где P — проекция на дискретный спектр. Матрица рассеяния определяется тогда как

$$S = (U^+)^* (U^-).$$

Уравнения Фаддеева сложны, однако итерации сходятся достаточно быстро благодаря компактности ядра, так что численное решение возможно. Это делает уравнения Фаддеева мощным инструментом в изучении систем нескольких тел в квантовой физике.

Другой важный результат Л. Д. Фаддеева в теории рассеяния — решение обратной задачи рассеяния в трехмерном случае. В серии статей [16] он описал необходимые и достаточные условия для восстановления потенциала по данным рассеяния. В 1965 году Фаддеев написал еще одну важную статью [9], где он применил теорию возмущений непрерывного спектра к оператору Лапласа—Бельтрами на $\Gamma \backslash \mathbb{H}$, когда фундаментальная область некомпактна, но имеет конечную гиперболическую площадь. В этом случае пространство $L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$ естественно распадается на два подпространства. Первое подпространство состоит из функций, имеющих нулевой интеграл по всем орициклам в $\Gamma \backslash \mathbb{H}$. На этом подпространстве оператор Лапласа—Бельтрами имеет дискретный спектр [20]. Фаддеев описал спектральные свойства этого оператора на втором, более сложном подпространстве. Эта работа имела большое влияние и привела ко многим важным результатам, например [18], [15]. Подробнее см. [3].

3. Уравнение Кортевега—де Фриза как интегрируемая гамильтонова система

В статье 1967 года К. С. Гарднер, Дж. М. Грин, М. Крускал и Р. Миура (GGKM) открыли, что задача Коши для знаменитого уравнения Кортевега—де Фриза

$$u_t = 6uu_{xx} + u_{xxx} = 0, \quad u(x, t)|_{t=0} = u(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

может быть решена как композиция прямой и обратной спектральной задачи для уравнения (1). Они выяснили, что если начальные данные $u(x)$ рассматриваются как потенциал в дифференциальном операторе эволюции спектральных данных оператора (1), то их эволюция в соответствии с (4) особенно проста:

$$r(k, t) = r(k)e^{8ik^3t}, \quad \kappa_l(t) = \kappa_l, \quad m_l(t) = m_l e^{8\kappa_l^3t}. \quad (5)$$

В 1968 году П. Лакс дал изящное объяснение этому факту, заметив, что уравнение КдФ можно представить как линейную эволюцию оператора $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t)$:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [L, A], \quad \text{где } A = 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 6u\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

В 1971 году Л. Д. Фаддеев и В. Е. Захаров [13] объяснили эволюцию (5) спектральных данных, показав, что уравнение КдФ является бесконечномерной гамильтоновой интегрируемой системой, а спектральные данные являются переменными «действие–угол».

Фаддеев и Захаров заметили, что выражение

$$\{F, G\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta F}{\delta u(x)} \right) \frac{\delta G}{\delta u(x)} dx \quad (6)$$

определяет скобку Пуассона на пространстве $\mathcal{M}$ гладких быстро убывающих функций u . Функции, удовлетворяющие условию $\int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx = c$, образуют симплектический лист в этом пространстве.

Эволюция в соответствии с уравнением КдФ может быть записана как гамильтонов поток на $\mathcal{M}$:

$$u_t = \{H, u\}, \quad H = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u_x^2 + u^3 \right) dx.$$

Они вычислили симплектическую форму

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} Du(x) \wedge \left(\int_{-\infty}^x Du(y) dy \right) dx, \quad (7)$$

которая соответствует скобке (6) в терминах спектральных данных для (1), и получили следующий ответ:

$$\int_0^{\infty} DP(k) \wedge DQ(k) dk + \sum_{l=1}^N Dp_l \wedge Dq_l. \quad (8)$$

Здесь и в (7) обозначение D относится к дифференциалу на $\mathcal{M}$, выраженному либо через $u(x)$, либо через данные рассеяния. В силу биекции, доказанной Фаддеевым в его диссертации, это один и тот же дифференциал, записанный в разных «координатах». Переменные (8) определяются формулами

$$P(k) = \frac{4k}{\pi} \ln |a(k)|, \quad Q(k) = \arg b(k), \quad p_l = 2\kappa_l^2, \quad q_l = \ln c_l. \quad (9)$$

Функция $a(k)$ определяется данными рассеяния посредством дисперсионного соотношения (2), и $b(k) = a(k)r(k)$. Формулы (7) и (8) показывают, что переменные $P(k)$, $Q(k)$, p_l , q_l являются координатами Дарбу для симплектической формы Ω . Здесь результаты, полученные Фаддеевым в его кандидатской диссертации, играют ключевую роль в отождествлении (8) и (7).

Можно получить бесконечно много гамильтонианов с нулевыми скобками Пуассона, являющихся локальными дифференциальными многочленами от u , решая уравнение Риккати

$$\sigma_x + \sigma^2 - u + 2ik\sigma = 0$$

для степенного ряда $\sigma(x, p) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sigma_n(x)}{(2ik)^n}$. Фаддеев и Захаров показали, что функционалы $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_n(x) dx$ коммутируют (в смысле скобок Пуассона) и могут быть выражены с использованием лишь $P(k)$ и p_l . В частности,

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_5(x) dx = 8 \int_0^{\infty} k^3 P(k) dk - \frac{32}{5} \sum_{l=1}^N p_l^{5/2}.$$

Тем самым они доказали, что (4) — вполне интегрируемая бесконечномерная гамильтонова система с переменными действия $P(k)$, p_l и угловыми переменными $Q(k)$, q_l .

Таким образом, уравнение КдФ стало первым примером бесконечномерной интегрируемой системы. За ним последовали многие другие, например нелинейное уравнение Шрёдингера и уравнение синус-Гордона, которое стало первым примером бесконечномерной гамильтоновой интегрируемой системы, описывающей двумерную релятивистскую классическую теорию поля [14].

4. Квантовая теория поля, интегрируемые системы и квантовые группы

Изучение уравнений солитонов для Л. Д. Фаддеева с самого начала было шагом к построению непертурбативных моделей квантовой теории поля. Первое значительное продвижение в этом направлении было сделано

в квазиклассическом приближении, эти результаты собраны в обзорной статье [17]. Но наиболее значительные результаты этого периода появились как комбинация обратных задач теории рассеяния и анзаца Бете. Толчком к этому послужил вопрос Фаддеева о том, как работы Бакстера по точному решению 6- и 8-вершинных моделей связаны с работой Янг Чжэньнина о факторизованном рассеянии. В этот период зарождаются многие важные направления исследований. В частности, они привели к появлению квантовых групп, которые после работ Дринфельда [19] стали одним из основных объектов в теории представлений.

Исчерпывающий обзор всех работ Л. Д. Фаддеева содержится в [1], см. также [2], [3] и вебсайт <http://faddeev.com/>.

Н. Ю. Решетихин
перевод Б. Р. Френкина

Литература

- [1] Тахтаджян Л. А., Алексеев А. Ю., Арефьева И. Я., Семенов-Тян-Шанский М. А., Склянин Е. К., Смирнов Ф. А., Шаташвили С. Л. Научное наследие Л. Д. Фаддеева. Обзор работ // Успехи матем. наук. 2017. Т. 72, вып. 6. С. 3–112.
- [2] Reshetikhin N., Semenov-Tian-Shansky M., Takhtajan L. Obituary: Ludwig D. Faddeev (March 23, 1934 – February 26, 2017) // IAMP News Bulletin. October 2017. P. 29–45.
- [3] Takhtajan L. Ludwig Dmitrievich Faddeev. 23 March 1934 – 26 February 2017. Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society. Available at: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsbm.2022.0003>.
- [4] Фаддеев Л. Д. О связи S-матрицы и потенциала для одномерного оператора Шредингера // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121, № 1. С. 63–66.
- [5] Фаддеев Л. Д. Теория рассеяния для системы из трех частиц // ЖЭТФ. 1961. Т. 39, вып. 5. С. 1459–1467.
- [6] Фаддеев Л. Д. Строение резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц с парным взаимодействием // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138, № 3. С. 565–567.
- [7] Фаддеев Л. Д. Строение резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц и задача рассеяния // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 2. С. 301–304.
- [8] Фаддеев Л. Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц // Труды МИАН СССР. 1963. Т. 69. С. 3–122.
- [9] Фаддеев Л. Д. Разложение по собственным функциям оператора Лапласа на фундаментальной области дискретной группы на плоскости Лобачевского // Труды ММО. 1967. Т. 17. С. 323–350.
- [10] Lax P. D., Phillips R. S. Scattering theory. Rev. ed. New York–London: Academic Press, 1989. (Pure and Appl. Math. Vol. 26).

- [11] *Faddeev L. D., Popov V. N.* Feynman diagrams for the Yang–Mills field // *Phys. Lett. B.* 1967. V. 25, № 1. P. 29–30.
- [12] *Кулиш П. П., Фаддеев Л. Д.* Асимптотические условия и инфракрасные расходимости в квантовой электродинамике // *ТМФ.* 1970. Т. 4, вып. 2. С. 153–170.
- [13] *Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.* Уравнение Кортевега—де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система // *Функц. анализ и его прил.* 1971. Т. 5, вып. 4. С. 18–27.
- [14] *Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Полное описание решений «sin-Gordon» уравнения // *Докл. АН СССР.* 1974. Т. 219, № 6. С. 1334–1337.
- [15] *Павлов Б. С., Фаддеев Л. Д.* Теория рассеяния и автоморфные функции // *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций.* Вып. 6. Зап. науч. сем. ЛОМИ. Т. 27. Л.: Наука, Ленингр. отд., 1972. С. 161–193.
- [16] *Фаддеев Л. Д.* Обратная задача квантовой теории рассеяния. II // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат.* Т. 3. М.: ВИНТИ, 1974. С. 93–180.
- [17] *Faddeev L. D., Korepin V. E.* Quantum theory of solitons // *Phys. Rep.* 1978. V. 42, № 1. P. 1–87.
- [18] *Лакс П. Д., Филлипс Р. С.* Теория рассеяния для автоморфных функций. М.: Мир, 1979.
- [19] *Drinfeld V. G.* Quantum groups // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians: August 3–11, 1986, Berkeley.* Providence, RI: AMS, 1987. P. 798–820.
- [20] *Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И.* Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука, 1966. (Обобщенные функции. Т. 6).

Андрей Александрович Суслин

(1950–2018)

Андрей Александрович Суслин родился 27 декабря 1950 года в Ленинграде. Его отец Александр Иванович был известным инженером — специалистом по корабельным энергетическим установкам, работал в ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова. Мать Андрея Александра Николаевна была инженером-экономистом. Математические способности Андрея проявились очень рано. Под влиянием отца все дети в семье увлекались решением олимпиадных математических задач и головоломок.

Уже учась в 6 классе, Андрей стал победителем городской олимпиады за 6, 8 и 10 (последний) классы. В 8 классе он стал победителем Всероссийской математической олимпиады, в 1967 году завоевал золотую медаль на Международной математической олимпиаде, а в 1972 году окончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета (ЛГУ).

В 1974 году А. А. Суслин защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (научный руководитель — М. И. Башмаков), а уже в 1977 году стал доктором физико-математических наук, доказав гипотезу Ж.-П. Серра о проективных модулях над кольцами многочленов.

В 1969–1975 годах А. А. Суслин преподавал в специализированной школе-интернате № 45 при ЛГУ, в 1973–1977 годах работал в ЛГУ, с 1977 года до конца жизни работал в Ленинградском отделении математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. С 1994 года также был профессором Северо-Западного университета (Northwestern University, USA).

А. А. Суслин трижды был приглашенным докладчиком на международных математических конгрессах: в 1978, 1986 и 1994 годах (в 1986 году пленарным докладчиком).



В 1980 году А. А. Суслин был удостоен премии Ленинского комсомола за доказательство гипотезы Серра; в 2000 году он был награжден премией Коула по алгебре за работы по мотивным когомологиям, в частности, за его совместную работу с В. Воеводским «Bloch—Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients», в которой разработаны основания теории мотивных когомологий.

Только в алгебраической K -теории полей и алгебраических многообразий А. А. Суслиным доказаны следующие гипотезы:

- гипотеза Серра о проективных модулях над кольцами многочленов (1976);
- гипотеза Квиллена—Лихтенбаума о K -теории алгебраически замкнутых полей (1983);
- стабильная версия гипотезы Милнора о когомологиях с конечными коэффициентами общей линейной группы (1984);
- гипотеза Блоха—Като для $n = 2$ (так называемая теорема Меркурьева—Суслина) (1982);
- (совместно с М. Водзицким) гипотеза Каруби о вырезании в K -теории C^* -алгебр (1990, 1992);
- для каждого гладкого алгебраического многообразия X введен комплекс свободных абелевых групп, называемый теперь комплексом Суслина;
- конструкция этого комплекса легла в основу теории мотивов, построенной В. Воеводским;
- в случае комплексного алгебраического многообразия указанный комплекс, приведенный по модулю n , вычисляет сингулярные гомологии данного многообразия с коэффициентами $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
- одна из гипотез А. А. Бейлинсона, а именно, построение совместно с Э. Фридландером спектральной последовательности, начинающейся с мотивных когомологий и сходящейся к K -группам Квиллена.

Кроме этого, А. А. Суслину принадлежит целый ряд других замечательных результатов, в частности,

- теорема Б. Б. Венкова и Д. Квиллена (the detection theorem for finite groups) распространена на все конечные групповые схемы над полем;
- теорема Б. Б. Венкова о конечной порожденности алгебры когомологий конечной группы распространена (с Э. Фридландером) на случай конечных групповых схем над полем;
- доказано (совместный результат с Э. Фридландером), что для конечной групповой схемы над полем ее когомологии с коэффициентами

в конечномерном рациональном модуле — конечно порожденный модуль над кольцом когомологий данной групповой схемы.

Стоит отметить, что теорема Меркурьева—Суслина долгое время неформально считалась лучшим результатом в алгебраической K -теории, а доказательству Суслиным гипотезы Квиллена—Лихтенбаума французы аплодировали стоя, нарушив все неписанные традиции.

А. А. Суслин практически все время выбирал для атаки знаковые проблемы. По-видимому, это очень соответствовало его характеру. Однако, встретив его на улице или в кафе, трудно было понять, что он выдающийся математик.

Трудно переоценить огромный вклад А. А. Суслина в развитие современной алгебры. А. А. Суслин создал в Санкт-Петербурге общепризнанную в мире школу алгебраической K -теории и мотивных когомологий.

Немного моих личных воспоминаний (очень малая часть)

А. А. Суслин был моим научным руководителем начиная с моего 3-го курса, а затем моим научным руководителем в аспирантуре (1981–1984) в Ленинградском отделении Математического института им. Стеклова (ЛОМИ). Но важнее всего для меня было то, что он являлся моим наставником в математике всю мою жизнь. В этих воспоминаниях я хочу просто вспомнить несколько эпизодов, ярко характеризующих А. А. Суслина как математика и как человека.

В 90-х годах я часто приходил к Андрею Александровичу (ЛОМИ, комната 306) и спрашивал его, над чем он сейчас работает. Он брал чашку чая и формулировал, что его интересует, а затем начинал прямо передо мной развивать свой подход к задаче на доске.

Если что-то шло не так, то он делал перерыв на сигарету или чашку чая и, подумав, предлагал новый взгляд. Каждый раз, прежде чем делать какие-либо вычисления, он формулировал ожидаемые промежуточные результаты или схему рассуждений и только затем начинал проверять вычислениями, скажем, первый нетривиальный случай.

Если и это не получалось (а часто не получалось), то он снова делал перерыв, и так много раз. Такие беседы (я в основном внимательно слушал) продолжались час, два, три, а иногда по 4 или 5 часов с указанными перерывами, в которых мы пили чай с бубликами. Благодаря такому общению я усвоил для себя метод, который в явном виде Суслин мне никогда не формулировал, но которым, я уверен, систематически пользовался.

Позволю себе здесь его описать, так как мне кажется, что это самое важное (оставим технику в стороне), чему я у него научился. Сначала, используя весь свой предыдущий опыт, надо сформулировать, что хочется

доказать. Затем надо крепко поверить в то, что формулировка в принципе верна. И только после этого начинать искать подходы.

Как мы знаем, при решении содержательных задач возникают технические (или принципиальные) сложности такого порядка, что опускаются руки и мы просто теряем интерес к задаче. Поэтому мы должны знать априори, что ожидаемый результат в принципе верен. Этот принцип я усвоил от Суслина. Возможно, это – важнейший метод, который я от него усвоил.

Чисто с человеческой точки зрения именно благодаря Суслину я вошел в широкий круг замечательных математиков. Основной принцип человеческого общения, который я слышал от него, был таков: «Я стараюсь никого не обижать» — говорил он. И ему это очень хорошо удавалось.

Теперь я хочу рассказать об одном знаковом эпизоде, показывающем, почему А. А. Суслин систематически брался за решение конкретных выдающихся проблем. Как-то раз мы сидели в его квартире в Эванстоне и пили вино. «Ваня, — спросил он меня, — какой бы задачей заняться?» Я недолго подумал и что-то предложил. Суслин после недолгого молчания сказал: «Нет, это скучно, давайте докажем гипотезу Ходжа или стандартную гипотезу Гротендика». В этом был весь Суслин. Ему было неинтересно поднять большой камень или даже очень большой. Настоящим вызовом для него было СДВИНУТЬ СКАЛУ.

Приехав в 1983 году из IHES, Суслин очень радостно сказал: «Ваня, я доказал гипотезу Квиллена—Лихтенбаума прямо в ночь перед моим докладом в IHES. Сразу после доклада Габбер мой результат обобщил, а несколько дней спустя я использовал его обобщение, чтобы доказать, что

$$K_i^Q(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/n) = K_i^{\text{top}}(\text{pt}; \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n,$$

если i четно, и 0 иначе. В качестве следствия получается стабильная гипотеза Милнора—Фридландера. А именно, $H^*(\text{GL}(\mathbb{C}); \mathbb{Z}/n)$ — это кольцо многочленов $\mathbb{Z}/n[c_1, c_2, c_3, \dots]$. Другими словами, когомологии с конечными коэффициентами классифицирующего пространства группы $\text{GL}(\mathbb{C})$, рассмотренной как дискретная группа, такие же, как когомологии классифицирующего пространства группы $\text{GL}(\mathbb{C})$, рассмотренной как группа Ли. После этого вступления Суслин за полчаса набросал мне доказательство его знаменитой теоремы жесткости.

В 1999 году в Институте Макса Планка в Бонне Суслин спросил меня и Сергея Ягунова, чем мы сейчас занимаемся. Мы ответили, что желаем перенести его теорему жесткости для K -теории на кобордизмы Воеводского и что для этого мы примерно знаем, как построить гомоморфизмы Гизина для кобордизмов Воеводского. Неожиданно для нас это так вдохновило Суслина, что он три дня обсуждал с нами эту задачу. На третий день он

пришел и сказал: «Все, что вам надо доказать, — это три свойства гомоморфизмов Гизина:

- (1) свойство замены базы,
- (2) ковариантную функториальность,
- (3) нормализацию ($\text{id}_* = \text{id}$).

Имея эти три свойства, вы докажете жесткость». Этот эпизод очень ярко иллюстрирует стиль Суслина в математике.

В январе 1994 года Суслин зашел в свою комнату в ЛОМИ, держа в руках чей-то препринт. «Это гениальная работа», — сказал он. Это был рукописный вариант знаменитого препринта Воеводского о предпучках с трансферами. В тот же час Суслин начал его рассказывать и в итоге прочел 4 лекции по 4 часа каждая. Этот препринт лег в основу построения Воеводским его триангулированной категории мотивов, что в конечном счете привело к доказательству гипотезы Милнора.

Как-то в 1995 году я попросил Суслина объяснить мне суть трюка Квиллена, придуманного последним для доказательства гипотезы Герстена. В течение 5 минут Суслин на пальцах объяснил мне суть трюка и сформулировал принцип: в таких задачах всегда надо начинать работу с замкнутого слоя. То же самое относится и к первому трюку Воеводского. На протяжении последующих 20 лет этот абсолютно базовый принцип я использовал сам и с соавторами для решения многих задач. Следующим вечером мы с Суслиным доказали гипотезу Гротендика—Серра для группы $SL_{1,A}$, где A — алгебра Адзумаи. С того дня я стал усиленно работать над доказательством гипотезы Гротендика—Серра, а Суслин вернулся к развитию теории мотивных когомологий с Воеводским.

Позвольте мне остановиться на этом. И просто сказать: светлая память моему великому учителю и великому математику Андрею Александровичу Суслину.

И. А. Панин

Замечательные теоремы

Андрея Суслина

Роль Андрея Суслина (1950–2018) как в формулировке, так и в решении многих важнейших вопросов алгебраической K -теории неоценима. Начав как «чистый алгебраист», он пришел к сотрудничеству с Владимиром Воеводским при построении здания мотивных кохомологий. Переплетение арифметической алгебраической геометрии и алгебраической K -теории, которое часто можно видеть в работах Андрея, принесло большую пользу для развития обеих областей. В своей дальнейшей деятельности Андрей внес важный вклад в теорию модулярных представлений конечных групповых схем.

Андрей был прежде всего решателем задач. Это был математик, убежденный, что ясно поставленные вопросы могут быть решены в результате «прямой творческой атаки». Вновь и вновь Андрей вводил новые методы и структуры, чтобы решать трудные задачи. Хотя он не был склонен к «построению теорий», он оставил нам важную теорию, с помощью которой можно продолжать его работы. В течение многих лет ясность, точность и тщательность Андрея в подходе к фундаментальным вопросам обеспечивала ему место «последнего судьи» многих текущих работ на стыке алгебраической геометрии и K -теории. Андрей свободно делился своими идеями, читал лекции, блестящие в своей ясности, поддерживал работу других математиков.

Далее мы рассмотрим лишь некоторые из многих фундаментальных результатов Андрея.

В 1976 г. Андрей и Даниэль Квиллен независимо и по существу одновременно доказали следующую теорему, известную как «гипотеза Серра»; до этого момента поиск доказательства этой теоремы Квиллена—Суслина был самой известной проблемой в коммутативной алгебре.

Теорема 1 ([7]). Пусть S — конечно порожденная полиномиальная алгебра над полем F , так что $S = F[x_1, \dots, x_d]$ для некоторого d . Тогда любой конечно порожденный проективный S -модуль P (т. е. любое прямое слагаемое P любого свободного S -модуля M) является свободным S -модулем.

Ключевой шаг в доказательстве Андрея состоит в применении следующего элементарного алгебраического факта. Пусть R — коммутативное кольцо. Положим $f = (f_1, f_2) \in R[t]^{\oplus 2}$ (унимодулярность не требуется). Пусть $c \in R \cap (f_1 R[t] + f_2 R[t])$. Тогда для любой коммутативной R -алгебры A и таких $a, a' \in A$, что $a \equiv a' \pmod{cA}$, элементы $f(a)$ и $f(a')$ сопряжены посредством матрицы из $GL_2(A)$. Замечательный образец изобретательности!

Следующая теорема Андрея (совместно с А. С. Меркурьевым) означала качественный скачок в изучении группы Брауэра. И ее формулировка, и ее доказательство служили стартовой площадкой для исследования связи между алгебраической K -теорией и мотивными когомологиями.

Теорема 2 ([5]). Пусть F — поле, m — целое число, взаимно простое с $\text{ch}(F)$, а $\xi \in F$ — первообразный корень m -й степени из единицы. Тогда гомоморфизм норменного вычета

$$h_2 = h_{F,2}: K_2(F)/mK_2(F) \rightarrow H^2(F, \mu_m), \quad \{a, b\} \mapsto C(a, b)_\xi,$$

является изоморфизмом. Здесь $H^2(F, \mu_m) = \text{Br}(F)[m] \subset \text{Br}(F)$ состоит из всех элементов, чей порядок делит m . В частности, подгруппа $\text{Br}(F)[m]$ группы Брауэра порождается классами циклических алгебр $C(a, b)_\xi$, где $a, b \in F^\times$.

Теорема 2 быстро привела к разнообразным новым алгебро-геометрическим результатам, как правило принадлежащим Андрею. Например, следующая теорема Андрея о «гипотезе Серра II» проложила путь многим другим исследователям, которые в итоге установили, что односвязная полупростая классическая алгебраическая группа над полем F когомологической размерности ≤ 2 не имеет нетривиальных главных однородных пространств над F .

Теорема 3 ([12]). Пусть F — поле когомологической размерности ≤ 2 . Тогда гомоморфизм редуцированной нормы $\text{Nrd}: A^\times \rightarrow F^\times$ сюръективен для любой центральной простой алгебры A над F степени n .

Отсюда следует выполнение гипотезы Серра II для односвязных групп внутреннего типа A_{n-1} .

За прошедшие 50 лет многие математики пытались разобраться в когомологиях классифицирующего пространства $BG(F)$ бесконечной дискретной группы $G(F)$, состоящей из F -точек алгебраической группы G над алгебраически замкнутым полем F . Андрей доказал соответствующую гипотезу для $G = \text{GL}_\infty$; сформулируем результат Андрея в терминах алгебраической K -теории.

Теорема 4 ([8], [9]). Пусть F — алгебраически замкнутое поле, а n — натуральное число, обратимое в F . Тогда

$$K_{2i}(F, \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n, \quad K_{2i+1}(F, \mathbb{Z}/n) = 0, \quad i \geq 0.$$

Андрей дал очень изящное доказательство, введя новое фундаментальное понятие жесткости по Суслину. Когда он доложил в Париже свое доказательство, слушатели устроили ему овацию стоя.

Область определения и значений гомоморфизма норменного вычета в разном виде были предметом многих впечатляющих работ Андрея, использующих, с одной стороны, K -теорию Милнора, а с другой — норменные многообразия. По своей сути это означает изучение квадратичных форм и алгебр с делением.

Алгебраические K -группы $K_*(F)$ поля F (или более общего кольца) определяются в терминах групп гомотопий, заведомо трудных для вычисления. Проще задать образующими и соотношениями K -группы Милнора $K_*^M(F)$ для поля F ; лишь при $i \leq 2$ имеем $K_i^M(F) = K_i(F)$. Тем не менее следующая теорема Андрея показывает тесную связь между $K_*^M(F)$ и $K_*(F)$.

Теорема 5 ([10]). *Если F — бесконечное поле, то естественная композиция*

$$K_n^M(F) \rightarrow K_n(F) \rightarrow H_n(GL_\infty(F)) \simeq H_n(GL_n(F)) \rightarrow K_n^M(F)$$

является умножением на $(n-1)!$.

Следующая теорема Андрея и Ю. В. Нестеренко отождествляет K -теорию Милнора с диагональными слагаемыми (дважды градуированных) блоховских высших групп Чжоу для поля F . Эта теорема сыграла важную роль в дальнейшем развитии теории мотивных когомологий, см. работу Андрея и В. А. Воеводского [15].

Теорема 6 ([6]). *Для любого поля F его K -теория Милнора $K_*^M(F)$ естественно изоморфна диагональной части блоховских высших групп Чжоу:*

$$K_n^M(F) \simeq CH^n(F, n).$$

Столкнувшись с необходимостью доказать свойство вырезания для S^* -алгебр, Андрей в совместной с М. Водзицким статье доказал следующую теорему, применимую к любому кольцу.

Теорема 7 ([16]). *Произвольное кольцо A удовлетворяет свойству вырезания в рациональной K -теории в точности тогда, когда $A_{\mathbb{Q}}$ гомологически унитарно (в том смысле, что явный цепной комплекс, ассоциированный с A , является ациклическим).*

Одним из достижений в теории этальных когомологий, развитой М. Артином и А. Гротендиком, стал функториально алгебраический метод вычисления (сингулярных) когомологий с конечными коэффициентами соответствующего аналитического пространства комплексного алгебраического многообразия X . Используя комплекс Суслина $Sus_*(X)$ алгебраического многообразия X над алгебраически замкнутым полем

(включая отображения из алгебраических симплексов в симметрические степени многообразия X) и жесткость по Суслину, Андрей и В. А. Воеводский доказали следующий красивый результат, дающий более «элементарную» алгебраическую интерпретацию для $H_*(X(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Z}/n)$.

Теорема 8 ([14]). *Если X — квазипроективное многообразие над $\mathbb{C}$, то естественное отображение*

$$\pi_i(\mathrm{Sus}_*(X), \mathbb{Z}/n) \rightarrow H_i(X(\mathbb{C})^{an}, \mathbb{Z}/n), \quad i \geq 0,$$

является изоморфизмом.

Андрей тесно сотрудничал с В. А. Воеводским в доказательстве основных свойств мотивных когомологий Воеводского. В их совместной статье [15] содержится существенное продвижение: K -теория Милнора связывается с мотивными когомологиями через блоховские высшие группы Чжоу. В частности, следующая теорема Андрея и Воеводского сыграла главную роль при доказательстве Воеводским сначала гипотезы Милнора, а затем более общей гипотезы Блоха—Като.

Теорема 9 ([15]). *Если F — поле и ℓ — простое число, обратимое в F , то гомоморфизм норменного вычета*

$$h_n: K_n^M(F)/\ell K_n^M(F) \rightarrow H^n(F, \mu_\ell^{\otimes n})$$

является изоморфизмом в точности тогда, когда при всех q , $q \leq n$, выполнены условия

$$H_M^p(X, \mathbb{Z}/\ell(q)) \simeq H_{\mathrm{et}}^p(X, \mu_\ell^{\otimes q}), \quad p \leq q; \quad H_M^{q+1}(X, \mathbb{Z}/\ell(q)) \hookrightarrow H_{\mathrm{et}}^{q+1}(X, \mu_\ell^{\otimes q}).$$

Одно из обоснований понятия блоховских высших групп Чжоу (согласованное с мотивными когомологиями Воеводского, как показали Андрей и Воеводский) — их связь с алгебраической K -теорией, выраженная в мотивной спектральной последовательности из следующей теоремы. Именно Андрею принадлежат окончательные доказательства существования этой спектральной последовательности.

Теорема 10 ([3], [11]). *Пусть X — гладкое квазипроективное многообразие над полем. Тогда существует сильно сходящаяся спектральная последовательность*

$$E_2^{p,q} = H_M^{p-q}(X, \mathbb{Z}(-q)) \Rightarrow K_{-p-q}(X).$$

Конечные групповые схемы появляются в теории представлений конечных групп и алгебраических групп, а также в некоторых вопросах арифметической алгебраической геометрии. Совместно с Э. Фридландером Андрей доказал важнейший результат об их когомологиях. Специально для этой теоремы они ввели новую форму функторных когомологий,

которая теперь имеет большой самостоятельный интерес; в качестве раннего примера см. статью Андрея с соавторами [1].

Теорема 11 ([2]). Пусть G — конечная групповая схема над полем k . Тогда $H^*(G, k)$ — конечно порожденная алгебра над k .

Далее, если M — некоторый G -модуль (т. е. $k[G]$ -комодуль), конечномерный над k , то $H^*(G, M)$ — конечно порожденный модуль над $H^*(G, k)$.

Среди других результатов, касающихся когомологий и теории представлений конечных групповых схем, упомянем следующее геометрическое описание (принадлежащее Андрею, К. Бенделу и Э. Фридландеру) когомологий инфинитезимальных групповых схем над полем (т. е. групповых схем, координатные алгебры которых являются конечномерными локальными кольцами). Для r -го ядра Фробениуса $G = \mathbb{G}_{(r)}$ одной из классических групп SL_n , Sp_{2n} , O_n (ассоциированной с симметричной билинейной формой на k^n) из этой теоремы следует, что $\text{Spec } H^*(G, k)$ гомеоморфно многообразию всех наборов по r из r -нильпотентных, попарно коммутирующих элементов алгебры Ли для $\mathbb{G}$.

Теорема 12 ([13]). Пусть G — инфинитезимальная групповая схема над полем k высоты r . Тогда морфизмы $\mathbb{G}_{a(r)} \rightarrow G$ групповых схем над k из r -го ядра Фробениуса аддитивной группы $\mathbb{G}_a$ в G (т. е. однопараметрические подгруппы в G высоты r) являются k -точками аффинной схемы $V_r(G)$.

Существует естественное отображение конечно порожденных коммутативных k -алгебр

$$\psi: k[V_r(G)] \rightarrow H^*(G_{(r)}, k),$$

которое индуцирует гомеоморфизм на спектрах простых идеалов.

Следующая теорема Андрея (совместно с Э. Фридландером и Ю. Певцовой) служит основой для построения новых инвариантов конечных групповых схем, модулей постоянного йорданова типа и новой конструкции алгебраических векторных расслоений. Ключевую роль играет остроумное рассуждение Андрея о максимальной рангов, возможных для линейных комбинаций коммутирующих нильпотентных квадратных матриц.

Теорема относится к π -точкам конечной групповой схемы G над полем k , а именно плоским отображениям $\alpha_K: K[t]/t^p \rightarrow KG$, которые пропускаются через схему абелевых подгрупп $C_K \hookrightarrow G_K$, где K/k — произвольное поле расширения. Здесь KG — сопряженное векторное пространство координатной алгебры $K[G_K]$. Существует естественное отношение эквивалентности на π -точках схемы G , которое определяется в терминах G -модулей. Множество классов эквивалентности допускает структуру схемы $\Pi(G)$ (которая определяется также в терминах представлений схемы G), причем $\Pi(G) \simeq \text{Proj } H^*(G, k)$.

Теорема 13 ([4]). Пусть G — конечная групповая схема, M — конечномерный G -модуль, а $\alpha_K: K[t]/t^p \rightarrow KG$ — некоторая π -точка схемы G , представляющая общую точку для $\Pi(G)$. Тогда $\alpha_K(t) \in KG$ как нильпотентный оператор на M_K имеет йорданов тип, зависящий лишь от класса эквивалентности α_K как элемента из $\Pi(G)$.

Эрик М. Фридландер¹, А. С. Меркурьев²

Литература

- [1] *Franjou V., Friedlander E. M., Scorichenko A., Suslin A.* General linear and functor cohomology over finite field // *Ann. Math.* 1999. V. 150, № 2. P. 663–728.
- [2] *Friedlander E. M., Suslin A.* Cohomology of finite group schemes over a field // *Invent. Math.* 1997. V. 127, № 2. P. 209–270.
- [3] *Friedlander E. M., Suslin A.* The spectral sequence relating algebraic K -theory to motivic cohomology // *Ann. Sci. Ёс. Norm. Sup.* 2002. T. 35, № 6. P. 773–875.
- [4] *Friedlander E. M., Pevtsova J., Suslin A.* Generic and Jordan types // *Invent. Math.* 2007. V. 168, № 3. P. 485–522.
- [5] Меркурьев А. С., Суслин А. А. K -когомологии многообразий Севери—Брауэра и гомоморфизм норменного вычета // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1982. Т. 46, № 5. С. 1011–1046.
- [6] Нестеренко Ю. П., Суслин А. А. Гомологии полной линейной группы над локальным кольцом и K -теория Милнора // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1989. Т. 53, № 1. С. 121–146.
- [7] Суслин А. А. Проективные модули над кольцом многочленов свободны // *Докл. АН СССР.* 1976. Т. 229, № 5. С. 1063–1066.
- [8] *Suslin A.* On the K -theory of algebraically closed fields // *Invent. Math.* 1983. V. 73, № 2. P. 241–245.
- [9] *Suslin A.* On the K -theory of local fields // *J. Pure Appl. Algebra.* 1984. V. 34, № 2–3. P. 301–318.
- [10] *Suslin A.* Homology of $GL(n)$, characteristic classes, and Milnor K -theory // *Lecture Notes in Math.* 1984. V. 1046. P. 357–375.
- [11] *Suslin A. A.* On the Grayson Spectral Sequence // *Труды МИАН.* 2003. Т. 241. С. 218–253.
- [12] Суслин А. А. Алгебраическая K -теория и гомоморфизм норменного вычета // *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.* Т. 25. М., ВИНТИ, 1984. С. 115–207.
- [13] *Suslin A., Friedlander Eric M., Bendel C.* Support varieties for infinitesimal group schemes // *J. Amer. Math. Soc.* 1997. V. 10, № 3. P. 729–759.
- [14] *Suslin A., Voevodsky V.* Singular homology of abstract algebraic varieties // *Invent. Math.* 1996. V. 123, № 1. P. 61–94.

¹ Частично поддержан фондом Саймонса.

² Частично поддержан грантом NSF, DMS #1801530.

- [15] *Suslin A., Voevodsky V.* Bloch–Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients // B. B. Gordon, J. D. Lewis, S. Müller-Stach, S. Saito, N. Yui (eds). *The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles*. Springer, Dordrecht. 2000. P. 117–189.
- [16] *Suslin A., Wodzicki M.* Excision in algebraic K -theory // *Ann. Math.* 1992. V. 136, № 1. P. 51–122.

Приложения

Жизнь и смерть математиков в Петрограде 1918–1923 года. Комиссия по улучшению быта ученых и петроградские математики

Герберт Уэллс, посетивший Петроград в сентябре–октябре 1920 г., писал:

Для литературы и науки катастрофа 1917–1918 года была подавляющей. На ученых Советское Правительство вначале обращало так же мало внимания, как и Французская Революция, которая «не нуждалась в химиках». Этот класс работников поэтому был приведен в состояние величайшей нужды и бедствия [1, с. 34].

В книге «Россия во мгле» Уэллс пишет еще:

Нигде в России эта катастрофа не видна с такой беспощадной ясностью, как в Петрограде [2, с. 316].

1919, 1920 и 1921 годы вошли в российскую историю как неимоверно страшные и голодные. Шла гражданская война. Железнодорожный транспорт почти бездействовал. Подвоз продуктов в город практически прекратился. «Мрут массой» [3], — записала в дневнике зимой 1919 г. жительница Петрограда О. И. Вендрих. Академик М. И. Ростовцев в начале 1920 г. в опубликованной в эмиграции статье «Поминки. Памяти загубленных друзей и коллег» писал:

Получаю от времени до времени письма от бежавших из большевистского рая (...) учителей моих, коллег и учеников. И каждое письмо содержит прежде всего «синодик» — сухие списки погибших с однообразными приписками: умер от голода, расстрелян, покончил самоубийством [4, с. 431].

Правительство большевиков почти не выделяло средств на поддержание научного сообщества, считая его политически враждебным. В мае 1918 г. Петроградским советом было принято постановление о классовом пайке. По этому постановлению жителей Петрограда разделили на четыре категории по получаемой хлебной норме по карточкам. Но даже паек первой категории, выдаваемый рабочим, составлял по калорийности

лишь 20% от необходимого для поддержания жизни. Ученым же полагался паек третьей категории.

Историк Н. И. Кареев, член-корреспондент АН, в мемуарах «Прожитое и пережитое» пишет об этом пайке так:

Хлеб выдавался только по карточкам в небольшом количестве, доходившем иногда до одной четверти или даже восьмушки фунта в сутки [5, с. 272].

В то время едва ли не единственным человеком в Петрограде, к которому интеллигенция могла обратиться за помощью, был Максим Горький³. Благодаря его стараниям 13 декабря 1919 г. коллегия Наркомпроса⁴ приняла решение в целях улучшения быта ученых создать специальную комиссию. 23 декабря 1919 г. Совнарком⁵ принял декрет, который устанавливал для деятелей науки специальный усиленный продовольственный паек. Для проведения в жизнь декрета Совнарком Исполком Петросовета принял постановление об учреждении Петроградской комиссии по улучшению быта ученых — ПетроКУБУ. Председателем назначили Горького. Решение о создании комиссии было опубликовано 13 января 1920 г. в газете «Петроградская правда», и эта комиссия сохранила для страны и для науки тысячи жизней.

На создание КУБУ петроградская «Красная газета» 15 января откликнулась статьей А. Болотина «Как будет улучшено положение ученых». Автор извещал читателей:

Комиссия по вопросу об улучшении быта ученых составила списки причастных к науке лиц, которым будет назначен усиленный продовольственный паек. В список вошли только 1800 ученых. Приняты во внимание исключительные заслуги ученых, так как лиц, занимающихся научной деятельностью, числится в данное время в Петрограде около 4000 (...) Комиссия решила далее устроить в б. дворце Владимира Александровича «дом ученых». В одном из флигелей, выходящих на б. Миллионную улицу, будут отапливаться и освещаться некоторые залы, в которых ученые будут иметь возможность заниматься своими работами. Залы эти превратятся, таким образом, в ученые теплушки. (...) Можно думать, что благодаря этим теплушкам наши ученые привыкнут к коллективистским формам жизни.

Главной задачей КУБУ на тот момент было снабжение ученых продовольственными пайками. Своих продуктов КУБУ не имела, получить их

³ Достоинство упоминания, что Горького номинировали на Нобелевскую премию по литературе в 1918, 1923, 1928 и 1933 гг.

⁴ Наркомпрос — Народный комиссариат просвещения РСФСР, орган государственной власти РСФСР, контролировавший практически все культурно-гуманитарные сферы: образование, науку и пр.

⁵ Напомним, что так в то время называлось правительство страны.



Делегация от лейбористской партии у здания Дворца труда, Петроград, май 1920 г. Бертран Рассел — шестой справа. Фотоателье К. Буллы. ЦГАКФД СПб Др-551.

можно было только в Петрокоммуне⁶. Для этого ПетроКУБУ должна была представить к 1 февраля поименный список всех ученых с указанием их должности, научных заслуг и места работы. Ученых обязали написать биографии и приложить список научных трудов.

В архиве КУБУ хранятся рукописные документы, составленные Надеждой Николаевной Гернет, Николаем Максимовичем Гюнтером, Иваном Матвеевичем Виноградовым, а также обращение академика Маркова с просьбой выдать академический паек молодому ученому Виноградову (1891 г.р.) и отзыв Якова Викторовича Успенского о его работах, а также автобиографии Александра Васильевича Васильева, Абрама Самойловича Безиковича (с резолюцией В. А. Стеклова) и других петроградских математиков.

Благодаря усилиям КУБУ продовольственное положение петроградских ученых улучшилось, но все равно оставалось тяжелым, так как Петрокоммуна не могла выдать все запрашиваемые продукты.

⁶ Петрокоммуна ведала снабжением города продуктами и промтоварами, занималась заготовкой, производством и распределением продуктов в условиях Гражданской войны и политики «военного коммунизма».



Обложка журнала «Наука и ее работники»

В мае 1920 г. в Советскую Россию прибыла из Великобритании делегация от партии лейбористов. Вместе с нею приехал Бертран Рассел, известный математик и философ, впоследствии лауреат Нобелевской премии по литературе. Позднее в автобиографии он вспоминал:

Как-то в Петрограде ко мне явилась четверка одетых в лохмотья людей, заросших щетиной, с грязными ногтями, спутанными волосами. То были самые известные поэты России. Другие оборванцы, с которыми я встретился, были членами Петроградского математического общества. Я присутствовал на одном из заседаний этого Общества, слушал доклад по неевклидовой геометрии. Я ничего не мог понять, кроме формул, записанных на доске, но, судя по ним, это был вполне компетентный доклад. В Англии я никогда не видел таких униженных и жалких бродяг, как петроградские математики [6, с. 193].

С 1920 г. ПетроКУБУ стала издавать журнал «Наука и ее работники». За 3 года вышло 12 номеров. Затем журнал по распоряжению председателя Петросовета Г. Е. Зиновьева был закрыт. В № 4 за 1921 г. в статье «Петроградское Физико-Математическое Общество» журнал извещал:

Во втором заседании 15 мая, в котором Я. В. Успенский познакомил присутствующих с читаемым им в Университете курсом Неевклидовой

Геометрии, присутствовал проезжавший вместе с английской рабочей делегацией в России известный английский математик и философ Бертран Рассель, который познакомил со своими взглядами на возможность опытным путем решать вопросы о свойствах пространства [7, с. 39].

В этой же статье сообщалось:

14 мая (1921 г.) в математическом кабинете Педагогического института при Университете окончательно организовалось новое научное общество... Оно возникло как результат деятельности кружка, который с марта 1920 г. начал собираться по инициативе проф. А. В. Васильева в находящемся в его ведении кабинете. (...) 14 мая был организован президиум общества и намечены его главные задачи... Это было 21-м заседанием кружка (...) Заседания кружка, организовавшего Физико-Математическое Общество, начались 20 марта 1920 г., в день смерти Исаака Ньютона [7, с. 38–39].

А 12-е заседание кружка (23 ноября 1920 г.) было посвящено памяти Евграфа Степановича Федорова.

Проф. Болдырев и Богомолов осветили в своих сообщениях научные заслуги знаменитого ученого: первый — в области кристаллографии и кристаллохимии, второй — в высшей геометрии, в которую Федоров внес ... широкие обобщающие идеи(...)

В ряде заседаний (...) реферировались специальные математические работы, помещенные в 42-м томе журнала *Acta mathematica* (Я. Д. Тамаркин, Абр. Сам. Безикович, Григ. Мих. Фихтенгольц). Между прочим реферирован выдающийся по своей важности мемуар Леви-Чивита о задаче трех тел (...) Свою деятельность организованное общество начало двумя заседаниями 25 и 26 мая. В первом заседании прочитаны сообщения Ал-др Вас. Васильева — «Геометрия мира» и акад. П. П. Лазарева — «Ионная теория возбуждений». В заседании 26 мая, в день столетней годовщины дня памяти знаменитого русского мыслителя Пафнутия Львовича Чебышёва, сделано два сообщения. А. В. Васильев реферировал свою работу по истории математики в России, А. С. Безикович прочел доклад на тему из теории вероятности, близкую к работам Чебышёва [7, с. 39–40].

Пафнутия Львовича Чебышёва в мае 1921 г. чествовала и Академия наук. Об этом в статье «Российская Академия Наук в 1921 г.» написал неперенный секретарь академии С. Ф. Ольденбург. Статья помещена в № 1 журнала «Наука и ее работники» за 1922 г.

В этой же статье С. Ф. Ольденбург сообщает, что за «истекший год Академия учредила при себе три новых исследовательских института» [8, с. 8]. Один из них — Физико-математический. Автор далее извещает, что «Физико-математический институт принимает участие в международном издании сочинений Леонарда Эйлера и замечательного посмертного труда Ал-дра Мих. Ляпунова» [8, с. 9].

Академический продовольственный паек со временем становился более калорийным и разнообразным. По ходатайству Горького ученым, имевшим семьи, стали выдавать дополнительные продукты.

В это же время в советской печати стали появляться карикатуры на ученых, на академический паек и на Горького, раздражавшего советское правительство и Ленина постоянной заботой о российской творческой и научной интеллигенции. Делалось это, безусловно, с ведома руководителей государства. Заявления о заботе правительства об ученых, которые делались впоследствии, во многом лицемерны.

13 августа 1922 г. в приложении к «Красной газете» появилась карикатура на академический паек.



Свинья и осел около корыта с академическим пайком

В 1923 г. известный в начале прошлого века художник Мануил Андреев по заданию властей выпустил серию сатирических открыток «Быт Петрограда» [9]. На одной из них с названием «Иван Иванович получил паек» в карикатурном виде изображен интеллигент в очках и обуви на босу ногу, несущий объемные мешки и сумку с продуктами.

Как известно, в конце 1921 г. Ленин под предлогом необходимого лечения вынудил Горького уехать за границу. Но карикатура на писателя, появившаяся в СМИ, изображала Горького покидающим РСФСР по собственному почину. Писатель у пограничного столба переобувался из русских лаптей в европейские ботинки.

Трудности у ученых были не только с продовольствием. На одном из заседаний общего собрания Академии наук рассматривалось заявление академика А. А. Маркова, который за недостатком обуви не может посещать заседания Академии. Собрание приняло решение просить академика А. Е. Ферсмана выяснить в КУБУ возможность получения обуви. Ферсман на заседании КУБУ 26 апреля 1921 г. ходатайствовал о выдаче обуви академику Маркову [10, л. 31]. Профессору Н. М. Гюнтеру пришлось долго и настойчиво хлопотать о том, чтобы его жене отремонтировали



Иван Иванович получил паек

единственную пару обуви. В сапожной мастерской КУБУ работало лишь несколько мастеров, и очередь на починку обуви растягивалась на месяцы.

К. И. Чуковский записал в дневнике, как его тогдашняя помощница Мария Бенкендорф рассказывала, что «в церкви, когда люди встанут на колени, очень любопытно рассматривать целую коллекцию дыр на подошвах. Ни одной подошвы — без дыры!» [11, с. 259].

Остро в то время стоял и жилищный вопрос. Квартиры ученых уплотняли, подселяя к ним посторонних людей. Еще одной квартирной напастью были переселения и выселения. В архиве КУБУ хранится ходатайство, поданное в ПетроКУБУ проф. Гюнтером 9 февраля 1920 г. Дом, в ко-



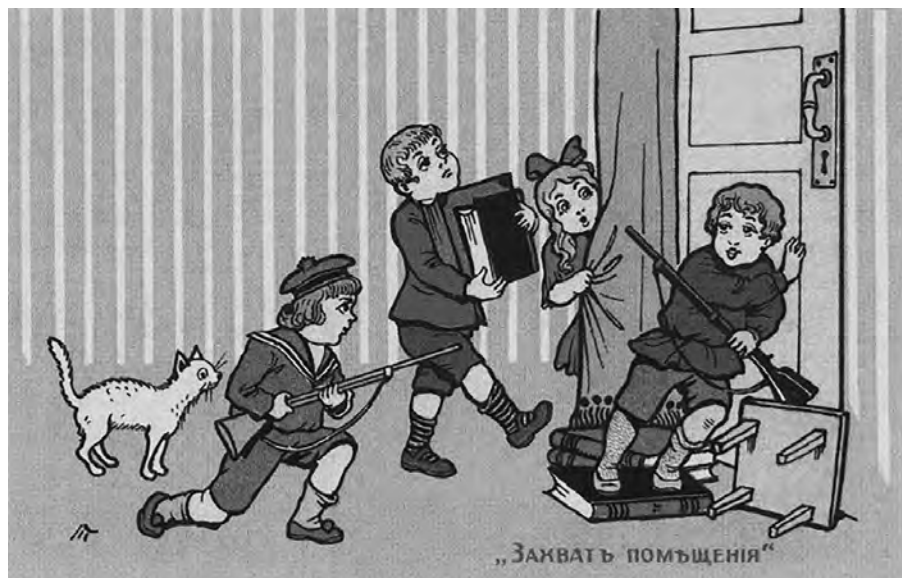
Карикатура на отъезд Горького

тором жил Гюнтер, захватило Общество инвалидов. Жильцам предложено было в срочном порядке освободить квартиры, причем вывозить имущество запрещалось. Ходатайство профессора Гюнтера было поддержано ПетроКУБУ, и ему удалось остаться в своем доме, правда, пришлось переехать в другую квартиру.

Методы решения квартирного вопроса также нашли отражение в печатной пропаганде советской власти. Одна из открыток серии «Дети играют в революцию» называлась «Захват помещения». На ней дети всеми возможными способами пытаются не пустить в свой дом захватчиков помещений.

КУБУ защищала своих подопечных от воинской и трудовой повинностей. Тяжелый физический труд, особенно в холодное время года, для голодных и истощенных ученых мог обернуться болезнью и смертью. В первом номере журнала «Наука и ее работники» за 1921 г. в разделе Personalia в перечне погибших ученых (всего 178 фамилий) есть такая запись:

Вильев, Михаил Анатольевич, молодой талантливый астроном, имевший уже около ста работ. Исключительные способности, высоко оцененные специалистами, обещали дать в нем ученого первой величины. Он



Открытка «Захват помещения»

скончался, простудившись на окопных работах. Его смерть — одна из глубоких современных трагедий жизни и смерти русского ученого [12, с. 35].

Очень острой в начале двадцатых годов была проблема топлива. Зимы стояли суровые, дров в городе практически не осталось. Разбирали на дрова деревянные дома, заборы, торцовые тротуары.

Печи в квартирах не топили, обзаводились «буржуйками», которые одновременно выполняли роль печи и кухонной плиты.

С. Г. Елисеев, известный ученый-японист, в своем дневнике рассказал о профессоре юридического факультета Петроградского университета Владимире Федоровиче Матвееве:

Было так холодно, что профессор Матвеев пришел домой, лег спать одетым и <насмерть> замерз в своей квартире [13, с. 23].

Сложности были и с публикацией научных работ петроградских ученых. В разделе «Библиография» номера 3 журнала «Наука и ее работники» за 1921 г. сообщалось:

Завет Фарадэя «to work, to finish, to publish» в настоящее время для большинства научных работников выполним лишь в первой трети — to work, удел лишь немногих to finish, и только счастливому случаю обязаны немногие, которым удастся to publish, — ведь в одном Петрограде ненапечатанных трудов накопилось свыше 12000 листов, и число их все растет [14, с. 29].



Дрова́ной кри́зис

Тем не менее что-то все-таки печаталось, несмотря на дефицит бумаги и типографские трудности. Книги издавались в основном малого формата.

В 1921 г. в Петрограде напечатали две работы А. В. Васильева: «Математика» и «Целое число: исторический очерк». В том же году вышла книга А. А. Иванова «Теория ошибок и способ наименьших квадратов». В 1922 г. — «Введение в неевклидову геометрию Лобачевского—Болиаи» Я. В. Успенского, а в 1923 г. — его же «Очерк истории логарифмов». В 1923 г. в Петрограде издали книгу украинского математика А. М. Астряба «Курс опытной геометрии». Намечались к публикации и другие работы.

Журнал «Наука и ее работники» в 1-м номере за 1920 г. извещал:

В Педагогическом Институте при Петроградском Университете с осеннего семестра 1919 г. учрежден физико-математический факультет... Деканом физико-математического факультета состоит проф. А. В. Васильев [15, с. 27–28].

В Петрограде в 1919–1922 гг. ученых постоянно арестовывали. Как писал Дзержинский,

Наши специалисты — в большинстве своем люди буржуазного круга и уклада мыслей. Лиц подобных категорий мы по обыкновению подвергаем



Печь «буржуйка»

аресту как заложников или же помещаем в концентрационные лагеря на общественные работы [16, с. 221].

Один из таких арестов описал в своем дневнике известный американский японист русского происхождения С. Г. Елисеев:

...Когда я пришел в комендатуру, то увидел много наших университетских... Выяснилось, что мы арестованы как заложники. На вопрос: «Почему вы нас арестовали?» следователь мне сказал: «Чтобы расстрелять, потому что вы заложники» [13, с. 17–18].

Видный российский философ Н. О. Лосский в книге «Воспоминания: жизнь и философский путь» писал:

На интеллигенцию летом 1922 г. надвигалась новая гроза, о которой никто из нас ничего не подозревал. Зиновьев, начальник Петербурга и Северо-Западного края, донес в Москву, что интеллигенция начинает поднимать голову. Он писал, что различные группы интеллигенции начинают основывать журналы и общества; они еще действуют разрозненно, но со временем объединятся и тогда будут представлять собою значительную силу. Московское правительство решило поэтому произвести по всей России аресты видных ученых, писателей и общественных деятелей, что и было произведено 16 августа 1922 года [17, с. 237].

Лосский вспоминал об этом аресте:

...правительство знало, что мы не участвовали в политической деятельности. ... <Но> было предreshено, что нас приговорят к высылке за границу. В это время большевицкое правительство добивалось признания *de jure* государствами Западной Европы. Арестованы были лица, имена и деятельность которых были известны в Европе, и большевики хотели, очевидно, показать, что их режим не есть варварская деспотия. Говорят, что Троцкий предложил именно такую меру, как высылка за границу [17, с. 238–239].

Хорошо известна фраза Троцкого по этому поводу: «Мы этих людей выслали потому, что расстрелять их не было повода, а терпеть было невозможно» [18, с. 266].

Лосский далее вспоминает:

После допроса меня отвели в большую комнату, где находилось около пятидесяти арестованных... Здесь находились Карсавин, Лапшин, профессор математики Селиванов и другие лица из нашей группы. Математик Селиванов, оказывается, был арестован за «буржуазный» метод преподавания математики инженерам. В своих лекциях он не только сообщал математические формулы, необходимые для деятельности инженеров, но и математическое обоснование их. Большевики находили в это время, что инженеру нужно знать формулы, а как они обосновываются, это не требуется знать им [17, с. 218].

Освобождение от балласта, вероятно, подразумевало и освобождение от профессоров, подобных Селиванову, преподававшему математику «не по-красному».

...Большевицкое правительство обратилось к Германии с просьбою дать нам визы для въезда в Германию. Канцлер Вирт ответил, что Германия не Сибирь и ссылат в нее русских граждан нельзя, но если русские ученые... сами обратятся с просьбою дать им визу, Германия охотно окажет им гостеприимство [17, с. 239–240].

Д. Ф. Селиванов, заслуженный профессор по кафедре чистой математики Петроградского университета, член-учредитель Санкт-Петербургского математического общества, впоследствии вспоминал, что никаких



Карикатура: Луначарский со студентами на воздушном шаре.

Подпись: Студенчество на своих собраниях высказалось за освобождение ВУЗов от излишнего балласта.

— Не много ли, товарищ, будет?

— Ничего, Анатолий Васильевич, чем больше балласта выбросим, тем выше поднимемся.



Журнал «Красные огни», 1922 год. Подпись: «За границу выслана группа белогвардейской интеллигенции»

обвинений, кроме того, что преподает математику не «по-красному», ему не предъявляли [19, с. 573].

В архиве ФСБ в документах ВЧК-ГПУ хранится записка Ф. Э. Дзержинского о ходатайстве партийного деятеля В. И. Невского: «Невский ходатайствует за освобождение Селиванова. Мы против» [20, с. 328–329]. За 67-летнего математика Селиванова ходатайствовала и КУБУ. Тоже безрезультатно.

10 октября 1922 г. Дм. Фед. Селиванов подал заявление в Президиум ГПУ:

В настоящее время я начал чтение лекций в Университете... Кроме того, przygotowляю к печати две рукописи по Специальному курсу высшей алгебры и по Проективной геометрии. Мне и жене моей, преподаватель-

нице математики в университетском Рабфаке, ужасно мешает работать высылка за границу. Эти хлопоты стоят дорого и отнимают много времени. Не знаю, надо ли продавать последнее, чтобы иметь деньги на эти хлопоты... Очень боюсь, что мне вдруг велят через два-три дня сесть на пароход, а у меня ни денег, ни разрешений на вывоз белья и одежды. Не хотел бы приехать в Германию без необходимого и просить подаяния у немецких математиков [20, с. 329].

14 октября 1922 года ему было предписано покинуть Россию, и 16 ноября 1922 года он вместе с группой ученых отплыл из Петрограда на немецком пароходе «Пруссия».

На высылку ученых из России советская пресса откликнулась очередной карикатурой.

КУБУ заботилась и о здоровье ученых. Уже в июне 1920 г. первых пациентов принял санаторий в Детском Селе. В нем в 1921 г. проходил лечение профессор математики Петроградского университета К. А. Поссе. В октябре 1922 г. при КУБУ открылся интернат для престарелых. Последние годы жизни в этом интернате провели математики Ю. В. Сохоцкий и К. А. Поссе, профессора Петербургского университета. В этом же интернате доживала последние дни и жена Д. И. Менделеева [21, с. 13].

В 1921 г. Горький добился возможности для петроградских ученых лечиться в крымском санатории «Гаспра». В мае 1926 г. в нем отдыхал и лечился академик В. А. Стеклов.

Петроградская Комиссия по улучшению быта ученых позволила ученым пережить очень трудное время, сохранила многих выдающихся деятелей российской науки. Согласно архивным данным, в КУБУ получали продуктовые пайки 80 петроградских математиков. Многим из них без этих пайков не удалось бы выжить в те тяжелые голодные послереволюционные годы. Вот их имена, взятые из алфавитного списка ученых на получение академического пайка за октябрь 1921 — март 1922 года (ЦГА СПб, фонд 2995, опись 2, дело 13).

1 Адамов Алексей Алексеевич	м., проф. Политехн. инс-та
2 Акимов Петр Васильевич	теор. механика, проф. Горный институт
3 Ангерт Давид Николаевич	м. и школоведение, проф.
4 Башинский Виктор Владимир.	методы расчета статистич.-неопред. систем проф. Туркестан. университета
5 Безикович Абрам Самойлович	м., проф., 3-й Пед. инст-т, Перм. ун-тет
6 Бентковский Иосиф Иосифович	механика, проф., сопромат
7 Билибин Александр Яковлевич	м., проф. 2-й Политех. инст-т
8 Богомоллов Степан Александр.	м., проф. 1, 2, 3 Пед. инст-т
9 Борисов Евгений Васильевич	м., преп. Университет, Техн. инс-т
10 Борисов Александр Ал-др.	м., преп. С/х инст-т
11 Боярчук Влад. Прокоф.	м., ост. при каф. 3-й Пед. инс-т

- 12 Будаевский Сергей Андр.
 - 13 Васильев Ал-др Васил.
 - 14 Виноградов Ал-др Мих.
 - 15 Виноградов Иван Матв.
 - 16 Вулих Захар Захарович
 - 17 Гаврилов Ал-др Феликс.
 - 18 Гельвих Петр Августов.
 - 19 Гернет Надежда Никол.
 - 20 Гирман Сергей Никитич
 - 21 Глаголев Иван Павлович
 - 22 Годыцкий-Цвирко Ал-др Морд.
 - 23 Грацианский Иван Иванович
 - 24 Гродский Георгий Дмитр.
 - 25 Гюнтер Николай Максимов.
 - 26 Давыдов Иван Иванович
 - 27 Ди-Сеньи Николай Конст.
 - 28 Егупов Владимир Андр.
 - 29 Журавский Андрей Митроф.
 - 30 Иванов Иван Иванович
 - 31 Икорников Юрий Васил.
 - 32 Кавун Иван Никитич
 - 33 Каргин Дмитрий Иванович
 - 34 Компанейц Петр Андреевич
 - 35 Кондратьев Владимир Андр.
 - 36 Конюченко Иван Тимофеевич
 - 37 Коялович Борис Михайлович
 - 38 Кречмер Василий Августович
 - 39 Кулишер Александр Рувимов.
 - 40 Липин Николай Вячеславов.
 - 41 Люш Василий Владимир.
 - 42 Малис Леонид Германович
 - 43 Марков Андрей Андреевич
 - 44 Меликов Константин Венед.
 - 45 Мещерский Иван Всеволод.
 - 46 Митропольский Аристарх Конст.
 - 47 Михельсон Николай Семенович
 - 48 Нарышкина Екатерина Алекс.
 - 49 Пенионжекевич Карл Болесл.
 - 50 Петрович Сергей Георгиевич
 - 51 Пирожков Михаил Васильевич
 - 52 Полосухина Ольга Андреевна
 - 53 Поссе Константин Александрович
 - 54 Радциг Александр Алекс-др.
 - 55 Селиванов Дмитрий Федорович
 - 56 Сигов Исаакий Александр.
 - 57 Синакевич Владимир Иванович
- м., механика, преп. Инж. академия
 м., проф. Университет
 м., преп. Инс-т нар. хоз-ва
 м., проф. 1-й Политех. ин-т, Универ-т
 м., проф. 1-й Пед. инс-т
 м., проф. 1-й Политех. инс-т
 м., преп. Артиллер. Академия
 м., проф. Универ-т, 1-й Пед. инс-т
 м., персонально
 м., преп. 1-й Пед. инс-т
 теор. мех-ка, преп. Ин-т инж. пут. сообщ.
 методика м., проф. Ин-т дошк. обр-я
 м., проф. Артиллер. академия
 м., проф. Университет
 м., преп. Географич. инс-т
 м., прорект. Пожарно-техн инс-т
 м. и теор. мех., проф. Акад Худож-в
 м., проф. Горный инс-т
 м., проф. 1-й Политех. инс-т
 м. и геогр., преп. Технологич. инс-т
 методика м., преп. 3-й Пед. инс-т
 м., графика, проф. Пожарно-техн. ин-т
 м., проф. 3-й Пед. инс-т
 м., зав. отд. Всеросс. Педагогич. Музей
 м., преп. Астрономический инс-т
 м., проф. Технол. ин-т, Университет
 м., преп. Ин-т инж. путей сообщ-я
 м., проф. 2-й Педагогич. Институт
 м., преп. 3-й Пед. инс-т, Университет
 м., преп. Технологич. институт
 м., физика, преп. Технологич. инс-т
 м., академик, Академия наук
 м., преп. Инс-т инж. ПС
 мех-ка, проф. 1-й Политех. инс-т
 мех-ка, прикл. матем, преп. Техн. инс-т
 м., проф. Технологич. инс-т
 м., ост. при каф. Университет
 м., физика, преп. Инс-т фотографии
 м., проф. 1-й Пед. инс-т
 м., преп. Рабочий фак-т
 м., проф. Университет
 м., проф. Университет
 мех-ка и матем. 1-й Политех. инс-т
 м., проф. Университет
 м., преп. 2-й Политехн. инс-т
 м., преп. С/х академия

58	Смирнов Владимир Иванович	м., проф. Университет
59	Смирнова Юлия Андреевна	м., проф. Университет
60	Сохоцкий Юлиан Васильевич	м., проф. Университет
61	Стеклов Владимир Андреевич	м., академик Академия наук
62	Султан-Шах Екатерина Сем.	м., физика, преп. 1-й Пед. инст-т
63	Тамаркин Яков Давидович	м., проф. Университет
64	Товстолес Флавион Павлов.	м., прикл мех-ка преп. Воен-инж. акад.
65	Токмачев Сергей Михайл.	м., метеорология преп. Лесной инст-т
66	Умнов Борис Иванович	м., преп. 3-й Педагогич инст-т
67	Успенский Яков Викторович	м., проф. Университет
68	Федерман Ал-др Карлович	м., проф. Агрономический инст-т
69	Филиппов Владимир Мих.	м., преп. 1-й Политехн. инст-т
70	Фихтенгольц Григорий Мих.	м., проф. Университет
71	Фридман Ал-др Ал-дрович	м., мех-ка, зав. отд. Физич. обсерват-я
72	Харитонович Борис Георг.	мех-ка, преп. Политехн. инст-т, Мор. акад.
73	Цинзерлинг Дмитрий Петр.	м., зав. каб. матем, Педагогич. Музей
74	Цытович Николай Платон.	м., артиллерия, проф. Артиллер. акад-я
75	Шатров Владимир Дмитр.	прикл. м. проф. Инст-т гражд. инж.
76	Шмулевич Петр Корнивович	м., преп. Инс-т фотографии и фототехн.
77	Шохат Яков Александр.	м., проф. 2-й Педагогич. инс-т
78	Шохор-Троцкий Семен Ил.	м., преп., н. сотр. С/х инс-т, Оптич. ин-т
79	Щукин Николай Леонид.	теор. и прикл. мех-ка проф. 2-й Полит. ин-т
80	Крылов Алексей Ник.	м., проф. академик, Академия наук

В письме к академику С. Ф. Ольденбургу Горький писал:

Я наблюдал, с каким скромным героизмом, с каким стоическим мужеством творцы русской науки переживали мучительные дни голода и холода, видел, как они работали, и видел, как умирали...

Я думаю, что русскими учеными, их жизнью и работой в годы интервенции и блокады дан миру великолепный урок стоицизма, и что история расскажет миру об этом страдном времени с тою же гордостью русским человеком, с какой я пишу Вам эти простые слова [22, с. 260].

Н. А. Малышева

Литература

- [1] Из статьи Wells'a в «Daily Telegraf» // Наука и ее работники. 1921. № 2.
- [2] Уэллс Г. Дж. Россия во мгле // Собрание соч. в 15 т. Т. 15. М.: Правда, 1964. С. 315–378.
- [3] Национальная библиотека Сербии. Белград. Фонд Сергея Смирнова. Р-699. См. <https://www.belrussia.ru/page-id-7814.html>
- [4] Письма — больше, чем воспоминания. Из переписки семьи Семеновых-Тян-Шанских и сестер А. П. и В. П. Шнейдер. М.: Новый хронограф, 2012.
- [5] Кареев Н. И. Прожитое и пережитое. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990.

- [6] Рассел Б. Автобиография // Иностранная литература. 2000. № 12. С. 97–240.
- [7] Петроградское физико-математическое общество // Наука и ее работники. 1921. № 4.
- [8] Ольденбург С. Ф. Российская академия наук в 1921 году // Наука и ее работники. 1922. № 1.
- [9] Андреев Мануил. Быт Петрограда. Серия открыток. Пг.: изд-во Тип. Труд-арт, 1923. (8 открыток.)
- [10] ЦГА СПб. Ф. 2995. Оп.1. Д.60.
- [11] Чуковский К. И. Дневник: в 3 т. Т. 1.: 1901–1921. М.: ПРОЗАиК, 2001.
- [12] Personalia // Наука и ее работники. 1921. № 1.
- [13] Елисеев С. Г. Тюремный дневник (май–июнь 1919 г.); Воспоминания о Петрограде (1918–20 гг.) и побег в Финляндию / примеч. Я. Василькова и О. Шаталова // Уроки гнева и любви : сборник воспоминаний о годах репрессий (1920-е – 80-е гг.) / сост. и ред. Т. В. Тигонен. СПб., 1993. Вып. 4. С. 9–44.
- [14] Библиография // Наука и ее работники. 1921. № 3.
- [15] В высших учебных заведениях // Наука и ее работники. 1920. № 1.
- [16] Дробижев В. З. Главный штаб социалистической промышленности (Очерки истории ВСНХ. 1917–1932 гг.). М.: Мысль, 1966.
- [17] Лосский Н. О. Воспоминания: Жизнь и философский путь. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1994.
- [18] Хрестоматия по истории России, 1917–1940: пособие для учащихся старших классов средней школы, гимназий и лицеев с углубленным изучением истории / под ред. М. Е. Главацкого. М.: АО «Аспект-пресс», 1994.
- [19] Русское зарубежье. Золотая книга эмиграции. Первая треть XX века. Энциклопедический биографический словарь / отв. ред. Н. И. Канищева. М.: РОССПЭН, 1997.
- [20] Высылка вместо расстрела: депортация интеллигенции в документах ВЧК-ГПУ, 1921–1923 / сост. В. Г. Макаров, В. С. Христофоров. М.: Русский путь, 2005.
- [21] Краткий обзор организации ПетроКУБУ и ее деятельности за трехлетний период. 12 января 1920 г. – 12 января 1923 г. Петроград, 1923. 15 с.
- [22] Горький М. Письма июнь 1924 – февраль 1926 // Полное собрание сочинений. Письма: в 24 т. Т. 15. М.: Наука, 2012.

История о математиках, репрессированных НКВД в блокадном Ленинграде

Массовые репрессии в СССР в 30-х — начале 50-х годов затронули все слои населения. Не обошли они и сообщество математиков. И если дело Лузина и разгон Ленинградского математического общества еще можно пытаться рассматривать как внутриакадемические дразги, то в деле «Комитета общественного спасения», о котором дальше пойдет речь, НКВД взялось за математиков всерьез.

Зимой 1941–1942 года в блокадном Ленинграде люди — ежедневно — тысячами умирали от голода. Милиция и НКВД отлавливали дезертиров, диверсантов, банды каннибалов. Среди прочего, первому секретарю Ленинградского обкома и горкома ВКП(б) А. А. Жданову доложили, что, согласно агентурным данным, некоторые антисоветски настроенные лица ожидают немцев и желают с ними сотрудничать. Жданов поручил начальнику Управления НКВД по Ленинграду и Ленинградской области П. Н. Кубаткину проверить эти данные и обеспечить безопасность города в условиях вражеской блокады. Исполнители восприняли поручение как сигнал к истреблению нелояльных советской власти слоев населения.

Про дело «Комитета общественного спасения» и «Дело ученых» написано много [4], [5], [6], [7], [8]. Особенно стоит отметить воспоминания Г. Р. Лоренца, знавшего репрессированных ученых лично [17]. Цель настоящей заметки — воссоздать для читателя атмосферу репрессий, которые были неотъемлемой, пусть и не всегда заметной, частью мироощущения советских граждан того периода.

Дело «Комитета общественного спасения» началось с ареста Владимира Сергеевича Игнатовского, математика, физика, специалиста в области оптики, члена-корреспондента АН СССР. В его ближайшем окружении было два агента НКВД, один из которых с 1939 года сожительствовал с женой Игнатовского, а второй, Е. Ф. Меркулов, был провокатором и в 1945 году был изобличен в сочинительстве в попытках показать свою полезность органам.

Профессор Игнатовский и его жена были арестованы 6 ноября 1941 года. Игнатовский (которого избивали на допросах) подтвердил, что явля-

ется участником фашистской организации «Комитет общественного спасения» и ожидает немцев, желая войти в правительство, которое они организуют после захвата города. На основании показаний Игнатовского и его жены были арестованы профессор С. М. Чанышев, В. И. Милинский, К. И. Страхович, Н. А. Артемьев и старший инженер Института точной механики К. А. Любов. С их биографиями и достижениями в математике можно ознакомиться, например, в [8].

Все они под пытками оговорили себя и были приговорены к смертной казни. Доцент кафедры геометрии математико-механического факультета университета Владимир Иванович Милинский умер в тюрьме 4 января 1942 года. Константину Ивановичу Страховичу расстрел заменили десятью годами исправительных лагерей в обмен на оговор еще не арестованных ленинградских ученых. В отношении остальных приговор был приведен в исполнение.

По показаниям Страховича появилось второе дело, дело № 555 (дело «Союза старой интеллигенции»), в рамках которого арестовали директора ЛОМИ (Ленинградского отделения математического института АН СССР) А. М. Журавского, декана матмеха ЛГУ Н. В. Розе, профессора матмеха ЛГУ Б. И. Извекова, доцентов-математиков Н. И. Постоеву, Б. Д. Вержбицкого, профессора Н. С. Кошлякова и многих других.

Розе, Извеков и Вержбицкий умерли во время следствия, в том числе в результате избиений и голода.

Под давлением следователя Кружкова арестованный член-корреспондент Академии наук СССР, профессор, заведующий кафедрой общей математики ЛГУ и кафедрой высшей математики ЛЭТИ, сотрудник ЛОМИ Николай Сергеевич Кошляков дал показания о наличии в ЛГУ контрреволюционной организации, в составе одиннадцати профессоров и доцентов. В 1954 году профессор Кошляков сообщил прокуратуре Ленинградского военного округа следующее:

В самом начале следствия я был предупрежден Кружковым и другими, что если я не признаю себя виновным в предъявленном обвинении, то они заставят меня признаться в совершении преступления, так как располагают для этого многими средствами. А когда я сделал попытку отказаться от подписи протокола, сочиненного Кружковым, то он меня избил. После этого я уже не сопротивлялся (...) я находился в состоянии полного истощения и не обладал уже никакой волей [2].

25 апреля 1942 года всем обвиняемым по делу «Союза старой интеллигенции» был вынесен смертный приговор. 28 мая 1942 года Президиум Верховного Совета СССР заменил расстрел десятью годами исправительно-трудовых лагерей.

В 1944 году Кошлякова из лагеря переправили в «шарашку» под Москвой, где он разрабатывал оружие для противовоздушной обороны, затем в «Кресты» (ОКБ-172, см. [12]) в Ленинград. Он был освобожден из заключения на полгода раньше срока, в 1951 году (т. е. через 9,5 лет), реабилитирован и восстановлен в звании члена-корреспондента АН СССР. Кошляков, находясь в заключении, опубликовал одну работу, под фамилией Сергеев, при помощи И. М. Виноградова, С. Н. Бернштейна и Ю. В. Линника [10].

Доцента матмеха ЛГУ Наталью Ивановну Постоеву арестовали 16 февраля 1942 года. В 1957 году она так описала свои злоключения:

(...) под предлогом проверки паспортов явились в квартиру какие-то люди и предъявили мне ордер на обыск и арест. Обыск произвели поспешно и, спрятав драгоценный в те дни кофе и остатки сахара в портфель, увезли меня в тюрьму.

Началось следствие, превратившееся в пытку, как только мое дело было передано следователям Рябову и Кружкову.

Мои показания на себя и других лиц были вырваны страшной жестокостью следствия, усугублявшейся еще тем, что эти методы применялись к человеку, измученному блокадой, голодом, находящемуся в состоянии тяжелой формы дистрофии. Оскорбления, побои, выстаивание целыми ночами на распухших от голода ногах, лишение сна, холод в камере и что, может быть, для голодного маньяка было страшнее всего — лишение миски супа вынудили подписывать протоколы и давать показания, где каждое слово было извращено следователями, переведено на их «особый язык», которым они заменили обычный, человеческий. В течение шести месяцев из меня изготавливали государственного преступника по заранее заготовленному плану, причем без всякого стеснения, издевались и потирали руки по поводу всякого вырванного из горла «признания». Следователи присутствовали на суде и, боясь больше смерти повторения мучений следствия, я, предупрежденная ими заранее, повторяла заученные слова о якобы совершенных мною преступлениях (Записка доцента Постоевой, 1957, цит. по [1].)

Десятилетний срок Постоева отбыла полностью и сверх того еще провела три года в ссылке в Коми. Работала в «шарашке». За нее «от своего частного имени» хлопотал академик В. И. Смирнов [14].

Андрей Митрофанович Журавский, профессор Горного института, директор ЛОМИ, был арестован 17 февраля 1942 года и точно так же осужден на десять лет лагерей. С 1943 года работал в «шарашке» в Перми, в декабре 1944 года был переведен в «Кресты» в Ленинград, где и пробыл до окончания десятилетнего срока заключения, занимаясь вопросами разработки артиллерийского вооружения. Затем был отправлен в ссылку в Сыктывкар, где он смог устроиться преподавателем в педагогическом инсти-

туте в 1952 году. После возвращения из ссылки в Ленинград, весной 1955 года, Журавский был восстановлен на работе в Горном институте в своей прежней должности заведующего кафедрой высшей математики [11].

«Он надеялся, что вовлечение в дело такой массы ученых сделает само дело абсурдным». Чтобы читатель смог глубже погрузиться в атмосферу «дела ученых», мы приведем обширный фрагмент из изложения обстоятельств «следствия» по делу Евгения Ивановича Денисова, доцента Ленинградского политехнического института. Денисов пишет:

18 марта 1942 года я неожиданно был арестован у себя на квартире органами НКВД. Аресту предшествовал обыск с изъятием всех наиболее ценных вещей и описью обстановки. Как выяснилось впоследствии, причина ареста была следующей. За месяц до моего неожиданного ареста был арестован мой сосед по дому — проф. Ленинградского Политехнического ин-та Л. В. Клименко, с которым я был знаком недавно и очень поверхностно. Лично от него самого мне известно, что, доведенный до полного отчаяния голодом и методами следствия, применявшимися его следователем, требовавшим от Клименко «сенсационных» разоблачений, последний дал показание, что решительно все его сослуживцы по ин-ту, знакомые и просто соседи по дому, являются антисоветскими людьми. В этот состоящий почти из шестидесяти человек список крупных научных работников попал также и я. Как далее рассказал мне Клименко перед своей смертью (он умер от острого истощения сразу по прибытии в лагерь), он не помнит, как составлял этот список и как характеризовал отдельных лиц, так как был доведен условиями следствия почти до беспамятства. Но побуждение к написанию этого списка осталось в его памяти. Он надеялся, что вовлечение в дело такой массы ученых «сделает само дело абсурдным» (буквальное выражение Клименко) и тем облегчит его собственное положение, так как следователи, по его мнению, не решились бы обезглавить все научные силы Ленинграда. Безусловно, что это действие Клименко было также и результатом совершенно расстроенной, явно больной психики, неизменно сопровождавшей физические процессы острого истощения организма, что в большей или меньшей степени относилось ко всем нам, перенесшим первую зиму блокады.

К счастью, за несколько дней до этого показания Клименко произошла организованная и полная эвакуация профессорско-преподавательского состава института и все перечисленные им в списке лица были уже за пределами непосредственной досягаемости следовательского аппарата, что и спасло их от моей участи. Я же, вследствие болезни моей 75-летней матери, не мог эвакуироваться вместе со всеми и был вынужден ожидать ее выздоровления, а через несколько дней я был арестован.

После первого же допроса я понял, в насколько безвыходное положение я был поставлен. Несмотря на мои настояния, мне не предъявлялись конкретные обвинения (с показанием Клименко я был ознакомлен по окончании следствия), а требовались собственные признания в каких-то

неизвестных мне преступлениях. Следователь Идашкин с первых слов заявил мне, что у него есть неопровержимые доказательства моей «антисоветской» деятельности и что я должен оставить всякую надежду вырваться из его рук, поскольку в его следовательской практике еще не было случая оправдания подследственного, и я не буду исключением.

Мои попытки доказать, что по самому существу я не могу быть антисоветским, человеком встречали лишь издевательскую насмешку со стороны допрашивавших меня Идашкина и Михайлова. Так, в течение всей зимы, до дня своего ареста, я добровольно и безвозмездно один работал в своей замерзшей лаборатории над изготовлением медикаментов для ленинградских госпиталей. Показывая следователям свои распухшие (от ожогов и обморожений) и израненные руки, что было неизбежно при работе в тех неопишимо тяжелых условиях 41–42 года, я убеждал следователей в невероятности того, чтобы враждебно настроенный человек добровольно тратил остатки своих сил для помощи своим же врагам. В ответ я слышал, что эта работа не что иное, как маскировка моей антисоветской деятельности.

Далее, настаивая на опросе свидетелей, я утверждал, что можно опросить многие десятки моих знакомых и товарищей, знавших меня более 15-ти лет (т.е. всю мою сознательную жизнь), и убедиться, что среди них нет ни одного, кто отозвался бы обо мне отрицательно. Следователи отвечали мне, что никаких свидетелей они опрашивать не собираются, так как положительные отзывы обо мне будут обозначать только то, что я всю жизнь хорошо маскировался. Наконец, мои объяснения причины, по которой я не эвакуировался с составом института, также категорически отвергались следствием, заявлявшим мне, что я оставался в городе «в ожидании прихода немцев», хотя они видели, что дома лежит моя больная мать (скончавшаяся после и в результате моего ареста), и имели в руках мои эвакуационные документы, полученные мною еще в феврале м-це 1942 г., когда я собирался эвакуироваться в составе так называвшегося «золотого фонда» ленинградских металлургов и не мог этого выполнить только потому, что тяжело заболел дизентерией сам.

(...) Пришедший заместитель начальника Управления, оказавшийся в дальнейшем Кружковым, в ответ на мое заявление о необходимости предъявить мне конкретные обвинения, точно указав, что именно я совершил, где и когда, ответил, что единственный его совет мне состоит в скорейшем признании своей антисоветской деятельности, так как это все равно рано или поздно будет мною сделано, но чем позже, тем хуже это окажется для меня.

(...) В конце допроса, ввиду того, что я продолжал упорствовать, не признавая за собою никаких преступлений, мне был поставлен ультиматум с угрозой привлечь мою жену для моего «изобличения». Эта угроза была для меня, безусловно, реальной, ибо если был арестован я, не знавший за собой никакой вины, то с таким же основанием могла быть арестована и моя жена. Конечно, жене не в чем было изобличать меня, и огромная сила угрозы заключалась совсем не в этом. Она была в том, что после

эвакуации сотрудников института у нас не оставалось никаких знакомых, на участие которых в отношении оставшейся семьи можно было бы надеяться в случае ареста жены. В семье в этом случае оставалась бы лишь тяжелобольная старушка мать и двое моих детей, из которых дочери было 4 года, а сыну 10 лет. Предоставить их самим себе в тех тяжелых условиях без пищи, топлива и помощи не только на неопределенное время, а даже на день было бы немыслимо, не говоря уже о возможной перспективе допроса, ожидавшего жену, пример которого я уже испытал.

Таким образом, действиями следователей были созданы совершенно дикие условия, при которых дальнейшая защита себя и попытки восстановить истину оказывались не только бессмысленными, приводившими лишь к невозвратной потере остатков физических сил, но и аморальными, ибо грозили гибелью всей семьи.

Из этого положения не было никакого выхода (за исключением одного, оставленного следствием). Оставалось сделать лишь самый отчаянный шаг, чтобы хоть временно отвести висящую над головой угрозу собственной жизни и существованию всей семьи.

Для этого нужно было взвалить на себя отвратительную роль антисоветского человека и, выиграв время, попытаться выяснить истинную причину своего ареста, чтобы при первом же удобном случае (на суде, как я полагал) раскрыть все обстоятельства, вынудившие меня на ложные показания, и доказать свою невиновность. Это позволяло сохранить семью, так как у следствия уже не было бы необходимости привлекать жену для моего «разоблачения», и это же позволяло надеяться на сохранение остатков собственных сил, поскольку следователи в случае моего «признания» обещали всячески улучшить мое питание, и, наконец, делало бы условия следствия более терпимыми. Я недолго колебался в этом. Безумный страх за благополучие семьи и чувство утраты своих физических сил заставляли меня сделать первый шаг по пути, на который толкали следователи.

(...) С полной и безусловной категоричностью можно утверждать, что в задачу, поставленную перед собою следователями, входило отнюдь не установление истины, а совершенно сознательное, строго обдуманное создание эффектного и полностью фальшивого дела. Поэтому вырванное у меня показание о том, что я «признаю» себя «антисоветским» человеком их совершенно не удовлетворило. Требовалось вовлечь в дело как можно больший круг людей путем приписывания им всякого рода антисоветских разговоров, пораженческих настроений и т.п. Примеры такого рода «разговоров» и «слухов» следователь Идашкин приводил мне сам, по-видимому, не слишком надеясь на мою собственную фантазию. Для меня только оставалось разнообразить их содержание и придумывать обстановку и «собеседников». По мере того как следствие требовало все более и более серьезных самообвинений, я совершенно отказался от упоминаний здравствовавших лиц, поскольку им могло грозить такое же положение, в каком оказался я. Поэтому в дальнейшем все свои вымышленные показания я связывал только со своими знакомыми, уже погибшими

к дню моего ареста, как, например, проф. М. П. Славинским (умершим в декабре 1941 г.), М. Г. Окновым (убитым в феврале 1942 года) и лаборантом И. И. Попиневским (умершим в феврале 1942 года). Я ясно представлял себе, что в будущем это создаст большие трудности для разоблачения ложности показаний, но иного выбора не было, так как остановиться в своих показаниях или ограничить их определенными рамками я не мог. Отказавшись на следствии от дальнейших показаний, я бы оказался в положении первых дней следствия, но только в неизмеримо худших обстоятельствах, создавшихся благодаря уже сделанным вынужденным признаниям.

Попытки же ограничить свои показания вызывали такое озлобление следователя, более не стеснявшегося в своих действиях, что сопротивляться ему было равнозначно сознательному и быстрому уничтожению остатков своих физических сил. Так, на одном из допросов Михайлов совместно с Идашкиным потребовали от меня признания, что я не эвакуировался из Ленинграда потому, что «ожидал немцев». Пока дело ограничивалось вымыслением глупейших «разговоров», за которые должно было бы быть стыдно более следствию, чем мне, я с отвращением еще как-то переносил это, но подписать такое «признание», когда в действительности я отдавал все свои силы на оказание помощи по производству отсутствовавших медикаментов для госпиталей блокированного города, мне казалось невозможным. После тяжелого скандала, длившегося всю ночь между мною и обоими следователями, я в результате был избит Михайловым, несколько раз ударившим меня кулаком в голову. Защищаться у меня не было сил — я с трудом стоял на ногах, едва сдерживая стон от невыносимой боли во всем теле и в опухших ногах после очередной многочасовой «стойки». Однако самым тяжелым мучением было лишение сна, которое длительное время практиковали Идашкин и Михайлов, вызывая меня на допрос вскоре после отбоя и отпуская в камеру незадолго до подъема. Так как днем в камере спать воспрещалось, то случалось, что неделю подряд я был без сна. Это приводило к тому, что многие из этих ночей допроса оказались проведенными как в бреду, и ни в последующие дни после допросов, ни позже я не мог восстановить в памяти содержание вырванных от меня показаний или, вообще, последовательный ход допроса. В памяти оставались лишь только неясные обрывки каких-то несвязных воспоминаний. Лишенный в результате этих условий последних физических сил, я понял, что я бессилен противостоять следствию в какой-либо мере и насколько бесполезны мои попытки в этом отношении. С этого времени я решил подписывать все, что требовалось от меня, даже не трудясь прочтением показаний, с «моих слов» написанных следователями. После этого обстановка следствия значительно улучшилась. Я уже не стоял десятки часов на ногах, а сидел и дремал, пока меня не будил следователь для подписания очередных написанных им показаний. Я настолько устал от всего пережитого мною на следствии, что содержание многих десятков страниц исписанных следователями «моих показаний» меня не интересовало, и я ожидал только окончания следствия и начала суда, где я собирался рас-

сказать все, что происходило на следствии и в результате чего появились на свет эти «показания».

(...) 21-го мая 1942 года в мою одиночную камеру неожиданно пришел Михайлов, принес мне пачку табаку, белую булку и круг колбасы — вещи, о которых нельзя тогда было и мечтать. Незнакомо предупредительный и любезный, он сообщил мне, что давно собирался навестить меня, но масса дел не позволяла прийти ему раньше. Усевшись на койку, он вел со мной дружеский разговор о положении дел в городе и на фронте, совершенно не касаясь моего дела, так, как будто его не существовало и никогда не было десятков часов издевательств и побоев. Перед уходом он доверительно сообщил мне, что, по его сведениям, скоро состоится суд и он, совершенно убежденный, по своим наблюдениям во время следствия, что я на самом деле являюсь честным советским человеком, несмотря на все мои показания, считает своим долгом предупредить меня о следующем: следствию известно, что мои преступления совсем не столь велики, какими они обрисованы в показаниях, и, подписав их, я поступил как истинный советский человек, которому следствие оказывает теперь полное доверие. Но с своей стороны я также должен доказать свое доверие к следствию, полностью подтвердив свои показания на суде. В этом случае дело для меня кончится отсылкой на фронт, что уже согласовано с председателем суда по ходатайству следственных властей. В случае же моего отказа от следственных показаний повторное следствие будет настолько тяжелым, что мне уже вряд ли удастся его перенести.

(...) Однако обдумывать создавшееся положение у меня уже не оказалось времени, которое было точно рассчитано Михайловым, — через несколько минут после его ухода я был вызван на суд, а еще через короткий промежуток времени я уже должен был отвечать на вопрос председателя Трибунала о признании своей виновности. Я, как и все, ответил утвердительно.

Перед тем как войти в зал суда, я увидел Михайлова и Кружкова, прогуливавшихся в коридоре под руку с каким-то военным, который, как оказалось, был председателем Трибунала. Эта демонстрация близости следователей к членам суда, рассчитанная на соответствующий эффект среди нас, подсудимых, была, конечно, учтена всеми нами и, вероятно, явилась главной причиной того, что все обвиняемые подтвердили свою виновность, тем более что весь состав многочисленного следовательского аппарата полностью присутствовал на этом и всех последующих судебных заседаниях, внимательно следя за каждым нашим выступлением. Даже во время перерывов следователи не оставляли нас, очевидно опасаясь, что мы все еще можем договориться и выступить с общим протестом против всего «дела» в целом. Так как мои показания должны были состояться на следующее утро, то вечером ко мне в камеру явился Кружков (с таким же «подарком», какой утром сделал Михайлов) и повторил уже сказанное Михайловым, но с более грубой формой угрозы («не подтвердите показания — будьте уверены — Вас расстреляют, и мы, т.е. следственный аппарат, не будем Вас защищать, хотя можем сделать все вплоть до Вашего освобождения»).

На следующий день я подтвердил свои показания в отношении себя.

24-го мая 1942 года суд вынес свой приговор, и с этого момента никто из нас уже не видел своих следователей, моральный облик которых сливается с обликом закоренелых уголовников (Записка Денисова, 1957, цит. по [1]).

В заключении Денисов использовался как специалист в лаборатории НКВД. Денисов был реабилитирован в феврале 1955 года, а в октябре 1955 года был восстановлен в должности заведующего кафедрой аналитической химии Ленинградского политехнического института [16].

Похожие дела описываются в многочисленных воспоминаниях. Читатель может восстановить общую схему по изложенному выше материалу. Сначала органы арестовывают несколько человек, связанных какой-либо общностью и имеющих «сомнительное» происхождение или прошлое, обучавшихся или работавших за границей. На арестованных уже могут иметься показания агентов, в большей или меньшей степени выдуманные. Как мы увидим дальше, с точки зрения некоторых следователей, чтобы быть виновным, достаточно было просто относиться скептически к советской власти.

Арестованные изолируются друг от друга, обвиняются в участии в контрреволюционной организации. На допросах им могут угрожать расстрелом и соблазнять помилованием в случае признания вины. Обычно кто-то из арестованных ломается и подписывает «чистосердечное признание», оговаривая нескольких новых подозреваемых по подсказкам следователя. Так образуется второй, расширенный круг подследственных, который также может быть произвольно расширен, так как никакого реального дела нет, и потому нет у него и объективных границ.

Для удобства делопроизводства и отчетности признавшиеся более или менее произвольно объединяются в группы с громко звучащими целями: «убийство Сталина», «свержение советской власти» и т.п. Следуя своеобразной эстетике того времени, в группах определялись будущие «члены правительства» и министры.

Согласно справке Кубаткина Жданову, с 5 сентября 1941 года до 1 октября 1942 года было вскрыто и ликвидировано 625 контрреволюционных групп [3]. Проверки, проведенные в 1943 году и позднее, показали, что многие из этих дел были сфальсифицированы.

Однако в отсутствие признательных показаний «подшить» к делу нового человека было непросто. 3 февраля 1942 года был арестован первый декан оптического факультета ЛИТМО профессор Владимир Николаевич Чуриловский, по обвинению в участии в фашистской и шпионской организации Игнатовского (уже расстрелянного к этому моменту).

В постановлении об аресте указывалось, что Чуриловский изобличается показаниями арестованных профессоров Титова, Чанышева и Игнатовского. Таких показаний указанные профессора не давали [2]. Профессор Чуриловский отрицал участие в антисоветской деятельности, несмотря на изнурительные допросы и издевательства. Были допрошены сослуживцы Чуриловского, однако и они показаний о его антисоветской деятельности дать не смогли. Тогда была допрошена в качестве свидетеля Игнатовская, уже осужденная к тому времени к расстрелу. Но и она дала показания лишь о пораженческих настроениях Чуриловского, которые он якобы высказал при случайной встрече.

Все эти показания Чуриловский отрицал как на допросах, так и на очной ставке с Игнатовской 6 марта 1942 года [2]. Не получив от Чуриловского признательных показаний и тем самым не имея никаких доказательств его причастности к антисоветской организации Розе, Кошлякова и других, следователи выделили материалы на Чуриловского в отдельное производство, а затем прекратили уголовное преследование (см. заключение Особой Инспекции в [1]).

Все ученые, осужденные по этим двум делам, были реабилитированы в 1954–1955 годах, а следователи, сфабриковавшие дело (Огольцов, Занин, Альтшуллер, Подчасов, Кожемякин), исключены из КПСС.

Проверкой, произведенной Прокуратурой, установлено, что «Комитета общественного спасения» в действительности не существовало, и что он был искусственно создан работниками бывшего управления НКВД Ленинградской области (...) Проверкой установлено также, что в УНКВД Ленинградской области была широко распространена преступная практика допросов заключенных после их осуждения к высшей мере наказания. На этих допросах путем обещания сохранить жизнь от осужденных вымогались нужные следствию показания на других лиц (...) 25 февраля 1958 [2].

В 1955 году следователь Кружков был исключен из КПСС и военным трибуналом 8-го Военно-Морского флота осужден «за фальсификацию уголовных дел на группу видных ученых Ленинграда» к 20 годам исправительно-трудовых лагерей. Отсидев семь лет из двадцати, он освобожден в 1962 году. Интересный факт: Кружков в 1934–1939 годах обучался на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова. Об этом периоде его жизни можно прочитать в воспоминаниях его однокурсника [15]. Возможно, Кружков во время войны продолжал обучаться заочно, так как просил находящуюся под следствием Постоеву решать задачи по комплексному анализу [13]. Следователь Кружков сфабриковал 12 уголовных дел на 65 человек [4]. Сын Кружкова стал известным математиком.

«...осужденных ученых не расстреливать и заменить им расстрел на заключение в лагерь с использованием их по специальности». Интересно узнать точку зрения следователей, осужденных за фальсификации по этому делу. Следователь Альтшуллер видел в ученых и преподавателях в первую очередь бывших эсеров, кадетов, представителей другой культуры, другого класса.

Я — солдат революции, отдавший всю свою сознательную жизнь выполнению приказов партии на остром участке классовой борьбы и в силу этого совершавший ошибки, вытекавшие из порочной системы работы органов госбезопасности ежовско-берианского периода (из апелляции бывшего следователя Альтшуллера, 1970, цит. по [1]).

Кружков также считал подследственных врагами народа и не видел ничего предосудительного в пытках.

Подсудимый Кружков в судебном заседании вину свою частично признал, т. е. применение незаконных методов следствия в отношении отдельных лиц, как то: применение стоек, производство ночных допросов, ругани с целью сломя воли допрашиваемых, в отдельных случаях нанесение побоев. Признал и тот факт, что он в ряде случаев не записывал в протоколы допросов отрицательных показаний и получение показания от осужденного к высшей мере наказания Страховича, заявив при этом, что он применял незаконные методы следствия и получал признательные показания, верил тогда им и считал, что ведет борьбу с врагами народа (цит. по [6]).

Рябов подчинялся указаниям начальства и предпочитал не задумываться о происходящем.

На допросы арестованных ко мне приходили и Занин, и Подчасов, а также Кружков и в некоторых случаях Артемов.

Сам факт их захода на допросы, их требовательность к арестованным, как мне тогда представлялось, их «логическое» и «убедительное» использование обстоятельств из показаний других арестованных, а со стороны Кружкова и более резкое обращение играли решающее значение на дачу признательных показаний арестованными, допрашивать которых было приказано мне (...)

В соответствии с распоряжениями бывших руководителей я выполнял и другие следственные действия, не отдавая себе в то время отчета в фактическом существовании дел (показания подполковника Рябова, 1957, цит. по [1]).

Артемов уже заранее считал арестованных виновными, просто в силу их нелояльности советской власти.

(...) потому что и в самом деле обвиняемые не стреляли, не убивали, а именно вели антисоветские разговоры о том, что надо опять-таки путем

антисоветских разговоров выявлять единомышленников и устанавливать с ними связь, о том, что надо «спасать» гражданское население города и для этого добиваться сдачи Ленинграда немцам, о том, что следует организовано предложить свои услуги фашистскому командованию по установлению в Ленинграде «нового порядка» (...) (показания полковника Артемова, 1957, цит. по [1]).

Шевелев не замечал попыток Кружкова, но оказался принципиальным в нежелании фальсифицировать дело и диктовать подследственным то, в чем они должны сами признаваться. За это его обвинили в том, что он тормозит следствие, уволили из органов, исключили из КПСС и отправили в армию.

У подследственных, после того как они рассказали своему следователю все о своей контрреволюционной деятельности, наступает период полнейшего безразличия, когда они без всякого возражения способны подписать все, что им предложит подписать следователь. И Подчасов, и Альтшуллер это видели, и после того, как им стало ясно, что меня на «липу» не склонить, естественно, возникла необходимость отстранить меня от этого дела, как человека, стоящего на пути к их славе (...)

Таким образом, через день-два почти весь аппарат Ленинградского управления был посвящен в то, что следственная группа контрразведывательного отдела пытается раздуть большое дело ученых, а меня за то, что я стою на пути, препятствую им, очевидно, арестуют, посадят, как это делалось со многими другими до этого (показания бывшего следователя Шевелева, цит. по [1]).

Подчасов, будучи начальником среднего звена, «не замечал» фальсификаций подчиненных, но, когда он отказался арестовывать новых ученых по показаниям уже осужденных к смертной казни, его (...) просто перестали звать на совещания (Показания полковника Подчасова, цит. по [1]).

Занин выполнял указание сверху о том, что надо «не затягивать разработки». Прямых указаний фальсифицировать материалы он мог и не давать, видя, что Альтшуллер, Кружков и Артемов справляются сами. Занину достаточно было иногда что-то недопроверить.

Руководство МГБ и Ленинградского управления требовало обеспечить внутреннюю безопасность в городе. Были указания МГБ и б. нач. УКГБ Кубаткина не затягивать разработки и быстро их ликвидировать. В этих же целях давалось указание пересмотреть все архивные материалы в отделах и при наличии в них указаний на к-р [контрреволюционную] деятельность, также реализовать следственным путем (...)

Возникавшие следственные дела оканчивались в короткие сроки. Арестованных было много. В этой обстановке и в этих условиях могли быть и

были допущены большие ошибки и недоделки в агентурно-следственной работе. Материалы не всегда до конца перепроверялись и документировались.

В тот период времени основным доказательством в следствии считалось признание арестованных, и это было основной и большой ошибкой, вытекавшей из неправильной установки министерства. Наряду с этим обстановка в Ленинграде как-то не позволяла долго вести разработки и следственные дела.

Весь процесс следствия по делам проходил под наблюдением и с участием представителей органов прокуратуры, которые, так же как и мы, безвыходно находились в управлении на работе днем и ночью (...)

Арестованные действительно были а-с [антисоветски] настроены. Это они как будто не отрицают и теперь (показания полковника Занина, 1958, цит. по [1]).

Огольцов попросту не имел времени (и желания) вникать в то, стоило ли вообще арестовывать и судить этих ученых и чем занимаются его подчиненные.

[Дело] требовало тщательного разбирательства с затратой мною времени, сопоставления фактов, проверки отдельных расхождений и данных, но обстановка осажденного врагом города не позволила этого сделать. Исходя из этих соображений, УНКВД по моей инициативе внесло предложение: осужденных ученых не расстреливать и заменить им расстрел на заключение в лагерь с использованием их по специальности (...)

Моя вина состоит в том, что я недостаточно осуществлял контроль за ходом как агентурной разработки, так и ходом следствия. В частности, я должен был лично встретиться с агентурой, которая сообщала данные о наличии группы ученых, проводящей антисоветскую работу, убедиться в правоте этих данных. Но я этого не сделал, да и не мог я этого сделать по той причине, что наряду с основными обязанностями зам. нач. УНКВД, с начала войны я был назначен начальником оперативного штаба по борьбе с парашютными десантами противника на территории Ленинградской области, для чего мною было сформировано 136 истребительных батальонов, проводилась подготовка и обучение этих батальонов. Помимо этой огромной и важной в условиях войны работы, на меня было возложено руководство диверсионной работой в тылу врага, формирование и отправка в район действия двух чекистских партизанских отрядов, отбор чекистов в части народного ополчения, формирование дивизии из числа сотрудников УНКВД и милиции и, наконец, наблюдение за оборудованием переднего края обороны на окраинах города, которая была поручена 5 и 20 дивизии НКВД (показания генерал-лейтенанта Огольцова, цит. по [1]).

В 1959 году Огольцов (в должности заместителя министра государственной безопасности СССР по общим вопросам в 1948 году руководивший убийством Соломона Михоэлса, руководителя Еврейского антифа-

шистского комитета) был лишен воинского звания «генерал-лейтенант» и правительственных наград «как дискредитировавший себя за время работы в органах». Полковники Занин, Артемов, Подчасов, Кожемякин, Альтшуллер в 1957 году уже были уволены в запас, и их увольнение было переоформлено как увольнение «по фактам, дискредитирующим звание офицера». Подполковнику Рябову был объявлен выговор. Кружков, как мы уже отмечали, был осужден на 20 лет заключения, но после семи лет в лагере был освобожден.

Дело о реабилитации ученых, судя по всему, началось так: профессор Страхович в 1954 году отправил жалобу генеральному прокурору Руденко о том, что его показания были получены следователями Кружковым и Артемовым с помощью длительных ночных допросов и угроз в отношении родственников. В результате внутриведомственной борьбы жалоба попала Хрущеву, постановившему «разыскать всех виновных и строго наказать» (из апелляции бывшего следователя Альтшуллера, цит. по [1]).

Таков был фон того времени. Разумеется, преподаватели и студенты знали, что кто-то погиб на войне, кто-то пропал без вести, а кого-то забрали на допрос органы: математическое сообщество было не таким большим. Во время войны многие ленинградские математики погибли на фронте или в тылу. Подробные биографии пятидесяти из них изложены в двухтомнике [9].

Можно лишь догадываться, какую роль репрессии, проходящие так близко к каждому, играли в мироощущении советских математиков.

Н. С. Калинин

Литература

- [1] РГАСПИ. Ф. 589. Оп. 3. Д. 6726. Т. 3. Л. 77–183, 291–308; Т. 4. Л. 69–102. Т. 5. Л. 221–231.
- [2] Шевчук И. Попробуй только говорить на суде иначе // Источник. Документы русской истории. 1996/6(25). С. 72–79. Перепечатка из протокола № 1039 заседания КПК при ЦК КПСС, 14.02.1958.
https://imwerden.de/pdf/istochnik_1996_06__ocr.pdf
- [3] Справка начальника УНКВД ЛО в ГК ВКП(б) о числе арестованных, осужденных и высланных за время войны. 1 октября 1942 г. // ЦГАИПД СПб. Ф. 24. ОП. 2-б. Д. 1323. Л. 83–85.
<http://docs.historyrussia.org/ru/nodes/172731-spravka-nachalnika-unkvd-lo-v-gk-vkp-b-o-chisle-arrestovannyh-osuzhdennyh-i-vyslannyh-za-vremya-voyny-1-oktyabrya-1942-g>.
- [4] Голованов Я. Палачи и жертвы дела № 555 // Огонек. 1992. № 5. С. 16–19. <https://arch2.iofe.center/person/20661#document-7494>. Перепечатано

- в газете «Кадры приборостроению». См. https://museum.itmo.ru/newspaper/files/b_71.pdf
- [5] Кутузов В. А. Памяти А.Я. Лейкина: Комитет общественного спасения в блокированном Ленинграде // Петербургская историческая школа: альманах. СПб.: Нестор, 2004. С. 217–236.
- [6] Жиров Е. Всех лиц, проходящих по агентурным сигналам, арестовать // Коммерсантъ Власть (журнал) от 18.03.2013. № 10. С. 53–58. <https://www.kommersant.ru/doc/2144576>
- [7] Шевелев С. Б. «Дело ученых». Репрессии ленинградских математиков в блокадные годы // История науки и техники. 2016. № 8. С. 82–88.
- [8] Одинец В. П. Никто не забыт ничто не забыто // Вестник Сыктывкарского Университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 1 (34). С. 70–91.
- [9] Одинец В. П. О ленинградских математиках, погибших в 1941–1944 годах. Т. 1, 2. Сыктывкар: Издательство СГУ им. Питирима Сорокина, 2020, 2021. См. http://www.mathsoc.spb.ru/history/Odynece_2020.pdf, http://www.mathsoc.spb.ru/history/Odynece_2021.pdf.
- [10] Боголюбов Н. Н., Ишлинский А. Ю., Кошлюков В. Н., Митропольский Ю. А., Фаддеев Л. Д. Николай Сергеевич Кошляков. 100 лет со дня рождения // Успехи матем. наук. 1990. Т. 45, вып. 4. С. 197–202.
- [11] Чебанов В. Д. Андрей Митрофанович Журавский: Арест, заключение, ссылка, реабилитация // Вестник «Мемориала». № 6. НИЦ «Мемориал». СПб., 2001. С. 101–139. https://imwerden.de/pdf/vestnik_memoriala_06_2001_ocr.pdf.
- [12] Крук Н. С. История ОКБ-172 // Вестник «Мемориала». № 6. СПб.: НИЦ «Мемориал», 2001. С. 46–54. https://imwerden.de/pdf/vestnik_memoriala_06_2001_ocr.pdf.
- [13] Якубович Е., Мусин Е. 13 лет и вся жизнь // Газета «Электрик» № 27 от 16.11.1989. См. <https://arch2.iofe.center/person/20661#document-14118>
- [14] Заявление от 25.03.1954 на имя председателя Совета Министров СССР Маленкова Г. М. от Постоевой Н. И. с просьбой о снятии с нее судимости. См. <https://arch2.iofe.center/person/31388#document-14117>.
- [15] Вайнштейн И. А. Вспоминаю и всматриваюсь. Тетрадь 7. См. <https://weinsteinhistory.com/вспоминаю-и-всматриваюсь-тетрадь-7>.
- [16] Биография Денисова Е. И. из книги «Репрессированные политехники». Кн. 1. СПб.: Береста, 2008. С. 219. <https://arch2.iofe.center/person/12181#document-7059>
- [17] Lorentz G. G. Mathematics and Politics in the Soviet Union from 1928 to 1953 // J. Approx. Theory. 2002. V. 116, № 2. P. 169–223.