

## О преобразованіи ультраэллиптическихъ интеграловъ перваго класса формы

$$\int \frac{Cy + D}{\sqrt{R(y)}} dy = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx.$$

Д. Мордухай-Болтовскаго.

§ 1. Задача объ умноженіи эллиптическихъ интеграловъ состоитъ въ разысканіи условій, при которыхъ возможно удовлетворить уравненію

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = \Delta \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad (1)$$

гдѣ  $\Delta$  заданное постоянное число,  $R(x)$  полиномъ 4-й степени, алгебраической функціей  $y$  отъ  $x$  и въ томъ случаѣ, когда условія эти удовлетворены, въ опредѣленіи этой функціи  $y$ .

Называя уравненіе (1) въ предположеніи, что  $y$  алгебраическая функція отъ  $x$ , *приведеніемъ*, а уравненіе, связующее  $y$  съ  $x$  *подстановкой*, мы можемъ формулировать эту задачу слѣдующимъ образомъ: *Найти уравненія, при которыхъ возможно приведеніе (1) и въ случаѣ, если оно возможно, найти отвечающую ему подстановку.*

Естественнымъ обобщеніемъ этой задачи на случай интеграловъ ультраэллиптическихъ перваго класса будетъ задача объ условіяхъ приведенія:

$$\sum_{i=1}^{i=2} \int \frac{Cy_i + D}{\sqrt{R(y_i)}} dy_i = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx, \quad (2)$$

гдѣ  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  вполне заданныя или связанныя заданными уравненіями постоянныя,  $R(x)$  полиномъ 6-й степени, и объ опредѣленіи въ томъ случаѣ, когда оно возможно,  $y_1$  и  $y_2$  въ алгебраическихъ функціяхъ отъ  $x$ .

Другой болѣе спеціальной формой обобщенія будетъ задача о разысканіи условий, при которыхъ возможно приведеніе:

$$\int \frac{Cy + D}{\sqrt{R(y)}} dy = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx \quad (3)$$

и въ томъ случаѣ, когда оно возможно, опредѣленіи отвечающей ему постановки.

Вторая форма получается изъ первой, если положить  $y_2 = \text{const}$  или  $y_1 = y_2$ .

Можно найти безконечное множество приведеній типа (3).

Въ самомъ дѣлѣ, если мы возьмемъ ультраэллиптической интегралъ

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx,$$

приводящійся къ эллиптическимъ

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{Q(\xi)}},$$

то приведеніе

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{Q(\eta)}} = \Delta \int \frac{d\xi}{\sqrt{Q(\xi)}},$$

гдѣ  $\Delta$  какое угодно рациональное число, дастъ:

$$\int \frac{Ay + B}{\sqrt{R(y)}} dy = \Delta \int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx. \quad (4)$$

Интегралъ <sup>1)</sup>

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^3 + ax^2 + \beta)(x^3 + px + q)}}$$

при

$$4p\alpha + 12q = 3\beta (*)$$

приводится къ эллиптическому интегралу. Поэтому существуетъ  $y$ , алгебраическая функція отъ  $x$ , удовлетворяющая уравненію

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y^3 + ay^2 + \beta)(y^3 + px + q)}} = \Delta \int \frac{dx}{\sqrt{(x^3 + ax^2 + \beta)(x^2 + px + q)}},$$

гдѣ  $\Delta$  рациональное число,  $p$ ,  $q$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  связаны соотношеніемъ (\*).

<sup>1)</sup> *Goursat*. Sur la reduction des intégrales hyperelliptiques. Bulletin de Société Mathématique de France, t. XIII, p. 155.

Можно найти приведенія типа (4), въ которыхъ  $\Delta$  число иррациональное мнимое. Полагая въ приведеніи:

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^3}} = \alpha \int \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^3}} \quad \eta = \alpha\xi$$

$\alpha$  первообразный корень двучленнаго уравненія

$$\alpha^3 = 1$$

и

$$\xi = 1 + x^2, \quad \eta = 1 + y^2,$$

имѣемъ:

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{y^6 + 3y^4 + 3y^2 + 2}} = \alpha \int \frac{x dx}{\sqrt{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 2}}.$$

§ 2. Теперь перейдемъ къ изслѣдованію приведенія (3), но только въ предположеніи, что

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} \alpha x$$

не приводится къ эллиптическому интегралу. Мы докажемъ, что при этомъ предположеніи должны имѣть

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

гдѣ  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  постоянныя.

Эту теорему мы выведемъ, какъ слѣдствіе болѣе общей теоремы, относящейся къ одночленнымъ приведеніямъ Абелевыхъ интеграловъ къ Абелевымъ интеграламъ

$$\int F(x, y) dx = \int \Phi(\xi, \eta) d\xi \tag{6}$$

Только въ томъ случаѣ, когда интегралъ  $\int \Phi(\xi, \eta) d\xi$  Абелевъ интегралъ перваго рода и перваго порядка (въ частномъ случаѣ эллиптической) можно высказать теорему, что если приведеніе (6) возможно, то въ немъ всегда можно предполагать:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha(x, y) \\ \eta &= \beta(x, y) \end{aligned} \tag{7}$$

гдѣ  $\alpha(x, y), \beta(x, y)$  рациональныя функции отъ  $(x, y)$  <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Appell et Goursat. Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. 1895. p. 369. Koenigsberger. Ueber die Reduction Abelscher Integrale auf niedere Integralformen speciell auf elliptische Integrale. Journ. de Crelle 89. 1880, s. 89 и другія его сочиненія.

Называя систему уравнений (7) *подстановкой, отвечающей приведенію* (6), мы можемъ сказать, что *при приведеніи Абелева интеграла къ эллиптическому, перваго рода, мы можемъ всегда предполагать подстановку рациональной*. Когда  $\int \Phi(\xi, \eta) d\xi$  Абелевъ интегралъ высшаго порядка, то подстановка не должна быть обязательно рациональной. Такъ мы имѣемъ, напримѣръ,

$$\int \frac{y^2 dy}{V(1-y^6)(1-k^2y^6)} = \frac{2}{3} \int \frac{x dx}{V(1-x^4)(1-k^2x^4)},$$

если положить  $y^3 = x^2$ ,  $y = \sqrt[3]{x^2}$ .

Замѣтимъ, что въ этомъ примѣрѣ интегралы

$$\int \frac{x dx}{V(1-x^4)(1-k^2x^4)}$$

подстановкой  $z = x^2$ ,

$$\int \frac{y^2 dy}{V(1-y^6)(1-k^2y^6)}$$

$z = y^3$  подстановкой приводятся къ эллиптическому интегралу

$$\int \frac{dz}{V(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

Это свойство не является случайностью, но представляетъ слѣдствіе слѣдующей общей теоремы:

*Приведеніе (6) или возможно при помощи рациональной подстановки (7) или же предполагаетъ приведеніе:*

$$\int \Phi(\xi, \eta) d\xi = \int \Psi(\zeta, \omega) d\zeta \tag{8}$$

*интеграла  $\int \Phi(\xi, \eta) d\xi$  къ интегралу порядка при помощи рациональнаго преобразованія <sup>1)</sup>.*

Если  $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx$  не приводится къ эллиптическому интегралу, то должны по этой теоремѣ имѣть:

$$y = \alpha(x, \sqrt{R(x)})$$

$$\sqrt{R(y)} = \beta(x, \sqrt{R(x)})$$

откуда имѣемъ:

$$\int \frac{Ey + F}{\sqrt{R(y)}} dy = \int \Phi(x, \sqrt{R(x)}) dx$$

---

<sup>1)</sup> Доказана въ работѣ: „О приведеніи Абелевыхъ интеграловъ къ простымъ трансцендентнымъ“. Ч. 2, кн. III, стр. 276. Извѣстія Варшав. Политехническаго Института за 1905 г.

$\int \Phi(x, \sqrt{R(x)}) dx$ , какъ интеграль первого рода равенъ

$$\int \frac{Gx + H}{\sqrt{R(x)}} dx.$$

Приведеніе (3) и приведеніе:

$$\int \frac{Ey + F}{\sqrt{R(y)}} dy = \int \frac{Gx + H}{\sqrt{R(x)}} dx \quad (9)$$

даютъ

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{R(y)}} = \int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{R(x)}} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = \int \frac{\gamma x + \delta}{\sqrt{R(x)}} dx$$

откуда получаемъ:

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}. \quad (11)$$

Кромѣ этого будемъ имѣть:

$$(\gamma x + \delta)^3 \sqrt{R(y)} = (\alpha \delta - \beta \gamma) \sqrt{R(x)}$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\frac{\alpha a_i + \beta}{\gamma a_i + \delta} = a_k \quad (12)$$

если черезъ  $a_i$  и  $a_k$  обозначить корни полинома  $R(x)$ . Обратнo подстановка (5) при условіи, что корни  $R(x)$  связаны соотношеніями (12) приводитъ

$$\int \frac{Cy + D}{\sqrt{R(y)}} dy \quad \text{къ} \quad \int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx$$

Располагая попарно ( $a_i, a_k$ ), получаемыя преобразованиемъ (12) другъ изъ друга, мы будемъ имѣть возможныя комбинаціи, опредѣляемыя слѣдующими 8 таблицами

	(6)	
$a_1$	$a_2$	
$a_2$	$a_3$	
$a_3$	$a_4$	
$a_4$	$a_5$	
$a_5$	$a_6$	
$a_6$	$a_1$	

(5.1)	(4.2)	(3.3)
$a_1 \ a_2$	$a_1 \ a_2$	$a_1 \ a_2$
$a_2 \ a_3$	$a_2 \ a_3$	$a_2 \ a_3$
$a_3 \ a_4$	$a_3 \ a_4$	$a_3 \ a_1$
$a_4 \ a_5$	$a_4 \ a_1$	$a_4 \ a_5$
$a_5 \ a_1$	$a_5 \ a_6$	$a_5 \ a_6$
$a_6 \ a_6$	$a_6 \ a_5$	$a_6 \ a_4$

(4.1.1)	(3.2.1)	(2.2.2)
$a_1 \ a_2$	$a_1 \ a_2$	$a_1 \ a_2$
$a_2 \ a_3$	$a_2 \ a_3$	$a_2 \ a_1$
$a_3 \ a_4$	$a_3 \ a_1$	$a_3 \ a_4$
$a_4 \ a_1$	$a_4 \ a_5$	$a_4 \ a_3$
$a_5 \ a_5$	$a_5 \ a_4$	$a_5 \ a_6$
$a_6 \ a_6$	$a_6 \ a_6$	$a_6 \ a_5$

(2.2.1.1)
$a_1 \ a_2$
$a_2 \ a_1$
$a_3 \ a_4$
$a_4 \ a_3$
$a_5 \ a_5$
$a_6 \ a_6$

При составленіи этихъ таблицъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что не можетъ быть соответствій

$a_i$	$a_i$
$a_{i+1}$	$a_{i+1}$
.....	.....
$a_{i+k}$	$a_{i+k}$

гдѣ  $k > 1$ , ибо тогда, такъ какъ уравненіе:

$$\frac{\alpha a_i + \beta}{\gamma a_i + \delta} = a_i$$

имѣеть только два корня, получили бы  $a_i = a_j$  и интеграль

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx$$

не былъ бы интеграломъ перваго порядка.

Преобразованіемъ

$$\begin{aligned} x &= \frac{a\xi + b}{c\xi + d} \\ y &= \frac{a\eta + b}{c\eta + d} \end{aligned} \tag{13}$$

мы можемъ привести приведенія (10) и (11) къ слѣдующимъ:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\eta}{V\Theta(\eta)} &= \int \frac{a\xi + \beta}{V\Theta(\xi)} d\xi \\ \int \frac{\eta d\eta}{V\Theta(\eta)} &= \int \frac{\gamma\xi + \delta}{V\Theta(\xi)} d\xi \end{aligned} \tag{14}$$

гдѣ  $\Theta(\xi) = \xi(1 - \xi)(1 - \alpha^2\xi)(1 - \lambda^2\xi)(1 - \mu^2\xi)$  приче́мъ *таблицу* (6) замѣнить слѣдующей

$$\begin{vmatrix} 0 & \infty \\ \infty & 1 \\ 1 & a \\ a & b \\ b & c \\ c & 0 \end{vmatrix}$$

$$a = \frac{1}{\alpha^2}, \quad b = \frac{1}{\lambda^2}, \quad c = \frac{1}{\mu^2},$$

что даетъ слѣдующія уравненія:

$$\frac{\beta}{\delta} = \infty, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = 1, \quad \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = \frac{1}{\alpha^2}, \quad \frac{\alpha + \beta\alpha^2}{\gamma + \delta\alpha^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \frac{\alpha + \beta\lambda^2}{\gamma + \delta\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2}, \quad \frac{\alpha + \beta\mu^2}{\gamma + \delta\mu^2} = 0,$$

откуда получаемъ для  $\alpha^2$ ,  $\lambda^2$ ,  $\mu^2$  вполне опредѣленные значенія

$$\alpha^2 = \frac{3}{2}, \quad \lambda^2 = 2, \quad \mu^2 = 3.$$

$$\eta = \frac{3\xi - 1}{3\xi}$$

$\alpha^2$ ,  $\lambda^2$ ,  $\mu^2$  связаны соотношеніемъ:

$$\alpha^2\lambda^2 = \mu^2. \tag{15}$$

Согласно Якоби <sup>1)</sup> въ этомъ случаѣ *интегралъ*

$$J = \int \frac{a\xi + \beta}{V\Theta(\xi)} d\xi$$

*приводится къ суммѣ двухъ эллиптическихъ интеграловъ.*

<sup>1)</sup> *Jacobi. Journal de Crelle, t. 8. Упомянутая выше статья Гурса стр. 133.*

Въ самомъ дѣлѣ

гдѣ

$$J = pJ' + qJ'', \quad (16)$$

$$p = \frac{\beta\mu + \alpha}{2\mu}, \quad q = \frac{\beta\mu - \alpha}{2\mu}$$

$$J' = \int \frac{(1 + \mu\xi)d\xi}{\sqrt{\xi(1 - \xi)(1 - \kappa^2\xi)(1 - \lambda^2\xi)(1 - \mu^2\xi)}}$$

$$J'' = \int \frac{(1 - \mu\xi)d\xi}{\sqrt{\xi(1 - \xi)(1 - \kappa^2\xi)(1 - \lambda^2\xi)(1 - \mu^2\xi)}}.$$

Выраженіе для  $J'$  преобразовываемъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} J' &= \int \frac{(1 - \mu\xi)(1 + \mu\xi)d\xi}{\sqrt{(1 - 2\mu\xi + \mu^2\xi^2)[1 - (\mu^2 + 1)\xi + \mu^2\xi^2][1 - (\kappa^2 + \lambda^2)\xi + \mu^2\xi^2]\xi}} = \\ &= \int \frac{\frac{1 - \mu^2\xi^2}{\xi^2}}{\sqrt{\left(\mu^2\xi + \frac{1}{\xi} - 2\mu\right)\left[\mu^2\xi + \frac{1}{\xi} - (\mu^2 + 1)\right]\left[\mu^2\xi + \frac{1}{\xi} - (\kappa^2 + \lambda^2)\right]}} d\xi. \end{aligned}$$

Подстановкой

$$\zeta = \frac{1 + \mu^2\xi^2}{2\mu\xi}$$

интеграль  $J'$  приводится къ эллиптическому интегралу

$$J' = -\frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta - 1)(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)}},$$

гдѣ

$$\alpha = \frac{\mu^2 + 1}{2\mu}$$

$$\beta = \frac{\kappa^2 + \lambda^2}{2\mu}.$$

Такимъ же образомъ интеграль  $J''$  приводится къ эллиптическому интегралу:

$$\int \frac{\alpha\xi + \beta}{\sqrt{\Theta(\xi)}} d\xi = p' \int \frac{d\zeta}{\sqrt{H_1(\zeta)}} + q' \int \frac{d\zeta}{\sqrt{H_2(\zeta)}},$$

гдѣ

$$p' = -\frac{p}{\sqrt{2\mu}}, \quad q' = -\frac{q}{\sqrt{2\mu}}$$

постоянныя



$$H_1(\zeta) = (\zeta - 1)(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)$$

$$H_2(\zeta) = (\zeta + 1)(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)$$

$$\zeta = \frac{1 + \mu^2 \xi^2}{2\mu\xi}.$$

Переходя отъ

$$\int \frac{\alpha\xi + \beta}{V\Theta(\xi)} d\xi$$

получаемъ слѣдующій результатъ:

*Интегралы*

$$\int \frac{Ax + B}{V R(x)} dx$$

отвѣчающіе таблицѣ (6) приводяція къ суммѣ двухъ эллиптическихъ интеграловъ

$$p \int \frac{d\zeta}{V(\zeta - 1)(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)} + q \int \frac{d\zeta}{V(\zeta + 1)(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)} \quad (17)$$

подстановкой:

$$\zeta = \frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + fx + g} \quad (18)$$

Таблица (5.1) преобразовывается въ таблицу

0	1
1	a
a	b
b	c
c	0
∞	∞

$$\frac{\beta}{\delta} = 1, \quad \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\alpha + \beta x^2}{\gamma + \delta x^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \frac{\alpha + \beta \lambda^2}{\gamma + \delta \lambda^2} = \frac{1}{\mu^2}, \quad \frac{\alpha + \beta \mu^2}{\gamma + \delta \mu^2} = 0, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \infty,$$

откуда опять получаемъ для  $x^2$ ,  $\lambda^2$ ,  $\mu^2$  вполне опредѣленные значенія:

$$\mu^2 = \omega, \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2}{\omega - 1}, \quad x^2 = \frac{1}{1 - \omega}, \quad \eta = -\omega\xi + 1,$$

гдѣ  $\omega$  корень уравненія:

$$\frac{\omega^5 + 1}{\omega - 1} = \omega^4 - \omega^3 + \omega^2 - \omega + 1 = 0.$$

При помощи тѣхъ же подстановокъ (13) таблицу (5.1) можно привести къ виду:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \omega \\ \hline \omega & a \\ \hline a & b \\ \hline b & c \\ \hline c & 0 \\ \hline \infty & \infty \\ \hline \end{array}$$

гдѣ  $\omega$  не нуль, а какое угодно напередъ назначенное число, отличное отъ 1 и  $\infty$ .

Положимъ, что  $\omega$  первообразный корень двучленного уравненія:

$$\omega^5 = 1.$$

Такъ какъ тогда  $\frac{\alpha}{\gamma} = \omega$ ,  $\gamma = 0$ , то можемъ имѣть рядъ уравненій:

$$p + q = \omega, \quad p\omega + q = a, \quad p\omega^2 + q = b, \quad p\omega^3 + q = c, \quad p\omega^4 + q = 1, \quad (19)$$

откуда умножая 5-е на 1, 4— $p$ , 3— $p^2$ , 2— $p^3$  и 1— $p^4$ , складывая и сокращая, получимъ:

$$q(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1) = 1 - p^5$$

или

$$(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1)(p + q - 1) = 0,$$

а такъ какъ

$$p + q = \omega \neq 1,$$

то

$$p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 = 0$$

и

$$p = \omega^i,$$

гдѣ  $i$  равно одному изъ чиселъ 1, 2, 3, 4. Мы покажемъ, что  $i = 1$ . Подставляя вмѣсто  $p = \omega^i$ , а вмѣсто  $q = \omega - \omega^i$  въ уравненіе (19), получаемъ по исключеніи  $a$ ,  $b$ ,  $c$  уравненіе

$$\omega^{4i+1} + \omega^{4i} - \omega^{3i+1} + \omega^{3i} - \omega^{2i+1} + \omega^{2i} - \omega^{i+1} + \omega^i - \omega = 1$$

или, имѣя въ виду, что

$$\omega^{4i} + \omega^{3i} + \omega^{2i} + \omega^i + 1 = 0$$

$$\omega^{4i+1} = 1,$$

откуда

$$4i + 1 \equiv 0 \pmod{5},$$

а потому

$$i = 1.$$

Слѣдовательно  $p = \omega$ ,  $q = \omega$  и уравненія (19) даютъ  $a = \omega^2$ ,  
 $b = \omega^3$ ,  $c = \omega^4$ .

*Интегралы*

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx,$$

отвѣчающіе таблицѣ (5.1), приводятся при помощи подстановки:

$$\zeta = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

къ интегралу:

$$\int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^5 - 1}}. \quad (20)$$

Таблица (4.2) преобразуется въ таблицу:

$\infty$	$a$
$a$	$b$
$b$	$c$
$c$	$\infty$
$0$	$1$
$1$	$0$

$$\frac{\beta}{\delta} = 1, \quad \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = 0, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\alpha + \beta x^2}{\gamma + \delta x^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \frac{\alpha + \beta \lambda^2}{\gamma + \delta \lambda^2} = \frac{1}{\mu^2}, \quad \frac{\alpha + \beta \mu^2}{\gamma + \delta \mu^2} = \infty,$$

откуда  $x^2 = \mu^2$ , чего быть не можетъ, если

$$\int \frac{\alpha \zeta + \beta}{\sqrt{\Theta(\zeta)}} d\zeta$$

перваго рода.

Таблица (4.2) не даетъ вовсе приведенія (3).

Таблица (3.3) или

$1$	$a$
$a$	$0$
$0$	$1$
$\infty$	$b$
$b$	$c$
$c$	$\infty$

даетъ уравненія:

$$\frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\alpha + \beta x^2}{\gamma + \delta x^2} = 0, \quad \frac{\beta}{\delta} = 1, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \frac{\alpha + \beta \lambda^2}{\gamma + \delta \lambda^2} = \frac{1}{\mu^2}, \quad \frac{\alpha + \beta \mu^2}{\gamma + \delta \mu^2} = \infty,$$

откуда для  $\kappa^2$ ,  $\lambda^2$ ,  $\mu^2$  получаемъ два условныя уравненія:

$$\kappa^2 = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^4 + 1}, \quad \mu^2 = \frac{\lambda^2(\lambda^2 + 1)}{\lambda^4 + 1}, \quad \eta = \frac{\mu^2 \xi - \lambda^2}{\lambda^2 \mu^2 (1 - \mu^2 \xi)},$$

гдѣ  $\lambda$  остается произвольнымъ.

Здѣсь опять  $\kappa^2 \lambda^2 = \mu^2$  и интеграль

$$\int \frac{\alpha \xi + \beta}{V \Theta(\xi)} d\xi$$

приводится къ суммѣ эллиптическихъ интеграловъ (17).

Тоже имѣетъ мѣсто для таблицъ (4.1.1) и (2.2.2), изъ которыхъ первая или

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & b \\ b & c \\ c & 1 \\ 0 & 0 \\ \infty & \infty \end{vmatrix}$$

даетъ уравненія:

$$\frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = \frac{1}{\kappa^2}, \quad \frac{\alpha + \beta \kappa^2}{\gamma + \delta \kappa^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \frac{\alpha + \beta \lambda^2}{\gamma + \delta \lambda^2} = \frac{1}{\mu^2}, \quad \frac{\alpha + \beta \mu^2}{\gamma + \delta \mu^2} = 1, \quad \frac{\beta}{\delta} = 0, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \infty,$$

опредѣляющія для  $\kappa^2$ ,  $\lambda^2$ ,  $\mu^2$  два условныя уравненія:

$$\lambda^2 = \frac{1}{\kappa^4}, \quad \mu^2 = \frac{1}{\kappa^2}, \quad \eta = \frac{\xi}{\kappa^2}, \quad \kappa^2 \lambda^2 = \mu^2$$

$\kappa$  произвольно, а вторая или

$$\begin{vmatrix} \infty & 0 \\ 0 & \infty \\ 1 & a \\ a & 1 \\ b & c \\ c & b \end{vmatrix}$$

даетъ уравненія:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = 0, \quad \frac{\beta}{\delta} = \infty, \quad \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = \frac{1}{\kappa^2}, \quad \frac{\alpha + \beta \kappa^2}{\gamma + \delta \kappa^2} = 1, \quad \frac{\alpha + \beta \lambda^2}{\gamma + \delta \lambda^2} = \frac{1}{\mu^2}, \quad \frac{\alpha + \beta \mu^2}{\gamma + \delta \mu^2} = \frac{1}{\lambda^2},$$

дающія для  $\kappa^2$ ,  $\lambda^2$ ,  $\mu^2$  одно условное уравненіе:

$$\kappa^2 = \lambda^2 \mu^2$$

$$\eta = \frac{1}{\kappa^2 \xi},$$

гдѣ  $\lambda$ ,  $\mu$  остаются произвольными.

Таблицы (3.2.1) и (2.2.1.1) не дают вовсе приведения типа (3), ибо первая или

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \\ c & a \\ 0 & \infty \\ \infty & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

даёт:

$$\frac{\alpha + \beta x^2}{\gamma + \delta x^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \frac{\alpha + \beta \lambda^2}{\gamma + \delta \lambda^2} = \frac{1}{\mu^2}, \quad \frac{\alpha + \beta \mu^2}{\gamma + \delta \mu^2} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\beta}{\delta} = \infty, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = 1, \quad \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = 0,$$

откуда  $x^2 = \lambda^2 = \mu^2 = 1$ ; вторая или

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \\ b & c \\ c & b \\ 0 & 0 \\ \infty & \infty \end{vmatrix}$$

даёт:

$$\frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\alpha + \beta x^2}{\gamma + \delta x^2} = 1, \quad \frac{\alpha + \beta \lambda^2}{\gamma + \delta \lambda^2} = \frac{1}{\mu^2}, \quad \frac{\alpha + \beta \mu^2}{\gamma + \delta \mu^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \frac{\beta}{\delta} = 0, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \infty,$$

откуда  $x^2 = 1, \lambda^2 = \mu^2$ .

Результаты, нами полученные, можно слѣдующимъ образомъ формулировать:

*Приведение:*

$$\int \frac{Cy + D}{\sqrt{R(y)}} dy = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx \quad (3)$$

возможно только тогда, когда

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx$$

принадлежитъ къ одному изъ слѣдующихъ типовъ:

1) Къ интеграламъ, приводящимся къ эллиптическимъ

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}},$$

2) приводящимся къ суммѣ двухъ эллиптическихъ интеграловъ:

$$p \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta - 1)(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)}} + q \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta + 1)(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)}}$$

подстановкой:

$$\zeta = \frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + fx + g},$$

3) приводящимся къ интегралу

$$\int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta^2 - 1)}}$$

при помощи подстановки

$$\zeta = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Совершенно такимъ же образомъ изслѣдуемъ частный случай приведенія (3)

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}. \quad (20)$$

Такъ какъ здѣсь  $\gamma = 0$ , то подстановка (5) замѣняется еще болѣе простой

$$y = \alpha x + \beta \quad (22)$$

гдѣ, какъ легко видѣть  $\alpha^2 = 1$ . Легко видѣть, что въ этомъ случаѣ интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

долженъ обязательно принадлежать къ первому изъ вышеупомянутыхъ типовъ.

Полагая

$$y = \frac{a\eta + b}{c\eta + d}, \quad x = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}$$

мы обобщаемъ этотъ результатъ на случай приведенія:

$$\int \frac{Ay + B}{\sqrt{R(y)}} dy = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx \quad (23)$$

и мы можемъ этотъ результатъ формулировать еще слѣдующимъ образомъ.

*Дифференциальное уравнение первого порядка*

$$\frac{Ay + B}{\sqrt{R(y)}} dy = \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx,$$

где  $R(x) = a_0x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6$  имеет алгебраическое решение иное, чем  $y = x$ , в том и только в том случае, когда интеграл

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx$$

приводится к эллиптическому интегралу.

Варшава.

17 марта 1905 г.

---