Серия 1968

Математика кибернетика

1

В. И. Левин

Рамануджан

В. И. Левин

РАМАНУДЖАН — математический гений ИНДИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ»
Москва 1968

51(09)
Л 36

$$\frac{2-2-1}{74-68}$$

В конце 1967 г. исполнилось 80 лет со дня рождения одного из замечательнейших математиков современности — Сринивасы Рамануджана Айенгара. История науки знает немного учёных, которые по силе и оригинальности своего таланта и по трагичности своей судьбы могут сравниться с Рамануджаном.

Рамануджан мало известен среди математиков Советского Союза, далеко недостаточно известен он и за рубежом. Это объясняется тем, что он не создал новых математических, теорий, входящих ныне в золотой фонд науки, как это сделали другие гении более отдалённого прошлого — Эварист Галуа и Нильс Хенрик Абель[1]; он был далёк и от того, чтобы предвосхитить развитие новых математических идей, начавшееся уже при его жизни и изменившее лицо математики в наши дни. Он для себя воссоздал большие области математики прошлого, заново открыл целые математические миры, над созданием которых трудились поколения европейских математиков, и нашёл в этих классических областях такие глубины, о существовании которых и не подозревали его предшественники и которые повергли в изумление лучших современных ему математиков. Трагедия Рамануджана заключается не только в обстоятельствах его жизни и его ранней смерти, а главным образом в том, что такой редкий и мощный гений не мог воспользоваться всем богатством математических знаний, накопленных человечеством, и должен был сам прокладывать себе путь к глубоким математическим истинам. Эти истины лежали, к сожалению, в стороне от основных направлений развития математики в наше время и не оказали поэтому существенно-

[1] Галуа и Абель — математики начала XIX века, прожившие очень короткие, но насыщенные творчеством жизни. Галуа погиб в 1832 г. на дуэли на двадцать первом году жизни, Абель скончался на двадцать седьмом году жизни от туберкулёза (болезни, погубившей менее столетия спустя и Рамануджана).

го влияния на прогресс науки. Только последние несколько лет своей жизни Рамануджан мог творить в содружестве с крупными европейскими математиками — профессорами Кембриджского университета (Англия) Годфри Гарольдом Харди (1877—1947) и Джоном Идензором Литлвудом (род. в 1885 г.). Они ввели его в курс некоторых современные проблем теории чисел и получили совместно с ним ряд первоклассных результатов, не превзойдённых и по сей день. Харди и Литлвуд неоднократно отмечали, что без «гениального провидения» Рамануджана они не смогли бы даже и предполагать существования некоторых формул, которые оказались решающими в доказательстве этих результатов.

Рамануджана можно назвать математическим Паганини с той лишь оговоркой, что Паганини с детства заставляли до изнеможения упражняться в игре на скрипке, тогда как никто никогда не требовал от Рамануджана, чтобы он занимался математикой. Более того, Рамануджан до 27 лет вообще не общался ни с кем, кто мог бы руководить его первыми научными исследованиями и оценить их значение.

Гений Рамануджана принадлежит истории. Нам остаётся изучать его творения, восхищаться его неповторимой математической фантазией и фантастической интуицией. При этом ни один математик не может избежать чувства досады и боли, мысленно представляя себе, чту мог бы дать такой ум математической науке, если бы он был поставлен в оптимальные условия.

ЖИЗНЬ РАМАНУДЖАНА

Рамануджан родился 22 декабря 1887 г. в селении Эрод, на юге Индии. Его родители принадлежали к привилегированной касте браминов, но жили бедно и ничем не отличались от окружавших их мелких служащих, торговцев и крестьян. Отец Рамануджана был бухгалтером в маленькой текстильной лавке в городе Кумбаконаме Танджорского района Мадрасской провинции. Имеются сведения о том, что мать Рамануджана была незаурядной волевой женщиной; однако она находилась в плену узких кастовых и религиозных предрассудков и её влияние на столь одарённого сына с точки зрения его научного развития нельзя признать благотворным. Рамануджан почитал свою мать и находился в полном её подчинении. Она же, естественно, не была в состоянии понять внутренний мир своего сына и его непреодолимую тягу к математике; действуя, как это часто бывает, из лучших побуждений, она тормозила его развитие и сильной рукой направляла его по единственно известному ей, традиционному в среде их семьи, жизненному пути мелкого служащего или чиновника. Только влечение гения, как необходимость среди массы случайностей, помогло ему в конце концов стать творческим математиком, свободно отдающимся занятиям любимой наукой. Но это произошло не скоро и — увы — слишком поздно.

Рамануджан воспитывался в атмосфере понятной в условиях колониальной Индии враждебности ко всему европейскому и в особенности к английскому, причём в окружавшей его среде протест против колониального гнета выражался в строгом соблюдении национальных обычаев, старого уклада жизни и традиционной браминской системы воспитания и образования. Естественно, что в отношении математического развития это ставило юного Рамануджана, как уже отмечалось, в очень тяжёлые условия, наложившие сильный отпечаток на всю его научную карьеру. Следует также помнить, что британская администрация со своей стороны не прилагала особых усилий к выявлению народных талантов ни в какой области науки и искусства. Таким образом, самобытный гений Рамануджана в течение большей части его короткой жизни оставался предоставленным самому себе.

Когда ему шёл пятый год, Рамануджан, как и все мальчики-брамины, был отдан в двухлетнюю школу, по окончании которой он поступил в начальную школу при городской средней школе Кумбаконама, где протекала вся его дальнейшая школьная жизнь. В 1897 г. он окончил начальную школу и занял первое место по результатам стипендиальных экзаменов в районном центре Танджоре, что дало ему право дальнейшего обучения в средней школе за половинную плату. Примерно к этому же времени относятся первые воспоминания о нём его сверстников и старших товарищей. В этих воспоминаниях он описывается как тихий задумчивый мальчик, редко участвующий в играх и шалостях своих одноклассников.

Воспитанный в мистических традициях брахманизма, Рамануджан уже во втором классе средней школы (что соответствует примерно пятому классу нашей школы) задавал старшим товарищам и учителям вопрос о «высшей истине» в математике, так как привык считать, что в каждой области человеческой деятельности существует некая мистическая «высшая истина», первоначало вещей, управляющая данной областью и содержащая в себе всё, что может быть в ней известно. Говорят, что в ответ он получал указания на теорему Пифагора, или на проценты и учёт векселей.

Уже в четвёртом классе средней школы Рамануджан самостоятельно изучил полный курс тригонометрии по двухтомному руководству Лони (Loney), которое он одолжил у знакомого студента Мадрасского университета. Этот студент, как рассказывают, был поражён знаниями школьника по тригонометрии и часто обращался к Рамануджану за помощью в решении задач. В пятом классе Рамануджан самостоятельно открыл формулы Эйлера, выражающие синус и косинус через показательную функцию мнимого аргумента, но, узнав, что они уже известны, спрятал свои записи на чердаке дома. Это было его первое столкновение с западной математикой, из которого он понял, что учебник Лони содержит далеко не все известные математические факты. Однако бедность кумбаконамской библиотеки и плохие знания английского языка сильно затрудняли математическое развитие молодого Рамануджана.

Только в 1903 г., когда Рамануджан был в шестом классе средней школы, ему удалось при помощи одного знакомого получить единственную книгу по высшей математике, имевшуюся в Кумбаконаме. Это была книга Карра «Сборник элементарных результатов чистой и прикладной математики»[1], изданная в двух томах в Лондоне в 1880—1886 гг. Книга Карра содержит 6165 теорем и формул, большинство которых приводится без доказательств и выводов; конспективные доказательства намечены только для небольшого числа важнейших теорем. Двухтомник Карра, как и сотня других книг, был бы вскоре предан забвению, если бы не тот факт, что его читал Рамануджан. Это обстоятельство позднее повлекло за собой тщательнейшее рассмотрение этого учебника виднейшими математиками, пытавшимися установить, какие идеи Рамануджан мог почерпнуть из него и на какие мысли чтение Карра могло натолкнуть его. Заинтересовала математиков и биография Карра. Джордж Шубридж Карр окончил Кембриджский университет и подвизался в Лондоне в качестве частного преподавателя математики. Он издал свой сборник в помощь своим ученикам-студентам. По отзыву Харди, книга Карра, которую нельзя назвать выдающейся, всё же имела несомненные достоинства, прежде всего систематичность подбора теорем и корректность их формулировок. Наряду с главами, посвящёнными элементарной алгебре, тригонометрии и аналитической геометрии, она содержала также главы по дифференциальному и интегральному исчислению, причём формальная сторона интегрального исчисления — в соответствии, по-видимому, с личными вкусами автора — была непропорционально подробно изложена и доведена до весьма сложных формул. Харди писал: «...Рамануджан сделал эту книгу знаменитой, и нет никакого сомнения в том, что она глубоко повлияла на него и явилась отправным пунктом его карьеры. Такая книга должна была иметь некоторые достоинства; и действительно, книга Карра... является не просто третьесортным учебником, а представляет собой книгу, написанную со знанием дела и с любовью к предмету...». Несколь-

---

[1] George Shoobridge Carr. A synopsis of elementary results in pure and applied mathematics. London, vol. I, 1880; vol. II, 1886.

кими строками ниже Харди дал следующую заключительную оценку книги Карра: «В целом, если рассматривать её как пособие для мальчика с таким дарованием, книга Карра совсем не плоха, и восприятие Рамануджаном материала было изумительным».

В составленном Харди в 1921 г. некрологе цитируется следующая выдержка из письма одного школьного товарища Рамануджана: «Он (Рамануджан) брал книгу Карра из библиотеки колледжа и с удовольствием выводил содержащиеся в ней формулы... Уже тогда он рассказывал товарищам о своих математических открытиях... Он обладал исключительной памятью и с лёгкостью цитировал полный список санскритских корней (atmanepada и parasmepada); он знал громадное число знаков в разложениях $\sqrt{2}$, π, e и других чисел в десятичные дроби...».

В краткой (и единственной по сей день) биографии Рамануджана, принадлежащей преподавателю (а впоследствии директору) Кумбаконамского колледжа Сешу Айару и высокому правительственному чиновнику Мадрасской провинции Рамачандра Рао, этот важный период жизни Рамануджана описывается так: «Перед Рамануджаном открылся новый мир, по которому он бродил в восхищении. Книга Карра по-настоящему пробудила дремавшие в нём силы. Он с жадностью принялся за вывод приведённых в ней формул и доказательства теорем. Так как он при этом не мог пользоваться никакими другими книгами, то каждое найденное им доказательство являлось для него самостоятельным исследованием. Сначала он обратился к методам построения магических квадратов. Затем его внимание привлекла к себе геометрия; пытаясь решить задачу о квадратуре круга, он нашёл исключительно хорошую приближённую формулу для длины окружности, по которой длина земного экватора может быть вычислена с точностью до нескольких футов (1–2 метров). Вскоре он разочаровался в геометрии и, занявшись алгеброй, открыл несколько новых рядов. Рамануджан любил говорить, что формулы ему внушает во сне богиня Намаккаль. Интересно отметить, что он действительно часто, вставая по утрам с кровати, тут же записывал готовые формулы, после чего быстро проверял их; впрочем, строгие доказательства не всегда ему удавались. Все эти результаты он заносил в записную книжку, которую имел обыкновение показывать математикам, интересовавшимся его работой».

По поводу этого свидетельства индийских биографов Рамануджана Харди писал: «Я умышленно процитировал эти последние фразы, но не потому, что придаю им большое значение — я так же мало заинтересован в богине Намаккаль, как и Вы, — а потому, что мы теперь подходим к тяжёлой и трагической части карьеры Рамануджана, и должны, насколько это нам возможно, попытаться понять его психологию и уяснить себе окружавшую его атмосферу».

Сешу Айар и Рамачандра Рао знали молодого Рамануджана лично и располагали многими местными сведениями от людей, общавшихся с Рамануджаном. Поэтому их рассказ о нём содержит много ценного фактического материала, но он окрашен их собственными этико-философскими воззрениями и симпатиями к религиозным учениям индуизма. С другой стороны, с 1914 по 1919 г. Харди почти ежедневно встречался с Рамануджаном и беседовал с ним на всевозможные темы. В первой главе своих лекций о Рамануджане Харди кратко касается основных этапов жизни Рамануджана и даёт свою оценку ему как человеку. При этом Харди иногда резко расходится с Сешу Айаром и Рамачандра Рао, в частности по вопросу о религиозности Рамануджана. Харди не утверждает, что Рамануджан был убеждённым атеистом, но цитирует высказывания самого Рамануджана, свидетельствующие о его равнодушии к вопросам религии; однако Рамануджан соблюдал многочисленные условности индуистского ритуала, чтобы не огорчать своих религиозных родных и друзей. В частности, он был всю жизнь вегетарианцем и даже в последние два года своей жизни, когда вегетарианская диета тяжело сказывалась на его здоровье, не отказался от неё.

Как и все аспекты личности Рамануджана, его религиозность и вообще отношение к религии были после его смерти предметом довольно горячих споров. Чтобы уже не возвращаться к этому вопросу, приведём ещё одно интересное замечание Харди, который с большой страстностью отстаивал своё мнение о Рамануджане как о человеке высокоинтеллектуальном (а Харди считал, что по-настоящему разумный, интеллектуальный человек не может быть глубоко религиозным, как бы он внешне ни проявлял своё отношение к религии). Индийские друзья Рамануджана считали его истинно религиозным, а Харди слышал от него замечания совсем противоположного свойства. Какому мнению отдать предпочтение? Харди доказывал свою правоту при помощи следующей параболы. Представьте себе, говорил он, что архиепископ Кентерберийский (один из высших духовных сановников англиканской церкви), с одной стороны, заявляет на собрании священнослужителей, что он, конечно, верит в бога, а с другой стороны, в частной беседе с приятелем за стаканом портвейна между прочим делает замечание, что по сути дела он атеист. Когда архиепископ был искренен? Несомненно, во втором случае по совершенно очевидным причинам. Харди в подкрепление ещё ссылается на один принцип расшифровки древних рукописей, принятый в исторической науке, согласно которому из всех возможных разночтений трудного места текста наиболее правдоподобным является наименее тривиальное: Difficilior lectio potior (т.е. более сложное чтение предпочтительнее). Однако вернёмся к юному Рамануджану.

Шестой класс был последним классом средней школы. В 16 лет Рамануджан по окончании школы выдержал приёмные испытания в Мадрасский университет и в январе 1904 г. приступил к занятиям на первом курсе Кумбаконамского колледжа, входившего в состав Мадрасского университета. За свои первые успехи он получил специальную стипендию, предназначавшуюся для особо успевающих по английскому языку и математике. Однако вскоре его учебные дела в колледже пошли всё хуже и хуже, так как он отдавал всё время собственным математическим исследованиям, результаты которых он регулярно заносил в свои, ставшие впоследствии знаменитыми, записные книжки (они были полностью изданы в Индии в фоторепродукции только в 1957 г.). Он перестал выполнять задания, пропускал много занятий и в конце концов был оставлен на первом курсе. В жизни Рамануджана началась полоса неудач, длившаяся почти 10 лет. В течение 1905 г. он бродил по центральной Индии, затем вернулся в Кумбаконам, пытался продолжить учёбу в колледже, но не был допущен к занятиям, уехал в Мадрас, поступил там в 1906 г. в университет, но заболел и вновь вернулся домой в Кумбаконам. В 1907 г. он сделал попытку сдать экзамены за первые два курса университета экстерном, но провалился. После этого до 1909 г. он не имел определённых занятий, если не считать того, что всё это время Рамануджан неустанно занимался математикой, исписывая всё новые и новые страницы своих записных книжек. В 1909 г. Рамануджан женился и начал поиски работы. В 1910 г. он обратился по поводу своего устройства к индийскому математику Рамасвами Айару, основателю Индийского математического общества. Рамасвами Айар, просмотрев записные книжки Рамануджана, убедился в том, что имеет дело с человеком необычных способностей, хотя всей силы таланта Рамануджана он никак не подозревал. Он направил Рамануджана к Сешу Айару, который тогда был преподавателем Кумбаконамского колледжа и знал Рамануджана ещё как студента. Сешу Айар устроил Рамануджана на временную работу, но через несколько месяцев Рамануджан вновь остался без работы. Наконец, в декабре 1910 г. Рамануджану немного улыбнулось счастье: он был представлен влиятельному сановнику Рамачандра Рао, который сыграл важную роль в жизни Рамануджана. Однако улучшение положения Рамануджана заставило себя ждать ещё три года, когда Рамануджану был, наконец, подсказан самый важный шаг в его жизни: письмо к Харди в Кембридж.

Рамачандра Рао был математиком только в том смысле, что имел университетское математическое образование; его административная деятельность не давала ему возможности творчески заниматься математикой. Но он был первым, кто распознал математический гений Рамануджана и, не задумываясь, употребил всё свое влияние для облегчения жизни и обеспечения научной карьеры Рамануджана. Небезынтересно привести его собственное описание первой встречи с Рамануджаном: «Несколько лет тому назад мой племянник, совершенно не знакомый с математикой, обратился ко мне со словами: «Дядя, у меня был посетитель, говоривший что-то о математике; я его не понял; может быть, Вы выслушаете его и установите, есть ли какой-нибудь смысл в том, что он говорит?» И вот, в самодовольном сознании своей математической мудрости, я разрешил Рамануджану предстать передо мной.. В комнату вошёл юноша, довольно полный, низкого роста, небритый и в несколько растерзанном виде, держа в руке потрёпанную записную книжку; во всём его облике замечательными были только глаза — казалось, что они светились. Он был невыразимо беден. Он убежал из Кумбаконама в Мадрас, чтобы найти досуг для занятий математикой. Он ничего другого не хотел, не искал ни признания, ни почестей. Он искал досуга, т.е. просил, чтобы его обеспечили простейшей пищей без затраты сил с его стороны, чтобы он мог продолжать свои мечтания. Он открыл свою записную книжку и начал объяснять некоторые свои открытия. Я сразу же увидел, что имею дело с чем-то необычным; я недостаточно много знал, чтобы понять его. Я попросил его прийти ещё раз, и он пришёл. Во второй раз он понял, что я мало знаю, и показал мне несколько более простых результатов. Но и эти результаты далеко выходили за пределы известных мне книг, и я уже не сомневался в том, что он — замечательный математик. Потом, шаг за шагом, он рассказал мне про эллиптические интегралы и гипергеометрические ряды и, наконец, посвятил меня в свою теорию расходящихся рядов, которая ещё не была объявлена миру[1]. Я был покорён и спросил его, что же он хочет от меня. Он ответил, что он просит немного денег, чтобы существовать и заниматься своими исследованиями».

Рамачандра Рао сначала помогал Рамануджану из личных средств, а затем, видя, что Рамануджан тяготится таким положением, устроил его на работу в управление почт Мадраса с окладом 30 рупий в месяц. В почтовом ведомстве он работал с февраля 1912 г. по май 1913 г., когда его судьба, наконец, окончательно определилась благодаря вмешательству Харди.

В 1911 г. в «Журнале Индийского математического общества» появились в печати первые задачи Рамануджана, сообщённые Сешу Айаром. Первая собственная статья Рамануджана появилась несколько позже в том же году. К 1912 г. установилась репутация Рамануджана как математика, во всяком случае на его родине. О нём знали уже некоторые работавшие в Индии англичане, в частности профессор Мадрасского высшего технического училища Гриффитс и директор Мадрасского почтового ведомства сэр Фрэнсис Спринг. Однако при рассмотрении этого периода жизни Рамануджана всё же создаётся впечатление, что окружавшие его люди при всём хорошем отношении к нему по-прежнему не имели представления о правильной подготовке Рамануджана к научной работе в области математики и считали, что для него сделано всё, на что он имел право рассчитывать.

К началу 1913 г. близкие к Рамануджану индийские математики настойчиво рекомендовали ему вынести свои результаты из записных книжек на более компетентный и строгий суд: послать их в центр математической мысли Британской империи — Кембриджский университет.

До начала XX века Кембриджский университет не принадлежал к числу крупнейших мировых математических центров. Но в начале XX века молодые математики Харди и Литлвуд подняли уровень математических исследований и математического образования в Кембридже. Благодаря своей энергии и исключительной научной продуктивнос-

[1] Теория расходящихся рядов была уже, конечно, разработана в Европе, хотя и далеко не в такой степени, как в настоящее время.

ти, Харди уже в молодые годы стал известным учёным, возглавившим крупную математическую школу. Харди был всего на 9 лет старше Рамануджана, но он имел возможность приобщиться ко всей тысячелетней мировой математической культуре, тогда как Рамануджан имел в своём распоряжении только пару старых элементарных учебников и могучий математический гений.

Своё первое письмо к Харди Рамануджан написал 16 января 1913 г. Вот это замечательное письмо (мы сохраняем в переводе математический стиль Рамануджана, применявшего выражения, предосудительные с современной точки зрения):

«Мадрас, 16 января 1913 г.

ДОРОГОЙ СЭР,

разрешите мне сказать о себе, что я — чиновник бухгалтерии Мадрасского управления почт с окладом всего лишь в 20 фунтов стерлингов в год. Мне сейчас около 23 лет. Я не имею университетского образования, но я закончил школу. После окончания школы я всё своё свободное время занимался математикой. Я не следовал регулярной системе обучения, по которой занимаются в университетах, а избрал свою дорогу. Особенно усердно я занимался расходящимися рядами, и результаты, которые я получил, местные математики называют поразительными. Так же как в элементарной математике мы придаём степени a^n при отрицательном и дробном показателе n такое значение, чтобы оставались в силе все законы, справедливые при целом положительном n, мои исследования были устремлены к тому, чтобы придать смысл эйлерову интегралу второго рода для всех значений n. Мои друзья, окончившие университет, говорят мне, что $\int\limits_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(n)$ справедливо только для положительных n. Они утверждают, что это интегральное соотношение неверно, когда n отрицательно. Предполагая, что оно верно для положительных n, а также, что определяющее равенство $n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$ справедливо всегда, я придаю смысл этим интегралам и утверждаю, что при этих условиях интеграл верен и для всех отрицательных и дробных значений n. На этом основаны все мои исследования, и я развил эти рассуждения до такой степени, что местные математики не в состоянии следовать за мной в моих более высоких полётах. Не так давно мне встретилась Ваша книга «Порядки бесконечности»[1], в которой я на стр. 36 нашёл утверждение, что

[1]G. H. Hardy. Orders of infinity: «Infinitärcalcül» of Paul du Bois-Reymond, Cambridge. Книга переведена на русский язык (М., ИЛ, 1949).

до сих пор ещё не найдено определённого выражения для числа простых чисел, меньших данного числа. Я нашёл выражение, которое даёт очень хорошее приближение к истинному результату, так как ошибка ничтожно мала. Я прошу Вас просмотреть прилагаемые материалы. Я беден и не могу сам их опубликовать, но если Вы найдёте среди них что-либо ценное, то прошу Вас это опубликовать. Я не сообщаю Вам ни моих выкладок, ни полученных окончательных выражений, а только намечаю пути, по которым я шёл. Так как я очень неопытен, я буду высоко ценить любой совет, который Вы мне соблаговолите дать. С просьбой извинить меня за доставленные хлопоты, я остаюсь, дорогой сэр,

искренне Ваш С. Рамануджан.

Мой адрес: Бухгалтерия почтового управления, Мадрас, Индия».

Самый текст письма, как видно, весьма наивен как в стилистическом, так и в математическом отношении, но «прилагаемые материалы» поразили Харди. По поводу этого первого и дальнейших писем Рамануджана Харди заметил: «...письма очевидным образом написаны не самим Рамануджаном, а по его просьбе каким-нибудь местным грамотеем, но — что самое важное — математические формулы в них несомненно принадлежали Рамануджану, и только ему одному».

От реакции Харди на первое письмо Рамануджана зависела вся дальнейшая судьба последнего. Поэтому приведём свидетельство самого Харди о том впечатлении, которое произвели на него первые письма Рамануджана.

Харди выделяет в качестве наиболее представительных для раннего творчества Рамануджана следующие 15 результатов из примерно 120, содержавшихся в письмах (эти формулы Рамануджана, которые не будут понятны всем читателям, всё же стоит здесь привести в связи с очень существенными для нашего повествования высказываниями Харди по их поводу; разъяснение математического содержания некоторых из них будет дано ниже):

$$1-\frac{3!}{(1!\,2!)^3}x^2+\frac{6!}{(2!\,4!)^3}x^4-\ldots= \\ =\left(1+\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}+\ldots\right)\left(1-\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}-\ldots\right). \qquad (1)$$

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\ldots=\frac{2}{\pi}. \qquad (2)$$

$$1+9\left(\frac{1}{4}\right)^4+17\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^4+25\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^4+\ldots=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}\,. \tag{3}$$

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^5+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^5-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^5+\ldots=\frac{2}{\Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right)}\,. \tag{4}$$

$$\int_0^\infty \frac{1+\left(\dfrac{x}{b+1}\right)^2}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1+\left(\dfrac{x}{b+2}\right)^2}{1+\left(\dfrac{x}{a+1}\right)^2}\ldots dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b+1\right)\Gamma\left(b-a+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(b-a+1\right)}\,. \tag{5}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\ldots}=\frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^6+r^{10}+\ldots)}\,. \tag{6}$$

Если $\alpha\beta=\pi^2$, то

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}}\left(1+4\alpha\int_0^\infty \frac{xe^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x}-1}\,dx\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{\beta}}\left(1+4\beta\int_0^\infty \frac{xe^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x}-1}\,dx\right). \tag{7}$$

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{e^{-a^2}}{2a+}\;\frac{1}{a+}\;\frac{2}{2a+}\;\frac{3}{a+}\;\frac{4}{2a+\ldots}\,. \tag{8}$$

$$4\int_0^\infty \frac{xe^{-x\sqrt{5}}}{\operatorname{ch} x}\,dx=\frac{1}{1+}\;\frac{1^2}{1+}\;\frac{1^2}{1+}\;\frac{2^2}{1+}\;\frac{2^2}{1+}\;\frac{3^2}{1+}\;\frac{3^2}{1+\ldots}\,. \tag{9}$$

Если

$$u=\frac{x}{1+}\;\frac{x^5}{1+}\;\frac{x^{10}}{1+}\;\frac{x^{15}}{1+\ldots}\quad \text{и}\quad v=\frac{x^{1/5}}{1+}\;\frac{x}{1+}\;\frac{x^2}{1+}\;\frac{x^3}{1+\ldots}\,,$$

то

$$v^5=u\frac{1-2u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+2u^3+u^4}\,. \tag{10}$$

$$\frac{1}{1+}\;\frac{e^{-2\pi}}{1+}\;\frac{e^{-4\pi}}{1+\ldots}=\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)e^{2\pi/5}. \tag{11}$$

$$\frac{1}{1+}\;\frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+}\;\frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\ldots}=\left(\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{5^{3/4}\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5/2}-1}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)e^{2\pi/\sqrt{5}}. \tag{12}$$

Если
$$F(k)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^2+\ldots$$
и $F(1-k)=\sqrt{210}F(k)$, то
$$\begin{aligned}k={}&(\sqrt{2}-1)^4(2-\sqrt{3})^2(\sqrt{7}-\sqrt{6})^4(8-3\sqrt{7})^2\times\\&\times(\sqrt{10}-3)^4(\sqrt{15}-\sqrt{14})^2(4-\sqrt{15})^4(6-\sqrt{35})^2.\end{aligned}\tag{13}$$

Коэффициент при x^n в $\dfrac{1}{1-2x+2x^4-2x^9+\ldots}$ равен целому числу, ближайшему к
$$\frac{1}{4n}\left(\operatorname{ch}(\pi\sqrt{n})-\frac{\operatorname{sh}(\pi\sqrt{n})}{\pi\sqrt{n}}\right).\tag{14}$$

Число чисел, заключённых между A и x, которые либо сами являются квадратами, либо представимы в виде суммы двух квадратов, равно
$$K\int_A^x\frac{dt}{\sqrt{\ln t}}+\Theta(x),\tag{15}$$
где $K=0{,}764\ldots$, а $\Theta(x)$ очень мало́ по сравнению с интегралом.

«Попытайтесь представить себе, — пишет Харди, — первую реакцию математика-профессионала, получившего такое письмо от неизвестного индийского клерка. Сначала я спросил себя, нет ли среди этих формул знакомых мне результатов. Я сам доказывал нечто аналогичное формуле (7), и формула (8) имела более или менее знакомый вид. Фактически формула (8) оказалась классической; она встречается у Лапласа, но впервые её доказал Якоби; формула (9) также уже известна из работы Роджерса 1907 г. Далее я подумал, что как эксперт в интегральном исчислении смогу без труда доказать такие формулы, как (5) и (6), и действительно доказал их, но с гораздо большим трудом, чем ожидал. Вообще интегральные формулы оказались всё же наименее импонирующими. Я нашёл формулы (1)—(4), содержащие ряды, значительно более интригующими, и вскоре мне стало ясно, что в распоряжении Рамануджана должны были быть какие-то очень общие теоремы, которые он от меня скрывает. Формула (2) известна из теории полиномов Лежандра и принадлежит Бауэру, но остальные три гораздо глубже, чем они выглядят. Теоремы, нужные для их доказательства, сейчас уже известны; они содержатся в книге Бэйли о гипергеометрических функциях.

Формулы (10)—(13) представляют собой результаты совершенно другого класса, и сразу видно, что они трудны и чрезвычайно глубоки. Специалист в теории эллиптических функций сразу обнаружит, что формула (13) должна как-то выводиться при помощи «комплексного умножения», но формулы (10)—(12) поставили меня полностью в тупик; я никогда не видел ничего подобного. Достаточно бросить на них один взгляд, чтобы убедиться в том, что они могли быть написаны только математиком самого высшего класса. Они должны быть верными, так как если бы они были неверны, то ни у кого не хватило бы воображения их изобрести[1]. Наконец, я решил для себя (надо помнить, что я в то время ничего не знал о Рамануджане и должен был учитывать все возможности), что автор этого письма является абсолютно честным человеком, так как великие математики встречаются всё же чаще, чем жулики или лжеучёные, обладающие такой математической изобретательностью». Теоретико-числовые утверждения (14) и (15) Рамануджана оказались неверными. По их поводу Харди писал: «Последние две формулы занимают особое место, потому что они неверны; они показывают пределы интуиции Рамануджана, но это не мешает им быть ещё одним свидетельством его исключительной силы[2]. Функция в формуле (14) является приближённым значением коэффициента, но совсем не столь точным, как это представлял себе Рамануджан; однако это ошибочное утверждение Рамануджана оказалось одним из самых плодотворных его утверждений, так как оно привело нас в конце концов к нашей совместной работе над проблемой «partitio numerorum». Формула (15), наконец, хотя и не содержит фактической ошибки, понималась Рамануджаном неверно[3]. Интеграл является не лучшей аппроксимацией, чем более простая функция $\dfrac{Kx}{\sqrt{\ln x}}$...». В другом месте о формуле

[1] Особенно сильное впечатление произвела на Харди формула (10). Первая попытка проверить справедливость этой формулы заключается, конечно, в рассмотрении частного случая $x = 1$. Тогда $u = v = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ и это значение должно удовлетворять уравнению $u^4(1 + 3u + 4u^2 + 2u^3 + u^4) = 1 - 2u + 4u^2 - 3u^3 + u^4$, что действительно подтверждается.

[2] По поводу этих формул Харди приводил латинскую поговорку «Quam errat eruditus, errat errore erudite» (когда учёный ошибается, он и ошибается по-учёному).

[3] Рамануджан, введённый в заблуждение аналогией с проблемой аппроксимации функции $\pi(x)$ из теории простых чисел, считал, что интеграл является лучшим приближением, чем $\dfrac{Kx}{\sqrt{\ln x}}$.

(15) Харди писал: «Главный член $\dfrac{Kx}{\sqrt{\ln x}}$ был впервые получен Эдмундом Ландау в 1908 г. Рамануджан не располагал тем мощнейшим аппаратом, который применялся Ландау. Рамануджан никогда не видел ни одной французской или немецкой книги, его знания английского языка была столь незначительны, что он не смог даже сдать элементарного экзамена. Достаточно удивительным является уже то, что он вообще мог ставить такие задачи, для решения которых потребовались усилия лучших математиков Европы в течение столетия, и которые по сей день не получили полного разрешения».

В завязавшейся между Рамануджаном и Харди переписке перед последним всё больше и больше раскрывался самобытный талант Рамануджана. В одном из последующих писем от 27 февраля 1913 г. Рамануджан писал:

«В Вас я нашёл друга, который с вниманием и пониманием относится к моим трудам. Это является стимулом для меня продолжить мои исследования... Во многих местах Вашего письма я нахожу указания на то, что требуются строгие доказательства, и Вы просите меня сообщить мои методы доказательств... Вот что я хочу Вам сказать: проверьте мои результаты, и если они совпадают с Вашими, то Вы должны по крайней мере согласиться с тем, что в моих основных рассуждениях имеется какое-то зерно истины... Чтобы сохранить мой мозг, мне нужна пища, и это является моей первой заботой. Одного Вашего письма с положительной оценкой моей работы будет достаточно для назначения мне стипендии от университета или от правительства...» В этом же письме мы находим следующее характерное место: «...Я сообщил ему[1], что по моей теории сумма бесконечного числа членов ряда $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$ равна $-\frac{1}{12}$. Если бы я сообщил этот результат сразу Вам, то Вы указали бы мне на сумасшедший дом как место, где мне надлежит быть...»

Харди подозревал, что Рамануджан не хочет сообщить ему, английскому математику, свои методы и основные формулы. Поэтому он написал Рамануджану, что тот может ему всё сообщить без опасения, что Харди использует его методы. В письме от 17 апреля 1913 г. Рамануджан в ответ пишет: «...Ваше последнее письмо причинило мне боль... Я нисколько не опасаюсь того, что мои методы будут использованы другими. Напротив, я работаю моими методами уже 8 лет и не нашёл

[1] Ссылка на лицо, фигурировавшее в предыдущем письме.

никого, кто бы понимал и оценил их. Как я уже писал в моём последнем письме, я нашёл в Вас внимательного и понимающего друга и готов передать в Ваше полное распоряжение те немногие результаты, которыми я располагаю. Только в силу новизны моих методов я не решаюсь даже сейчас сообщить Вам мой путь вывода тех формул, которые я Вам сообщил в моих предыдущих письмах...».

В результате этой переписки Харди предпринял энергичные шаги по обеспечению Рамануджана стипендией и пригласил его приехать в Кембридж. Приглашение было передано Рамануджану через секретаря организации индийских студентов в Лондоне, но, хотя все финансовые вопросы благополучно разрешались, Рамануджан категорически отказался покинуть Индию; основную роль здесь сыграли кастовые предрассудки; особенно противилась поездке Рамануджана в Европу его мать. Оставалось только хлопотать о стипендии Рамануджану в самой Индии. Наряду с представлением Харди, к ректору Мадрасского университета по этому вопросу обратился также генеральный директор индийских обсерваторий Дж. Т. Уокер, который в своём ходатайстве, между прочим, писал: «...Имею честь обратить Ваше внимание на С. Рамануджана, клерка Мадрасского управления почт. Я с ним не знаком, но вчера мне в присутствии сэра Фрэнсиса Спринга показали его работы. Как мне сообщили, ему 22 года. Его работы произвели на меня сильное впечатление — они вполне сравнимы с работами членов Кембриджского университета... Я совершенно убеждён в том, что университет поступит разумно, если предоставит С. Рамануджану возможность заниматься математикой, не заботясь о заработке, хотя бы в течение нескольких лет...». В результате Мадрасский университет с 1 мая 1913 г. предоставил Рамануджану специальную стипендию в 75 рупий в месяц сроком на 2 года. Как отметил Харди, с этого дня Рамануджан стал математиком-профессионалом.

Переписка не удовлетворяла Харди, и он продолжал настойчиво добиваться приезда Рамануджана в Кембридж как в интересах самого Рамануджана, за научную деятельность которого он себя чувствовал в известной мере ответственным, так и в интересах математики. Письменные увещевания Харди оставались безрезультатными, влияние матери на Рамануджана, по-видимому, перевешивало и мнение Харди, и советы многих друзей Рамануджана. Положение не изменилось до конца 1913 г. Но в самом начале 1914 г. в Мадрас по приглашению университета для чтения лекций прибыл один из кембриджских доцентов, ученик Харди, Э. Г. Нэвил (род. в 1889 г., впоследствии профессор университета). Нэвил имел поручение от Харди предпринять ещё одну попытку вывезти Рамануджана в Англию. По приезде в Мадрас Нэвил обратился в университет с меморандумом, в котором, в частности, писал: «Открытие гения Рамануджана обещает стать самым замечательным событием в математике нашего времени... Нельзя переоценить важности дальнейшего математического образования Рамануджана в одном из центров мировой науки, где он мог бы ознакомиться с более тонкими методами современной математики и работать под руководством учёных, знающих всё, что известно в данной области, и формулирующих те проблемы, в которых надо продолжать исследования... Я не вижу оснований сомневаться в том, что Рамануджан извлечёт максимальную пользу из общения с выдающимися западными математиками. В этом случае[1] его имя станет одним из величайших в истории математики, а Мадрасский университет и город Мадрас будут гордиться тем, что способствовали его переходу от неизвестности к славе....».

Вопрос о необходимости поездки Рамануджана в Кембридж широко и упорно дебатировался в кругах мадрасской интеллигенции, так что его мать, наконец, сдалась. Однажды утром она заявила, что во сне богиня приказала ей не противиться более отъезду сына и что она видела его сидящим в кругу европейцев в большом зале. Рамануджан получил от университета стипендию в 250 фунтов стерлингов в год на 2 года[2], оплату проезда в Англию и обратно, дорожные расходы и пр. Выделив из своей стипендии 60 рупий в месяц для матери, Рамануджан отбыл в Кембридж 17 марта 1914 г. В апреле он уже был зачислен в колледж Св.Троицы, где стипендия была увеличена ещё на 60 фунтов стерлингов.

Первые месяцы пребывания Рамануджана в Кембридже были посвящены восполнению основных пробелов в его математических знаниях. Харди, Литлвуд и другие кембриджские математики были изумлены как глубиной его знаний в одних вопросах, так и его полной неосведомлённостью в других. Вспоминая начало кембриджской карьеры Рамануджана, Харди писал: «Перед нами был человек, который мог

[1] То есть если он будет направлен в Кембридж.

[2] Стипендия была затем продлена ещё на 3 года, так что Рамануджан получал её в течение 5 лет, до 1 апреля 1919 г.

оперировать с модулярными уравнениями и теоремами комплексного умножения неслыханно высоких порядков, чьё мастерство в области непрерывных дробей, во всяком случае с формальной стороны, было непревзойдённым, человек, самостоятельно открывший функциональное уравнение дзета-функции и главные члены асимптотики многих важнейших теоретико-числовых функций; в то же время он ничего не слышал о двояко-периодических функциях, не знал о существовании теоремы Коши и, вообще, имел только самое слабое представление о том, что такое функция комплексного переменного. Его понимание сущности математического доказательства было более чем туманным; он пришёл ко всем своим результатам, как ранним, так и более поздним, как верным, так и неверным, при помощи странной смеси интуитивных догадок, индуктивных соображений и логических рассуждений...». Предлагать такому человеку приступить к систематическому изучению основ математики было невозможно, но в одинаковой мере было невозможно, по выражению Харди, «дать ему шагать по жизни, думая, что все корни дзета-функции вещественны». В конце концов обучение Рамануджана пошло по пути собеседований и семинаров, где знания Рамануджана быстро пополнялись в процессе обсуждения нерешённых проблем и творческой работы. Через некоторое время Рамануджан прилично знал теорию функций и аналитическую теорию чисел. «Правда, он уже не стал, — говорит Харди, — математиком новой школы, о чём, быть может, и не стоит сожалеть, но он научился понимать, когда теорема доказана и когда она не доказана, а поток его оригинальных математических идей продолжал изливаться без малейших признаков истощения».

Война, разразившаяся осенью 1914 г., помешала продолжению образования Рамануджана. Литлвуд, который вместе с Харди вёл основную работу с Рамануджаном, был мобилизован, а, как сказал Харди, одного учителя для такого ученика было мало. Научная жизнь в Кембридже замерла, нарушились международные связи. Только на втором этаже внутреннего корпуса колледжа Св.Троицы, на стене которого висела под стеклом старая надпись «Посетителей просят не шуметь, так как это мешает занятиям достопочтенного сэра Исаака Ньютона», в квартире Харди продолжались ежедневные занятия с Рамануджаном.

Рамануджан упорно занимался математикой и только одной математикой. Он не проявлял ни малейшего интереса ни к каким другим областям, кроме как к анализу и теории чисел, ни тем более к другим точным наукам, политике, философии, литературе, спорту, которыми интересовался Харди. С камина в кабинете Харди на этих двух математиков безмолвно смотрели портреты Маркса, Эйнштейна и Хоббса (знаменитого английского игрока в крикет). В тех редких случаях, когда Харди удавалось вызвать Рамануджана на разговор на нематематические темы, Харди находил в нём довольно интересного собеседника. Про эти немногие минуты Харди писал: «...я хочу совершенно определённо заявить, что когда Рамануджан жил в Кембридже в хороших условиях и был здоров, он, несмотря на некоторые свои странности, был таким же нормальным и разумным человеком, как все другие кембриджские ученые, собиравшиеся за ужином в профессорской столовой. Не следует воздевать руки к небу и восклицать: «перед нами что-то непонятное, какое-то олицетворение извечной мудрости Востока!». Я не верю в извечную мудрость Востока, картина, которую я хочу нарисовать перед Вами, — это портрет человека, который имел свои особенности, как все выдающиеся люди, но в обществе которого Вы могли получить интеллектуальное удовольствие, с которым Вы могли за чашкой чая беседовать о политике или математике, короче, портрет не восточного чуда или одухотворённого идиота, а портрет умного человека, который, кроме того, был ещё великим математиком».

Основная часть опубликованных работ Рамануджана была написана им в Кембридже самостоятельно или в соавторстве с Харди. Многие из этих работ Харди писал сам или подвергал английский текст Рамануджана редакционной переработке. Деятельное участие в их совместных занятиях принял также по возвращении с фронта Литлвуд.

Весной 1917 г. Рамануджан заболел и должен был лечь в Кембриджский госпиталь, где его регулярно посещали Харди и другие кембриджские математики. Большую часть остального времени пребывания в Англии ему пришлось провести в больницах Лондона, куда он был вскоре переведён[1]. Сначала его болезнь не вызывала особых опасений, но по-

[1] К этому периоду относится известный исторический анекдот. Однажды Харди ехал к больному Рамануджану в такси с номером 1729. Харди это число показалось «скучным»: $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$, и он сказал об этом Рамануджану. Но Рамануджан, оживившись, тут же возразил ему: «Нет, Харди, нет! Это очень интересное число, оно является наименьшим числом, представимым в виде суммы двух кубов двумя различными способами: $9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3 = 1729$». Литлвуд заметил по этому поводу, что каждое натуральное число являлось личным другом Рамануджана.

степенно сырой английский климат, условия военного и послевоенного времени, а также недоверие Рамануджана к английским врачам и настойчивое соблюдение им неподходящей диеты окончательно подорвали его здоровье. Он имел от рождения слабые лёгкие, и его болезнь перешла в открытую форму туберкулёза. Рамануджану очень хотелось вернуться домой, в Индию, но отъезд задерживался в течение двух лет в связи с его болезненным состоянием и трудностями морского сообщения (воздушного сообщения, конечно, ещё не существовало). Хотя в это время Рамануджан уже не мог так интенсивно заниматься математикой, как в первые три года его пребывания в Англии, он продолжал работать в больницах и санаториях.

После длительного отдыха осенью 1918 г. в одном из санаториев Уэльса на юго-западном побережье Англии его здоровье, как казалось, несколько улучшилось, и он с новой энергией взялся за работу. 26 ноября 1918 г. он был избран в члены Английского Королевского общества (Английская академия наук) и одновременно профессором Кембриджского университета. Он был первым индийцем, удостоенным этих почестей.

В начале 1919 г. здоровье Рамануджана настолько поправилось, что лучшие медицинские силы Англии считали его вне опасности, и он решил хотя бы на время вернуться в Мадрас, университет которого также приглашал его на работу. По-видимому, это была роковая ошибка, так как возможно, что оставаясь в Европе, он бы окончательно излечился. Но желание увидеться с родными и посетить родину после долгой разлуки взяло верх. Распрощавшись с Харди и своими кембриджскими друзьями, он в январе 1919 г. отправился в Индию. Что он был при том полон самых радужных надежд, видно из письма, которое он отправил ректору Мадрасского университета незадолго до своего отъезда:

«11 января 1919 г.

СЭР,

имею честь подтвердить получение Вашего письма от 9 декабря 1918 г. и выразить благодарность за оказываемую мне поддержку и предложенную честь.

Я считаю, однако, что оклад, установленный мне по прибытии в Индию, которое, как я надеюсь, произойдёт в самое ближайшее время, слишком велик по моим потребностям. Я думаю, что после оплаты моих расходов в Англии и помощи моим родителям в размере 50 фунтов стерлингов в год останется слишком большая сумма, часть которой я хотел бы использовать для благотворительных целей, таких, как снижение школьной платы за обучение бедных детей и сирот и как приобретение книг для школьных библиотек. Необходимые для этого шаги можно будет, конечно, предпринять после моего возвращения.

Я сожалею, что вследствие моей болезни я не мог за последние два года достаточно много заниматься математикой. Надеюсь, что скоро я буду в состоянии сделать больше и тем самым оправдать ту помощь, которую я получал.

Я остаюсь, сэр,
Ваш покорный слуга
С. Р а м а н у д ж а н».

После отъезда Рамануджана Харди с нетерпением ждал от него вестей. Однако Рамануджан молчал в течение почти целого года. Наконец, в начале 1920 г. в Кембридж пришло последнее письмо Рамануджана:

«Мадрасский университет,
12 января 1920 г.

Я очень прошу меня извинить, что до сих пор не написал Вам ни одного письма... Я недавно открыл очень интересные функции, которые я называю «симулирующими» («mock») тета-функциями. В отличие от «псевдо»-ϑ-функций (которые частично изучались проф. Роджерсом в его интересной работе), они входят в математику так же красиво, как обычные ϑ-функции. Посылаю вам с этим письмом несколько примеров...».

В этом письме Рамануджан не сообщал о своём здоровье, и Харди решил, что оно по крайней мере удовлетворительно. В действительности же Рамануджан прибыл в Мадрас 2 апреля 1919 г. в очень плохом состоянии. По-видимому, утомительная дорога окончательно подорвала его слабые силы. Он настолько исхудал, что друзья и родные с трудом узнали его. Рамануджан провёл три месяца в Мадрасе, а затем отправился отдыхать в деревню, недалеко от селения Эрод, где он родился. Затем его перевезли в Кумбаконам, где прошла его юность и где он впервые познакомился с математикой. Силы его быстро угасали, но он не хотел лечиться и лихорадочно работал над своим последним детищем — симулирующими тета-функциями. В январе 1920 г. под давлением друзей н врачей он переехал обратно в Мадрас, где ему оказывалась лучшая в городе медицинская помощь. Но спасти его было уже нельзя. 26 апреля 1920 г. Рамануджан умер в Чэтпуте — одном из предместий Мадраса. К исполнению своих обязанностей профессора Мадрасского университета он фактически так и не приступил.

Существует только два портрета Рамануджана: фотография и один портрет маслом как члена Королевского общества, находящийся в колледже Св.Троицы в Кембридже. Харди, который лучше всех в Европе знал Рамануджана, считал, что этот портрет написан плохо и не передаёт правильного впечатления о внешности Рамануджана.

Весть о смерти Рамануджана была в Кембридже полной неожиданностью. Вскоре под руководством Харди началась интенсивная работа над научным наследством Рамануджана, начиная от самых ранних записей в его записных книжках и кончая симулирующими тетафункциями. Его записные книжки были от руки переписаны друзьями в Индии и присланы в Кембридж профессору Дж. Н. Ватсону, который взял на себя задачу их исчерпывающего анализа и занимался этим на протяжении нескольких лет.

Надо заметить, что, несмотря на пятилетнее общение с Рамануджаном, Харди так и не успел многого узнать от Рамануджана относительно его ранних результатов, путей, по которым он к ним пришёл, источника его знаний по некоторым вопросам, которые не освещены в книге Карра, и т.д. Конечно, впоследствии Харди очень сожалел об этом, но не мог себе поставить этого в вину, поскольку, как он говорил, было столько новых и животрепещущих вопросов, требующих неотложного обсуждения с Рамануджаном, что возврат к старым задачам всё откладывался и откладывался. Кроме того, Харди надеялся вновь встретиться с Рамануджаном, так как никто не мог ожидать столь быстрой его смерти.

Таким образом, многое в трудах Рамануджана так и осталось исторической загадкой.

Харди, в частности, предпринял специальное исследование доступной Рамануджану в Индии математической литературы и оценку вероятности знакомства с ней Рамануджана. При этом Харди пришёл к заключению, что в отношении теоретико-числовых проблем Рамануджану был доступен только старый учебник Мэтьюза (M a t h e w s, Theory of Numbers, 1892), имевшийся в Мадрасской библиотеке, но что Рамануджан его не видел. Об этом свидетельствует и сравнение результатов

Рамануджана из теории чисел с содержанием учебника Мэтьюза и тот факт (которому Харди был склонен придавать решающее значение), что Рамануджан в своих первых письмах и впоследствии утверждал самостоятельность открытия им всех его теоретико-числовых формул. Надо сказать, что вопросы приоритета Рамануджана никогда не интересовали, он искал математические истины, он был одержим страстью их познания, но источник этого познания его не особенно интересовал. У него не было книг, и он сам открывал эти истины. В научной честности Рамануджана Харди никогда не сомневался.

Если открытия Рамануджана в области математического анализа в какой-то незначительной мере базировались на упомянутой уже книге Карра (см. стр. 7), причём он проник в глубины анализа несоизмеримо дальше того уровня, на котором Карр излагал свой далеко не тривиальный материал, то в чрезвычайно сложной области аналитической теории чисел Рамануджан, по весьма аргументированному мнению Харди, не располагал вообще никакими пособиями. Рамануджан воссоздал эту обширную область математики, построенную европейскими учёными в течение столетий, совершенно самостоятельно — достижение, единственное в своём роде в истории математики. При этом надо учесть, что, хотя Рамануджан и сформулировал несколько ошибочных теоретико-числовых теорем (из-за незнания некоторых очень тонких аналитических фактов, в частности того факта, что дзета-функция Римана имеет комплексные корни; см. стр. 21), он в то же время получил теоретико-числовые результаты, остававшиеся неизвестными европейским математикам XVIII и XIX веков! По поводу приоритета открытий Рамануджана Харди пишет в своих лекциях о Рамануджане: «Он никогда не ссылался на книги, но он никогда и не выдавал стандартные теоремы, о которых он узнал из книг, за свои. Он считал, например, что расширил аналитическую теорию чисел в разных направлениях, и он действительно сделал это, но он не претендовал на изобретение эллиптических интегралов, тэта-функций или модулярных уравнений. Все эти вещи (найденные им в книгах. — *В.Л.*) он рассматривал просто как известные всем математикам. Его собственные знания, как в отношении их объёма, так и в отношении их ограничений, были достаточно замечательными...». Надо сказать, что исследования Харди по вопросу о том, какие из книг могли быть известны Рамануджану, а какие нет, представляют собой классический образец историко-математического анализа. Приведём ещё заключение Харди: «Мой вывод, следовательно, состоит в том, что все эти (теоретико-числовые. — *В.Л.*) результаты Рамануджана с их искрами гениальной интуиции и их грубыми ошибками являются сугубо индивидуальными и совершенно самостоятельными достижениями. Никакое другое предположение не выдерживает критики и не согласуется с математическими и психологическими фактами».

Величие Рамануджана как математика и значимость его работ были оценены Харди и Литлвудом вскоре после его смерти. В исторической перспективе, которой мы располагаем теперь, оценка Харди и Литлвуда остаётся в полной силе. Харди писал: «Его проникновение в алгебраические формулы, преобразования бесконечных рядов и т.п. было просто поразительным. Я не знаю никого, кто мог бы в этом сравниться с ним, разве только Эйлер или Якоби. Он использовал, в значительно большей степени, чем современные математики, индуктивные и наводящие соображения; отправляющиеся от численных примеров; все его теоремы о сравнениях для $p(n)$ были, в частности, получены таким образом. Хорошая память, терпение и виртуозность вычислителя сочетались в нём с силой обобщения, чувством формы и способностью мгновенной адаптации гипотез, которые производили исключительно сильное впечатление, и ставили его в области его собственных исследований выше всех современных ему математиков».

И Харди, и Литлвуд признавали, что во второй половине XIX века и в первых десятилетиях XX века имелось немало более значительных математиков, чем Рамануджан, но нельзя не присоединиться к их мнению, что в своей специальной сфере Рамануджан был недосягаем, «он был чемпионом каждой игры, правила которой он знал».

Через год после смерти Рамануджана Харди писал: «Можно расходиться во мнениях относительно значимости работ Рамануджана, критериев, с которыми следует подходить к нему как математику, и влияния, которое он окажет на развитие математики. Его работы не обладают той простотой и неизбежностью, которые характеризуют труды самых великих математиков; его результаты были бы значительней, если бы они не были столь необычными. Они отличаются, однако, одной неоспоримой чертой — глубокой и неуязвимой оригинальностью. Он стал бы наверно более крупным математиком, если был бы обуздан в молодости. Он открыл бы, вероятно, больше новых фактов, и притом большей значимости. С другой стороны, он был бы тогда в меньшей степени Рамануджаном и в большей степени европейским профессором, и трудно сказать, явилось бы это приобретением или потерей...». Последние строки были написаны Харди явно под влиянием свежей утраты друга, яркая личность которого ещё стояла перед его глазами. Через 16 лет после того, как эти строки были написаны, Харди вновь вернулся к оценке Рамануджана уже с несколько более уравновешенных позиций и, процитировав приведённые выше свои высказывания, писал: «Всё, что я тогда сказал, я и сейчас готов повторить, за исключением лишь последней фразы, которая звучит как смешной сентиментализм. Наука ничего не выиграла от того, что Кумбаконамский колледж отверг единственного большого учёного», которого он имел, и потеря была неизмеримой. Судьба Рамануджана — худший известный мне пример вреда, который может быть причинен малоэффективной и негибкой системой образования. Требовалось так мало, всего 60 фунтов стерлингов в год на протяжении 5 лет и эпизодического общения с людьми, имеющими настоящие знания и немного воображения, а мир получил бы ещё одного из величайших своих математиков...»

К сказанному Харди следует лишь добавить, что дело было не только в негибкой и неэффективной системе образования. Сама эта система являлась следствием общего положения Индии как колониальной страны, положения, при котором всячески сдерживалось развитие национальной культуры и, в частности, национальных научных кадров.

Рамануджан был первым индийским математиком, получившим мировое признание. В наши дни Республика Индия располагает значительными математическими кадрами, наука в Индии находится на большом подъёме. Излишне говорить, что память о Рамануджане живёт в сердцах индийских учёных, а имя его почитается как символ пробудившегося гения индийского народа.

МАТЕМАТИКА РАМАНУДЖАНА

Выше уже были приведены ранние результаты Рамануджана из его первого письма Харди. Они типичны для того мира математических формул, который создал для себя и в котором жил и творил молодой Рамануджан, имея в своем распоряжении всего одну-две элементарные математические книги. Для понимания содержания этих формул требуется не более чем начала математического анализа в объёме, скажем, одного-двух курсов наших вузов. Но для того чтобы оценить трудность, оригинальность и глубину этих формул, нужно иметь аналитический опыт Харди, нужно самому быть аналитическим виртуозом, специалистом-профессионалом, умеющим отличить простое от сложного, обычное от необычного, стекло от алмаза.

Для менее искушённых читателей мы попытаемся раскрыть математический мир Рамануджана на более доступных примерах его творчества. Начнём с одной совсем простой по формулировке теоремы юного Рамануджана, также содержавшейся в его первом письме Харди. Это теорема из элементарной теории чисел, которая испокон веков привлекает математические умы с детских лет: чтобы размышлять о целых числах, не требуется никаких знаний, а только интерес и влечение. Но чтобы проникнуть в тайны натурального ряда чисел, надо ещё обладать некоей специфичностью мышления и той необъяснимой силой интуиции, которой располагают все большие математики и которой в необычайно большой степени обладал Рамануджан. Сколько среди первых 100 натуральных чисел таких, которые являются степенями числа 2? Их можно пересчитать: $1 = 2^0$, 2, 4, 8, 16, 32, 64, т.е. всего 7 чисел. А сколько таких чисел в первой тысяче? Тоже пересчитаем: к уже приведённым добавятся 128, 256, 512, т.е. всего 10 чисел. Поставим теперь более общий вопрос: сколько степеней числа 2 среди первых n натуральных чисел? И на этот вопрос легко ответить, надо только применить логарифмы; именно таких степеней столько, сколько имеется показателей $k \geqslant 0$, для которых $2^k \leqslant n$; последнее неравенство прологарифмируем при основании 10 и получим, что

$$k \lg 2 \leqslant \lg n \quad \Rightarrow \quad k \leqslant \frac{\lg n}{\lg 2}.$$

Сколько неотрицательных целых показателей k удовлетворяют этому неравенству? Число положительных целых k, удовлетворяющих этому неравенству, равно целой части дроби $\frac{\lg n}{\lg 2}$, которая обозначается так: $\left[\frac{\lg n}{\lg 2}\right]$; учитывая ещё показатель $k = 0$, получим окончательный ответ на интересующий нас вопрос в виде формулы

$$\left[\frac{\lg n}{\lg 2}\right] + 1.$$

Так как $\lg 2 = 0{,}30103$, то для $n = 100$ и $n = 1000$ получим уже известные нам результаты:

$$\left[\frac{\lg 100}{\lg 2}\right] + 1 = \left[\frac{2}{0{,}30103\ldots}\right] + 1 = [6{,}6\ldots] + 1 = 6 + 1 = 7,$$

$$\left[\frac{\lg 1000}{\lg 2}\right] + 1 = \left[\frac{3}{0{,}30103\ldots}\right] + 1 = [9{,}9\ldots] + 1 = 9 + 1 = 10.$$

Аналогично решается соответствующая задача и о степенях числа 3: среди первых n натуральных чисел имеется $\left[\frac{\lg n}{\lg 3}\right] + 1$ степеней числа 3. Рамануджан поставил перед собой, казалось бы, чуть более трудный вопрос: сколько среди первых n натуральных чисел имеется таких, которые являются произведениями степени числа 2 на степень числа 3, т.е. чисел, имеющих вид $2^k \cdot 3^l$ с неотрицательными показателями k и l?

Подойдём к этому вопросу эмпирически — выпишем все такие числа в первой сотне: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 81, 96 — всего 20 чисел. Было бы уже утомительно выписывать все такие числа в первой тысяче. Нужна общая формула, но, несмотря на все усилия, такую формулу получить не удаётся. Такой формулы для задачи Рамануджана, как полученные выше точные формулы $\left[\frac{\lg n}{\lg 2}\right] + 1$ и $\left[\frac{\lg n}{\lg 3}\right] + 1$ для более простых задач, нет. Зато Рамануджан нашёл приближённую формулу, но и это было первоклассным достижением. В двух прежних задачах в качестве приближённых формул можно было бы взять $\frac{\lg n}{\lg 2}$ и $\frac{\lg n}{\lg 3}$; при $n = 100$ и $n = 1000$ первая из них, как мы видели, даёт 6,6... (вместо точного ответа 7) и 9,9... (вместо 10). Приближённая формула Рамануджана для числа натуральных чисел $\leqslant n$, имеющих вид $2^k 3^l$ с неотрицательными показателями k и l, записывается так:

$$\frac{\lg 2n \cdot \lg 3n}{2 \lg 2 \cdot \lg 3}.$$

Это было блестящее открытие Рамануджана (одно из самых первых), тем более что, несмотря на простоту самой формулы, её доказательство очень непросто. Проверим эту формулу при $n = 100$: мы знаем, что точный ответ 20; формула Рамануджана даёт

$$\frac{\lg 200 \cdot \lg 300}{2 \lg 2 \cdot \lg 3} = \frac{2{,}30103 \cdot 2{,}47712}{2 \cdot 0{,}30103 \cdot 0{,}47712} = \frac{5{,}67792\ldots}{0{,}28725\ldots} = 19{,}75\ldots$$

Формула Рамануджана в действительности является асимптотической, т.е. если обозначить через $R(n)$ точное решение задачи (так что, например, $R(100) = 20$), то

$$R(n) - \frac{\lg 2n \cdot \lg 3n}{2 \lg 2 \cdot \lg 3} = d(n)$$

является величиной, которая при $n \to \infty$ растёт гораздо слабее, чем $R(n)$. Само $R(n)$, как видно из результата Рамануджана, имеет порядок $\lg^2 n$. Рамануджан, по-видимому, полагал, что записанная выше разность остаётся ограниченной при всех n, поскольку он вообще обладал почти мистическим даром выписывать приближённые выражения сложнейших функций с ограниченной ошибкой. Однако в этом случае ограниченность ошибки $d(n)$ так и не удалось показать из-за сложности функции $R(n)$, которая, казалось бы, так просто определяется (в действительности эта задача относится к очень трудным задачам определения числа целочисленных точек, содержащихся в фигуре — в данном случае просто в треугольнике). Есть основания полагать, что $d(n)$ на самом деле растёт с n неограниченно. Лучшее, что Харди и некоторые другие математики смогли в этом направлении доказать (уже после смерти Рамануджана), это то, что $d(n)$ растёт с n слабее, чем $\frac{\lg n}{\lg \lg n}$. Однако и этот результат показывает, насколько хороша приближённая формула Рамануджана для $R(n)$.

Рамануджан вообще был большой мастер приближённых формул (для чего требуется прежде всего интуиция). Исходя из глубоких наводящих соображений, он, в частности, установил, что с точностью до 9 десятичных знаков

$$\pi = \frac{63}{25} \cdot \frac{17+15\sqrt{5}}{7+15\sqrt{5}}$$

и с точностью до 8 десятичных знаков

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} = \frac{1103}{99^2}.$$

Виртуозность в отыскании неведомых формул показывают и следующие результаты молодого Рамануджана:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}} = 3,$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\ldots}}}} = 4,$$

$$\sqrt{8-\sqrt{8+\sqrt{8-\sqrt{8-\ldots}}}} = 1+2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9},$$

$$\sqrt{11-2\sqrt{11+2\sqrt{11-2\sqrt{11-\ldots}}}} = 1+4\sin\frac{\pi}{18},$$

$$\sqrt{23-2\sqrt{23+2\sqrt{23-2\sqrt{23-\ldots}}}} = 1+4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9},$$

где в последних трёх формулах знаки перед корнями периодически повторяются группами по три: «$-$», «$+$», «$-$» (это лучше всего видно из формулы на стр.35, которая содержит доказательство первой из рассматриваемых формул); приведём ещё две замечательные формулы Рамануджана:

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}},$$

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9}-6}{2}}.$$

Эти точные равенства являются, конечно, частными случаями значительно более общих соотношений, которыми располагал Рамануджан, но о которых он никому ничего не сообщил. После его смерти часть этих общих соотношений была восстановлена другими математиками, но не подлежит сомнению, что некоторые из них утеряны навсегда. Харди, который провёл очень большую работу по изучению творчества Рамануджана, отмечал: «В формулах Рамануджана всегда содержится гораздо больше, чем это кажется на первый взгляд; в этом убедится каждый, кто примется за их вывод. Некоторые его формулы вскрывают чрезвычайно глубокие аналитические зависимости, другие менее глубоки, но нет ни одной формулы, сообщённой Рамануджаном, которая не была бы интересной и поучительной».

Последние две из этих формул совсем элементарны, но очень глубоки. Они обладают неповторимой внутренней симметрией, и догадаться об их существовании мог только математик самого высокого ранга. В противоположность им первые две формулы легки и изящны. Следующая цепочка остроумных преобразований, напоминающая изящные этюды Моцарта, приводит к первой формуле:

$$n(n+2) = n\sqrt{1+(n+1)(n+3)} = n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)(n+4)}} =$$

$$= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)(n+5)}}} =$$

$$= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+(n+4)(n+6)}}}}$$

и т.д., откуда Рамануджан заключает (это, строго говоря, требует ещё дополнительного обоснования), что

$$n(n+2) = n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+(n+4)\sqrt{1+\ldots}}}}}\,.$$

Отсюда при $n = 1$ получаем первую формулу.

Средняя группа из трёх формул, содержащих значения тригонометрических формул, требует для своего доказательства высокой преобразовательной техники. Например, первая формула из этой группы выводится Рамануджаном следующим артистическим образом с использованием только формул школьной тригонометрии:

$$
\begin{aligned}
1+2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9} &= \sqrt{1+4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}+12\sin^2\frac{\pi}{9}} = \\
&= \sqrt{1+4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}+6\Big(1-\cos\frac{2\pi}{9}\Big)} = \\
&= \sqrt{7+4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}-6\cos\frac{2\pi}{9}} = \\
&= \sqrt{7+4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}-4\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{2\pi}{9}} = \\
&= \sqrt{7+4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}-2\sqrt{3}\cos\frac{7\pi}{18}-2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18}} = \\
&= \sqrt{7+2\sqrt{3}\cos\frac{7\pi}{18}-2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18}} = \\
&= \sqrt{7-4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{2\pi}{9}} = \sqrt{8-\Big(1+2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}\Big)};
\end{aligned}
$$

аналогично преобразовывается:

$$
\begin{aligned}
1+2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9} &= \sqrt{1+4\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}+12\sin^2\frac{2\pi}{9}} = \\
&= \sqrt{1+4\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}+6\Big(1-\cos\frac{4\pi}{9}\Big)} = \\
&= \sqrt{7+4\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}-6\cos\frac{4\pi}{9}} = \\
&= \sqrt{7+4\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}-4\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{4\pi}{9}} = \\
&= \sqrt{7+4\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}-2\sqrt{3}\cos\frac{11\pi}{18}-2\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{18}} = \\
&= \sqrt{7+2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}+2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}} = \\
&= \sqrt{7+4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{18}} = \sqrt{8+\Big(2\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9}-1\Big)};
\end{aligned}
$$

наконец, точно так же получаем:

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9}-1 &= \sqrt{12\sin^2\frac{4\pi}{9}-4\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9}+1} = \\
&= \sqrt{6\Big(1-\cos\frac{8\pi}{9}\Big)-4\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9}+1} = \\
&= \sqrt{7-4\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9}-6\cos\frac{8\pi}{9}} = \\
&= \sqrt{7-4\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9}-4\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{8\pi}{9}} = \\
&= \sqrt{7-4\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9}-2\sqrt{3}\cos\frac{19\pi}{18}-2\sqrt{3}\cos\frac{13\pi}{18}} = \\
&= \sqrt{7-2\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9}+2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}} = \\
&= \sqrt{7-4\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{9}} = \sqrt{8-\Big(1+2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}\Big)}\,.
\end{aligned}
$$

Эти три результата после подстановки друг в друга приводят к равенству:

$$
1+2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9} = \sqrt{8-\sqrt{8+\sqrt{8-\Big(1+2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}\Big)}}}\,;
$$

искомая формула может быть получена отсюда итерированием, т.е. повторной подстановкой.

Мы подробно привели этот вывод Рамануджана для того, чтобы утверждение о его комбинаторных способностях не осталось голословным. Если внимательно проследить филигранное нанизывание Рамануджаном простейших формул тригонометрии с его неожиданным и блестящим финалом, то ни один маломальски интересующийся математикой читатель не может не признать, что здесь видна рука гроссмейстера!

Вся техника Рамануджана изобилует неожиданно фантастическими поворотами в самых, казалось бы, простейших вещах. Чего стоит, например, его числовое равенство

$$
\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\,,
$$

которое нетрудно доказать последовательными возвышениями в куб, но которое надо было сначала найти!

Мы уже встречались в формулах Рамануджана с бесконечными процессами в виде итерированных радикалов. Эти предельные переходы довольно тонки, и Рамануджан не утруждал себя их строгим в современном понимании обоснованием. Более простые предельные переходы встречаются в бесконечных рядах, которыми Рамануджан также много занимался и в которых он открыл немало жемчужин.

Бесконечный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

называется сходящимся к сумме S, если S является пределом при $n \to \infty$ его частичных сумм

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

В этом случае пишут:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = S.$$

Уже давно в математике разработана теория бесконечных рядов, позволяющая в очень многих конкретных случаях установить, сходится ли данный ряд или нет. Однако нахождение суммы конкретного сходящегося ряда в подавляющем большинстве случаев — значительно более трудная задача. И в этой области Рамануджан получил массу изумительных результатов. Приведём некоторые из них.

Совсем нетрудно показать, что бесконечный ряд с общим членом

$$u_n = \frac{n^{n-2}}{(1000+n)^n}$$

сходится:

$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002^2} + \frac{3}{1003^3} + \frac{4^2}{1004^4} + \frac{5^3}{1005^5} + \ldots = S.$$

Но чему равно S? Его точное значение найти нельзя, можно только указать его приближённые значения. Рамануджан чрезвычайно остроумно показал, что S меньше $\frac{1}{1000}$ приблизительно на 10^{-440}, т.е. он показал, что

$$S = 0{,}000999\ldots9\ldots,$$

где число следующих друг за другом девяток не менее 436. Этот результат подсчётом найти, конечно, нельзя, он требует рамануджановской преобразовательной техники.

В математике большую роль играет число Непера, которое обозначается буквой e и определяется как

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;$$

оно является также суммой следующего сходящегося бесконечного ряда:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots,$$

где под $n!$ понимается произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ ($1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$ и т.д.); подсчитано, что $e = 2{,}71828182\ldots$. Логарифмы при основании e называются *натуральными* и обозначаются через ln; например, $\ln 2 = 0{,}6931\ldots$. Ещё в XVIII веке было известно, что $\ln 2$ является суммой следующего бесконечного ряда (называемого знакочередующимся гармоническим рядом):

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = \ln 2.$$

Одним из самых первых результатов Рамануджана (сравнительно простым, но, как все его результаты, весьма неожиданным) была следующая формула:

$$\frac{2}{4^3-4} + \frac{2}{8^3-8} + \frac{2}{12^3-12} + \ldots = \frac{3\ln 2}{2} - 1.$$

Мы написали эту формулу, как её написал Рамануджан; общий член ряда легко угадывается: он равен $\frac{2}{(4n)^3-4n}$.

Рамануджан, конечно, открыл и более сложные формулы этого рода, например, следующие две (в его собственной записи):

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \frac{2}{3^2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4^2}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5^2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4^3}\right) + \ldots = \frac{\pi\ln(2+\sqrt{3})}{12},$$

$$1 - \frac{2}{3^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5^2} - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\ln^2(1+\sqrt{2})}{2}.$$

Эти формулы требуют большой виртуозности; они замечательны во многих отношениях, в частности, тем, что суммы этих рядов выражаются через натуральные логарифмы квадратичных иррациональностей и число π (после Рамануджана были открыты, главным образом голландскими математиками, другие формулы такого же типа). Общие члены рядов Рамануджана не записаны, но их легко себе представить (второй ряд, конечно, знакочередующийся).

Выше были приведены 15 отобранных Харди результатов Рамануджана из его писем к Харди; первые четыре из них относятся тоже к суммированию бесконечных рядов. Формула (1) относится к степенным рядам и справедлива при любом значении x, формула (2), как отметил Харди, была известна уже до Рамануджана (он её переоткрыл), формулы (3) и (4) являются высшими достижениями Рамануджана в этой области, они послужили отправным пунктом для построения современной теории обобщённых гипергеометрических функций. В правых частях формул (3) и (4) фигурирует $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$ — значение гамма-функции Эйлера, определение которой через интеграл упомянуто в начале цитированного на стр. 13 первого письма Рамануджана.

Из математического анализа ограничимся приведением ещё только одной формулы Рамануджана, особенно поражающей неожиданными сочетаниями. В математическом анализе построены разные аппараты предельных переходов, каждый из них обычно работает в своей области. Сочетание в одной формуле двух различных аппаратов — факт чрезвычайно редкий и всегда свидетельствующий об очень скрытых связях.

Помимо бесконечных рядов, имеющих очень широкое применение, в классическом анализе давно разработан аппарат бесконечных цепных дробей (мало применяемый в современной математике). Этот итерационный процесс напоминает итерированные радикалы. Пусть дана последовательность положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; бесконечная цепная дробь

$$\cfrac{a_1}{1+\cfrac{a_2}{1+\cfrac{a_3}{1+\ddots+\cfrac{a_n}{1+\ldots}}}}$$

записываемая символически также в виде

$$\frac{a_1}{1+}\,\frac{a_2}{1+}\,\frac{a_3}{1+\ldots}\,\frac{a_n}{1+\ldots}$$

(знаки плюс ставятся против знаменателей), называется сходящейся к сумме b, если b является пределом при $n \to \infty$ её подходящих дробей

$$b_n = \frac{a_1}{1+}\,\frac{a_2}{1+}\,\frac{a_3}{1+\ldots}\,\frac{a_n}{1}\,.$$

В этом случае пишут:

$$\frac{a_1}{1+}\,\frac{a_2}{1+}\,\frac{a_3}{1+\ldots}\,\frac{a_n}{1+\ldots} = b.$$

Нахождение суммы конкретных бесконечных цепных дробей — задача не менее сложная, чем суммирование бесконечных рядов; она даже, как правило, сложнее, так как подходящая дробь многоэтажна и должна быть предварительно упрощена. Только простейшие бесконечные непрерывные дроби (например, периодические) допускают простое вычисление. Так, бесконечная цепная дробь

$$\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+\ldots}\,\frac{1}{1+\ldots} = x$$

может быть вычислена, исходя из того, что очевидно $x = \dfrac{1}{1+x}$, откуда $x^2 + x - 1 = 0$ и $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (второй корень этого квадратного уравнения отрицателен и поэтому не может быть искомым значением нашей непрерывной дроби).

Преобразовательные трудности, связанные с бесконечными цепными дробями, привлекали молодого Рамануджана, который с большим успехом проявил свои блестящие способности на этом поприще. Он самостоятельно нашёл почти все классические результаты, относящиеся к бесконечным цепным дробям, и обогатил их теорию многими новыми удивительными открытиями. Современные математики считают, что Рамануджан был и остаётся крупнейшим знатоком цепных дробей в мире.

Одним из самых замечательных результатов Рамануджана в этой области является следующая его формула:

$$1 + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{2}{1+}\,\frac{3}{1+}\,\frac{4}{1+\ldots} = \sqrt{\frac{\pi e}{2}}\,.$$

Эта формула — единственная в своем роде — связывает бесконечный ряд

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\dots$$

и бесконечную цепную дробь

$$\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{2}{1+}\,\frac{3}{1+}\,\frac{4}{1+\dots}$$

и может рассматриваться как формула преобразования ряда в цепную дробь, или обратно:

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\dots=\sqrt{\frac{\pi e}{2}}-\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{2}{1+}\,\frac{3}{1+}\,\frac{4}{1+\dots}.$$

Отметим, что ни данный ряд, ни данная цепная дробь в отдельности не выражаются через известные постоянные π и e, но их сумма оказывается равной $\sqrt{\frac{\pi e}{2}}$; эта формула указывает на существование очень глубоких зависимостей между определённым классом степенных рядов и цепными дробями. Надо полагать, что Рамануджан владел какими-то более общими фактами в этом направлении, которые, однако, остались неизвестными (попытка восстановить эти зависимости делалась индийскими математиками).

Из классического анализа хорошо известно, что бесконечные ряды тесно связаны с интегралами. Ньютон, Эйлер, Коши и многие другие крупнейшие математики установили много формул суммирования рядов, выражающих сумму ряда через интеграл. Но и в этих классических вопросах гений Рамануджана нашёл совершенно новые аспекты и типично рамануджановские неожиданные формулы. Они имеют более традиционный характер, чем остальное творчество Рамануджана, но несут на себе его неповторимую печать оригинальности. Харди считал их сначала наименее «впечатляющими» из всех результатов Рамануджана, но в конце своей жизни он высказывался в том смысле, что формулы суммирования Рамануджана сделали бы имя их открывателя бессмертным в математике даже в том случае, если бы Рамануджан ничего другого после себя не оставил. Кроме того, эти формулы интересны ещё в том отношении, что они являются его единственными математическими результатами, полученными до его переезда в Кембридж, из которых он извлёк материальную пользу: они были представлены им в конце 1913 г. и в начале 1914 г. в Мадрасский университет в качестве отчёта по научной работе, за которую ему была назначена стипендия (см. стр. 19).

Всего Рамануджан установил шесть основных новых формул суммирования. Все они достаточно сложны и требуют весьма тонкого аналитического аппарата, но одна из них столь замечательна, что о ней нужно сказать несколько слов. Это знаменитая третья формула суммирования Рамануджана, которую он сам рассматривал как континуальный аналог степенного ряда Маклорена. Мы приведём только её частный случай для показательной функции e^x. Эта функция разлагается в степенной ряд, сходящийся для всех значений :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

В знаменателях членов этого ряда стоят факториалы: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (см. стр. 37), которые определены только для целых положительных значений n. Задача, которая ставится в формулах суммирования или, что в основном, то же самое, в установлении континуальных аналогов, состоит в том, чтобы перейти от суммирования по дискретному номеру n к интегрированию по непрерывному (континуальному) переменному t. Уже со времён Эйлера было известно, что при переходе к континуальному аналогу следует заменить $n!$ на $\Gamma(t+1)$, так как при $t = n$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

(о гамма-функции $\Gamma(n)$ уже шла речь выше). Таким образом, для e^x общий член ряда следует заменить на подынтегральную функцию $\frac{x^t}{\Gamma(t+1)}$, а сумму членов ряда — на интеграл от этой функции:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^t}{\Gamma(t+1)}\,dt.$$

Вполне естественно, что значение этого интеграла будет отличаться от суммы ряда e^x, но насколько? Можно ли вообще этот интеграл представить в удобообозримом виде как e^x плюс некоторая поправка? Рамануджан показал, что всё это действительно возможно, причём возникают исключительные по красоте формулы. Рассматриваемый частный случай третьей формулы суммирования Рамануджана имеет следующий вид:

$$\int_0^\infty \frac{x^t}{\Gamma(t+1)}\,dt = e^x - \int_{-\infty}^\infty e^{xe^v}\frac{dv}{v^2+\pi^2},$$

где нужно предположить, что $x > 0$. Эта и аналогичные формулы Рамануджана многократно передоказывались и применялись к некоторым современным вопросам теории интегральных преобразований. Известны также некоторые их обобщения.

Не останавливаясь на богатейшей коллекции формул Рамануджана из интегрального исчисления, теории специальных, в частности, эллиптических и модулярных функций, и теории бесконечных произведений, перейдём к глубоким результатам Рамануджана по теории чисел. Среди них исключительно сложные результаты по проблеме «partitio numerorum» — разбиения чисел, полученные им в Кембриджском университете совместно с Харди.

Число 4 можно представить в виде суммы натуральных чисел следующими способами:

$$4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1.$$

аналогично

$$5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1.$$

Мы имеем, таким образом, пять способов разбиения числа 4 и семь способов разбиения числа 5; при этом мы считаем, что оказывается целесообразным само число считать также одним из способов его разбиения. Число 1 имеет, таким образом, одно разбиение, число 2 — два разбиения, число 3 — три разбиения. Вводится обозначение $p(n)$ для числа разбиений натурального числа n. Итак,

$$p(1) = 1;\ p(2) = 2;\ p(3) = 3;\ p(4) = 5;\ p(5) = 7.$$

Значения $p(n)$ давно интересовали математиков. Английские и индийские вычислители занимались их подсчётом, который прост для малых n, но, как легко понять, быстро усложняется с ростом n. Макмэгон составил таблицу значений $p(n)$ для $n \leqslant 200$; оказалось, что $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$. Отдельные значения $p(n)$ известны и для бо́льших значений n: так, было подсчитано $p(14\,031)$, которое является 127-значным числом. Харди в своих лекциях о Рамануджане писал: «Очень мало известно об арифметических свойствах $p(n)$; мы даже не знаем, например, когда $p(n)$ чётно и когда нечётно. Рамануджан был первым и до сих пор единственным математиком, который открыл некоторые арифметические свойства $p(n)$; он открыл свои теоремы главным образом изучая таблицы $p(n)$.» Однако затем Рамануджан дал и строгие доказательства некоторых своих теорем. Например, он доказал, что для чисел n, дающих остаток 4 при делении на 5, $p(n)$ делится без остатка на 5, для чисел n, дающих остаток 5 при делении на 7, $p(n)$ делится без остатка на 7 и для чисел n, дающих остаток 6 при делении на 11, $p(n)$ делится без остатка на 11. Рамануджан открыл и более сложные арифметические свойства $p(n)$.

Ещё будучи в Индии и работая совершенно самостоятельно, Рамануджан открыл одно тождество, связанное с $p(n)$, которое такой крупный математик современности, как Литлвуд, считает одной из самых замечательных формул *всей математики*. Эта формула связана со степенным рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(5n+4)x^n,$$

который при любом значении x, по модулю меньшем единицы, является сходящимся рядом; Рамануджан установил, что сумма этого ряда равна

$$5\frac{\left(\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^{5n})\right)^5}{\left(\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^{n})\right)^6},$$

где в числителе и знаменателе стоят бесконечные произведения. Рамануджан указал ещё одну аналогичную формулу:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(7n+5)x^n = 7\frac{\left(\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^{7n})\right)^3}{\left(\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^{n})\right)^4} + 49x\frac{\left(\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^{7n})\right)^7}{\left(\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^{n})\right)^8}.$$

Как эти формулы были открыты Рамануджаном остаётся до сих пор неизвестным; впоследствии они были доказаны двумя английскими математиками Дарлингтоном и Морделлом (последний является одним из крупнейших современных математиков).

В первой из этих замечательных формул важную роль, очевидно, играет число 5 (а во второй — число 7). Рамануджан открыл ещё формулы, в которых 5 играет совершенно неожиданную роль (см. также формулы (10)—(12) из письма к Харди). Эти знаменитые формулы известны под названием «тождеств Роджерса—Рамануджана» и имеют весьма интересную историю. Приведём здесь только первое тождество Роджерса—Рамануджана (всего их два):

$$1+\frac{1}{1-x}+\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)}+\ldots+\frac{x^{m^2}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}+ \\ +\ldots=\frac{1}{(1-x)(1-x^6)\ldots(1-x^4)(1-x^9)\ldots}.$$

Неожиданным в нём является вид знаменателя правой части: показатели в скобках образуют две арифметические прогрессии с разностью 5; в первой последовательности скобок фигурируют показатели

$$1, 6, 11, 16, 21, \ldots,$$

а во второй — показатели

$$4, 9, 14, 19, 24, \ldots.$$

Эти тождества также тесно связаны с partitio numerorum, как было впоследствии показано немецким математиком Исаем Шуром (уроженец России) и шотландским математиком Макмэгоном.

История этих формул такова. Они были впервые открыты в 1894 году английским математиком Роджерсом, который был очень тонким и глубоким математиком, обладавшим талантом, по своей оригинальности близким к гению Рамануджана. Роджерс остался незамеченным в математическом мире, и из его современников никто не обращал внимания на его публикации. В частности, и опубликованные им тождества в течение 23 лет лежали на полках специальных библиотек. Рамануджан тоже открыл эти тождества в 1911—1912 гг. Он каким-то образом убедился в их справедливости, но настоящего доказательства их не имел.

По-видимому, он не очень стремился найти строгое доказательство, так как в периоды особо интенсивной творческой активности он спешил искать и открывать всё новые и новые вещи, не заботясь о том, чтобы сразу же их фундаментально обосновывать. Позже, в Кембридже, он рассказывал, что несколько раз принимался за доказательство, но после двух-трёх неудачных попыток вновь забрасывал его. Харди узнал эти тождества от Рамануджана, был потрясён их сказочной гармонией, пытался сам с учениками их доказать, потерпел неудачу, как в своё время и Рамануджан, и наконец опубликовал их без доказательства во втором томе «Комбинаторного анализа» Макмэгона. И все эти годы полное их доказательство Роджерсом лежало нераскрытым в одном из книжных шкафов личной библиотеки Харди! Работу Роджерса в «Трудах Лондонского математического общества» обнаружил сам Рамануджан в 1917 г., просматривая с какой-то целью старые тома. Он пришёл в восторг от доказательства Роджерса, началась переписка с Роджерсом, в результате которой удалось найти значительно более простое доказательство, и к Роджерсу, благодаря Рамануджану, пришла запоздалая слава. Но этим дело не закончилось. Оторванный войной от британских математиков, Исай Шур самостоятельно и независимо тоже открыл эти тождества, причём сразу с двумя разными доказательствами, одно из которых базировалось на исключительно комбинаторных соображениях. Это стало однако, известным только позже. В послевоенные годы бьпо обнаружено, что тождества Роджерса—Рамануджана тесно связаны с функцией $p(n)$ из partitio numerorum (через второе доказательство Шура), и варианты их доказательства посыпались как из рога изобилия. Сейчас опубликовано семь доказательств этих тождеств, но всё же следует помнить, что первое из них было дано Роджерсом.

Несмотря на все эти достижения Рамануджана, основная цель в partitio numerorum осталась недостигнутой. Речь идёт о точной формуле для $p(n)$, поисками которой упорно занимались Харди и Литлвуд ещё до их встречи с Рамануджаном. Они опубликовали ряд сложных работ, но до окончательной формулы было ещё очень далеко. Вообще казалось совершенно невероятным, что такая формула существует, и усилия математиков были направлены на получение хотя бы приближённой асимптотической формулы. По прибытии Рамануджана в Кембридж Харди и Литлвуд ознакомили его с этой задачей. При этом выяснилось, что на основании каких-то недоступных европейским математикам соображений Рамануджан ещё в Индии был уверен в том, что должна существовать формула, дающая значение $p(n)$ с конечной для всех n ошибкой, т.е. формула, которая при любом n даёт значение, отличающееся от $p(n)$ не более чем на фиксированное число, например на 10. В эту невероятную гипотезу Рамануджана никто не верил, но тем не менее Рамануджан продолжал настаивать на своём и вместе с Харди и Литлвудом начал поиски такой формулы. Почва была подготовлена английскими математиками, которые построили большой и сложный аппарат, в их руках, однако, ничего не давший. Наконец, Харди вместе с Рамануджаном соорудили правдоподобную формулу, в которую входило выражение

$$\exp\left(\frac{\pi}{q}\sqrt{\frac{2}{3}\,n}\right),$$

где q — натуральное число (по q производилось суммирование). Однако эта формула, несмотря на все старания, не давала нужного значения, и предположение Рамануджана становилось всё менее и менее вероятным. Но на этом этапе Рамануджан ещё раз показал, что его интуиция превосходит всё, что встречалось в математическом творчестве до него. Он внёс абсолютно «дикое» предложение изменить приведённое выше ключевое выражение на

$$\exp\left(\frac{\pi}{q}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right),$$

т.е. заменить в нём n на $n-\frac{1}{24}$! Почему $-\frac{1}{24}$? Какие у него были основания для такого предположения? Никто этого не знает, это было, по-видимому, какое-то молниеносное прозрение, какой-то фантастический взлёт мысли, основанный на длительных и глубочайших размышлениях, синтезировавших всю гигантскую работу гениального ума. С поправкой Рамануджана формула «заиграла», и оказалась подтверждённой не только гипотеза Рамануджана о конечной ошибке, но получилась просто точная формула. С волнением её авторы приступили к проверке при $n = 100$ и $n = 200$, и результаты совпали с табличными. Казавшееся невозможным свершилось!

Литлвуд, весьма сдержанный (как многие англичане) в своих суждениях человек, бывший непосредственным участником всех этих событий, писал об открытии этой теоремы: «Незачем говорить читателю о том, что эта теорема поразительна, и легко поверить в то, что методы, которыми она была доказана, базируются на одной принципиально новой и очень важной идее, оказавшейся весьма плодотворной и в применении к другим проблемам. Эта теорема имеет интересную историю. (Чтобы её рассказать, я должен немного нарушить правила, действующие в отношении совместного творчества; поэтому я добавлю, что профессор Харди подтверждает моё изложение имевших место фактов и даёт разрешение на его опубликование.) Одним из индийских предположений Рамануджана было, что первый член ряда является очень хорошим приближением к $p(n)$; это было установлено без большого труда. На этом этапе вместо $n - \frac{1}{24}$ стояло просто n — тогда это различие представлялось несущественным. С этих позиций началась настоящая атака проблемы. Следующим шагом, не слишком большим, было рассмотрение некоторого ряда (Литлвуд приводит этот бесконечный ряд, вид которого, для наших целей несуществен. — *В.Л.*) как асимптотического разложения, фиксированная частичная сумма которого (например, первых четырёх членов) даёт приближение с ошибкой, имеющей порядок первого отброшенного члена (т.е. ошибкой, растущей вместе с n. — *В.Л.*). Но начиная с этого момента и до самого конца Рамануджан упорно утверждал, что верно гораздо больше, чем было пока доказано: должна существовать, говорил он, формула с ошибкой $O(1)$ (т.е. с конечной для всех n ошибкой. — *В.Л.*). Это было его важнейшим вкладом в теорему; этот вклад был исключительно существенным, без него теорема не могла бы быть найдена, но гипотеза эта казалась невероятной по своей необычности. Была предпринята тщательная числовая проверка, которая обнаружила удивительнейшие факты относительно $p(100)$ и $p(200)$. Затем v сделали функцией от n (математическая деталь, несущественная для нас. — *В.Л.*); это было очень большим шагом вперёд и потребовало столь глубоких теоретико-функциональных средств, что Рамануджан самостоятельно не смог бы их, конечно, найти. Наконец выявилась полная теорема. Но преодоление одной последней трудности было бы, вероятно, невозможно без ещё одного вклада Рамануджана, на этот раз исключительно характерного для него. Мало того, что аналитические подходы к теореме были чрезвычайно трудными, она оказалась забаррикадированной неразрешимыми сложностями чисто формального характера. Функция $\psi_q(n)$ (в состав которой входит приведённое выше ключевое выражение. — *В.Л.*) представляет собой важнейший элемент формулы; между многими асимптотически эквивалентными формами этой функции важно было выбрать единственно правильную. Если это не сделано, то окончательный результат вообще не может возникнуть; а для этого надо было догадаться, что является заслугой Рамануджана, ввести $-\frac{1}{24}$ (не говоря уже о дифференцировании по n [1]. Такую догадку нельзя назвать иначе как гениальной. Во всём этом есть что-то почти сверхъестественное. Если бы мы только *знали*, что существует формула с ошибкой $O(1)$, то, может быть, логика вещей привела бы нас постепенно, шаг за шагом, к истинному виду ψ_q. Но почему Рамануджан был так уверен, что такая формула *существует*? Трудно поверить, что это можно объяснить глубиной его проникновения в *теоретическую* сущность вопроса. Не видно также, какие числовые данные могли его убедить в справедливости столь сильного утверждения. Да и вообще, пока неизвестна точная форма ψ_q, *никакие* числовые данные не могут навести на подобную мысль. Из этой дилеммы нет выхода, мы вынуждены остановиться на предположении, что это была искра гениальной интуиции. Открытие этой теоремы есть результат исключительно удачного сотрудничества двух людей с очень разнородными талантами (Харди и Рамануджана. — *В.Л.*), сотрудничества, в которое каждый из них внёс всё самое лучшее, чем он обладал. Гению Рамануджана представился достойный случай показать себя».

Этот краткий обзор математических творений Рамануджана не даёт, конечно, сколько-нибудь полной картины его редкого, можно даже сказать уникального образа мышления — для этого нужна специальная монография, адресованная математикам-профессионалам; но и предложенный читателю беглый очерк и оценки крупных математиков нашего времени дают, как мы надеемся, первое впечатление о силе и своеобразии этого самобытного таланта[2].

---

[1] Кроме замены n на $n-\frac{1}{24}$, Рамануджан предложил ещё продифференцировать ключевое выражение по n.

[2] Подробный список литературы (на английском языке), использованной в настоящей брошюре, приведён в статье автора, опубликованной в сборнике «Историко-математические исследования». Том XIII. М., Физматгиз, 1960.

СОДЕРЖАНИЕ

Л е в и н Виктор Иосифович

РАМАНУДЖАН — МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ГЕНИЙ ИНДИИ

Редактор *В. Ю. Иваницкий*
Художник *А. Г. Ординарцев*
Худож. редактор *Е. Е. Соколов*
Техн. редактор *Е. М. Лопухова*
Корректор *В. И. Казакова*

OCR обработка и конвертация в TEX — *E.G.A.* (ega-math.narod.ru)

А 02711. Сдано в набор 6.X 1967 г. Подписано к печати 5.I 1968 г. Формат бумаги $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага типографская № 3. Бум. л. 1,5. Печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 2,66. Тираж 51 000 экз. Издательство «Знание». Москва, Центр, Новая пл., д. 3/4. Заказ 3641. Типография изд-ва «Знание». Москва, Центр, Новая пл., д. 3/4.
Цена 9 коп.

СЕРИЯ 1968

Новое в жизни, науке, технике

математика кибернетика

1

В. И. ЛЕВИН

Рамануджан