

Воспоминания о
Феликсе Александровиче Березине —
основоположнике суперматематики

Составители Е. Г. Карпель и Р. А. Минлос
Под редакцией Д. А. Лейтеса и И. В. Тютина

Москва
Издательство МЦНМО
2009



УДК 51(092)
ББК 22.1г
В77

В77 Воспоминания о Феликсе Александровиче Березине — основоположнике суперматематики / Составители Е. Г. Карпель и Р. А. Минлос, под ред. Д. А. Лейтеса и И. В. Тютина. — М.: МЦНМО, 2009. — 384 с.

ISBN 978-94057-458-3

В книге собраны воспоминания о Ф. А. Березине — выдающемся ученом, оставившем свои работы в различных областях математики и физики. Наиболее важные его результаты относятся к суперматематике — разделу математики, чрезвычайно важному для современной теоретической физики.

В сборнике опубликованы как научные статьи, в которых рассказывается об открытиях Ф. А. Березина, так и воспоминания родных, коллег, учеников.

Для широкого круга читателей.

ББК 22.1г

ОГЛАВЛЕНИЕ

Два слова об этой книге (вместо предисловия)	5
--	---

I. О науке

Феликс Александрович Березин (краткий очерк научной жизни) <i>Р. А. Минлос</i>	13
Суперматематика и физика <i>А. С. Шварц</i>	34
О Ф. А. Березине и его работе по представлению групп токов <i>А. Вершик</i>	40
Квантование по Березину <i>В. П. Паламодов</i>	50
«Метод вторичного квантования» Березина. Взгляд 40 лет спустя <i>Ю. А. Неретин</i>	59
От интеграла Березина к формализму Баталина — Вилковыского: взгляд математика <i>Андрей Лосев</i>	112
Псевдоклассическое действие Березина — Маринова <i>Д. Гитман</i>	139

II. Семейные воспоминания

Ф. А. Березин, мой папа <i>Н. Березина</i>	151
Последний путь <i>Е. Г. Карпель</i>	153

III. Воспоминания друзей, коллег и учеников

Об Алике (Феликсе Александровиче) Березине <i>В. М. Тихомиров</i>	229
О близком друге <i>Н. Д. Введенская</i>	241

Березин — это был супер!	250
<i>В. П. Маслов</i>	
Мой вечно молодой старший друг Алик Березин	252
<i>А. Кириллов</i>	
Об Алике Березине	255
<i>А. М. Вершик</i>	
Об Алике Березине и о его времени	260
<i>Виктор Паламонов</i>	
Подарок судьбы	268
<i>Михаил Шубин</i>	
О моем учителе Феликсе Александровиче Березине	273
<i>В. Ф. Молчанов</i>	
Ничто человеческое...	279
<i>Григорий Литвинов</i>	
Мои встречи с Феликсом Александровичем Березиным на фоне нашей тогдашней жизни	282
<i>Д. Гитман</i>	
Устные рассказы	302
<i>Дмитрий Лейтес</i>	
Семь историй	310
<i>С. Конштейн</i>	

IV. На семинаре Березина

О семинаре Ф. А. Березина	317
<i>Борис Воронов, Дмитрий Гитман, Семён Конштейн, Игорь Тютин, Анатолий Шабад</i>	

V. Приложения

Материалы из архива Ф. А. Березина	357
Некрологи	368
Список печатных работ Ф. А. Березина	377

ДВА СЛОВА ОБ ЭТОЙ КНИГЕ

(вместо предисловия)

В те времена — времена меньшей
свободы, но большей независимости...

А. Дюма. Три мушкетёра

Эти воспоминания объединили и людей близких Березину, хорошо его знавших, и встречавших его лишь иногда, и тех, кто не знал Березина при его жизни. Это объединение произошло на почве любви к нему и огромного уважения к его человеческим качествам, и к его выдающимся научным способностям и научным результатам.

Мы уверены, что научное наследие Березина будет находить всё новые применения как в физике, так и в математике!

Эта книга — дань нашего уважения и памяти к выдающемуся учёному и замечательному человеку.

* * *

Сейчас, когда цензуры снова пока уже нет, нами управляют воспоминания об иных временах. Поэтому появление в печати (с третьей попытки) воспоминаний вдовы Ф. А. Березина на родном языке не может не радовать.

Книгу предваряет обзорная статья Минлоса. Блестяще написанная более пятнадцати лет назад, она выдержала испытание временем, неоднократно опубликована на английском и французском языках, и мы рады познакомить, наконец, читателя с оригиналом.

Читателю, которому интересно новое в математической части, мы особо рекомендуем статьи А. Лосева и Ю. Неретина, см. также: www.th.itep.ru/~neretin.

Работы, отмеченные «*», добавлены редакторами русской версии. Список этих работ помещён в конце предисловий.

Д. Лейтес, И. Тютин

* * *

Так уж получилось, что первое издание книги о Феликсе Александровиче Березине было осуществлено в 2007 г. сингапурским издательством «World Scientific» на английском языке [1]. Я был составителем этой книги и её редактором. Данное русское издание представляет собой значительно расширенный и существенно переработанный вариант, куда вошли многие материалы, которых просто не существовало в 2007 году.

История английского издания такова. Осенью 2005 года Аркадий Вайнштейн мимоходом упомянул о том, что его друг Дмитрий Гитман прислал ему по электронной почте воспоминания вдовы Березина, Елены Григорьевны Карпель. Без сомнения, каждый студент и каждый физик-теоретик, занимающийся современной теорией поля или теорией струн, знает об интеграле Березина по грассманновым переменным. Интегрирование по Березину составляет основу нынешнего подхода к теориям с фермионами и квантования калибровочных теорий (введение духов Фаддеева—Попова). Без использования интеграла Березина исследования в области теории струн и суперсимметрии — центральных темх современной теоретической физики высоких энергий — были бы чрезвычайно затруднены, если вообще возможны ¹⁾.

К стыду своему должен признаться, что в то время почти ничего не знал о Березине. Лично встречался с ним всего пару раз на семинарах в Москве в конце 70-х годов прошлого века. Ещё я слышал, что в 1980 году произошел несчастный случай, в результате которого он погиб в возрасте 49 лет. У меня почему-то сложилось впечатление, что интегрирование по Березину — изобретение «глубокой древности». Уверен, что то же самое думают многие молодые теоретики, пришедшие в физику в 1980-х, 1990-х годах и позже.

Аркадий сказал, что воспоминания Елены Карпель очень трогательны. К тому же меня всегда интересовала история физики высоких энергий. Мне захотелось немедленно прочесть эти воспоминания самому. Я написал Гитману, и он любезно прислал мне эссе Елены Григорьевны.

Я прочел его сразу, проглотил на одном дыхании. Эти воспоминания оказались не только трогательным свидетельством давно

¹⁾ Не говоря уже о результатах в физике твердого тела, см. книгу К. Ефетова «Суперсимметрия беспорядка и хаоса» [2*]. — *Прим. ред. Д.Л.*

ушедших дней, они ещё было мастерски написаны. Я был захвачен глубиной и литературной зрелостью этого сочинения, рассказывающего о жизни и смерти замечательного человека, выдающегося математика, чьи идеи опередили свое время и во многих случаях не были в полной мере оценены современниками. Только позже выяснилось, что они определили развитие целых областей математической физики и сыграли ключевую роль в создании современного аппарата физики высоких энергий и теории струн.

Что поразило меня больше всего — так это очевидные параллели между жизнью и судьбой Феликса Березина и жизнью и судьбой других советских ученых, над чьими биографиями мне довелось работать в прошлом. Книга о Феликсе Березине [1] — моя четвёртая книга такого типа. В 2000 году я опубликовал две книги, посвящённые Юрию Гольфанду [2], физику-теоретику, который в самом начале 1970-х годов, вместе со своим студентом Евгением Лихтманом, открыл суперсимметрию и построил первую суперсимметричную четырехмерную теорию поля, суперсимметричную электродинамику. За два года до ²⁾ Весса и Зумино! Эти книги тоже вышли в издательстве «World Scientific». Позднее, в 2005 году, в том же издательстве у меня вышла книга, посвящённая памяти Беллы Субботовской [3]. Она была первопроходцем в области математики сложных систем, но в конце 1970-х годов оставила научную карьеру ради благородного дела: Белла Субботовская основала в Москве «Народный университет» для всех тех, кого не приняли в МГУ.

Эти три человека, о которых рассказывают мои книги, были современниками, но всё остальное у них разнилось: возраст, пол, семейное положение, черты характера, интересы, области науки, в которых они работали... И тем не менее, они разделили общую судьбу: интеллектуальный потенциал, растраченный во многом впустую, невостребованный талант, разбитые ожидания, повседневное унижение... Их жизни были поломаны, точно так же как и жизни многих других людей, чья единственная «вина» заключалась в том, что они родились в «не той» стране и в неудачное время. Официально они должны были бы наслаждаться преимуществами «реального соци-

²⁾М. Шифман — физик. Он даже не представляет себе, что кто-то может не знать, что только после доклада Весса и Зумино в 1974 году, в котором был введён термин «суперсимметрия» и впервые в н я т н о и о с о з н а н н о показаны некоторые из тех чудес, которые дают нам суперсимметрии, и начался «супербум». — *Прим. ред. Д.Л.*

ализма» по-советски. А вместо этого? Сколько открытий остались несделанными? Сколько добрых дел? Мы уже никогда об этом не узнаем.

История, рассказанная Еленой Карпель, стала моей личной болью, хотя, по сути дела, лично Феликса Березина я не знал. Мне захотелось узнать о нём больше. Вскоре мое расследование привело меня к группе математиков (Р. Минлос, М. Шубин, А. Вершик), которые в 1996 году издали (вместе с покойным Р. Добрушиным) в Американском математическом обществе сборник [4] памяти Березина. Помимо математических текстов этот сборник содержал воспоминания некоторых друзей и коллег Березина. Американское математическое общество любезно согласилось на включение этих статей в [1]. Я написал Мише Шубину, Анатолию Вершику и Никите Введенской с предложением принять участие в намечаемой книге. Они немедленно и с энтузиазмом ответили на моё письмо, пообещав безусловную поддержку. Профессор Вершик написал, специально для [1], новый очерк о Феликсе Березине. Кроме того, от него я узнал о публикации «Березинского сборника» [5] в Петербурге.

В ноябре 2005 года мне удалось связаться с Еленой Карпель, а летом 2006 я встретился с ней в Ла-Рошели, французском городе, где она сейчас проживает. В 1991 году она и ее дочь Наташа Березина покинули Советский Союз, чтобы начать новую жизнь во Франции. Она рассказала мне о прошедших с тех пор пятнадцати драматических годах, полных борьбы за выживание в незнакомой и зачастую враждебной среде. Будучи совершенно поразительной сама по себе, эта «современная» история вряд ли уместна в данной книге. Кто знает, может, когда-нибудь в будущем она будет написана и опубликована...

Очерк Карпель о Березине составляет сердце этой книги. Первым делом она пыталась его опубликовать по-русски в России. По разным причинам эти попытки провалились, как и ее последующая попытка опубликовать французский перевод во Франции. Таким образом, английский перевод, выполненный Романом Ковалёвым, представляет собой первое издание.

Елена Григорьевна связала меня с Виктором Паламодовым, который в настоящее время проживает в Германии, и, несколько позже, с Дмитрием Лейтесом, работающим в Швеции. Они приняли этот проект близко к сердцу и прислали свои воспоминания. Дело не ограничилось этими очерками. Они прислали много замечаний

и предложений по поводу возможных усовершенствований. Некоторые из их предложений мне удалось осуществить.

С первого дня я был в постоянном контакте с Дмитрием Гитманом. Его рассказ о нескольких встречах с Феликсом Березиным — очень ясный, хотя и грустный, набросок нашей жизни в те годы. Он прекрасно дополняет воспоминания Карпель.

Английская версия книги состоит из трёх частей³⁾. Часть I содержит две статьи (Андрея Лосева и Роберта Минлоса), дающих обзор научного вклада Феликса Березина. Они показывают открытия Березина и его новаторские идеи в математической физике в правильной перспективе — в перспективе исследователя сегодняшнего дня. Часть II представляет воспоминания Елены Карпель, вдовы Ф. А. Березина, его дочери, коллег, друзей и учеников Березина. Наконец, в части III опубликован английский перевод двух документов из березинского архива: письмо ректору МГУ и письмо в Правление Московского математического общества.

Литература

- [1] Felix Berezin: Life and Death of the Mastermind of Supermathematics / M. Shifman (Ed.). Singapore: World Scientific, 2007.
- [2] The Many Faces of the Superworld / M. Shifman (Ed.). Singapore: World Scientific, 2000; The Supersymmetric World / G. Kane and M. Shifman (Eds.). Singapore: World Scientific, 2000.
- [3] You Failed Your Math Test, Comrade Einstein / M. Shifman (Ed.). Singapore: World Scientific, 2005.
- [4] F. A. Berezin Memorial Volume // AMS Transl. Series 2. Advances in the Mathematical Sciences, Vol. 175, 177 / R. L. Dobrushin, R. A. Minlos, M. A. Shubin and A. M. Vershik (Eds.). Providence, RI: AMS, 1996.
- [5] Теория представлений и динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы / Под ред. А. М. Вершика. Санкт-Петербург: Санкт-Петербургское отделение математического института им. А. В. Стеклова, 2006. (Записки научных семинаров ПОМИ, т. 331.)

М. Шифман⁴⁾

³⁾Настоящее русское издание заметно расширено. — *Прим. ред. Д.Л.*

⁴⁾Институт теоретической физики, Университет Миннесоты, Миннеаполис, Миннесота, США

Список работ, добавленных редакторами

- [1*] Quantum fields and strings: a course for mathematicians. Vol. 1, 2. Deligne P., Etingof P., Freed D., Jeffrey L., Kazhdan D., Morgan J., Morrison D., Witten E. (eds.) Material from the Special Year on Quantum Field Theory held at the Institute for Advanced Study. Princeton, NJ. 1996–1997. AMS and IAS. 1999.
- [2*] *Efetov K.* Supersymmetry in disorder and chaos. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [3*] *Зупник Б.М., Пак Д.Г.* Суперполевая формулировка простейших трёхмерных калибровочных теорий и конформных супергравитаций // ТМФ. 1988. Т. 77, № 1. С. 97–106.
- [4*] Семинар по суперсимметриям / Под ред. Д. Лейтеса. Готовится к печати. М.: МЦНМО, 2009.

Ч А С Т Ь І

О НАУКЕ

ФЕЛИКС АЛЕКСАНДРОВИЧ БЕРЕЗИН

(краткий очерк научной жизни)¹⁾

Р. А. Минлос

§ 1. Что он успел сделать в науке

*Его труды крупным планом, современное понимание
математической физики*

Ф. Березин за свою сравнительно недолгую жизнь (он погиб от несчастного случая, не достигнув 50 лет) успел сделать в математике и математической физике очень многое. Он не только оставил существенный след в некоторых ранее существовавших областях математики и физики: теории представлений групп, спектральной теории операторов, квантовой механике, статистической физике, конструктивной квантовой теории поля, но и положил начало ряду новых концепций, методов и теорий. Среди них — общий подход к проблеме квантования, построение формализма вторичного квантования в терминах функционального интегрирования, который перерос затем в так называемое исчисление символов (некая предтеча теории псевдодифференциальных операторов), и, наконец, (и это было самым важным и издавна взлелеянным им трудом) теория суперсимметрий и супермногообразий — то, что в математическом обиходе называется суперматематикой. Ниже мы скажем обо всём этом подробнее.

Здесь же нам хочется подчеркнуть, что, быть может, самым ценным и важным в математической жизни Ф. Березина были не те

¹⁾При составлении этого очерка я воспользовался материалами, которые мне предоставили несколько лет назад А. А. Кириллов, Д. А. Лейтес, В. Н. Сушко, М. А. Шубин. Некоторые факты я узнал от Н. Д. Введенской. Всем им я за это признателен.

или иные конкретные его достижения, а вся упорная направленность его интересов, главным стержнем которых являлась математическая физика. Он был одним из той немногочисленной когда-то группы людей, чьими усилиями математическая физика приобрела свой нынешний вид. Собственно, это словосочетание — математическая физика — до конца 1950-х годов, по крайней мере в России, ассоциировалось преимущественно с изучением специальных дифференциальных уравнений, возникших в физических теориях (волновое уравнение, уравнение теплопроводности и т. д.). Ф. Березин одним из первых заметил, что старые меха ещё не ветхи для молодого вина и название «математическая физика» следует применять к гораздо более обширному кругу математических проблем — ко всем теориям и структурам в математике, которые возникают из стремления ясно осмыслить фундаментальные физические теории (квантовую физику, кинетическую теорию, статистическую физику, теорию тяготения).

Сейчас математическая физика — именно в таком её широком понимании — очень разрослась и привлекла к себе множество математиков (и даже физиков), а лет 45–50 назад, в самом начале деятельности Ф. Березина, физики в большинстве своём относились ко всем этим начинаниям с плохо скрываемой усмешкой, а математики — с нескрываемым равнодушием. И нужно было иметь много мужества и упорства для того, чтобы, видя это непонимание и втайне страдая от него, оставаться верным своим замыслам.

Вот так — несколькими крупными мазками — мы обозначили главные пружины математических занятий Ф. Березина.

§ 2. Молодые годы

Семья, школа, университет, аспирантура, которой не было

Алик (Феликс Александрович) Березин родился 25 апреля 1931 года в Москве, в типичной интеллигентной семье того времени. Его отец по профессии экономист, мать — врач. Родители Алика разошлись очень рано, и воспитывался он матерью и её родителями. В 1948 г., после окончания школы, он поступил на первый курс механико-математического факультета Московского университета.

Его интерес к математике возник ещё задолго до этого: начиная с восьмого класса школы он участвует в школьных математических

олимпиадах — очень увлекательных соревнованиях по решению трудных задач, которые в то время молодые энтузиасты (студенты и аспиранты) устраивали каждой весной на механико-математическом факультете МГУ. Эти же энтузиасты в течение всего года вели для школьников нечто вроде протосеминаров (они назывались математическими кружками), где излагались изящные теоремы и даже фрагменты сложных теорий, доступные школьникам, и решались трудные задачи. Алик Березин посещал один из таких кружков, руководимых Е. Б. Дынкиным, который в то время был аспирантом.

На первых курсах Алик также работает в студенческом семинаре Е. Б. Дынкина, возникшем, по существу, из бывшего школьного кружка. В этом семинаре было две основных тематики — вероятностная и алгебраическая (в соответствии с двумя математическими ипостасями Е. Б. Дынкина в те времена). Ф. Березину ближе была алгебра, и он на всю жизнь получил крепкую алгебраическую прививку, которая прослеживается во всех его последующих работах.

В школьном кружке, а потом и на семинаре Е. Б. Дынкина, у Березина завязываются ранние знакомства со многими молодыми математиками, учившимися в то время на механико-математическом факультете (Н. Введенская, Р. Добрушин, Ф. Карпелевич, С. Каменомостская, Р. Минлос, И. Шапиро-Пятецкий, А. Юшкевич, В. Успенский). Эти знакомства, многие из которых продолжались до самой смерти, были в дальнейшем очень существенны для него.

На старших курсах Алик Березин начинает посещать известный семинар И. М. Гельфанда и на долгое время подпадает под сильное влияние последнего. На семинаре И. М. Гельфанда им была сделана его первая крупная работа по теории представлений групп (см. ниже).

В 1953 году Березин оканчивает механико-математический факультет. Несмотря на то что к этому времени он уже зарекомендовал себя как талантливый молодой математик (по-видимому, он был самым сильным на своём курсе), ему отказывают в приёме в аспирантуру: как известно, в последние годы жизни Сталина государственным образом насаждался антисемитизм, и Березин, мать которого была еврейкой, почти автоматически лишался права на такого рода привилегии (к этому времени евреев уже почти не принимали в МГУ даже студентами). Березин три года преподаёт матема-

тику в одной из московских школ, продолжает посещать семинар И. М. Гельфанда и много работает по теории представлений.

В 1956 году, с началом хрущёвской либерализации, обстановка на механико-математическом факультете несколько изменилась к лучшему и И. Г. Петровский, бывший в то время ректором Московского университета, по настоянию И. М. Гельфанда зачисляет Ф. Березина на работу на кафедру теории функций и функционального анализа. Березину было тогда 25 лет, и на этой кафедре он проработал до конца своей жизни.

§ 3. Первый период работы в университете

Кафедра в 1950–60-е годы, как начиналась математическая физика, работы первого периода, Березин — педагог

Первые годы его работы проходили на фоне совершенно удивительного интеллектуального и духовного взлёта, который переживал механико-математический факультет в конце 1950-х и в шестидесятые годы. Особенно это проявилось на кафедре, где работал Алик Березин. До середины 1950-х годов эта кафедра, много лет возглавляемая замечательным, по-детски чистым человеком Д. Е. Меньшовым, в основном состояла из специалистов по теории функций вещественного или комплексного переменного (Д. Е. Меньшов, Н. К. Бари, А. И. Маркушевич). Эта группа с течением лет также пополнялась хорошими специалистами (П. Л. Ульянов, Б. В. Шабат, А. Г. Витушкин, А. А. Гончар, Е. Долженко и их ученики).

Но наиболее интенсивно возрастала функционально-аналитическая часть этой кафедры, долгие годы курируемая И. М. Гельфандом. Одновременно с Березиным на кафедру был зачислен Р. Минлос, чуть позже туда был приглашён Г. Е. Шилов, а затем и его ученик А. Г. Костюченко. Через несколько лет — к середине шестидесятых годов — на кафедре работала уже целая плеяда блестящих учеников И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова (А. А. Кириллов, В. П. Паламонов, Г. А. Горин и др.). В начале шестидесятых годов на кафедру был приглашён профессор Б. М. Левитан, несколько лет там работали С. В. Фомин и В. М. Тихомиров.

Таким образом, благодаря усилиям И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова, при поддержке И. Г. Петровского на кафедре возник совершенно первоклассный коллектив аналитиков, подобный которому

вряд ли можно было найти в каком-либо из университетов мира. Этот коллектив, изредка пополняемый хорошими специалистами и в последующие годы, просуществовал почти в неизменном виде до начала девяностых годов, когда исподволь длившийся распад мехмата (начавшийся в конце шестидесятых годов при декане П. М. Огибалове) из своей скрытой фазы перешёл в явную. Конечно, кафедра за это время понесла невосполнимые потери: смерть Г. Е. Шилова в 1975 году, смерть Березина в 1980 году. Да и И. М. Гельфанд фактически отошёл от кафедральных дел к концу 1960-х годов.

В 1950—1960-е годы интенсивная научная жизнь, развернувшаяся на кафедре, приток молодых талантливых студентов и аспирантов создавали радостный мажорный фон для научных занятий. В 1957 году Ф. Березин защищает кандидатскую диссертацию, которая содержала упомянутую выше работу об операторах Лапласа на полупростых группах Ли [1]. В ней заключался замечательный результат — описание всех неприводимых бесконечномерных представлений комплексных полупростых групп Ли в банаховых пространствах. На современном языке теорема Березина может быть сформулирована так: всякое неприводимое представление группы G изоморфно подфактору элементарного представления (т. е. представления, индуцированного одномерным характером борелевской подгруппы).

Глубина этого результата видна из того обстоятельства, что следующий шаг в этом направлении был сделан лишь спустя 20 лет. А именно, Д. П. Желобенко и М. Дюфло получили явную классификацию всех неприводимых представлений, указав, какие из подфакторов элементарных представлений эквивалентны друг другу.

В 1956 году Ф. А. Березин по совету И. М. Гельфанда углубляется в изучение квантовой теории поля и с этого момента и начинаются его занятия математической физикой.

В первый период этих занятий — со второй половины 1950-х годов и до середины 1960-х годов — Ф. Березин много размышлял над вопросами спектральной теории и, в частности, теории рассеяния для многочастичного оператора Шрёдингера. Полученных им самим окончательных результатов в этом направлении немного — несколько работ, в которых разбираются те или иные частные ситуации (см. [2]—[5]), однако его наблюдения, соображения и идеи, возникшие в результате этих занятий, оказали безусловное влияние на ряд математиков и физиков, общавшихся с ним, и, в конечном

итоге, немало послужили тому пониманию картины спектра и рассеяния в квантовой задаче N тел, которым мы ныне обладаем.

Кроме Ф. Березина в это же время ещё несколько молодых математиков в России начинают заниматься сходными проблемами (Г. М. Жислин, В. П. Маслов, Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддеев), и создаётся зародыш того будущего движения математиков в математическую физику, о котором говорилось выше. Члены этой группы в то время часто общались друг с другом, и Алик Березин по праву считался их лидером. Особенно плодотворным было сотрудничество Ф. Березина с Л. Д. Фаддеевым, на которого Березин, по-видимому, оказал в то время немалое влияние. В дальнейшем — уже в середине шестидесятых годов — научные интересы у всех этих математиков разошлись, несколько увял и дух прежнего товарищества, но воспоминания о той поре, видимо, у многих ещё живы.

В самом начале 1960-х годов Ф. Березин выполнил свою работу по формализму вторичного квантования, изложенную позднее в его известной монографии «Метод вторичного квантования» [6]. Этот формализм, издавна используемый физиками, основан на представлении линейных операторов, действующих в фоковском пространстве, в виде функций (чаще всего полиномов) от некоторых специальных образующих в алгебре всех таких операторов — так называемых операторов рождения и уничтожения.

Ф. Березин придал этому исчислению элегантную форму. Он так сопоставил каждому такому полиному некоторый полиномиальный функционал на алгебре функций в случае симметрического фоковского пространства или элемент некоторой грассмановой алгебры в случае антисимметрического фоковского пространства, что при действиях с операторами (перемножении, сопряжении, преобразованиях, возникающих от канонической замены исходных образующих, и т. д.) соответствующие функционалы преобразуются тем или иным привычным математику способом: дифференцированием, перемножением, заменой переменных, континуальным интегрированием. Этот метод применялся самим Березиным и его учениками при изучении некоторых одномерных моделей квантовой теории поля: модели Тирринга (как для случая нулевой, так и для случая положительной массы), нелинейного вторично-квантованного уравнения Шрёдингера и др. (см. [7]–[9]). Следует отметить, что эти работы в значительной мере повлияли на появление и развитие нынешней конструктивной теории поля.

Работа по вторичному квантованию составила содержание докторской диссертации Ф. Березина, которую он защитил на механико-математическом факультете в 1965 году.

Занятия Ф. Березина вторичным квантованием имели ряд важных научных последствий. Во-первых, благодаря им вновь пробудился интерес к старой задаче об описании представлений так называемых коммутационных (или антикоммутационных) соотношений (см. по этому поводу обзор В. Я. Голодца в УМН, [10]).

Другая тема, родившаяся отчасти из занятий вторичным квантованием и развивавшаяся Ф. Березиным в течение многих лет, — общее осмысление процедуры квантования. Хотя этими вопросами Ф. Березин занимался с середины 1960-х годов, наиболее полно его концепция выражена в цикле статей 1973–1976 гг. (см. [11]–[13]). Согласно основной идее этих работ квантование имеет следующий точный математический смысл: алгебра квантовых наблюдаемых является деформацией алгебры классических наблюдаемых, причём параметром деформации служит постоянная Планка, а направление деформации (первая производная по параметру в нуле) задаётся скобкой Пуассона. В случае плоского фазового пространства эта точка зрения эквивалентна обычной. В остальных случаях она приводит к новой содержательной теории. В частности, в статьях Ф. А. Березина в Известиях АН СССР [11], [13] рассмотрен случай, когда фазовым пространством служит однородная симметрическая область в комплексном пространстве. Им был обнаружен новый интересный эффект: множество возможных значений постоянной Планка дискретно и ограничено сверху.

Ещё раньше, во второй половине 1960-х годов, в связи со своими занятиями вторичным квантованием Ф. Березин публикует работу [14], в которой изучаются представления операторов в гильбертовом пространстве с помощью различных систем образующих в алгебре таких операторов (pq -символы, qp -символы, символы Вейля, виковский символ, используемый обычно во вторичном квантовании). Отметим, что во многих своих аспектах эта работа близка к возникшей в это же время теории псевдодифференциальных операторов, играющей теперь важную роль в математической физике. Таким образом, в работах Ф. Березина независимо появились многие важные идеи этой теории, хотя, к сожалению, значение работ Ф. Березина в этом плане было далеко не сразу осознано.

Примером конкретной деятельности Ф. Березина в этой области, приведшей его к открытию красивых и важных математических объектов, являются размышления по поводу неравенства Фейнмана:

$$\mathrm{Tr} e^{-t\hat{H}} < (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-tH(p,q)} dp dq, \quad (1)$$

где $H(p, q) = p^2 + V(q)$, (где $V(q)$ — потенциал), а $\hat{H} = -\Delta + V(q)$ — соответствующий квантовый гамильтониан — оператор Шрёдингера, действующий в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Ф. Березин пытался понять, для каких более общих гамильтонианов $\hat{H}$ верно это неравенство. Стало ясно, что ответ существенно зависит от выбранного квантования, т. е. соответствия между H и $\hat{H}$. В конце концов оказалось, что для любых операторов верны следующие замечательные неравенства:

$$(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-tH_W(p,q)} dp dq \leq \mathrm{Tr} e^{-t\hat{H}} < (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-tH_{aW}(p,q)} dp dq, \quad (2)$$

где $H_W(p, q)$ — виковский символ оператора $\hat{H}$, $H_{aW}(p, q)$ — так называемый антивиковский символ этого оператора, впервые введённый и рассмотренный Ф. Березиным в связи с неравенством (2). В работе [15] было доказано, что экспоненту e^{-t} в (2) можно заменить любой выпуклой вниз функцией. В дальнейшем неравенство (2) и указанное его обобщение было распространено Ф. Березиным на тот случай, когда вместо $H_W(p, q)$ и $H_{aW}(p, q)$ рассматриваются введённые Ф. Березиным в [16] ковариантный и контравариантный символы, определяемые с помощью переполненной системы векторов в гильбертовом пространстве. Абстрактная схема введения символов в [16] в дальнейшем использовалась Ф. Березиным при построении квантования на кэлеровых многообразиях. Кроме того, уже в работах [15], [16] неравенства типа (2) были использованы Ф. Березиным для нахождения различных спектральных асимптотик оператора $\hat{H}$ при достаточно больших значениях спектрального параметра, а также квазиклассических асимптотик. В частности, в работе [15] квазиклассическая асимптотика функции распределения собственных значений впервые была строго доказана для достаточно общих гамильтонианов.

Таковы, в основном, темы научных занятий Ф. Березина в 1950–60-е годы. Мы ещё продолжим обзор его дальнейших научных достижений. Однако их роль в математической физике того времени становится полностью понятной на фоне педагогической, в широком смысле этого слова, деятельности Ф. Березина. Он терпеливо прививал многим физикам, общавшимся с ним, вкус и любовь к математическому мышлению, к изяществу абстрактных умозрений и учил их применять всё это в конкретных задачах. Березин превосходно усвоил язык и несколько вольный (как было как-то сказано, галопирующий) стиль мышления физиков, легко общался с ними в привычной им манере, давая этим хороший урок своим коллегам и ученикам. Он с большим удовольствием читал физикам курсы лекций по математике. Гораздо большего терпения и труда требовалось для того, чтобы обратить математиков к физике, преодолеть их глубоко укоренившееся представление о ней как о чём-то, лежащем по ту сторону разумения.

На механико-математическом факультете Ф. Березин более двадцати лет руководил научным семинаром по математической физике и функциональному анализу (иногда один, иногда совместно с кем-нибудь ещё). Этот семинар был хорошо известен среди молодых физиков и математиков, в нём были воспитаны несколько хороших учёных и было сделано немало замечательных работ. Он вёл также в разные годы и учебные семинары по теории представлений и функциональному анализу, читал факультативные курсы по квантовой механике, статистической физике, квантовой теории поля, континуальным интегралам. Его курсы по статистической физике²⁾ и квантовой механике были изданы ротапринтным изданием. Последний из них незадолго до своей смерти он собирался усовершенствовать — эту работу уже после его гибели проделал М. А. Шубин, опираясь на оставшиеся заметки самого Ф. Березина (см. книгу [17]).

Березин был очень склонен к обсуждению математических вопросов со своими учениками, коллегами и друзьями; у него много совместных работ: его соавторами были в разные годы И. М. Гельфанд, В. Л. Голо, Р. И. Карпелевич, Г. И. Кац, Д. А. Лейтес, М. С. Маринов, А. М. Переломов, Г. П. Похил, В. С. Ретах, Я. Г. Синай, Л. Д. Фаддеев, И. И. Шапиро-Пятецкий, М. А. Шубин, В. М. Финкельберг.

²⁾См. Ф. А. Березин «Лекции по статистической физике», М.: МЦНМО, 2007.

§ 4. Последний период

Расцвет математической физики, все расходятся по своим углам, суперматематика, ещё некоторые темы

В течение шестидесятих годов круг людей, занимающихся математической физикой, неуклонно расширялся и к началу семидесятих стал уже необозримым. Эти годы — от середины шестидесятих до середины семидесятих годов — поистине героический период в математической физике не только в России, но и во всём мире: продвижения в теории фазовых переходов, в общей теории гиббсовских полей, так называемая марковская революция в конструктивной квантовой теории поля, новые методы в изучении одномерных интегрируемых систем, ренормализационная группа и вильсоновская программа исследования критических явлений, появление суперматематики (о ней речь ещё впереди) — вот лишь несколько наиболее ярких тем того времени. Конечно, такое бурное расширение математической физики и увеличение числа её приверженцев — об этом в пятидесятые годы и помыслить было трудно — привело к естественной дифференциации научных интересов, все постепенно разбились на несколько мало связанных друг с другом групп, объединённых вокруг одного или нескольких мэтров.

Ф. Березин тоже становится одним из таких мэтров и работает уже в довольно узком кругу своих ближайших сотрудников и учеников. Эта изоляция — помимо внешних обстоятельств — объясняется и глубокой внутренней причиной: у Ф. Березина к этому времени вызревает общий план построения суперматематики, которому он посвящает в основном все семидесятые годы. В самом этом замысле содержится некая «сумасшедшинка», психологический барьер, преодоление которого, быть может, и было самым трудным. Этим и определялся очень избранный круг людей, посвящённых Ф. Березиным в его планы.

Пришло теперь время подробнее сказать об этом последнем и крайне важном периоде научной карьеры Ф. Березина. Всё это имело и другие истоки, но Ф. Березин пришёл к суперматематике, отталкиваясь — как и в иных случаях — от своей работы по вторичному квантованию. Формальное исчисление в грассмановой алгебре, которое было развито Ф. Березиным в связи с формализмом вторичного квантования в антисимметричном фокковском пространстве,

навелило его на мысль, что «существует нетривиальный аналог анализа, в котором роль функций выполняют элементы алгебры Грассмана» ([6], [18], [19], [20]), т.е. анализ, в котором на равных правах с коммутирующими переменными выступают антикоммутирующие переменные. Эту идею он настойчиво пропагандировал и тщательно собирал подтверждающие примеры и конструкции.

Первая конструкция — интеграл Березина по антикоммутирующим переменным — до сих пор остаётся самой впечатляющей в новой теории, самой сложной и непонятной по существу, хотя простой по формулировке (см. [6]). С этой конструкцией тесно связана другая, которую тоже открыл Ф. Березин и которая теперь носит его имя — березиниан (аналог якобиана). В [19] Ф. Березин разобрал ключевой случай, когда все переменные нечётные, и в 1971 г. в письме к Г. И. Кацу выписал гипотетическую общую формулу для березиниана, доказанную позже его аспирантом В. Ф. Пахомовым.

Итогом недолгой совместной деятельности Ф. Березина и Г. И. Каца является их работа [20]. Её результаты близки к результатам работ Милнора, Мура и Куиллена 1960-х годов, однако Ф. Березин и Г. И. Кац трактуют алгебры Хопфа как формальные супергруппы Ли и указывают связь между формальными супергруппами Ли и супералгебрами Ли, обобщающую экспоненциальное отображение и теорию Ли. В этой работе впервые сформулирована задача: построить супергруппы Ли в целом, а не формально. Через два года это удалось сделать.

Наконец, последний важный в новой теории объект — супермногообразие — был введён Д. А. Лейтесом в [21] на основе идеи, предложенной Ф. Березиным [22]. Построение супермногообразия осуществляется в духе современной алгебраической геометрии (изучать многообразие с помощью локальных алгебр гладких функций на них), лишь с той разницей, что в случае супермногообразия следует рассматривать супералгебры (см. обзор Ф. Березина [23]).

К середине 1970-х годов пионерские идеи Ф. Березина стали распространяться, и группы суперсимметрий, т.е. супергруппы Ли преобразований «суперпространства-времени» стали появляться в работах физиков. Благодаря трудам Ю. А. Гольфанда и Е. П. Лихтмана, Д. В. Волкова и В. А. Акулова, Весса и Зумино, В. И. Огиевского и многих других стало ясно, что супермногообразия представляют адекватный язык для формулировки единой теории поля. Это связано со следующим фундаментальным предполо-

жением о структуре пространства-времени, бытовавшим в те годы среди физиков: пространство-время — это супермногообразие, точки которого — обычное пространство-время, а группа преобразований — супергруппа, расширяющая группу Пуанкаре с помощью нечётных генераторов.

В последний год своей жизни Ф. Березин начал писать книгу по суперматематике, которую не успел закончить. Книга было написана В. П. Паламоновым, использовавшим заметки и черновики Ф. Березина (см. [24]).

Мы подходим к концу нашего обзора математического творчества Ф. Березина. В заключение хотелось бы коснуться ещё двух тем из математической физики, к которым Ф. Березин время от времени обращался.

Заветной его мечтой, как и многих, было построить непротиворечивую квантовую теорию поля. Не преувеличивая, можно сказать, что почти всю свою деятельность — задачу N тел, квантование, суперанализ и т. д. — он рассматривал как предварительный подступ к этой трудной проблеме. У него были некоторые идеи и соображения, с ней связанные. Так, например, он долго считал, что процедура перенормировок в квантовой теории поля может быть хорошо осмыслена в рамках теории расширений: исходный гамильтониан поля корректно определён лишь как симметрический оператор на некотором подходящем множестве в фоковском пространстве, а истинный гамильтониан получается как его самосопряжённое расширение. Эта идея была хорошо проиллюстрирована в его совместной с Л. Д. Фаддеевым работе о δ -образном взаимодействии двух квантовых частиц [4]. Она же была положена в основу его работы о так называемой модели Ли [25]. При этом Ф. Березин дополнительно воспользовался соображением Гейзенберга о том, что эту модель следует изучать в пространстве с индефинитной метрикой, и таким образом построил гамильтониан модели Ли как расширение симметрического оператора в пространстве с индефинитной метрикой. Многие полагают, что эта схема может оказаться полезной в современных квантовых теориях калибровочных полей, которые с неизбежностью требуют введения индефинитной метрики.

Ф. Березин довольно часто в 1960-е годы обращался к статистической физике. В 1965 году появилась его совместная с Я. Г. Синаем работа о существовании фазового перехода в ферромагнитных

решётчатых системах с финитным взаимодействием [26]. В последующие годы Ф. Березин довольно долго пытался получить явное решение в трёхмерной модели Изинга, снова используя технику второго квантования, которую он очень любил и в душе своей, видимо, считал универсальным средством. Некоторые полученные им в этом направлении результаты опубликованы в [27], [28]. К сожалению, значительные успехи в математической статистической физике в конце 1960—начале 1970-х годов и связанные с ними продвижения в конструктивной квантовой теории поля остались им почти незамеченными. В 1970-е годы он уже совсем не касался этой области.

Таков, в главных чертах, научный путь Ф. А. Березина.

§ 5. Общественное положение Ф. Березина на факультете и его общественная позиция

*Об общем характере научной жизни на мехмате;
Березин — чужой для начальства, партийная власть
на факультете, эпизод с оперой, письмо Р. В. Хохлову*

Научную деятельность Ф. Березина, как, впрочем, и многих других крупных и честных учёных, работавших в России в те годы, трудно понять и оценить вне тех научных и общественных рамок, в которые он был поставлен, и без учёта его собственной общественной позиции.

Выше уже писалось об удивительной научной атмосфере, царившей на механико-математическом факультете в конце пятидесятых и в шестидесятые годы. Этот дух, несмотря на начавшийся, как мы уже упоминали, «зажим» (подробнее см. ниже), не пропадал до начала девяностых годов.

На механико-математическом факультете ежегодно работало несколько десятков научных семинаров по разнообразным проблемам математики и механики и читалось почти столько же факультативных курсов лекций. Задачи и уровни этих семинаров и курсов могли быть различными: большинство из них ориентировалось на дополнительное образование студентов и аспирантов.

Для лучшего понимания здесь следует напомнить традиционную систему образования на механико-математическом факультете: существует программа, состоящая из десяти-двенадцати обязатель-

ных основных лекционных курсов, каждый из которых читается, как правило, два (а порой и три) семестра. Эти курсы сопровождаются обычно так называемыми упражнениями — отдельными занятиями с небольшими группами студентов, на которых решаются различные задачи, иллюстрирующие материал соответствующего курса. Семинары же и короткие факультативные курсы лекций, о которых говорилось выше, носят совершенно добровольный характер и выбираются студентами и аспирантами по собственному усмотрению или по совету их научного руководителя (от студента и аспиранта лишь требуется посетить определённое количество таких семинаров и курсов).

Кроме этих учебных семинаров на механико-математическом факультете всегда работало несколько семинаров повышенного уровня (научно-исследовательские семинары), объединявших уже сложившихся математиков, на которых обсуждались новейшие достижения в данной области математики. Конечно, такие семинары посещались также аспирантами и наиболее сильными студентами и служили для них замечательной школой. Выше мы уже говорили о двух таких семинарах: это знаменитый семинар И. М. Гельфанда и семинар по математической физике и функциональному анализу, руководимый Ф. Березиным (а в конце пятидесятых и в начале шестидесятых также и Р. А. Минлосом).

Другой известный семинар по математической физике, работавший на механико-математическом факультете с 1962 года по 1994 год под руководством Р. Л. Добрушина, В. А. Малышева, Р. А. Минлоса и Я. Г. Синая, традиционно был посвящён вопросам статистической физики. Математической физике (её геометрическим аспектам и теории интегрируемых систем) посвящался много лет работавший на мехмате известный семинар под руководством С. П. Новикова. Все эти семинары, как и ряд других математических семинаров на факультете, имели мировую известность, и многие учёные — как отечественные, так и зарубежные — стремились их посетить и выступить на них с докладом.

Вспоминается тот неповторимый стиль свободного и добросовестного обсуждения всех выступлений, царивший на этих семинарах: каждый стремился понять докладчика до конца, в любой момент его выступление могло быть прервано вопросом, поясняющей репликой или целым потоком импровизированных комментариев кого-нибудь из участников семинара. Отсутствовала малейшая

ть какой-либо субординации — любой участник семинара, имеющий что-либо сказать по обсуждаемому вопросу, мог выйти к доске (иногда даже во время доклада) и быть выслушанным.

При этом на семинарах всегда господствовала атмосфера доброжелательности и уважительного отношения друг к другу. Эти спонтанные и будоражающие дискуссии, приправленные остроумными шутками, были поистине праздником ума и самым, быть может, ценным в этих семинарах. В них часто рождалось новое понимание задачи — порой неожиданное для самого докладчика — и походившие на идеи и вопросы, из которых позднее вырастали серьёзные научные работы. Всё это было очень важно для молодых людей, учило их правильному отношению к научному творчеству и научному общению и вызывало восторг у присутствовавших иностранцев, которым порядком надоел чинный этикет западных семинаров. Один иностранный коллега, долго живший в Москве и посещавший семинар по статистической физике (а также иногда ради любопытства некоторые казённые политические собрания, проходившие время от времени на факультете), шутил, что наши научные семинары напоминают ему политические митинги в Римском университете, а наши политические собрания — научные семинары в Риме.

Другой важной струей в математической жизни Москвы были заседания Московского математического общества — особенно в семидесятые—восемидесятые годы, когда И. М. Гельфанд, бывший в это время Президентом общества, сумел удивительным образом оживить его работу. На каждом заседании общества давался тщательно подготовленный обзор какой-нибудь новой и интересной математической темы. С обзором выступал обычно ведущий специалист в соответствующей области математики. Эти заседания были очень многолюдны — их посещали как совсем молодые, так и давно работающие математики.

Перечисляя те замечательные условия для научной работы, в которых находились преподаватели и студенты мехмата, нельзя не упомянуть богатую университетскую библиотеку и, в частности, её математическую часть, которая до недавнего времени пополнялась всеми математическими изданиями, выходившими внутри страны, и большинством ведущих математических журналов Европы, Америки и Японии.

Однако несмотря на эти прекрасные условия для работы жизнь Ф. Березина на мехмате протекала далеко не радужно. Уже писа-

лось о той дискриминации, которой подвергся Ф. Березин по окончании университета. Хрущёвская оттепель позволила ему снова войти в МГУ и остаться там. Однако Ф. Березин часто сталкивался в своей работе с рядом внешних препятствий, с неким как бы запланированным недоброжелательством, корнящимся в сути устройства того общества, в котором он жил. Эти помехи и это недоброжелательство особенно возросли в семидесятые годы, крайне отравляя ему жизнь.

Чтобы лучше понять весь механизм того подспудного давления, которое испытывал на себе Ф. Березин, следует вкратце описать традиционную схему распределения власти и влияния на механико-математическом факультете, существовавшую до конца советского режима. Часть этой власти всегда находилась у так называемого партийного бюро — органа правящей партии на мехмате. Это бюро состояло, в главной своей части, из творчески бесплодных функционеров, нашедших в партии приют и оправдание своей научной никчёмности. Чаше всего это сочеталось у них со злобностью (и, как правило, с юдофобством), которая была направлена против людей талантливых и научно-активных (особенно если они были евреями).

Разумеется, всякая партийная злокозненность уравнивалась некоторыми правилами и традициями, а также влиянием и властью учёного совета (а иногда и деканата), состоявшего в большинстве своём из настоящих и добросовестных учёных. В период хрущёвской либерализации и в начале постхрущёвского периода, когда партийные боссы пребывали ещё в некоторой растерянности, влияние, так сказать, «учёной партии» на мехмате заметно возросло. Особенно это проявилось во времена деканства Н. В. Ефимова — замечательного и благородного человека. С конца шестидесятых годов, когда к власти пришёл декан П. М. Огибалов (партийный функционер, известный ещё в сталинские времена как участник всяких «чисток» и «разоблачений»), партийная власть объединилась с деканатской и на мехмате надолго наступили мрачные времена. Например, партбюро, согласно существовавшей традиции, могло вмешиваться в жизнь и работу любого сотрудника мехмата с помощью следующих вето: запрет на повышение в должности, запрет на поездку за границу (как по частному, так и по научному приглашению), запрет на приём в аспирантуру учеников неугодного сотрудника, запрет на чтение общих обязательных курсов, запрет на переизбрание в должности на следующий срок.

Последнее вето применялось только в редких, исключительных случаях (один из них и послужил причиной скоропостижной смерти профессора Г. Е. Шилова).

К Ф. Березину в течение его работы на мехмате не раз применялись эти запреты (кроме последнего). Здесь уместно вспомнить один забавный эпизод, в котором я принимал участие вместе с Ф. Березиным.

Стандартный формальный повод для того или иного отказа состоял обычно в том, что данный сотрудник не имеет так называемой общественной нагрузки или плохо её выполняет. Под общественной нагрузкой понималась всегда некая малозначительная и непременно безвозмездная деятельность, как правило, скучная и бессмысленная. Например, политинформация, когда человек должен был пересказывать содержание последних газет студентам (или своим коллегам), или инструктаж по гражданской обороне, на котором из года в год напоминалось, как нужно себя вести, если на тебя свалится атомная бомба, или ещё что-нибудь в этом роде.

Считалось, что каждый сотрудник должен быть наделён какой-нибудь общественной нагрузкой. Конечно, никакой нормальный человек не мог, как правило, относиться к такой скучной белиберде всерьёз и обычно создавал только видимость этого дела (а иногда уклонялся от него совсем). Партбюро в большинстве случаев знало об этом и смотрело на всё это сквозь пальцы, но в любой момент могло «призвать к ответу», поскольку именно в этом и состоял истинный смысл такого установления — держать человека под контролем и напоминать ему о себе. При этом никакая по-настоящему полезная общественная деятельность (работа в редколлегии какого-нибудь журнала, в правлении Математического общества, руководство школьными кружками) в качестве общественной работы не признавалась, если только это не было заранее обговорено с партбюро (мне не раз приходилось слышать фразу: «Какая же это общественная работа, если она ему нравится!?!»).

Так вот, в начале шестидесятых годов, после нашей с Ф. Березиным пятилетней работы на мехмате в должности младших научных сотрудников, на кафедре возник вопрос о повышении нас в должности (до старших научных сотрудников). Партбюро не давало своего согласия, ссылаясь на отсутствие у нас общественной работы. Переговоры с партбюро вёл от нашей кафедры профессор Г. Е. Шилов, который, как заядлый меломан, водил дружбу со сту-

денческой оперной студией при МГУ. И вот он взялся помочь нам и студии: они собирались ставить некую оперу, либретто которой было написано по-белорусски, — нам было предложено перевести его. Мы с Ф. Березиным честно трудились несколько недель, составили недурной перевод [29] (увы, это единственная наша совместная работа) и долго затем вместе с Г. Е. Шиловым подгоняли его под музыку. Студия была довольна, опера давалась несколько раз (на афишах стояли наши имена), но повышения мы в тот раз так и не получили: партбюро отказалось признать всё это общественной работой. Мы оба стали старшими научными сотрудниками лишь два года спустя, когда состав партбюро несколько изменился. В дальнейшем до самой смерти Ф. Березина в должности уже не повышали.

Были затруднения и с учениками Березина, которых отказывались принимать в аспирантуру. Так было, в частности, с Д. А. Лейтесом — его любимым учеником, который был ключевой фигурой в построении суперматематики.

Что касается поездок за границу, то они полностью прекратились после 1975 года, несмотря на нескончаемый поток приглашений, приходивших к нему из разных мест Европы и Америки (этими приглашениями был туго набит один из ящиков его письменного стола, как обнаружилось после его гибели). Поездки, в которых было ему отказано, важны были для него не только профессионально, но, главным образом, психологически: в эти годы к Ф. Березину наконец стало приходить мировое признание его трудов, в котором он давно нуждался.

В середине 1970-х годов Ф. Березин написал письмо новому ректору МГУ Р. В. Хохлову, в котором он подробно описал сложившуюся в то время обстановку на факультете. Дискриминация евреев при приёме в университет и аспирантуру, связанное с этим отстранение многих честных активно работающих в математике преподавателей от участия в ряде существенно важных дел факультета — в приёме вступительных и государственных экзаменов, в чтении основных обязательных курсов, почти полное запрещение заграничных научных командировок для подавляющего большинства преподавателей, ставшие почти правилом спланированные немотивированные «завалы» на защитах кандидатских и докторских диссертаций у евреев и многое другое. Известно, что Р. В. Хохлов собирался принять решительные меры для оздоровления мехмата (этому помешала

его внезапная смерть из-за несчастного случая в горах), и, видимо, письмо Ф. Березина сыграло здесь не последнюю роль.

После смерти Р.В. Хохлова об этом письме стало известно факкультетскому партийному начальству и его недоброжелательство по отношению к Ф. Березину только усилилось. Ближайшей мезтью была анонимная и внезапная отмена уже разрешённой ему поездки по частному приглашению в Прагу.

Несмотря на все эти уколы и унижения Ф. Березин оставался свободным и независимым человеком, с отвращением и горечью взиравшим на все совершавшиеся вокруг подлости. Будучи по натуре своей пессимистом, он в последние годы жизни всё больше и больше мрачнел, видимо, не находя просвета в безвременьи тех лет.

Летом 1980 года во время путешествия по Колыме он утонул. Тело его было найдено и привезено в Москву. Урна с его прахом захоронена на Востряковском кладбище в Москве. Жаль, что он не дожил до нынешних времён, как и до пришедшего уже после смерти широкого научного признания, — он бы радовался и тому, и другому.

Литература

- [1] *Березин Ф.А.* Операторы Лапласа на полупростых группах Ли // Труды ММО. 1957. Т. 6. С. 371—463; 1963. Т. 12. С. 453—466.
- [2] *Березин Ф.А.* Асимптотика собственных функций многочастичного уравнения Шрёдингера // ДАН СССР. 1965. Т. 163, № 4. С. 795—798.
- [3] *Березин Ф.А.* Формула следов для многочастичного уравнения Шрёдингера // ДАН СССР. 1964. Т. 1573, № 5. С. 1069—1072.
- [4] *Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д.* Замечание об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом // ДАН СССР. 1961. Т. 137, № 5. С. 1011—1014.
- [5] *Березин Ф.А., Похил Г.П., Финкельберг В.М.* Уравнение Шрёдингера для системы одномерных частиц с точечным взаимодействием // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика—механика. 1964, № 1. С. 21—28.
- [6] *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.
- [7] *Березин Ф.А.* О модели Тирринга // ЖЭТФ. 1961. Т. 40, № 3. С. 885—894.
- [8] *Березин Ф.А., Сушко В.Н.* Релятивистская двумерная модель самовзаимодействующего фермионного поля с ненулевой массой покоя // ЖЭТФ. 1965. Т. 48, № 5. С. 1293—1306.

- [9] Березин Ф. А. Об одной модели квантовой теории поля // Матем. сб. 1968. Т. 76, № 1. С. 3–25.
- [10] Голодец В. Я. Описание представлений антикоммутирующих соотношений // Успехи матем. наук. 1969. Т. 24, вып. 4. С. 3–64.
- [11] Березин Ф. А. Квантование // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38, № 5. С. 1116–1175.
- [12] Березин Ф. А. General concept of quantization // Commun. Math. Phys. 1975. V. 40. С. 153–174.
- [13] Березин Ф. А. Квантование в комплексных симметрических пространствах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39, № 2. С. 363–402.
- [14] Березин Ф. А. Об одном представлении операторов с помощью функционалов // Труды ММО. 1967. Т. 17. С. 117–196.
- [15] Березин Ф. А. Виковские и антивиковские символы операторов // Матем. сб. 1971. Т. 86. С. 578–610.
- [16] Березин Ф. А. Ковариантный и контрвариантный символы операторов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36, № 5. С. 1134–1167.
- [17] Березин Ф. А., Шубин М. А. Уравнение Шрёдингера. М.: Изд. МГУ, 1983.
- [18] Березин Ф. А. О канонических преобразованиях в представлении вторичного квантования // ДАН СССР. 1963. Т. 150 (5). С. 959–962.
- [19] Березин Ф. А. Автоморфизмы грассмановой алгебры // Матем. заметки. 1967. Т. 1, вып. 3. С. 269–276.
- [20] Березин А., Кац Г. И. Группы Ли с коммутирующими и антикоммутирующими параметрами // Матем. сб. 1970. Т. 82, № 3. С. 343–359.
- [21] Лейтес Д. А. Спектры градуированно-коммутативных колец // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29, № 2. С. 209–210.
- [22] Березин Ф. А., Лейтес Д. А. Супермногообразия // ДАН СССР. 1975. Т. 224, № 3. С. 505–508.
- [23] Березин Ф. А. Математические основы суперсимметричных теорий поля // Ядерная физика. 1979. Т. 29, № 6. С. 1670–1687.
- [24] Березин А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд. МГУ, 1983.
- [25] Березин Ф. А. О модели Ли // Матем. сб. 1963. Т. 60, № 4. С. 425–446.
- [26] Березин Ф. А., Синай Я. Г. Существование фазового перехода у решётчатого газа с притяжением между частицами // Труды ММО. 1967. Т. 17. С. 197–212.

- [27] *Березин Ф. А.* Плоская модель Изинга // Успехи мат. наук. 1969. Т. 3. С. 3–22.
- [28] *Березин Ф. А.* Число замкнутых несамопересекающихся контуров на плоской решётке // Матем. сб. 1971. Т. 85, № 1. С. 49–64.
- [29] *Березин Ф. А., Минлос Р. А.* «Колючая роза» — либретто оперы (перевод с белорусского). М.: Оперная студия МГУ, 1962.

СУПЕРМАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

А. С. Шварц

Было очень приятно увидеть книгу, посвящённую Алику Березину. Светлый облик Алика ярко обрисован в трогательных воспоминаниях Лены Карпель и в других статьях, его вклад в науку тоже хорошо отражён. Поэтому я решил написать для русского издания короткий обзор впечатляющих достижений теоретической физики, связанных с суперматематикой. Этот текст не содержит ни одной формулы и почти не содержит имён, но даже из него можно составить некоторое представление о значительности работ, которые я пытался описать.

Математика тех лет, когда Березин начинал свою деятельность, была мало связана с теоретической физикой. Конечно, физики всегда использовали классический аппарат математики, в квантовой механике применялись функциональный анализ и теория групп, но работа математиков в те годы была чрезвычайно далека от интересов физиков, контакты между математиками и физиками были крайне ограничены. Более того, некоторые французские математики из школы Бурбаки вообще считали, что после атомной бомбы контакты с физиками не только не нужны, но и аморальны.

Сегодня взаимодействие между математиками и физиками интенсивно, как никогда раньше. Физики-теоретики (во всяком случае специалисты по квантовой теории поля и, особенно, по теории струн) применяют в своей работе средства практически из всех областей современной математики — топологии, алгебраической геометрии, гомологической алгебры, теории чисел и т. д. Кажется, единственная область математики, которая до сих пор не интересует физиков, — это строгое доказательство результатов, полученных физиками эвристическими методами; можно надеяться, что и это уйдёт в прошлое. Более того, физики-экспериментаторы не без основания говорят, что некоторые разделы, в частности теорию струн, нужно рассматривать не как физику, а как математику, поскольку они

(пока!) никак не связаны с экспериментом. Это, конечно, слишком сильное высказывание; специалисты по теории струн остаются физиками по своей психологии, по образу мыслей и действий, но доля правды в нём есть.

С другой стороны, взаимодействие с физикой привело к чисто математическим результатам; недаром физик Виттен получил высшую математическую награду — медаль Филдса. (Отмечу, что идеи суперматематики часто используются в его замечательных работах.) Феликс Березин был одним из тех учёных, математиков и физиков, которые инициировали это удивительное изменение во взаимоотношениях математики и физики.

Березин открыл новое направление в науке, получившее название суперматематики ¹⁾.

Суперматематика — это целый новый мир, имеющий чрезвычайно важные и интересные связи с другими областями математики и с физикой. Началом суперматематики было замечание, что в теории вторичного квантования формулы для бозонов и фермионов выглядят очень похоже, однако же для бозонов эти формулы можно было записать также в виде интегралов, а для фермионов это было невозможно. Чтобы это стало возможным, Березин ввёл понятие интеграла по антикоммутирующим переменным. Замечательным достижением Березина было понимание того, что это понятие открывает окно в новый мир анализа функций от антикоммутирующих переменных, теории групп Ли и алгебр Ли с коммутирующими и антикоммутирующими параметрами, теории пространств с коммутирующими и антикоммутирующими координатами. (Теперь мы говорим о суперанализе, супералгебре, супергеометрии.) Он сделал чрезвычайно много, чтобы ввести нас в этот мир.

Вскоре окна в супермир появились и с других сторон, в частности, в работах Гольфанда — Лихтмана, Волкова — Акулова, Волкова — Сороки. Было построено то, что сейчас называется супералгеброй Пуанкаре (расширение алгебры Ли группы Пуанкаре за счёт

¹⁾В какой-то момент в Советском Союзе было решено повысить уровень докторских диссертаций. Для этого решили потребовать, чтобы каждая докторская диссертация либо вносила важный вклад в народное хозяйство, либо открывала новое направление в науке. Все — кто с интересом, кто с понятным волнением — ждали, что произойдёт. Ничего не произошло — просто новым направлением в науке стали называть тему любой докторской диссертации. Конечно, говоря о Березине я не имею в виду этот бюрократический выверт.

добавления антикоммутирующих параметров). Следующий прорыв произошёл, когда Весс и Зумино не только переоткрыли конструкцию супералгебры Пуанкаре, но и указали простой метод построения суперсимметричных функционалов действия (функционалов, инвариантных относительно супералгебры Пуанкаре). Стало ясно, что суперпространства (пространства с коммутирующими и антикоммутирующими координатами) в высшей степени полезны при построении суперсимметричных теорий. Всё это вызвало большое внимание к работам Березина.

Суперсимметричные теории оказались очень интересными и красивыми. Выяснилось, что многие расходимости, столь затрудняющие работу в квантовой теории поля, сокращаются в этих теориях. Для состояний, инвариантных относительно части суперсимметрий (BPS^2)-states), удаётся получить точные формулы при любых константах связи; это даёт чрезвычайно ценную возможность выйти за рамки теории возмущений, которая остаётся почти единственным средством исследования теорий без суперсимметрии. В теориях с расширенной суперсимметрией есть так называемый топологический сектор (сектор, в котором корреляционные функции не зависят от координат). Более того, такую теорию можно «подкрутить» (*twist*) таким образом, чтобы получилась топологическая квантовая теория поля, в которой все вычисления становятся много проще. Топологические теории можно использовать для того, чтобы получить нетривиальные результаты в топологии и в алгебраической геометрии; их можно применить также, чтобы получить важные соотношения в исходной суперсимметричной теории.

Самой красивой и важной из суперсимметричных теорий оказалась теория фермионной струны³⁾ (суперструны). Теория струны была предложена для объяснения структуры резонансов в сильных взаимодействиях, но дальнейшее продвижение в этой области принесло разочарование. Стройной теории, количественно объясняющей все явления, не получилось. Однако была высказана гипотеза, что математический аппарат теории струны может быть применён совсем в другой области — для объяснения самых фундаментальных

²⁾BPS — Богомольный, Прасад, Зоммерфельд (Sommerfeld).

³⁾Наличие симметрий с антикоммутирующими параметрами в теории фермионной струны было обнаружено ещё до работы Весса — Зумино и послужило толчком для этой работы.

законов физики, для объединения физики сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий с теорией гравитации.

Сегодня теория суперструны рассматривается как кандидат для теории всех взаимодействий (*Theory of Everything*). Все варианты этой теории связаны с понятием суперпространства. (Можно рассматривать, например, суперпространство, имеющее 10 коммутирующих и 16 антикоммутирующих координат, в котором живут струны с двумя коммутирующими координатами или струны с двумя коммутирующими и двумя антикоммутирующими координатами в обычном десятимерном пространстве.)

В течение некоторого времени гипотезу о фундаментальном значении теории суперструны развивали только несколько энтузиастов. Положение резко изменилось в 1984 году, когда в знаменитой работе М. Грина и Дж. Шварца было показано, что условие отсутствия аномалий почти однозначно фиксирует калибровочную группу в теории открытых струн. Это подтвердило, что существует очень небольшая свобода в построении суперструны — как раз то, чего мы ждём от фундаментальной теории. Оптимисты в то время считали, что через несколько лет мы сможем получить из теории струны массы элементарных частиц и константы взаимодействий; речь шла о «струнной революции». Пессимисты думали, что математические и физические проблемы, стоящие перед теорией струны, чрезвычайно трудны и потребуются много лет, чтобы их решить. Довольно скоро многие оптимисты превратились в пессимистов, а пессимисты, нисколько не изменив своего мнения, оказались оптимистами — они всегда верили, что долгий и трудный путь приведёт к успеху.

С тех пор теория суперструны продвинулась далеко вперёд. Очень существенную роль в этом продвижении сыграло открытие важных объектов, не описываемых теорией возмущений (*branes*); с ним связано то, что иногда называют «второй струнной революцией». Однако до вычисления из первых принципов характеристик элементарных частиц ещё чрезвычайно далеко; более того, многие физики пришли к выводу, что это в принципе невозможно. (Считают, что струна может жить в одном из многочисленных вакуумов и всё зависит от выбора вакуума.)

Ожидаемые в скором времени результаты экспериментов на новом ускорителе в ЦЕРНе могут подтвердить наличие суперсимметрии в природе, но до экспериментального подтверждения теории струны ещё далеко. Тем не менее очень многие физики верят,

что когда-нибудь такое подтверждение будет найдено. (Конечно, возможно, что к тому времени теория струны сильно изменится; уже сейчас нужно включать эту теорию в более общую схему, ещё до конца не сформулированную, но уже получившую название М-теории, где буква «М» может быть объяснена по-разному, например, от «Mother» или «Mystery». Эта теория включает в себя все варианты теории суперструны.) Пожалуй, наиболее сильное подтверждение их веры может быть высказано словами: «Не может быть, чтобы такая красота даром пропадала!»

С точки зрения математики теория струн была исключительно успешной: она привела к большому количеству замечательных математических результатов, часть из которых впоследствии была строго доказана.

Суперсимметричные теории — это наиболее заметное, но далеко не единственное применение суперматематики в физике. Суперматематика играет важную роль также в квантовании калибровочных теорий (в BRST-формализме, который в разных формах стал стандартным в квантовой теории поля). Если пространство физических полей устроено сложно (скажем, на эти поля наложены нелинейные ограничения или поля, получающиеся друг из друга под действием некоторой группы, следует отождествить), задачу можно упростить, введя антикоммутирующие поля (духи).

Эта идея тесно связана с идеями гомологической алгебры, в которой изучение сложного модуля можно заменить изучением его свободной резольвенты (свободного модуля, снабжённого дифференциалом). Аналогично сложное пространство можно заменить простым суперпространством, на котором задано гомологическое векторное поле (нечётное векторное поле, антикоммутатор которого с собой равен нулю). Это поле можно считать нелинейным аналогом дифференциала в гомологической алгебре. (Оно порождает настоящий дифференциал в пространстве функций на суперпространстве.) Выбор суперпространства с гомологическим векторным полем неоднозначен (как и выбор резольвенты). Наиболее удобный вариант этой схемы был предложен Баталиным и Вилковым; в геометрической интерпретации их схемы классическая механическая система описывается супермногообразием с нечётной симплектической формой, инвариантной относительно гомологического векторного поля. Можно думать, что именно такое описание следует считать фундаментальным.

Неожиданным образом суперматематика оказалась полезной для вычисления сложных интегралов. Иногда удаётся свести интеграл к интегралу от такой функции на супермногообразии, которая инвариантна относительно нечётного векторного поля. При некоторых условиях можно доказать теорему локализации (свести вычисление интеграла по супермногообразию к анализу поведения функции в окрестности неподвижных точек векторного поля⁴⁾). Изучение топологических квантовых теорий поля в значительной мере основано на этой идее.

Каждый день в Интернете в разделе *hep-th* (*high energy physics-theory*) препринтного архива появляются препринты новых работ. Значительная часть из них (не менее 25 %) тем или иным образом связана с суперматематикой⁵⁾. В них рассматриваются суперсимметричные теории, используется интеграл по антикоммутирующим переменным и т. д. Довольно редко можно встретить прямую ссылку на работы Алика⁶⁾. Наиболее часто используемые результаты Березина стали общеизвестными и не требуют ссылки. Это — самое лучшее, что может произойти с работой учёного.

⁴⁾ Например, утверждение известной теоремы Дюйстермата — Экмана можно доказать, пользуясь этим соображением.

⁵⁾ В 2007 г. в *hep-th* было опубликовано около 4000 препринтов. Абстракты около 1000 из них содержат термин с приставкой «супер».

⁶⁾ Это не значит, что на работы Березина мало ссылались. Просто число ссылок много меньше числа работ, в которых используются введённые им понятия.

О Ф.А. БЕРЕЗИНЕ И ЕГО РАБОТЕ ПО ПРЕДСТАВЛЕНИЮ ГРУПП ТОКОВ¹⁾

А. Вершик

В 2006 году исполнилось бы 75 лет замечательному человеку и математику Феликсу (Алику) Александровичу Березину (1931–1980). Его трагическая и ранняя кончина не дала ему возможности увидеть, как велико влияние его идей и работ на современную математику и математическую физику. Не довелось ему и воспользоваться нынешней открытостью границ и возможностью широкого общения с научным миром, чего он ожидал, но во что почти не верил и от отсутствия чего очень страдал. Его научная судьба, как и судьбы многих ученых советского времени, не соответствовала его дарованию и результатам его творчества. Кроме очевидных и чисто советских поводов, затруднявших его путь, были и другие. Его независимость, особость, делали его «неудобным» для любого начальства и даже для некоторых коллег по работе. Несмотря на множество учеников, популярный семинар и достаточно широкую известность в стране он по своему характеру был скорее «одиноким волком» и «мэтром», чем лидером группы.

Начало было очень впечатляющим и удачным: Березин был любимым учеником И.М. Гельфанда, и вместе с Р.А. Минлосом они стали первыми из молодых последователей Гельфанда в теории представлений, только начинавшей всерьез в начале 1950-х гг. Я помню, как на конференции по функциональному анализу Израиль Моисеевич публично хвалил его работы и гордился им. Несколько важных работ было сделано ими вместе, и тут что-то произошло — их отношения кардинально испортились. Большинство близких к ним людей считало, что причина — ошибка в их совместной работе. Ошибка (или даже несколько) действительно была в одной

¹⁾Опубликовано в Записках семинаров ПОМИ. 2006. Т. 331.

из их работ, но это была поучительная ошибка, из тех, что сами по себе составляют непреходящую и даже полезную составляющую научного прогресса. Примеров тому очень много.

Гораздо позже, уже в 1970-х, когда я дружил с Аликом и активно работал с Израилем Моисеевичем Гельфандом, я откровенно говорил с обоими, и ни тот, ни другой не считали, что в этом и была причина разлада. Вполне возможно, что для недовольства и раздражения Гельфанда допущенная ошибка была лишь поводом, так, во всяком случае, оба говорили мне. Я неоднократно пытался убедить каждого из них в том, что надо наладить отношения и это будет ко всеобщей пользе. Печально, но оба почти в одинаковых выражениях говорили о своем нежелании восстановить отношения и о принципиальной невозможности даже самого общения.

Для Березина этот разлад означало многое — вместо столь важной в его положении поддержки в проектах и начинаниях он столкнулся с непониманием и скептицизмом. Его работа начала 1960-х по грассмановому анализу, в которой он заложил основы того, что сейчас называют суперматематикой, долго лежала в «Успехах»²⁾ без движения и в конце концов с многолетним запозданием (может, и к счастью) вышла отдельной книжкой. Что касается докторской диссертации, которую он защитил на много лет позже положенных, то тут он не одинок, и причины препятствий общие — ведь сейчас невозможно поверить, что добрая половина сейчас уже всемирно известных советских математиков не могла годами найти возможность подать и защитить ту или иную диссертацию!

Роль Ф. А. Березина в математическом сообществе тех лет чрезвычайно высока. Если сформулировать в одной фразе, то она состоит в том, что именно он, глубоко и самостоятельно изучив теоретическую физику (тогдашнюю квантовую теорию поля, статфизику и др.), *первый из своего поколения математиков начал популяризировать её и систематически привлекать к ней активных математиков Москвы, Ленинграда и других городов страны.* Почти все мои друзья-математики в нашем и смежных поколениях, стоящие близко к теоретической физике, были определенное время под сильным влиянием Березина (Л. Д. Фаддеев, Р. А. Минлос, Р. Л. Добрушин, Я. Г. Синай, А. С. Шварц и многие физики-теоретики). Его семинар 1960–1970-х гг. был притягательным для де-

²⁾Успехи математических наук — журнал Академии наук.

сятков математиков и теорфизиков всей страны. Об этом следовало бы написать подробно тем, кто непосредственно испытал это влияние в те годы. Мне известны лишь воспоминания Р. А. Минлоса и А. С. Шварца, в которых пишется об этой роли Березина.

Нужно помнить, насколько непохожи отношения математиков и теоретических физиков в предвоенные годы и первые десятилетия после войны на то, что мы видим сейчас. Перелом наступил в шестидесятых годах и роль Березина здесь очень значительна. Хорошо известно, что И. М. Гельфанд ещё ранее очень интересовался физикой, писал работы на физические темы и, как и Алики, посещал одно время семинар Ландау, но последствия этого в его школе не шли дальше самой общей информированности о событиях. Израиль Моисеевич передавал мне удачную формулировку А. Б. Мигдала о том, что он ходил к физикам, как народники к мужику (иначе говоря, с одной стороны — из уважения и желания чуть-чуть поучиться, а с другой — с целью поучить их грамоте). Не знаю, насколько это *mot*³⁾ точно, но Алики заведомо в основном учился и «выучился на физика», как мало кто из профессиональных математиков. Он иногда говорил: «Когда я думаю, как физик...». К физике он относился очень почтительно и язвительно высмеивал математиков, которые «хотели сделать (т. е. закончить) физику», и считал, что вряд ли это вообще возможно.

Мое первое знакомство с Аликом произошло в начале 1960-х годов. Он часто приезжал в Ленинград и любил заезжать к нам. Он дружил с О. А. Ладыженской, имел тесный научный контакт с М. С. Бирманом, Л. Д. Фаддеевым. А позже я часто приглашал его делать доклады на заседаниях нашего Математического общества. Наш первый разговор в 1963 или 1964 году был о фоковском пространстве, которое я тогда только что для себя открыл. Дело в том, что в кандидатской диссертации я по инициативе В. А. Рохлина разбирался в структурах пространства L^2 по бесконечномерной гауссовой мере, в частности, Владимир Абрамович просил явно задать в нём структуру унитарного кольца для того, чтобы изучать спектры и другие инварианты гауссовских (нормальных) динамических систем и т. д. В то время заинтересованность в нормальных динамических системах и гауссовых мерах — их геометрии, спектре и других свойствах — была всеобщей. Идеи Колмогорова, работы С. В. Фо-

³⁾Le mot — слово (*фр.*), особенно в значении «словечко». — Прим. ред. Д. Л.

мина, И. В. Гирсанова и, главное, знаменитые работы К. Ито — вот то, что на эту тему было мне тогда известно. Но о связи с фоковским пространством никто из нас и авторов этих работ не знал.

Почти в это же время вышли лекции Н. Винера по нелинейной теории случайных процессов, где было описано пространство нелинейных функционалов по гауссовой (винеровской) мере, кстати не без существенных ошибок, но и в его книге не было ни слова о вторичном квантовании. Я помню, что на конференции в Вильнюсе А. Н. Колмогоров спрашивал меня, что же нового в книге Винера. Первым, кто объяснил, что такое «столбики» Фока мне и Я. Синаю, был Л. Фаддеев. Я бросился читать статьи В. А. Фока 1932 года, в которых формулировались идеи вторичного квантования, и с тех пор рассматриваю эту конструкцию как одно из самых серьёзных достижений физико-математики XX века. И вот после прочтения работы Фока и состоялась моя первая встреча с Березиным.

Мой собственный скромный вклад в этот вопрос состоял в выводе формул умножения многомерных полиномов Эрмита, с помощью которых можно было и установить структуру унитарного кольца, и дать разложения функционалов по обобщённым полиномам Эрмита, и т. д., что в свою очередь можно использовать для анализа нормальных систем и соответствующих операторов.

Сейчас это пространство, носящее много имен (Фока — Винера — Ито — Кука — ...), стало общеизвестным, ему посвящено несколько книг (например, книга Б. Саймона). Березин тоже много писал о нём, но предпочитал аналитическую (баргмановскую), а не вероятностную модель фоковского пространства.

После той первой беседы на фоковскую тему мы стали встречаться всякий раз, когда я ездил в Москву или когда он приезжал в Ленинград, и обсуждать разные математические и нематематические темы. В частности, нас обоих интересовали фон неймановские конструкции факторов, C^* - и W^* -алгебры, представления коммутационных и антикоммутационных соотношений, аппроксимации (мало кто помнит сейчас, что именно Березин инициировал теорию аппроксимаций динамических систем, которую успешно развивали в 1960-х гг. его ученик А. Стёпин и ученик Я. Синая А. Каток) и, особенно, меры и интегрирование в функциональных пространствах, которое было одно время его коньком, и которыми я тоже очень интересовался в те годы. Помню наши долгие беседы в Кацивели (Крым) летом 1966 года во время летней школы, в которых он

развивал свое понимание аппроксимаций и теории факторов, в Чимгане в 1975 году, в Звенигороде и под Минском в 1979 году во время нашей, увы, последней встречи, где мы говорили о представлениях групп токов, о чем я скажу подробнее ниже, и о ситуации в науке и обществе, о чем я вспоминал в [В].

Одной из самых важных для Березина математических тем была *математическая теория квантования*. Этой темой он занимался с разных позиций непрерывно, можно сказать, всю жизнь. В математическую теорию квантования Ф. А. Березин внес неоценимый вклад. Я надеюсь, что найдутся более компетентные в этом вопросе специалисты, которые подробно и связно опишут березинский подход к квантованию и его эволюцию. Сюда входит и геометрическое квантование (квантовая механика), и метод орбит, к которому он имел самое непосредственное отношение, и деформационное квантование, представленное известной серией его статей, в которых он старался включить в рассмотрение и дифференциальные уравнения, и теорию комплексных многообразий; вторичное квантование и теория фоковского пространства виковских процедур и преобразований Боголюбова, и, наконец, чисто алгебраический подход (работы с киевским математиком Г. Кацем). И конечно же, с квантованием непосредственно связано его любимое детище — грасманова теория и суперматематика.

Здесь я останавлиюсь лишь на одной из тем, которая интересовала нас в 1970-х гг. А именно, я хочу рассказать о задаче, которой занимались мы с И. М. Гельфандом и М. И. Граевым и над которой также работал и Алики, — задаче о представлениях групп токов, или о непрерывном тензорном произведении представлений. Березин пришел к ней также от задач квантования, и в его понимании она примыкает к упомянутому циклу работ. Этой задаче посвящена статья [Б1] про непрерывные прямые произведения универсальных накрывающих группы движений комплексного шара в Трудах Московского математического общества и её английская версия [Б2] в Report of Math. Phys.

Я должен начать с краткой истории наших работ с И. М. Гельфандом и М. И. Граевым, посвящённым так называемым интегралам представлений, или группам токов. Весной 1972 года в конце своего довольно долгого визита в Москву я встречался с Израилем Моисеевичем и рассказывал ему о различных своих занятиях. Как мне показалось, они заинтересовали его — речь шла об асимптотической

статистике подстановок, динамических системах и, может быть — не помню точно, — о C^* -алгебрах; ни слова о теории представлений групп сказано не было, хотя я в то время усиленно изучал её. Простившись с Гельфандом, я уже собирался уезжать в Ленинград, как вдруг в последний день он весьма сложным способом нашел меня у моих московских друзей и попросил приехать к нему.

Когда мы с ним встретились (Израиль Моисеевич пригласил также М. И. Граева), он рассказал о задаче, которую, по его словам, давно ставил разным людям, но, в силу сказанного выше, вряд ли обсуждал её с Березиным. Это задача о том, существует ли неприводимое представление группы функций на многообразии со значениями, скажем, в группе $SL(2, \mathbb{R})$ с поточечным умножением (группе токов со значениями в $SL(2, \mathbb{R})$), инвариантное относительно какой-либо транзитивно действующей на многообразии группы (так называемый мультипликативный интеграл представлений).

Например, существует ли неприводимое представление группы токов на окружности, инвариантное относительно вращений? В течение полугода этот вопрос был решен положительно, и в январе 1973 года я отправил письмо И. М. Гельфанду с решающим аргументом, после чего и началась моя совместная с ним и М. И. Граевым работа, приведшая к длинной серии публикаций, посвящённых этой и близким темам.

В декабре 1972 г. в Ленинград приехал Алик (он был приглашён для докладов на Обществе и на семинаре Смирнова — Ладыженской) и мы долго разговаривали с ним, в частности, я рассказал и об этой задаче. Как раз тогда я готовил письмо И. М. Гельфанду с вычислением того, что позже было названо каноническим состоянием. Березин очень оживился и сказал, что тоже думал об этой задаче, но совсем по-другому. Через некоторое время он написал на эту тему две работы; они были опубликованы гораздо позже — в конце 1970-х гг., — и мы с Березиным в дальнейшем о них по существу не говорили. Тогда я не стал разбираться в этих статьях, так как интерес к этой теме у меня уже прошёл.

В них есть формальная ссылка на нашу (с Гельфандом и Граевым) работу [B1], но без всяких комментариев.

К сожалению, и здесь у него остался осадок, который я старался снять, но, увы, в дело опять вмешались его непростые взаимоотношения с Гельфандом. Здесь не место подробно говорить об этом, и я перейду к математической сути дела.

Случилось так, что недавно, после долгого перерыва, мы вместе с М. И. Граевым вернулись к этим задачам, имея в виду ряд новых идей, и я решил, что нужно наконец как следует понять, что же было сделано на эту тему Березиным и как это соотносится с нашими старыми работами. С запозданием я разобрался с этим.

В наших работах 1973–1974 гг. были описаны когомологии простых групп Ли ранга 1 со значениями в замечательном неприводимом унитарном представлении.

Это представление, называемое сейчас особым (приклеенным к единичному), играет в построении групп токов решающую роль. В нашей первой работе [B1] рассматривалась только группа Ли $SL(2, \mathbb{R})$ и ее алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{su}(1, 1)$, а в работе [B2] — группы $U(n, 1)$ и $O(n, 1)$ для всех n . Исходной точкой наших построений было так называемое каноническое состояние на группе — производная сферической функции в точке, приклеенной к единичному представлению, или, по-другому, квадрат нормы нетривиального коцикла. А исторически первая конструкция неприводимого представления группы токов была аппроксимативной — предельный переход от дополнительных серий по образцу построения интеграла Лебега. Но уже вслед за этим при подготовке к печати нашей первой работы мы поняли, что фактически открытое нами представление группы токов реализуется в фоковском пространстве, а именно в экспоненте, построенной по прямому интегралу особых представлений, но не просто как экспонента линейного действия, а подправленная коциклом (прямым интегралом коцикла исходной группы).

Это есть, как выяснилось вскоре, частный случай общей экспоненциальной конструкции Х. Араки, появившейся несколькими годами раньше, и поэтому новизна в нашей работе была заключена не столько в конструкциях (хотя мы рассматривали не только фоковскую, но и некоторые новые конструкции), сколько в определении канонического состояния и в открытии нетривиальных когомологий, нетривиального коцикла полупростых групп ранга 1, которые не были до тех пор известны.

Что касается нетривиального коцикла, то, как вскоре мы с моим аспирантом С. Карпушевым доказали в [B3], он может существовать только в особых представлениях. Я выдвинул гипотезу о том, что если у группы нет свойства Каждана (единичное представление не изолировано в пространстве неприводимых унитарных представлений), то неприводимое представление с нетривиальными первыми

когомологиями, т. е. особое представление, обязательно существует. Эту гипотезу в усиленном виде (с когомологиями в сильном смысле — факторгруппами коциклов по замыканию группы кограниц) несколько лет назад доказал Y. Shalom [Sh].

Помню, что незадолго до приезда Березина в декабре 1972 года к нам приехал А. Кириллов, и я ему также рассказывал обо всём этом. Он напомнил мне о свойстве Каждана, столь популярном сейчас и малоизвестном тогда, и имевшем прямое отношение к теме, а также о своей работе [K]. Сам Березин, как он мне говорил позже, никак не связывал эти вопросы, хотя сама по себе идея деформаций представлений и алгебр была ему близка.

Для полупростых групп Ли $SU(n, 1)$ и $O(n, 1)$, где $n = 1, \dots$ — единственных групп, у которых такие когомологии есть и которые были явно вычислены в [B2], — стало возможным провести построение мультипликативного интеграла. Березин рассмотрел в [B1, B2] часть эти групп — универсальные накрывающие группы движений комплексного шара или комплексного пространства Лобачевского.

Внимательно посмотрев сейчас довольно трудную для восприятия статью Березина, я убедился в том, что, хотя Березин и не выписывал коцикла, он проделал на конкретном уровне ту же работу: построил непосредственно нужную реализацию пространства Фока как экспоненту по интегралу особых представлений группы $SU(n, 1)$, а коцикл возник у него автоматически из-за способа определения нормы. Правда доказательство неприводимости у него более рутинно, у нас оно следовало из некоторой общей теоремы о каноническом состоянии. Более того, понятие канонического состояния, введенное в [B1], как оказалось, фактически использовалось и Березиным, но в другом определении, и ему было позже посвящено много работ: В. Ф. Молчанова — ученика Ф. А. Березина, Ван Дейка и их учеников.

Таким образом, Ф. А. Березин предложил свое независимое построение мультипликативного интеграла представлений для группы движений комплексного пространства Лобачевского, которое приводит к одной из конструкций [B1, B2], а именно к фоковской модели.

Мимоходом упомяну, что позже, в начале 1980-х годов, появились так называемые коммутативные модели мультипликативного интеграла — совершенно новые конструкции — сначала для $SL(2, \mathbb{R})$ в [BГГ] (см. также [TVY1, TVY2], где рассмотрена с вероятностной точки зрения коммутативная модель для $SL(2, \mathbb{R}))$. В наших

недавних работах [ВГ1, ВГ2, ВГ3, ВГ4] мы заново и подробно рассмотрели эти вопросы и связали эти модели с моделью Фока.

В частности, коммутативная модель изучается для общего случая $SO(n, 1)$, $SU(n, 1)$, и при этом построение нужного представления сводится к построению представления его максимальной параболической подгруппы; пока это сделано для самих групп, а не для групп токов. Этот приём сильно упрощает конструкцию и привносит совершенно новые связи (случайные процессы Леви, бесконечномерные лебеговы меры и др.).

Я хочу на этом примере отметить характерные черты работ Алика, хотя и не берусь утверждать, что мои наблюдения имеют общий характер. Прежде всего (и это роднит его с его руководителем), он конкретен, и не большой любитель общих конструкций, хотя и знает, насколько они бывают иногда полезны.

Во-вторых, он обладает замечательным чутьём, что также сближает его с Израилем Моисеевичем Гельфандом. В примере, о котором идет речь, это чутье проявилось особенно ярко, поскольку он не имел общей картины мультипликативных интегралов и не знал, что существование непрерывного тензорного произведения налагает очень специальные и конкретные условия на группу и её представление. Но если соответствующая общая теорема неизвестна, а скорее всего было именно так, то надо было угадать, что довольно тяжелые выкладки приведут в конце концов к цели. Впрочем, его умение считать и упорство в счёте были хорошо известны. Но, может быть, особенно важная черта творчества Березина — в умении видеть перспективу и проявить настойчивость в проведении той или иной выбранной им программы; его программа грасманова анализа и суперматематики — одно из лучших проявлений этой прозорливости.

Литература

- [B1] *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Представления группы $SL(2, R)$, где R — кольцо функций // Успехи матем. наук. 1973. Т. 28, вып. 5 (173). С. 83–128.
- [B2] *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Неприводимые представления группы G^X и когомологии // Функци. анализ и его прил. 1974. Т. 8, вып. 2. С. 67–69.
- [B3] *Вершик А. М., Карпушев С. И.* Когомологии групп в унитарных представлениях, окрестность единицы и условно положительно определенные функции // Матем. сб. 1982. Т. 119 (161), № 4 (12). С. 521–533.

- [Sh] *Shalom Y.* Rigidity, unitary representations of semisimple groups, and fundamental groups of manifolds with rank one transformation group // *Annals of Mathematics. II Series.* 2000. Vol. 152, № 1. P. 113–182.
- [K] *Delaroche C., Kirillov A.* Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés // *Séminaire Bourbaki*, 10 (1966–1968). Exposé № 343. P. 507–528.
- [B1] *Березин Ф.А.* Представления непрерывного прямого произведения универсальных накрывающих группы движений комплексного шара // *Труды ММО.* 1978. Т. 36. С. 275–293.
- [B2] *Berezin F. A.* Representation of the infinite direct product of universal covering of isometry group of the complex ball // *Report in Math. Phys. (Poland).* Providence, RI: AMS, 1966. (Английская версия работы [B1].)
- [B] *Maslov V. P., Shubin M. A., Vershik A. M. and Vvedenskaya N. D.* Alik Berezin in the recollections of friends // *Contemporary mathematical physics.* AMS Transl. Ser. 2. V. 175. Providence, RI: AMS, 1996. P. 225–236.
- [BГГ] *Vershik A., Gelfand I. and Graev M.* Models of representations of current groups // *Representations of Lie groups and Lie algebras.* (Budapest, 1971.) P. 121–179. Akad. Kiado, Budapest, 1985.
- [BГ1] *Вершик А.М., Граев М.И.* Коммутативная модель представления группы $O(n, 1)^X$ и обобщенная лебегова мера в пространстве распределений // *Функц. анализ и его прил.* 2005. Т. 39, № 2. С. 1–12.
- [BГ2] *Vershik A., Graev M.* The basic representation of the current group $O(n, 1)^X$ in the L^2 space over the generalized Lebesgue measure // *Indag. Math.* 2005. V. 16, № 3/4.
- [BГ3] *Вершик А.М., Граев М.И.* Структура дополнительных серий и особых представлений групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ // *Успехи матем. наук.* 2006. Т. 61, вып. 5 (371). С. 3–88.
- [BГ4] *Вершик А.М., Граев М.И.* Интегральные модели представлений групп токов // *Функц. анализ и его прил.* 2008. Т. 42, вып. 1. С. 22–32.
- [TVY1] *Tsilevich N., Vershik A., Yor M.* An infinite dimensional analogue of the Lebesgue measure and distinguished properties of the gamma process // *J. Funct. Anal.* 2001. V. 185. P. 274–296.
- [TVY2] *Вершик А.М., Йор М., Цилевич Н.В.* О тождестве Маркова — Крейна и квазиинвариантности гамма-процесса // *Записки научных семинаров ПОМИ.* 2001. Т. 283, № 6. С. 21–36.

КВАНТОВАНИЕ ПО БЕРЕЗИНУ

В. П. Паламодов

1. Общей проблеме квантования Алик Березин отдал шесть или более наилучших по сочетанию сил и опыта лет. Он дал этой проблеме язык и метод. Согласно классическому квантованию Германа Вейля (Herman Weyl) функции $a(p, q)$, заданной в фазовом пространстве $\Phi = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ плоского пространства $\mathbb{R}^n$, наделённого стандартной симплектической формой $\omega = \sum dq_j \wedge dp_j$, сопоставляется оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{a} = \int_{\Phi} \tilde{a}(\xi, \eta) \exp \left(-\frac{i}{h} (\hat{p}\xi + \hat{q}\eta) \right) d\xi d\eta, \quad (1)$$

где $\tilde{a}(\xi, \eta)$ означает Фурье-образ функции a , а операторы

$$\hat{q}_j f = x_j f, \quad \hat{p}_j f = \frac{h}{i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

квантуют координаты и импульсы точки (q, p) . Композиция операторов определяет ассоциативную операцию на некоторой алгебре A «наблюдаемых» функций a , например, абсолютно суммируемых по фазовому пространству. Явное выражение для композиции задаётся интегралом с быстро осциллирующим ядром

$$(a * b)(x) = h^{-n/2} \int \exp \left(\frac{2i}{h} \int_{\Delta} \omega \right) a(y) b(z) dy dz, \quad (2)$$

где Δ — треугольник в Φ с вершинами x, y, z . Если считать константу Планка h переменным параметром и перейти к пределу при $h \rightarrow 0$, то правая часть формулы (2) превратится в обычное произведение ab , а квантовая механика — в классическую механику с фазовым пространством Φ . Это свойство квантования называется *принципом соответствия*.

Формула (1) действует, пока идёт речь о плоском пространстве. Необходимость рассмотрения неплоских симплектических много-

образий (Φ, ω) следует из подхода Дирака к системам со связями (1947, 1964)¹⁾. В этом случае форма ω не может быть задана с помощью глобально определённых координат (q, p) , как в (1). Геометрическое квантование было развито Костантом, Сурио и А. А. Кирилловым как подход к этой проблеме в рамках теории представлений групп. Фазовое пространство рассматривается как коприсоединённое представление разрешимой группы. Такой подход включает квантование Вейля, но в более общих ситуациях годится лишь для немногих классических наблюдаемых.

2. Исходный объект в теории Березина (1974–75) — это гладкое симплектическое многообразие M , т.е. гладкое многообразие с невырожденной замкнутой 2-формой ω . Двойственный объект — это скобка Пуассона $\{a, b\} = \omega(da, db)$, которая определена на алгебре гладких функций на M и удовлетворяет тождеству Якоби. Квантование системы (M, ω) в смысле Березина — это тройка $(E, \mathcal{A}, \varphi)$, в которой E есть некоторое множество положительных чисел, $\mathcal{A}$ есть некоторая ассоциативная $\mathbb{R}$ -алгебра функций на M с умножением, обозначаемым $*$, а φ — это гомоморфизм алгебр $\mathcal{A} \rightarrow A(M)$, т.е. $\varphi(a * b) = \varphi(a)\varphi(b)$. Множество E есть область изменения параметра h , играющего роль константы Планка, а алгебра $\mathcal{A}$ наделена дополнительным свойством, которое на ином языке означает наличие гомоморфизма $\mathbb{R}$ -алгебр $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, где $\mathcal{B}$ есть, например, алгебра непрерывных функций на E . Иными словами, алгебра $\mathcal{A}$ является подалгеброй прямого произведения ассоциативных алгебр $\mathcal{A}_h$, где $h \in E$, т.е. сложение и умножение в алгебре $\mathcal{A}$ совершается «послойно», а φ играет роль предельного перехода при $h \rightarrow 0$.

Принцип соответствия для такого квантования состоит в следующем: для любых $a, b \in \mathcal{A}$ дробь $\frac{a * b - b * a}{h}$ принадлежит алгебре $\mathcal{A}$ и имеет место равенство

$$\varphi\left(\frac{a * b - b * a}{h}\right) = -i\{\varphi(a), \varphi(b)\}.$$

Бросается в глаза формальная аналогия теории Березина и теории деформаций комплексных структур, язык которой уже был со-

¹⁾См. Дирак П. А. М. Собрание научных трудов в 4 т. М.: Физматлит, 2002–2005. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики / Пер. с англ. 2-е изд. М.: Наука, 1979. — Прим. ред. Д. Л.

здан в то время. При этой аналогии скобка Пуассона отвечает отображению Кодаиры — Спенсера и квантование можно трактовать как некоммутативную деформацию, однако некоммутативные «квантовые» пространства в то время не были известны.

Березин создал совсем новую технику, построив квантование механических систем, реализованных как классические симметрические комплексные области или многообразия. Всякое многообразие M этого класса имеет каноническую кэлерову форму, а мнимая часть этой формы есть симплектическая форма, которая также однозначно определена на M . Вейлевское квантование относится к этому классу, поскольку симплектическая форма ω равна мнимой части кэлеровой формы $\sum dz_j \wedge d\bar{z}_j$ комплексного пространства $\mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$, где $z_j = q_j + ip_j$. Березин рассмотрел примеры, в которых M — двумерный тор, плоскость Лобачевского, сфера Римана, любая классическая однородная область.

3. Основная цель общей проблемы квантования — найти явный вид деформированного умножения в духе формулы (2). Преобразование Фурье, на котором основана формула (1), не работает в других кэлеровых многообразиях (кроме торов). Березин находит замену этому преобразованию, используя технику переполненной²⁾ системы векторов. Это ключевая идея в его методе. Он называет систему элементов e_α , где $\alpha \in \Lambda$, некоторого гильбертова пространства H *переполненной*, если существует некоторая мера $d\lambda$ на множестве Λ , такая что для любого элемента f этого пространства

$$f = \int_M \frac{\langle f, e_\alpha \rangle}{\langle e_\alpha, e_\alpha \rangle} e_\alpha d\mu(\alpha).$$

Ковариантный символ оператора $\hat{A}$, действующего в H , — это функция

$$A(\alpha) = \frac{(A(e_\alpha), e_\alpha)}{(e_\alpha, e_\alpha)}$$

на множестве Λ , которое у Березина всегда является комплексным многообразием. При этом оказывается, что матричный элемент

$$A(\alpha, \beta) = \frac{(\hat{A}e_\alpha, e_\beta)}{(e_\alpha, e_\beta)}$$

²⁾Её называют также системой «когерентных состояний». — Прим. ред. Д. Л.

оператора $\hat{A}$ аналитичен в окрестности диагонали в $\Lambda \times \Lambda$ и служит аналитическим продолжением ковариантного символа $A(\alpha)$. По этому продолжению восстанавливается и сам оператор $\hat{A}$. Матричный элемент композиции $\hat{A} = \hat{A}_1 \cdot \hat{A}_2$ равен

$$A(\alpha, \gamma) = \int_M A_1(\beta, \gamma) A_2(\alpha, \beta) \frac{(e_\alpha, e_\beta)(e_\beta, e_\alpha)}{(e_\alpha, e_\alpha)(e_\beta, e_\beta)} d\mu(\beta), \quad (3)$$

что позволяет вычислить и ковариантный символ $A(\alpha)$. Когерентные состояния

$$e_\mu(x) = \exp(-\pi|x - p|^2 + 2\pi i \langle \theta, x \rangle), \quad \mu = (p, \theta), \quad (4)$$

образуют переполненную систему в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n, dx)$, причём множество Λ есть фазовое пространство $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, а $d\mu = dp d\theta$ — мера Лебега в нём.

Для квантования симметрической области Ω Березин рассматривает гильбертово пространство F_h , зависящее от положительного h , состоящее из голоморфных функций в Ω , квадратично суммируемых с весом $\exp\left(\frac{\Phi}{h}\right)$, где Φ — вещественный потенциал кэлеровой метрики, т. е. $\partial\bar{\partial}\Phi = \omega$. Пространство $\mathcal{A}_h$ — слой алгебры $\mathcal{A}$ — это пространство ковариантных символов ограниченных операторов в F_h . Для плоскости Лобачевского и сферы Березин использует в качестве переполненных систем в F_h системы голоморфных функций:

$$e_v^h(z) = (1 - \bar{v}z)^{\frac{1}{h}} \quad \text{и} \quad e_{\bar{v}}^h(z) = (1 + \bar{v}z)^{\frac{1}{h}}$$

соответственно. При этом плоскость Лобачевского реализована как единичный круг Ω , и функция e_v^h определена при любом $v \in \Omega$ и $h > 0$. В случае сферы v — любая точка комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и, следовательно, число $\frac{1}{h}$ должно быть целым. Поэтому множество E в случае сферы есть последовательность обратных натуральных чисел, а пространство F_h состоит из полиномов степени не выше $\frac{1}{h}$. Таким образом, размерность пространства $\mathcal{A}_h$ растёт с уменьшением h , так что конечномерные алгебры $\mathcal{A}_h$ приближают некоторую бесконечномерную коммутативную алгебру $\mathcal{A}$ функций на сфере.

Для произвольной кэлеровой области Ω комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ Березин рассматривает воспроизводящее ядро пространства F_h :

$$L_h(z, \bar{v}) = \sum f_k(z) \overline{f_k(v)}.$$

Здесь $\{f_i\}$ — некоторый ортонормированный базис этого пространства (ядро не зависит от выбора базиса). Функции $L_{\bar{v}} = L(\cdot, \bar{v})$, где $\bar{v} \in \Omega$, служат переполненной системой для F_h . Для всякого оператора $\hat{A}$ матричный элемент в этой системе является голоморфной функцией z и антиголоморфной функцией v . Поэтому функция $A_h(z, \bar{v})$ определяется своими значениями на диагонали $z = v$. Более того, ряд Тейлора этой функции в каждой точке диагонали легко явно выразить через ряд Тейлора ковариантного символа $A_h(z, \bar{z})$.

Отвлекаясь от операторов, Березин рассматривает алгебру ковариантных символов $A_h(z, \bar{z})$ с умножением (3), порождённым данной переполненной системой. Фактически операция (3) определена через матричные элементы операторов $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$, которые, ввиду сказанного, однозначно восстанавливаются через их ковариантные символы. Ассоциативность этого умножения очевидна.

Для построения квантования необходимо определить алгебры $\mathcal{A}_h$ и $A(\Omega)$. Алгебра $\mathcal{A}_h$ задаётся как совокупность всех таких непрерывных функций $f = f(h; z, \bar{z})$, что $f(z; \cdot)$ при каждом h равна символу A_h некоторого оператора $\hat{A}$ в F_h . Алгебра функций $A(\Omega)$ на исходном многообразии возникает как множество предельных значений таких функций. Множество $E \subset \mathbb{R}$ определяется как совокупность значений h , для которых выполняется равенство

$$L_h(z, \bar{z}) = \lambda \exp\left(\frac{\Phi(z, \bar{z})}{h}\right)$$

с некоторой константой λ . Оно связывает ковариантные символы операторов с кэлеровой структурой, что необходимо для справедливости принципа соответствия.

Березин строго доказал, что описанная конструкция действительно даёт квантование для любой симметрической области Ω (которое, кроме того, обладает инволюцией). Множество E во всех случаях равно некоторому интервалу $(0, h_0]$ плюс конечное число точек. Если M — общее симметрическое кэлерово многообразие, Березин выбирает плотную открытую часть Ω , которая имеет глобальные координаты, а затем продолжает описанную конструкцию до квантования M , которое, говоря современным языком, функториально по отношению к группе движений M . Это оказывается возможным благодаря естественности всей конструкции.

Последняя работа из этого цикла посвящена применению общего подхода к конкретной системе с неплоским фазовым простран-

ством — системе Гросса — Невё. Было ясно, что теория Березина имеет большой потенциал, но сам он уже не вернулся к этой теме.

4. Клибек и Лесниевски, а затем Каэн, Гут и Ронсли и другие авторы применили метод Березина для более общих кэлеровых многообразий. Они, в частности, установили, что в тех случаях, когда применим метод геометрического квантования, лакуны множества E те же самые, а алгебра классических наблюдаемых, допускающих квантование Березина, шире.

Под влиянием работ Березина получил развитие близкий метод квантования, основанный на технике операторов Тёплица. Оператор Тёплица включает проектирование на некоторое гильбертово пространство голоморфных функций, что аналогично переходу к ковариантному символу, при этом принцип соответствия изменяет свой вид.

5. Контравариантное квантование. Пусть $\{e_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ — переполненная система в $L_2(X)$, как выше. По ограниченной функции A° , заданной на множестве Λ , Березин строит оператор

$$\hat{A}f = \int A^\circ(\alpha)(f, e_\alpha)e_\alpha d\mu(\alpha).$$

Он называет функцию A° *контравариантным* символом оператора $\hat{A}$. Выбор термина объясняется, видимо, тем, что ковариантный символ определяется по оператору, в то время как контравариантный символ сам порождает оператор. Общее между ними то, что для самосопряжённого оператора оба символа суть вещественные функции. Формула для следа у них также одинаковая. Ковариантный символ получается из контравариантного применением интегрального оператора T с ядром, как в (3). Березин подчеркивает важность вычисления оператора T , поскольку операция $*$ записывается с помощью этого оператора.

Контравариантное квантование Березина вызвало интерес в совсем иной области — в пространственно-частотном анализе, обработке и восстановлении изображений. Здесь совокупность когерентных состояний (4), называемая *системой Габора*, служит переполненной системой. Одна из причин интереса состоит в том, что квантование A_Ω индикаторной функции некоторой области Ω в фазовом пространстве оказывается удобным фильтром, отсекающим «детали» изображения, находящиеся за пределами Ω . Смысл этого

высказывания нужно, конечно, понимать с учётом неопределённости локализации в фазовом пространстве. Эту задачу и выполняют собственные функции самосопряжённого оператора A_Ω , представляющие собой естественный базис для пространства функций, локализованных в Ω .

6. В семидесятых годах независимый подход к той же проблеме созрел в группе Флато — Лишнеровиц — Штернхаймер во Франции. Исходная концепция была иной: отвлекаясь от операторов как таковых, за основу приняли формальную ассоциативную алгебру, содержащую «переменную» $\hbar$. Такая алгебра возникает в квантовании Вейля, если разложить интеграл (2) в ряд по $\hbar$:

$$\begin{aligned} a * b &= \exp\left(\frac{2}{i\hbar}P\right)(a, b) = \\ &= a \cdot b + \frac{2}{i\hbar}P(a, b) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{i\hbar}P\right)^2(a, b) + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{i\hbar}P\right)^3(a, b) + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

(ряд Грёневольда — Мойяла). Здесь P — это некоторая скобка Пуассона на некотором многообразии Φ . В общем случае под деформационным квантованием некоторой скобки Пуассона p_1 понимается билинейная ассоциативная операция $*$, заданная формальным рядом

$$a * b = ab + \hbar p_1(a, b) + \hbar^2 p_2(a, b) + \dots,$$

в котором p_k , где $k = 2, 3, \dots$, — некоторые билинейные дифференциальные операторы на Φ . Эта идеология и её физическое содержание были подробно изложены в 1977–78 гг., спустя два года после публикаций Березина. В каждом примере, рассмотренном Березиным, его квантование может быть представлено формальным степенным рядом по $\hbar$. Это видно из формулы (5), если записать матричные элементы через ковариантные символы. Следовательно, квантование Березина является деформационным квантованием. Понимание связи между этими методами шло медленно. Недоставало личных контактов.

Чисто математическая проблема, возникающая в теории деформационного квантования, состояла в том, можно ли в указанном смысле проквантовать любую скобку Пуассона? Если скобка невырождена, то она соответствует некоторой симплектической форме. В этом случае положительный ответ содержался в работах Де Вилде — Леконта, и Б. Федосова. В общем случае решение было дано

в известной работе М. Концевича в виде явной комбинаторной конструкции операторов p_k в терминах коэффициентов скобки p_1 . Медаль Филдса была присуждена Концевичу за ряд достижений, главным из которых был «Формальный принцип», который содержит указанную конструкцию.

Сравнивая эти результаты с конструкцией Березина, мы должны задать вопрос о сходимости формального ряда в теории деформационного квантования. Он, как правило, не сходится абсолютно даже для аналитических функций a и b , что видно уже для ряда Грёневольда — Мойяла. Интеграл в формуле (2) для квантования Вейля сходится условно за счёт быстро осциллирующего ядра. В общей конструкции Концевича аналог формулы (2) отсутствует, а оператор p_k получается в результате суммирования вкладов диаграмм, число которых, по оценке автора, имеет порядок $(k!)^2$. Учитывая сказанное, квантование Березина, записанное с помощью явно заданного интеграла, представляется удивительным, а лакуны множества E неслучайными. Синтез метода Березина и деформационного квантования ещё впереди.

7. В середине семидесятых Березин начал работать в квантовой теории поля, которая быстро развивалась под влиянием новых математических идей. Результатом стали его всемирно известные работы по «суперматематике», которую он в числе немногих пионеров и создал. Березину принадлежит, в частности, разработка понятия «суперпространства» и конструкции интегрирования в нём. Как интегрировать по чисто нечётному пространству, т. е. интегрировать элементы грассмановой алгебры с образующими $\xi_1, \dots, \xi_n$, понять было несложно: интеграл должен обращаться в нуль на всех элементах вида $\partial_{\xi_j}(a)$, $j = 1, \dots, n$. Отсюда сразу следует, что он может быть отличен от нуля только на мономе максимальной степени, т. е. на произведении $\xi_1 \dots \xi_n$, интеграл которого принимается равным 1. Аффинное суперпространство размерности $m|n$ — это пространство Λ , заданное на координатном пространстве $\mathbb{R}^m$, с алгеброй $A[\xi_1, \dots, \xi_n]$, где A — алгебра (или пучок) гладких функций от коммутирующих переменных $x_1, \dots, x_m$, а $\xi_1, \dots, \xi_n$ — образующие грассмановой алгебры. Интегрирование плотности с компактным носителем по этому пространству есть комбинация интегрирования по грассмановым переменным и риманова интеграла по $\mathbb{R}^m$. Трудность появляется тогда, когда в Λ допускаются любые замены

переменных, смешивающие чётные и нечётные переменные, сохраняющие лишь суммарную чётность. Требовалось найти формулу, выражающую исходный интеграл в новых координатах. В случае чисто чётного пространства эта формула содержит множитель, называемый якобианом. В общем случае подобный множитель, называемый теперь березинианом, похож — и в то же время не похож — на якобиан. Напомню его вид, в котором x, ξ , а также y, η суть две системы чётных и нечётных координат в Λ :

$$\text{Ber}(y|\eta; x|\xi) = \det \left[\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \det \left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right)^{-1}.$$

Здесь дроби $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \dots$ нужно понимать как прямоугольные матрицы. Впрочем, уверен, что все мои читатели знакомы в той или иной степени с формулой Березина.

В известной схеме Баталина — Вилковьского рассматривается аналог классической механики, заданной на «супер»-фазовом пространстве с нечётной симлектической формой. Проблема³⁾ квантования такой «супер»-системы может привести к синтезу двух главных идей Ф. А. Березина.

Работы Березина о супергруппах положили начало новой области, которая заслуживает отдельного рассказа, и я хочу здесь завершить свой обзор.

8. Множество работ, где встречается имя Березина, необозримо. Количество этих работ значительно больше числа прямых ссылок, но во многих работах необходимая ссылка отсутствует. С течением времени таких работ всё больше, по мере того как вклад Березина становится частью общей математической культуры. Будем помнить, кем и как этот вклад был сделан.

³⁾О решении этой проблемы см. в статье: *Лейтес Д., Шепочкина И.* Как квантовать антискобку // Теоретич. и матем. физика. 2001. Т. 126, № 3. С. 339–369. — *Прим. ред. Д.Л.*

«МЕТОД ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ» БЕРЕЗИНА. ВЗГЛЯД 40 ЛЕТ СПУСТЯ

Ю. А. Неретин

Вот какую притчу о Востоке
Рассказал мне старый аксакал.
«Даже сказки здесь — и те жестоки», —
Думал я и шею измерял.

Владимир Высоцкий

Сначала я попытаюсь рассказать о происхождении книги Березина «Метод вторичного квантования» и её влиянии на математическую жизнь. В § 2 и 3 вкратце описываются две наиболее сложные конструкции этой книги, сейчас их можно описать достаточно просто. Наконец, в последнем параграфе я обсуждаю некоторые (относительно немногие) из приложений, которые имели эти конструкции за последующие годы.

§ 1. Бесконечномерные группы. 1965

1.1. «Хрупкой памяти той моментальный снимок». Когда-то по поводу какой-то годовщины на московском мехмате была большая выставка старых фотографий. Я обнаружил там снимок с подписью: «После лекции профессора Фридрикса». Как положено, вдоль доски стояла цепочка из 10–15 людей. Среди них (это был конец 1950-х годов) — молодой Феликс Березин.

В 1960–70-х годах Березин будет одним из самых ярких математиков тогдашней Москвы. Сейчас, среди всеобщего шума, когда

непонятность работ уже становится преднамеренной и чуть ли не обязательной, нам трудно давать объективные оценки. Но, так или иначе, его известность и через 25 лет после гибели¹⁾ нисколько не уменьшилась. Надо помнить, что речь идет о первопроходце-одиночке, персонаже не слишком приветствуемом в наш век всё нарастающей социализации²⁾ науки (да и не слишком приветствовавшимся уже в его собственный век). В момент, запечатлённый на снимке, этот человек уже имел звонкое имя, его тогдашние работы до сих пор не забыты. И всё-таки его самого мы помним главным образом не из-за тех работ.

Надо сказать, что эти работы 1956–58 гг., частично совместные с И. М. Гельфандом и Ф. И. Карпелевичем, имели большое влияние; ввиду кризиса, в который сейчас вошла теория представлений, они снова становятся интересными как тексты эпохи, когда ещё писали понятно.

Скажем, довольно оживленным сюжетом математики последнего десятилетия была задача о спектре суммы двух эрмитовых матриц (с ее бесчисленными вариантами), множество возможных спектров заполняет довольно замысловатый многогранник Хорна — Клячко. Одна из первых попыток описать его была предпринята в работе Березина и Гельфанда (1956). А именно, этот многогранник снабжен естественной мерой, и в работе эта мера была вычислена. Плотность меры задается знакопеременной суммой, но это ещё не давало ответа на вопрос о носителе меры, т. е. не давало явного описания многогранника. Окончательное описание неравенств, задающих многогранник, было получено А. А. Клячко [75] в 1996 г. Чуть раньше несколько более слабое утверждение было получено У. Хелмке и И. Розенталем [56]. Обсуждение истории этой проблемы уводит от цели настоящих заметок, но один из интересных элементов в этой истории — то, как люди не видели «простых ходов», скажем, неравенства Хорна — Клячко являются прямым следствием минимаксной теоремы Виланда 1955 г. (см. [138])) и теоремы о пересечении циклов Шуберта, известной ещё раньше (кажется, Ходж, 1942 г.). Это надо было просто увидеть и все... Но непонятно, как это можно было бы увидеть.

Кстати, в той же работе Березина — Гельфанда была (возможно, впервые) обнаружена связь этой задачи с вопросом о разложении тензорного произведения конечномерных представлений унитарной группы. Сама

¹⁾Березин погиб 14 июля 1980 года.

²⁾Может быть, чтобы уйти от не вполне точных ассоциаций, аккуратнее сказать «социоцентризации» (когда основным занятием и/или основной целью научного работника становится *social bargaining*).

эта статья является во многом продолжением работ И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка, [45], И. М. Гельфанда [41], В. Б. Лидского [80] 1950 г.

Другая интересная работа Березина того времени — «Операторы Лапласа на полупростых группах» (1956–57), см. [9]–[13]. Следует отметить, что в его теореме о классификации неприводимых представлений комплексных полупростых групп были серьёзные пробелы, что повлекло в своё время оживлённую дискуссию. Березин ответил на возражения Хариш-Чандры в отдельной статье [13], но дискуссия с этим не вполне утихла (я видел переписку Д. П. Желобенко — М. Дюфло, где это обсуждалось ещё в 1973 г.). В 1974 г. в книге Желобенко [140] результаты Березина наконец были превзойдены, а работа Березина переизложена отдельно (Добавление I).

Хотя наличие пробелов в начальной статье печально, подобное ее обсуждение тоже знаменательно. Так или иначе, с теоремы Хариш-Чандры о подфакторе 1953 г. и с работы Березина 1956 г. о характерах началась 30-летняя «борьба» за классификацию всех неприводимых представлений полупростых групп; дальнейшая история тоже сопровождалась большими «разрывами» (как правило, 7–8 лет) между правильными анонсами (Желобенко — Наймарк, Касселман, Ленглендс) и полными опубликованными доказательствами.

Кстати, в той же работе Березина были посчитаны (пробелы были в другом месте) радиальные части операторов Лапласа на полупростых группах (одновременно это было сделано Хариш-Чандрой), что из сегодняшнего дня может выглядеть не менее важным. Это было началом «совсем другой истории». (Следующий «шаг», кажется, был сделан М. А. Ольшевским и А. М. Переломовым в [103]. Современное состояние этого сюжета, уже ушедшего очень далеко, см. у И. Чередника [32].)

Последней в этой серии была работа Березина и Карпелевича 1958 г., где было получено явное выражение для сферических функций на группах $U(p, q)$ через определители, составленные из гауссовых гипергеометрических функций ${}_2F_1$. Формула долго выглядела загадочной (см. статью Б. Хогенбоума 1982 г. по этому поводу); но сейчас, сохранив свою красоту, всё же стала полуючевидной.

Далее «щелкнул затвор фотоаппарата» (см. ниже), и Березин оставил классическую теорию представлений. В первой половине 1960-х годов он был одним из инициаторов изучения гармонического анализа на псевдоримановых симметрических пространствах (см. работу его ученика В. Ф. Молчанова [93]), но сам им не занимался.

Оказывается (кто бы мог подумать), пути Фридрихса и Березина пересекались. Березин стал, кем он стал, в процессе работы над своим «Вторичным квантованием». А отправной точкой для него

была книга ³⁾ Курта Фридрихса [39]. Быть может ⁴⁾, именно момент, когда щелкнул затвор фотоаппарата, был поворотным в математической судьбе этого, тогда ещё молодого, человека.

Разумеется мне (а скорее всего, уже и никому) неизвестно, произошёл ли этот поворот одномоментно, а если да, то в этот ли момент. Мои записки о том, что за этим поворотом последовало.

1.2. Книга Березина. Это была первая книга по бесконечномерным группам и их представлениям. Напомню, как это случилось. Фридрихс сформулировал и попытался решить задачу о максимальной области определения представления Вейля (A. Weil) бесконечномерной симплектической группы и спинорного представления бесконечномерной ортогональной группы. Я намеренно сказал так, чтобы фраза звучала банально. Статья Андре Вейля выйдет через 15 лет после книги Фридрихса.

История с «представлением Вейля» была такая. Фридрихс около 1950 г. заметил, что теорема Стоуна — фон Неймана влечёт существование унитарного проективного представления симплектической группы $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Но ему лично был интересен лишь случай $n = \infty$, в котором его логическая связка не работала. Он занялся им и столкнулся с трудностями, продолжением которых была обсуждаемая нами история.

Ирвинг Сигал в 1959 г. нашёл явную конструкцию этого представления для конечного n . В 1964 г. Андре Вейль написал работу, обобщавшую конструкцию Сигала на p -адические поля (с различными теоретико-числовыми приложениями), после чего и появился термин «представления Вейля», с которым и между собой конкурирует около десятка других, менее употребительных.

У Вейля, кстати, была ещё статья о спинорном представлении, написанная им под псевдонимом Lipschitz.

Вопрос Фридрихса можно формулировать и благозвучнее: «описать естественную группу симметрий пространства Фока», или «описать группу симметрий свободной теории поля», или «описать группу автоморфизмов канонических коммутационных соотно-

³⁾ Точные ссылки указаны ниже в библиографии в порядке английского алфавита. Ниже номер [·] указывается, если ссылка не очевидна.

⁴⁾ Когда-то я внимательно просматривал эту книгу. Думаю, что нужен был сильный внешний толчок, чтобы начать в ней разбираться. Ещё труднее в ней найти то, что в самом деле важно, если заранее не знать, что искать. Кстати, эта книга серьёзно повлияла ещё на одного знаменитого математика, Ирвинга Сигала, о котором многократно заходит речь ниже.

шений», как говорил сам Фридрихс (а за ним и Березин). Независимо от словесных упражнений, вопрос о максимальной диктовался Фридрихсу физической «природой вещей» (или тем, что он воспринимал как таковую)⁵⁾.

В начале 1980-х годов окажется, что за эту «максимальность области определения» стоило бороться и с математической точки зрения. А именно: выяснится, что данные объекты «универсальны»⁶⁾. Окажется⁷⁾, что представления бесконечномерных групп имеют склонность «пропускаться» через спинорное представление или представление Вейля. А поэтому для построения представлений группы G надо просто уметь ее вкладывать в бесконечномерную симплектическую или ортогональную группу (которые, однако, определяются неочевидным образом; впрочем, нетривиальны и вложения). Окажется, что общие теоремы часто можно доказывать, не развивая никакой «теории», а просто анализируя свойства универсальных объектов. Для бесконечномерных групп эта универсальность заменяет параболическое индуцирование в смысле Гельфанда — Наймарка и Хариш-Чандры.

Независимо от Березина и примерно тогда же точное описание упомянутых групп было получено в работах Шейла и Стайнспринга. Сейчас не так уж интересны путанные приоритетные вопросы 45-летней давности. Березин сделал значительно больше.

⁵⁾ Уже редактируя данные записки, я сообразил что в общераспространенных историко-математических представлениях есть одна неточность. В рассказах о начале теории бесконечномерных представлений принято ссылаться на работы Гельфанда — Наймарка и Баргмана 1946—50 гг. Если говорить именно о том, что называлось словами «теория представлений», то это точно вполне. Но статьи Фридрихса 1951—53 гг. (из которых механически была сложена его книга) в действительности были третьим исходным пунктом. И с этого пункта тоже пошло очень многое. Березин увидел (или почувствовал) пересечение путей и на него вышел.

⁶⁾ Подробное обсуждение см. в [96], там же дальнейшие ссылки; в приводимой ниже библиографии к этой теме относятся работы И. Френкеля [38], Р.С. Исмагилова [63], Ю.А. Неретина [94], [95], Г.И. Ольшанского, [105]—[106], Грэма Сигала [114], см. ниже п. 1.13 и § 4. Как «вырожденный» вариант этой универсальности может рассматриваться схема Араки, в библиографии ниже см. [6], [62], [64], [96], [126], [127].

⁷⁾ Чуть раньше Роджер Хау [59] обнаружил универсальность тех же представлений на конечномерном уровне (см. некоторые из «отголосков» его статей в [72], [35], [5]). Впрочем, как заметил Г.И. Ольшанский, эти две «универсальности» между собой связаны.

Березин написал для этих представлений явные формулы. Представления писались интегральными операторами, более того, для данных представлений задание интегральными операторами вообще является самым простым их заданием. Тогда такого ещё никто не видел.

Кстати, хотя конечномерное спинорное представление (объект, очевидно, фундаментальный) было обнаружено Эли Картаном в 1913 г. (см. [31]), оно оставалось плохо «осязаемым» на уровне группы Ли вплоть до Березина.

Потом уже многое диктовалось этими формулами. Об этом ниже.

1.3. Модели пространства Фока. Работа с «теорией поля» вынужденным образом есть работа с функциями от бесконечного числа переменных. А как такие функции записывать? Еще сложнее: как писать операторы в пространстве функций? Сейчас мы знаем и умеем много больше, чем знал и умел Березин тогда. И сталкиваемся с этими «проклятыми» вопросами каждый раз, пытаюсь пройти чуть дальше мест, где люди уже ходили.

Тогда висела в воздухе идея использовать случайные процессы. Говоря казённым языком, они были «на знамени» матфизики, как в 1990-х годах алгебраическая геометрия. В частности, была готовая (и, кстати, очень красивая) модель Ирвинга Сигала с «гауссовой мерой на гильбертовом пространстве, сосредоточенной вне его».

Березин сумел от этого уйти и ввёл голоморфную модель бозонного пространства Фока. Он также придумал, как работать с операторами (на удивление просто). В итоге ему удалось избежать изнурительного отслеживания сходимостей и борьбы с искусственными расходимостями, которые его ждали бы на казавшемся более естественном пути.

Голоморфная модель была тогда же обнаружена Ирвингом Сигалом и Валентином Баргманом. Они, впрочем, оба остановились на факте наличия модели.

1.4. Анализ с нечётными переменными. Здесь можно спорить, была ли это новая сущность или удачный пересказ. Стоит вспомнить о старых физических работах Л. Онзагера, Н. Н. Боголюбова, И. М. Халатникова и о книге К. Шевалле «Алгебраическая теория спиноров», о которой Березин скорее всего не знал. Но декларация о том, что это — анализ, была новой и навязывалась природой вещей в том мире, в который Березин вошёл. Почему-то

грассманов мир оказывался загадочной копией нашего, вроде бы настоящего. И очевидно, что эта декларация имела серьёзные последствия.

1.5. Суперанализ. Супералгебры. Супергруппы. Этого в книге ещё не было. Это был следующий ход, но ход уже вынужденный. Бозон-фермионная равноправность в книге просто слепит глаза⁸⁾. Поэтому надо было рассматривать смешанное пространство, надо было рассматривать смешанные квадратичные операторы. А это суперанализ. Это супералгебры⁹⁾. А «физика» это или «не физика» — уже не важно. Дальнейший путь совсем не прост, но это трудности дороги с ясным в принципе направлением.

Решающим шагом, сделавшим гипотетический сюжет (идея высказана в конце заметки [17] в 1967 г.) реальным, была работа¹⁰⁾ Березина — Каца (1970), где были введены формальные супергруппы. Мне кажется, что это был «потенциальный барьер», отделяющий серьёзную математику от того, что могло бы казаться «игрой в определения». Сами формальные супергруппы были шагом к «глобальным супергруппам» и «суперпространствам», они были введены Д. А. Лейтесом и Ф. А. Березиным в [79], [24].

Работа Березина и Г. И. Каца любопытна и с психологической стороны. Иногда, разбирая статью, интересно попытаться представить себе, как это можно было «изобрести», не зная того, что в ней написано (и того, что последовало за ней), но всё же имея возможность для взгляда «с птичьего полета». Эта статья вроде бы и несложная, но заданный вопрос превращается в мучительную головоломку. С другой стороны, немножко удивляет и то, что её авторы не сделали ещё нескольких шагов (но это при подъёме случается). Так или иначе, двигаться дальше с этой точки было уже можно.

1.6. Книга Березина и физики. Я не физик, и моя точка зрения не есть точка зрения физика. Не думаю, что книга Березина была книгой по физике. Это была книга, написанная под сильным

⁸⁾Мы к этому привыкли, но здесь тоже всё не так просто. Для этого надо было и бозонный, и фермионный случаи хорошо понять. А иначе они не столь уж похожи...

⁹⁾Суперкоммутатор встречался ранее в дифференциальной геометрии, топологии и гомологической алгебре (что, в общем, едино), но это все же не те супералгебры, которыми занимается «теория супералгебр Ли».

¹⁰⁾Я не часто слышал упоминания о втором авторе этой статьи, Г. И. Каце. Стоит отметить, что его работы по «кольцевым группам» во многом подготовили другой «взрыв», а именно работы по «квантовым группам» (это и сами работы Г. И. Каца обсуждаются в [34]).

влиянием физики и оказавшаяся на некоторое время важной для физиков — теоретико-полевиков. Она быстро была переведена на английский, и значительная её часть сразу перешла в «common knowledge» (в частности, путем частичного переизложения в физических учебниках).

После этого перехода сама книга, как текст, стала терять значение. Но её запомнили надолго, а сам Феликс Александрович стал среди физиков широко известен.

Это, в свою очередь, придало ему определённую устойчивость в мире математиков.

1.7. Центральные расширения и связанные с ними казусы.

Центральные расширения бесконечномерных групп вошли в моду около 1980 года. Я помню, что обсуждались, довольно бурно и восторженно, расширения группы диффеоморфизмов окружности, групп петель, бесконечномерных ортогональной и симплектической групп. Первые два действительно были новыми объектами, два последних были описаны в книге Березина мелким шрифтом и очень простыми явными формулами.

Кстати, эти формулы универсальны. Почти все прочие известные центральные расширения могут быть получены индуцированием¹¹⁾ с этих двух. Я не знаю, написано ли это где-нибудь, но это так.

Кроме того, эти формулы совсем не очевидны в конечномерном случае. Лишь в 1978 году соответствующие выражения (включая $SL(2, \mathbb{R})$) были переоткрыты Аленом Гишарде и Дэвидом Вигнером [49]¹²⁾ и вызвали тогда определённое удивление.

Во всём последовавшем затем научном «движении» упоминаний о расширениях Березина нет. Можно было бы сказать, что Березин опередил своё время, что потом сделанное им самим было переоткрыто, что потом центральные расширения появлялись независимо от Березина и т. д. и т. п. Мне кажется, что подобные слова не имеют смысла.

Это забавный казус, который стоит обсудить (хотя из обсуждаемых в статье научных сюжетов центральные расширения — не самый важный). Дело в том, что «Вторичное квантование» сразу

¹¹⁾ А именно: мы вкладываем бесконечномерную группу G в (скажем) ортогональную группу; имея центральное расширение ортогональной группы, мы получаем и центральное расширение группы G .

¹²⁾ Обсуждение собственно этой работы увело бы нас в сторону.

стало известным, и всё последующее, независимо от юридической зависимости, происходило, когда книжка уже была. Обсудим это на примере открытия алгебры Вирасоро в 1968–1971 гг.

Математики часто думают, что эта алгебра спустилась в 1970 году свыше как «физическое откровение». На самом деле она возникла во вполне математических вычислениях физиков. А именно: алгебра Вирасоро — подалгебра алгебры Ли квадратичных операторов¹³⁾, которая, в свою очередь, есть алгебра Ли бесконечномерной симплектической группы. У последней было расширение Березина. Таким образом, с математической точки зрения, было два шага: указание удачной подалгебры в симплектической алгебре, а дальше — индуцирование центрального расширения.

Едва ли физики могли так думать. Но у них было common knowledge о квадратичных операторах, и сработало именно оно. Как оно возникло, я не знаю, но эти операторы, например, подробно обсуждаются во «Вторичном квантовании», и это — один из возможных источников, хотя вряд ли единственный.

Механизм обнаружения центральных расширений у аффинных алгебр был тот же.

Алгебра Вирасоро появилась у математиков в 1968 г. (И. М. Гельфанд, Д. Б. Фукс [42]). Вообще-то описание центральных расширений алгебры Ли векторных полей на окружности — тривиальная задача, которую любой математик-профессионал может решить за несколько часов. С другой стороны, её открытие было крупным достижением.

Возникает вопрос: почему алгебру Вирасоро не нашли раньше (например, в 1935 году)? Ответ очень простой: искать центральные расширения бесконечномерных алгебр или групп никому не приходило в голову. Задачу нетривиально увидеть. В 1965 году стало известно, что подобные расширения бывают, у людей мог появиться повод об этом задуматься. У авторов [42] могли быть и другие причины думать о расширениях и когомологиях бесконечномерных алгебр, но и в этом случае лишний повод не помешает.

В связи с этим разумно встать на отстраненную точку зрения, что-то вроде Микромегаса ([134]). В подобных ситуациях иногда можно увидеть прямое использование результатов, можно увидеть

¹³⁾ Алгебра Ли квадратичных выражений по операторам рождения и уничтожения $z_j, \partial/\partial z_j$.

или подозревать зависимость идей. А вопрос о «независимости» смысла не имеет.

Интересен вопрос о судьбе вполне безумной идеи суперсимметрии в физике. Она была высказана Березиным сразу после «Вторичного квантования», а дальше — неясно, услышали ли её физики или придумали сами (или был какой-нибудь промежуточный вариант, скажем, вторичное её появление под влиянием книги Березина вполне возможно).

Уже компилируя библиографию к статье, я наткнулся на слова A. S. Whightman'a 1986 г. (MR0869059): «... [Эта книга] была влиятельной по двум причинам. Во-первых, она суммировала несколько десятилетий применения формализма вторичного квантования. Во-вторых, она систематически развила формализм функций от антикоммутирующих переменных и новым способом высветила параллелизм между бозе-и ферми-системами». Это примерно соответствует «вынуждению» суперсимметрий, о котором я писал выше. Но сама книга уже написана под впечатлением удивления от параллелизма (это видно из текста).

Мне кажется, что вопрос о «независимости» идеи суперсимметрии от [17], [22] внутри Советского Союза (а первые работы [132], [46], [133] по суперсимметриям там и появились) не имеет смысла, так же как и вообще не имеет смысла вопрос о независимости от «Вторичного квантования». Просто непонятно, что слово «независимость» в данном случае могло бы значить. Эти слова ни явно, ни косвенно не относятся к значению или оригинальности этих пионерских работ, повлекших за собой столь широкое движение в собственно теоретической физике. Речь идёт о разных вещах.

С другой стороны, собственно «зависимость» (в смысле прямого использования) здесь иногда видна сразу. Это обсуждал М. Маринов [88] в заметках о моменте открытия суперсимметрий. Он, в частности, прослеживал цепочки видимых зависимостей первых физических работ на эту тему от «Вторичного квантования». Его наблюдения любопытны, но здесь не место их пересказывать. Ещё есть любопытная статья о том же моменте времени М. Шифмана [121], где (из иной «системы ценностей») затрагивается вопрос «летучести идей».

Ниже я ещё раз вернусь к смыслу слова «независимость», обсуждая предмет, по определенным причинам мне лично хорошо знакомый.

Я остановился на этом сюжете в связи со сложной судьбой самого Березина, которой я кратко коснусь чуть ниже.

1.8. Системы когерентных состояний. (См. [108], [70].) Этот термин¹⁴⁾ очень часто упоминается, но, по сути, ничего не значит. Это удачно выбранная система векторов в гильбертовом простран-

¹⁴⁾Термин введен И. Клаудером. Говорят также «переполненная система».

стве с известными скалярными произведениями. Оказывается, базисы для работы с гильбертовыми пространствами не нужны, «систем когерентных состояний» вполне достаточно¹⁵⁾. Правда нужна определенная «ловкость рук». Дальше оказывается, что существуют пространства сложной природы, в которых явно выписанные базисы вызывают лишь желание никогда их больше не видеть. Оказывается, бывают внешне разные пространства (например, разной размерности) с одной и той же «системой когерентных состояний» и т. д. и т. п. Ещё оказывается, что неединственность разложения по «когерентным состояниям», наряду с бросающимися в глаза минусами, имеет и очень серьёзные плюсы.

Никакой «высокой теории» в этом нет, есть лишь «ловкость рук». Но ее надо было развить. В книге Березина она уже присутствует как инструмент, но ещё не изложена в виде «самоучителя».

Повторяю, всё это вполне тривиально. Только давно бы это пора включить в учебники функционального анализа...

1.9. Общий комментарий. Обычно люди пишут книги, пытаясь изложить то, что уже было известно. В книге Березина подобного не было. Тогда, в 1965 г., в этом тексте всё было новым¹⁶⁾.

1.10. Книга Березина как памятник словесности. Сразу должен сказать, что эта словесность является не вполне изящной. Работы Березина бывали трудночитаемы¹⁷⁾. С другой стороны, автор оригинальной работы всегда находится в несколько проигрышном положении по сравнению с автором работы заурядной. Ну и, наконец, книга имела тяжёлую историю.

¹⁵⁾ Скажу об этом иначе. Речь идет о самодостаточности воспроизводящих ядер как инструмента работы с конкретными гильбертовыми пространствами, что позволяет уйти от ℓ_2 - L^2 - H^2 -точки зрения. Я уже застал время (после [18]), когда это ещё вызывало удивление. Историю самих воспроизводящих ядер я проследить не в состоянии, см. старые работы И. Шонберга (1938), С. Бергмана, М. Г. Крейна (1949). Быть может, сюжет восходит к статье Карла Менгера (1924) об изометричных вложениях метрических пространств в гильбертовы (и, соответственно, об условно положительно определённых ядрах).

¹⁶⁾ Но такие книги бывают. Читатель может попытаться поискать примеры.

¹⁷⁾ А бывали и понятными. Кстати, изданные А. А. Кирилловым и В. П. Паламовым неоконченные посмертные записки Березина по суперанализу в целом (при всех их естественных стилистических недостатках) являются хорошо и понятно написанным текстом. Вообще Кириллов сделал очень много для распространения идей Березина.

В итоге книга совсем не проста. Читатель оказывается в положении лыжника, идущего вторым по лыжне. Но с другой стороны, никакого дополнительного сопротивления, кроме естественного сопротивления местности и недотропленной лыжни, читатель не испытывает. В большинстве современных математических книг природа сопротивления чтению иная. Я вернусь к этому вопросу позже.

Книга была издана при поддержке физиков и, по-видимому, на физиков была рассчитана. Наверное, это было к лучшему, но её восприятие математиками от этого не упрощалось. Однако она является вполне точной и строгой математической работой.

Кстати, в качестве технически-аналитического текста книга с её замысловатыми, но не занудными деталями очень интересна и поучительна.

1.11. Бесконечномерные группы. Москва, 1965–1975 годы. В 1946–1950 гг. И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, с одной стороны, и В. Баргманн — с другой, сообщили, что представления полупростых групп очень интересны и что там есть что делать. Перечислю некоторых людей, которые в 1950–1965 гг. занимались в Советском Союзе¹⁸⁾ полупростыми группами и их представлениями, по тем или иным причинам (необязательно под влиянием Гельфанда и Наймарка), в том или ином возрасте, в той или иной степени: Ф. А. Березин, Н. Я. Виленкин, Э. Б. Винберг, С. Г. Гиндикин, М. И. Граев, Е. Б. Дынкин, Д. П. Желобенко, Р. С. Исмаилов, Ф. И. Карпелевич, А. А. Кириллов, А. У. Климык, М. Г. Крейн, Р. А. Минлос, В. Ф. Молчанов, М. Н. Олевский, М. А. Ольшанецкий, А. Л. Онищик, А. М. Переломов, И. И. Пятацкий-Шапиро, П. К. Рашевский, С. В. Фомин, М. Л. Цетлин. Список, надо сказать, внушительный.

¹⁸⁾Чтобы отвлечься от москвоцентризма, стоит отметить, что работы [7], [45] повлекли и «цепную реакцию» на Западе. В качестве отдельного «явления природы» возникла загадочная фигура Хариш-Чандры — скорее «одинокое танка», чем «одинокое волка». Он всю жизнь двигался в одном направлении, смирная все препятствия на своем пути, и оставил после себя «просеку», поражающей воображение величины. Напомню, что его достойным научным соперником Березин выступал в 1956–1957 годах до своего поворота. В связи с грустными вопросами, обсуждаемыми несколько ниже (и для сравнения), отмечу, что Хариш-Чандра изобрел технику «броневой защиты» своих научных работ, делая почти невозможным их действительное понимание для постороннего глаза. Этим он обеспечил себе «неуязвимость» и возможность работы вне «гоночной атмосферы», но — с другой стороны — внес этим свой личный вклад в непонятность современной математики.

А теперь перечислю некоторые работы по бесконечномерным группам и алгебрам Ли следующего десятилетия, 1965–75 гг.:

- статья В. И. Арнольда о геодезических на группах диффеоморфизмов и уравнениях гидродинамики, 1966;
- статьи ¹⁹⁾ Р. С. Иismaгилова о группе SL_2 над неархимедовыми нелокальными полями;
- книга Г. Е. Шилова, Фан Дык Тиня «Интеграл, мера, производная на линейном пространстве», 1967;
- работы по когомологиям бесконечномерных алгебр Ли Гельфанда — Фукса, а также Л. В. Гончаровой и М. В. Лосика;
- формальная дифференциальная геометрия И. М. Гельфанда и Д. А. Каждана ;
- работы И. Л. Кантора и В. Г. Каца по аффинным алгебрам Ли;
- работы А. М. Вершика, И. М. Гельфанда и М. И. Граева, а также Р. С. Иismaгилова на грани теории представлений и случайных процессов ²⁰⁾.

Всё это — яркие новаторские работы.

Но ясно, что в 1965–67 гг. что-то изменилось (при том что полупростые группы тогда отнюдь не исчерпали себя, никакого кризиса ещё не было).

Попытаемся представить себе математическую Москву 1960 года. Тогдашнему человеку, возможно, могло прийти в голову, что бывают чудовищно большие группы. Но объект этот малопривлекателен. Ну, можно поиграть в определения. Что дальше? Кое-кто (мало кто) знал, что есть какое-то странное действие бесконечномерной орто-

¹⁹⁾ Из всех упомянутых в этом списке работ эти наименее цитируемы. Однако в них было обнаружено умножение двойных классов смежности в бесконечномерных группах.

²⁰⁾ Для точности следует указать ещё работу А. И. Кострикина и И. Р. Шафаревича [77] (1965), находившуюся в стороне от данного движения. Они обнаружили, что многочисленные странные примеры простых алгебры Ли над конечным полем являются просто алгебрами Ли векторных полей, имитированных в конечной характеристике. То есть итоговые содержательные объекты конечномерны. Но идейный источник (который сам по себе не использовался) — «бесконечномерная» теорема Эли Картана о примитивных псевдогруппах [30], интерес к которой оживился в начале 1960-х годов. Я думаю, что эта теорема была важной отправной точкой и для И. Л. Кантора.

гональной группы на пространстве с мерой, построенное Ирвингом Сигалом и не очень понятно им описанное²¹⁾.

А в 1960–62 годах Березин сообщил (а в 1965 г. его пришлось услышать), что бесконечномерные группы (пока ещё немногие) — это не обобщение ради обобщения, это новая содержательная сущность. Он показал, что это не монстры, а осязаемые объекты. Что в связи с ними можно писать формулы. И, наконец, интерес, проявленный «физиками», говорил сам за себя. Это был момент, когда у серьёзных и «интеллектуально мобильных» людей были основания задуматься и в этот момент сообразить, что эти, возможно, уже и не монстры, нужны и им самим.

Но, как ни рассуждай, 1965 год был годом смены вкусов. И повод к смене вкусов тоже был. И как ни рассуждай, с книги Березина начиналось крупное «научно-общественное движение». Во всяком случае, в размерах одного города. Но города в то время в математике важного.

Это существенно меняло точки зрения. Это ставило новые задачи, которых раньше просто не видели. «Рабочие руки» были. А дальше было «новое Эльдorado» с его новой (уже самораскручивающейся) идеологией²²⁾.

А вот сам Березин бесконечномерными группами больше не занимался...

1.12. Березин после «Вторичного квантования». В 1965 году Березин оказался в положении человека, поднявшегося на высокую вершину. Возможно, часть тогда им увиденного была миражом. Это тоже плата за восхождение, виды в далекой дымке не всегда можно истолковать правильно (Березину это в целом удавалось, и это одна из загадок его личности). Но надо заметить, что представле-

²¹⁾ Издалека видно, что серьёзные работы, относящиеся к представлениям бесконечномерных групп уже были, например статьи И. Шонберга [111], [110] и статья М. Г. Крейна [78] (скорее всего написанная не без влияния Шонберга или/и К. Менгера). Издалека видно, что чуть-чуть иначе взглянув на Шонберга-1938, можно было бы сразу «оказаться» году в 1962-м. Только это — одно из невероятных «чуть-чуть».

²²⁾ Около 1970 года А. А. Кириллов начал «пропаганду» теории представлений бесконечномерных групп (например, в книге 1972 года бесконечномерные группы указывались как вероятное будущее теории представлений). В тот момент ничего, кроме книги Березина (и, по-видимому, уже проведённых «разведочных» работ самого Кириллова), ещё не было. Но появилось очень скоро.

ния человека, наблюдающего мир из предписанной долины или из середины бегущей на месте (и не лишенной агрессивности) толпы, будучи социально бесспорными, с какой-то иной точки зрения все же не лишены экстравагантности.

Основные группы работ²³⁾ Березина последующих 15 лет — это суперанализ, общая теория символов операторов и общие концепции квантования, гильбертовы пространства голоморфных функций. Выше уже было сказано, что суперанализ был «вынужденным ходом». Два других сюжета тоже возникли как продолжение «Вторичного квантования».

В этом перечне я скорее всего что-то пропустил, многих работ²⁴⁾ я никогда не читал и даже не видел. Но я читал довольно много, и должен сказать, что Березин всегда оставался человеком, способным видеть то, что никто другой на его месте не увидел бы. Думаю, что встав на нетривиальную общую точку зрения в 1960 году, он уже никогда с ней не сходил, и, собственно, это было источником его мощи.

Скажу о предмете, мне по роду деятельности хорошо знаком. Работа Березина «Квантование в симметрических областях» (1975) открывала новый сюжет в теории представлений вещественных полупростых групп — гильбертовы пространства голоморфных функций в симметрических областях.

Немного об истории предмета. Хариш-Чандра в 1955 г. [54], ввел голоморфные дискретные серии (забавно, что в его конструкции были задействованы объекты, названные много позже модулями Верма, они использовались Хариш-Чандрой и в других работах). Тогда эти серии выглядели лишь элементами большого «зоопарка» унитарных представлений и в таком качестве периодически изучались специалистами (например, М. И. Граевым [48]). Березин обнаружил, что эти «серии» допускают аналитическое продолжение по параметру, и картина быстро стала интересной, потому что появилось много дополнительных явлений, начали обнаруживаться связи с другими областями математики и т. д. (в этот момент

²³⁾Здесь нет возможности обсуждать эти работы; надеюсь, что другие авторы этого сборника сделают это лучше, чем мог бы сделать я. См., например, статью А. С. Шварца. Напомню, что Березин более всего известен именно как основатель суперматематики. См. также статью А. С. Лосева о недавно открывшихся возможностях суперанализа.

²⁴⁾См. обзор работ Березина, сделанный Р. А. Минлосом, а также удивляющую разнообразием библиографию статей в конце этой книги. В некрологе в «Успехах физических наук» [101] подчеркиваются работы по квантовой задаче многих тел.

«осознания» значительную роль сыграли также работы сотрудничавшего с Березиным Е. А. Гуткина). В итоге возникла область, где есть что делать, эта деятельность началась и пока ещё продолжается, хотя многое иное, казавшееся важным в 1975 году, забывается (и наблюдать это грустно).

Те же объекты были вскоре получены другим способом Мишель Вернь и Хьюго Росси [125], а также Ноланом Валлахом [136]. Дальше, всем было очевидно, что нужно было заниматься пространствами векторнозначных голоморфных функций в тех же областях. Этому предмету предстояло стать местом очередных «гонок» на следующие 10 лет; эти содержательные интересные работы²⁵⁾ (см. М. Кашивара, М. Вернь [72], Т. Энрайт, Р. Хау, Н. Валлах [35]) в итоге, к сожалению, так нигде понятно не были переизложены.

Но Березин в короткой заметке 1978 г.²⁶⁾ [19] сделал шаг в совершенно другую сторону (это внезапно «аукнулось» в 1994 г. у Гаральда Упмайера и Андре Унтерберже) и в итоге привело к оживлению (боюсь, что временному) уже входившего в состояние коллапса некоммутативного гармонического анализа.

1.13. Книга Березина. 15 лет спустя. Хотя многое, пришедшее из этой книги, быстро вошло в обиход, две самых сложных (и на мой взгляд, основных) конструкции долго оставались в математике без применения. Они сработали в 1979–80 годах (а публикации были уже позже) в работах Г. И. Ольшанского, Р. С. Исмаилова, Грэма Сигала и автора настоящих заметок. Перечисленные работы были посвящены разным вещам, в первых трёх случаях они напрямую использовали конструкции из «Вторичного квантования»; я, как ни странно, тогда ещё ничего не знал, кроме книги Шилова — Фан Дык Тиня и статьи Шейла.

1.14. Сорок лет спустя. Взгляд из настоящего на прошлое и из прошлого на настоящее. Ситуация в математике и мате-

²⁵⁾ См. также статью Г. И. Ольшанского [104], написанную для «поддержки» теории представлений бесконечномерных групп.

²⁶⁾ В date я не уверен. Согласно воспоминаниям Е. Г. Карпель, 6 сентября 1973 г. Березин подал в «Известия АН СССР» большую статью. Редакция попросила разделить статью на 3 части. Вторая часть — это упомянутая работа 1975 г., третья часть была в итоге отклонена. Её содержание неизвестно, и ничего, соответствующего данному предмету, кроме заметки 1978 г., в публикациях Березина не было. Кстати, я не вижу причин видеть «злой умысел» в действиях редакции «Известий»: большие статьи тогда почему-то не любили, все три части, скорее всего, должны были рецензироваться по отдельности.

математической физике в последние 10–15 лет быстро становится всё более зловещей. Эта точка зрения уже не очень оригинальна, см., например, статьи В. И. Арнольда и С. П. Новикова по этому поводу. В частности, наступил кризис способности (и желания!) математиков понимать друг друга. Эта «частность», в свою очередь, должна повлечь много иного, не столь частного. Вопрос Арнольда «Выживет ли математика?»²⁷ не есть риторика. Разумные реакции уже сильно запоздали, и выйти из тупика нельзя без тяжёлых потерь. Уже началось необратимое омертвление больших массивов содержательных текстов. Они уже никогда и никем не смогут быть прочитаны.

Сложность современной математики (математика, вообще-то, наука²⁷) простая, но сейчас, правда, стала несколько сложноватой) является лишь поверхностным объяснением. В действительности современные математические тексты значительно сложнее, чем их содержание. Силы людей кончаются на уровне попыток прочтения текстов, до содержания дело просто не доходит²⁸). Кстати, и голова теперь забита своей «родной» терминологией настолько, что никакой иной уже понимать не хочется.

Одним из источников сложности являются иногда упоминаемые в этой статье «гонки». Это слово относится к широко распространенному явлению (см. пример, ставший символом, в [86] и обсуждение одной хрестоматийной дискуссии в [67]). Я попытаюсь дать определение: это ситуация, когда многие пытаются как можно скорее решить задачу, рассматриваемую частью общества как важную, но фактической целью является фиксация социумом факта решения задачи кем-то первым. Отчасти это может рассматриваться как концентрация сил на «важном направлении».

Однако одновременно хотелось бы, чтобы достигалась прозрачность, но это требует серьёзных дополнительных усилий, что, с одной стороны,

²⁷) Не совсем верно, что математика — наука (в старом смысле слова), теперь это скорее род деятельности, вне деятельности она не может существовать, что создает проблемы в поисках контактов с нематематиками.

²⁸) Удивительно, сколь многое изменилось за последние 25 лет. Я, будучи аспирантом, купив в магазине (суперновойшую) переводную книгу издательства «Мир», мог сесть в электричку и там спокойно её читать. Интересно представить себе современного аспиранта-математика, читающего в электричке монографию совсем не по своей тематике.

Статьи, которые невозможно прочесть, тогда уже появились, но некоторое время, пока все не привыкли, это вызывало удивление. Доклады на конференциях, где у рассказчика нет ни малейшего желания быть понятым, а у зрителей нет даже идеи что-либо понять, начали появляться на моей памяти и постепенно стали преобладающим зрелищем.

отвлекает от цели, с другой — упрощает её достижение другими. Наконец, по окончании могут потребоваться большие усилия по упрощению математического. «Истина, как вы знаете, — это то, что делает мир проще, а отнюдь не то, что обращает его в хаос». (Mais la vérité, vous le savez, c'est ce qui simplifie le monde et non ce qui crée le chaos, [113].) Но усилия в этом направлении энергетически невыгодны, потому что «призов» в среднем не влекут. Все это сейчас работает само собой как слепой социальный механизм.

Внутренняя атмосфера «гонок» и «гонки» как средство социального отбора — вопросы отдельные.

Другое объяснение сложности современной математики — усиливающаяся социоцентризация науки. С одной стороны, математики объективно обладают большими возможностями для индивидуальной работы, чем другие исследователи. Но с другой стороны, внешних сил, сдерживающих эту социоцентризацию, в чистой математике нет. Наконец, в условиях непонятности текстов индивидуальная оценка чужой деятельности становится невозможной. Таким образом, формирование общественного мнения становится чисто социальным процессом, оторванным от собственно научного профессионализма²⁹). По нынешним временам, скажем точнее, математический смысл становится «кажимостью», оторванной от настоящей (социальной) реальности. Математика решительно идет к своим собственным «зияющим высотам» [142].

Сам Березин жил в «добрые старые времена», когда до всего этого было ещё далеко. Но вот с «зарёй научного (математического) социализма» ему познакомиться пришлось.

Математическая Москва между 1945 и 1990 годами была выдающимся явлением, возможно, необычным в истории науки вообще. Но из-за замкнутости и сравнительной многолюдности этого мира процессы социоцентризации там протекали относительно быстро. И сейчас, 17 лет спустя, во многом благодаря инерции этих процессов (превратившихся в фарс), Москва больше не является математическим центром.

Березин оказался одиночкой «под огнём» нескольких научных группировок. Но я думаю, что Березин смог стать тем, кем он стал, и совершить то, что он совершил, не только вопреки происходившему противостоянию, но и, во многом, благодаря ему. «Так тяжкий

²⁹) Стоит заметить, что и то и другое сцеплено также с процессом «умножения сущностей сверх меры».

млат, дробя стекло, куёт булат». Кажется, ему лично это дорого стоило. Нам, как раз, сожалеть о том, что Березин стал Березиным, не приходится.

Несколько лет назад издательством World Scientific был издан сборник работ о Березине [120]. Человек, прочитавший несколько статей из него, перестает что-либо понимать, кроме того, что жизнь Березина была клубком трудностей непонятной природы.

Я всегда воспринимал Березина как «интеллектуального героя» и никогда не пытался узнать «подробности» его конфликта с математическим сообществом. Это событие я с удивлением «вычислил», читая математические статьи (благо тогда люди умели читать между строк). Данный конфликт включал в себя цепочку видимых личных столкновений, но по типологии не мог к ним сводиться (и вообще, мало ли кто с кем когда ссорился, не в этом дело). Я лишь отмечу некоторые детали, которые не бросаются сразу в глаза читателю этого сборника.

Во-первых, «Вторичное квантование», будучи книгой по теории представлений, полностью находилось за пределами круга идей советской школы теории представлений (в том числе и ранних работ Березина), с одной стороны, и её соперника, Хариш-Чандры лично, — с другой. Это поразительно, но это так.

Во-вторых, наша сегодняшняя оценка многих работ Березина (например, первых работ по суперанализу или [18]) содержит существенную аберрацию зрения. С точки зрения математика-современника, никаких «актуальных задач» в них не решалось, это были просто непонятные работы «неизвестно о чём» (статьи о символах в этом отношении были благополучнее).

Мы можем восхищаться этими работами, критиковать их или никак к ним не относиться. Но любой человек, знакомый с современными научно-социальными нравами, заметит, что ничего хорошего для человека с недостаточно высоким положением в научной иерархии такой «расклад» не предвещал (причём угрозы были достаточно разнообразны). Подобная ситуация тем опаснее, чем выше уровень социоцентризации. А это была замкнутая Москва, разделённая на соперничающие научные партии, с их «позиционной войной» (где правила обязана соблюдать лишь противная сторона) и проблемами удержания внутрипартийной дисциплины.

Взрывоопасная ситуация не обязательно влечёт взрыв. Но может и повлечь.

Люди, в той или иной степени участвовавшие в дальнейших событиях, не были худшими из людей, совсем наоборот. Выше я сделал несколько нелестных замечаний о московском математическом сообществе. Но оно не было худшим из миров — достаточно посмотреть на его научные дости-

жения, в чём-то оно было наилучшим. Оно, кстати, было сообществом, свободным в степени, какой представителям других наук (да и нынешним математикам) не понять. К сожалению, наряду с этим есть обычные законы социальности, которым все группы людей в большей или меньшей степени подвержены. Реакции общественных структур, подавляющих возможность асоциального поведения своих членов, поразительно однотипны (см. обсуждение этой проблемы в [83], см. также описательно-феноменологическую работу [142]).

Мне кажется, что Березин «прорвался» и «на социальном фронте» тоже, и к 1980 году конфликт подходил к естественному исчерпанию.³⁰⁾

Вернёмся к сегодняшнему кризису. В нём сыграли свою роль и некоторые старые «идеологические установки». Мы воспринимаем математику как объединение «теорий». Каждая теория направлена на описание подотчётной ей местности. Человеку, решившему куда-либо прогуляться, предлагается «выучить теорию». Но эта «теория» есть лишь человеческое творение, которое (даже в «досоциоцентрическую эпоху») создавалось лишь для удобства людей, в данной местности находящихся.

Один из возможных способов, которыми нынешние люди пытаются восстановить общематематическую картину, — создание жанра «командных высот». Их описание должно делаться на общечеловеческом (общематематическом) языке, и сами «высоты» (высоты, а не низины) каждой «теории» должны быть доступны для внешнего понимания.

Возвращаюсь к книге Березина. В математике она повлекла за собой два крупных «водоворота» — «бесконечномерные группы» и «суперанализ», — а также и иные последствия, о которых отчасти я уже упоминал. Как было отмечено выше, «Вторичное квантование» не являлось образцом понятно написанной *математической* книги. Это было связано с ее высокой оригинальностью в момент создания и усугублено побочными проблемами. Но сложной книгой в современном понимании этого она не была. Кроме того, такого

³⁰⁾ Конфликт выдающейся личности с окружением — не такое уж редкое явление. В истории русской математики была непростая судьба Н. И. Лобачевского (см. [82]); не столь яркий и менее известный случай — Ф. Э. Молин (см. [92]). Последний столкнулся с обструкцией в связи с занятиями не существовавшими (и возникшими не без его участия) теорией представлений и теорией ассоциативных алгебр. Мне лично кажется, что эти конфликты имели менее жесткие формы.

Коснувшись данной темы, оставим её, и как Василий Тёркин, вернемся с того света [123].

рода недостатки книг не фатальны, они, очевидно, могут быть исправлены в «следующем поколении» литературы.

С другой стороны, в тогдашней *теоретико-полевой физике* она, по-видимому, сыграла роль не только «плацдарма для будущего наступления», но и «влиятельного» упрощающего текста (см. цитату из Уайтмана выше).

Ну и наконец, книга Березина — интересный образец «нетеоретической» книги. В ней не было никаких общих построений, а просто описывались две конкретные «командные высоты».

С проблемой «теоретичности/нетеоретичности» теории представлений бесконечномерных групп столкнулась следующая волна исследователей (А. А. Кириллов, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, А. М. Вершик, Р. С. Исмаилов) в начале 1970-х годов. Начинать рассуждение словами «возьмем произвольную группу Ли» можно. Но после слов «возьмём произвольную бесконечномерную группу» слово «тогда» повисает в воздухе (далее сказать ничего нельзя, как ни уточняй определение). Можно сказать «возьмем группу петель» или «возьмем (G, K) -пару Ольшанского» (но и те и другие, по существу, являются элементами списков). Вообще говоря (но не всегда), рискованна фраза «возьмем произвольное представление такой-то (названной) группы G ». Возможности сказать «тогда» опять может не оказаться. В 1970–80-х годах постепенно вырабатывались подходы к преодолению этих кажущихся странностей.

Оказалось, что представления бесконечномерных групп образуют вполне связную картину, что одни и те же методы и явления связаны с внешне совершенно разными группами, что разные классы групп напрямую связаны между собой и рассматривать их естественнее вместе. Но эта объективно связанная картина «организована» не как «аксиоматическая теория» в духе Н. Бурбаки. Соответственно, и «вход» в представления бесконечномерных групп мог быть лишь нетеоретическим (т. е. основанным на попытке решить удачно угаданную конкретную задачу). Как мы уже обсуждали, ровно так это и произошло.

Любопытно, что в советской школе классической теории представлений переплетались две тенденции: «нетеоретическая» и «теоретическая», родоначальниками которых были, как мне кажется, И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, с одной стороны (они делали ставку на написание понятных и пригодных для чтения текстов, работе в, по возможности, конкретизированных ситуациях и действиях по аналогии), и Е. Б. Дынкин (с разработкой общих подходов и унифицирующей техники) — с другой. Но тенденции действительно переплетались: те же «основатели» могли иногда выступать и в противоположном качестве, никакого противоречия в этом нет.

Кстати, в 1964 г. произошёл ещё один «вход» в представления бесконечномерных групп, а именно появилась работа Эльмара Тома, описывавшая все центральные положительно определённые функции на бесконечной симметрической группе (т. е. «заход» тоже «нетеоретический»). Впоследствии эта теорема оказалась важной и сама по себе, и как предмет для подражания (см. [128], [129], [28]). Кажется, первой серьёзной реакцией на нее были работы С. Стратилы и Д. Войкулеску 1975—1976 гг., см. [131].

* * *

Автор с Феликсом Александровичем знаком не был. Весной 1980 года я — студент-пятикурсник — сидел на последней парте на спецкурсе по квантовой механике. В июне 1980 года я зашел на кафедру ТФФА³¹⁾, чтобы задать Березину один математический вопрос. Секретарша сказала, что он два дня назад уехал и будет лишь в сентябре... В ноябре, разглядывая статью с «физической абракадаброй», я сообразил, что (инфинитезимальным) квадратичным операторам Вирасоро соответствуют групповые операторы и что сами формулы Вирасоро деформируются.

Так случилось, что много позже [97] я оказался «продолжателем» вышеупомянутой заметки 1978 г. [19]. Это забавно с точки зрения вопроса о «нечётких зависимостях», обсуждавшегося выше. На сюжет заметки [19] вторично «вышли» Г. И. Олшанский и я в 1984 году, реального пересечения с Березиным у нас не было (но зависимость от статьи Березина [18] была прямой), внешне все выглядело непохоже; так что мы даже не заметили близости этих работ. В 1995 году мы наконец собрались эту работу «по-человечески» написать, и поэтому я вернулся к данному предмету. Я продвинулся насколько мог, но дальние цели выглядели недостижимыми. Это была «развилка», и я наверняка пошел бы в другую сторону. Но В. Ф. Молчанов сказал мне, что Березин «посчитал формулу Планшереля» в такой-то и такой-то ситуации. Я понял из этого, что некоторый интеграл считается, и, собственно, факт вычислимости интеграла (а не окончательная формула) был для меня решающей информацией. Меня при этом позабавило наличие старых человеческих следов в данной местности.

С точки зрения lawyer'a мои последующие статьи по «ядрам Березина» от Березина не зависели. Но непонятно, что может значить слово «независимость», когда всё может решать обрывок фразы (в иных ситуациях я это много раз наблюдал и на себе, и на других).

³¹⁾Кафедра теории функций и функционального анализа.

§ 2. «Группа автоморфизмов канонических коммутационных соотношений»

Здесь описывается конструкция Березина для группы автоморфизмов канонических коммутационных соотношений. Я не привожу доказательств, но мне кажется, что этот раздел можно рассматривать как набор упражнений по функциональному анализу.

2.1. Бозонное пространство Фока с конечным числом степеней свободы. Обозначим через $\lambda(z)$ меру Лебега на $\mathbb{C}^n$, нормированную следующим образом:

$$d\lambda(z) = \pi^{-n} \prod dx_j dy_j, \quad \text{где } x_j = \operatorname{Re} z_j, y_j = \operatorname{Im} z_j.$$

Бозонное пространство Фока $\mathbf{F}_n$ — это пространство голоморфных функций $f(z)$ на $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} d\lambda(z) < \infty.$$

Введем в $\mathbf{F}_n$ скалярное произведение по формуле

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{C}^n} f(z) \overline{g(z)} e^{-|z|^2} d\lambda(z).$$

2.1.1. Предложение. *Функции вида*

$$z^{\mathbf{k}} := z_1^{k_1} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n},$$

где $k_j = 0, 1, 2, \dots$, образуют ортогональный базис в $\mathbf{F}_n$, причём

$$\|z_1^{k_1} \cdot \dots \cdot z_n^{k_n}\|^2 = k_1! \cdot \dots \cdot k_n!$$

2.1.2. Теорема. *Пространство $\mathbf{F}_n$ является гильбертовым пространством (т. е. оно полно). Иными словами, пересечение пространства голоморфных функций с L^2 замкнуто в L^2 .*

2.2. Пример. Гауссовы векторы. Возьмем функцию

$$\mathbf{b}_T(z) := \exp\left(\frac{1}{2} z T z^t\right),$$

где T — симметричная матрица, а знак t означает транспонирование.

2.2.1. Наблюдение. *Вектор $\mathbf{b}_T$ содержится в $\mathbf{F}_n$ тогда и только тогда, когда $\|T\| < 1$.*

Простое вычисление дает

$$\langle \mathbf{b}_T, \mathbf{b}_S \rangle = \det((1 - TS^*)^{-1/2}),$$

поэтому

$$\|\mathbf{b}_T\| = \det(1 - TT^*)^{-1/4}. \quad (1)$$

2.3. Так называемые когерентные состояния. Для $a \in \mathbb{C}^n$ определим функцию

$$\varphi_a(z) := \exp\left(\sum_j z_j \bar{a}_j\right).$$

2.3.1. Теорема. Для любой функции $f \in \mathbf{F}_n$ выполнено следующее «воспроизводящее свойство»:

$$f(a) = \langle f, \varphi_a \rangle. \quad (2)$$

В частности,

$$\langle \varphi_a, \varphi_b \rangle = \exp\left(\sum_j b_j \bar{a}_j\right) = \varphi_a(b) = \overline{\varphi_b(a)}.$$

2.4. Как записывать операторы?

2.4.1. Теорема. Любой ограниченный оператор A в пространстве $\mathbf{F}_n$ может быть записан в виде

$$Af(z) = \int_{\mathbb{C}^n} K(z, \bar{u}) f(u) e^{-|u|^2} d\lambda(u), \quad (3)$$

где $K(z, \bar{u})$ — функция, голоморфная по z и антиголоморфная по u . Более того, этот интеграл является абсолютно сходящимся для всех $f \in \mathbf{F}_n$.

Иными словами, любой ограниченный оператор в $\mathbf{F}_n$ является интегральным оператором в буквальном смысле этого слова.

Для данного оператора A обозначим через c_{kl} его матричные коэффициенты в стандартном базисе:

$$c_{kl} := \langle Az^k, z^l \rangle.$$

Тогда ядро K записывается в виде

$$K(z, \bar{u}) = \sum_{k,l} c_{kl} \frac{z^k \bar{u}^l}{k! l!}.$$

После этого теорема легко проверяется (хотя «перестановка» несобственного интегрирования и суммирования ряда требует определенного обоснования).

Возможна другая точка зрения, а именно: ядро может быть также записано формулой

$$K(a, b) = \langle A\varphi_b, \varphi_a \rangle = A\varphi_b(a). \quad (4)$$

Теперь мы получаем объяснение сходимости интеграла (3). В самом деле,

$$\int_{\mathbb{C}^n} K(z, \bar{u}) f(u) e^{-|u|^2} d\lambda(u) = \langle f, A\varphi_z \rangle, \quad (5)$$

т. е. наш интеграл является скалярным произведением функций f , $A\varphi_z \in \mathbf{F}_n$, а потому он сходится (в силу ограниченности оператора A мы имеем $A\varphi_z \in \mathbf{F}_n$).

2.5. Как перемножать операторы? Пусть A, B — операторы в $\mathbf{F}_n$, пусть K, L — их ядра,

$$\begin{aligned} Af(z) &= \int_{\mathbb{C}^n} K(z, \bar{u}) f(u) e^{-|u|^2} du d\bar{u}, \\ Bf(u) &= \int_{\mathbb{C}^n} L(u, \bar{w}) f(w) e^{-|w|^2} dw d\bar{w}. \end{aligned}$$

Тогда ядро M их произведения AB вычисляется по обычной формуле

$$M(z, \bar{w}) = \int_{\mathbb{C}^n} K(z, \bar{u}) L(u, \bar{w}) e^{-|u|^2} d\lambda(u). \quad (6)$$

Это понятно, но встает вопрос о перестановке пределов интегрирования и сходимости интеграла. От этого вопроса можно уйти, заметив, что последний интеграл (6) опять является скалярным произведением функций

$$L(u, \bar{w}) = B^* \varphi_w(u) \quad \text{и} \quad \overline{K(z, \bar{u})} = A\varphi_z(u),$$

а поэтому интеграл сходится.

2.6. Вещественная симплектическая группа. Вещественная симплектическая группа $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ есть группа вещественных $(n+n) \times (n+n)$ -матриц $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, удовлетворяющих условию

$$h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} h^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Иными словами, эти матрицы сохраняют кососимметричную билинейную форму $\{\cdot, \cdot\}$ в $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Нам удобно перейти к комплексной реализации данной группы, а именно, вместо матрицы h рассмотреть

$$JhJ^{-1}, \quad \text{где} \quad J := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Мы получим группу матриц, имеющих блочную структуру:

$$g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где черта обозначает поэлементное комплексное сопряжение.

Они по-прежнему удовлетворяют условию симплектичности (7), с другой стороны, они удовлетворяют также и условию

$$g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Для читателя, немного знакомого с вещественными классическими группами, замечу, что

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) &= \\ &= \mathrm{U}(n, n) \cap \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C}) = \mathrm{U}(n, n) \cap \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

2.7. Формула Березина. Представление Вейля. По симплектической матрице (9) мы определим оператор в пространстве Фока $\mathbf{F}_n$ по формуле

$$W \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix} f(z) = \int_{\mathbb{C}^n} \exp \left(\frac{1}{2} (z \ \bar{u}) \begin{pmatrix} \bar{\Psi} \Phi^{-1} & (\Phi')^{-1} \\ \Phi^{-1} & -\Phi^{-1} \Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' \\ \bar{u}' \end{pmatrix} \right) f(u) e^{-|u|^2} d\bar{u} du. \quad (11)$$

Здесь $z, \bar{u}$ — матрицы-строки,

$$z = (z_1 \ \dots \ z_n), \quad \bar{u} = (\bar{u}_1 \ \dots \ \bar{u}_n),$$

а в показателе экспоненты стоит квадратичное выражение от $z, \bar{u}$.

Отметим также, что Φ всегда обратим, это легко выводится из (10).

2.7.1. Теорема. а) Операторы $W(\cdot)$ унитарны с точностью до скалярного множителя, точнее, унитарны операторы

$$\det(\Phi^* \Phi)^{-1/4} W \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}.$$

б) Операторы $W(\cdot)$ образуют проективное представление группы $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$, точнее:

$$\begin{aligned} W \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Psi_1 \\ \bar{\Psi}_1 & \bar{\Phi}_1 \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} \Phi_2 & \Psi_2 \\ \bar{\Psi}_2 & \bar{\Phi}_2 \end{pmatrix} = \\ = \det(1 + \Phi_1^{-1} \Psi_1 \bar{\Psi}_2 \Phi_2^{-1})^{-1/2} W \left(\begin{pmatrix} \Phi_1 & \Psi_1 \\ \bar{\Psi}_1 & \bar{\Phi}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_2 & \Psi_2 \\ \bar{\Psi}_2 & \bar{\Phi}_2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Коль скоро теорема сформулирована, она легко проверяется в лоб перемножением операторов.

2.8. Центральные расширения. Пусть G — некоторая группа, A — абелева группа. Попробуем ввести на множестве $G \times A$ групповой закон по формуле

$$(g_1, a_1) \circ (g_2, a_2) = (g_1 g_2, a_1 \cdot a_2 \cdot c(g_1, g_2)),$$

где c — функция $G \times G \rightarrow A$. Чтобы это умножение было ассоциативно, нужно выполнение тождества

$$c(g_1, g_2) \cdot c(g_1 g_2, g_3) = c(g_1, g_2 g_3) \cdot c(g_2, g_3). \quad (13)$$

Полученная таким образом группа называется *центральным расширением* группы G , а функция $c(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющая (13), *2-коциклом* (подробнее см. [73]).

Например, функция³²⁾

$$c: \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \times \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}^*,$$

заданная формулой

$$c(g_1, g_2) = \det(1 + \Phi_1^{-1} \Psi_1 \bar{\Psi}_2 \Phi_2^{-1})^{-1/2} \quad (14)$$

(она появлялась выше в формуле (12)), является 2-коциклом. Тонкость формулы состоит в том, что

$$\|\Phi_1^{-1} \Psi_1\| < 1, \quad \|\bar{\Psi}_2 \Phi_2^{-1}\| < 1.$$

³²⁾Ниже в этой статье $\mathbb{C}^*$ обозначает мультипликативную группу комплексных чисел.

Это несложно проверить с помощью (10). Следовательно,

$$\|\Phi_1^{-1}\Psi_1\bar{\Psi}_2\Phi_2^{-1}\| < 1,$$

поэтому мы можем извлечь квадратный корень в (14), разлагая в степенной ряд:

$$(1 + A)^{-1/2} := 1 - \frac{A}{2} + \frac{3A^2}{8} - \dots,$$

а затем уже посчитать определитель³³⁾.

Отмечу, что (14) можно записать в следующем виде:

$$c(g_1, g_2) = \det(\Phi_1^{-1}\Phi_3\Phi_2^{-1})^{-1/2},$$

где Φ_3 — соответствующий блок матрицы $g_3 := g_1g_2$. В такой форме тождество (13) становится очевидным. В самом деле, для g_1, g_2 , лежащих вблизи единицы, мы можем записать

$$\det(\Phi_1^{-1}\Phi_3\Phi_2^{-1})^{-1/2} = \det \Phi_1^{1/2} \cdot \det \Phi_3^{-1/2} \cdot \det \Phi_2^{1/2}.$$

Далее в (13) все сомножители сокращаются.

Чтобы «уйти» из окрестности единицы, мы ссылаемся на аналитическое продолжение.

Замечание. В более общем контексте [18] естественно написать следующий «аддитивный» коцикл (т. е. группа A из определения теперь является аддитивной группой $\mathbb{C}$):

$$c^*(g_1, g_2) = \operatorname{tr} \ln(\Phi_1^{-1}\Phi_3\Phi_2^{-1}).$$

Тогда наш прежний «мультипликативный» коцикл c выражается через c^* по формуле

$$c(g_1, g_2) = \exp\left(-\frac{1}{2}c^*(g_1, g_2)\right).$$

2.9. Пространство Фока. Переход к пределу при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим вложение $J_n: \mathbf{F}_n \rightarrow \mathbf{F}_{n+1}$, которое каждой функции $f(z_1, \dots, z_n)$ ставит в соответствие ее саму

$$(J_n f)(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = f(z_1, \dots, z_n).$$

³³⁾Если же мы сначала посчитаем определитель, то мы не сможем выбрать правильный знак при извлечении корня.

2.9.1. Предложение. Вложение $\mathbf{F}_n$ является изометрией.

Теперь мы можем рассмотреть бесконечную цепочку вложений

$$\cdots \rightarrow \mathbf{F}_{n-1} \rightarrow \mathbf{F}_n \rightarrow \mathbf{F}_{n+1} \rightarrow \cdots,$$

рассмотреть объединение всех пространств $\mathbf{F}_n$ и пополнить его. Полученное таким способом гильбертово пространство $\mathbf{F}_\infty$ и есть пространство Фока.

Наша следующая цель — сделать пространство $\mathbf{F}_\infty$ «осязаемым». Мы подойдем к этому вопросу с двух сторон.

Обозначим через $\mathbf{k}$ произвольную последовательность

$$\mathbf{k} := (k_1, k_2, k_3, \dots),$$

где k_i — неотрицательные целые числа, причем $k_j = 0$ при достаточно больших j . Обозначим через $z^{\mathbf{k}}$ одночлен

$$z^{\mathbf{k}} := \prod_i z_i^{k_i}.$$

Каждый такой одночлен лежит в некотором пространстве $\mathbf{F}_n$, а поэтому — и в $\mathbf{F}_\infty$, содержащем все $\mathbf{F}_n$.

В итоге мы получаем, что векторы $z^{\mathbf{k}}$ образуют ортогональный (ненормированный) базис в $\mathbf{F}_\infty$. Соответственно, любой вектор $h \in \mathbf{F}_\infty$ разлагается в ряд по этому базису:

$$h = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} z^{\mathbf{k}}. \quad (15)$$

2.9.2. Предложение. Ряд (15) сходится для всех $z \in \ell_2$. Более того, он сходится абсолютно и равномерно на любом шаре конечного радиуса в ℓ_2 .

Таким образом, мы получаем, что пространство $\mathbf{F}_\infty$ может быть проинтерпретировано как пространство голоморфных функций от бесконечного числа переменных.

Чтобы лучше понять это, взглянем на вопрос с другой стороны. Рассмотрим вектор $a = (a_1, a_2, \dots)$ из пространства ℓ_2 (т. е. $\sum |a_j|^2 < \infty$). Обозначим $a^{[N]} := (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^N$. Рассмотрим векторы

$$\varphi_{a^{[N]}} \in \mathbf{F}_N.$$

Легко видеть, что эта последовательность фундаментальна в $\mathbf{F}_\infty$, а поэтому сходится к некоторому вектору $\varphi_a \in \mathbf{F}_\infty$. Теперь для произвольного вектора $h \in \mathbf{F}_\infty$ определим функцию на ℓ_2 по формуле:

$$f_h(z) = \langle h, \varphi_z \rangle_{\mathbf{F}_\infty}.$$

Эта функция и есть сумма ряда (15).

2.9.3. Наблюдение. Мы можем рассматривать функции из пространства $\mathbf{F}_\infty$ как «голоморфные» функции на ℓ_2 . Воспроизводящее свойство (2) остается в силе.

2.10. Пример. Гауссовы векторы.

2.10.1. Предложение. Функция

$$\mathbf{b}_T(z) := \exp\left(\frac{1}{2}zTz^t\right)$$

содержится в $\mathbf{F}_\infty$ тогда и только тогда, когда $\|T\| < 1$ и T — оператор Гильберта — Шмидта.

Напомним, что оператор A в гильбертовом пространстве является оператором Гильберта — Шмидта, если он удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:

- сумма квадратов матричных элементов сходится, $\sum |a_{ij}|^2 < \infty$;
- A компактен и сумма собственных чисел A^*A сходится.

Чтобы проверить последнее предложение, достаточно применить формулу (1) и, если нужно, посмотреть учебник функционального анализа.

2.11. Как теперь работать с операторами? Так же. Об интегралах в формулах (6), (5) проще забыть³⁴⁾ и понимать их как символы. Ядро оператора вводится теперь как (4). Формулы (6) и (5) понимаются как скалярные произведения.

2.12. «Группа автоморфизмов канонических коммутационных соотношений» $\mathbf{SpU}$. Наша следующая цель — построить аналог представления Вейля.

Теперь мы рассматриваем матрицы размера $(\infty + \infty) \times (\infty + \infty)$, имеющие блочную структуру $g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}$, которые ограничены

³⁴⁾ Хотя их можно проинтерпретировать как настоящие интегралы.

и обратимы в обычном смысле (как операторы в $\ell_2 \oplus \ell_2$), удовлетворяют тому же соотношению симплектичности (7). Но такая группа слишком велика, представление Вейля на ней не определено, и вообще унитарных представлений у неё нет.

Мы рассмотрим меньшую группу $\mathrm{SpU}(\infty)$ матриц того же вида, удовлетворяющих дополнительному условию:

— блок Ψ является оператором Гильберта — Шмидта.

2.13. Формула Березина ещё раз. На группе SpU мы определим представление Вейля той же формулой, что и выше.

2.13.1. Теорема. *Теорема 2.7.1 остается в силе.*

Для доказательства этого факта нужно вычислить скалярные произведения гауссовых векторов. Это хорошее упражнение по функциональному анализу для третьего курса³⁵⁾.

2.14. Зачем нужно условие Гильберта — Шмидта. Нужно посмотреть на формулу, задающую представление Вейля и интерпретацию интегральных операторов в виде (5). Пусть $K(z, \bar{u})$ — ядро ограниченного интегрального оператора. Тогда функция $\overline{K(z, \bar{u})}$ при любом фиксированном z должна быть элементом пространства $\mathbf{F}_\infty$. В нашем случае все такие функции имеют вид

$$\exp\left(-\frac{1}{2}u\Phi^{-1}\Psi u^t + ua^t\right).$$

Отсюда следует, что $\Phi^{-1}\Psi$ является оператором Гильберта — Шмидта, а дальше из условия (10) легко выводится, что Ψ — тоже оператор Гильберта — Шмидта.

2.15. Почему $\mathbf{F}_\infty$ — пространство Фока? Я надеюсь, что всё сказанное очень просто, но простота обманчива, потому что под неё всё было «подогнано». Отмечу, что с научно-исторической точки зрения это был странный случай, когда сначала появились беско-

³⁵⁾Приведённый выше подход не проясняет происхождение самой формулы (11), по этому поводу проще всего посмотреть саму книжку. Но уже зная формулу Березина, можно посмотреть на дело по-другому и (как когда-то давно предложили Г. И. Ольшанский и Р. Хау) рассмотреть полугруппу произвольных операторов с гауссовыми ядрами, в которой собственно симплектическая группа составляет небольшую часть, см. [96], [107].

нечномерные конструкции, а потом стало ясно, что они содержательны и в конечномерном случае тоже³⁶⁾.

Пространство Фока изначально определялось самим Фоком как прямая сумма всех симметрических степеней $S^m(H)$ некоторого гильбертова пространства H

$$\mathbf{F}(H) := \bigoplus_{m \geq 0} S^m(H).$$

В обсуждаемой нами модели пространство S^m просто состоит из однородных многочленов степени m . То есть наше пространство $\mathbf{F}_\infty$ действительно совпадает с пространством Фока.

Интересно, что обсуждаемая голоморфная модель при всей её простоте была обнаружена лишь через 30 лет после статей В. А. Фока.

§ 3. «Группа автоморфизмов канонических антикоммутирующих соотношений»

Этот раздел представляет из себя упражнение по линейной алгебре, постепенно переходящей в функциональный анализ. Теорема 3.10.2 (см. [96]), однако, не очевидна (или я не умею ее делать очевидной).

3.1. Грассманова алгебра. Мы рассматриваем алгебру $\mathfrak{L}_n$ с образующими $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и соотношениями

$$\xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i.$$

В частности, $\xi_j^2 = 0$. Легко видеть, что $\dim \mathfrak{L}_n = 2^n$, а одночлены

$$\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}, \quad \text{где } i_1 < i_2 < \dots < i_k, \quad (16)$$

образуют базис в $\mathfrak{L}_n$.

Мы введем скалярное произведение в $\mathfrak{L}_n$, положив, что эти одночлены составляют ортонормированный базис в $\mathfrak{L}_n$.

³⁶⁾ Ещё одно любопытное обстоятельство, видимое издали. Параболическое индуцирование «не работает» для бесконечномерных классических групп. Обычное унитарное индуцирование в духе Макки (см. [73]) полезно, но его возможности ограничены.

3.2. Интеграл Березина. Интеграл Березина

$$\int f(\xi) d\xi = \int f(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_n d\xi_{n-1} \dots d\xi_1 \quad (17)$$

определяется как линейный функционал на $\mathfrak{L}_n$, удовлетворяющий условию

$$\int \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = 1,$$

интеграл от остальных одночленов (16) равен 0.³⁷⁾

3.3. Интеграл Березина по гауссовой мере. Введём дополнительный набор антикоммутирующих переменных $\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n$ соотношениями

$$\bar{\xi}_i \bar{\xi}_j = -\bar{\xi}_j \bar{\xi}_i, \quad \bar{\xi}_i \xi_j = -\xi_j \bar{\xi}_i.$$

Мы обозначим

$$d\xi d\bar{\xi} := d\xi_1 d\bar{\xi}_1 \dots d\xi_n d\bar{\xi}_n.$$

Нам интересны интегралы вида

$$\int f(\bar{\xi}) g(\xi) e^{-\sum \xi_j \bar{\xi}_j} d\xi d\bar{\xi}.$$

Легко видеть, что

$$\int \left(\prod_i \bar{\xi}_{k_i} \xi_{k_i} \right) e^{-\sum \xi_j \bar{\xi}_j} d\xi d\bar{\xi} = 1.$$

А интегралы от остальных мономов равны 0. Например,

$$\int \xi_{29} \bar{\xi}_{29} \xi_{31} \bar{\xi}_{31} d\xi d\bar{\xi} = 1, \quad \int \xi_{29} \bar{\xi}_{29} \xi_{31} d\xi d\bar{\xi} = 0.$$

3.4. Как писать операторы? Пусть $\eta, \bar{\eta}$ — ещё один набор антикоммутирующих переменных.

3.4.1. Наблюдение. Любой оператор A в $\mathfrak{L}_n$ может быть записан в виде:

$$Af(\xi) = \int K(\xi, \bar{\eta}) f(\eta) e^{-\eta \bar{\eta}} d\eta d\bar{\eta}.$$

³⁷⁾ Именно так писал сам Ф. А. Березин, даже когда понял, что эта запись противоречива, считая, что «так понятнее». В [1*] и [4*] на с. 10 показано, что элемент объёма — интегральная форма — часто нужен одновременно с дифференциальными формами и их не следует обозначать одним символом. — *Прим. ред. Д. Л.*

Просто коэффициенты многочлена $K(\xi, \eta)$ являются матричными элементами оператора A в стандартном базисе.

3.5. Ортогональная группа. Мы обозначим через $O(2n, \mathbb{C})$ группу комплексных $(n+n) \times (n+n)$ -матриц $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, удовлетворяющих условию

$$g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Через $SO(2n, \mathbb{C})$ мы обозначаем подгруппу в группе $O(2n, \mathbb{C})$, состоящую из матриц с определителем 1. Мы также рассматриваем группу $O(2n, \mathbb{R})$, которую мы реализуем как группу матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющих тому же условию (18).

3.6. Спинорное представление группы $SO(2n, \mathbb{C})$. Для ортогональной матрицы

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SO(2n, \mathbb{C})$$

мы определим оператор в $\mathcal{L}_n$ по формуле

$$\text{spin} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} f(\xi) = \int \exp \left(\frac{1}{2} (\xi \ \bar{\eta}) \begin{pmatrix} BD^{-1} & -(D^t)^{-1} \\ D^{-1} & D^{-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} \right) f(\eta) e^{-\eta \bar{\eta}^t} d\eta d\bar{\eta}^t.$$

Эта формула определена³⁸⁾ лишь на открытом плотном множестве $\det D \neq 0$ в $SO(2n, \mathbb{C})$.

3.6.1. Теорема. *Операторы $\text{spin}(g)$ образуют проективное представление группы $SO(2n, \mathbb{C})$. Точнее:*

$$\text{spin}(g_1) \text{spin}(g_2) = \det(1 + D_1^{-1} C_1 B_2 D_2^{-1})^{1/2} \text{spin}(g_1 g_2).$$

3.6.2. Теорема. *Операторы*

$$\widetilde{\text{spin}} \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix} := \det(\Phi)^{1/2} \cdot \text{spin} \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}$$

образуют унитарное проективное представление группы $SO(2n, \mathbb{R})$.

³⁸⁾ На другой компоненте группы $O(2n, \mathbb{C})$ блок D всегда необратим. В симплектическом случае (см. выше) блок Φ обратим всегда.

3.7. Фермионное пространство Фока. Две топологии. Рассмотрим бесконечный набор грассмановых переменных $\xi_1, \xi_2, \dots$. Рассмотрим линейное пространство, в котором одночлены

$$\xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k}, \quad \text{где } i_1 < i_2 < \dots < i_k, \quad (19)$$

образуют базис.

Определим гильбертово пространство $\mathfrak{L}_\infty$ как пространство, в котором одночлены (19) образуют ортонормированный базис. Это пространство называется *фермионным пространством Фока*.

Через $\mathfrak{L}_\infty^k$ мы обозначим подпространство в $\mathfrak{L}_\infty$, порожденное базисными векторами (19) степени k . Любой вектор f из $\mathfrak{L}_\infty$ раскладывается в сумму

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\xi), \quad \text{где } f_k \in \mathfrak{L}_\infty^k. \quad (20)$$

Мы обозначим через $\mathcal{L}_\infty$ пространство, состоящее из всех векторов $f \in \mathfrak{L}_\infty$, удовлетворяющих условию:

для любого C существует такая постоянная A , что $\|f_k\| \leq A \cdot e^{-Ck}$.

Это пространство снабжено семейством полунорм

$$\|f\|_C := \sup_k e^{Ck} \|f_k\|.$$

Важный (кажется, не совсем очевидный) пример функции $f \in \mathcal{L}_\infty$ — это

$$\exp \left(\sum a_j \xi_{2j} \xi_{2j+1} \right), \quad \text{где } \sum |a_j|^2 < \infty.$$

3.8. Группа автоморфизмов канонических антикоммутирующих соотношений. Теперь мы хотим построить бесконечномерный аналог спинорного представления.

Сначала рассмотрим полную бесконечномерную вещественную ортогональную группу, состоящую из блочных матриц g размера $(\infty + \infty) \times (\infty + \infty)$, которые:

- имеют структуру $g = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}$ с блоками размера $\infty \times \infty$;
- удовлетворяют условию ортогональности (18);
- ограничены и обратимы в $\ell_2 \oplus \ell_2$;

Спинорное представление на этой группе не определено.

Снова (как и в бозонном случае) мы рассмотрим меньшую подгруппу — обозначим ее через $OU(\infty)$, — состоящую из матриц, для которых Ψ является оператором Гильберта — Шмидта.

3.9. Комплексификация группы $OU(\infty)$. Кроме того, введём бесконечномерный аналог комплексной ортогональной группы.

Обозначим через $OGL(\infty)$ группу матриц

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

которые ортогональны в смысле (18), ограничены и обратимы в $\ell_2 \oplus \ell_2$ и удовлетворяют условию:

— B, C — операторы Гильберта — Шмидта.

3.10. Спинорное представление.

3.10.1. Теорема. Операторы

$$\widetilde{\text{spin}}(g) := \det(\Phi\Phi^*)^{1/4} \text{spin}(g)$$

задают унитарное проективное представление группы $OU(\infty)$ в гильбертовом фермионном пространстве Фока $\mathcal{L}_\infty$.

3.10.2. Теорема. Операторы $\text{spin}(g)$ задают проективное представление группы $OGL(\infty)$ в фермионном полинормированном пространстве Фока $\mathcal{L}_\infty$.

Замечание. Строго говоря, в обоих случаях наши формулы дают возможность задать представление лишь на связной компоненте группы. Продолжение же на всю группу стоит небольших усилий, но многих слов.

§ 4. Некоторые теоретико-представленческие приложения

Здесь мы обсуждаем некоторые приложения представления Вейля и бесконечномерного спинорного представления к теории представлений.

Впрочем, называть ли это словами «теория представлений» или как-нибудь ещё — вопрос вкусовой. Например, конструкции пп. 4.1

и 4.3 вполне популярны в матфизике, конструкция 4.4 отчасти относится к η -функциям и автоморфным формам, 4.5 — очевидный суперанализ, а 4.6 — способ построения конформных теорий поля.

В первых трёх пунктах мы также покажем важность условия Гильберта — Шмидта, за которое «шла борьба» в 1959–65 гг.

4.1. Пример представления группы диффеоморфизмов окружности со старшим весом. Обозначим через Diff группу диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию. Наша цель — вложить Diff в группу SpU .

Рассмотрим гильбертово пространство H , состоящее из функций f на окружности с нулевым средним:

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0,$$

со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \right| f(\varphi) g(\psi) d\varphi d\psi.$$

Может, приятнее записать его в форме:

$$\langle e^{in\varphi}, e^{im\varphi} \rangle = \frac{1}{|n|} \cdot \delta_{m,n}.$$

Далее мы разбиваем наше гильбертово пространство в прямую сумму двух: одно, H_+ , состоит из функций вида $\sum_{k>0} c_k e^{ik\varphi}$, голоморфно продолжаемых внутрь единичного круга, а другое, H_- , — из функций вида $\sum_{k>0} c_k e^{ik\varphi}$, голоморфно продолжаемых во внешность единичного круга.

Наконец, мы введём билинейную кососимметрическую (симплектическую) форму на H как

$$\{f, g\} = \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left[\int_0^\varphi g(\psi) d\psi \right] d\varphi.$$

Таким образом, мы получили структуру, описанную выше в п. 2.12, а именно, гильбертово пространство, снабженное кососимметричной билинейной формой и разложением в прямую сумму двух подпространств. Соответственно, мы имеем и группу $\text{SpU}(H)$ этого гильбертова пространства H .

Пусть $q \in \text{Diff}$ — диффеоморфизм окружности. Рассмотрим оператор $T(q)$ в пространстве H , заданный формулой

$$T(q)f(\varphi) = f(q(\varphi))\, q'(\varphi).$$

4.1.1. Теорема. $T(q) \in \text{SpU}(H)$.

Здесь место, в самом деле требующее проверки, — «условие Гильберта — Шмидта».

Проще всего рассмотреть преобразование Гильберта

$$If(\varphi) = \int_0^{2\pi} \text{ctg} \frac{\varphi - \psi}{2} f(\psi) d\psi,$$

которое имеет собственные значения $\pm i$ на подпространствах $H_{\pm}$. Далее надо убедиться, что коммутатор $[T(q), I]$ является интегральным оператором с бесконечномерным гладким ядром.

Теперь мы можем ограничить представление Вейля группы $\text{SpU}(H)$ на подгруппу Diff и получить унитарное проективное представление группы Diff .

Это и есть конструкция многих авторов осени 1980 года, о которой я писал в п. 1.13. На уровне алгебры Ли — это конструкция Вирасоро 1970 (точнее, эта конструкция была понята уже как «реакция» на статью Вирасоро).

4.2. Пример. Использование кватернионной структуры. Сначала мы перескажем другими словами реализацию вещественной ортогональной группы $O(2n, \mathbb{R})$ в виде комплексных матриц вида $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}$.

Мы рассмотрим стандартное комплексное евклидово пространство $\mathbb{C}^n$ со стандартным базисом $e_1, \dots, e_n$ и группу $O(2n, \mathbb{R})$ вещественно-линейных ортогональных операторов в нём.

Далее рассмотрим вещественный базис $e_1, \dots, e_n, f_1 := ie_1, \dots, f_n := ie_n$ комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ и перейдем к новому базису

$$e_1 + f_1, \dots, e_n + f_n, e_1 - f_1, \dots, e_n - f_n.$$

Тогда мы и получим матрицы вида $\begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ -\bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{pmatrix}$.

Теперь мы рассмотрим пространство L^2 функций на окружности и подпространство L^2_- в нём, состоящее из нечётных функций f ,

$$f(\varphi + \pi) = -f(\varphi).$$

Далее, фиксируем вещественное s и рассмотрим интегральный оператор в L^2_- , заданный формулой

$$J_s f(\varphi) := \frac{1}{\Gamma(1+is)} \int_0^{2\pi} |\sin(\varphi - \psi)|^{-1-is} \operatorname{sgn}(\sin(\varphi - \psi)) \overline{f(\psi)} d\psi.$$

4.2.1. Теорема. а) Оператор J_s антилинеен, т. е.

$$J_s i f = -i J_s f.$$

б) Оператор J_s — унитарный.

в) $J_s^2 = -1$.

Неочевидны высказывания б), в); чтобы их проверить, нужно вычислить $J_s f$ для $f(\varphi) = e^{(2n+1)i\varphi}$.

Сформулированная теорема означает, что L^2_- превращено нами в кватернионное гильбертово пространство, умножения на кватернионы суть (вещественно-линейные) операторы

$$\alpha + \beta i + \gamma J_s + \delta i J_s, \quad \text{где } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Мы скажем, что оператор является *кватернионно унитарным*, если он перестановочен с умножениями на кватернионы.

Теперь мы определим группу $\operatorname{USp}^{39)}$ как группу всех комплексно-линейных унитарных операторов A , представимых в виде $A = B(1 + T)$, где B — кватернионно унитарный оператор, а T — оператор Гильберта — Шмидта.

Теперь рассмотрим группу⁴⁰⁾ $\operatorname{Diff}^{(2)}$, состоящую из «чётных» диффеоморфизмов q окружности, т. е. диффеоморфизмов, удовлетворяющих условию

$$q(\varphi + \pi) = q(\varphi) + \pi.$$

Определим ее действие в L^2_- по формуле

$$T_s(q)f(\varphi) = f(q(\varphi)) q'(\varphi)^{(1+is)/2}.$$

4.2.2. Теорема. $T_s(q) \in \operatorname{USp}(H)$.

³⁹⁾ Автор использует обозначения SpU , OU , USp для групп, чтобы сократить обозначения Ольшанского $[G(\infty), K(\infty)] = [\operatorname{Sp}(2\infty, \mathbb{R}), \operatorname{U}(\infty)]$, $[\operatorname{O}(2\infty, \operatorname{U}(\infty))]$, $[\operatorname{U}(2\infty, \operatorname{Sp}(\infty))]$. Во всех случаях рассматриваются подгруппы в $G(\infty)$, состоящие из операторов, отличающихся на оператор Гильберта — Шмидта от оператора из $K(\infty)$.

⁴⁰⁾ Эти диффеоморфизмы составляют двулистное накрытие группы Diff .

Для доказательства достаточно вычислить ядро коммутатора в $[T_s(q), J_s]$ и убедиться, что оно лежит в L^2 на произведении окружности на себя.

Теперь мы фиксируем произвольный кватернион

$$R := \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k,$$

такой что $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$, тогда $R^2 = -1$. Далее рассматриваем L^2_- как вещественное гильбертово пространство и вводим новое умножение на мнимую единицу как оператор R . В итоге мы получаем новое комплексное гильбертово пространство и группа $\text{Diff}^{(2)}$ содержится в группе OU этого пространства.

Теперь мы можем ограничить спинорное представление OU на $\text{Diff}^{(2)}$ и получить в итоге проективное унитарное представление группы Diff .

4.3. Пример: представление группы петель со старшим весом. Теперь рассмотрим группу петель $C^\infty(S^1, \text{O}(n, \mathbb{C}))$, состоящую из гладких функций на окружности со значениями в группе $\text{O}(n, \mathbb{C})$. Нам удобнее её реализовать как группу функций $\gamma: S^1 \rightarrow \text{O}(n, \mathbb{C})$, удовлетворяющих равенству

$$\gamma(\varphi + \pi) = \gamma(\varphi).$$

Далее рассмотрим пространство, состоящее из функций

$$f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}^{2n},$$

удовлетворяющих условию

$$F(\varphi + \pi) = F(\varphi),$$

здесь $F := (f_1, \dots, f_{2n})$ — вектор, составленный из функций. Введём в этом пространстве обычное L^2 -скалярное произведение,

$$\langle F, G \rangle = \sum_{j=1}^{2n} \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) \overline{g_j(\varphi)} d\varphi.$$

Полученное гильбертово пространство мы обозначим через H . Далее, введём в H билинейную форму

$$\{F, G\} = \sum_{j=1}^{2n} \int_0^{2\pi} f_j(\varphi) g_j(\varphi) d\varphi.$$

Наконец, рассмотрим подпространство H_+ , состоящее из функций, допускающих голоморфное продолжение внутрь круга $|z| < 1$ и его ортогональное дополнение H_- . Теперь у нас есть все структуры, описанные в § 3.

4.3.1. Теорема. *Группа $C^\infty(S^1, O(n, \mathbb{C}))$ содержится в группе OGL пространства H .*

Теперь мы можем ограничить спинорное представление на группу петель. В списке литературы см. [38], [96].

4.4. Объект конечномерного гармонического анализа: двойственные пары Хау.

4.4.1. Наблюдение. *Существует естественное вложение*

$$\mathrm{Sp}(2k, \mathbb{R}) \times O(p, q) \rightarrow \mathrm{Sp}(2k(p+q), \mathbb{R}).$$

Напомним, что $\mathrm{Sp}(2k, \mathbb{R})$ — это группа линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^{2k}$, сохраняющих невырожденную кососимметричную билинейную форму. Далее, через $\mathbb{R}^{p,q}$ мы обозначим псевдоевклидово пространство сигнатуры (p, q) , а через $O(p, q)$ — группу операторов, сохраняющих эту форму.

Тензорное произведение $\mathbb{R}^{2k} \otimes \mathbb{R}^{p,q}$ снабжено кососимметрической билинейной формой, и искомое вложение построено.

Следующую теорему «двойственности Хау» мы формулируем чуть-чуть неаккуратно.

4.4.2. Теорема. *Спектр ограничения представления Вейля группы $\mathrm{Sp}(2k(p+q), \mathbb{R})$ на подгруппу $\mathrm{Sp}(2k, \mathbb{R}) \times O(p, q)$ однократен. Более того, если представления $\rho_1 \otimes \pi_1$ и $\rho_2 \otimes \pi_2$ входят в спектр, то либо они совпадают, либо $\rho_1 \neq \rho_2$, а $\pi_1 \neq \pi_2$.*

Оказывается, такого рода задачи ограничения (их довольно много) очень любопытны. В частности, спектры содержат представления $\mathrm{Sp}(2k, \mathbb{R})$ и $O(p, q)$, которые «увидеть» каким-либо иным способом очень трудно. В списке литературы см. [59], [72], [5].

4.5. Супергибрид спинорного представления и представления Вейля. На уровне супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(2p|2q)$ этот супергибрид был описан в посмертных записках Березина в [20], а на уровне супергруппы $\mathrm{OSp}(2p|2q)$ он построен в [98].

Опишем примерную конструкцию. Теперь мы рассматриваем «функции», зависящие от бозонных переменных $z_1, \dots, z_r$, фер-

мионных переменных $\xi_1, \dots, \xi_q$ и от элементов суперкоммутативной алгебры $\mathcal{A}$. Оказывается, представления супергруппы $\mathrm{OSp}(2p|2q)$ записываются явными интегральными операторами вида

$$\mathfrak{B}f(z, \xi) = \iiint \exp \left((z \ \bar{u} \ \xi \ \bar{\eta}) S \begin{pmatrix} z^t \\ \bar{u}^t \\ \xi^t \\ \bar{\eta}^t \end{pmatrix} \right) f(u, \eta) e^{-z\bar{z} - \xi\bar{\xi}} du d\bar{u} d\eta d\bar{\eta},$$

где S — матрица, составленная из элементов некоторой суперкоммутативной супералгебры $\mathcal{A}$, она может быть явно выписана по элементу супергруппы $\mathrm{OSp}(2p|2q)$.

4.6. Дальнейшая глобализация. Во всех трёх случаях — представление Вейля, спинорное представление и суперспиноры — естественно рассмотреть полугруппу всех ограниченных гауссовых операторов, она существенно больше, чем начальные группы (например, в случае симплектической группы у полугруппы будет вдвое бóльшая размерность). Соответствующие алгебраические структуры описаны в [96], [98]. Через них, например, «пропускаются» конформные теории поля.

Литература⁴¹⁾

- [1] Арнольд В. И. Выживет ли математика? 1994. (Перепечатано в книге: Арнольд В. И. Избранное. М.: Фазис, 1997.
- [2] Арнольд В. И. Антинаучная революция и математика // Вестник РАН. 1999. Т. 69, № 6. С. 553–558. См. <http://www.mccme.ru/edu/index.php?ikey=articles>.
- [3] Arnold V. I. Sur la corbure de Riemann des groupes de difféomorphismes // C. R. Acad. Sci. 1965. V. 260, № 22. P. 5668–5671. (Перепечатано в книге: Арнольд В. И. Избранное. М.: Фазис, 1997. С. 75–80.)
- [4] Arnold V. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications l'hydrodynamique des fluides parfaits // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1966. V. 16, № 1. P. 319–361.

⁴¹⁾Список идет в соответствии с латинским алфавитом. Найти сейчас старые статьи и книги (особенно русские) не совсем просто, поэтому я стараюсь перечислять переиздания. «Автоматические» английские переводы статей из Успехов, Сборника, Известий, Функционального анализа, Докладов, Заметок, Семинаров ЛОМИ и Писем ЖЭТФ с середины 1960-х годов ниже не указываются. Некоторые работы (по тем или иным причинам) процитированы ниже в подстрочных сносках.

- [5] *Adams J. D.* Discrete spectrum of reductive dual pair $(O(p, q), Sp(2m))$ // *Inv. Math.* 1983. V. 74. P. 449–475.
- [6] *Araki H.* Factorizable representations of current algebra // *Publ. RIMS.* 1970. V. A5. P. 361–422.
- [7] *Bargmann V.* Irreducible unitary representations of the Lorentz group // *Ann. of Math.* 1947. V. 48, № 2. P. 568–640.
- [8] *Bargmann V.* On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform // *Comm. Pure Appl. Math.* 1961. V. 14. P. 187–214.
- [9] *Березин Ф. А.* Операторы Лапласа на полупростых группах Ли // *ДАН СССР.* 1956. Т. 107. С. 9–12.
- [10] *Березин Ф. А.* Представления комплексных полупростых групп в банаховых пространствах // *ДАН СССР.* 1956. Т. 110. С. 897–900.
- [11] *Березин Ф. А.* Операторы Лапласа на полупростых группах Ли // *Труды ММО.* 1957. Т. 6. С. 371–463. (Английский перевод: *AMS Transl. Ser. 2.* V. 21. Providence, RI: AMS, 1962. P. 239–339.)
- [12] *Березин Ф. А.* Операторы Лапласа на полупростых группах Ли и некоторых симметрических пространствах // *Успехи матем. наук.* 1957. Т. 12, № 1. С. 152–156. (Английский перевод: *AMS Transl. Ser. 2.* V. 16. Providence, RI: AMS, 1960. P. 364–369.)
- [13] *Березин Ф. А.* Письмо в редакцию // *Труды ММО.* 1963. Т. 12. С. 453–466. (Английский перевод: *Transactions of Moscow Math. Society.* 1963. V. 12.)
- [14] *Березин Ф. А.* Канонические преобразования в представлениях вторичного квантования // *ДАН СССР.* 1963. Т. 150. С. 959–962.
- [15] *Березин Ф. А.* Об операторах в представлении вторичного квантования // *ДАН СССР.* Т. 154, № 5. С. 1063–1065.
- [16] *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965; 2-е изд., дополн. (ред. М. К. Поливанов). М.: Наука, 1986. (Англ. издание: *Academic Press.*, 1966.)⁴²⁾

⁴²⁾ Включены статьи Ф. А. Березина по символам операторов и общим концепциям квантования: *Невинеровские континуальные интегралы* (ТМФ, 1971); *Виковские и антивиковские символы операторов* (Матем. сб., 1971), *Контравариантные и ковариантные символы операторов* (Известия АН СССР, 1972); *Выпуклые функции от операторов* (Матем. сб., 1972); *Общая концепция квантования* (Comm. Math. Phys., 1975), *Модели типа Гросса — Невё как квантование классической механики с нелинейным фазовым пространством* (Comm. Math. Phys., 1978).

- [17] *Березин Ф. А.* Автоморфизмы грассмановой алгебры // Матем. заметки. 1967. Т. 1. С. 269–276.
- [18] *Березин Ф. А.* Квантование в комплексных симметрических областях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. С. 363–402.
- [19] *Березин Ф. А.* Связь между ко- и контравариантными символами на классических комплексных симметрических пространствах // ДАН СССР. 1978. Т. 241. С. 15–17.
- [20] *Березин Ф. А.* Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными / под. ред. А. А. Кириллова и В. П. Паламодова. М.: Изд-во МГУ, 1983. (Дополненное английское издание: *Berezin F. A.* Introduction to superanalysis. Edited and with foreword A. A. Kirillov, with an appendix of V. I. Ogievetsky. Translated by J. Niderle and R. Kotecky, translation edited by D. Leites. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co. 1987.)
- [21] *Березин Ф. А., Гельфанд И. М.* Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях // Труды ММО. 1956. Т. 5. С. 311–351. (Английский перевод: AMS Transl. V. 21. Providence, RI: AMS, 1962. P. 193–238. Перепечатано: *Gelfand I. M.* Collected papers, v. 2. Springer, 1988.)
- [22] *Березин Ф. А., Кац Г. И.* Группы Ли с коммутирующими и антикоммутирующими переменными // Матем. сб. 1970. Т. 82 (124). С. 343–359.
- [23] *Березин Ф. А., Карпелевич Ф. И.* Зональные сферические функции и операторы Лапласа на некоторых симметрических пространствах // ДАН СССР. 1958. Т. 118. С. 9–12.
- [24] *Березин Ф. А., Лейтес Д. А.* Супермногообразия // ДАН СССР. 1975. Т. 224, № 3. С. 505–508.
- [25] *Березин Ф. А., Минлос Р. А., Фаддеев Л. Д.* Некоторые математические вопросы квантовой механики систем с большим числом степеней свободы // Труды 4-го Всесоюзного матем. съезда (Москва, 1964). 1961. Т. 2. С. 532–541.
- [26] *Bergman S.* Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec les applications a la theorie des fonctions analytiques. Paris: Gauthier-Villars, 1947.
- [27] *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Гостехиздат, 1957. (Английский перевод: Interscience, 1959.)
- [28] *Borodin A., Olshanski G.* Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes // Ann. of Math. 2005. V. 161, № 3. P. 1319–1422. См. <http://arxiv.org/abs/math/0109194>.

- [29] *Bott R.* On the characteristic classes of groups of diffeomorphisms // Enseign. Math. 1977. V. 23, № 2. P. 209–220. (Перепечатано: *Bott R.* Collected papers. V. 3. Birkhauser, 1995.)
- [30] *Cartan E.* Les groupes de transformation continués, infinis, simples // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1909. V. 26. P. 93–161. (Русский перевод: *Картан Э.* Избранные труды. М.: МЦНМО, 1998.)
- [31] *Cartan E.* Leçons sur la théorie des spineurs. Paris: Hermann, 1938. (Русский перевод: *Картан Э.* Теория спиноров. М.: Иностранная литература, 1947.)
- [32] *Cherednik I.* Double affine Hecke algebras. Cambridge University Press, 2005.
- [33] *Chevalley C. C.* The algebraic theory of spinors. N.Y.: Columbia University Press, 1954. (Перепечатано: *Chevalley C.* Collected works. V. 2.)
- [34] *Drinfeld V.* Quantum groups // Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berkeley, Calif., 1986). V. 1, 2. Providence, RI: AMS, 1987. P. 798–820.
- [35] *Enright Th., Howe R., Wallach N.* A classification of unitary highest weight modules // Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982). V. 40. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1983. P. 97–143.
- [36] *Fock V. A.* Konfigurationsraum und Zweite Quantelung // Z. Physics. 1932. V. 75. P. 622—47. (Русский перевод: *Фок В. А.* Работы по квантовой теории поля. Л.: Изд-во ЛГУ, 1957.)
- [37] *Fock V. A.* Zur Quantenelectrodynamik // Soviet Phys. 1934. V. 6. P. 425. (Русский перевод: *Фок В. А.* Работы по квантовой теории поля. Л.: Изд-во ЛГУ, 1957.)
- [38] *Frenkel I. B.* Two constructions of affine Lie algebra representations and boson-fermion correspondence in quantum field theory // J. Funct. Anal. 1981. V. 44, № 3. P. 259–327.
- [39] *Friedrichs K. O.* Mathematical aspects of the quantum theory of fields. New York: Interscience Publishers, Inc., 1953.
- [40] *Фукс Д. Б.* Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М.: Наука, 1984.
- [41] *Гельфанд И. М.* Сферические функции на симметрических римановых пространствах // ДАН СССР. 1950. Т. 70. С. 5–8. (Перевод: AMS Transl. V. 37. Providence, RI: AMS, 1964. P. 39–43. Перепечатано: *Gelfand I. M.* Selected papers. V. 2. Berlin: Springer, 1988.)
- [42] *Гельфанд И. М., Фукс Д. Б.* Когомологии алгебры Ли векторных полей на окружности // Функц. анализ и его прил. 1968. Т. 2, № 4. С. 92–93. (Перепечатано: *Gelfand I. M.* Collected papers. V. 2. Berlin: Springer, 1988.)

- [43] Гельфанд И. М., Каздан Д. А. Некоторые проблемы дифференциальной геометрии и вычисление когомологий алгебры Ли векторных полей // ДАН СССР. 1971. Т. 200. С. 269–272.
- [44] Гельфанд И. М., Наймарк М. А. Унитарные представления группы Лоренца // J. Phys. Acad. Sci USSR. 1946. V. 10. P. 93–94. (Перепечатано: *Gelfand I. M. Collected papers. V. 2. Berlin: Springer, 1988.*)
- [45] Гельфанд И. М., Наймарк М. И. Унитарные представления классических групп // Тр. МИАН. 1950. Т. 36. (Есть немецкий перевод: Akademie-Verlag, Berlin, 1957. Английский перевод предисловия и § 9, § 18: *Gelfand I. M. Collected papers. V. 2. Berlin: Springer, 1988.*)
- [46] Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П. Расширение алгебры генераторов группы Пуанкаре и нарушение P -инвариантности // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. С. 452. (Перепечатано: Shifman M. (ed.) *The many faces of the superworld. Yuri Golfand memorial volume. World Scientific, 2000.*)
- [47] Гончарова Л. В. Когомологии формальных векторных полей прямой // Функц. анализ и его прил. 1973. Т. 7, № 2. С. 6–14.
- [48] Граев М. И. Унитарные представления вещественных полупростых групп // Труды ММО. 1958. Т. 7. С. 335–389. (Английский перевод: AMS Transl. V. 66. Providence, RI: AMS, 1968. P. 1–62.)
- [49] Guichardet A., Wigner D. Sur la cohomologie réelle des groupes de Lie simples réels // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1978. V. 11 (4), № 2. P. 277–292.
- [50] Гуткин Е. А. Переполненные системы подпространств и символы операторов // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9, № 3. С. 89–90.
- [51] Gutkin E. Coefficients of Clebsch-Gordan for holomorphic discrete series // Lett. Math. Phys. 1979. V. 3. P. 185–192.
- [52] Халатников И. М. Представление функций Грина в квантовой электродинамике континуальным интегралом // ЖЭТФ. 1954. Т. 28. С. 635–638.
- [53] Harish-Chandra. Representations of semi-simple Lie groups, II // Transactions of Amer. Math. Soc. 1953. V. 76. P. 26–65. (Перепечатано: *Harish-Chandra. Collected papers. V. 1.*)
- [54] Harish-Chandra. Representations of semisimple Lie groups IV // Amer. J. Math. 1955. P. 743–777. (Перепечатано: *Harish-Chandra. Collected papers. V. 2.*)
- [55] Harish-Chandra. The characters of semisimple Lie groups // AMS Transl. V. 83. Providence, RI: AMS, 1956. P. 98–163. (Перепечатано: *Harish-Chandra. Collected papers. V. 2.*)

- [56] *Helmke U., Rosenthal J.* Eigenvalue inequalities and Schubert calculus // *Math. Nachr.* 1995. V. 171. P. 207–225.
- [57] *Hoogenboom B.* Spherical functions and invariant differential operators on complex Grassmann manifolds // *Ark. Math.* 1982. V. 20. P. 69–58.
- [58] *Horn A.* Eigenvalues of sums of Hermitian matrices // *Pacif. J. Math.* 1962. V. 12. P. 225–241.
- [59] *Howe R.* Transcending classical invariant theory // *J. Amer. Math. Soc.* 1989. V. 2, № 3. P. 535–552.
- [60] *Howe R.* The oscillator semigroup // *The mathematical heritage of Hermann Weyl* // *Proc. Sympos. Pure Math.* (Durham, NC, 1987). V. 48. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1988. P. 61–132.
- [61] *Исмагилов Р. С.* Элементарные сферические функции на группе $SL(2, P)$ над полем, не являющимся локально компактным, по отношению к группе матриц с целыми элементами // *Известия АН СССР. Сер. матем.* 1967. Т. 31. С. 361–390.
- [62] *Исмагилов Р. С.* Унитарные представления группы $C^\infty(SU_2)$ // *Матем. сб.* 1976. Т. 100 (142), № 1. С. 117–131.
- [63] *Исмагилов Р. С.* Представления группы диффеоморфизмов окружности. (Неопубликовано, 1980.)
- [64] *Ismagilov R. S.* Representations of infinite-dimensional groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996.
- [65] *Кац В. Г.* Простые градуированные алгебры Ли конечного роста // *Известия АН СССР.* 1968. Т. 32. С. 1323–1367.
- [66] *Kac V. G.* Infinite-dimensional Lie algebras. An introduction. Boston, MA: Birkhäuser Boston, Inc., 1983. 3 ed., 1990. (Русский перевод: *Кац В. Г.* Бесконечномерные алгебры Ли. Москва, Мир, 1993.)
- [67] *Каневский З. М.* Загадки и трагедии Арктики.⁴³⁾ М.: Знание, 1991.
- [68] *Кантор И. Л.* Бесконечномерные простые градуированные алгебры Ли // *Доклады АН СССР.* 1968. Т. 179. С. 534–537.

⁴³⁾В книге, в частности, обсуждается хрестоматийная постгоночная дискуссия Р. Пири — Ф. Кук с точки зрения профессионала-полярника. Дискуссия также обсуждалась во многих работах, в частности, Арикайнен А. И. «Центр притяжения — Северный полюс», Москва, Наука, 1988. и Bryce R. M. «Cook and Peary», *The polar controversy, Resolved*, 1996, которые сами являются элементами дискуссии. Приоритетные вопросы 1909–1911 года (см. также работу [86]) дают дополнительную точку зрения на многие более поздние проблемы науки.

- [69] Кантор И. Л. Градуированные алгебры Ли // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1970. Т. 15. С. 227–266.
- [70] Karasev M., Kozlov M. Quantum and semiclassical representations over Lagrangian submanifolds in $\mathfrak{su}(2)^*$, $\mathfrak{so}(4)^*$, and $\mathfrak{su}(1, 1)^*$ // J. Math. Phys. 1993. V. 34. P. 4986–5006.
- [71] Карпель Е. Г. Последний путь. С. 153–225 этой книги. (Английский перевод см. в [120].)
- [72] Kashiwara M., Vergne M. On the Segal — Shale — Weil representations and harmonic polynomials // Invent. Math. 1978. V. 44, № 1. P. 1–47.
- [73] Кириллов А. А.⁴⁴⁾ Элементы теории представлений. М.: Наука, 1972. (2-е изд. М.: Наука, 1978.)
- [74] Klauder I. M., Sudarashan E. C. G. Fundamentals of quantum optics. W. A. Benjamin, 1968.
- [75] Klyachko A. A. Stable bundles, representation theory and hermitian operators. Preprint, Mittag-Leffler Institute, 1996.
- [76] Klyachko A. A. Vector bundles, linear representations, and spectral problems // Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Beijing). V. 2. Higher Ed. Press, Beijing, 2002. P. 599–613.
- [77] Кострикин А. И., Шафаревич И. Р. Градуированные алгебры конечной характеристики // Изв. АН СССР. 1969. Т. 33. С. 251–322. (Перепечатано: *Shafarevich I. R. Collected mathematical papers.* Springer, 1989; *Шафаревич И. Р. Собрание сочинений.* Т. 3. Москва, 1996.)
- [78] Крейн М. Г. Эрмитовы положительно определенные ядра на одно-родных пространствах, I, II // Укр. мат. журнал. 1949. Т. 1, № 4. С. 64–98; 1950. Т. 2, № 1. С. 10–59. (Английский перевод: AMS Transl. V. 34. Providence, RI: AMS, 1963. P. 69–108, 109–164.)
- [79] Лейтес Д. А. Спектры градуированно-коммутативных колец // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, № 3. С. 209–210.
- [80] Лидский В. Б. О характеристических числах сумм и произведений симметрических матриц // ДАН СССР. 1950. Т. 75. С. 769–772. (Английский перевод: U.S. Department of Commerce, National Bureau of standards, Washigton, D.C., 1953.)
- [81] Lipschitz R. Correspondence // Ann. Math. 1959. V. 69, № 2. P. 247–251.
- [82] Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений. Т. 1–5 / Ред. Каган В. Ф., Котельников А. П., Степанов В. В., Чеботарев Н. Г., Ши-роков А. П. М.: ГТТЛ, 1946–1951.

⁴⁴⁾ Одна из двух прямых ссылок в тексте на первое издание.

- [83] *Lorenz K.* Das sogenannte Böse. Wien: Borotha-Schoeler, 1963. (Русский перевод: *Лоренц К.* Агрессия. Так называемое зло. М.: Прогресс, 1994. См. также <http://www.lib.ru/PSIHO/LORENC/agressiya.txt>.⁴⁵⁾
- [84] *Лосев А. С.* От интеграла Березина к формализму Баталина–Вилковыского. Точка зрения математика. См. с. 112–138 этой книги.
- [85] *Лосик М. В.* Когомологии бесконечномерных алгебр Ли векторных полей // Функци. анализ и его прил. 1970. Т. 4, № 2. С. 43–53.
- [86] *Ludlam H.* Captain Scott. The full story. New York etc.: W. Foulsham, 1965. (Русский перевод второго издания: *Ладлем Г.* Капитан Скотт. М.: Гидрометеониздат, 1989; см. http://www.skitalets.ru/books/captain_scott/index.html.)
- [87] *Малышев В. А., Минлос Р. А.* Линейные многочастичные операторы. Москва, 1994. (Английский перевод: *Malyshev V. A., Minlos R. A.* Linear infinite-particle operators. Providence, RI: AMS, 1995.)
- [88] *Marinov M.* Revealing the path to the Superworld // *Golfand Y., Shifman M. A.* The many faces of the superworld. Yuri Golfand memorial volume. World Scientific, 2000. P. 32–40.
- [89] *Maslov V. P.* Remembering Alik Berezin // *Shifman M.* (ed.). Felix Berezin The Life and Death of the Mastermind of Supermathematics, 2007. P. 149–150. См. с. 250–251 этой книги.
- [90] *Menger K.* Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre // Sitzungsberichte (Akademie der Wissenschaften zu Wien). 1924. V. 133. P. 421–444. (Перепечатано: *Menger K.* Selecta Mathematica. V. 1. Springer, 2003.)
- [91] *Minlos R. A.* Felix Alexandrovich Berezin (a brief scientific biography) // Lett. Math. Phys. 2005. V. 74, № 1. P. 5–19.
- [92] *Молин Ф. Э.* Числовые системы⁴⁶⁾ / Ред. А. И. Кострикин. Добавления Л. А. Бокутя, Н. Н. Круликовского, И. В. Львова. Новосибирск: Наука, 1985.
- [93] *Молчанов В. Ф.* Аналог формулы Планшереля для гиперболоидов // ДАН СССР. 1966. Т. 171.

⁴⁵⁾ Уже компилируя библиографию, я обнаружил ссылку на работу К. Lorenz. *The Natural Science of Human Species. An introduction to comparative behavior research* (Russian manuscript, 1944–1948), мне недоступную. Возможно, что Конрад Лоренц многие из своих открытий сделал в России (так же как и Жан-Виктор Понселе в 1812–1814 гг.). Эта гипотеза, на мой взгляд, подтверждается другими (широко известными) работами Лоренца.

⁴⁶⁾ Есть также (недоступная мне) книга: *Канунов В. Ф.* Федор Эдуардович Молин. М.: Наука, 1986.

- [94] *Неретин Ю. А.* Дополнительная серия представлений группы диффеоморфизмов окружности // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 2. С. 213–214.
- [95] *Неретин Ю. А.* Почти инвариантные структуры и конструкции унитарных представлений группы диффеоморфизмов окружности // ДАН СССР. 1987. Т. 294. С. 37–41. См. <http://www.mat.univie.ac.at/~neretin/almost.pdf>.
- [96] *Neretin Yu. A.* Categories of symmetries and infinite-dimensional groups // Oxford University Press, 1996. (См. также *Неретин Ю. А.* Категории симметрий и бесконечномерные группы. М.: УРСС, 1998.)
- [97] *Neretin Yu. A.* Plancherel formula for Berezin deformation of L^2 on Riemannian symmetric space // J. Funct. Anal. 2002. V. 189, № 2. P. 336–408. См. <http://arxiv.org/abs/math/9911020>.
- [98] *Neretin Yu. A.* Gauss — Berezin integral operators, spinors over supergroup $\mathrm{OSp}(2p|2q)$, and Lagrangian super-Grassmannians. Preprint ESI-1986, 2007.
- [99] *Неретин Ю. А., Ольшанский Г. И.* Граничные значения голоморфных функций, особые унитарные представления групп $\mathrm{O}(p, q)$ и их пределы при $q \rightarrow \infty$ // Записки научных семинаров ПОМИ. 1995. Т. 223. С. 9–91. (См. <http://www.mat.univie.ac.at/~neretin/N0.ps>.)
- [100] *Novikov S. P.* The second half of the 20th century and its conclusion: crisis in the physics and mathematics community in Russia and in the West // Buchstaber V. M. (ed.) et al. Geometry, topology, and mathematical physics. Providence, RI: AMS, 2004. P. 1–24. (См. также *Новиков С. П.* К семидесятилетию со дня рождения. М.: МЦНМО, 2008.)
- [101] *Огиевецкий В. И., Файнберг В. Я., Фрадкин Е. С., Марков М. А., Новиков С. П., Манин Ю. И.* Памяти Феликса Александровича Бerezина // Успехи физ. наук. 1981. Т. 2. С. 357–358. (См. <http://www.ufn.ru/ufn81/ufn816/Russian/r816g.pdf>. См. также с. 374–376 этой книги.)
- [102] *Onsager L.* Crystal statistics. I. One-dimensional model with an order-disorder transitions // Phys. Rev. 1944. V. 65. P. 117–149.
- [103] *Olshanetsky M. A., Perelomov A. M.* Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras // Inv. Math. 1976. V. 37. P. 93–108.
- [104] *Ольшанский Г. И.* Описание унитарных представлений со старшим весом для групп $U(p, q) \sim$ // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14, № 3. С. 32–44.

- [105] *Ольшанский Г.И.* Унитарные представления бесконечномерных пар (G, K) и формализм Р. Хау // ДАН СССР. 1983. Т. 269, № 1. С. 33–36.
- [106] *Olshanski G.I.* Unitary representations of infinite-dimensional pairs (G, K) and the formalism of R. Howe // Representation of Lie groups and related topics / D. P. Zhelobenko, A. M. Vershik (eds). P. 269–463. New York: Gordon and Breach, 1990.
- [107] *Ольшанский Г.И.* Представление Вейля и нормы гауссовых операторов // Функци. анализ и его прил. 1994. Т. 28, № 1. С. 51–67, 96.
- [108] *Переломов А.М.* Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987. (Английский перевод: Berlin: Springer, 1986.)
- [109] *Pressley A., Segal G.* Loop groups. New York: Oxford University Press, 1986. (2-е изд., 1988; Русский перевод: Пресли Э., Сигал Г. Группы петель. М.: Мир, 1990.)
- [110] *Schoenberg I.J.* On certain metric spaces arising from Euclidean spaces by a change of metric and their embedding to Hilbert space // Ann. Math. 1937. V. 38. P. 787–793.
- [111] *Schoenberg I.J.* Metric spaces and positive definite functions // AMS Transl. V. 44. Providence, RI: AMS, 1938. P. 522–536.
- [112] *Шварц А.С.* Суперматематика и физика. С. 34–39 этой книги.
- [113] *de Saint-Exupéry.* Terre des hommes. 1939. (Многократно переиздавалась, переводилась на английский и русский языки («Земля людей» или «Планета людей»). Русский перевод см. <http://lib.ru/koi/Ekzupery/planeta.txt>.)
- [114] *Segal Gr.* Unitary representations of some infinite-dimensional groups // Comm. Math. Phys. 1981. V. 80, № 3. P. 301–342.
- [115] *Segal I.E.* Tensor algebras over Hilbert spaces. I // AMS Transl. V. 81. Providence, RI: AMS, 1956. P. 106–134.
- [116] *Segal I.E.* Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom. I // Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 1959. V. 31, № 12. P. 1–39.
- [117] *Shale D.* Linear symmetries of free boson fields // AMS Transl. V. 103. Providence, RI: AMS, 1962. P. 149–167.
- [118] *Shale D., Stinespring W.F.* Spinor representations of infinite orthogonal groups // J. Math. Mech. 1965. V. 14. P. 315–322.
- [119] *Shifman M.* Introduction // The many faces of the superworld. Yuri Golfand memorial volume / Shifman M. (ed.). World Scientific, 2000. (См. <http://arxiv.org/abs/hep-th/9909016>.)
- [120] *Shifman M.* (ed.). Felix Berezin. The Life and Death of the Mastermind of Supermathematics. World Scientific, 2007.

- [121] *Шилов Г. Е., Фан Дык Тинь.* Интеграл, мера, производная на линейном пространстве. М.: Наука, 1967.
- [122] *Thoma E.* Der Unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der unendlichen symmetrischen Gruppe // *Math. Zeitschr.* 1964. V. 85, № 1. P. 40–61.
- [123] *Твардовский И. Т.* Тёркин на том свете. Москва, 1963. (См. <http://lib.ru/koi/POEZIQ/TWARDOWSKIJ/terkin2.txt>.)
- [124] *Unterberger A., Upmeyer H.* The Berezin transform and invariant differential operators // *Comm. Math. Phys.* 1994. V. 164. P. 563–597.
- [125] *Vergne M., Rossi H.* Analytic continuations of holomorphic discrete series of semisimple Lie groups // *Acta Math.* 1976. V. 136, № 1–2. P. 1–59.
- [126] *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Представления $SL(2, R)$, где R — кольцо функций // *Успехи матем. наук.* 1973. Т. 28, № 5 (173). С. 83–128. (Перепечатано: *Gelfand I. M.* Collected papers. V. 2. Berlin: Springer, 1988.)
- [127] *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Представления групп диффеоморфизмов // *Успехи матем. наук.* 1975. Т. 30, № 6 (186). С. 1–50. (Перепечатано: *Gelfand I. M.* Collected papers. V. 2. Berlin: Springer, 1988.)
- [128] *Вершик А. М., Керов С. М.* Асимптотическая теория характеров бесконечной симметрической группы // *Функц. анализ и его прил.* 1981. Т. 15, № 4. С. 15–27.
- [129] *Вершик А. М., Керов С. М.* Характеры и фактор-представления бесконечномерной унитарной группы // *ДАН СССР.* 1982. Т. 267. С. 272–276.
- [130] *Virasoro M. A.* Subsidiary conditions and ghosts in dual-resonance models // *Phys. Rev.* 1970. V. D1. P. 2933–2936.
- [131] *Voiculescu D.* Représentations facorielles de type Π_2 // *J. Math. Pure Appl.* 1976. V. 55. P. 1–20.
- [132] *Volkov D. V., Akulov V. P.* Is the neutrino a Goldstone particle? // *Phys. Lett.* 1973. V. B46. P. 109–112.
- [133] *Волков Д. В., Сорока В. А.* Эффект Хиггса для Гольдстоновских частиц со спином $1/2$ // *Письма в ЖЭТФ.* 1973. Т. 18, вып. 8. С. 529–532.
- [134] *Voltaire F.* Micromegas. 1752. (Есть русский и английский переводы. См. <http://lib.ru/INOOLD/WOLTER/mikromegas.txt>.)
- [135] *Высоцкий В. С.* Сочинения в двух томах. М.: Худ. лит., 1991. (См. <http://vysocki.ouc.ru>, <http://www.bards.ru/>.)

-
- [136] *Wallach N. R.* Analytic continuation of discrete series // AMS Transl. V. 251. Providence, RI: AMS, 1979. P. 19–37.
- [137] *Weil A.* Sur certains groupes d'opérateurs unitaires // Acta Math. 1964. V. 111. P. 143–211. (Перепечатано: *Weil A.* Oeuvres scientifique // Collected papers, v. 3. Springer, 1979. Русский перевод: Математика (сб. переводов). 1969. Т. 13, № 5. С. 33–44.)
- [138] *Wielandt H.* On extremum property of sums of eigenvalues // Proc. Amer. Math. Soc. 1955. V. 6. P. 106–110. (Перепечатано: *Wielandt H.* Mathematische werke / Mathematical works. V. 2. Berlin: Walter de Gruyter, 1996.)
- [139] *Wess J., Zumino B.* A Lagrangian model invariant under supergauge transformations // Phys. Lett. 1974. V. B49. P. 52.
- [140] *Желобенко Д. П.* Гармонический анализ на комплексных полупростых группах Ли. М.: Наука, 1974. (Английский перевод: Moscow: Mir, 1974.)
- [141] *Желобенко Д. П., Наймарк М. А.* Описание вполне неприводимых представлений комплексных полупростых групп Ли // ДАН СССР. 1966. Т. 171. С. 25–28.
- [142] *Зиновьев А. А.* Зияющие высоты. Ибанск, 1974.

ОТ ИНТЕГРАЛА БЕРЕЗИНА К ФОРМАЛИЗМУ БАТАЛИНА — ВИЛКОВЫСКОГО: ВЗГЛЯД МАТФИЗИКА ¹⁾

Андрей Лосев

С точки зрения функционального интеграла квантовая теория поля может быть сформулирована как интеграл по суперпространству полей. Центральным элементом этой конструкции является интеграл Березина. Замена бесконечномерного суперпространства полей на обычное конечномерное супермногообразие даёт содержательную игрушечную модель квантовой теории поля. Мы проследим за возникновением интеграла Березина и рассмотрим некоторые из его приложений, ведущие к формализму Баталина — Вилковыского. Этот формализм особенно полезен для описания структуры духовых полей в суперсимметричных теориях, в которых понятие симметрии квантовой теории поля обобщает стандартное описание на языке представлений алгебры.

Институт Теоретической и Экспериментальной Физики, Б. Черемушкинская, 25, 117259, Москва, Россия; e-mail: losev@itep.ru.

¹⁾В этой статье даётся подход к разгадке загадочной теории интеграла на супермногообразиях, обнаруженной независимо В. Н. Шандером и В. П. Паламодовым. Дело в том, что утверждение «след тождественного преобразования пространства равен размерности этого пространства» приводит после суперизации термина «след» к любому целому числу, а не только к неотрицательным целым. Этот факт — намёк на существование другого (по сравнению со стандартной формулировкой) супераналога формулы Стокса

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega,$$

а именно такого, где $\text{codim } \partial M = (0, -1)$, а не $(1, 0)$, см. [4*]. Подробнее — в гл. «Интегрирование» в [4*], написанной В. Н. Шандером в 1987 г. Есть, похоже, и совсем экзотические интегрирования, см. [4*]. — *Прим. ред. Д. Л.*

§ 1. Вместо введения

1. Математическая физика как стиль теоретической физики. Нравится вам это или нет, но за последние 40 лет вид той области знания, которая раньше называлась теоретической физикой, сильно изменился. Изменился не только вид, но даже стиль этой науки.

В старое доброе время теоретизирование напоминало паромное сообщение между островами надёжно установленных экспериментальных фактов. Когда берег терялся из вида, экипаж (из соображений безопасности и в согласии с уставом) напряжённо смотрел вперёд в поисках твердой земли. Интеллектуальные авантюристы, пускавшиеся в открытое море свободного теоретизирования, в массе своей сбивались с пути, исчезали из виду и пропадали без вести. Благополучно вернувшиеся объявлялись гениями, но такой стиль научных исследований считался дурным тоном среди добропорядочных теоретиков.

Сегодня некоторые физики-теоретики (назовем их моряками) нашли достаточно надежные способы ориентирования в океане свободных теоретических построений. Вперёдсмотрящих заменило ориентирование по вечным неподвижным звездам²⁾. Моряки знают, что звезды ничего не скажут о том, где находится новая твердь, но они безошибочно определяют положение на глобусе. Так, бороздя океаны возможностей, моряки — не один, а все вместе — создают атлас теоретического мира, на котором впоследствии должны появиться континенты новых экспериментальных открытий.

Теоретики становятся *моряками* просто потому, что любят открытое море. Соблазненные капитанами молодые учёные, набранные на корабли, плывущие к новому Эльдорадо Единой квантовой теории поля или Квантовой гравитации, быстро понимают, что им предстоит всю жизнь провести в море. Испугавшиеся такой перспективы дезертируют, но заболевшие морем остаются. Они откроют пугающую и захватывающую правду своим ученикам — и в ряды моряков придёт пополнение.

Моряков иногда называют математическими физиками, автор этого текста считает себя одним из них.

²⁾Под звездами здесь подразумевается внутренняя логическая структура математического мира, а не общепризнанные корифеи, как можно было бы подумать.

В этом тексте я изложу свое видение *интеграла Березина*, замечательного инструмента математической физики. Читатель может рассматривать этот текст как пример того, как математический физик воспринимает мир, а может просто разделить с автором восхищение по поводу неожиданной мощи интеграла Березина. Феликс Березин опубликовал свое интегральное исчисление антикоммутирующих переменных в своей первой книге «Метод вторичного квантования», опубликованной на русском языке в 1965 г. и переведённой на английский в 1966 г. Она стала настольной книгой для нескольких поколений математических физиков.

Я считаю, что предметом математической физики является изучение всей совокупности квантовых теорий поля (КТП) с помощью всех возможных методов. На первый взгляд, это выглядит абсолютно неразрешимой задачей, поскольку сложно даже перечислить все возможные КТП, и вопрос об их решении даже не стоит. Однако, они частично упорядочены по своей сложности.

Напрашивается сравнение с геометрией, которая изучает все возможные пространства. Множество всех пространств необозримо, однако простейшие пространства, такие как точка, прямая или отрезок, легко представить и понять. В вещественной размерности 2 все ориентируемые поверхности без границы характеризуются родом (числом ручек), в высших размерностях всё становится намного сложнее.

Мне кажется, что главная задача математической физики — в исследовании универсальных явлений КТП как функций на пространстве всех возможных КТП. В простейших КТП большинство явлений вырождается в тавтологии, такие как $0 = 0$. По мере нарастания сложности появляются содержательные явления, причём возникают они в простейшей форме. На этой стадии они «ручные» и допускают исчерпывающее количественное описание. По мере нарастания сложности теории явления также усложняются и допускают только качественное описание.

Поэтому я считаю, что понимание явления в КТП состоит в нахождении простейшей (пороговой) КТП, в которой это явление содержательно проявляется.

2. Резюме. Одним из подходов к КТП является функциональный интеграл. Он вычисляется по суперпространству полей. Это означает, что некоторые из этих полей являются фермионными (математики их называют нечётными). К нечётным полям относятся

не только поля материи, такие как поле электрона, но и дѹховые поля, отвечающие (калибровочным) симметриям. Рассмотрим КТП на нульмерном пространстве-времени, в которой бесконечномерное пространство чѣтных полей заменено на обычное конечномерное пространство, а бесконечномерное суперпространство полей — на конечномерное суперпространство. Функциональный интеграл по такому «пространству полей» становится обычным интегралом.

Однако квантовый характер теории сохраняется в зависимости подынтегрального выражения от $\hbar$, что может быть сделано даже в этой переупрощѣнной модели.

Ниже мы рассмотрим интеграл Березина, сравним его с другими встречающимися в математике интегралами, и даже выразим последние через интеграл Березина. Мы увидим, как системы со связями описываются на языке суперпространственных интегралов. Интеграл Березина открывает дорогу к пониманию формализма Баталина — Вилковского (БВ) [1, 2] в КТП. Мы обсудим возникновение этого формализма, а также его простейшие приложения. В заключение мы рассмотрим калибровочные системы в БВ-формализме, выявим геометрический смысл духов Фаддеева — Попова и покажем, что БВ-формализм позволяет обобщить понятие системы с симметрией.

§ 2. Мотивация и определение интеграла Березина

1. Геометрия, алгебра и супергеометрия: резюме. Пусть дано многообразие. Рассмотрим пространство или гладких, или аналитических, или алгебраических (комплексно-) вещественнозначных функций на нем. Это пространство образует коммутативное кольцо, в котором для каждой точки P и пары функций f_1, f_2 мы полагаем

$$(f_1 \cdot f_2)(P) = f_1(P) \cdot f_2(P). \quad (1)$$

Пусть дано подпространство в многообразии. Рассмотрим идеал в этом кольце, состоящий из функций, зануляющихся на этом подпространстве.

Идеалы, отвечающие подпространствам, частично упорядочены по включению — чем меньше пространство, тем больше идеал. В частности, максимальные идеалы кольца (не совпадающие со всем кольцом) отвечают минимальным подпространствам — точкам.

По кольцу R можно попытаться найти такое пространство, что функции на нём образуют данное кольцо. Точки этого пространства — максимальные идеалы I_P . Факторпространства R/I_P изоморфны полям, поэтому «значение» элемента кольца в точке — это образ этого элемента в R/I_P .

Смелая мысль (которая оказывается на редкость плодотворной) состоит в ослаблении условий на алгебру функций. В частности, можно рассматривать любые коммутативные кольца или алгебры над любыми полями — получающиеся пространства в алгебраической геометрии называются схемами.

Можно заменить R на градуированно-коммутативное кольцо — тогда получится так называемая суперсхема. Можно даже вовсе забыть про коммутативность и сохранить только ассоциативность умножения — возникает так называемая некоммутативная геометрия.

Ниже мы в основном сосредоточимся на супермногообразиях, отвечающих $\mathbb{Z}_2$ -градуированно-коммутативным кольцам (GCR). Эти кольца (как векторные пространства) допускают разложение:

$$GCR = EVEN \oplus ODD. \quad (2)$$

Пары нечётных элементов антикоммутируют друг с другом, а остальные (однородные) пары коммутируют.

Простейшим супермногообразием является чисто нечётное n -мерное пространство. Его кольцо мультипликативно порождено чётными константами и n нечётными элементами ψ^i . Можно показать, что такое пространство содержит нечётные «прямые», «плоскости» и т. д., но только одну точку.

2. Разминка: интеграл по окружности. В стандартном курсе анализа считается, что для вычисления интеграла от функции F по отрезку I надо представить его в виде объединения большого числа малых отрезков I_i (пересекающихся только по начальным и конечным точкам), на которых функция F приблизительно постоянна, $F \approx F_i$, и затем сложить эти значения, умноженные на длину соответствующих отрезков:

$$\int_I F dx \approx \sum_i F_i l_i. \quad (3)$$

Однако такое определение абсолютно бесполезно в суперпространстве — каждое нечётное направление содержит лишь одну точку

и, следовательно, не содержит интервалов. Поэтому нужно пойти другим путем: следует найти такое свойство интеграла, которое могло бы заменить его определение. То есть это свойство должно было бы давать возможность однозначно определять значение интеграла.

Первым свойством интеграла является его линейность (по отношению к сложению функций и умножению их на константы). Этого недостаточно, требуются дополнительные свойства. Рассмотрим, к примеру, знаменитое соотношение

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a). \quad (4)$$

Помогает ли это свойство? Нечётные направления не содержат точек, а значит, не содержат и границы. Поэтому рассмотрим функции на окружности, то есть такие, что $f(a) = f(b)$. Тогда

$$\int_{S_1} \frac{df}{dx} dx = 0. \quad (5)$$

Легко показать, что это условие определяет интеграл по окружности с точностью до мультипликативной константы. Пусть x — координата на окружности, $x + 2\pi \sim x$, тогда мы можем представить все непрерывные функции на окружности в виде суммы периодических

$$f(x) = c + \sum_{n>0} \{a_n \cos nx + b_n \sin nx\}. \quad (6)$$

Из (5) легко заключить, что интеграл не зависит от a_n и b_n ! В самом деле,

$$\cos(nx) = \frac{d}{dx} \frac{\sin(nx)}{n}, \quad \sin(nx) = \frac{d}{dx} \frac{-\cos(nx)}{n}. \quad (7)$$

Следовательно, интеграл — это линейная функция от c . Достаточно задать нормировку. На окружности стандартной нормировкой является $\int 1 \cdot dx = 2\pi$. Это завершает теорию интеграла по окружности.

Можно получить эквивалентное определение, если выбрать на окружности векторное поле, $D = v(x) \frac{d}{dx}$, и положить, что интеграл от Df равен нулю. В нашем случае в качестве векторного поля D было выбрано поле с $v = 1$.

Обобщая: в многомерии можно так выбрать алгебру Ли специальных векторных полей (дифференциальных операторов первого

порядка)

$$D_a = v_a^i(X) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

что интеграл

$$\int_M \mu f$$

с точностью до нормировки определяется из условия

$$\int_M \mu D_a f = 0. \quad (8)$$

Обычно эта алгебра Ли является алгеброй инфинитезимальных диффеоморфизмов, сохраняющих меру интегрирования μ .

В примере с окружностью ³⁾

$$\frac{d}{dx}(dx) = 0.$$

3. Определение интеграла Березина. Открытие Феликса Березина состояло в том, что интеграл по нечётным пространствам можно определить таким же образом, как мы определяли интеграл по окружности! В нечётном одномерном случае (с нечётной координатой ψ) следует задать оператор первого порядка (производную), которая определяется алгебраически как

$$f(\psi + \varepsilon) = f(\psi) + \varepsilon \frac{df}{d\psi}.$$

Разложение по ε обрывается, поскольку из-за нечётности $\varepsilon^2 = 0$.

Березин предложил следующее определение (где $D\psi$ — элемент объёма):

$$\int_{\text{Berezin}} D\psi \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0. \quad (9)$$

Рассмотрим пространство функций от одной нечётной переменной ψ . Это пространство двумерно, поскольку все функции от ψ имеют вид

$$f(\psi) = c_0 + \psi c_1.$$

Так как

$$c_0 = \frac{\partial(\psi c_0)}{\partial \psi},$$

³⁾Здесь имеется в виду производная Ли от элемента объёма dx вдоль векторного поля $\frac{d}{dx}$. — Прим. ред. Д.Л.

мы заключаем, что интеграл Березина не зависит от c_0 . Он пропорционален c_1 . Естественно выбрать коэффициент пропорциональности, равный 1.

Для завершения определения следует определить *многомерный* интеграл Березина. Для этого следует либо выбрать систему векторных полей в многомерии

$$\frac{\partial}{\partial \psi^i},$$

либо определить интеграл из условия факторизации интеграла от произведения. Эти подходы совпадают. Например, двумерный интеграл Березина равен

$$\int_{\text{Berezin}} \mathcal{D}\psi_2 \mathcal{D}\psi_1 (a + \psi_1 b_1 + \psi_2 b_2 + \psi_1 \psi_2 c) = c. \quad (10)$$

Удивительным свойством интеграла Березина (непосредственно следующим из определения) является

$$\int_{\text{Berezin}} \mathcal{D}(c\psi) f = \frac{1}{c} \int_{\text{Berezin}} \mathcal{D}\psi f. \quad (11)$$

Это свойство противоречит наивному ожиданию того, что операция

$$\int_{\text{Berezin}} \mathcal{D}\psi$$

может быть рассмотрена как интеграл от дифференциальной формы $d\psi$ по некоторому (возможно, виртуальному) пространству. В самом деле, поскольку $d(c\psi) = cd\psi$, мы получили бы c , а вовсе не $\frac{1}{c}$ в правой части уравнения (11).

Поэтому интеграл Березина *не* является интегралом от дифференциальной формы старшей степени: мы вернемся к этому вопросу в § 3.

§ 3. Дифференциальные формы как функции на суперпространстве и их интегрирование

В § 2 мы описали интеграл как линейную операцию на функциях.

Сравним эту операцию с другим знаменитым интегралом классической математики — интегралом от дифференциальной формы по многообразию, к описанию которого мы сейчас перейдём.

Рассмотрим пространство M и пространство $Fun(M)$ вещественнозначных функций на M . Можно представлять себе M как пространство $Points(M)$ точек на M . Более того, существует замечательное *спаривание* между точками и функциями, вычисляющее значение функции в точке,

$$Points(M) \times Fun(M) \rightarrow \mathbb{R}; \quad \langle P, f \rangle = f(P). \quad (12)$$

В этом спаривании пространство функций является векторным пространством, а пространство точек — нет. Однако его можно расширить до векторного пространства, рассматривая линейные комбинации точек. При этом спаривание вычисления продолжается до билинейного спаривания между векторными пространствами:

$$F(a_1 P_1 + a_2 P_2) = a_1 F(P_1) + a_2 F(P_2).$$

Вспомним, что точки — это нульмерные подмногообразия, и попробуем продолжить спаривание на ориентируемые подмногообразия высших размерностей. Оказывается, дифференциальные формы при этом будут обобщением функций.

Например, построим объект, двойственный к ориентированным одномерным подмногообразиям и аддитивный по отношению к разрезанию их на части. Такой объект однозначно задаётся своими значениями на малых ориентированных интервалах (начала которых находятся в произвольной точке пространства). отождествляя эти интервалы с касательными векторами к многообразию, мы получаем, что двойственный объект является линейным функционалом на касательных векторах.

После наложения условий типа гладкости мы получаем определение 1-формы. Мы будем обозначать пространство таких форм символом $\Omega^1(M)$.

Линейные функционалы на элементах поверхности аналогично задаются функциями на антисимметричных парах касательных векторов, так получаются 2-формы, пространство которых в дальнейшем обозначается символом $\Omega^2(M)$, и так далее.

При таком определении дифференциальные формы возникают одновременно с понятием интеграла от формы по подмногообразию. Определим k -цепи как элементы векторного пространства формальных линейных комбинаций k -мерных ориентированных подпространств (возможно, с границей); умножение -1 на многообразии

означает смену ориентации. Имеется спаривание

$$(k\text{-цепи}) \times \Omega^k(M) \rightarrow \mathbb{R}; \quad \langle C, \omega \rangle = \int_C \omega. \quad (13)$$

Заметим, что для k -цепей определено понятие границы ∂ . Граница данной k -цепи является $(k-1)$ -цепью, равной сумме границ слагаемых. Заметим, что даже если бы мы начали не с цепей, а с подмногообразий, взятие границы всё равно вывело бы нас в класс цепей. Простейшим примером является ориентированный отрезок, граница которого состоит из конечной точки минус начальная точка.

Теперь мы можем *определить* внешний дифференциал де Рама d как операцию на дифференциальных формах, сопряжённую (двойственную) оператору взятия границы ∂ :

$$\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega. \quad (14)$$

С этой точки зрения d следует вычислять⁴⁾ из соотношения (14).

Сторонники такого подхода к интегралу отмечают его геометрическую природу, в то время как интеграл Березина по построению алгебраичен. Но, как мы уже отмечали выше, к суперпространству нельзя применять понятия привычной геометрии.

Как ни странно, геометрический подход к интегралу может быть легко выражен с помощью интеграла Березина. В самом деле, рассмотрим суперпространство $\Pi(T)M$, являющееся тотальным пространством касательного расслоения к пространству M с обращённой чётностью слоя. Чтобы его описать, рассмотрим сперва TM . Если задана координатизация многообразия M картами U_α с координатами X_α^i , то касательное расслоение TM может быть параметризовано с помощью координат X_α^i на базе M и координат t_α^i в касательном пространстве. На пересечении карт U_α и U_β имеем

$$X_\alpha^i = f_{\alpha\beta}^i(X_\beta); \quad t_\alpha^i = \frac{\partial f_{\alpha\beta}^i}{\partial X_\beta^j} t_\beta^j \quad (15)$$

⁴⁾Возможно, однако, обратить логику и дать альтернативное определение интеграла, считая, что пространство дифференциальных форм и оператор d уже *даны*. В этом случае интеграл по компактному k -мерному многообразию без границы определяется (с точностью до нормировочного множителя) как такое линейное отображение из пространства k -форм в вещественные числа, что оно зануляется на образе d .

(отметим, что по индексу β суммирование не производится). Функции на пространстве TM в точности соответствуют функциям $F_\alpha(X_\alpha, t_\alpha)$ из U_α в $\mathbb{R}$, согласованным относительно преобразований склейки (15),

$$F_\alpha(X_\alpha(X_\beta), t_\alpha(X_\beta, t_\beta)) = F_\beta(X_\beta, t_\beta). \quad (16)$$

Разлагая по степеням t , мы видим, что эти функции суть симметричные ковариантные тензоры.

Суперпространство $\Pi(T)M$ также может быть описано с помощью покрытия пространства M картами с локальными координатами X_α и *нечётными* координатами ψ_α . Преобразования склейки те же самые:

$$X_\alpha^i = f_{\alpha\beta}^i(X_\beta); \quad \psi_\alpha^i = \frac{\partial f_{\alpha\beta}^i}{\partial X_\beta^j} \psi_\beta^j, \quad (17)$$

но зато теперь ψ антикоммутируют. Поэтому функции на $\Pi(T)M$ являются ковариантными антисимметричными тензорами, то есть дифференциальными формами на M .

Проведённое выше описание геометрического интеграла наводит на гипотезу о существовании канонической меры на $\Pi(T)M$. Такая мера должна существовать на каждой карте и быть инвариантной относительно операций склейки (17). Такая мера на самом деле существует, и её часто называют *канонической мерой Березина*. Она имеет вид

$$\mu_{\text{Бер, кан}} = \prod_i dX_\alpha^i \prod_i \mathcal{D}\psi_\alpha^i. \quad (18)$$

Заметим, что первый (бозонный) множитель в (18) строится с помощью формы старшей степени, в то время как второй строится как интеграл Березина. Это не супердифференциальная форма⁵⁾.

Проиллюстрируем сказанное выше на одномерном примере. В этом случае мера равна

$$dX_\alpha \mathcal{D}\psi_\alpha,$$

и при преобразованиях $X_\alpha = cX_\beta$, $\psi_\alpha = c\psi_\beta$ получаем

$$dX_\alpha = cdX_\beta, \quad \text{а} \quad \mathcal{D}\psi_\alpha = \frac{1}{c} \mathcal{D}\psi_\beta. \quad (19)$$

⁵⁾ А какая же?! Ответ — *интегральная* форма, см. [4*], где теория интегрирования на супермногообразиях развита довольно глубоко. А об их приложениях см. [3*]. — *Прим. ред. Д.Л.*

Какой же смысл приобретает оператор де Рама (обычный внешний дифференциал)? Когда дифференциальные формы рассматриваются как функции, оператор де Рама становится просто векторным полем, сохраняющим меру Березина.

§ 4. Ходжева звездочка-операция как нечётное Фурье-преобразование

В качестве первого применения интеграла Березина рассмотрим новую интерпретацию ходжевой звездочка-операции. В частности, необходимо будет объяснить, почему

$$*^2 = (-1)^{\deg},$$

где $\deg$ — степень дифференциальной формы. Заметим, что обычное Фурье-преобразование обладает похожим свойством — его квадрат равен 1. Как мы сейчас увидим, ходжева звездочка-операция является просто нечётным преобразованием Фурье.

А именно:

$$\tilde{f}(X, \tilde{\psi}) = C(X) \int \mathcal{D}\psi_1 \dots \mathcal{D}\psi_n \exp \left(g_{ij}(X) \tilde{\psi}^i \psi^j \right) f(X, \psi), \quad (20)$$

где g — метрика на пространстве. Заметим, что, применяя преобразование дважды, мы получим

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{f}}(\tilde{\tilde{\psi}}) &= C^2 \int \mathcal{D}\psi_1 \dots \mathcal{D}\psi_n \mathcal{D}\tilde{\psi}_1 \dots \mathcal{D}\tilde{\psi}_n \exp \left(g_{ij} \tilde{\psi}^i \left(\psi^j + \tilde{\tilde{\psi}}^j \right) \right) f(\psi) = \\ &= C^2 \det g_{ij} f(-\tilde{\tilde{\psi}}) = C^2 \det g_{ij} (-1)^{\deg} f(\tilde{\tilde{\psi}}). \end{aligned} \quad (21)$$

Поэтому естественно положить

$$C = (\det g_{ij})^{-\frac{1}{2}}.$$

§ 5. Представитель Маттаи — Квиллена и супермногообразия как дроби

Пространство полей КТП моделируется многообразием. Существуют два классических способа построить новое многообразие из исходного: профакторизовать по действию группы (в дальнейшем называемой калибровочной) и ограничиться на нули некоторой

функции (наложить связи). Как описать интегрирование по новому многообразию в терминах исходного? Эту задачу решали Маттаи и Квиллен, и соответствующие интегралы обычно называют представителями Маттаи — Квиллена (Маттаи и Квиллен искали интегральное представление для представителя некоторых классов когомологий). Мы разберём факторпространства после обсуждения БВ-формализма, а сейчас перейдём к случаю подмногообразий (связей).

Начнём с простейшего примера — интеграла по пространству нулей вещественнозначной функции f

$$\int_{C \in M} \omega = \int_M \delta_C \omega, \quad C = \{p \mid f(p) = 0\}. \quad (22)$$

Мы сейчас рассмотрим представление для δ -функции как интеграла Березина по супермногообразию (подробнее об этом в физической литературе можно прочесть в [3]).

Начнем с построения размазанной δ -функции, попробуем её записать в следующем виде:

$$\delta^{\text{naive}, m} = \exp(-m^2 f^2) m.$$

В самом деле, эта функция при больших m сосредоточена вблизи нулей f , и, если M — вещественная прямая, её интеграл имеет конечный предел при $m \rightarrow \infty$. Однако такое представление не вполне удовлетворительно, поскольку δ должна быть 1-формой, а не функцией (чтобы можно было интегрировать по M форму степени, равной размерности C). Более того, интеграл от $\delta^{\text{naive}, m}$ меняется при замене $f \rightarrow c f$, хотя пространство нулей не меняется. Обе эти проблемы решаются одновременно, если мы рассмотрим

$$\delta^m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-m^2 f^2) m df. \quad (23)$$

Поднимем $m df$ в показатель экспоненты. А именно, введём нечётную переменную λ' , и тогда с помощью интеграла Березина можно записать

$$\delta^m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \mathcal{D}\lambda' \exp(-m^2 f^2 + \lambda' m df). \quad (24)$$

Полученное интегральное представление решает поставленную задачу, осталось выяснить его геометрический смысл. Слагаемые в экспоненте выглядят совершенно по-разному, и непонятно, как перейти к пределу при больших m в подынтегральном выражении.

Ситуация проясняется, если ввести вспомогательную чётную переменную l' , которая будет играть роль множителя Лагранжа:

$$\delta^m = \frac{1}{2\pi} \int \mathcal{D}\lambda' dl' \exp \left(il' m f + \lambda' m d f - \frac{l'^2}{4} \right). \quad (25)$$

Переходя к новым переменным l и λ :

$$2\pi m l = m l', \quad \lambda = m \lambda',$$

мы получаем следующее замечательное представление:

$$\delta^m = \int \mathcal{D}\lambda dl \exp \left(2\pi i l f + \lambda d f - \frac{(l\pi)^2}{m^2} \right). \quad (26)$$

Здесь интеграл вычисляется по суперпространству с координатами l и λ с канонической мерой Березина. Более того, выражение в экспоненте имеет предел при $m \rightarrow \infty$. Оказывается, этот предел имеет достаточно неожиданный геометрический смысл. Рассматривая df как функцию на суперпространстве $\Pi(T)M$ с координатами X и ψ , мы видим, что показатель экспоненты имеет вид

$$d^{\text{super}}(f\lambda) = \left(\psi^j \frac{\partial}{\partial X^j} + 2\pi i l \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) (f\lambda). \quad (27)$$

Новый оператор d^{super} следует считать оператором де Рама на суперпространстве M^{super} с чётными координатами X^i и нечётной координатой λ . Поэтому исходный интеграл приобретает следующий вид:

$$\int_{C \in M} \omega = \int_{\Pi(T)M^{\text{super}}} \mu_{\text{Ber}}(\Pi(T)M^{\text{super}}) \omega \exp(-d^{\text{super}}(f\lambda)). \quad (28)$$

Это наводит на мысль, что супермногообразие до некоторой степени следует представлять себе как некоторый аналог *дроби*, в которой числитель — исходное пространство, а знаменатель — пространство уравнений. Интеграл (28) следует себе представлять как способ сократить эту дробь с помощью функции f . Если дифференциальная форма ω замкнута по отношению к дифференциалу d^{super} , то можно показать, что результат интегрирования не зависит от малых деформаций функции f , что решает задачу, поставленную Маттаи и Квилленом. Это указывает на то, что разные способы упростить «дробь» в некотором смысле эквивалентны!

Описанная выше конструкция широко используется в топологических квантовых теориях поля. В частности, в сигма-моделях типа A пространство M — это бесконечномерное пространство всех отображений из двумерного пространства-времени в таргет-пространство ⁶⁾, f является бесконечномерным пространством уравнений голоморфности, а C — это пространство голоморфных отображений-инстантонов. Фермионы ψ и λ — это твистованные фермионы обычной суперсимметричной сигма-модели, d^{super} называется скалярной нильпотентной нечётной Q -симметрией, а параметр t является константой связи (типа $\bar{t}$).

§ 6. БВ-мастер-уравнение как нечётное Фурье-преобразование уравнений де Рама

Как будет показано ниже, формализм Баталина — Вилковыского (БВ) — наиболее мощный формализм для работы с симметриями функционального интеграла — может быть проинтерпретирован как результат нечётного Фурье-преобразования теории когомологий де Рама [4].

Напомним, что когомологии, предназначенные для изучения интегралов по замкнутым подмногообразиям (рассматриваемых с точностью до деформаций), определены как фактор пространства замкнутых форм ω по точным (образу оператора де Рама),

$$d\omega = 0, \quad \omega \sim \omega + d\nu. \quad (29)$$

Одной из главных операций над когомологиями является операция интегрирования вдоль компактного слоя. А именно: рассмотрим многообразие M , представляющее из себя семейство компактных слоёв F , параметризованных точками многообразия (базы) B . Стартуя с замкнутой формы Ω на M , можно получить замкнутую форму на базе B , интегрируя вдоль компактного слоя:

$$\Omega_B = \int_F \Omega. \quad (30)$$

Легко проверить, что интеграл от точной формы даёт точную форму. Это вытекает из разложения дифференциала на M в виде суммы

⁶⁾Пространство значений. — Прим. ред. Д.Л.

дифференциалов на базе и слое,

$$d_M = d_F + d_B, \quad (31)$$

и

$$\int_F d_F \nu = 0, \quad (32)$$

в силу компактности слоя. Поэтому интегрирование задает отображение на классах когомологий.

Формализм БВ — это уравнение на функции на пространстве $\Pi(T^*)M$, являющемся кокасательным пространством к M с обращённой чётностью слоев.

Эти функции зависят от X^i и X_i^* , где X_i^* — координаты на слое кокасательного расслоения. Они имеют чётность, противоположную чётности X^i ; так, в классическом случае (на многообразиях) X^i — чётные, поэтому X_i^* — нечётные. В дальнейшем координаты на слое X_i^* будут называться *антиполями*.

Такие функции естественно возникают при нечётном преобразовании Фурье вдоль слоя (как в теории звездочка-операции Ходжа), но теперь вместо послойной метрики мы пользуемся каноническим спариванием между слоями касательного и кокасательного расслоений. Отметим, что преобразование Фурье требует задания меры на слое, которую мы обозначим Ω :

$$g(X^*, X) = \int \Omega(X) \mathcal{D}\psi^1 \dots \mathcal{D}\psi^n f(\psi, X) \exp(\psi X^*). \quad (33)$$

Для простоты ограничимся такими координатами на многообразии, что мера $\Omega(X)$ имеет простейший вид:

$$\Omega(X) = dX^1 \dots dX^n.$$

При этом преобразовании оператор де Рама (дифференциальный оператор первого порядка) на M превращается в следующий дифференциальный оператор второго порядка на супермногообразии, ассоциированном с $\Pi(T)M$:

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial X^i} \frac{\partial}{\partial X_i^*}, \quad (34)$$

называемый оператором Баталина — Вилкововского. Условие замкнутости превращается в пред-БВ-уравнение:

$$\Delta g(X^*, X) = 0. \quad (35)$$

Обсудим, что происходит с операцией интегрирования по слоям. Для этого разделим переменные на переменные слоя X_F, ψ_F и переменные базы X_B, ψ_B . Обычное интегрирование по слою — это интегрирование Березина по суперпространству $\Pi(T)F$. После нечётного преобразования Фурье оно перейдёт в интегрирование по подмногообразию $X_F^* = 0$, которое является *лагранжевым* подмногообразием в $\Pi(T^*)F$ (по отношению к канонической периплектической⁷⁾ форме). Как хорошо известно, операция интегрирования по слою обобщается до операции интегрирования по замкнутому циклу в слое. Можно показать, что при нечётном Фурье-преобразовании эта операция также перейдёт в операцию интегрирования по лагранжевому подмногообразию.

Верно также и обратное — интеграл по любому лагранжевому подмногообразию в базе переводит решения пред-БВ-уравнения на тотальном пространстве расслоения в решения пред-БВ-уравнений на базе $\Pi(T^*)B$.

Чтобы получить из пред-БВ-формализма БВ-формализм следует рассмотреть подынтегральное выражение g , зависящее от вспомогательного параметра $\hbar$ так же, как от него зависит подынтегральное выражение в функциональном интеграле, то есть рассмотреть нульмерную КТП,

$$g(X^*, X) = \exp\left(\frac{1}{\hbar} S(X^*, X, \hbar)\right), \quad (36)$$

где S регулярна при $\hbar = 0$. Зависимость S от $\hbar$ означает, что мы стартуем не с фундаментальной теории, а с эффективной, в которой часть степеней свободы уже оынтегрирована.

Из уравнения (35) следует так называемое квантовое *мастер-уравнение* на S ,

$$\{S, S\}_{\text{BV}} + \hbar \Delta S = 0, \quad (37)$$

где БВ-скобка определена как

$$\begin{aligned} \{g_1, g_2\}_{\text{BV}} &= \Delta(g_1 g_2) - g_1 \Delta g_2 - (\Delta g_1) g_2 = \\ &= \frac{\partial g_1}{\partial X^i} \frac{\partial g_2}{\partial X_i^*} - (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (38)$$

⁷⁾ Нечётный аналог симплектической формы, см. [4*]. Физики называют его иногда БВ-симплектической формой. А термин *периплектический* предложил мне Андре Вейль (Andre Weil). — *Прим. ред. Д.Л.*

В случае чисто чётных X и, соответственно, нечётных X^* функции на БВ-пространстве становятся поливекторными полями, а БВ-скобка на них превращается в известную в математике скобку Схоутена. Эта скобка обобщает известную скобку Ли (коммутатор векторных полей) на поливекторные поля. Например,

$$\{f_1, f_2\}_{BV} = 0; \quad \{v^i X_i^*, f\}_{BV} = v^i \partial_i f, \\ \{v^i X_i^*, u^j X_j^*\}_{BV} = (v^i \partial_i u^j - u^i \partial_i v^j) X_j^*, \quad (39)$$

$$\{\pi^{ij} X_i^* X_j^*, \pi^{pq} X_p^* X_q^*\}_{BV} = 4 \pi^{ij} \frac{\partial \pi^{pq}}{\partial X^i} X_j^* X_p^* X_q^*. \quad (40)$$

Заметим, что правая часть последнего уравнения пропорциональна якобиатору для скобки на функциях, порождённой бивектором. В частности, если якобиатор равен нулю, то скобка на функциях удовлетворяет тождеству Якоби, что и объясняет название этого выражения.

§ 7. Упражнение в БВ-формализме

Полагая в квантовом мастер-уравнении (37) параметр $\hbar = 0$, мы получим так называемое классическое мастер-уравнение,

$$\{S(X^*, X, 0), S(X^*, X, 0)\}_{BV} = 0. \quad (41)$$

В частности,

$$S = \pi^{ij} X_i^* X_j^*$$

удовлетворяет классическому мастер-уравнению, если бивектор π^{ij} задает на функциях от X скобку Пуассона. В самом деле, правая часть (40) совпадает с уравнением Якоби на скобку, задаваемую бивектором π^{ij} .

Как хорошо известно, пуассоновость обратимых бивекторов π эквивалентна замкнутости 2-формы

$$\omega_{ij} = (\pi^{-1})_{ij}.$$

Это утверждение на первый взгляд выглядит загадочно, поскольку оно связывает решение системы квадратных уравнений с решениями системы линейных уравнений!

Однако это странное явление легко объясняется БВ-интегралом. В самом деле, рассмотрим очевидно замкнутую форму (неопределен-

ной степени), получаемую экспоненцированием замкнутой 2-формы ω :

$$d\omega = 0 \Rightarrow d \exp \left(\frac{1}{\hbar} \omega \right) = 0. \quad (42)$$

Проведем нечётное Фурье-преобразование

$$\begin{aligned} \int \Omega(X) \mathcal{D}\psi^1 \dots \mathcal{D}\psi^n \exp \left(\frac{1}{\hbar} (\omega_{ij} \psi^i \psi^j + X_i^* \psi^i) \right) = \\ = \exp \left(\frac{1}{\hbar} S_\omega(\hbar) \right) = \exp \left(\frac{1}{\hbar} (\pi^{ij} X_i^* X_j^* + O(\hbar)) \right), \end{aligned} \quad (43)$$

здесь $O(\hbar)$ это однопетлевая поправка. Из построения следует, что $S_\omega(\hbar)$ решает квантовое мастер-уравнение. Поэтому его значение в нуле $S_\omega(0)$ решает классическое мастер-уравнение, то есть бивектор π — пуассонов.

§ 8. БВ-интеграл

Основная мысль БВ-формализма состоит в том, что все встречающиеся интегралы на самом деле являются *БВ-интегралами*, то есть интегралами от экспоненты от БВ-действия по лагранжево-му подмногообразию (d -мерному подпространству $2d$ -мерного пространства, такого что БВ-симплектическая форма

$$\delta X^i \wedge \delta X_i^*$$

зануляется на этом подпространстве). Главное свойство БВ-интегралов состоит в том, что результат БВ-интегрирования

$$\exp \left(\frac{1}{\hbar} S(X^*, X, Y^*, Y, \hbar) \right)$$

даёт эффективное действие, удовлетворяющее (37) на пространстве параметров Y, Y^* [1, 2] (если исходное действие удовлетворяло 37) на полном пространстве).

Простейшим примером такого действия является функция $f(X, Y)$ (не зависящая от антиполей X^* и Y^*). Рассмотрим координаты Y, Y^* как параметры, а $X^* = 0$ как лагранжево подмногообразие. Очевидно, интеграл не зависит от Y^* и потому решает мастер-уравнение.

Разобранное выше нечётное Фурье-преобразование, связывающее БВ-симплектическую и пуассонову структуры, даёт второй пример БВ-интеграла. Рассмотрим БВ-пространство с координатами

$$X^i, X_i^*, \psi^i, \psi_i^*,$$

в котором ψ_i^* является антиполем к полю ψ^i . Поэтому ψ_i^* чётно. Тогда выражение в экспоненте уравнения (43) является ещё одним примером решения мастер-уравнения.

В самом деле, член $\psi^i X_i^*$ отвечает векторному полю $\psi^i \frac{\partial}{\partial X^i}$, которое является просто дифференциалом де Рама d . На БВ-языке замкнутость 2-формы ω выражается в том, что функция $\omega_{ij}\psi^i\psi^j$ является d -инвариантной.

Теперь почти очевидно, что нечётное преобразование Фурье — это БВ-интеграл. Рассмотрим X, X^* как параметры, ψ, ψ^* — как координаты на БВ-пространстве, а $\psi^* = 0$ — как уравнение, задающее лагранжево подмногообразие. Из главного свойства БВ-интеграла следует, что эффективное действие $\pi^{ij}X_i^*X_j^*$ решает мастер-уравнение, т. е. что это пуассонов бивектор.

§ 9. БВ-формализм, симметрии и фиксация калибровки

В калибровочных теориях мы начинаем с пространства полей, на котором действует группа симметрии. Действие — это функционал на полях, инвариантный по отношению к симметрии, оно задаёт функцию на пространстве орбит этой симметрии, и функциональный интеграл в калибровочной теории — это просто интеграл по пространству орбит. Стандартный способ вычисления этого интеграла в бесконечномерном случае состоит в выборе представителей на каждой орбите (так называемая фиксация калибровки) и интегрирование по пространству представителей со специальной мерой. Удобный способ построить эту меру состоит в вычислении интеграла Березина по специальным (нечётным в классическом случае) полям, называемым *дúхами*.

Как мы сейчас покажем, такой интеграл естественно возникает в БВ-формализме. Более того, окажется, что дúхи имеют геометрический смысл независимо от процедуры фиксации калибровки.

1. Симметричные системы на БВ-языке. Рассмотрим пространство полей КТП как (супер)пространство M , в котором поля — координаты X^i на этом пространстве. Классическая система задаётся действием, которое является функцией $f(X)$ на M . Классические симметрии описываются векторными полями $v_a^i(X)\frac{\partial}{\partial X^i}$, индекс a нумерует эти симметрии. Говорится, что действие f симметрично относительно (супер)алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со структурными константами C_{ab}^c ,

если

$$v_a^i(X) \frac{\partial f}{\partial X^i} = 0 \quad (44)$$

и

$$\left[v_a^i(X) \frac{\partial}{\partial X^i}, v_b^j(X) \frac{\partial}{\partial X^j} \right]_{\pm} = C_{ab}^c v_c^i(X) \frac{\partial}{\partial X^i}, \quad (45)$$

где $[\ , \]_{\pm}$ обозначает суперкоммутатор. На БВ-языке система уравнений (44) и (45) допускает следующую интерпретацию. Рассмотрим суперпространство

$$M_{BV} = \Pi(T^*)M \times \mathfrak{g}^* \times \Pi(\mathfrak{g}) = \Pi(T^*)(M \times \Pi(\mathfrak{g})) \quad (46)$$

с координатами X^i, X_i^*, c_a^*, c^a . Здесь чётность антиполей X_i^*, c_a^* противоположна чётности полей X^i, c^a . Пространство $\Pi(\mathfrak{g})$ является (супер)алгеброй Ли с обращённой чётностью. В частности, для обычных (чётных) симметрий координаты на $\Pi(\mathfrak{g})$ — нечётные переменные c^a . Они параметризуют универсальное инфинитезимальное преобразование симметрии следующим образом: $c^a v_a^i \frac{\partial}{\partial X^i}$. Мы увидим, что эти переменные c^a окажутся *c-дúхами* (они образуют половину дúхов Фаддеева — Попова).

Заметим, что c_a^* — координаты на $\mathfrak{g}^*$, то есть они чётны для обычных симметрий, они антиполя к духам c . Их не следует путать с нечётными антидúхами Фаддеева — Попова, которые мы, во избежание путаницы, будем называть *b-дúхами*.

Система уравнений (44) и (45) эквивалентна тому, что

$$S(X, X^*, c, c^*) = f(X) + c^a v_a^i X_i^* + \frac{1}{2} C_{ab}^c c^a c^b c_c^* \quad (47)$$

решает классическое мастер-уравнение.

2. Фиксация калибровки как БВ-интеграл. Пусть дана система с симметрией и мы хотим зафиксировать калибровку. На БВ-языке это означает, что мы хотим выбрать весьма специальное лагранжево многообразие, такое что переменные X ограничены связями

$$f_{\alpha}(X) = 0; \quad \alpha = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}, \quad (48)$$

фиксирующими эту калибровку.

Для сохранения лагранжевости мы ослабляем условие $X^* = 0$ и вместо него рассматриваем

$$X_i^* = \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial X^i} b^{\alpha}. \quad (49)$$

Здесь b^α — координаты на подпространстве в кокасательном расслоении (они имеют ту же чётность, что и X^* , в частности, они нечётны, если X чётны).

Проверим, что уравнение (49) на самом деле определяет лагранжево подмногообразие:

$$\delta X^i \wedge \delta X_i^* = \delta X^i \frac{\partial f_\alpha}{\partial X^i} \delta b^\alpha + \delta X^i \wedge \delta X^j \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial X^i \partial X^j} = 0, \quad (50)$$

здесь первый член зануляется из-за фиксирующего калибровку условия (48), а второй — из-за спаривания между симметричным и антисимметричным тензорами.

Накладывая условие (48) с помощью множителей Лагранжа β^α , мы переписываем интеграл в симметричной системе в следующем виде:

$$\int \Pi_\alpha \mathcal{D}b^\alpha d\beta^\alpha \Pi_a \mathcal{D}c^a \Omega(X) \exp \left(f(X) + c^a v_a^i \frac{\partial f_\alpha}{\partial X^i} b^\alpha + 2\pi i \beta^\alpha f_\alpha \right), \quad (51)$$

где $\Pi_a \mathcal{D}c^a$ — каноническая мера на (супер)алгебре Ли с обращенной чётностью. В выражении (51) легко узнать стандартное представление Фаддеева — Попова, в котором переменные b^α являются b -духами Фаддеева — Попова.

§ 10. Обобщения классических симметрий

1. Дифференциально градуированные и гомотопические алгебры Ли. Деформируя решения мастер-уравнения (47) можно получить различные обобщения классического понятия симметрии. Начнем с простейшего пространства M , то есть с точки. Решения мастер-уравнения, линейные по антидухам и квадратичные по духам, то есть имеющие вид $C_{ab}^c c^a c^b c_c^*$, находятся во взаимно однозначном соответствии с алгебрами Ли. Можно ли добавить член, линейный по духам? На первый взгляд, этого нельзя сделать из-за соображений чётности (действие должно быть чётно). Однако если мы обобщим алгебру до супералгебры, соображения чётности не будут более препятствием. Поищем решения в виде

$$S(c, c^*) = \left\{ q_a^e c^a + \frac{1}{2} C_{ab}^e c^a c^b \right\} c_e^*. \quad (52)$$

Здесь первый член задает линейный оператор на супералгебре Ли. Из классического мастер-уравнения следует, что $q^2 = 0$ и q диффе-

ренцирует скобку Ли, т. е. выполняется правило Лейбница:

$$q([A, B]) = [q(A), B] + (-1)^{\text{par } A} [A, q(B)]. \quad (53)$$

Такие алгебраические структуры известны как *дифференциально градуированные (ДГЛ) алгебры Ли* (правильнее — супералгебры Ли).

Можно также включить высшие степени по c , добавляя члены

$$C_{a_1 \dots a_k}^e c^{a_1} \dots c^{a_k} c_e^*$$

в выражение (52). Теперь мастер-уравнение требует $q^2 = 0$, правило Лейбница и систему гомотопических уравнений, самое простое из которых — гомотопическое уравнение Ли

$$C_{[a_1 a_2]}^b C_{b a_3]}^f = q_d^f C_{a_1 a_2 a_3}^d - C_{[a_1 a_2 b]}^f q_{a_3]}^b. \quad (54)$$

Здесь квадратные скобки обозначают градуированную (т. е. со знаками, зависящими от чётностей) антисимметризацию.

Левая сторона уравнения (54) — это левая часть уравнения Якоби (якобиатор), а правая сторона может рассматриваться как коммутатор между дифференциалом q и новой трёхместной ($3 \rightarrow 1$) операцией $C_{a_1 a_2 a_3}^d$. Таким образом, уравнение (54) обозначает, что якобиатор, понимаемый как операция $3 \rightarrow 1$, является q -точным. Аналогичные уравнения возникают и для высших операций. Такие алгебры называются гомотопическими (супер)алгебрами Ли, или L_∞ -алгебрами.

2. Алгеброиды. Другое обобщение понятия симметрии возникает, если заменить структурные константы на живые функции пространства M , т. е. если

$$S(X, X^*, c, c^*) = f(X) + c^a v_a^i X_i^* + \frac{1}{2} C_{ab}^c(X) c^a c^b c_c^*. \quad (55)$$

Оказывается, структура, являющаяся следствием мастер-уравнения, уже существовала в математике под именем *алгеброида Ли* [5]. Как это ни удивительно, но в математической физике алгеброиды встречаются в суперсимметричных калибровочных теориях в калибровке Весса — Зумино! В этих теориях антикоммутатор двух суперсимметрий $\{Q_\alpha, Q_\alpha\}$ является суммой сдвига и калибровочного преобразования с калибровочным параметром, зависящим от поля,

а именно $\gamma^m A_m$. На БВ-языке это означает, что действие (ограничимся для простоты абелевой калибровочной теорией)

$$S = S_{\text{SYM}} + c v_{\text{gauge}} + \varepsilon^\alpha v_{\text{super}, \alpha} + \eta^\mu v_{\text{shift}, \mu} + \frac{1}{2} (\eta_\mu^* + c^* A_\mu) (\varepsilon \gamma^\mu \varepsilon) \quad (56)$$

решает мастер-уравнение. Здесь векторные поля (на пространстве полей) v_{super} , v_{shift} и v_{gauge} отвечают суперсимметрии, сдвигам и калибровочной симметрии соответственно; ε , η и c являются соответствующими духами, а A_μ — абелево калибровочное поле.

3. Высшие члены по антиполям и новое понятие симметрии.

Во всех разобранных выше примерах действие было линейно по антиполям. Теперь добавим члены, квадратичные по антиполям. Они обычно возникают в случае, когда действие является эффективным, то есть само возникает как некоторый БВ-интеграл.

Рассмотрим простейший пример: возьмём пару — пространство $\mathbb{R}^n$, на котором действует алгебра Ли $so(n)$, и инвариантную функцию

$$f = -X_1^2 - \dots - X_n^2.$$

БВ-действие принимает вид:

$$S = - \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i,j=1}^n c_{ij} X_i^* X_j + \sum_{i,j,k=1}^n \frac{1}{2} c_{ik}^* c_{ij} c_{jk}. \quad (57)$$

Интегрируя по X_n при фиксированном $X_n^* = 0$, мы получаем

$$S_{\text{eff}} = - \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} c_{ij} X_i^* X_j + \sum_{i,j,k=1}^n \frac{1}{2} c_{ik}^* c_{ij} c_{jk} - \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{n-1} c_{in} c_{jn} X_i^* X_j^*. \quad (58)$$

Если бы не последний член, действие (58) означало бы невозможное — нетривиальное линейное действие $so(n)$ на $\mathbb{R}^{n-1}$. Однако последний член делает невозможное возможным, обобщая понятие симметричной системы.

Новое понятие симметрии не сводится только лишь к паре, состоящей из представления алгебры Ли векторными полями и инвариантной функции. В него входит новая сущность — отображение из внешнего квадрата алгебры $\Lambda^2(so(n))$ в пространство *бивекторов*,

$$\pi_{kn,ln}^{ij} = \frac{1}{4} \left(\delta_k^i \delta_l^j - \delta_k^j \delta_l^i \right). \quad (59)$$

Более того, векторные поля не реализуют более представление алгебры Ли. Вместо этого тройка — векторные поля, инвариантная относительно их действия функция и бивектор — участвует в едином уравнении [8] (которое мы здесь приведём в общем виде)

$$\{\pi_{ab}, f\} + \{v_a, v_b\} = C_{ab}^c v_c. \quad (60)$$

Можно задать вопрос — встречаются ли такие экзотические обобщения (60) понятия симметрии в физике или математической физике? Оказывается, их также можно найти в суперсимметричных квантовых теориях поля [6, 7]. Они появляются при исключении (отынтегрировании) вспомогательных полей (мы это уже наблюдали при описании размазанной дельта-функции). В самом деле, оператор де Рама можно рассматривать как нечётную симметрию (ее чётный дух мы назовем ε), квадрат которой равен нулю. Поэтому до интегрирования по полям l мы имеем

$$S = 2\pi i l f(X) + \lambda f'(X) \psi - 2\pi^2 l^2 + \varepsilon (X^* \psi + 2\pi i \lambda^* l). \quad (61)$$

Отынтегрировав поля l , мы получаем

$$S = -\frac{1}{2} f^2 + \lambda f'(X) \psi + \varepsilon (X^* \psi - \lambda^* f) - \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\lambda^*)^2. \quad (62)$$

Последний член является новым бивектором. Это же явление наблюдается во всех калибровочных теориях.

§ 11. Вместо заключения: фантазии о БВ-М-теории

М-теория в современной математической физике — это гипотетическая суперсимметричная теория с весьма сложной структурой вакуумов. Вблизи специальных точек в пространстве вакуумов теория выглядит либо как одна из суперструнных теорий, либо как 11-мерная супергравитация с мембраной. Мне хотелось бы воспринимать М-теорию не как теорию, а как явление. Оно состоит в том, что имеется некоторая новая объединяющая теория со сложным пространством модулей (вакуумов), но ее поведение в окрестностях специальных точек нам знакомо.

Именно это мы и наблюдаем в теории решений мастер-уравнений. Решение мастер-уравнения общего вида не имеет привычной геометрической интерпретации. Однако в областях вырождения

(там, где у БВ-действия нет линейных членов) можно ввести линейную структуру на БВ-пространстве. Тогда решения мастер-уравнения приобретают стандартный геометрический смысл (который обсуждался в тексте), а именно описание через связи, симметрии и их высшие обобщения. Однако данное решение мастер-уравнения может иметь несколько точек вырождения и, следовательно, несколько геометрических интерпретаций. В этом случае следует сказать (по аналогии с М-теорией), что эти интерпретации дуальны друг другу.

В заключение хотелось бы отметить, что все это стало возможно благодаря развитию супергеометрии. Феликс Березин был одним из создателей супергеометрии и суперанализа, влияние которых на современную математическую физику и математику уже огромно и, скорее всего, таким же и останется в будущем.

Благодарности

Работа была частично поддержана грантами RFBR 07-02-01161, INTAS-03-51-6346, NWO 047.011.2004.026 и NSH-8065.2006.2.

Литература

- [1] *Batalin I. A., Vilkovisky G. A.* Gauge Algebra And Quantization // *Phys. Lett.* V.B102. P.27–31; Quantization Of Gauge Theories With Linearly Dependent Generators // *Phys. Rev.* 1983. V.D28. P.2567–2582; 1984. V.(E)D30. P.508;
Batalin I. A., Fradkin E. S. A Generalized Canonical Formalism And Quantization Of Reducible Gauge Theories // *Phys. Lett.* 1983. V.B122. P.157;
Voronov B. L., Tyutin I. V. Formulation Of Gauge Theories Of General Form. I // *Theor. Math. Phys.* 1982. V.50. P.218.
- [2] *Schwarz A. S.* Geometry of Batalin — Vilkovisky quantization // *Commun. Math. Phys.* 1993. V.155. P.249; [arXiv:hep-th/9205088](#); Semi-classical Approximation in Batalin — Vilkovisky Formalism // *Commun. Math. Phys.* 1993. V.158. P.373; [arXiv:hep-th/9210115](#).
- [3] *Cordes S., Moore G., Ramgoolam S.* Lectures on Two-Dimensional Yang — Mills Theory, Equivariant Cohomology and Topological Field Theories // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 1995. V.41. P.184; [arXiv:hep-th/9411210](#).
- [4] *Bott R., Tu L. W.* Differential Forms in Algebraic Topology. Berlin: Springer-Verlag, 1995. (Имеется перевод: *Бомм Р., Ту Л. В.* дифференциальные формы в алгебраической топологии. М.: Наука, 1989.)

- [5] *Mackenzie K.* Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry. Cambridge: CUP, 1987.
- [6] *Green M.B., Hull C.M.* Quantum Mechanics of a Twisted Superparticle // Nucl. Phys. 1990. V. B 344. P. 115–164; The Quantum Mechanics of an $n + 1$ Superparticle in an Extended Superspace // Mod. Phys. Lett. 1990. V. A 5. P. 1399–1409;
Bergshoeff E., Kallosh R., Van Proeyen A. Superparticle Actions And Gauge Fixings // Class. Quant. Grav. 1992. V. 9. P. 321.
- [7] *Aleksandrov V., Krotov D., Losev A., Lysov V.* A Pure Spinor Superfield Formalism, in preparation.
- [8] *Krotov D., Losev A., Lysov V.*, in preparation.

ПСЕВДОКЛАССИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ

БЕРЕЗИНА — МАРИНОВА

Д. Гитман

1. Систематическое использование в теоретической физике антикоммутирующих переменных, получившее распространение в значительной степени благодаря Феликсу Александровичу Березину, открыло в ней новые направления и возможности и позволило связать воедино различные теоретические конструкции и глубже понять суть многих явлений. Среди множества примеров такого рода важное место занимает псевдоклассическая модель спиновой частицы, одним из создателей которой (в соавторстве с М. Мариновым) был Березин [1]. Мне кажется чрезвычайно естественным и, в какой-то степени, неизбежным то, что именно Березин пришел к идее такой модели. Эта неизбежность была обусловлена счастливым сочетанием его интереса к физическим проблемам квантования и его математических достижений в области анализа антикоммутирующих переменных.

Сейчас, к сожалению, мы не можем спросить Феликса Александровича, каков был ход его мыслей, но весьма вероятным представляется следующее. Занимаясь проблемами квантования и прекрасно изучив квантовую теорию, он не мог не отметить тот факт, что в то время построение квантовой теории заданной физической системы (квантование) выглядело принципиально различным, скажем, для массивной частицы в потенциальном поле и для нерелятивистского спина. В первом случае имеется хорошо сформулированная классическая теория обсуждаемой физической системы, и при квантовании мы можем опираться на принцип соответствия, что позволяет немедленно описать все возможные соответствующие квантовые версии этой системы. Во втором случае классического описания не имелось,

и квантовую теорию нужно было угадывать сразу, как правильную теорию, согласующуюся с экспериментом. Большинство принимало такое положение вещей как окончательное ещё и потому, что понимало, что пространство квантовых состояний спиновой частицы конечномерно, в то время как известные правила квантования классических систем с обычными коммутирующими переменными, неограниченными какими-либо связями, всегда приводили к бесконечномерным гильбертовым пространствам. Думается, однако, что Березина такое положение вещей не устраивало. И в связи с этим он (совместно с Мариновым) усмотрел новую возможность применения антикоммутирующих переменных в физике.

Здесь следует сделать небольшое отступление и напомнить, что до описываемого момента антикоммутирующие переменные возникали в физике либо в технических целях, например как источники в производящих функционалах (Швингер, Фрадкин, Березин), либо для последовательной формулировки теории поля с полуцелым спином (Швингер, Фрадкин). В последнем случае, полагая фермиевские поля элементами бесконечномерной алгебры Грассмана, можно естественным образом обеспечить принцип соответствия и автоматически получить нужный антикоммутатор для квантованных фермиевских полей, обеспечивающий положительность спектра энергии. Кроме того, при этом естественным образом строится производящий функционал функций Грина с антикоммутирующими источниками как функциональный интеграл Березина по фермиевским (антикоммутирующим) полям.

Вернёмся к положению с квантовой теорией спина. Идея Березина — Маринова заключалась в том, что эту квантовую теорию можно не угадывать, а получить стандартным квантованием некоторой механики, переменные которой являются элементами конечномерной алгебры Грассмана, так называемой псевдоклассической механики. Ключом к этой идее, по-видимому, являлось их предварительное наблюдение о том, что конечномерные степени свободы могут возникнуть при квантовании антикоммутирующих переменных. В своей работе [1] Березин и Маринов построили псевдоклассические действия для нерелятивистского и релятивистского спинов, квантования которых воспроизводят соответствующие квантовые теории. Тем самым Березин и Маринов фактически реабилитировали процедуру квантования в том смысле, что на сегодняшний день мы воспроизводим все известные квантовые описания физиче-

ских систем квантованием неких их классических или псевдоклассических версий. Ниже мы проиллюстрируем идею Березина и Маринова на примере псевдоклассической модели нерелятивистского спина, а затем вкратце опишем её дальнейшее развитие.

2. Согласно Березину и Маринову, псевдоклассическая механика замороженного (без пространственных степеней свободы) нерелятивистского спина в однородном магнитном поле $\mathbf{B}$ описывается действием первого порядка $S = \int L dt$ с функцией Лагранжа следующего вида ¹⁾:

$$L = i \left\{ \boldsymbol{\psi} \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}} - \frac{e}{m} (\mathbf{B} \cdot [\boldsymbol{\psi} \times \dot{\boldsymbol{\psi}}]) \right\}, \quad \boldsymbol{\psi} = (\psi^k(t), k = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где e и m — заряд и масса электрона соответственно, а точкой наверху здесь и далее обозначаются производные по времени t . Действие Березина и Маринова является функционалом от трех антикоммутирующих траекторий ψ^k , эволюционирующих во времени (именно поэтому это и аналогичные действия называются псевдоклассическими). В исходной работе [1] и в последующих многочисленных работах других авторов ψ^k интерпретировались как нечётные элементы грассмановой алгебры $\mathfrak{G}_3$ с тремя вещественными образующими. Надо сказать, что такая интерпретация, понимаемая буквально, оказывается противоречивой и на самом деле не является необходимой для квантования теории, как показывается ниже. Повидимому, следует считать ψ^k элементами некоторой более широкой алгебры Грассмана. Аналогичный вопрос возникает и в теории поля, где фермиевские поля интерпретируются как антикоммутирующие переменные.

Ниже применим общепринятый в настоящее время метод канонического квантования теорий со связями, модифицированный на случай присутствия в теории антикоммутирующих переменных (см. [4]), к теории с действием Березина и Маринова, считая последнее лагранжевым действием. Переходя к гамильтоновой формулировке

¹⁾ Следует отметить, что попытка описывать спин грассмановыми переменными впервые была предпринята в [2]. Трёхмерные векторы здесь и далее обозначаются жирными буквами, а их скалярные и векторные произведения имеют обычный евклидов вид. Например, $\boldsymbol{\psi} \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}} = \psi^k \dot{\psi}^k$, где по повторяющимся индексам всегда подразумевается суммирование.

теории, мы вводим импульсы, сопряжённые к координатам²⁾,

$$p_k = \frac{\partial_r L}{\partial \dot{\psi}^k} = i\psi^k,$$

находим связи теории $\Phi_k = p_k - i\psi^k = 0$, гамильтониан H ,

$$H = \frac{\partial_r L}{\partial \dot{\psi}^k} \dot{\psi}^k - L = \frac{ie}{m} (\mathbf{B} \cdot [\boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{\psi}]), \quad (2)$$

и расширенный гамильтониан $H^{(1)} = H + \lambda^k \Phi_k$, где λ — соответствующие лагранжевы множители. Других связей в теории нет. Связи $\Phi_k = 0$ являются, согласно терминологии Дирака [3], связями второго рода, их скобки Пуассона образуют несингулярную матрицу, $\{\Phi, \Phi_l\} = -2i\delta_{kl}$. В этом случае все лагранжевы множители можно выразить через координаты и импульсы, динамика по-прежнему определяется гамильтонианом H , но уже не со скобкой Пуассона, а с так называемой скобкой Дирака. В рассматриваемом случае вычисление скобок Дирака для переменных $\boldsymbol{\psi}$ даёт³⁾: $\{\psi^k, \psi^l\}_D = -\frac{i}{2}\delta_{kl}$. Переходя к квантовой теории, мы объявляем переменные $\boldsymbol{\psi}$ операторами $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ и, по принципу соответствия, задаём их антикоммутиатор согласно их скобкам Дирака:

$$[\hat{\psi}^k, \hat{\psi}^l]_+ = i\hbar \{\psi^k, \psi^l\}_D = \frac{\hbar}{2} \delta_{kl}. \quad (3)$$

Известная квантовая теория нерелятивистского спина получается при реализации операторов $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ в виде $\hat{\boldsymbol{\psi}} = \frac{\sqrt{\hbar}}{2} \boldsymbol{\sigma}$, где $\boldsymbol{\sigma}$ — вектор матриц Паули⁴⁾. Это неприводимое унитарное представление алгебры Клиффорда (3). Действительно, возникающее таким образом гильбертово пространство состояний теории — это конечномерное пространство двухкомпонентных столбцов. Операторы в нем задаются (2×2) -матрицами. В частности, квантовый гамильтониан $\hat{H}$,

²⁾Знак ∂_r обозначает правую производную.

³⁾Имеются в виду обобщённые на наличие нечётных переменных скобки Пуассона и Дирака. См., например, [4].

⁴⁾Матрицы Паули — это матрицы

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

построенный по классической функции H , имеет вид:

$$\hat{H} = -(\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}), \quad \hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{e}{m} \hat{\mathbf{s}}, \quad \hat{\mathbf{s}} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma},$$

где $\hat{\mathbf{s}}$ — известный нерелятивистский оператор спина, а $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ — оператор соответствующего магнитного момента электрона.

Важное замечание состоит в том, что при традиционном «угадывании» квантовой теории нерелятивистского спина, мы исходим из коммутаторов теории углового момента⁵⁾,

$$[\hat{s}^k, \hat{s}^l]_- = i\hbar \varepsilon_{klm} \hat{s}^m, \quad k, l, m = 1, 2, 3,$$

имеющих бесконечное множество неприводимых представлений, в то время как квантуя псевдоклассическую теорию, мы сразу зарабатываем простой вид для антикоммутаторов (3) и физически общепринятое спинорное представление.

К сожалению, до сих пор не удалось придать физический смысл конструкциям псевдоклассической механики до квантования. Как сказано у Березина и Маринова, «псевдоклассическая механика неприменима к реальному миру и приобретает физический смысл только после квантования». Остается, правда, некоторая надежда, что здесь они были слишком пессимистичны...

3. В той же работе [1] Березин и Маринов предложили псевдоклассическое действие для спиновой релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле $A_\alpha(x)$ и в $3 + 1$ измерениях, которое затем интенсивно исследовалось во множестве работ, соответствующие ссылки можно найти в обзоре [2]. В наиболее симметричном виде это действие (так же как и (1), являющееся чётным элементом некоторой конечномерной алгебры Грассмана) записывается так:

$$S_{\text{BM}}[x, g, \psi, \chi] = \int_0^1 \left[-\frac{\dot{x}^\alpha \dot{x}_\alpha}{2g} - g \frac{m^2}{2} - e \dot{x}^\alpha A_\alpha + i g e F_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta + \right. \\ \left. + i \left(\frac{\dot{x}_\alpha \psi^\alpha}{g} - m \psi^5 \right) \chi - i \psi_n \dot{\psi}^n \right] d\tau,$$

где x^α , g — обычные коммутирующие (чётные) переменные, а ψ^n , χ — антикоммутирующие (нечётные) переменные, все зависящие

⁵⁾Здесь ε_{klm} — полностью антисимметричный тензор с условием нормировки $\varepsilon_{123} = 1$.

от некоторого параметра τ , играющего роль времени в теории; $F_{\alpha\beta}(x)$ — тензор электромагнитного поля. Греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, а латинские — 0, 1, 2, 3, 5; первые опускаются и поднимаются с помощью матрицы $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1 \ -1 \ -1 \ -1)$, а вторые — с помощью матрицы $\eta^{mn} = \text{diag}(1 \ -1 \ -1 \ -1)$; напомним, что по повторяющимся индексам всегда подразумевается суммирование. Спинные степени свободы в такой модели описываются нечётными переменными ψ^n , а пространственно-временные координаты, как обычно, переменными x . Модель является калибровочной, имеются как преобразования с чётными калибровочными параметрами, так и суперкалибровочные преобразования. Наивное квантование «по Дираку», в котором физические состояния аннигилируются связями первого рода, воспроизводит уравнение Дирака как условие на физические состояния, а более строгое каноническое квантование с особым, зависящим от времени, калибровочным условием [6] приводит к квантовой механике, полностью эквивалентной одночастичному сектору квантовой теории спинорного поля [7].

Впоследствии оказалось, что построение псевдоклассических моделей других релятивистских частиц (других спинов, массивных и безмассовых, в других размерностях) также возможно, [2, 8], хотя и не является тривиальным обобщением модели Березина и Маринова.

4. Представляется важным упомянуть здесь, что действие Березина и Маринова получило широкое применение в функциональной формулировке квантовой теории поля для представления пропагаторов релятивистских частиц в виде функциональных интегралов. Как это происходит, покажем вкратце на примере действия Березина и Маринова частицы спина $1/2$ в $3 + 1$ измерениях. Речь пойдет о представлении пропагатора электрона во внешнем электромагнитном поле с потенциалом $A_\mu(x)$ в виде функционального интеграла. Напомню читателю, что электронный пропагатор (электронная линия) есть составная часть диаграмм Фейнмана, описывающих процессы распространения и взаимного превращения частиц в квантовой электродинамике (см., например, [9]). Как известно, такой пропагатор является причинной функцией Грина $S^c(x, y)$ уравнения Дирака, а именно одним из решений неоднородного уравнения Дирака (уравнения, где вместо нуля в правой части стоит четырёхмерная

дельта-функция)

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]S^c(x, y) = -\delta^4(x - y).$$

Здесь γ^μ суть (4×4) -гамма-матрицы Дирака, $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}$. В работах [10] разными методами было установлено, что величина $\tilde{S}^c = S^c(x_{out}, x_{in})\gamma^5$, где $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, может быть представлена функциональным интегралом фактически от $\exp(iS_{\text{ВМ}}[x, g, \psi, \chi])$, а именно:

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c = \exp \left\{ i\bar{\gamma}^n \frac{\partial_\ell}{\partial \theta^n} \right\} \int_0^\infty dg_0 \int_{g_0} M(g) Dg \int D\chi \int D\pi_g \int D\pi_\chi \int_{x_{in}}^{x_{out}} Dx \times \\ \times \int_{\psi(0)+\psi(1)=\theta} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \left[S_{\text{ВМ}}[x, g, \psi, \chi] + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^1 (\pi_g \dot{g} + \pi_\chi \dot{\chi}) d\tau - i\psi_n(1)\psi^n(0) \right] \right\} \Big|_{\theta=0}, \quad (4) \end{aligned}$$

где $\bar{\gamma}^\mu = \gamma^5 \gamma^\mu$, $\bar{\gamma}^5 = \gamma^5$, а θ^n являются вспомогательными нечётными переменными, антикоммутирующими с гамма-матрицами, ∂_ℓ — левые производные; π_g — чётные переменные, π_χ — нечётные, причём $x(0) = x_{in}$, $x(1) = x_{out}$, $g(0) = g_0$, а меры $M(g)$ и $\mathcal{D}\psi$ определены так:

$$\begin{aligned} M(g) = \int Dp \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^1 gp^2 d\tau \right\}, \\ \mathcal{D}\psi = D\psi \left[\int_{\psi(0)+\psi(1)=0} D\psi \exp \left\{ \int_0^1 \psi_n \dot{\psi}^n d\tau \right\} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Отметим, что представления типа (4) в произвольных размерностях рассматривались в [8].

Чудесным образом удалось показать [11, 13], что все нетривиальные интегрирования по нечётным траекториям в (4) могут быть явно выполнены для произвольного внешнего поля, так что в результате остаётся только функциональное интегрирование по обычным пространственным траекториям x :

$$S^c(x_{out}, x_{in}) = \frac{i}{2} \int_0^\infty dg_0 \int_{x_{in}}^{x_{out}} Dx M(g_0) \Phi[x, g_0] \exp\{iI[x, g_0]\}, \quad (5)$$

где $I[x, g_0] = S_{\text{ВМ}}|_{\psi=0}$ — действие бесспиновой релятивистской частицы, $\Phi[x, g_0]$ — так называемый спиновый фактор

$$\begin{aligned} \Phi[x, g_0] = & \left[m + (2g_0)^{-1} \dot{x}^\mu \star K_{\mu\lambda} (2\eta^{\lambda\kappa} - eg_0 B^{\lambda\kappa}) \gamma_\kappa - \right. \\ & - \frac{ie}{4} (mg_0 + \dot{x}^\mu \star K_{\mu\lambda} \gamma^\lambda) B_{\kappa\nu} \sigma^{\kappa\nu} + m \frac{e^2 g_0^2}{16} B_{\alpha\beta}^* B^{\alpha\beta} \gamma^5 \Big] \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{g_0}{2} \int_0^e de' \text{Tr } \mathcal{R}(e') \star \mathcal{F} \right\}, \\ & \sigma^{\kappa\nu} = i[\gamma^\kappa \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\kappa], \end{aligned}$$

а интегрирование по τ обозначается звездочкой, например,

$$\xi_n \star \dot{\xi}^n = \int_0^1 \xi_n(\tau) \dot{\xi}^n(\tau) d\tau.$$

Здесь также использованы следующие обозначения:

$$B_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda} \star K^\lambda{}_\nu, \quad B^{*\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} B_{\alpha\beta}, \quad K_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + eg_0 \mathcal{R}_{\mu\lambda}(e) \star F^\lambda{}_\nu,$$

где $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ — полностью антисимметричный тензор с условием нормировки $\varepsilon^{0123} = 1$, а $\mathcal{R}(e)$ — оператор, действующий в пространстве антипериодических функций и обратный к

$$\mathcal{U}_{\mu\nu}(e) = \eta_{\mu\nu} \delta'(\tau - \tau') - eg_0 \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau, \tau').$$

Кроме того, используются конденсированные обозначения, в которых $\mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(x(\tau)) \delta(\tau - \tau')$ понимается как матрица с непрерывными индексами τ и τ' ; суммирование по таким индексам есть интегрирование от 0 до 1, которое, как уже было сказано, обозначается звездочкой.

Представление (5) обобщает наблюдение Полякова о том, что пропагатор свободного дираковского электрона в трёхмерном евклидовом пространстве представляется бозонным функциональным интегралом, так же как для скалярной частицы, только модифицированным присутствием некоторого спинного фактора, см. [12].

Оставшиеся интегрирования по x могут быть явно выполнены в (5), например, для внешнего постоянного электромагнитного поля и параллельного ему поля плоской волны (см. [13]). Это позволило впервые получить методом функционального интегрирования

замкнутое выражение для пропагатора в таком поле, совпадающее с полученным (технически весьма громоздким) методом суммирования по решениям или методом собственного времени Швингера см. [14]).

Наконец, мне кажется, что возможность явно проинтегрировать по нечётным переменным в функциональном интеграле (4) для произвольного внешнего поля свидетельствует об особой адекватности этих переменных для описания спиновых степеней свободы, что ещё раз подтверждает блестящую интуицию Феликса Александровича Березина.

Литература

- [1] *Березин Ф. А., Маринов М. С.* // Письма ЖЭТФ. 1975. Т. 21. С. 678; *App. of Phys. (N.Y.)*. 1977. V. 104. P. 336.
- [2] *Martin J. L.* // *Proc. Roy. Soc.* 1959. V. A 251. P. 536.
- [3] *Dirac P.* *Lectures on Quantum Mechanics*. New York: Yeshiva University, 1964. (Имеется перевод: *Дирак П.* *Лекции по квантовой механике*. М.: Мир, 1968.)
- [4] *Gitman D. M., Tyutin I. V.* *Quantization of Fields with Constraints*. Springer, 1990. (См. также: *Гитман Д. М., Тютин И. В.* *Каноническое квантование полей со связями*. М.: Наука, 1986.)
- [5] *Gitman D. M.* *Pseudoclassical Theory of Relativistic Spinning Particle* // *Topics in Statistical and Theoretical Physics*. Transl. AMS. Ser. 2. V. 177. Providence, RI: AMS, 1996. P. 83–104.
- [6] *Гитман Д. М., Тютин И. В.* // Письма ЖЭТФ. 1990. V. 51, № 3. P. 188; *Class. Quantum Grav.* 1990. V. 7. P. 2131.
- [7] *Gavrilov S. P., Gitman D. M.* // *Int. J. Mod. Phys.* 2000. V. A 15. P. 4499; *Class. Quant. Grav.* 2001. V. 18. P. 2989.
- [8] *Gitman D. M.* // *Nucl. Phys.* 1997. V. B 488. P. 490.
- [9] *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* *Релятивистская квантовая теория*. Ч. I. М.: Наука, 1968.
- [10] *Борисов Н. В., Кулиш П. П.* // ТМФ. 1982. Т. 51. С. 335–343; *Fainberg V. Ya., Marshakov A. V.* // *Nucl. Phys.* 1988. V. B 306. P. 659; *Труды ФИАН*. 1990. Т. 201. С. 139; *Fradkin E. S., Gitman D. M.* // *Phys. Rev.* 1991. V. D 44. P. 3230.
- [11] *Gitman D. M., Shvartsman Sh. M.* // *Phys. Lett.* 1993. V. B 318. P. 122; *Errata, Phys. Lett.* 1994. V. B 331. P. 449.
- [12] *Polyakov A. M.* // *Mod. Phys. Lett.* 1988. V. A 3. P. 325.

- [13] *Gitman D.M., Zlatev S.I.* // Phys. Rev. 1997. V.D 55. P.7701.
- [14] *Fradkin E.S., Gitman D.M., Shvartsman Sh.M.* Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum. Berlin—Heidelberg—New-York: Springer, 1991.

Ч А С Т Ь И

СЕМЕЙНЫЕ ВОСПОМИНАНИЯ

Ф.А. БЕРЕЗИН, МОЙ ПАПА

Н. Березина

Очень сложно писать о ком-то, с кем была знакома всего 4 года, особенно если это были первые 4 года жизни. Тем более сложно писать о ком-то исключительном, всегда хочется себя приукрасить, показаться лучше только потому, что повезло встретиться с этим человеком. Ну а когда это касается папы, которого я потеряла в 4 года и который был человеком исключительным, тогда что-то написать практически невозможно.

Хочется рассказать о его отсутствии, о том, как нам его не хватает все эти многие годы, хочется поговорить с ним, довериться ему, как никому другому. Хочется ему сказать, как на него сердиты и обижены, что он так рано ушёл. Но боязно, что не поймут, что это как-то повредит его образу, и тогда совсем неясно, что можно сказать.

Чтобы рассказать о нём, начинают говорить о себе, но не в этом же суть. В итоге хочется совсем ничего не говорить или рассказать какие-то хорошо сохранные личные воспоминания, но ведь это наше самое дорогое достояние.

Очень сложно сказать, каким он был, к воспоминаниям примешиваются рассказы близких. Каждый по-своему рассказывает одни и те же истории и случаи, каждый по-своему освещает исчезнувший образ. Как будто смотришь на картину через фильтры разного цвета, получается цветной образ, но в туманной дымке. Каждый вспоминает часть личности, при этом никто не знает её полностью.

Сирота в 4 года, я к этому привыкла. С рождением дочки я осиротела вторично. Она этого ещё не знает, но у неё никогда не будет дедушки. Как ей объяснить, что он не предал нас, уйдя так рано, а наоборот — оказал своё доверие?..

То немного, что я помню о папе, не касается каких-то конкретных эпизодов, как раз наоборот, создаётся общий образ личности и человека. Его поиск совершенства, его требовательность к себе

и снисходительность к окружающим, духовный свет, эта уверенность, что тело может устать и ему надо отдохнуть, но ум — никогда, ум всегда должен быть начеку.

Наверное, надо будет так рассказывать дочке о её дедушке, чтобы он смог и её провести через сложности жизни...

Что остаётся сказать? Поблагодарить. Поблагодарить его учеников и друзей за память, замечательным свидетельством которой является этот сборник. Поблагодарить также всех тех, кто прочтёт эту книжку и этим будет сопутствовать тому, что папа не ушёл и навсегда останется с нами.

ПОСЛЕДНИЙ ПУТЬ

Е. Г. Карпель

Москва—Красноярск—Магадан—Сеймчан—Магадан—Москва

Не знаю, правильно ли было соглашаться написать эти воспоминания: мемуары вдов всегда казались мне жанром неполноценным, провоцирующим читателя искать подтексты, умалчивания, сведение счётов и т.д. Прибавьте сюда, что речь идёт о человеке глубоко потаённом, душа которого представляла собой нечто необычайно чувствительное, ранимое, без кожи, и потому защищавшаяся бронёй скрытности. Я бы сравнила её с устрицей — нежное тело прячется за толстыми, снаружи шероховатыми, плотно закрытыми створками. Если створки открыты, значит, устрица мертва. И здесь встанёт моральный вопрос — имею ли право разглашать то, что мне было доверено. Но люди хотят знать, какой человек скрывался за большим учёным. Наверное, История имеет на это право. И тут, чтобы не оскорблять память, полуправдой не отделаешься, потому что полуправда была для него даже невыносимее, чем открытая ложь.

Остаётся надеяться, что 25 лет — достаточный срок для воспоминаний, чтобы сделать их хоть немного отстранёнными, увести в то пространство, где они принадлежат не только мне.

Одно не изменилось за четверть века: любое воспоминание возвращает к тому зловещему дню — 14 июля 1980 года.

Начало конца

Это был мой последний рабочий день перед отпуском. Сотрудники (я работала в Институте хирургии им. А. В. Вишневского), как всегда, со-

орудили отвальную. Медсестра Оля принесла свой коронный торт со взбитыми сливками, мы посидели, потрепались, попили чайку. В прекрасном настроении отправилась домой собирать чемоданы.

Помню свою мысль: как хорошо в этом году всё спланировано и организовано. Лето проведём на Украине, где уже сняли дом в забытой богом деревушке, послали задаток. Отпуск Алика (так звали Феликса Александровича Березина родные и друзья), работавшего в Московском университете, был на месяц длиннее моего, поэтому мы уговорили родителей поехать с Наташкой в июне на Рижское взморье, чтобы Алик мог на этот месяц отправиться на Дальний Восток, походить по тайге, о чём давно мечтал. И вот завтра, наконец, он прилетает, мы едем в Ригу за дочкой и с ней на юг.

А в дверях квартиры ждала записка: «Вам телеграмма, срочно придите на почту». Идти было поздно, да и попросту лень. Позвонила в отделение, стала просить дежурную зачитать телеграмму.

— Уж и не знаю, как вам зачитывать, — сказала дежурная. — Может, всё-таки лучше придёте?

— Да что там, зачитайте, и дело с концом. Это мой муж сообщает, что возвращается из отпуска. Даже удивительно, чего это он такой предупредительный на этот раз.

— Да нет, милая, не возвращается он. Уж скорее тебе за ним лететь...

— Да что там такое?

И она прочитала: «С прискорбием сообщаем... трагически погиб...»

И всё. Жизнь оборвалась...

В первый момент от удара боли не чувствуешь. Образуется какая-то странная пустота.

В этой пустоте у меня было дело. Позвонила подруге Галке Поляк:

— Мне нужны деньги. Много.

— Ты как раз вовремя попала, — засмеялась Галка. — У нас с Борькой ровно три рубля до получки.

— Возьми у Деда, — так мы звали Бороного отца, они жили вместе.

— Лялька, ты что, с печки свалилась? Ты же знаешь, я никогда ни копейки не беру у родителей.

И тут же, без перерыва:

— Что-то случилось?

— Да.

— Что?

Произнести было невозможно. Пока слово не вымолвлено, будто ничего и не произошло. Сказать — как предать. Я молчала.

— С Аликом? — робко спросила Галка.

— Да.

— Он жив? — Галка знала, о чём спрашивала. Не первый раз в этих чёртовых походах гибли друзья.

— Нет.

— Не двигайся. Сейчас приеду. Всё привезу. А ты выпей водки.

— У меня нет водки.

— Я привезу. А пока что сделай себе чаю с лимоном.

— Я не хочу чаю.

— Ты для меня можешь заварить хорошего крепкого чаю? И собери вещи в дорогу.

Умница Галка. Самое страшное — это бездействие. Тогда наваливается что-то такое, от чего дух не можешь перевести, кажется, сейчас задохнёшься от боли. А любая деятельность отвлекает, уводит в сторону.

Галка приехала не одна, а с моим другом Лёней Невлером да ещё с его женой. Я спросила: «Зачем?». Они сказали что-то вроде, мол, в беде человек должен быть окружён людьми, и чем их больше, тем лучше. Какая разница? Вокруг меня была непробиваемая пустота.

Галка вывалила на стол гору денег. Вот именно гору. Поскольку Дед держал деньги на сберкнижке, а я предполагала лететь на рассвете первым самолётом, то она обежала всех соседей по подъезду и под залог дедовых денег стала собирать всё, что было в наличии. Помимо крупных купюр там были смятые десятки, пятёрки, трёшки, разве что рублёвок, кажется, не было.

Напоив водкой, чаем, снотворными, меня уложили спать. Лёнька остался сторожить. Наутро с присоединившейся Галкой мы поехали в Домодедово.

В аэропорту к нам отнеслись с искренним сочувствием, провели всюду без очереди, сказали, что отправят первым же самолётом, поместив в служебный отсек, потому что свободных мест нет. И лишь в последний момент, когда я платила деньги за билет, кассирша вдруг говорит:

— Давайте телеграмму.

— Какую телеграмму?

— Ну, из Магадана, о кончине вашего мужа.

— Но у меня нет телеграммы, я не взяла её на почте.

— Без подтверждающего документа билетов не продаём. Магадан закрытая зона. Нужна не только телеграмма, но она должна ещё быть официально заверена.

— Как заверена? Почему?

— Потому что сфабриковать ложную телеграмму ничего не стоит. Мало ли кто захочет туда поехать.

— В эти места обычно добровольно не едут, — попробовал вмешаться Лёнька, — туда скорее отправляют против желания.

— Товарищ, я сочувствую вашему горю, но поймите, действую в ваших же интересах. Если даже нарушу постановление и продам билет, то в Магадане вашу подругу не выпустят из аэропорта и в лучшем случае немедленно отправят обратно в Москву, а то ещё и подержат в КПЗ, пока будут проверять документы. Я уж не говорю, что за профессиональную ошибку могу схлопотать выговор.

«Закон есть закон», и мы поехали обратно в город.

Это теперь Домодедово — международный аэропорт, роскошный электропоезд за 40 минут доставляет вас чуть ли не со взлётной полосы к отреставрированному элегантному Павелецкому вокзалу. А тогда надо было ещё тащиться до станции, потом замшелая электричка часа полтора добиралась до города. Той частью моего существа, где ещё была какая-то способность соображать, я жалела Галку с Лёней, что им приходится так долго со мной возиться, но сама длительности этих дурацких мотаний не ощутила. Время как будто... нет, в самом деле, остановилось. «Жизнь — вечность, вечность — миг» — в определённых ситуациях это не поэтическая метафора, а чистая реальность.

Всё как в бреду: почему-то мы поехали не в моё почтовое отделение, а куда-то к метро «Аэропорт», где было некое учреждение, в котором вроде бы регистрировали все приходящие в Москву телеграммы; меня усадили в просторном холле, множество людей сновало туда-сюда. Галка с Лёней куда-то бежали, что-то доказывали, наконец получили необходимую бумажку, и мы поехали обратно.

Вечерним рейсом я улетела.

Москва—Красноярск

Не знаю, как теперь, а тогда до Магадана самолёт летел десять часов, с одним промежуточным приземлением. Салон был набит до отказа. За неимением мест какие-то ребята, весёлые молодые туристы, летевшие до Красноярска, побросали свои рюкзаки у входа, расположились на них и всю дорогу пели под гитару. «А я еду, а я еду за туманом, за мечтами и за запахом тайги...» — пели ребята в салоне.

А я ехала за телом.

За телом Алика.

* * *

Как мы познакомились? Это было за девять лет до этого дня, на встрече Нового года. Даже не верится, да, всего девять лет назад... Математическая компания по давно сложившейся традиции уезжала на зимние каникулы из Москвы, на этот раз в Калинин¹⁾. Галка предложила поехать с ними. Я была смущена: они все такие умные, да и знают друг друга сто лет, буду там как пришей кобыле хвост. Но подруга не хотела отступать и, чтобы как-то меня ободрить, стала подробно рассказывать о каждом. Характеризуя Алика, помню, добавила: «На этого замороженного профессора глаз не поднимай, даже такая кошка, как ты, его не прошибёт». Это я-то кошка! Но незлобивое подтрунивание было стилем нашего общения.

Когда мы прибыли в гостиницу, те из друзей, кто приехал раньше, высыпали навстречу. Шумной группой человек в десять столпились мы в коридоре. Сбоку оказался мужчина с красивой седой шевелюрой и бледным тонким лицом. Вначале я даже не поняла, что он тоже принадлежит к нашей компании. Мне показалось, мы загородили ему дорогу, не даём пройти. Много позже узнала — это очень характерная для Алика позиция: как бы со всеми и в то же время отдельно. Тут из толпы вынырнула Галка: «Познакомьтесь: Алик. А это моя подруга Лена, она же Ляля». Мы поприветствовали друг друга, и я с удивлением отметила, как зрачки его голубых глаз стали стремительно расширяться. Глаза сделались почти чёрными. Ещё подумала: «Какая живая реакция у этого замороженного профессора».

Наутро вся компания отправилась кататься на лыжах. Галка надо мной всегда подтрунивала: «Лялька на лыжах не ходит, Лялька на лыжах стоит». К сожалению, в этой шутке доля правды приближалась к абсолюту. Чтобы не быть помехой, я не пошла со всеми, осталась походить на лыжах вокруг гостиницы. Тут, откуда ни возьмись, появился Алик, предложил покататься вместе.

— Не получится, я хожу очень медленно.

— Ничего, я тоже сегодня не расположен бить рекорды.

Дело кончилось тем, что он стал замерзать и, чтобы согреться, начал быстро-быстро отбегать от меня метров на пятьдесят, потом также быстро бежал навстречу, и так бегал взад-вперёд до возвращения с прогулки всей компании, совершенно изумлённой увиден-

¹⁾Калинин — ныне Тверь.

ным зрелищем. Когда выяснилось, в чём дело, от смеха все разве что не повалились на снег.

Через несколько дней все вместе мы возвращались в Москву. Перед самым расставанием, уже в метро, неожиданно Алик сказал:

— Я дам Вам свой номер телефона. Позвоните как-нибудь.

Такая интонация (теперь я понимаю, что такой она была от смущения) меня никак не устраивала.

— Знаете, я, конечно, за равноправие полов, но всё же предпочитаю, чтобы инициатива исходила от мужчины. Будет настроение, позвоните сами.

— Мне нечем записать Ваш номер, боюсь забыть.

— Ну, при желании найдёте способ со мной связаться.

На том и расстались.

Прошло довольно много времени. Как-то в экспериментальную операционную заходит наша секретарша: «Елена Григорьевна, не могли бы вы прерваться? Кто-то добивается вас целый день». Бегу к телефону, на проводе Алик:

— У меня на сегодня два билета в консерваторию, не хотите пойти?

Я была и удивлена, и обрадована, и растеряна. Наша группа тогда отрабатывала методику пересадки сердца, операции длительные, иногда по их окончании, выхаживая собак, мы даже оставались на ночь.

— У меня долгий эксперимент, совершенно не знаю, когда освобожусь. Жаль, но боюсь Вас подвести.

Тогда я не знала, что невольно представилась Алику в наилучшем свете: человек, увлечённый своим делом, — вот то, что он ценил!

— Ничего, Вы меня не подведёте. Я оставляю билет на контроле. Как Ваша фамилия?

— Карпель, — сказала я.

В трубке повисла странная тишина. Лишь позже я узнала, что моя фамилия по своему звучанию как-то странно совпадала с другой — Карпова. Так звали бывшую жену Алика.

Собака быстро погибла. Я успела в консерваторию.

Мы стали встречаться. Происходило это примерно так. Раз в неделю он звонил, приглашал меня погулять за городом. По возвращении домой, в полном отчаянии и физическом изнеможении, я рыдала Галке в телефон:

— Мы прошагали целый день, попали в трясины, потом продирались сквозь кусты, пыльная паутина забивалась мне в ноздри, слепила глаза, и при этом надо было ещё беседовать на умные темы! И я была такая дура, такая дура! Всё, больше он мне никогда не позвонит!

— Ну, конечно, бедному Алику не с кем поговорить, он тебя приглашает исключительно для философских дебатов! — смеялась Галка.

До тех пор с подобным я не сталкивалась. Если кто-то мной интересовался, это были, естественно, звонки каждый день, встречи как минимум два-три раза в неделю. А тут... Лишь позже, когда родилась Наташа и я увидела, с каким трудом Алик выкраивает время для неё, поняла, что на самом деле он за мной бешено ухаживал. А тогда совершенно не знала, что и думать. Но было ощущение, что меня подхватил бурный поток, сопротивляться которому невозможно. Не было и речи, чтобы я отказалась или пропустила свидание. Так продолжалось примерно полгода. Потом внезапно, как обвал, отношения перешли в другое качество. У меня стало немного меньше сомнений. Но никак нельзя сказать, что всё стало легко и просто. Во всяком случае, когда мне уже показалось, что наши отношения как-то стабилизировались, Алик вдруг заявил:

— Мы должны расстаться...

— Что? Почему?!

— Ты только теряешь со мной время. Я никогда не смогу на тебе жениться...

— Прости, какая женитьба?

— ...потому что не смогу бросить маму, а жить с ней никто, кроме меня, не может.

— А ты спросил меня, хочу ли я замуж? Считаю ли время, проведённое вместе, потерянным? И чего жду или не жду от наших отношений? Так вот, меня, например, перспектива замужества никак не привлекает. Я хочу, чтобы всё оставалось как есть.

— Ну, решай сама. Я тебя предупредил...

* * *

...Его мама. Эсфирь Абрамовна Рабинович. И в глубокой старости она была красива той выраженной семитской красотой, что встречается на картинах Эль Греко и Гойи. Замужем она никогда



*Эсфирь Абрамовна Рабинович,
мама Феликса Александровича Березина, 1970-е гг.*

не была, Аликиного отца прогнала, когда находилась на четвёртом месяце беременности. На мой вопрос Алику «Почему?» ответом было «Мне больно об этом говорить». В течение всей жизни Э. А. не соглашалась на какую-либо помощь со стороны Александра Николаевича Березина, который дал ребёнку своё имя и никогда от него не отказывался.

Как-то я спросила Алика, знали ли они с отцом друг друга. Он ответил:

— Когда мне было три с половиной года, он принёс мне в подарок деревянный грузовик, с этим грузовиком я потом ещё долго играл. Тогда он видел меня в последний раз.

Алик сделал особое ударение на слове «он». Из чего я заключила, что сам-то он украдкой видел своего отца и позднее. Может быть, когда уже работал в МГУ и должен был ехать в командировку в Монголию. По тогдашним порядкам для выезда за границу, пусть даже краткосрочного, взрослому и материально независимому человеку нужно было предъявить письменное разрешение родителей или же свидетельство об их смерти. Не имело значения, занимался родитель в течение всей жизни ребёнком или нет.

Это Э. А., смеясь, рассказала мне:

— Когда я позвонила Саше и, через четверть века после того как его прогнала, попросила прийти и подписать разрешение на выезд Алика за границу, он ушам своим не поверил, что приглашаю его переступить порог моего дома.

Когда мы с Аликом познакомились, его отца уже не было в живых.

* * *

Э. А. родилась в семье кишинёвской интеллигенции: отец занимал какой-то важный пост в гимназии, мать — акушерка и оспопрививательница (металлическая наддверная табличка с такой надписью по сей день хранится у меня в книжном шкафу). Как многие в те годы, оба были вовлечены в революционное движение. Каменев, Зиновьев, Павел Юшкевич (Павлик, как звали его в семье) были друзьями дома. После революции семья переехала в Москву. Родители к тому времени были уже немолоды, зная борцов за светлое будущее подхватило молодое поколение.

В юности Э. А. мечтала стать пианисткой, училась в венской консерватории. Когда я её узнала, она уже стеснялась играть при посторонних, садилась за инструмент, только если была одна в квартире. Прекрасное пианино Стейнвей было, по-моему, единственной роскошью, которую она разрешила себе за всю жизнь. (Это пианино и теперь стоит в нашей московской квартире.) А в двадцатые годы Э. А., пламенная строительница коммунизма, решила, что столь великому почину надо содействовать чем-то более реальным, чем классическая музыка. Тогда она окончила медицинский институт и стала врачом. Параллельно с медицинской практикой занялась научной работой в области гистологии, защитила диссертацию, за научную работу была удостоена премии.

Но тут грянула трагедия: забрали брата Э. А. (он был министром то ли индустрии, то ли транспорта). Узнав об аресте, она схватила малолетнего сына и скрылась в российской глубинке. Когда за ней пришли, на вопрос энкавэдэшника «Где ваша дочь?» бабушка Алика, старая революционерка, ответила:

— Можете разрезать меня на куски, всё равно не скажу.

— Оставь старуху, возьмём кого-нибудь другого, — сказал второй чекист, и они ушли.

Потом выяснилось, что так и произошло. Уже в хрущёвскую оттепель к Э. А. неожиданно пришла её троюродная сестра, которую та с юности не видела и даже не узнала: «Если бы ты тогда не сбежала, все эти годы я не просидела бы в лагере».

В глуши Э. А. устроилась в туберкулёзную больницу. Там же, отказавшись от лечебной работы, стала патологоанатомом.



Алик Берзин в школьные годы, 40-е гг.

...Я думаю, эти детские годы очень повлияли на Алика. Его скованная манера держаться в обществе, молчаливость, скрытность, глубокий пессимизм были, по-моему, следствием «счастливого сталинского детства», когда они с матерью находились на полулегальном положении и надо было жить, оставаясь по возможности незаметными. Алик расслаблялся только на природе, в походах с друзьями. Есть одна-единственная фотография, где он смеётся взахлёб — они с Валеркой Никольским на Северном Урале, в каких-то чудовищных ветровках, бесконечно счастливые...

В 1940 году наступил некоторый просвет в гонениях. Мать с сыном еле успели вернуться в Москву, как грянула война, и они со стариками-родителями были эвакуированы в Алма-Ату. Там на се-

мью из четырёх человек работала одна Э. А. Лишь по нескольким обмолвкам могла я представить, что они вытерпели — не в характере Алика было жаловаться. Приведу два примера.

Однажды, когда мы жили все вместе, я поднималась в лифте с соседом. В руках у меня была огромная тыква.

— Тыкву едите... — задумчиво констатировал сосед.

— Да, — отвечаю, — Алик и его мать очень любят тыквенную кашу с пшённой. Я раньше и не знала о существовании такого блюда, это они меня научили.

— Сразу видно, не знают они, что такое голод. Этой тыквой мы питались всю войну, теперь просто смотреть на неё не могу.

Я пересказала наш диалог Алику, он усмехнулся:

— В следующий раз поедешь с ним в лифте, скажи, что это он не знает, что такое голод. Для нас тыква была величайшим праздником...

Из эвакуации они вернулись одними из первых. Как-то я спросила:

— Наверно, очень трудно было в Москве в конце войны?

— Труднее стало после её окончания.

— Почему?

— В метро перестали пускать босиком, приходилось увёртываться от милиционеров.

Он ходил дома зимой в носках, а летом просто босиком, не признавая никаких тапочек. И глядя на эти босые ноги, я всегда думала: «привет из голодного и холодного детства...»

После войны жизнь понемногу наладилась. Алик рос и успешно учился, все его дипломы красного цвета, он всегда был отличником. Ещё будучи школьником начал посещать математический кружок при МГУ, которым руководил Дынкин. Э. А. защитила докторскую диссертацию. Материально стало легче. Купили пианино. Начали активно пополнять семейную библиотеку.

Нет никакого сомнения, Э. А. была блистательным патологоанатомом, но у неё был трудный характер. Она привыкла, что слово её — закон, и к мнению окружающих была совершенно нетерпима. Как-то я спросила Алика, почему Э. А. отказалась от лечебной работы. «Потому что не способна разговаривать с больными», — ответил он.

Когда я пришла в их дом, Э. А. была уже на пенсии. Алик оказался единственным светом в её жизни. Вокруг никого не было.

Когда-то в молодости были подруги, но с теми, кто не умер, она рассорилась. Единственный человек, с кем она могла поделиться и кому пожаловаться, был сын. К сожалению, рождение внучки тоже не украсило её жизнь. Не раз она говорила мне: «Наташа — это радость для вас, Лена, для меня существует только сын».

Однажды я спросила Алика:

— Ведь Э. А. была красивой и интересной женщиной, она должна была пользоваться успехом в молодости?

— Да успех был, но мама никого не хотела. Один человек добивался её пять лет, но потом и он отступил.

— А если бы она не была одна, ты бы ушёл из дому?

Никогда не забуду, как он на меня посмотрел.

У матери и сына — своя тайна. Я не хочу, да и не имею морального права её касаться.

Когда родилась Наташа и мы стали жить все вместе, я делала, как мне казалось, всё, что было в моих силах, чтобы выстроить новую архитектуру семьи и сделать совместную жизнь приятной. Но, к сожалению, успеха не добилась. Э. А. могла на ровном месте, когда мы мирно сидели на кухне, поджидая Алика на обед, сказать мне:

— Сейчас, Лена, пока Наташа маленькая, Вы нам необходимы, чтобы за ней ухаживать. Но когда Наташа подрастёт и мы перестанем в Вас нуждаться, нам будет очень хорошо втроём, без Вас.

Кончилось тем, что я «выбила» квартиру в кооперативе своего института, подхватила Наташу и ушла жить отдельно. Хуже от этого стало только Алику — ему приходилось теперь разрываться на три части: между математикой, своей матерью и нами...

* * *

Как-то я сказала Алику:

— Я у тебя на пятом месте.

— Это как же ты считала?

— На первом месте математика, на втором — дочь, третье и четвёртое места делят между собой родина-мать и мать биологическая, мне достается «почётное» пятое.

— Ну, если тебе так нравится.

— Нет, мне совсем не нравится, но факт есть факт.

— Факт? Это как смотреть.

— А как надо смотреть?

— Если расположить не на плоскости, а в трёхмерном пространстве.

Ну, на такую математику моих мозгов хватало. Я радостно подхватила:

— Значит, в некоем пространстве между нами никого нет? Мне это подходит.

— Мне тоже, — улыбнулся Алик.

Когда родилась Наташа, он вернулся к вопросу о женитьбе.

— Может, для ребёнка лучше, чтобы мы расписались?

Надо признать, в голосе звучала явная неохота.

— Зачем? — ответила я. — Мои родители не были расписаны. Вернее, они поженились, когда мне исполнилось 16 лет и я должна была получать паспорт. И то это было лишним. Мне для самоутверждения наша расписка не нужна, я уже один раз замужем побывала. Что до тебя, то, помимо общей тюрьмы народов, в которой все мы живём за железной занавеской, ты плюс к этому сидишь в личном карцере, созданном любовью твоей матери. Навешивать на себя ещё брачные цепи ты сам безумно боишься. Нет уж, пусть Э. А. живёт, сколько ей положено, а потом ты поживи один, надышись хотя бы относительной свободой, и если после этого ты придёшь к нам с Наташей и скажешь, что хочешь расписаться, вот тогда и посмотрим, соглашусь ли я поставить новый штамп в свой паспорт.

Алик молча меня обнял. По-моему, он был мне благодарен. Но, я знаю, у него всегда было предчувствие, что мать его переживёт...

Что же касается официальных бумаг, касающихся Наташи, с момента её рождения Алик твёрдо вбил себе в голову, что они должны быть в идеальном порядке. Он сам ходил в ЗАГС, чтобы оформить удочерение. Там его многократно отсылали за какими-то дополнительными справками, потом затребовали моё письменное согласие на то, чтобы Березин Феликс Александрович был признан отцом моей дочери. Но и этого оказалось мало — потребовали, чтобы я пришла лично. И Алик железной рукой повёл меня в ЗАГС. Когда мы пришли, заведующая приветствовала его как старого знакомого:

— Чем столько раз ходить за разными бумагами, легче было бы расписаться с женщиной. Ведь вам ничто не мешает — оба вы в настоящий момент не состоите в браке.

Оказывается, она блюла мои интересы!

— Нам так лучше, — сказала я.

— Вы в этом уверены? — с сомнением произнесла заведующая.

— Да, уверена.

...Я никогда не была официальной женой Алика и стала его неофициальной вдовой...

* * *

В моих воспоминаниях наиболее часто встречающееся слово — местоимение «я», отдаю себе в этом отчёт. Но ведь я пишу не научный трактат о выдающемся учёном, математике-теоретике, погибшем на 49-м году своей жизни, а пытаюсь передать моё субъективное восприятие человека, восстановить атмосферу, в которой он жил, и рассказать, что происходило в его «круге первом».

* * *

У Алика были свои, очень жёсткие, требования к быту. Ничто, ни в коем случае, не должно было мешать ему работать. Например, когда родилась Наташа, он мне сказал: «Устройся так, чтобы по ночам было тихо, иначе потом я плохо соображаю».

Со звуками вообще были сложности. У него был повышенный слух. Без всякого напряжения Алик слышал, о чём говорят между собой прохожие, находящиеся от него на расстоянии 1,5–2 метров. «КГБ по тебе плакал, — шутила я, — если бы они знали, то нашли бы применение твоим талантам». В ответ Алик сердился — при разговорах о советской охранке у него пропадало чувство юмора.

До знакомства с ним я думала, что иметь острый слух — большое благо. Но оказалось, что продолжением такого достоинства являются ощутимые неудобства. В квартире на Винницкой Алик не мог спать в комнате, окно которой было со стороны бойлерной, потому что ему мешало её гудение, хотя они жили на девятом этаже. Как-то соседи, жившие этажом ниже, повесили часы с боем на стену, вплотную к которой стоял диван, на котором мы спали. Это оказалось трагедией — Алик потерял сон. Пришлось мне идти объясняться. Соседи, милые люди, ничего не могли понять, но вняли мольбам и перевесили часы на другую стенку...

Что же касается еды, одежды, комфорта, то его требования (если это вообще можно назвать требованиями) были минимальными — сытно, не холодно, удобно, не более того. Единственную сложность представляли головные уборы. При том, что для мужчины у Алика были некрупные черты лица, мозговая часть его головы была суще-

ственно больше средней. «Ну зачем надо было так далеко убегать от обезьяны?» — досадовала я, когда в очередной раз выяснялось, что с трудом «добытая» зимняя шапка оказывалась тесной. А для лыж он десятилетиями хранил специально для него связанные шерстяные шапочки.



В походе

Вопросы моды для Алика не существовали. В семидесятые годы, когда только стали появляться всякие нейлоны, капроны и прочие джерси, он отказывался носить изготовленную из них одежду. Теперь все мы знаем, что искусственные ткани не дышат и часто вызывают аллергию, а тогда это воспринималось скорее как очередная его причуда. Он носил хлопчатобумажные рубашки летом и шерстяные свитера зимой. Не имело значения, если это были старые, потёртые и полинявшие от стирки вещи. Для зимних походов хранил

пару нижнего шерстяного белья из тех, что по ленд-лизу союзники во время войны поставляли вместе с тушёнкой для Красной Армии. Не знаю, какими судьбами это бельё попало в семью, но Алик им очень дорожил, утверждая, что теперь такого «не достать». Мне было запрещено его стирать, потому что от ветхости оно могло расползтись или потерять свои тёплые качества. Разрешалось только проветрить бельё на балконе, потом запихнуть в мешок и закинуть на антресоли до следующего зимнего похода. На моё возмущение, что это «грязь в натуральную величину», Алик отвечал: «На третий день похода я становлюсь не чище, чем это бельё».

У него были свои понятия о том, что прилично, а что нет. Не помню, чтобы когда-то видела его при галстукe. Ворот его рубашки всегда был нараспашку: «Иначе мне трудно дышать». Но при этом никогда не разрешал себе ходить в расстёгнутом пиджаке или пальто. Как-то зимой мы ехали в метро. Поезд остановился между двумя станциями. Из-за отсутствия вентиляции в вагоне сделалось нестерпимо жарко. Я посоветовала:

— Расстегни пальто.

— Нет, это неприлично. Мало ли что жарко. Нужно потерпеть.

В этом был весь Алик — свободный дух и застёгнутая на все пуговицы душа...

Переехав на Винницкую, я познакомилась с их бытом. На кухне в ящике для столовых приборов среди весьма неказистых стальных ложек и вилок выделялась своей неприглядностью одна оловянная ложка. Я спросила, можно ли её выкинуть.

— Ну да, тебе бы есть на серебре, в крайнем случае, на мельхиоре, а то, что эта ложка лёгкая, на редкость удобных размеров и формы, на это, естественно, наплевать.

Действительно, она оказалась удивительно удобной, эта ложка. Наташа ею пользовалась всё своё детство, я вожу её с квартиры на квартиру, из страны в страну, теперь собираюсь отвезти внучке...

Алик не курил и не пил. Это не было специальным решением, просто он не испытывал такой потребности. Он не любил кофе, но целый день за работой пил крепкий свежесваренный чай с сахаром вприкуску, что для меня было очередным напоминанием о военных годах.

Когда я переехала к ним на Винницкую, он созвал друзей, чтобы отпраздновать это событие. Я побегала по магазинам, «достала» всяческие деликатесы и наготовила разнообразной еды. Гости

собрались, как всегда, поздно. Наконец мы сели за стол, и тут оказалось, что в доме нет ни капли спиртного, а магазины были уже закрыты. Все по меньшей мере недоумевали. Помню, как ругалась Никита. Она провела весь день за городом на лыжах и предвкушала, как вечером у Алика с удовольствием расслабится за рюмочкой водки. Но Алику и в голову не пришло об этом побеспокоиться, а я по первости не предполагала, что и о напитках тоже должно заботиться мне.

— И ты его не убила после ухода гостей?! — спросила моя подруга Светка, когда я рассказала о провале моего первого приёма.

— За что? Он же человек цельный и искренний, потому и не может предлагать друзьям то, в чём сам не находит никакого удовольствия.

(Наша дочь не курит и в рот не берёт ни вино, ни коньяк, ни кофе. Живя во Франции, это надо уметь. Но, видно, отцовские гены оказались сильнее традиций страны.)

Представить себе Алика в окружении роскоши было совершенно невозможно.

Как-то зимой он договорился с приятелем, что поработает недели две на его пустующей даче. У меня выдался свободный денёк, и я решила поехать его проведать. Дача была в посёлке старых большевиков, представлявшем собой одну бесконечную улицу, по обе стороны которой стояли совершенно одинаковые двухэтажные деревянные дома. По тем временам эти дачи казались верхом роскоши. Я шла по середине улицы и говорила себе: «Не может быть, чтобы Алик оказался в таких хоромах». Шла долго. И тут увидела дачу с покосившейся стеной и проваливающейся крышей. Мне не надо было сверять номер дома. Я знала, что пришла по нужному адресу.

Непредвзятость взгляда была у него во всём. В тот же приезд после обеда (я привезла домашней еды, потому что знала, что на своей зимовке он сидел на каше, макаронах и консервах), когда мы валялись на каком-то подобии дивана, смеялись, я рассказывала последние московские новости, потом заметила:

— Вообще-то являться вот так, без предупреждения, рискованно. А если бы ты был не один?

— А я действительно все ночи здесь не один. Только не знаю, это она или он.

— Как прикажешь понимать?

— Здесь щели в палец толщиной. Топи не топи — к утру холод собачий. Так ночью ко мне приходит мышка, устраивается на груди, как раз там, где сейчас покоится твоя голова, и мы греемся друг о друга.

Я вскрикиваю и соскакиваю с дивана.

— Ты предпочитаешь, чтобы это была женщина? — смеётся Алик.

Ну что на это скажешь? Я возвратилась на прежнее место.

А действительно, спят же люди с кошками и собаками, почему же нельзя с мышкой.

* * *

Насколько его не занимала бытовая сторона жизни, настолько же он был требователен ко всему, что связано с интеллектом. Выбор круга общения определялся широтой познаний, нестандартностью мышления той или иной личности. Здесь невозможны были никакие компромиссы. Алик чётко разграничивал, с кем готов общаться, а с кем — нет, и сдвинуть его с этих позиций было невозможно.

Но вместе с тем ему всегда был интересен Человек, разный. На отдыхе любил знакомиться с новыми людьми из других социальных групп. В нём не было ни капли снобизма. Бывало, летом, когда мы отдыхали в деревне, иду по улице, смотрю — вдали толкуют два мужика, подхожу ближе — один из них Алик.

Если он хотел с кем-то поговорить, мало что могло этому помешать.

Как-то через Москву проезжал мой бывший свёкор, Григорий Леонидович Лемперт, с которым у меня сохранились тёплые отношения. Алик заявил, что желает с ним познакомиться. Я была крайне удивлена и спросила, зачем ему это надо.

— Судя по твоим рассказам, это выдающийся учёный и незаурядный человек (что было истинной правдой), а в жизни не часто выпадает случай побеседовать с исключительной личностью, я не хочу упустить такую возможность.

И хотя был разгар лета, мы жили на даче под Софрино, и годовалую Наташу не хотелось тащить в раскалённую Москву, а оставить было не на кого, мы таки поехали в город. Алик был доволен, а когда Григорий Леонидович вскоре умер, Алик горевал, что они встретились лишь один раз.

Никаких усилий не было жалко ради интересной беседы. Вообще эта форма общения была для него чрезвычайно важна.

Напротив, всё, что напоминало светское общество, Алик не терпел.

Так, например, в Москве был дом, где я любила бывать. Хозяйка была умной и радушной, но была у неё одна слабость — она стремилась создать у себя нечто вроде салона. Уж не знаю, по каким моим обмолвкам уловил Алик этот нюанс, но никакими силами не удалось мне его туда затащить. А хозяйке так хотелось заполучить «гениального Березина»! Но Алик сказал: «Она меня не получит», — и все мои просьбы были впустую.

* * *

Поддержание же физической формы было для Алика неотъемлемой частью личной гигиены. Утреннюю зарядку он не делал, но старался вечером перед сном хотя бы минут двадцать погулять. Он первым среди моих знакомых стал бегать трусцой, тогда это ещё не было так популярно, как сейчас. Провести один день в неделю за городом было такой же потребностью, как у всех у нас сходить в баню, когда в домах не было горячей воды. При малейшей возможности он отправлялся бродить, ходить на лыжах, ездить на велосипеде, где только мог. Вокруг города и в дальних походах. Был способен на длительные переходы и длинные лыжные забеги. В молодости они ходили большой компанией, с возрастом многие стали постепенно отпадать, после смерти Валеры Никольского остались Никита Введенская и Виктор Паламодов — наиболее частые спутники Алика.

К своему спортивному инвентарю он относился с куда бóльшим вниманием, чем к одежде. Передняя была загружена лыжами разного назначения — горными, для прогулок ближних, дальних, для зимних походов. Он очень дорожил своим велосипедом, не решался оставлять его на лестничной площадке, а в квартире не было подсобного помещения. Тогда Алик выкинул спинку дивана, на котором мы спали, в образовавшемся пространстве сделал стойку для велосипеда и закамуфлировал всё вьетнамской соломкой. Получилось весело и забавно. Нашим гостям предлагалось найти в квартире велосипед. Это был практически беспроектный номер — никто не мог его отыскать. (Когда Алик хотел и находил время, он мог что угодно сделать по дому, мы не знали, что такое обращаться

к электрику или слесарю). А я «жаловалась», что сплю в обнимку не с Аликом, а с его велосипедом. И подтрунивала по поводу его заботы о физической форме:

— Ну, конечно, в здоровом теле здоровый дух.

— В здоровом теле работоспособный мозг, — совершенно серьёзно парировал он.

Потом магаданский судмедэксперт, проводившая вскрытие, мне скажет: «Вот говорят, что сибиряки — здоровяки, а я не помню, когда у мужчины за сорок встречала такие не тронутые возрастом сердце и сосуды, как у этого москвича».

Он говорил мне с удивлением:

— Ты считаешь себя культурным человеком, но ведь физическая культура является важной составной частью культуры общей, как же можешь так за собой не следить?

— Ну что ты хочешь, я росла болезненным ребёнком в еврейской семье, где не по медицинским показаниям, а по маминой просьбе в течение десяти школьных лет была освобождена от физкультуры.

Моя физическая несостоятельность приводила к тому, что в походы мы не могли ходить вместе.

А в основе бытовых разногласий была неодинаковость сформировавшей нас среды. В аликовой манере поведения были черты, которые меня коробили. Например, он не давал на чай. Однажды я попыталась сказать, что голодное детство далеко позади, пора бы уже вести себя как человек, обеспечивающий своё материальное проживание. Он ответил: «Мне никто не даёт на чай за мою работу, почему я должен делать это в отношении других?».

При этом Алик отнюдь не был скупым. Легко давал деньги в долг, если они были, и не сердился, когда не возвращали. «Нет у него денег, это же видно», — сказал как-то в очередном подобном случае.

Что до меня, то я росла в материально благополучной семье, отрочество и юность мои прошли в Риге, где ещё не полностью стёрлись манеры галантного поведения. Когда перебралась в Москву, никак не могла привыкнуть к хамству, которым, казалось, был пропитан сам воздух столицы. Периодически доставалось и Алику. Однажды разразилась целой бурей из-за того, что он не подал мне руку при выходе из троллейбуса. Алик растерянно оправдывался:

— Если бы мы были в походе и надо было бы преодолевать какое-то препятствие, или в городе ты была бы на костылях, тогда, конечно, я бы помог, но в данном-то случае зачем?

— Просто ты достойный представитель московского хамства. Если ты поедешь работать за границу, то там раньше, чем поймут, что ты гениальный учёный, увидят неотёсанного мужика, — не уни-малась я.

Самое смешное, что и в этом своём поведении Алик оказался куда современнее меня. Когда во Франции Наташа училась в соседнем городе и жила в интернате, а я приехала забрать её домой на летние каникулы, Наташу пришёл проводить явно влюблённый в неё юноша. Все троём мы пошли к машине, при этом мы с Наташей тащили тяжеленные сумки с её пожитками, а смущённый молодой человек шёл рядом с пустыми руками, не решаясь предложить свои услуги. Мне — из боязни подчеркнуть мой возраст, а Наташе — чтобы не посягнуть на равноправие женщин.

Мы пересекали студенческую спортивную площадку, на небе не было ни облачка, я шла и думала: «Алик, если ты сейчас видишь нас сверху, как же ты подтруниваешь над моими представлениями о заграничных правилах хорошего тона!».

* * *

Да, многое нас разделяло. Наверное, было больше факторов, которые нас разделяли, чем тех, что объединяли. Мы оба любили свою работу, были увлечены ею, а это уже как минимум полжизни. Но если я могла в общих чертах рассказать, чем занимаюсь, то мне было совершенно недоступно, над чем размышляет он. Я любила шумные компании, веселье, танцы. Алик полагал, что настоящее общение может быть только tête-à-tête и что на всякого рода посиделки у него нет времени. Внешне он казался неторопливым, движения его были скорее скованными, но внутри всё время бежал, как будто чувствовал, что у него остаётся мало времени, что не успевает... Он любил концерты, театр, кино, но почти всегда говорил: «Сходи сама, потом расскажешь». Когда я возвращалась домой, они с Наташей обычно уже мирно спали. На следующий день за ужином я докладывала об увиденном. На октябрь месяц приходились 5–6 дней рождения ближайших к нему людей — его матери, Никиты Введенской, Валеры Никольского, мой, ещё нескольких друзей. Алик любил эти

праздники, с удовольствием принимал в них участие, но каждый раз ворчал: «Октябрь — месяц ужасный, совершенно не остаётся времени работать».

Так что же нас объединяло? Думаю, если бы мы встретились в ранней молодости, наш союз не устоял бы. Но мы познакомились, когда за плечами был некоторый жизненный опыт и много печали. Мы уже научились быть терпимыми, делать акцент не на том, что разделяет, а ценить то, что объединяет. Мы были как две валентности, которые стремились соединиться, чтобы удержаться. Хотелось притулиться, обогреться.

Из всех человеческих качеств он больше всего ценил доброту, считал, что это дар, встречающийся реже, чем гениальность. Как-то сказал:

— В своей жизни я встретил около десятка гениев, а добрых людей — только двоих, второй — ты.

На самом деле это было неверно. Если уж говорить всё, то права подруга Светка, сказавшая мне однажды: «Никто не умеет так поддержать, как ты, когда этого хочешь, но никто и не бросает так холодно и равнодушно, как ты».

В моём отношении к нему было что-то другое — ещё тогда, в коридоре калининской гостиницы, в глубине расширившихся зрачков Алика мне почудился призыв о помощи и захотелось протянуть руку, как утопающему. И потом, на протяжении всей нашей совместной жизни, никогда не покидало ощущение, что на всём белом свете одна я могу помочь ему жизнь пережить... Ну, ладно...

Когда мы решили объединить наши судьбы, нужно было объединить и наши библиотеки. В доме Алика почти вдоль всех стен трёхкомнатной квартиры стояли стеллажи, битком набитые книгами. Книги были не просто прочитаны, но продуманы, проанализированы. Я не переставала поражаться не только широте познаний Алика в различных областях науки, литературы и искусства, но и его непредвзятому взгляду по поводу любой, казалось бы, банальной информации. Такое впечатление он производил не только на меня. Например, недавно Вячеслав Всеволодович Иванов вспоминал, какие захватывающие беседы вели они с Аликом во время совместных прогулок и как однажды, оказавшись одновременно в Дубне, со взаимным удовольствием обсуждали значение числа два в разных описаниях мира, от мифологии до современной науки. Размышлять, анализировать было для Алика такой же жизненной функцией, как

дышать. В результате у него было своё особое мнение по любому вопросу, и оно бралось не с воздуха, а базировалось на проведённой работе мысли.

Но вернусь к рассказу о библиотеке. Она состояла из нескольких разделов. Самым большим был раздел математики и физики, эти книги потом частично разобрали ученики Алика, остальные я подарила университету. Был раздел по медицине и биологии, здесь у нас с Э. А. оказалось много одинаковых изданий. Алик любил и собирал сказки: у него была одна забитая до отказа полка со сказками народов мира. А ещё были четыре глухие полки, запиравшиеся на ключ. Там хранилась довоенная и дореволюционная литература. Большинство книг было без обложек и титульных листов — следы сталинских времён, когда, опасаясь обысков, скрывали имена авторов, объявленных врагами народа.

В разделе художественной литературы у нас тоже оказалось много двойников. Какие-то мы обменяли, другие продали. Споткнулись на Пушкине. У нас были одинаковые десятитомники, отличавшиеся только по цвету — у него коричневый, у меня синий. Каждый хотел сохранить своего. В результате оставили оба. Книги так и стояли на полках одни под другими, и каждый читал свои. Наташа знала историю двух изданий. Она меня спросила, когда подросла:

— Мама, а мне какого Пушкина читать — синего или коричневого?

— Пожалуй, читай коричневого, — ответила я. — Может быть, ты найдёшь какие-то папины пометки, или книга раскроется на страницах, которые он чаще перечитывал, и, если повезёт, тебе передастся, о чём он в этот момент думал, что чувствовал. А о моём восприятии Пушкина я и так тебе расскажу.

Да и сама я, когда выдаётся момент, заглядываю теперь в коричневого. Мой синенький Пушкин остался на полке бедным сиротой...

У нас было много художественных альбомов. Мы их и сами покупали, часто нам альбомы дарили. Ведь это было так давно, в ту пору не помышляли о рыночных отношениях. А были люди — ученики Алика, мои пациенты — которые хотели как-то нас отблагодарить. И художественный альбом был самым приемлемым выражением признательности. Для нас же не было большего удовольствия, чем забраться с ногами на диван и вместе разглядывать репродукции. Но была одна, особая книга. «Мы с тобой в адажио Вивальди встретимся опять», — писала Ахматова, а мы с Аликом встречались

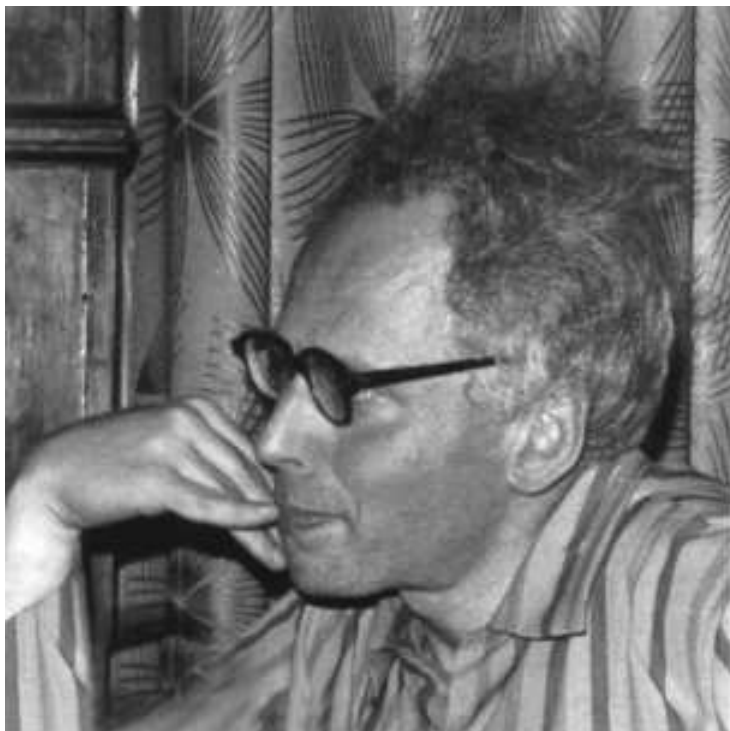
над картинами Босха. Рассматривая их, Алик погружался в анализ исторических событий, говорил о творчестве, человеческом гении, размышлял над механизмами открытий, стремясь «дойти до самой сути в работе, в поисках пути, в сердечной смуте, до сущности прошедших дней, до их причины, до оснований, до корней, до сердцевины». В эти моменты мне дарилось понимание того, как он, всё вре-



Елена Карпель, конец 1970-х гг.

мя схватывая нить судеб, событий, жил, думал, чувствовал, любил, свершал открытия, как писал Б. Пастернак. Вместе с ним я проникала во тьму веков, уносилась во Вселенную, добиралась до глубин человеческого разума. И если прав отец Александр Мень, проповедовавший не воздержание от физической любви, но приоритет

любви платонической, то это были мгновения нашего наивысшего соития...



Конец 1970-х гг.

* * *

У Алика сохранились хорошие отношения с Ирой Карповой, его «первой и единственной», как любит подчёркивать Наташа, женой.

С годами, уже после смерти Алика, мы с Ирой стали подругами, у них с Наташей очень нежные отношения. Когда Наташе было двенадцать лет, Ира написала её портрет, теперь он висит в Наташином доме во Франции. Ира была одной из первых, кому Наташа позвонила сообщить, что родила дочку...

А при жизни Алика пару раз в году, в какие-то их даты, Ира ему звонила и они встречались. Вначале Алик остерегался говорить мне об этих свиданиях, потом, увидев, что воспринимаю их как нечто совершенно естественное, спросил:

— И ты относишься к этому спокойно?

— А как я должна относиться? — удивилась я. — Ведь ты не вчера на свет народился, у тебя, так же как у меня, есть прошлое, от которого никто из нас не собирается отречься. Вы с Ирой встретились и расстались задолго до того, как мы с тобой познакомились, это ваша история, я не имею к ней никакого отношения. Не претендую ни на Ирино, ни на чьё-то ещё место в твоей душе, так же как и моё место никто другой занять не сможет.

— Хорошо тебе, — вздохнул Алик, — ты не ревнивая.

А он-то ревнивым был чрезвычайно. Ревновать меня у него не было никаких оснований. Но ведь ревность — это черта характера, а не адекватная реакция на внешние обстоятельства.

Как-то после очередного негласного повышения цен я с возмущением сказала:

— Ну какая женщина может позволить себе купить новые колготки, а не поднимать петли на старых чулках?! Только в случае, если она идёт на свидание к любовнику!

— Вот как! — с неожиданной заинтересованностью отреагировал Алик. — Очень важная информация.

С тех пор, отдавая мне зарплату, он неизменно прибавлял: «Но учти, денег на новые колготки у нас нет».

У меня есть извечный, «подкожный» друг Лёня, у нас с ним свои, особые отношения, свои темы для бесед, при наших нечастых встречах третий — всегда лишний. Оба мы полуночники, можем проговорить до утра. Алик вроде бы всё понимал, но каждый раз дожидался моего возвращения от Лёни и не спал. Он никогда, никоим образом вслух не возражал, он просто меня ждал и не спал, а я знала, что после бессонной ночи он не сможет работать. Ну что, дело кончилось тем, что стала от Лёни уходить раньше.

Как-то Алик предложил, чтобы я пригласила к нам домой моего знакомого поэта Н, о стихах которого часто говорила, и принял Н с несвойственной ему светскостью. Я не сразу поняла, что кроется за этой сверхвежливой манерой поведения. В какой-то момент поэт сказал, что его дипломная работа посвящена Пушкину.

— Это просто замечательно! — с энтузиазмом воскликнул Алик. — Я тоже много размышлял о Пушкине и давно хотел поговорить с профессионалом. Вот, например, как надо понимать его строчки...

В ответ поэт произнёс что-то весьма поверхностное.

— Да, да, конечно, но, если представить себе... — ещё любезнее продолжал Алик.

Опять что-то незначительное в ответ. И дальше, Алик: «А как Вы считаете, что думал Пушкин о ..., как он относился к ...» и так без конца, мягким, проникновенным, доброжелательным тоном. Поэт был совсем не дурак, но не выдерживал глубины анализа, на котором ему предлагалось вести беседу, и продолжал отвечать нечто беспомощное, вслед за чем вроде бы совершенно невинным вопросом или замечанием Алик сводил на нет высказывание «профессионала». У меня на глазах уничтожали человека. Уничтожали вежливо, интеллигентно и, я бы сказала, сладострастно. К великому сожалению, не могу восстановить дословно этот диалог, а придумывать не хочу. Могу передать лишь своё ощущение — это был не пулемётный обстрел и не танковая атака, но мягкий, почти что нежный, наезд асфальтового катка, я просто видела, как от жизнерадостного поэта остаётся серая плоская безжизненная полоса.

Слушать Алика было чрезвычайно интересно, его игра ума приводила меня в восхищение. Я была настолько увлечена, что забывала о первейшем правиле гостеприимства — гостю должно быть уютно и приятно в доме. Если Алик хотел быть шармёром, то таковым становился, во всяком случае, для меня.

Когда наконец за поэтом закрылась входная дверь, весело потирая руки, как ни в чём не бывало, Алик заметил:

— Хороший провели вечерок. Жаль только, что он сидел так долго.

— Ну как ты мог так себя вести?! — напустилась я на него. — Ведь ты совершенно уничтожил человека!

— Ты так считаешь? — наигранно невинным тоном спросил Алик.

— Да, считаю! И ты сам это прекрасно знаешь. Что он тебе такого сделал, чтобы так по-иезуитски издеваться?! Ты просто ревнивец. Как тебе не стыдно! Ты учёный мировой величины, а ревнуешь, как последний дворник!

— А почему у учёного меньше прав на свою женщину, чем у дворника? — всё так же «на голубом глазу» продолжал Алик.

— Теперь ты принимаешься за меня! Тебе мало одной жертвы за вечер?

— Так ты правда считаешь, что я его переиграл? Ну, значит, всё в порядке, теперь я поехал на Винницкую, мама уже давно меня дожидается.

Надо ли добавлять, что встречаться с поэтом Н мне больше не хотелось?

* * *

Будет неточным сказать, что Алик не терпел пошлости. Пошлость к нему просто не прилипала.

Как-то в молодости он вышел погулять после напряжённого рабочего дня и увидел афишу «Печальные гвоздики». Прочитав «гвѳздики», он подумал, что это должна быть милая комедия и решил пойти развлечься. Каково же было его разочарование, когда пьеса оказалась мелодрамой «Печальные гвѳздики», он с трудом смог дожждаться антракта, чтобы убежать (и в этом тоже Алик — встать и уйти в середине действия, топча ноги зрителям в проходе, он считал совершенно недопустимым)...

Однажды, уже после рождения Наташи, Алик раньше обычного вернулся с вечерней прогулки, и был при этом почти зелёного цвета. Я испугалась, что он заболел. Оказалось, за его спиной прогуливались две школьницы, и с его повышенным слухом Алик невольно слышал, о чём они говорили:

— Я взрослый человек и мы с тобой близкие люди, но не могу повторить даже тебе, что говорили эти 13—14-летние девицы между собой, по каким параметрам и сексуальным критериям оценивали они знакомых молодых людей...

При этом Алик отнюдь не был чистоплюем, любил острое слово, полагал, что можно сказать всё, важно — как.

В хорошую минуту я люблю позабавить друзей, рассказывая «случаи из жизни». Среди моих рассказов есть и пикантные. Друзья их любят и иногда просят повторить на бис. Слушая, Алик всегда весело смеялся, будто слышал впервые (или забывал?), и бывал явно доволен...

В семидесятые годы приоткрылся железный занавес, мы стали узнавать какие-то детали из жизни «там». Как-то, вернувшись с работы, я с удивлением рассказала:

— Одна наша сотрудница отдыхала в Болгарии. Представляешь, есть пляжи, где люди ходят совершенно голые: мужчины, женщины, дети, все вместе.

— Ну и что? Иногда в походах нам тоже приходилось раздеваться догола.

— В походах — другое дело. Вы делали это в экстремальной обстановке, по необходимости, а не просто так, на отдыхе, за здорово живёшь.

— Никогда не замечал, чтобы ты была ханжой.

— Да дело вовсе не в ханжестве. У себя в институте я постоянно вижу родственников, вынужденных из-за отсутствия обслуживающего персонала ухаживать за своими близкими: мыть их, подмывать, таскать за ними горшки. Они хочешь не хочешь видят обнажённое тело близкого человека во всех интимных подробностях. Это печальная необходимость, болезнь, смерть. Но в обычных условиях наготу не следует превращать в банальность, у неё своё назначение: в искусстве — вызывать восхищение, в реальной жизни — к тому же и вожделение.

— Да? — в глазах Алика загорелись лукавые искорки и, после выразительной паузы, — пожалуй, в чём-то ты права.

* * *

При скрытности и внешней сдержанности Алика трудно было себе представить, какие там внутри кипят бешенные страсти. «Лёд и пламень» — это было единое целое. Свои поступки он не объяснял, а причина могла быть совершенно неожиданной.

Он очень рано поседел. (Это произошло в самый мрачный период его жизни — они расстались с Гельфандом, Алика не печатали, значения его работ не понимали.) Своей седины он стеснялся, считал, что она выдаёт пережитые страдания. Сколько я ни старалась, так и не смогла убедить, что седые волосы у мужчины — это красиво, что женщины это любят. Комплекс есть комплекс...

В конце семидесятых откуда-то пришла мода на голодание. Голодали по разным схемам — один день в неделю, несколько дней подряд раз в месяц, ещё по каким-то. Мы с Аликом дружно посмеивались над этим поветрием. И вдруг, придя однажды домой, Алик объявил, что начал голодать. Замечу, хоть я и проработала всю жизнь в непосредственном контакте с хирургами, убеждена — без специальных медицинских показаний подвергать человеческий организм стрессу не следует.

— Прежде чем начать издевательство над самим собой, ты бы мог посоветоваться. Всё-таки, как-никак, твоя жена — дипломированный врач.

— А что советоваться, я и без того знал, что ты будешь против, специально два дня отсиживался у мамы, сегодня третьи сутки как голодаю, поэтому смирись.

— Просто безобразие! Твоё здоровье принадлежит не только тебе! Должно же быть чувство ответственности перед семьёй. Ты не имеешь права поступать так легкомысленно!

— Не волнуйся. Я делаю это под наблюдением врача-диетолога. Потом надо будет выходить из голодовки по специальному режиму питания, начиная со свежевыжатых соков. Вот, я для этого даже соковыжималку купил.

Он голодал десять дней. При этом работал и внешне вёл себя так, будто ничего не происходит.

Выход из голодовки — момент чрезвычайно ответственный и должен проводиться на продуктах, не загрязнённых химикатами. Я могла быть сколько угодно против того, что происходит, но бегала на рынок за биологически чистыми овощами и фруктами и старалась выжимать соки непосредственно перед тем, как дать их Алику. Как-то на кухне, когда я молча готовила очередную порцию сока, при этом всем своим видом выказывая негодование, он сказал:

— Не сердись. Я не мог поступить иначе. В течение одного месяца умерли Валера Никольский и ещё мой близкий друг в Киеве, ты его не знала. Без внешнего отвлекающего воздействия мне было не вынести эти потери.

Я застыла с недочищенной морковкой в руке. Конечно, я знала, что Алик очень привязан к Валере, и понимала, что пережить смерть Валеры ему чрезвычайно тяжело, — при этом никогда ни слова! — но до такой степени! Рядом со мной человек страдал так, что сам чуть не умер, а я совершенно не представляла себе, что происходит на самом деле!..

Необычайная сдержанность Алика часто приводила к большим осложнениям в его взаимоотношениях с внешним миром.

Как-то он рассказал, что в юности был увлечён некой молодой особой. У них было назначено свидание на вечер, и он решил в первой половине дня погулять за городом. Гуляя, просчитался во времени и в последний момент обнаружил, что опаздывает на электричку, которая должна была привезти его в город к назначенному часу. То-

гда он выскочил на железнодорожный путь и побежал по рельсам. Его нагнал поезд, машинист дико свистел, но Алик с рельсов не сошёл, понимая, что иначе электричка промчится дальше, и продолжал бежать впереди поезда по железнодорожному полотну. Машинисту удалось остановить состав, он выскочил на рельсы и покрыл Алика трёхэтажным матом, но, услышав объяснение, растрогался и забрал к себе в кабину. Прибыв в Москву, совершенно счастливый Алик замечтался по дороге к месту встречи и опоздал на 15 минут. Девушка была разгневана, сказала, что дожидалась его только для того, чтобы объявить, что такого неуважения не потерпит, и гордо ушла.

— И ты ей ничего не сказал? Ведь ради неё ты чуть не погиб под электричкой?!

— Зачем объяснять, если человек сам не понимает?..

Я была на целую жизнь старше той девицы, но нельзя сказать, что это всегда выручало.

Недоразумения могли быть от смешных до весьма тяжёлых.

Как-то, в первые месяцы нашего знакомства, Алик поспешно убежал со свидания, оставив меня, мягко говоря, в полной растерянности. А «события» разворачивались следующим образом. В предыдущую нашу встречу он спросил, почему я всегда хожу в брюках.

— Вы что-то имеете против?

— Нет, но юбки и платья женственнее.

Этого замечания было достаточно, чтобы я немедленно достала с антресолей свои старые сапоги на каблуках, так как под брюки носила полуспортивные ботинки, срочно отдала их в починку и на следующее свидание помчалась на шпильках и в юбке до пупа, чувствуя себя в таком облачении верхом женственности. В тот раз мы договорились пойти в Пушкинский музей на выставку. И вот, в торжественной тишине музея обнаруживаю, что мои свежепочиненные сапоги неимоверно скрипят. Тогда уже я знала, что некоторые звуки Алик просто физически не переносит. Мне стало совсем не до прелестей портретного искусства, только и думала, как бы поменьше шевелиться, но при малейшем движении проклятые сапоги просто вопили на весь музей. Совершенно несчастная, я остановилась перед картиной неизвестного художника, на которой была изображена в полный рост женщина на сносках в чёрно-красном полосатом халате. У неё были полные слёз зелёные глаза на пол-лица, и от всей картины веяло такой тоской, такой печалью, что я, взвинченная и в расстроенных чувствах, как-то невольно подумала вслух:

— Такой была жена Андрея Болконского...

— Маленькая княгиня? Почему? — спросил Алик.

— Она также боялась своего живота, чувствовала, что он несёт ей смерть.

Как только мы вышли из музея, Алик поспешно распрощался. «Это всё они, это проклятые сапоги», — убивалась я, оставшись одна. Он позвонил в тот же вечер:

— Вы были совершенно правы относительно картины с беременной женщиной. Только это не маленькая княгиня, а жена князя Юсупова, она умерла от родовой горячки, картина написана одним из дворовых князя. Я звоню, чтобы выразить своё восхищение тем, как тонко Вы чувствуете искусство.

«Если бы знал Алик, „из какого сора“²⁾ выскочила моя реплика!» — усмехнулась я про себя, а вслух спросила:

— А как Вы узнали историю картины?

— Я знал, что сегодня будет передача об этой выставке, и торопился домой, чтобы мама посмотрела её хотя бы по телевизору, так как сама в музей пойти не может. Передача оказалась интересной, я остался её смотреть, и там как раз говорили об этой картине.

Ну что ж, всё хорошо, что хорошо кончается. Но ведь если бы я не обмолвилась о картине, если бы о ней не сказали в передаче, если бы... если бы..., то никогда бы не узнала, что бедные сапоги ни в чём не виноваты. Куда было бы легче, если бы он просто объяснил, в чём дело...

Как-то, когда мы все вместе жили на Винницкой, в совершенно благодушном настроении я сказала: «Ради тебя я стала поварихой». Реакция была неожиданно резкой:

— А ты считаешь, что именно повариха мне нужна, что большего я недостоин?

Ну, тут мне было что ответить: популярно объяснила, что всё зависит от мужчины — если он чувствует себя состоявшимся, то и свою женщину держит за королеву, даже если в жизни она, действительно, повариха, а вот слабый король и к своей жене-королеве относится как к кухарке, или, того хуже, как к дворовой собаке. В общем, мы всерьёз разыграли старый анекдот «мама, он назвал меня сукой». Много лет спустя, когда Алика давно уже не было в живых, Луиза Кириллова мне рассказала, что когда-то, любя Алика и видя

²⁾ «Когда б вы знали, из какого сора растут стихи, не ведая стыда» (А. Ахматова).

всю его неухоженность, действительно хотела женить его на своей приходящей домработнице, чем привела в негодование...

Если бы знать и понимать! И скольких недоразумений можно было бы избежать, а сколько их осталось нерасшифрованными...

Но иногда, на грани крушения, он изменял своим правилам.

Как-то, когда я с Наташей уже перебралась в собственную квартиру на улице Кедрова, возникла цепочка несурзностей, случайных совпадений, на которых не хочется останавливаться, потому что, действительно, это не имеет никакого значения. Но в тот момент я пришла в дикую ярость, схватила вещи Алика и свезла их на Винницкую. Алик был в университете, я оставила записку из двух слов: «Верни ключи». На телефонные звонки не отвечала, письма, не распечатывая, отправляла обратно. Тогда он позвонил моей подруге Алке, с которой вообще-то был в весьма отдалённых отношениях, и добрых полчаса что-то страстно ей объяснял. Сам тот факт, что Алик, — при его-то сдержанности! — кому-то стал верить, что у него на душе, был настолько огромен, что я тут же ему позволила и только и сказала: «Возвращайся». Мы никогда не говорили об этом инциденте, зачем? главное и без того было ясно.

* * *

Если Чехов был прав, считая, что краткость — сестра таланта, то это и про Алика. Помню такой случай. Это было в конце 1970-х годов. Повеяло духом перемен. В печати стали появляться острые статьи. Кто-то притащил на работу свежую газету. Там было нечто сенсационное. Газета переходила из рук в руки. Но меня вызвали в операционную, потом надо было выхаживать больного в реанимации. Только и смогла, что позвонить Алику и сказать, чтобы он сходил в детсад забрать Наташу. Возвращаюсь поздно вечером, говорю:

— Знаешь, в «Известиях» интересная статья.

— Знаю, вот она, я тебе отложил.

— У меня совершенно нет времени читать. Надо срочно готовить вам еду на завтра, потом стирать. Ты просто перескажи, что там.

Алик помолчал, потом произнёс пару фраз.

— И всё?

— Всё.

— Но, Алик, там целый подвал! Что там ещё?

Он призадумался, потом сказал: «Да вроде больше ничего».

Ну, тут я открыла рот:

— Конечно, если бы это была Никита или кто-то другой из твоих заумных математиков, ты бы часами обсуждал, обсасывал каждый абзац, а со мной можно отделаться двумя предложениями!!

Как в пушкинской сказке «ничего не сказала Золотая Рыбка, только хвостом махнула и ушла в открытое море», так Алик посмотрел на меня молча, пожал плечами и удалился в комнату за письменный стол.

Переделав лишь то, что нельзя было отложить на завтра, и уложив Наташу спать, добираюсь наконец до злосчастной статьи. Сначала её просматриваю, потом внимательно читаю от корки до корки. Но не нахожу ничего, чего бы Алик не отметил! Делать нечего, пошла извиняться... (Совершенно не могу припомнить, о чём конкретно шла речь. Видно, статья была однодневка).

Краткость оказалась наследственной чертой Наташи.

Как-то, в первые месяцы своей докторантуры, Наташа пожаловалась, что руководитель высказал ей своё «фэ». Второму докторанту и ей предложили написать промежуточный отчёт о проделанной работе. Они пришли вместе, и руководитель, принимая бумаги, заметил:

— Сразу видно, как много сделал молодой человек, — вместо затребованных трёх страниц он принёс отчёт в четыре с половиной листа, а что ж Вы, барышня, поработали всего на полторы странички?

Наташа с горечью рассказала:

— Второй докторант дал мне прочесть свой отчёт, там написано примерно следующее: он ознакомился с одной статьёй, решил повторить описанный в ней эксперимент, для этого взял спиртовку, прокалил над ней колбу, потом набрал в пипетку раствор, выпустил из неё несколько лишних капель, чтобы раствора было точно до нужной метки, затем выдул его в колбу, потом таким же образом поступил ещё с тремя жидкостями, стал образовавшуюся смесь подогревать, и т. д., пока не добился описанного в статье результата. И всё. А я написала, что прочла 18 статей, выяснила, что сходные с поставленной передо мной задачей в лабораториях мира разрабатываются в основном в трёх направлениях, по каждому поставила несколько прикидочных опытов, выбрала то, которое показалось мне наиболее перспективным, особенно если попытаться его несколько

видоизменить. (Впоследствии за «видоизменение» был получен сертификат на изобретение.)

А в тот момент, когда Наташа это говорила, у меня в голове мелькнула ассоциация с пушкинским «Памятником» — нет, весь Алик не умрёт, его душа в Наташе «прах переживёт и тленья убежит»...

* * *

Алик считал, что у человека, наделённого талантом, должно быть чувство ответственности за него.

Он упрекал меня:

— У тебя же разнообразные и недюжинные способности. Как ты позволяешь себе ими пренебрегать?

— Напишешь на моём надгробии «Братская могила загубленных талантов», — отмахивалась я.

В ответ Алик не на шутку сердился:

— Ты кичишься тем, что не честолюбива, а между тем, это твой самый большой недостаток.

Он рассматривал талант как некое общественное достояние, которое Проведение вручило отдельному лицу, как если бы дало ему на сохранение драгоценное зерно, обязав тем самым это зерно растить и лелеять, не жалея на то ни сил, ни даже собственной жизни. И как садовник с гордостью демонстрирует выращенные им плоды, так Алик испытывал необходимость, чтобы его научные заслуги были оценены. Он был чрезвычайно честолюбив и страдал от вакуума, в котором пребывал почти всю свою творческую жизнь.

За прошедшие четверть века жизнь так изменилась, что даже мы, участники недавнего прошлого, забываем какие-то детали. Подготавливая эти записки, я открыла архивы Алика и натолкнулась на бумаги, которые просто вопиют о том, как гнусно поступали с ним власть предержащие. Так, в одном заявлении в редакцию журнала «Известия АН, серия математическая» Алик пишет, что посланную им статью редакция предложила разделить на несколько частей, так как она слишком большая, и печатать каждую часть отдельно в следующих друг за другом выпусках. Когда он разделил статью на три части, то первая была напечатана через 8 месяцев после её подачи, вторая — не в следующем номере, как это было обусловлено, а ещё через 9 (!) месяцев, что же касается третьей части, то он вообще не

получил ответ, когда она выйдет в свет. Привожу дословно конец этого заявления: «Рассматриваемые в статье вопросы интенсивно изучаются в последнее время как в физической, так и в математической литературе. Я не сомневаюсь в том, что если моя статья достаточно долгое время не будет опубликована, полученный там результат повторит кто-то другой у нас или за рубежом. Я являюсь рядовым математиком, однако не считаю, что это обстоятельство может служить основанием для некорректного ко мне отношения. Требование корректности в данном случае состоит, как мне кажется, в том, чтобы редколлегия определяла судьбу статьи в достаточно короткий срок, порядка 3—4 месяцев, а в случае положительного решения время от момента поступления статьи в редакцию до её публикации не превосходило среднего для журнала...» И таких примеров, к сожалению, множество.

Как-то Алик сказал мне: «Я должен опережать своё время лет на пятнадцать, только в таком случае мне удаётся существовать в науке». Когда я спросила, почему у него сложности с публикацией своих работ, он ответил, что в стране существуют два математических журнала, один из которых антисемитский и потому не публикующий работ еврейских авторов, а другим журналом руководит Гельфанд, с которым они расстались.

Не знаю подробностей того, из-за чего они поссорились с Гельфандом. Алик отказывался говорить на эту тему. Думаю, об этом чрезвычайно печальном факте втайне сожалели оба. Мои предположения относительно Гельфанда базируются на том, что, когда Алик и Люся Шварцы пригласили нас с Наташей, в ту пору ещё школьницей, в Бюр под Парижем, где в это же время находился Гельфанд, он выразил желание познакомиться с дочерью Березина, беседовал с ней около часа, после чего сказал: «У Вас манера мышления та же, что у Вашего отца. Вы можете заниматься математикой». Рассматриваю этот жест Гельфанда как поклон памяти Алика. (Но Наташа выбрала химию, «область науки, находящуюся посередине между математикой папы и медициной мамы», как полушутя она обосновывала своё решение. Я же с грустью думаю, что в Наташины школьные годы не было никого, кто помог бы ей почувствовать красоту математики.)

Известность к Алику пришла через физиков, и то не сразу. Как-то я спросила, пытался ли он поговорить с Ландау. Ответом было: «Один раз, прошло неудачно, мне тяжело об этом говорить».

И здесь хочется помянуть добрым словом Игоря Кобзарева. Он был одним из первых физиков, понявших значение работ Алика, и много сделал для того, чтобы на них обратили внимание физики-теоретики.

Алик вёл семинар, на который приезжало много народу из физического центра в Черноголовке. Семинар этот был для него чем-то святым. Ничто, как, например, такая «мелочь», как моя защита диссертации, не могло вынудить его семинар отменить.

Ему чрезвычайно не хватало личных контактов с ведущими учёными других стран. Один из ящиков его письменного стола был битком забит самыми разнообразными предложениями поработать за границей. Среди этих предложений были весьма престижные, делавшие честь не только ему, но и всей советской науке.

...Сейчас забывается, через сколько унижений надо было пройти при оформлении бумаг для поездки за границу — все эти профкомы, парткомы, райкомы, какую гору формуляров заполнить и невесть на какую галиматью ответить «не был», «не состоял», зато хорошо было бы написать «являюсь членом партии», на что Алик ни за какие блага не согласился пойти, он никогда членом партии не был. И вот после всех этих унижений и огромной пустой траты времени, документы сдавались в ОВИР, откуда приходил отказ, или просто не было никакого ответа...

В качестве примеров царившего беспредела приведу лишь два случая.

Поездку в Польшу Алику «зарубили» ещё в МГУ под предлогом, что в тот момент он вёл трёх аспирантов и их нельзя было, видите ли, оставить без руководителя, хотя Алик собирался пробыть во Вроцлаве с мая по декабрь, т.е. отсутствовать максимум один семестр. Когда его пригласили в ЦЕРН на полгода-год (предлагали самому выбрать длительность пребывания в Швейцарии), в столь почётном приглашении университет официально отказать не мог, тогда после того, как документы отправили в ОВИР, университет отозвал им же выданную характеристику(!). На это даже выдавшие виды работники ОВИРа сказали Алику, что с подобным встречаются впервые!

Воссоздавая обстановку того времени, следует помнить, что Интернет ещё не знали, и даже такого пути во внешний мир не существовало.

Алик задыхался в стране социализма с неизвестно каким лицом.

Для него было чрезвычайно важным, если кто-то проявлял интерес к его трудам. Расскажу об одном эпизоде.

Как-то на ночь глядя он сказал, что за следующий день ему необходимо завершить большую работу, поэтому он не станет подходить к телефону. Я должна была брать трубку и давать понять, кто звонит, а он потом будет решать, откликаться на звонок или нет. С утра позвонил Витя Маслов. Алик сделал знак, что трубку возьмёт, и... проговорил минут сорок! Затем целый день, не поднимаясь, он сидел за письменным столом. Мне пришлось дважды разогреть обед. Когда мы, наконец, сели в кухне за стол, вновь позвонил Маслов. Схватив кусок хлеба, Алик убежал в комнату и проговорил ещё с добрый час. На все мои жесты, что обед остывает, он отмахивался и показывал, чтобы мы с Э. А. его не ждали. Мы поели, я оставила еду на столе и, разозлённая, пошла заниматься Наташей. Похлебав холодный обед, в дверях появился очень довольный Алик и в качестве извинения пояснил, что Витя заинтересовался его работой, решил посвятить её изучению весь день, что утром Алик как бы прочёл ему вводную лекцию, в середине дня Витя позвонил сказать, что дошёл до середины текста. «Вечером он мне опять позвонит, когда закончит», — добавил Алик. Он не пошёл на вечернюю прогулку — ждал звонка. Маслов позвонил поздно, и они опять долго беседовали. В ту ночь Алик хорошо спал, удовлетворённо посапывая во сне. Видно, внимание Маслова вполне заменило свежий воздух.

Ну что ж, спасибо Вите, что ещё при жизни Алика заинтересовался его работой...

* * *

Одно время к нам стала часто приходить молодая красивая женщина. Она приветливо обменивалась со мной несколькими фразами в прихожей, дарила Наташе какую-нибудь игрушку, потом они с Аликом удалялись в комнату, плотно закрывали за собой дверь и там надолго пропадали. За мной оставалось право убирать, стирать, готовить, гулять с Наташей или укладывать её спать, никто не мешал мне тянуть на себе хозяйский воз. Наконец, дверь из комнаты открывалась, усталые, но довольные, они появлялись в коридоре, женщина быстро раскланивалась и уходила, а Алик садился ужинать. Как-то, после очередного такого посещения, я сказала:

— Всё-таки у тебя идеальная жена.

— Главное, что ты сама так думаешь, — ухмыльнулся Алик.

— Да, идеальная, — настаивала я, — может быть, для нормального мужчины я вовсе не гожусь, но для тебя — идеальная!

— Повторяю: главное, ты сама так думаешь.

— Но скажи, какая жена потерпит, чтобы её муж закрывался в комнате на долгие часы с другой женщиной?!

На этот раз Алик снизошёл до пояснения:

— Мы трое — Рената Каллош, Огиевецкий и я — получили приглашение на международную конференцию (конгресс? — не помню). Огиевецкого и меня, как евреев, естественно, зарубили, а Рената — дочь венгерского профессора лингвистики, умершего, когда ей было 4 года, и единственным наследством, доставшемся ей от отца, была запись в пятом пункте ее паспорта — мадьярка. Вот ей и разрешили. Рената глубокий специалист в своей области, но ей не хватает общенаучного кругозора, она первый раз едет за границу, очень волнуется, и я как бы начитываю ей курс современного состояния науки.

— Из солидарности с вами она должна была бы отказаться от поездки.

— Нет, Рената вовсе не предательница. Она разобралась в наших работах и сделает все три доклада.

— Всё равно, это не одно и то же. Она не сможет доложить так, как это сделали бы авторы.

— Ну, что касается меня, так она сделает это лучше, чем я. Рената предложила такой ход — в начале выступления она напишет на доске рядом две формулы — какое представление было раньше и что дало моё предложение. Я бы до такого никогда не додумался, — с явным недовольством в свой адрес прибавил Алик.

Я попыталась его утешить:

— Каждому своё: Рената — это артиллерийская атака, а ты — проникающая радиация.

* * *

Да уж, что-то, а «проникающей радиацией» он был. Это стало особенно очевидно со временем, когда его не стало.

Раз в год, 25-го мая, в течение десяти лет, пока мы не уехали во Францию, я собирала всех, кто хотел вместе вспомнить Алика. И с каждым годом народу становилось всё больше.

Да и в «непрестольные» дни ко мне приходили совершенно незнакомые люди просто для того, чтобы сказать, как им не хватает Алика...

Приехал Володя Молчанов и попросил фотографию. «Знаете, — сказал он, — мы виделись редко, да и по телефону или по почте общались нечасто. Но вот его не стало, и я почувствовал потребность иногда хотя бы просто видеть его лицо». Я дала Володе последнюю, лучшую фотографию Алика. Он в Новосибирске, вдохновенно рассказывает у доски об одной из своих работ, наконец-то заинтересовавшей научную общественность. Володя фотографию увеличил и сделал много копий, что в то время было совсем не так просто, как теперь. Я раздала их ближайшим друзьям, она на форзаце изданной уже после смерти Алика книги «Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными»...

Встреча с Аликом оставляла в памяти людей глубокий след на долгие годы.

Наташе было двенадцать лет. Мы проводили лето в Михалёве на турбазе Дома учёных. Как-то михалёвское общество пришло в большое волнение — на турбазе появился молодой физик-теоретик, доктор наук, недавно перебравшийся из Томска в Москву, холостой — в общем, жених хоть куда. Его усадили за директорский стол, где на правах приятельницы директрисы Эллы сидела и я с Наташей. Туда же посадили всех михалёвских красавиц на выданье. После обеда Элла мне сказала:

— Всё же у твоей дочери выдающаяся внешность. Столько красивых женщин сидело за столом, а этот молодой учёный в течение всего обеда глаз не сводил с Наташи.

— Ну, — усомнилась я, — на героя набоковской «Лолиты» он не похож, скорее всего где-то в математических кругах он пересекался с Аликом, а так как Наташа очень похожа на отца, то теперь в задней извилине молодого человека зашевелилась ассоциация.

— То, что ты можешь насочинять, просто ни в какие ворота не лезет, — пожала плечами Элла.

За ужином подчёркнуто безразличным тоном она спросила:

— Скажите, Дима, имя Феликса Александровича Березина вам что-либо говорит?

— Ну как же, я непрерывно использую результаты из его книги по вторичному квантованию и формализм его суперматематики в своих работах. Обсуждения, которые я изредка имел возможность

с ним вести, всегда позволяли мне находить решения моих проблем. А кроме того, он был оппонентом по моей докторской диссертации, без него эта защита была бы невозможна. Для меня это человек и ученый недосягаемого уровня. Я, вообще-то, человек не завистливый, наверное потому, что не имею особых комплексов, но всегда завидовал моим московским друзьям Тютину и Воронову, которые имели постоянную возможность посещать семинар Феликса Александровича и обсуждать с ним научные проблемы.

— В таком случае, познакомьтесь: его вдова и дочь.

— То-то я всё мучаюсь, откуда знаю эту девочку, — воскликнул Дима, — никак не мог понять, кого она мне напоминает. Кроме того, я видел её совсем маленькой, когда приходил к Феликсу Александровичу домой для обсуждения моей диссертации.

Смеясь, я сказала Элле:

— Как видишь, положение Бора «теория верна при условии, если она достаточно сумасшедшая» справедливо не только для теоретической физики.

После ужина Дима подошёл ко мне:

— Можно я с вами погуляю? Мне так хочется поговорить о Феликсе Александровиче.

Так невольно в тот вечер мы с Наташей потеснили всех михалёвских красавиц.

Дима Гитман стал большим другом нашего дома. Он рассказал, что должен был защищать докторскую диссертацию в новосибирском Институте ядерной физики. Эта защита долго не могла состояться по ряду «вненаучных» причин. Тогда Ефим Самойлович Фрадкин рассказал о ситуации Алику и попросил быть оппонентом на защите. Считалось, что против такой «тяжелой артиллерии», как Березин-оппонент, не выстоит ни один блюститель чистоты расы. Дима был потрясен и бесконечно признателен Алику за его согласие. Конечно, оно последовало после того, как Алик досконально вник в суть работы. Я помнила, что Алик летал в Новосибирск и был доволен результатом поездки, как всегда, не посвящая меня в подробности. Это Дима рассказал, что опасения не были напрасными, на защите один из самых влиятельных членов совета уже повел наступление на его работу по абстрактным проблемам квантовой теории поля вопросами типа «а какая от всего этого может быть практическая польза?». Однако выступление Алика в поддержку работы было так неформально, содержательно, интересно в научном плане

и в то же время дипломатично по отношению к «патриотам», что оно тут же резко изменило ситуацию в зале, и голосование было единогласным.

Дима подарил нам с Наташей кассету с записью этого выступления. Насколько мне известно, это единственная возможность услышать живой голос Алика, который, кстати, был очень красив — такой низкий баритон...

Примеров «эффекта последействия» от общения с Аликом множество.

В 1972 году проходила международная конференция в Москве. Алик сказал, что ему обязательно нужно встретиться с одним из приехавших зарубежных учёных. После окончания конференции я спросила:

— Ты поговорил, с кем хотел?

— Как сказать... — Алик неопределённо пожал плечами.

— Как есть, так и скажи.

— Ну, я задал вопрос во время его выступления...

— И что?

— Он начал было отвечать, потом остановился и замолчал, воцарилась длительная, весьма впечатляющая тишина, и затем сказал, что вопрос очень интересный, что сразу он ответить не может, но по приезду домой обязательно подумает. А когда он подумает, — с характерной для него лукавой усмешкой сказал Алик, — то поймёт, что всё его построение рассыпается...

Как-то зимой, когда я была «глубоко беременна», Алик решил вывезти меня за город подышать свежим воздухом. Мы ехали в электричке и стояли в тамбуре. На каком-то полустанке в поезд заскочил лыжник. Они поздоровались, и, даже не подумав представить нас друг другу, Алик с живостью к нему обратился: «Я тут как раз размышлял над твоей работой...», и дальше пошла обычная абракадабра.

...Когда Алик разговаривал с математиками, мне казалось, что, говори они о «нормальных вещах» на эсперанто, и то поняла бы больше, чем тот русский математический язык, на котором они изъяснялись. При этом у меня было ощущение, что улавливаю расстановку сил. Хоть Алик говорил тихо и никогда не повышал голоса, практически всегда он лидировал. Это было и понятно — по большей части я слышала его беседы с учениками. Но и в тех случаях, когда к нам приходили коллеги по университету, чаще всего лидерство

оставалось за ним. Подтверждением моих слов является хотя бы тот факт, что письмо ректору об обстановке на мехмате (см. Приложение 1) обсуждалось у нас дома с коллегами, которых созвал к себе Алик, и вначале оно планировалось как коллективное, но потом решили, что его подпишет один Алик. За это письмо университетская администрация в очередной раз ему мстила...

Возвращаюсь к эпизоду в тамбуре пригородного поезда. Я увидела, что слова Алика произвели на собеседника воздействие, как если бы ему нанесли удар под дых. Он отшатнулся, начал отступать, а очень довольный произведённым эффектом Алик, не давая «противнику» опомниться, продолжал наступление. Но вот лыжник перевёл дух, сосредоточился и начал контратаку. Здесь уже настала очередь Алика сделать рекогносцировку... и состязание умов продолжалось. Передо мной была игра не в шашки и не в шахматы, это был не бокс и не фехтование, но неведомая мне марсианская борьба титанов. Алик встретил достойного противника, и я заворожённо наблюдала этот поединок, как заядлый болельщик не может оторвать глаз от ринга. Алик же, без всякого сомнения, ещё и красовался передо мной, за что пришла немедленная расплата — на какое-то возражение собеседника он ответил слишком быстро и потому недостаточно продуманно, и тут уж не было ему пощады. Я почувствовала, что мешаю Алику сосредоточиться, и ушла в вагон. Когда он пришёл за мной, на вопрос «Кто победил?» Алик ответил:

— Мы не договорили, он доехал до своей станции. Но это и не важно, главное — он ещё подумает.

— А кто это был?

— Арнольд.

* * *

Об отношениях Алика с учениками, безусловно, лучше меня могут рассказать они сами. Остановлюсь лишь на нескольких эпизодах.

С первым его учеником чуть было не произошёл большой конфуз. Это был молодой американец, впервые приехавший в Москву, весёлый, энергичный, с энтузиазмом набросившийся на работу. Но через некоторое время молодой человек стал как-то увядать, захирел, перестал проявлять интерес к предлагаемым задачам. Алик не

сразу понял, что причина не в том, что американец разочаровался в математике, а в том, что... он погибал от истощения! Да, в центре Москвы, живя в университетском общежитии, молодой человек голодал. И дело было вовсе не в отсутствии денег, он был из очень состоятельной семьи, просто каждый раз, приходя в студенческую столовую, он наталкивался на длинную очередь и решал зайти попозже, а народ до самого закрытия всё не убывал. Что же касается советских магазинов, то помимо очередей американца отпугивал неаппетитный вид предлагаемых продуктов. Потом, когда выяснилось, в чём дело, предприняли экстренные меры (если не ошибаюсь, американца приписали к профессорской столовой), и всё завершилось блестящим окончанием его занятий.

Но этот урок Алик помнил всю жизнь, и к своим ученикам был крайне внимателен. Неоднократно он направлял их ко мне на предмет медицинской консультации. Как правило, у молодых людей не было никакого органического заболевания, они в большей или меньшей степени страдали тем, что французы так точно окрестили *mal de vivre*, т.е. неудовлетворённостью собой и потерей своего места в окружающем мире. Им нужен был не врач-лекарь, а психотерапевт. Но так как в те времена этой профессии в Союзе практически не существовало, то поневоле я играла роль «Фрейда-самоучки». Обычно, как только начинали появляться первые положительные результаты в их работе, мои псевдобольные магически поправлялись. И в этом была заслуга их научного руководителя, а не моя.

Неоднократно Алик помогал своим ученикам не только в чисто научных поисках. Так, один из них бежал из Советского Союза, перейдя на лыжах финскую границу в районе Кольского полуострова. Алик знал об этом отчаянном решении и очень волновался, пока окольными путями не получил известие, что операция удалась. Когда молодой человек оказался за границей, ему понадобилось рекомендательное письмо. И Алик такое письмо с оказией передал. При царившей тогда в стране обстановке это было актом мужества с его стороны.

Как-то к Алику пришёл аспирант-иностранец, египетский араб, и сказал, что хотел бы делать диссертацию под его руководством. Алик был озадачен, так как не был уверен, что египтянин знал, что выбирает себе научным руководителем еврея. Он попытался посоветовать ему обратиться к другим профессорам МГУ под предлогом,

что в его области у молодого человека слабая подготовка и он не сможет уложиться в отпущенные по программе три года. Но аспирант ответил, что хочет работать именно под руководством Алика и готов посвятить этому столько времени, сколько потребуется, что он мог выбрать любое учебное заведение, но остановился на Московском университете, потому что ознакомился с работами Березина, и именно те проблемы, которыми он занимается, ему интересны. Тогда Алик напрямую спросил, знает ли молодой человек, что руководителем его, в таком случае, будет еврей. «Я знаю о Вас всё, — ответил молодой араб, — даже то, что у Вас недавно родилась дочь».

В течение первых двух лет они говорили только о математике, потом постепенно стали касаться общественных и политических тем. Египтянин рассказал, что в его стране нет тотального антисемитизма, что Садат подписал мирный договор с Израилем, выступая не как «один против всех», но опираясь на определённые слои египетской интеллигенции. Когда в конце второго года обучения аспирант уезжал на летние каникулы и, в отличие от своего «невыездного» руководителя, собирался путешествовать по Европе, он спросил, какой подарок, привезённый из-за рубежа, мог бы доставить ему удовольствие. Алик ответил, что хотел бы иметь современное издание Библии, так как в стране за время советской власти Библия практически не переиздавалась... И вот один из парадоксов нашей тогдашней жизни — мне было далеко за тридцать, и впервые в своих руках я держала Библию, которую египтянин-араб привёз из Англии!..

После защиты диссертации молодой человек, который к тому времени уже сам стал отцом семейства, сказал, что помимо общепринятого банкета они с женой хотели бы прийти к нам домой, отпраздновать событие в тесном кругу (они жили в университетском общежитии и не могли пригласить к себе). При этом жена молодого кандидата наук настояла, что сама займётся приготовлением праздничного стола. Они принесли не только свои продукты, но пришли со своим казаном и прочей кухонной утварью. Когда я вернулась с работы, в квартире вкусно пахло пловом, стол был заставлен восточными закусками, а на буфете дожидались своего часа восточные сладости. Мы провели замечательный вечер!

Митя Лейтес сказал мне однажды:

— Я смотрю на Феликса Александровича снизу вверх, но всякий раз после беседы с ним начинаю к самому себе относиться лучше.

— Есть общее правило для учителя и врача — после общения с ними даже самый нерадивый ученик (это, естественно, не относится к Вам) или безнадежный больной хотя бы какое-то время должны чувствовать себя лучше, — заметила я.

Алик никогда не разрешал себе высокомерного тона. У него была удивительная способность подталкивать собеседника к размышлению. (Я попыталась отразить эту черту в запомнившихся диалогах со мной, не знаю, удалось ли?)

Как правило, и после окончания совместной работы с учениками или молодыми коллегами Алик оставался с ними в контакте, у них сохранялись добрые отношения.

Мне известен лишь один случай полного и абсолютного разрыва с молодым математиком, который зимой 1975—1976 годов просиживал у нас на Винницкой часами, работая с Аликом, а при эмиграции в США решил опубликовать там совместную работу под своим именем, без соавтора, сообщив об этом уведомительным письмом, отправленным накануне отъезда из СССР. Не могу передать, что творилось с Аликом, когда он получил это письмо! Я боялась инфаркта на нервной почве. Надо представить себе обстановку того времени: Алику отказывали в зарубежных поездках, работы его если и печатали, то с бесконечными задержками. Кроме существа дела, Алика возмутила ещё и манера, как это было сделано. Наверное, только рождение Наташи через неделю после этого события спасло Алика. Причём самому молодому человеку не было никакой необходимости так поступать, Алик считал его весьма одарённым математиком и предсказывал ему при удачных обстоятельствах блестящую карьеру, что и случилось.

Рассказ об учениках и молодых сотрудниках не хочется заканчивать на негативной ноте, и с удовольствием скажу ещё несколько слов.

С Мишей Шубиным и Гришей Литвиновым Алик познакомился на математической школе под Баку, их втроем поселили в одной комнате. После нескольких вечерних бесед перед сном, неожиданно для Миши и Гриши, Алик предложил написать совместную книгу. При жизни Алика эта работа завершена не была, но их отношения, возникшие, можно сказать, совершенно случайно, навсегда остались чрезвычайно глубокими.

После гибели Алика к нам домой пришёл Гриша и предложил заниматься с Наташей математикой. Это продолжалось недолго, и бы-

ло очевидно — почему: была не та психологическая почва, подспудно Гриша и Наташа искали друг в друге Алика. Но эту Гришину боль я помню и теперь...

Миша сделал для Алика очень много. Уже после его смерти в издательстве МГУ вышла книга «Уравнение Шрёдингера» за их двумя именами, усилиями Шубина было подготовлено несколько сборников научных статей, посвящённых памяти Алика. (Без мягкого, но настойчивого давления Миши и Альберта Шварца никогда бы не написала эти воспоминания.)

А когда в первый раз я была приглашена Аликом к нему домой — это был большой праздник, он созвал друзей, чтобы отметить принтерное издание своих «Лекций по статистической физике», — на столе среди совершенно несъедобных яств, купленных в советской кулинарии, приятно выделялись очень вкусные винегрет и салат оливье, сделанные, как было объявлено, Машей Шубиной. Самой Маши не было — в то время кормящая мать, она всё приготовила и ещё до прихода гостей ушла заниматься ребёнком. Потом, когда родилась Наташа, нам перепали от Шубиных детские коляски, одежда, игрушки. Мы с Аликом были старыми родителями, и дети его учеников оказывались ровесниками нашей дочери. Это Маша, как более опытная мать, давала мне мудрые советы по уходу за Наташей, а девочки наши, когда подросли, стали подружками. Теперь судьба разбросала их по разным странам и континентам, но они сохранили добрые отношения. А в «московский период» все дни рождения отмечались вместе.

Как-то, уже после смерти Алика, мы были приглашены на день рождения младшей дочери Шубиных, Гали. В разгар праздника в доме отключили свет. Маша ахнула, что не сможет накормить детей — были задуманы всевозможные блины, а плита была электрической. Зажгли свечи. Детям выдали сухое печенье и конфеты. Мы с Машей вполголоса беседовали на кухне. Миша в комнате что-то рассказывал детям, они тихо сидели, грызли печенье и перебирали фантики от конфет. Было уютно, тепло, спокойно. А мне казалось, что свет погас не случайно, что душа Алика здесь, с нами, витает по квартире, прячась в трепещущих сумерках от мерцающего света свечи...

* * *

Но это уже было потом, потом... А пока что самолёт шёл на посадку. Мы подлетали к Красноярску.

Красноярск—Магадан

Красноярск, Сибирь... В воображении возникает что-то огромное, мощное. А аэропорт оказался маленьким, уютным, этакое аэрофлотское сельпо. Самолёт подкатил чуть ли не впритык к залу ожидания, куда нам предложили зайти, размяться после многочасового сидения. Сквозь бронированное стекло, отделявшее пассажиров от взлётного поля, мы видели, как к самолёту подъехала заправочная установка. Тут же стали выгружать багаж самым что ни на есть элементарным способом — открыли люк и покидали вещи на землю. Ребята-туристы со смехом и шутками из общей кучи вытаскивали свои байдарки. Я смотрела на них и мысленно провожала словами песни, которую они в дороге пели: «До свидания, мальчики! Мальчики, постарайтесь вернуться назад...»

Ребята уходили в поход, я летела дальше и думала, как сказать нашей девочке, что её папа уже никогда назад не вернется...

* * *

С самого начала нашего сближения Алик хотел ребёнка, а я — нет. У меня не было никакого чувства материнства. Алик огорчался, обижался. Но я была непреклонна.

— Ведь ты не изменишь своим жизненным приоритетам, — говорила я. — Будешь по-прежнему работать 36 часов в сутки, вся забота о ребёнке ляжет на меня. Конечно, я не такой большой учёный, как ты, но люблю свою работу и меня устраивает тот образ жизни, который веду. Кроме того, мы уже старые, где ты был раньше? Заводил бы детей с предшествовавшими мне женщинами.

— Если бы я был женщиной, у меня были бы уже не только дети, но и внуки! — как-то на очередную мою тираду с несвойственным ему пылом возразил Алик.

Действительно, наши молодые годы были далеко позади. Мне исполнилось 36 лет, Алику — 43 года. Не первый год мы были вместе... и я потеряла бдительность. А природа, как известно, не терпит пренебрежительного отношения к себе...

Первую половину августа 1975 года мы провели вместе в деревне под Дубной, потом Алик остался там работать, а я уехала по туристической путёвке в Болгарию. Когда вернулась, все отмечали, что никогда так хорошо не выглядела, а сама я пребывала в каком-то просветлённом состоянии. Как будто на меня снизошла благодать. Всё мне нравилось, всем была довольна. На какой-то

сбой физиологических функций внимания не обратила, считая, что это вызвано изменением климатических условий. Первым, кто понял, что со мной происходит нечто необычное, был друг Лёня. Мы гуляли с ним в Коломенском, и Лёня недоумевал:

— В чём дело? Где твой острый ум, где нестандартное мышление? Что за патокой ты сегодня меня потчуеть вместо содержательной беседы?!

— Ну, послушай, — отбивалась я, — ты вечно ругаешься, что всё критикую. Один раз в жизни меня всё устраивает, и опять плохо.

— Просто это не ты, — продолжал удивляться Лёня и, отступив шага на два, чтобы лучше меня разглядеть, с сомнением произнёс, — может, ты беременна?

— Беременность или климакс — вот в чём вопрос, — засмеялась я.

В тот раз на вечный вопрос ответом было однозначное «быть» — во мне зародилась новая жизнь. И по всему существу моему растеклось чувство абсолютной гармонии с окружающим миром. В ту пору я говорила, что открыла средство от любых распрей и войн — надо, чтобы планета была беременной. Вот только жаль, что любая беременность конечна.

С того момента, как узнал, что я жду ребёнка, Алик стал убеждать меня переехать к ним на Винницкую, он беспокоился, чтобы я, беременная, не оставалась одна в своей квартире. Перебираться не хотелось, но поддалась на уговоры — и так, и эдак, всё мне было тогда хорошо. Я всех любила, даже Э.А. А у Алика появилась безумная надежда, что мы уживёмся. Действительно, в ту пору ничто меня не раздражало, было только одно стремление — чтобы для всех жизнь была так же замечательна, как для меня. Лёнька провозглашал: «Запомни 1976 год! Это год твоей мудрости». Его послушать, так мудрость — это очень просто: чуть-чуть здравого смысла плюс много-много доброты и терпимости. Но только откуда её взять, терпимость, на целую жизнь?

Оглядываясь на тот период, думаю: он был не только самым счастливым, но и самым значительным в моей жизни. А если я была послана на эту землю, чтобы родить Алику ребёнка? И в душе моей спокойствие и удовлетворённость, потому что в подсознании чувство выполненного предназначения? Ведь, казалось, всё было против: мы с Аликом такие разные, немолодые, не собиравшиеся жить вместе; я, активно не желавшая иметь детей. А получилось всё наоборот.

Как будто кто-то где-то всё решил за нас и твёрдой рукой вёл по пути, который мы не выбирали...

С момента своего рождения Наташа необычайно похожа на отца. Ещё из роддома я писала (в ту пору отцы не присутствовали при родах, как теперь): «Если ты вздумал размножаться почкованием (тогда не знали клонирования), то почему я лежу здесь на послеродовой койке? Уж и рожал бы сам». Это сходство с Аликом в Наташе сохранилось навсегда, как во внешности, так и в характере, в ней нет ничего от меня. Я грозила: «Если бы рожали мужчины, точно бы знала, что ты мне изменил».

И с самого начала между ними существовал какой-то особенный контакт. Если Наташа плакала, Алик лучше меня понимал, почему: хочет ли она есть, надо ли её перепеленать, болит ли у неё живот. У него на руках она быстрее успокаивалась. Он знал, холодно ей или тепло, какие распашонки и ползунки надо ей надеть. Моя мама удивлялась:

— Ты женщина и врач, почему же постоянно советуешься с Аликом, как обращаться с ребёнком?

— Потому что он лучше меня чувствует, что ей нужно.

Как-то, когда Наташе было около года, войдя в комнату, застаю такую картину: Наташа стоит в своей детской кроватке, перед ней замер Алик. Отец и дочь «глаза в глаза» внимательно смотрят друг на друга.

— Я сейчас нашёл решение вопроса, над которым давно размышляю, посмотрел на Наташу, и она меня поняла, — сказал Алик. — Ты — нет, а она меня поняла.

Его слова не вызвали у меня смех: Бог их знает, что они друг про друга понимали, у них было особое поле, мне туда доступа не было.

Алик по-своему готовился к рождению ребёнка, читал книжки по уходу и воспитанию маленьких детей. У него была идея — научить Наташу плавать ещё в младенческом возрасте. И в четыре месяца Наташа с явным удовольствием не только барахталась в воде при купании, но «покрывала» вплавь всю длину ванны. (Впоследствии я боялась, как бы тот факт, что папа утонул, не спровоцировал у неё водобоязнь, но Наташа чувствует себя как рыба в воде, это Алик успел.)

Если они вместе играли, нельзя было понять, кто забавляется больше. За 10–15 минут, на которые Алик отрывался от работы,

он умел так её увлечь, что потом, когда уже садился за письменный стол, Наташа продолжала часами играть сама с собой. В отличие от нас с Э. А., ей разрешалось находиться в комнате, когда он работал, она не отвлекала и не раздражала.



Алик и Наташа

Наташа помнит множество эпизодов их общения, которые ускользнули от меня, и, безусловно, может рассказать значительно лучше меня обо всём, что касается их двоих.

Рождение ребёнка во многом преобразило Алика. Он стал мягче, спокойнее, менее скованным. Наташа его «одомашнила».

Когда ей было три года, мы снимали дачу на берегу Москвы-реки. Как-то они с Аликом отправились на речку купаться. Закончив хозяйские дела, я пошла за ними. Подходя к реке, слышу громкий Наташин плач. Кубарем скатываюсь с обрыва — стоит зарёванная Наташа и рядом суетится совершенно растерянный Алик.

— Что такое? Что случилось?

— Да и сам не пойму. Мы поиграли в воде, потом, как обычно, я оставил Наташу на берегу, а сам пошёл поплавать. Как всегда,

входя в воду, нырнул, а когда выплыл, оказалось, что Наташа рыдает навзрыд.

Дочка наша была спокойным ребёнком, такое поведение было ей совершенно не свойственно.

— Крошечка (так Алик обращался к Наташе), что с тобой?

— Папа пропал, папы не стало, — не унималась Наташа.

...Через год Алик утонул...

Что это было? Случайное совпадение? Предчувствие?

И теперь мне предстояло сказать Наташе, что папа никогда не вернётся из похода.

— Ведь ты не будешь говорить четырёхлетнему ребёнку, что её отец умер?! — задала мне риторический вопрос мама.

— Ну как же можно обманывать? Ведь потом, когда узнает, она навсегда перестанет мне верить.

Одно дело — принять решение, другое — его осуществить. Я ломала голову, какие найти слова, чтобы подготовить Наташу к известию, что мы осиротели. Ничего не придумав, приказала себе: «Об этом ты подумаешь завтра. Задача на сегодня — вывезти Алика из Магадана».

Магадан—Сеймчан—Магадан

В Магадане меня встречал раздавленный случившимся Миша Гельман. Это был друг Алика ещё со школьной скамьи. После окончания московского геолого-разведочного института для молодого геолога Гельмана не нашлось места ближе к Москве, чем Магадан. Миша там женился, осел, обжился. Он работал в научном подразделении Северо-Восточного геологического управления (СВГУ) Мингеологии. С ним и списался Алик, когда искал, с кем бы пойти в поход. В том году все обычные друзья-походники как-то разбредились кто куда, группа не сколачивалась, кроме того, Алик давно хотел поехать на Дальний Восток. А тут подвернулась невероятная удача — Миша узнал о группе геологов, которым требовался рабочий-помощник. Алик с радостью ухватился за такую возможность. И теперь помимо горя Миша испытывал ещё и чувство вины, что организовал участие Алика в этой треклятой геологической экспедиции. Мне пришлось утешать Мишу, что он ни в чём не виноват — Алик сам этого хотел и был очень доволен, что едет в такие дальние края.

Экспедиция базировалась не в Магадане, а в посёлке Сеймчан, расположенном, как выразился Миша, «здесь недалеко, в 450–500 километрах». Ну да, по сибирским масштабам это рукой подать. Туда надо бы-

ло добираться на местном небольшом самолётике, который отлетал минут через двадцать, Миша ждал меня уже с билетом на руках. Ещё около часа в дороге, и я наконец добралась до конечной точки моего пути.

Предупрежденный Мишей по телефону начальник базы встретил меня в Сеймчане. Я предполагала, что мы сразу пойдём к Алику, но начальник базы сказал, что сначала отведёт меня к себе домой, чтобы я могла оставить вещи и умыться с дороги. Там он передал меня с рук на руки своей жене, а сам ушёл. Хозяйка дома в долгие разговоры не вступала, указала, куда поставить дорожную сумку, где помыться. Когда я вышла из ванной, на столе меня ждал свежесваренный чай. Жена начальника сказала:

— Я знаю, сейчас Вы есть не хотите, но брусничного чаю с сахаром Вам обязательно надо выпить, чтобы хоть немного подкрепиться.

Хозяйка плеснула чаю и себе, но почти не пила, просто сидела за столом, изредка окидывая меня ненавязчивым внимательным взглядом. Я спросила, знала ли она Алика, она ответила, что видела его пару раз и что на базе он всем полюбился. Она была неговорлива, и я была ей благодарна, что не пытается приличия ради поддерживать застольную беседу. Когда я покончила с чаем, хозяйка сказала следовать за ней в другую комнату, где на диване уже лежали приготовленные для меня одеяло и подушка.

— Но я вовсе не хочу отдыхать. Отведите меня, пожалуйста, к мужу.

— Вам надо набраться сил и быть в форме. Это последнее свидание с ним, потом гроб заколотят. Подождите хотя бы, пока пройдёт шум в ушах.

— Да у меня нет никакого шума в ушах. У вас здесь, правда, что-то гудит как сирена, но это внешний звук. Шум в ушах совсем не такой.

— Нет, уверяю Вас, здесь совершенно тихо. Это гудит у Вас в голове.

— Как Вы можете знать, что у меня в голове?

— Я знаю, — сказала она спокойно и твёрдо.

Она управлялась со мной, как хороший пекарь разделяет тесто — привычно, ловко, без лишних слов и жестов. И, как размякшее тесто, я ей подчинялась. Перед тем как провалиться в тяжёлое забытье, ещё подумала: «Откуда такое умение? У них тут что, люди мрут как мухи?»

Не знаю, сколько времени я проспала. Хозяйка вошла в комнату ровно в тот момент, когда я открыла глаза.

— Вот теперь Вы готовы, — сказала она, — сейчас за Вами придёт муж.

Потом прибавила:

— Может, пока он подойдёт, Вы что-нибудь поедите?

— Нет. Нет, спасибо, я ничего не хочу. А Вы действительно были правы — сирена больше не гудит.

— Пошли пока что попью чаю.

Вскоре появился начальник базы. В отличие от своей жены, он был явно нервозен. Оказалось, сначала мы должны встретиться с прокурором.

— Да зачем мне прокурор? Какие у меня с ним дела? — во мне нарастало нетерпение, всё как-то бесконечно затягивалось.

— Таков порядок. Ваш муж был оформлен в геологическую экспедицию как рабочий-помощник, его смерть идёт под рубрикой несчастного случая на производстве. Необходимо соблюсти формальности.

Прокурор оказался красивым молодым мужчиной «кавказской национальности» в синем форменном френче. Он был собран, подтянут, на скулах под кожей перекачивались желваки. Прокурор сказал, что было проведено расследование, оно установило, что смерть Алика произошла в результате несчастного случая, никто персонально не виноват. В кабинете сидела ещё женщина, прокурор представил её как судмедэксперта. Женщина подтвердила, что на теле не обнаружено никаких следов ранений или ушибов.

— Да мне всё равно, от чего это случилось, важно только одно — его больше нет. Если бы даже Вы привели ко мне кого-то и сказали: «Вот его убийца», мне тоже было бы всё равно. Это вы там — юстиция, милиция — разбирайтесь и судите, как вам положено. А для меня уже ничто не имеет значения.

Лицо прокурора разгладилось, желваки пропали.

— Так можно закрыть дело? Вы действительно не будете настаивать на дополнительном расследовании? — он не мог скрыть вздоха облегчения.

— Зачем? Это что, может вернуть его к жизни?

— В таком случае подпишите вот здесь, что не имеете претензий.

Он так и сказал: «претензий»! Мне подсунили какой-то формуляр, не глядя, я его подписала.

— Мы вашего мужа снарядим по всем правилам, база обеспечит и деревянный и цинковый гробы, вам придётся платить только за перевозку! — уже почти весело распорядился прокурор.

Наконец с формальностями было покончено. Меня провели в помещение, где стоял гроб.

...Алик лежал загорелый, похудевший, выглядел моложе, чем когда уезжал из Москвы. Бронзовый цвет кожи оттенял седину его отросших волос, которые от этого казались ещё краше. Выражение лица было сосре-

доточенным, более жёстким, чем прежде. Пропала интеллигентская мягкость, выступила внутренняя твёрдость характера. Никогда не казался он мне таким красивым, как в тот последний раз.

Я села на заботливо оставленный для меня стул и долго-долго на него смотрела. Без мыслей, без чувств. А потом всё ему сказала. Всё, что не сказала при жизни — как любила, как собиралась жить с ним долго, как берегла какие-то секреты «на потом», на старость, чтобы было что рассказать «на печке».

— Ну зачем же ты ушёл, — говорила я ему, — ведь ты даже не знаешь до конца, какая я женщина. Я так следила за тем, чтобы страсть не угасла, чтобы желание не поухло, не превратилось в привычку, как почистить зубы перед сном. Что же мне теперь с этим делать, куда всё это девать?..

Я ни разу до него не дотронулась, не хотела ощутить холод тела, из которого ушла жизнь. В моей тактильной памяти хранится его тепло... И ещё обещала растить Наташу по заложенным им принципам, сберечь рукописи и не бросить его мать...

Через какое-то время вошли люди и сказали, что пришла пора закрывать гроб цинковыми листами, а я, если хочу, могу поговорить с геологами, которые были с Аликом в экспедиции.

Геологов оказалось двое. Это были мужчины лет под тридцать, такие же загорелые, как Алик, только живые. Они очень нервничали, просто дрожали. Я узнала, что группа состояла из четырёх человек — двух геологов и двух помощников. Одним помощником был Алик, вторым — школьник, только что окончивший 9-й класс. По вечерам, на отдыхе, Алик подкидывал ему всяческие задачи. Подросток открыл для себя математику, о которой раньше не думал всерьёз. Они привязались друг к другу, собирались продолжить контакты после похода и наметили, что, если всё пойдёт по намеченному плану, по окончании школы мальчик поедет поступать на мехмат.

— Парнишка в очень подавленном состоянии, но если хотите, он придёт с Вами поговорить, — предложили геологи.

— Зачем травмировать ребёнка ещё больше? Что же касается математики, то, к сожалению, я не могу ему помочь.

А в голове мелькнуло: «Вот ещё один, для кого встреча с Аликом, возможно, была решающей, и его внезапный уход из жизни может оказаться невыполнимым».

Геологи рассказали о походе.

Сначала на вертолёте их забросили в глухую тайгу. Потом налегке они двигались пешком по заранее разработанному маршруту. Это были совершенно девственные места. За всё время (четыре недели!) они не встретили ни единой живой человеческой души, не увидели ни одного человеческого жилья. Зато однажды на рассвете к палатке, где они спали, подошёл медведь. Они слышали его сопение, натерпелись страху, хоть у них и было ружьё, но никто настоящим охотником не был. К счастью, медведь сам ушёл.

Поход протекал на редкость удачно. Они укладывались в график работ, выполняли задания и двигались дальше по тайге. Согласно плану экспедиции, с вертолёта им сбросили еду и снаряжение в нескольких выбранных по карте точках. Это не так легко и просто — в глухом лесу найти сброшенные контейнеры, но удача им сопутствовала. Дважды за время похода вертолёт смог приземлиться, чтобы забрать наработанные образцы породы. (Об этом я знала — по почте я получила две коротенькие записочки от Алика.) В последний день они должны были по реке спуститься до Сеймчана, и в тот же вечер Алик собирался улететь домой.

Они без труда нашли резиновую надувную лодку, которую им тоже сбросили с вертолёта, надули её и начали сплав. Река оказалась бурной, порожистой, с извилистым руслом, во многих местах заваленной древесными стволами и ветками. То и дело приходилось вылезать из лодки и перетаскивать её на руках.

На очередном повороте лодка уткнулась носом в завал и перевернулась. Трое из них высочили на берег и, не увидев Алика, даже не сразу поняли, что случилась беда. Они начали его окликать, но никто им не ответил. Тогда они стали его искать, но поблизости никого не было. Они нашли Алика минут через сорок на следующем перекате, куда его вынесло течением реки. Но было уже поздно... Всё случилось очень быстро. Когда лодка перевернулась, Алик оказался в воде, и его затянуло под завал. Там, под плотным настилом из деревьев, он, видимо, потерял ориентир и не смог выплыть...

Так, во всяком случае, очевидцы рассказали мне, как Алик погиб...

Мне отдали его полупустой вещевой рюкзак и наручные часы. В рюкзаке оказалась ещё и маленькая книжечка Анатоля Франса на французском языке, это был один из любимейших его авторов.

...У Алика был талант обходиться минимумом вещей, что не мешало ему часто таскать на себе вещи других. При этом ничто полезное, как, например, электрический фонарик или иголка с нитками,

никогда не было забыто. Есть одна очень смешная фотография — они с Никитой Введенской в походе, идут друг за другом, при этом рюкзак Никиты в два раза больше Аликова. Это качество унаследовала от него Наташа — когда мы с ней куда-то едем, у неё вещей в два раза меньше, чем у меня...

Потом мы с Аликом полетели обратно. До Магадана нас отправили на грузовом самолёте. Вместе с нами летело ещё человек десять. В принципе не предназначенный для перевозки людей, самолёт был экипирован откидными сидениями, привинченными к боковым стенкам его брюха, и мы сидели двумя рядами напротив друг друга. Так снимают в кино парашютистов перед прыжком. А посередине, у нас в ногах, стоял гроб. Пассажирами были работники геологической базы. Они летели на Большую землю в отпуск, радовались предстоящему отдыху, и этот гроб с сопровождавшей его женщиной был весьма некстати...

Когда в Магадане я вышла из самолёта и прошла в зал ожидания, вместе с Мишей ко мне навстречу бросился Виктор Паламодов, Паламодыч, как прозвал его Алик. Мы были шапочно знакомы. От неожиданности в первый момент даже не узнала Витю.

— Меня прислал университет. Все совершенно в шоке от случившегося, и я хотел бы лично от себя выразить Вам...

Я на него посмотрела, взгляд мой однозначно выражал: «Заткнитесь». Только без жалостных слов, пожалуйста, иначе от меня останется одно мокрое место! Паламодыч понял и замолк на полуслове. Они мне сказали, что гроб перегрузят в московский самолёт, отлетающий через час, и что, таким образом, мы без промедления полетим дальше. Миша побежал утрясать какие-то детали, а мы остались ждать у выхода на посадку. Прерванный мною на полуслове, Паламодыч не решался открыть рот. У него был какой-то странный вид — в его красивой каштановой шевелюре с намечающейся проседью пучками торчали красновато-рыжие патлы. Чтобы как-то развеять тягостное молчание, я спросила:

— Что у Вас с головой?

— Знаете, сейчас ведь летние каникулы, и мы с детьми играли в театр. Мне позвонили из университета и сказали о случившемся как раз в тот момент, когда дочь красила мне волосы хной. Я ополоснул голову, схватил паспорт и рюкзак, бросился в университет и прямо оттуда в аэропорт. Только в самолёте обнаружил, что краска не смылась, — сказал Витя и невольно смутился, потому что невольно коснулся запрещённой темы.

...Я и сейчас вижу его посреди магаданского аэропорта – рыжий клоун с трагическим лицом...

Тут подошёл Миша вместе со служащим аэропорта. Они сказали, что гроб не смогли внести в самолёт, так как багажное отделение переполнено, и что нас отправят утренним рейсом. Ничего не поделаешь, приходилось задержаться на ночь. Миша предложил поехать к нему, но я попросила оставить меня одну в гостинице, на что они со скрытым облегчением согласились. Для людей, непривычных к смерти, человек в несчастье – что инвалид среди здоровяков, они чувствуют себя неловко. Непонятно, как себя вести – ложно подбадривать или безудержно сокрушаться, о чём можно говорить, о чём нельзя. Конечно, лучше всего до одури напиться, но удобно ли это перед новоиспечённой вдовой, которая им, в общем-то, совершенно незнакомый человек.

И было ещё одно – я чувствовала, они хотят обсудить, что же произошло на самом деле, в этой истории не всё было ясно. Алик был опытным и осторожным байдарочником, что случилось, почему из четырёх человек погиб он один, сидевший на корме, то есть дальше всех от завала? Я же ни в чём подобном разбираться не желала. На фоне ужаса и необратимости случившегося, не хотела теревить душу Алика мелким дотошным расследованием, которое в конечном счёте не могло изменить трагического конца. Мне легче было думать, что это рок судьбы, а не чья-то злая воля...

Миша с Витей уехали в город, я осталась коротать ночь в гостинице. Сна не было. Меня не покидало странное возбуждение, всё пыталась представить себе, как это было под завалом. Казалось, ещё небольшое усилие, и мне откроется, что пережил Алик в последний момент.

Понимал ли, что погибает?

Что он завещал?

Какой была его последняя мысль?..

Ответов на эти вопросы у меня нет и по сей день...

И ещё были какие-то смутные полувидения-полувопросы, которые гнала от себя. Почему так нервничал начальник базы, почему не мог скрыть своего волнения прокурор, почему просто дрожали от страха геологи? И эта мудрость и опыт смерти у жены начальника базы...

Много-много лет спустя я внимательнее рассмотрела наручные часы Алика, которые мне отдали вместе с его рюкзаком. Они остановились 12-го числа. А мне сказали, что лодка перевернулась 14-го. Почему? Алик был очень чуток ко времени. Эти, для нас достаточно дорогие, часы он недавно купил, очень им радовался, они безукоризненно работали. Разница в два дня не могла быть случайной. Что же произошло на самом

деле? Если продолжить размышления в этом направлении, по-другому читается и последняя его записка, полученная мною из Сеймчана. В первой он писал, что доволен походом, и было несколько обычных нежных слов ко всем членам семьи. Во второй, совсем коротенькой, он писал только об Э. А., очень о ней волновался, просил меня о ней позаботиться, будто предчувствовал, что не вернётся, и знал, что Наташу-то я не брошу, а вот о матери — просил...

Как-то, живя уже во Франции, я включила телевизор, который смотрю вообще-то нечасто, и попала на передачу о России. Был репортаж ни больше ни меньше как о Сеймчанской геологической станции! В репортаже показали вымерший посёлок, когда-то процветающая геологическая станция прекратила своё существование. Что это — случайное совпадение, обычная сейчас, к несчастью, разруха во всей стране или же посланный мне знак Божьей кары?..

Но хочется верить, что всё было так, как рассказали геологи, что в последний месяц своей жизни Алик был счастлив. Как я сказала тогда сеймчанцам: «Если это должно было случиться, то хорошо, что произошло в конце похода, а не в его начале»...

...За время отдыха у Алика всегда вызревали новые идеи, после похода он бросался к чистому листу бумаги как голодный — к корке хлеба.

— О чём ты задумался, Алик, сидя на корме резиновой лодки, что придумал, что открыл?..

Магадан—Москва

Наутро мы с Паламодычем были первыми у выхода на посадку. Первыми вошли в самолёт. Следовавшие за нами пассажиры быстро заполнили салон, что называется, под завязку. Потом все мы долго сидели, ожидая взлёта, но что-то задерживало отправление. Наконец в салоне появились две стюардессы. Они прошли непосредственно к нам с Паламодычем и очень вежливо пригласили проследовать с ними к кабине самолёта, потом также вежливо предложили спуститься из самолёта на землю. Там на поле нас дожидались два служащих аэропорта, которые объяснили, что гроб не вошёл в багажное отделение, потому что его загружали последним, а вещи других пассажиров разместили таким образом, что не предусмотрели для него адекватного пространства. Когда мы поняли, в чём дело, возражать и возмущаться было поздно — наш самолёт уже бежал по взлётной полосе. Перед нами извинились, сказали, что в следующий раз, т. е. на ночной рейс, загрузку багажа начнут с гроба, и предложили

несколько часов до прилёта московского самолёта перекантоваться в гостинице, где для пассажиров этого рейса были зарезервированы все места.

Меня слегка покачивало. Между Москвой и Магаданом восемь часовых поясов, сбился мой биологический ритм. Я не могла бы сказать, сколько суток не спала, сколько не ела. Паламодыч ориентировался лучше меня и решительно сказал, что мы должны пойти поесть. Ни ресторана, ни столовой в аэропорту не существовало, но был буфет, где торговали в основном водкой, а из съестного предлагали варёные куриные ножки. Ни о чём меня не спрашивая, Паламодыч взял две порции. И тут я почувствовала, что очень голодна. С жадностью набросилась на эти ножки, и было ужасно стыдно своего зверского аппетита — ну как же могу есть, когда Алик умер?! И как бы самой себе выдавала индульгенцию — необходимо подкрепиться, иначе не хватит сил добраться до Москвы. «Но в память об этой слабости уже никогда в жизни курицу в рот не возьму!» — заклинала свою совесть.

...Как бы не так — ем как миленькая!.. Всё проходит, и не проходит ничто...

Потом в гостиничном номере мы спали как убитые, вставали, шли в буфет, ели всё те же куриные ножки и опять заваливались спать. Пару раз в дверь стучала дежурный администратор и спрашивала, не готовы ли мы освободить номер, так как прибыли пассажиры московского рейса, и гостиница была переполнена. В конце концов мы покинули номер, к радости дожидавшихся под дверью следующих постояльцев.

Когда в аэропорту мы предъявили свои билеты для регистрации, выяснилось, что нас давно ждут, и сразу же, до объявления на посадку, провели на взлётное поле. Там возле самолёта стоял транспортёр с гробом Алика. Смущённые служащие аэропорта сказали, что специально привели нас показать, что пытались сделать всё от них зависящее — загрузку багажа на этот раз действительно начали с гроба, но размеры его не соответствуют стандартам и он не входит в самолёт. Гроб невозможно было внести и развернуть, чтобы поставить вдоль пространства багажного отделения, потому что он оказался слишком длинным, по этой же причине оставить его в поперечном положении тоже не получалось — тогда не закрывались двери люка... Да, не пожалели сеймчанцы материала для Алика, просторное цинковое ложе ему соорудили!.. Нас заверили, что это можно будет исправить на следующее утро, когда откроются мастерские, и тогда цинковую оболочку укоротят и уменьшат с боков.

В гостиницу возвращаться было бессмысленно — мы знали, что там нет свободных мест, и на транспортёре вместе с гробом поехали на склад.

Склад представлял собой отгороженную часть взлётного поля, внутри которой под навесной крышей был деревянный настил размером примерно в 200 × 15 метров, заставленный прибывавшим на самолётах грузом, и метрах в двадцати от этого сооружения стояла будка для сторожей.

Сторожей было трое. Они играли в карты и грызли яблоки. Предложили яблоки и нам, сказав, что они всё равно сгниют на складе. А вот остаться в дежурке не разрешили, сославшись на то, что это запрещено правилами. На самом же деле было очевидно — на чёрта нужны им, в их тёплой компании, эти два похоронщика. Что ж, их можно было понять. Они и так уже проявили чрезвычайную любезность, найдя для гроба место под крышей. Мы поплелись туда же и устроились рядом с Аликом.

Было темно, тихо и сыро. Накапывал мелкий тёплый дождик. Мы сидели посреди картонных коробов с холодильниками, телевизорами и какими-то другими приборами. Почти вся техника была сгруппирована под навесом, лишь несколько коробов там и сям стояли во дворе склада под открытым небом. Там же стояли ничем не прикрытые деревянные ящики с яблоками. Под дождём яблоки начали гнить, от них шёл сладковатый удушливый запах. Я представила себе, как эти яблоки везли на поезде из Молдавии или Крыма до Хабаровска, потом на самолёте доставили сюда. И теперь они гнили. «Ну какая экономика может такое выдержать? — думала я. — И какой болью это зрелище отозвалось бы в душе Алика».

* * *

Не знаю, предвидел ли Алик, что СССР рухнет уже при жизни нашего поколения, но что экономика выдыхается, что страна неотвратимо движется в тупик, представлял себе очень хорошо. И воспринимал происходящее как личную смертельную болезнь. Еврей по паспорту, он ощущал Россию своей единственной Родиной, и был привязан к ней со всей страстностью своей души.

С невыразимой болью он говорил о том, как хищнически вырубаются леса и мелеют реки, как природа не выдерживает разбоя, который учиняет ей ничем не дорожащее и ни за что не несущее ответственности советское чиновничество.

Как-то он пришёл домой в большом возбуждении:

— Мне предлагают уйти из университета и полностью переключиться на экологию. Обещают кучу денег и оплачиваемые поездки куда и сколько захочу. Что думаешь?

— Куча денег нам бы очень пригодилась и, при формальной обязанности ездить по стране, тебе морально легче было бы удирать от родной мамочки. Но вся эта забота правительства об экологии — чистая показуха. Последнее слово всегда будет за кем-то «сверху». Сейчас ты сталкиваешься только с университетской администрацией, и то сколько нервов на это тратишь. Но хоть за письменным столом ты человек свободный и ни от кого не зависишь. Работая в экологии, ты будешь связан по рукам и ногам, будешь биться, переживать, а сделать всё равно ничего не сможешь.

Как всегда, молчание было мне ответом. Алик удалился размышлять в другую комнату... Из МГУ он не ушёл...

* * *

Не только беды России воспринимал Алик как личное горе. Он будто держал руку на пульсе планеты, и каждый его срыв воспринимал как удар, нанесённый непосредственно ему.

Расскажу об одном из многочисленных случаев, которым была свидетельницей.

Как-то мы с ним гуляли в лесу и пребывали, как мне казалось, в прекрасном расположении духа. Я упивалась видом всяких там цветочков, листочков и бабочек. Мельком взглянув на пребывавшего, по своему обыкновению, в глубокой задумчивости Алика, неожиданно обнаруживаю, что у него совершенно несчастное лицо.

— Что случилось? В чём дело?

— Как можно радоваться, да и просто жить спокойно, когда в это же время Пол Пот уничтожает миллионы людей. Мир «не замечал», когда совершался геноцид армян в 1915 году, потом уничтожение евреев во Второй мировой войне, сейчас то же самое происходит в Камбодже, а мировая общественность, как и тогда, только руками разводит.

...Его касалось всё, всё пропускал через себя...

* * *

Когда люди из нашего окружения стали покидать страну, относительно себя Алик говорил: «Я поеду в последнем вагоне последнего поезда, и только в случае если будут насильно высылать. Чем Америку или Израиль, выбираю Биробиджан». А я считала — нужно уезжать, и потихоньку «давила». Следует сказать, мне очень помо-

гала в этом советская власть — обстановка в стране, и в частности в университете, становилась всё гнуснее. И ещё у меня был сильный аргумент — я говорила, что мы должны сделать это для Наташи. Алик вздыхал, молчал, но какие-то шаги предпринимал. Его приглашали на постоянную работу в Польшу, и, после долгих обсуждений, мы решили, что это может быть промежуточным вариантом — уехать на длительный срок в страну Варшавского Договора, а там — по обстоятельствам, ехать дальше на Запад или же вернуться в Союз. Вставал, как всегда, вопрос о его матери, с которой в случае отъезда мы должны были бы жить вместе. Я брала на себя обязанность с ней ужиться, в чём Алик сильно сомневался. Он попросил, чтобы я его не дёргала и дала возможность спокойно закончить работу над книгой под предположительным названием «Введение в суперматематику», которую планировал завершить к весне 1981 года... Не успел...

* * *

Алик вполне мог бы записаться русским. Когда в свои 16 лет он пришёл оформлять документы на паспорт, его вызвал к себе начальник отделения милиции и спросил:

— У Вас же отец — русский, почему в своём заявлении Вы выбираете еврейскую национальность?

— Меня вырастила мать-еврейка.

— Но Вы отдаёте себе отчёт, что, записываясь евреем, обрекаете себя на большие осложнения в жизни, которые имеете все правовые основания избежать? — не унимался представитель власти. (Не от доброты сердечной и не из-за особого расположения к Алику вёл он эти переговоры: тогда была государственная политика — всеми возможными способами снизить официальную численность евреев в СССР.)

— Живут же как-то евреи в этой стране, проживу и я, — ответил Алик.

...Всю жизнь он платил за это решение, и никогда не усомнился в своём выборе...

...Если бы меня попросили назвать главные черты его характера, я бы назвала благородство и мужество...

* * *

Однажды я спросила Алика:

— Ты за доброту прощаешь Валерке Никольскому пьянство?

Его ответ меня ошарашил:

— Валерка пьёт, чтобы забыться, потому что погряз в диссидентском движении.

— Что значит «погряз»? Ты ведь тоже участвуешь в этом движении.

— Я? Нет, никогда, — необычайно живо возразил Алик. — Я только один раз подписал письмо в защиту своего товарища и коллеги (имелось в виду письмо в защиту Есенина-Вольпина).

— А почему? Ты ведь тоже ненавидишь существующий режим.

— Потому что не нахожу у диссидентов положительной программы. Все борцы за счастье народное несли этому самому народу только горе и потоки крови. Нет большой разницы между Пугачёвым и Ульяновым, все они преступники.

— А как же декабристы?

— Ну, это святые идеалисты. Им повезло, восстание было задушено на корню, они ничего не успели натворить.

— Значит, своей невинностью они обязаны царю?

— Да. Не будь жёсткости Николая I, не было бы святости декабристов.

— То есть нет исключений, всегда «русский бунт бессмысленный и беспощадный»?

— Да, и Пушкин это прекрасно понимал. Не только по дружбе сердечной навестил его в Михайловском Пущин. Он приехал ещё и по заданию Тайного Общества, чтобы рассказать о готовящемся восстании, а Пушкин отказался в нём участвовать. И Николай I об этом знал, поэтому приблизил и обласкал. Известно, что во время следствия по делу декабристов он вызвал Пушкина к себе и они долго беседовали наедине. Мы не знаем, что сказал Пушкин царю, как представлял себе создание для народа достойных условий жизни, и для всех нас это большая потеря.

— Но ты же умный, придумай положительную программу.

— Я много размышлял, но ничего не получается, при любом раскладе, всегда народ страдает.

— А если бы ты смог предложить конструктивную программу, ты бы ушёл в политику?

— Безусловно. Без всякого сомнения.

— Значит, ты убегаешь в математику, как в пьянство?

Несколько поколебавшись, Алик ответил: «В какой-то степени — да».

* * *

Ночь отмеряла часы своего царствования на складском дворе. Мы с Паламодычем всё также тихо сидели возле гроба.

— Знаете, — нарушила я молчание, — это не случайно, что мы никак не можем улететь. Ведь подумать только — нас трижды снимали с самолёта! Да ещё в Домодедове меня пытались отфутболить. Просто Алик не хочет отсюда уезжать. Что ему делать там, в этой душной Москве, откуда он всегда стремился сбежать, где его не ценили, всячески мешали жить и работать. Он, учёный мирового уровня, выпустивший множество аспирантов и докторантов, создавший свою школу, наметивший новое направление в науке, формально не был даже профессором, так и ушёл из жизни старшим научным сотрудником! И вот теперь в университете оплакивают его смерть, Вас прислали, деньги выделили. Что, я должна быть за это благодарна?! А я хочу всех их послать к чёрту! И предупреждаю, не допущу никакого присутствия официальных лиц на похоронах, просто выставлю. Вы уж лучше предупредите, чтобы не смели являться. Алик жил среди них как в тюрьме, и, по иронии судьбы, здесь, в краю ГУЛАГа, чувствовал себя свободным человеком. Представляете, — продолжала я, — как было бы хорошо похоронить его здесь, на высоком морском берегу, поставить пирамидку, какие ставят на могиле неизвестного солдата, потому что он, действительно, всю жизнь воевал. Тихо, неброско, но от этого не менее самоотверженно и мужественно. А на верхушке пирамидки установить не пятиконечную звезду, не крест и не могоновид, а что-то вроде лампочки, да и саму пирамидку покрыть фосфоресцирующей краской, чтобы она светилась, как маяк, и её видели идущие в Магадан корабли...

— И вы так поступите? Решитесь? — спросил Паламодыч.

— Нет, не решусь, — честно призналась я. — Мне не выдержать напора общественного мнения, кишка тонка. А для извинения собственной слабости у меня есть предлог — я должна привезти Алика его матери, чтобы она попрощалась с сыном...

И мы снова надолго замолчали...

Дождик всё накрапывал, было влажно и душно. Казалось, каждая капля, как маленький молоточек, прибавляет воздух к земле. И вместе со сгущающимся воздухом всё сильнее становился запах гнили. Яблоки разлагались с удивительной быстротой. И мы, на этом аэрофлотском складе, были

участниками Божественной Комедии, той её части, где «всё» превращается в «ничто»... С тех пор я знаю запах смерти — смерть пахнет гниющими яблоками...

Сладковатый запах вызывал дурман, в голове всё начинало путаться. Наверно, подобное испытывают курильщики кальяна... Я встала с деревянного настила, на котором мы сидели, сказав: «Пойду немного пройду».

Между складом и собственно взлётным полем было промежуточное пространство, заросшее какой-то низкорослой растительностью. Я пошла по этой «нейтральной полосе», споткнулась и упала. Было не больно, но очень обидно. И тут меня прорвало. Завыла в голос. Каталась по земле, билась в истерике, кричала и голосила. Потом забылась. Не знаю, сколько времени это продолжалось. Очнувшись, обнаружила, что лежу на животе, зарывшись лицом в землю. Нос щекотал какой-то необычайный запах. Это был терпкий, острый, будоражащий и свежий запах, его хотелось вдыхать до бесконечности. Вокруг была крошечная тьма, но почему-то я знала, что запах этот зелёный, как хлорофилл. Так вот он — запах тайги, за которым уезжали ребята-туристы! За этим запахом убегал Алик! Для меня он стал запахом жизни, я жадно вбирала его в себя. И, будто на экране сверхсовершенного медицинского прибора, видела, как очищаются мои мозги, как спадает обволакивающая их пелена. Вот мозги уже полностью ожили, запульсировали от притекающей к ним свежей крови, а я всё вдыхала и вдыхала этот животворный запах, и не хотела остановиться. Я запасалась на будущее, на всю оставшуюся жизнь...

Наконец я поднялась, разорвала на себе нижнюю рубашку и вытерла лицо, на котором смешались слезы, сопли, слюни, как-то автоматически отметив, что могу так хорошо обтереться, потому что рубашка из чистого хлопка, и что ещё раз прав Алик, отучивший меня от нижнего белья из искусственных тканей — что бы я сейчас делала, в нейлоновых-то кружевах?! — и пошла к складу.

— Где Вы пропадали так долго? — в голосе Паламодыча слышалась тревога.

— Училась жить дальше, — ответила я. Потом сказала:

— Мы с Вами понапрасну теряем время. Ведь когда начнут работать мастерские, пока там будут уменьшать объём гроба, мы не успеем на утренний рейс и потеряем ещё полдня.

— Так что же делать? Я мог бы исправить всё сам, меня и выбрали, потому что в университете знали, что способен что-то делать своими руками, а в непредвиденных обстоятельствах это могло оказаться полезным, но ведь у нас нет инструментов.

— Значит, их надо достать.

Я пошла к сторожам. Они сказали, что у них инструментов нет, но, возможно, мне могут помочь пожарники. Их ангар находился метрах в трёхстах от склада. Пошла туда. Пришлось долго стучать — пожарники «спали как пожарники». Наконец проснувшись и выслушав мою просьбу, они тут же снабдили меня всяческими молотками, кувалдами, зубилами и ещё бог знает чем. Они искренне сожалели, что сами не могут помочь, потому что во время дежурства не имеют права ни на шаг отойти от своего ангара. Со всем этим инструментом я вернулась под навес, и мы принялись за работу.

Паламодыч бил кувалдой по цинковому гробу, чтобы уменьшить его объём за счёт пустот между ним и гробом деревянным. Под ударами цинковые листы прогибались и скреплявшие их гвозди вылетали, от чего нарушалась целостность гроба. Надо было заново цинковые листы сшивать. Мы с пожарниками не предусмотрели, что помимо инструментов понадобятся ещё и гвозди. Будить их ещё раз не хотелось, и на лежащем во дворе валуне, как могла, я выпрямляла вылетевшие гвозди. Паламодыч и вправду оказался умельцем, этими кривыми гвоздями он сумел заколотить образовавшиеся щели. К утру ладони у него были в волдырях, но гроб соответствовал нормативным стандартам.

Ничто больше не помешало нам покинуть Магадан. Утренним рейсом мы улетели.

Конец и начало

В Домодедово нас ждали 3–4 молодых математика, сопровождавшие похоронный автобус. Наверное, я должна была бы их знать, но в тот момент никого не узнавала. Алика повезли в морг при Институте Склифосовского.

Был июль 1980 года. Москва готовилась к Олимпийским играм. Повсюду стояли милицейские посты, москвичам предложили по возможности уехать из города, въезд в столицу строго ограничили, на пустынных улицах редки были автомобили, т. к. движение транспорта лимитировали. Наш автобус многократно останавливали и проверяли документы.

...Да, неудобным человеком был Алик в жизни, неудобным остался и в смерти...

Значительно позже я узнала, что организовали специальную «Комиссию по похоронам Березина», и задним числом оценила любовь, внимание и заботу, которые были проявлены.

Всем, кого в тот момент не заметила и не поблагодарила — низкий поклон...

На следующий день были похороны. Со дня смерти Алика прошло много времени, и прощание возможно было только перед закрытым гробом. Но Э. А. сказала, что хочет увидеть сына, и попросила, чтобы для неё гроб открыли. Мы с ней вдвоём прошли в помещение морга. На лице Алика уже проступили сине-лиловые пятна. Э. А. подошла к гробу и начала ласкать это изменившееся лицо. Кожа под её пальцами стала отваливаться. Она перемещала руку на другое место, и новые куски лица отпадали.

— Господи, как же ей не страшно? — прошептал стоявший возле меня рабочий морга.

— Ей не страшно, — также шёпотом ответила я, — она патологоанатом.

Потом гроб закрыли, и началось прощание. Оно было теплым, искренним и невыразимо горьким. Присутствовали только близкие Алику и мне люди. Первым говорил Володя Тихомиров, и он сказал всё, что я, как член семьи и не математик, сказать не могла — что Алик был на подъёме, на взлёте, что годы придали ему мудрости, не притупив творческого потенциала, что среди сверстников он сохранился лучше многих и в работе своей оставался молодым, а научная общественность только начала понимать истинную ценность его работ, и он был на пороге славы... Потом говорили Никита Введенская, Виктор Паламонов, Рената Каллош, кто-то ещё, но, погружённая в свои мысли, больше никого не слышала...

...Не дожил, не долюбил, не увидел взрослой свою дочь, не успел сделать всё, на что был способен, не дождался заслуженного признания...

А потом надо было жить дальше. Я перебралась на Винницкую, так как нельзя было оставить Э. А. одну. Мы не ужились с ней при жизни Алика, теперь нам предстояло жить вместе, когда его не стало.

Попытались навести порядок в его бумагах, разобраться в рукописях. Приходили друзья-математики и ученики Алика, стал вопрос о посмертном издании его незаконченных трудов.

...Уже после смерти Алика заботами Кириллова, Паламонова, Шубина, Шварца, Огиевского, Фрадкина, Лейтеса были изданы «Introduction to Supranalysis», «Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными», «Уравнение Шрёдингера»...

Прояснив для себя, что предстоит сделать в память об Алике, математики разъехались догуливать летние каникулы.

Мы с Э. А. остались вдвоём.

Видеть никого не хотелось, телевизионная трескотня раздражала, мы не включали даже радио. Разложили, как могли, не понадобившиеся на первых порах бумаги Алика, прибрали в квартире. Стало светло, пусто и никак. У меня было впечатление, что даже пыль не собирается. Кажется, мы находимся внутри стеклянной призмы с толстыми прозрачными стенками, не пропускающими никаких проявлений земной жизни. Да они были и не нужны. Будто мы уже переместились в Чистилище, и только не заметили перехода в другой мир...

В прежней жизни большую часть своего времени Э. А. проводила за чтением. Но теперь читать не могла — не способна была сосредоточиться ни на чём, кроме своего горя. Я понимала, что нельзя её оставлять наедине с собственными мыслями, и предложила читать ей вслух. Э. А. любила Чехова. Его сдержанность, интеллигентность, скрытый юмор, пальпируемые за банальными словами слои глубоких противоречивых чувств были ей близки. Мы остановились на чеховских рассказах. Э. А. особенно любила «Ионыча», его мы перечли несколько раз. И ещё нам обоим был созвучен Мандельштам:

...Твердь умолкла, умерла.
С колокольной отуманенной
Кто-то снял колокола.
И стоит осиротелая
И немая вышина,
Как простая башня белая,
Где туман и тишина...

А потом мы шли на кухню, пили вечерний чай, нагружались прописанными обоим транквилизаторами и расходились по своим комнатам. Тогда я не знала, что совсем другие лекарства нужно было давать Э. А.

...Советская психиатрия запятнана делами диссидентов, когда их сажали в психушки за невозможностью отправить в тюрьму. Но есть менее громкое, но весьма пагубное для широких слоёв населения влияние государственной политики на эту область медицины. Согласно официальной морали, строитель коммунизма по определению не мог не являться оптимистом, и понятие депрессивного состояния практически исключили из медицинского обихода. Только во Франции я узнала, что депрессия у пожилых людей часто ведёт к сенильному склерозу. Э. А. надо было лечить не транквилизаторами, а антидепрессивными средствами...

В конце лета я уехала на несколько дней в Ригу, чтобы забрать Наташу. В моё отсутствие Э. А. вышла на улицу и не смогла найти дорогу до-

мой. Она забыла свой адрес и фамилию, помнила только, что у неё есть сын Алик и просила его позвать. По возвращении в Москву я отыскала её в больнице им. Кащенко.

...Э. А. часто цитировала Пушкина: «Не дай мне Бог сойти с ума. Нет, легче посох и сума»... Молитва её не была услышана...

Она пережила Алика на три с половиной года...

Как известно, необычайные встречи случаются в жизни. Мне суждено было узнать, что не менее странные совпадения бывают и в смерти.

Недели через две после похорон позвонила Светка:

— Что ты сидишь как в небытии. Нельзя же так. Жизнь продолжается.

— Ну и как же продолжается жизнь?

— Да вот, Высоцкий умер, — сказала Светка, и сама смутилась от прозвучавшего неудачного каламбура...

На меня же напал безудержный смех. И это известие, как контршок, вернуло меня к реальной жизни.

Через несколько месяцев, по делам, связанным с изданием «Введения в суперанализ», понадобилась выписка из наследственного дела Алика.

...В те времена считалось, что у советского человека не должно быть никакой частной (тогда говорили «личной») собственности. Поэтому единственным учреждением, занимавшимся наследственными делами граждан Москвы и Московской области, была нотариальная контора № 1, вернее один из четырёх её отделов. Контора располагалась на Кировской в доме постройки начала XX века. Наследственный отдел занимал последний, четвёртый этаж. А если учесть, что потолки в этом здании были под 5 метров, то добраться туда при отсутствии лифта было, как подняться пешком по меньшей мере на 7-й этаж. И тут оказывалось, что на этом этаже, в отличие от остальных, нижерасположенных, темно от народу. На столицу и её предместья всё-таки набиралось достаточно людей, обладавших каким-то материальным или интеллектуальным достоянием, чтобы их наследники так заволокли просторные коридоры старого здания, что яблоку негде было упасть.

Мои посещения нотариуса протекали по следующей схеме. После работы я, как правило с тяжёлыми продуктовыми авоськами, тащилась на этот четвёртый, а практически седьмой-восьмой этаж и записывалась на приём. Затем на назначенный день брала отгул и часами просиживала в очереди, после чего принимавшая посетителей нотариус в две минуты под идиотским предлогом меня отфутболивала. В конце концов я устроила скандал. На пике нашей стычки нотариус схватила меня за плечо и при-

казала идти вместе с ней куда-то в глубь коридора, где висела табличка с надписью «Посторонним вход запрещён». Мы вошли в помещение размером примерно в 16 квадратных метров. Две трети его от пола до потолка занимала гора из сваленных в кучу папок, в каждой из которых находилось по индивидуальному наследственному делу. Мебель была представлена единственным венским стулом со сломанной спинкой.

— Вот, — сказала мне блюстительница права, — среди этих папок находится нужное Вам дело. У нас нет архивариуса. Хотите — ищите сами.

Она ушла, а я принялась перебирать и перетаскивать папки. Так сгибалась и разгибалась часа четыре. В какой-то момент с горы свалилось одно из дел, я чуть на него не наступила! На папке было написано: «Владимир Семёнович Высоцкий». Бережно её подняла и положила на венский стул. В конце концов нашла дело Алика. Тогда села на этот полусломанный стул, положила обе папки себе на колени и стала их тихонько покачивать, как убаюкивают детей. Я сидела и думала о них, таких разных. Один — народный поэт-певец огромной страны, другой — известный во всём мире учёный, оба евреи-полукровки, до последнего вздоха преданные своей Родине — России, страдавшие вместе с ней её бедами и прожившие свои недолгие жизни под гнётом государственной власти, которая относилась к ним, как мачеха к неугодным ей пасынкам...

...А вокруг валялись другие папки, с другими судьбами, и передо мной было материализованное воплощение постулата «перед смертью все равны»...

Потом я встала, оставила Володю Высоцкого на стуле и пошла оформлять наследственные бумаги...

И была ещё одна несостоявшаяся встреча с Высоцким, когда захоранивала урну.

Согласно семейной традиции Алика кремировали. У нас была могила на Востряковском кладбище. Но мне казалось, что будет правильным, если хотя бы после смерти Алик полежит один и отдохнёт от всех. Официально на Востряково новые захоронения были запрещены. Тут снова помог университет. Всё тот же Паламодыч принёс мне соответствующую бумагу, отпечатанную на официальном бланке, с гербовыми печатями и за подписью ректора. После неизбежной беготни между кладбищенской администрацией и московскими властями разрешение было получено.

Я выбрала место для могилы на пересечении двух неглавных дорожек. Мне представлялось, оно больше всего подходит Алику — один, но не одинокий, там время от времени проходят люди, слышны их голоса, он как бы будет продолжать участвовать в жизни.

Ставить железное ограждение по периметру участка не хотелось — Алик и так всю жизнь был за решёткой, пусть хоть в смерти полежит на свободе. А сама могила мне виделась как реплика русской природы, которую Алик нежно любил, среди которой много бродил... Всю площадь участка преобразили в высокий, покрытый зелёным дёрном холм, сохранив как бы прорастающие из него берёзу и липу.

В качестве надгробного камня хотелось положить простой необработанный валун, какие встречаются на среднерусских просторах. Но тут оказалось, что приобрести его чрезвычайно трудно. Кто-то сказал, что для могилы Владимира Высоцкого геологи притащили на себе из тайги метеорит. Марина Влади, жена Высоцкого, хотела его установить, но родители поэта воспротивились и предпочли нечто безумное, с гитарой и вздыбленными конями. «Попроси Марину уступить тебе метеорит», — посоветовали друзья. Вначале я загорелась, но потом подумала: «Метеорит этот уже пропитан любовью геологов к Высоцкому. Алик достоин своего, личного камня, пусть он и не будет вестником с неба». В конце концов договорилась с рабочими кладбища, и они нашли валун, какой искала. Его уложили на правой стороне холма, наискосок от деревьев.

В таком виде могила простояла больше десяти лет. Но земляной холм надо было много раз подправлять, так как он оседал. Зелёный газон требовал регулярного ухода. Стало очевидным, что без постоянного присмотра могила быстро разрушится. А я не вечная, что до Наташи, то она далеко, в другой стране.

Поразмыслив, решила насыпной холм закрыть мрамором. Всезнающие рабочие кладбища сказали, что могилу взрослого человека следует облицовывать мрамором чёрного цвета. Но у Алика была светлая душа ребёнка, и я предпочла мрамор белый. Получился светлый цоколь высотой в полметра, со скошенными, несимметричными, но гармоничными с окружающим ландшафтом боковыми стенками. Цоколь как бы естественно поднимается из земли.

Валун положили на прежнее место, в правой стороне цоколя.

Во всю протяжённость его верхней поверхности выложили две полосы из того же белого мрамора, но разбитого на небольшие, неодинаковые по размеру куски, — как бы абстрактный образ двух поверженных берёз на могиле Березина.

А на левой стороне белого цоколя, будто вырываясь из земли и прорывая мраморную облицовку, взмываются высоко в небо два живых строй-

ных дерева. В их основании выбита надпись

БЕРЕЗИН
Феликс
Александрович
математик
1931–1980

Ну, вот и всё... Земной путь Алика завершился...

* * *

...Однажды на кладбище, по дороге к могиле, меня обгоняла группа женщин. Одна из них, обращаясь к своим спутницам, сказала:

— Сейчас мы идём к Березину...

Я невольно включилась:

— Тоже иду к Березину. Вы какое отношение к нему имеете?

Женщина смутилась:

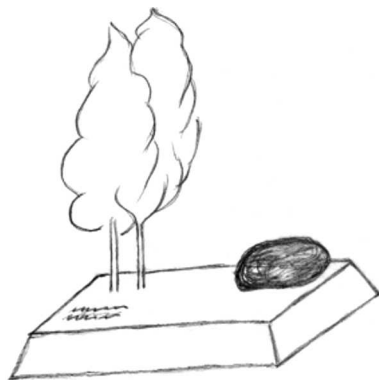
— Да нет, мы его не знаем, это ориентир.

А я подумала: «Таково предназначение Алика — указывать направление».

И приходя на могилу, не покоя ему желаю, а успокоения, и кричу ему:

— У тебя всё больше последователей! К тебе пришло признание! Тебя поняли и оценили!

Ля-Рошель,
июль 2005 г.



Ч А С Т Ь ІІІ

ВОСПОМИНАНИЯ ДРУЗЕЙ, КОЛЛЕГ И УЧЕНИКОВ

ОБ АЛИКЕ (ФЕЛИКСЕ АЛЕКСАНДРОВИЧЕ) БЕРЕЗИНЕ

В. М. Тихомиров

В 2007 году в издательстве World Scientific вышла книга «Felix Berezin». Для меня сочетание «Феликс Березин» звучит необычно. Человека, которому посвящена книга, друзья звали Аликом, а остальные — Феликсом Александровичем Березиным.

Мы познакомились в мои студенческие годы, но наиболее тесно общались с 1962 по 1966 год, когда оба работали на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ. В своем рассказе о Феликсе Александровиче Березине мне хотелось бы обозначать и контуры изменявшегося времени, в котором нам обоим приходилось жить.

Алик никогда не делился со мной ничем личным, в частности тем, как и почему он выбрал мехмат. И лишь после его гибели я узнал, что, окончив школу в 1948 году, он сначала пробовал поступать на физический факультет. Тогда многие мечтали стать физиками. Для них, казалось бы, прямая дорога вела на физфак МГУ. Но все было не так просто.

В ту пору физфак переживал тяжкие времена. Теория относительности и квантовая механика были у факультетских вершителей судеб на идеологическом подозрении как космополитические учения; крупнейшие ученые вынуждены были уйти с физфака. При приеме на факультет жестко проводилась антисемитская линия. Алик подал документы на физфак, но, как можно было ожидать, принят не был. Тогда он решил поступать на мехмат. Это решение не было случайным: Березин участвовал в школьных математических кружках и в математических олимпиадах. На механико-математический факультет он был принят.

На мехмате Алик был одним из лучших студентов курса: Израиль Моисеевич Гельфанд, в семинаре которого стал заниматься Березин, без колебаний называл его первым.

Алик учился очень хорошо, в год окончания университета у него появилась первая публикация в «Докладах АН СССР» с глубоким результатом, заложившим основу его выдающейся кандидатской диссертации, но рекомендации в аспирантуру он не получил. Он был направлен по распределению в одну из московских школ. Помнится, это была вечерняя школа рабочей молодежи.

Вторая работа Березина была написана совместно с Ильей Пятецким-Шапиро. Илья учился двумя курсами старше. К моменту окончания мехмата он выполнил несколько выдающихся работ, и вскоре стал восприниматься как один из самых замечательных молодых математиков своего времени. Но и его не рекомендовали в аспирантуру. По окончании университета Пятецкий-Шапиро преподавал в Калужском педагогическом институте.

Случаи с Березиным и Пятецким-Шапиро не были исключением. Исключением было лишь то, что ректор МГУ Иван Георгиевич Петровский при первой же возможности старался вернуть в университет особо зарекомендовавших себя в науке, но отвергнутых факультетом молодых людей. Возможности ректора были не безграничны: прием на преподавательскую ставку требовал поддержки партийных структур, а они пожелания ректора могли и проигнорировать. И в исключительных случаях Петровский, минуя все инстанции, своим личным приказом предоставлял молодым ученым, подававшим большие надежды, ставки научных сотрудников. Так на кафедре теории функций и функционального анализа в 1956 году появились две ставки младших научных сотрудников, которые заняли Феликс Александрович Березин и Роберт Адольфович Минлос. И Илья Иосифович Пятецкий-Шапиро, поступивший в середине пятидесятых годов на работу в Отделение прикладной математики, по приказу Петровского получил полставки научного сотрудника в межфакультетской лаборатории в МГУ.

Ситуация стала меняться только после смерти Сталина: при поддержке Ивана Георгиевича появилась возможность оставлять на факультете лучших студентов. Пятнадцатилетие с 1954 по 1968 годы было, без сомнения, золотым периодом нашего факультета.

При создании в тридцатые годы механико-математического факультета среди других были образованы две кафедры — теории функций, заведовать которой стал Дмитрий Евгеньевич Меньшов, и функционального анализа, которую возглавил Лазарь Аронович Люстерник. По причинам, которые мне не до конца ясны, в 1944

году эти две кафедры были объединены под общим названием кафедры теории функций и функционального анализа. Заведовать ею стал Д. Е. Меньшов. В первые послевоенные годы, после того как И. М. Гельфанд, как совместитель, вынужден был оставить факультет, на кафедре не оказалось специалистов по функциональному анализу.

Иван Георгиевич Петровский всегда очень дорожил мнением И. М. Гельфанда, и многие изменения на мехмате в пятидесятые и шестидесятые годы были осуществлены Петровским под его несомненным влиянием. В частности, была очень усилена функционально-аналитическая «фракция» кафедры теории функций и функционального анализа. В 1954 году стал профессором кафедры возвратившийся из Киева в Москву Г. Е. Шилов, в 1956 году были приняты в штат кафедры Ф. А. Березин и Р. А. Минлос, в 1957 году — А. Г. Костюченко, в начале шестидесятых годов профессорами кафедры стали Б. М. Левитан, С. В. Фомин и А. А. Кириллов. Повторю за Р. А. Минлосом: «На кафедре возник совершенно первоклассный коллектив аналитиков, подобный которому вряд ли можно было найти в каком-либо другом университете мира». В этот замечательный коллектив в 1962 году влился и я, и в течение пяти лет, вплоть до 1966 года, когда я стал сотрудничать со вновь созданной кафедрой общих проблем управления (официально я перешел на нее в 1969 году), мы были связаны с Березиным очень тесно. Но прежде чем рассказывать об этом, вернусь на некоторое время назад.

Весной 1945 года Евгений Борисович Дынкин, тогда ещё студент-пятикурсник мехмата Женя Дынкин, организовал кружок для школьников на будущий учебный год. В дынкинском школьном кружке «первого поколения» (переросшем плавно в студенческий семинар), принимали участие Алик Березин, Никита Введенская, Юлик Добрушин, Сусанна Каменомостская, Фридрих Карпелевич, Роберт Минлос, Илья Пятецкий-Шапино, Володя Успенский, Рафа Хасьминский, Алик Юшкевич — я перечислил далеко не всех. Вместе с Леней Волевичем, Игорем Гирсановым, Яшей Синаем и другими я принадлежал ко второму поколению дынкинских учеников. Нас сменило третье поколение, где участниками дынкинского семинара (среди многих других) были студенты, ставшие непосредственными учениками Евгения Борисовича: Эрик Винберг, Валя Тутубалин, Марк Фрейдлин и Миша Шур. А в шестидесятые годы началась

в некотором отношении новая эпоха, когда Евгений Борисович преподавал в московской школе № 2.

Число тех, кто хранит в своей душе благодарность Евгению Борисовичу как первому учителю, очень велико. Я сам заведомо принадлежу к этому сообществу, и мне хотелось бы, чтобы кто-нибудь вдохновился и чуть подробнее описал тот период мехматской истории, который связан с именем Евгения Борисовича Дынкина.

В самом начале в дынкинском семинаре занимались преимущественно алгеброй, но уже и тогда были заметны первые признаки «смены курса» от алгебры к теории вероятностей. Березин продолжил движение по алгебраическому пути. Его научным руководителем на этом поприще стал И. М. Гельфанд.

Начальное ядро первого поколения дынкинских учеников стало, в основном благодаря сокурснице Алика Березина Никите Введенской, формироваться в некое «межфакультетское математико-историко-филологическое» дружеское сообщество. Среди первых и оставшихся на все времена друзей Никиты Введенской были, помимо Березина, учившиеся на курс старше Добрушин и Успенский. А вскоре через ещё одного Никитино друга — замечательного переводчика и филолога Симона Маркиша, а также историко-филологических знакомых и друзей В. А. Успенского, круг Никитиных приятелей заметно расширился в историко-филологическую сторону, а потом стал прирастать и математиками, и гуманитариями, и их женами (изначально кроме центра притяжения — самой Никиты — других женщин в Никитином круге не было).

В 1958 году, когда я познакомился с Никитой, она жила на улице Ферсмана в крохотной комнатке в коммунальной квартире и могла принимать своих друзей лишь «малыми дозами». А в 1963 году Никита переехала в двухкомнатную кооперативную квартиру на улице Обручева. Ее новоселье явилось свидетельством необычного масштаба Никитино, и тем самым нашего общего, дружеского круга: на нем присутствовало около пятидесяти человек!

Что объединяло нас? Что влекло нас к Никитиному дому? Здесь не место подробно это выяснять, но одно несомненно: там мы обретали раскованность и свободу для обсуждения всего, что в ту пору волновало нас.

В этом сообществе Алик Березин, не расстававшийся со штурмовкой и любивший лыжные прогулки, сыграл особую роль. В частности, он поставил Никиту на лыжи. Родившаяся и жившая до по-

ступления в университет в Ташкенте, Никита Введенская на лыжах, разумеется, не ходила. Но постепенно лыжные пробежки, затем длительные лыжные прогулки и, наконец, многодневные походы во время зимних каникул, стали для Никитино окружения и для самой Никиты привычными. Начиная с весны и до поздней осени Алик совершал с друзьями прогулки по Подмоскovie, и это тоже возымело для многих самые благие последствия: прогулки стали традицией, а затем в обычай вошли походы на ноябрьские и майские праздники (в основном байдарочные) и дальние летние походы. Обо всем этом сама Никита Дмитриевна Введенская очень хорошо рассказывает в этой книге.



Начало 1960-х гг.

Мы начали много общаться с Аликом Березиным с моих аспирантских годов. Студентом я участвовал в дынкинских семинарах в «алгебраический период», когда, в основном, изучались теория групп Ли и теория представлений, и эти теории казались мне почти недоступными для понимания. В 1957 году, когда я уже поступил в аспирантуру, А. Н. Колмогоров сформулировал обширную программу сложности компактов в функциональных пространствах, где многое упиралось в гармонический анализ. Мне представилось, что естественно было бы взглянуть на проблематику не только для классов функций на окружности, но более широко — на других однородных пространствах. И как-то раз Алик Березин одной фразой раскрыл передо мной суть конечномерного гармонического анализа.

Он сказал, что пространства представления и специальные функции, возникающие в гармоническом анализе, — это собственные функции оператора Лапласа на соответствующем однородном пространстве. Это послужило для меня ориентиром на многие годы. Сам же Березин посвятил далекому развитию этой идеи свою кандидатскую диссертацию, которую я внимательно изучал. В этом чтении и многом другом для меня открывалась незаурядность человеческой и творческой личности Березина.

Конец пятидесятых и начало шестидесятых годов характеризуются сменой на мехмате научных приоритетов, когда вдруг начала проявляться тяга к математической физике. После долгого перерыва настало время, когда математики и физики стали находить общий язык. Среди коллег-математиков, с кем Ф. А. Березин в ту пору имел серьёзные научные контакты по проблемам физики, назову В. И. Арнольда, Р. Л. Добрушина, А. А. Кириллова, Р. А. Минлоса, С. П. Новикова, Я. Г. Синая, Л. Д. Фаддеева, А. С. Шварца. Мне тоже тогда захотелось ознакомиться поглубже с началами теоретической физики. Я ходил на физфак слушать лекции возвращенных на факультет (после известного «бунта» студентов физфака) Л. Д. Ландау, А. М. Леонтовича, И. Е. Тамма и других и включил в число аспирантских экзаменов экзамен по теоретической физике. Программа экзамена была составлена для меня Березиным. И по этому поводу у нас было множество интересных бесед. Тогда я понял, как много осознал Березин за очень небольшой промежуток времени, когда он, после периода занятий теорией представлений, обратился к совершенно новым для себя предметам исследований. Моя личная попытка войти в курс теоретической физики оказалась неудачной.

Теперь пришло время рассказать о нашей с Березиным работе на кафедре теории функций и функционального анализа. Нашей основной обязанностью по кафедре было чтение курса «Анализ-III» (функционального анализа) на заочном и вечернем отделениях мехмата, а также на недавно образованном так называемом инженерном потоке.

«Анализ-III» был первым «синтетическим» (межкафедральным) курсом на мехмате. Разработал этот курс Андрей Николаевич Колмогоров. Он же впервые прочитал его. «Анализ-III» вобрал в себя многое из того, что ранее читалось отдельно: теорию функций вещественного переменного, теорию интегральных уравнений, вари-

ционное исчисление, теорию банаховых пространств. До некоторого момента читать этот курс на кафедре теории функций и функционального анализа было, по сути дела, некому. С 1955/56 учебного года началась эра Георгия Евгеньевича Шилова. Он несколько раз прочитал курс «Анализ-III», написал замечательный учебник по нему, создал на мехмате свою школу функционального анализа, и его ученики Е. А. Горин, В. П. Паламонов, А. Я. Хелемский, О. Г. Смолянов, оставленные на кафедре, через некоторое время стали основными лекторами по функциональному анализу. Но это все касалось основных курсов на очном мехмате. А курсы «Анализ-III» в 1962–1965 годах на заочном, вечернем отделении и инженерном потоке «обслуживали», в основном, мы с Аликом.



Начало 1970-х гг.

Отличие между инженерным потоком и заочным и вечерним отделениями было разительным. Подготовка заочников и вечерников в подавляющем большинстве была очень слабой. Нередко случалось так, что нам вдвоем с Аликом нужно было проэкзаменовать чуть ли не сотню студентов-заочников в один вечер. Физически это было невозможно, и мы с Аликом стали применять такой прием. Мы задавали вопрос абсолютно основоположный, на который следовало отвечать либо «да», либо «нет». Неправильный ответ сви-

детельствовал о том, что студент совершенно не готов по данному предмету, и мы его тут же выгоняли. Скажем, если по билету надо было что-то рассказывать про компактные множества, мы спрашивали «Является ли компактом вещественная прямая?» и, если ответ был утвердительным, сразу говорили: «Вам придется прийти в следующий раз». При такой системе экзамен удавалось проводить в обозримое время. Во время таких экзаменов мы постоянно общались с Аликом, обмениваясь теми вопросами, которые задавали, и обсуждали ответы, которые получали.

В процессе такого общения я извлек для себя много полезного. В своих лекциях мы нередко старались выйти за пределы основных учебников по функциональному анализу. Это мы постоянно обсуждали. Скажем, как читать теорию меры и интеграла, чем ограничиться в спектральной теории или в общей теории функционального анализа, и т. п. Экзаменуя, я узнавал новое для себя из того, что было прочитано Березиным. Пару раз во время экзаменов Алик обнаруживал пробелы в курсах, которые читал я. Так, например, я допустил неточность в формулировке теоремы Ф. Рисса об общем виде линейного функционала в пространстве непрерывных функций (она была в некоторой мере предопределена текстом учебника), и Алик указал мне на нее.

Если на заочном и вечернем отделении подготовка студентов оставляла желать лучшего, то на инженерном потоке все было совершенно по-иному. Туда хлынула масса людей, уже окончивших высшие учебные заведения, но в силу разного рода причин не сумевших удовлетворить своей мечты о полноценном владении математикой. Кто-то пытался поступать на мехмат, но не был принят, кого-то отговорили поступать в МГУ, кто-то на своей работе столкнулся с необходимостью знать математику глубже. И все они ринулись на объявленный инженерный поток. Это были молодые люди 1930–1940 годов рождения, яркие, энергичные, следующие своему духовному влечению. Об уровне этих студентов расскажет вам такой эпизод.

На экзамене по «Аналізу-III», где я был лектором, обнаружилось, что экзаменатор не хочет поставить «отлично» сдававшему студенту инженерного потока (имевшему до той поры в зачётной книжке только высшие оценки и ставшему по прошествии лет академиком РАН). Экзаменующийся допустил незначительную ошибку и на просьбу спросить его ещё, чтобы он мог исправиться, стал по-

лучать один за другим разнообразные и очень непростые вопросы и отвечал на них безупречно, но экзаменатор никак не желал ставить пятерку. Все длилось довольно долго, и наконец, был задан вопрос о мощности пространства L_2 на отрезке. И на этот вопрос был получен полный и четкий ответ. И тогда студента спросили: «А какой будет мощность этого пространства, если считать различными функции, отличающиеся на множестве меры нуль?» Сдававший стал думать над ответом, но экзаменатор, не в силах отказаться от задуманного, прервал его размышления и все-таки поставил четверку. Честно говоря, я был потрясен уровнем знаний этого студента, пробовал вступить за него, но тот, усмехнувшись, махнул рукой и остановил меня.

Когда мы с Аликом вечером входили в аудиторию 16-24 или 16-10, чтобы прочитать лекцию по функциональному анализу на инженерном потоке, аудитория было заполнена до предела людьми, преисполненными энтузиазма постичь то, о чем будет рассказано. У подавляющего большинства слушателей были жены, мужья, дети (у одной из женщин был, как выяснилось на экзамене, грудной ребенок, а она при этом работала и после работы, не заходя домой, прибегала на лекции). У всех была своя профессия, работа, множество обязанностей, но какая-то таинственная сила тянула их на мехмат. Это поразительное явление, порожденное теплотой, было предметом многих наших обсуждений с Аликом.

Бывало, мы заменяли друг друга как лекторы. Алик предоставлял мне нужные материалы, при продумывании которых я получал большое впечатление от оригинальности и глубины его курса.

Читать за Алика мне случилось и 19 октября 1965 года. Я заменил тогда Алика по курсу функционального анализа на инженерном потоке. Когда после лекции я пришел домой в десятом часу вечера, жена сказала, что мне следует проводить ее в родильный дом, появились «признаки». Наш общий друг и сосед по квартире Михаил Львович Лидов вызвался проводить нас до родильного дома. Это было недалеко, вскоре мы вернулись, сели, и буквально через час с небольшим мне позвонили и сказали, что родилась дочка. И с тех пор я каждый раз 20 октября вспоминаю Мишу и Алика, их уже давно нет рядом, но оба они навсегда соединились в моем сознании со счастливым жизненным событием.

Через два года мы с женой вынуждены были искать дачу на лето. Мы обращались ко многим, в частности к Алику, который сни-

мал дачу где-то недалеко от Шереметьева. Дачу в Шереметьево нам снять не удалось, но в памяти остался эпизод, рассказанный Аликом в связи с дачными обсуждениями. Он весьма выразительно характеризует рассказчика.

Дом, в котором комнату на летнее время снимал Алик, был многокомнатным и с большим участком. Какие-то помещения в том же доме снимал с семьей наш общий знакомый, тоже математик, но в ту пору много занимавшийся философскими проблемами и жаждавший их обсуждать. Пару раз Алик принимал участие в таких обсуждениях, но потом счел такие беседы несовместными со своими рабочими планами и принял решение от них отказаться. После нескольких часов упорных занятий Алик обычно выходил на длительную прогулку по окрестным местам. Однажды он из окна увидел, что его сосед вышел в сад и прогуливается, собираясь, как полагал Алик, перехватить его, чтобы продолжить с ним философские споры. Желая избежать этого, Алик, надев что-то, чего не жаль, и проследив, когда сосед уйдет на другой конец сада, незаметно вышел из двери и *пополз* по участку к некоей дыре в сплошном заборе, выполз из нее и убежал. Алик рассказывал мне об этом с нескрываемым удовольствием.

...Алик был сложным человеком, необычайно самобытным, свое нравным, с непростым характером. В жизни его было много тяжелого и даже трагичного. Но я наиболее тесно знал его в сравнительно благополучную, можно сказать, счастливую пору его жизни, в пору надежд и цветения мехмата. Тогда Алик создавал свою школу, был одержим творчеством и перед ним раскрывались тайны им открываемого нового мира. Я вспоминаю его у туристского костра или при сборке байдарки, на мехмате или у Никиты, и когда бы мое воображение ни вызывало его образ, я вижу Алика радостным и улыбающимся.

В семидесятые годы жизнь несколько удалила нас друг от друга. Но, несмотря на то что наши научные интересы не пересекались, мне не раз доводилось слышать о том, что Алик открыл новое направление в математике, связанное с теоретической физикой. В середине шестидесятых годов Алик много контактировал с физиками. Один из них, А. Т. Филиппов, рассказывал мне, что первые импульсы к созданию начал суперматематики Березин получил, изучая работы Ю. Швингера. В 1965 году Нобелевскую премию получили сразу три крупнейших физика — Томонага, Фейнман и Швингер; их идеи были

с восхищением восприняты всеми математиками, кто в пятидесятые годы интересовался физикой и желал придать точный математический смысл в значительной мере эвристическим концепциям этих крупнейших физиков. Основы «суперфизики» были заложены физиками, а начала математической теории, которая стала описывать суперфизический мир и которая получила название суперматематики, суждено было в значительной мере заложить Ф. А. Березину.

Общая идея суперматематики была мне понятна. Дело в том, что на втором курсе я писал курсовую работу у Дынкина по исчислению грассмановых алгебр, а на лекциях физиков рассказывалось о статистиках Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака, о бозонах и фермионах и формулах квантования, и поэтому самую изначальную идею математики с антикоммутирующими переменными мне удалось воспринять. Из разговоров с Аликом можно было осознать, что он приступил к построению алгебры и анализа с антикоммутирующими переменными. Потом на слуху оказался термин «березиниан» — аналог якобиана в антикоммутирующем анализе. Но вполне оценить значение совершенного Березиным сдвига в науке я, разумеется, не мог.

Восьмидесятый год был одним из самых тяжелых в моей жизни: в этот год я лишился многих близких мне людей. В июне мы семьей выезжали в Крым, а к олимпиаде вернулись. 15 июля я узнал, что где-то под Магаданом погиб Алик Березин и что Виктор Паламонов и Ляля Карпель полетели в Сеймчан к месту его гибели. Об этом трагическом путешествии можно прочитать в этой книге в потрясающем по силе и выразительности очерке Ляли Карпель. Прошли дни, и стало известно место прощания с Аликом — морг при Институте Склифосовского. Середина лета, никого не сыщешь. На прощание нас собралось совсем немного.

Ко мне подошел Виктор Паламонов и попросил меня вести траурную церемонию. По-видимому, после всего пережитого он не решился взять на себя эту роль. После секундной паузы я сделал шаг вперед.

Я начал свое слово с того, что с самой ранней студенческой поры Феликс Александрович Березин заявил о себе, как о яркой личности в науке, о личности, от которой можно было в будущем ожидать очень много. «Эти ожидания», — произнес я, и наступила пауза. Я стоял перед выбором: сказать, что эти ожидания оправдались или что им не суждено было полностью раскрыться в то неблагоприятное

время, в котором ему и всем нам довелось жить. Я выбрал первое и продолжил тем, что жизнь Алика была восхождением к вершинам, и это восхождение внезапно трагически оборвалось. Потом говорили Никита Введенская, Витя Паламодов, может быть кто-то ещё, кого я не запомнил. Я называл всех по фамилии, а потом спросил, не хочет ли кто-нибудь ещё сказать слово. Вышла вперед молодая женщина, которую я видел впервые и потому не назвал ее имени. Она с необыкновенной силой сказала, может быть, в других выражениях то, что не было сказано раньше, а именно, что мы хороним *великого ученого*, оставившего фундаментальный и глубокий след в науке. Чуть позже я услышал ее имя: Рената Каллош. По прошествии времени я убедился в том, что она была права в своей оценке.

Прошли годы. Уже минуло двадцать восемь лет с того момента, как Алик ушел от нас. Сейчас многое для меня стало яснее. Теперь отчетливо видно, что Алик, преодолевая все препоны, которые возникали на его пути, шел к сизмальства поставленной им перед собой цели. О масштабе его личности говорит то, что написано о нем в этой книге, о значении его трудов и его замыслов можно составить впечатление по замечательным обзорам Р. А. Минлоса и А. С. Шварца.

Дружеское прозвище «Алик» растворится вместе с нашими судьбами, но в науке сохранится его полное имя. Наверное в каждом поколении рождаются подвижники и пророки, одержимые жаждой объять необъятное и прикоснуться к непостижимым тайнам — рождения Земли, растительного мира, происхождения человека, языков, законов, управляющих явлениями во Вселенной. В этом ряду вершителей и пророков я числю и Феликса Александровича Березина.

О БЛИЗКОМ ДРУГЕ

Н. Д. Введенская

Мои записи не претендуют на полноту или обобщения. Это просто личные воспоминания близкого человека.

С Феликсом Александровичем Березиным я познакомилась в 1948 году, когда мы вместе поступили на механико-математический факультет Московского университета и оказались в одной группе. Все мы звали его Аликом (под этим домашним именем его знали близкие знакомые). Поэтому я буду и здесь всегда называть его так. Мы с ним приятельствовали с первого курса, а близко сдружились ко времени окончания университета. О его семье и доме я узнала позже — из его рассказов.

Алик воспитывался в основном родителями матери, так как сама мать — Эсфирь Абрамовна Рабинович — была поглощена работой (с отцом Алика Эсфирь Абрамовна была в разводе). Алик рассказывал, что в молодости мать думала о карьере пианистки, но стала врачом из идейных побуждений. Получая паспорт, Алик выбрал себе национальность по матери — еврей, и этот выбор сильно повлиял на его судьбу. (Тут надо пояснить, что в то время человек мог сам выбрать себе национальность из двух, если родители были разной национальности.)

Семья матери происходила из Молдавии. Брат матери молодым парнишкой вступил в отряд Якира, служил в Красной Армии. Позже он стал крупным деятелем в промышленности, поэтому и погиб в годы великого террора. (Кстати, имя Якира в семье всегда произносилось с уважением.) Мать Алика не была арестована, она, спасаясь, на время уехала из Москвы (временный отъезд иногда спасал людей, особенно «не главных претендентов на арест»).

Я пишу обо всём этом потому, что ужас террора навсегда повис мрачной тенью над семьёй.

В начале 1953 года, в самый разгар кампании против «безродных космополитов» и «дела врачей», по Москве поползли слухи о го-

товящихся арестах и высылках евреев (слухи оказались справедливыми — у Сталина такие намерения были). Алик с матерью тоже ждали ареста, у них даже были приготовлены чемоданчики с бельём и лекарствами (опыт 1937 года!).

У Алика, увы, на всю жизнь сохранилась сложная система страхов. Он верил в неустанную слежку за всеми нами, был склонен к мрачным прогнозам. Например, перед московской Олимпиадой 1980 года (года его гибели) прошёл слух, что во время игр в Москву можно будет въехать только по специальным пропускам. Алик предположил, что такое ограничение может остаться навсегда.

Мы, друзья Алика, обычно подсмеивались над его опасениями, но впитанный в детстве страх не проходил. Я пишу это в другое время, сейчас молодым людям трудно, к счастью, почувствовать атмосферу сталинских и постсталинских лет.

Окончив школу, Алик хотел поступить на физический факультет МГУ. У него была медаль, так что достаточно было пройти собеседование. Но в 1948 году на этот факультет евреев практически не брали, и Алик после неудачной попытки на физфаке поступил на механико-математический факультет.

Перед началом занятий на первом курсе всех вновь поступивших на факультет послали на стройку нового здания МГУ на Ленинских горах¹⁾ (мы учились в старом здании на Моховой). На стройке произошло первое знакомство, мы начали узнавать друг друга. После этого на первом курсе Алика выбрали комсоргом группы, а это говорит о том, что относились к нему в группе хорошо — не надо забывать, что практически все тогда были комсомольцами. «Общественным деятелем» Алик, конечно, не стал, но всегда был заметной фигурой на курсе. Кстати, на пятом курсе, перед выпускными экзаменами, он выпустил очень нестандартный «совершенно мнимый» номер *i* нашей курсовой стенной газеты.

На первом курсе у нас образовалась компания, в неё кроме Алика входили, например, М. Агранович, А. Юшкевич, С. Каменомостская (Камин), О. Зиза, В. Рыжик. Обычно мы сидели рядом на лекциях. Позже вместе ходили на каток.

Внешне Алик выглядел не очень приметно. Одет он был всегда опрятно и скромно, если не сказать бедно (хотя в послевоенное время почти все были так одеты). У Алика был тёплый, на подстёж-

¹⁾Ныне — Воробьёвы горы.

ке, пиджак. Мы всегда садились на лекциях у открытой форточки, а я мёрзла и почти все лекции (а были они обязательными) прослушала в этом пиджаке — Алик спокойно оставался в одной рубашке. В его морозоустойчивости я и позже много раз убеждалась во время наших с ним прогулок (о них я подробнее напишу ниже). Помню, очень холодной весной мы в половодье плавали на байдарках под Москвой. Спутница Алика гребла так, что он промок до нитки, но обнаружилось это только вечером — весь день он не жаловался.

Учился Алик очень хорошо, был одним из лучших, а к пятому курсу и самым лучшим студентом на курсе. С первого курса он участвовал в семинаре Е. Б. Дынкина, потом стал посещать семинар И. М. Гельфанда. А в аспирантуру его даже не рекомендовали (1953 год, а он — еврей!), но на защите дипломной работы хвалили чрезвычайно. Защита была на кафедре алгебры, которой руководил А. Г. Курош. После окончания университета Алик стал работать в школе — на иную работу поступить не удалось.

В университете Алик прятельствовал со многими, но друзей у него всегда было немного. Сам он, наверное, считал своими друзьями двух-трех людей в юношеские годы, в зрелые годы у него было четверо-пятеро настоящих друзей. В людях он ценил оригинальность мысли, чувство юмора, цельность. Важен был ещё профессионализм, но отнюдь не в узко понимаемом смысле, не внешний успех. Так, он отличал своего друга Валеру Никольского, физика, за многознайство, фрондёрство, бесшабашность и даже за любовь кутнуть (к чему сам Алик склонен не был). А в себе он больше всего ценил, как мне кажется, профессионализм математика.

Алик был человеком замкнутым и ранимым. За все годы мы поссорились, кажется, дважды — один раз из-за того, что он сильно опоздал на электричку и я уехала кататься на лыжах с другой компанией. В более серьёзном плане его больно задевало холодное отношение к его математическим идеям и достижениям. Поэтому он и разошёлся с рядом людей, к которым в молодости испытывал большую симпатию.

Преданность математике, своей работе, была главной его чертой. Помню, по какому-то поводу (наверное, я уговаривала его отвлечься и пойти гулять) он резко сказал: «У меня нет иной личной жизни, кроме математики» (при том, что у него были жена и дочь, да и мать была с ним). Много раз он отказывался от поездок в отпуск, от других развлечений, не желая отвлечься от работы. При

этом вполне мог нарушить уже данные обещания, подвести своих товарищей, с которыми сначала собирался пойти вместе в поход.

В Москве у Алика всё было подчинено рабочему расписанию. Он серьёзно следил за тем, чтобы быть в хорошей математической форме, заботился о своем сне и здоровье, даже уверял, что однажды серьёзно заболел из-за бессонной ночи. Одной из его любимых присказок было: «Люблю повеселиться, особенно поспать». К здоровью (кстати, хорошему) он относился очень внимательно, был довольно мнительным и, как человек пессимистического склада характера, предрекал себе раннюю смерть (увы, он оказался прав).



Начало 1960-х гг.

Очень важен для Алика был и отдых, что в первую очередь означало физическую разрядку — он любил двигаться. Отдых — это обычно «пройтись». Вечером после работы он ходил по улицам вокруг дома, а в выходной день ехал за город. Эти еженедельные прогулки играли большую роль в его жизни. С них, между прочим, и началась наша дружба.

Алик хорошо знал Подмоскovie, много ходил по нему. Гулял он по выходным дням либо один, либо — гораздо чаще — в компании нескольких человек. С четвертого—пятого курса университета, т. е. года с 1951—1952, я стала регулярно ходить с ним: летом — пешком, зимой — на лыжах. С нами в разное время бывал кое-кто из наших сокурсников, мы много гуляли с А. Юшкевичем и В. Никольским, реже к нам присоединялись Д. Каждан, А. Шварц, Е. Фрадкин. Из

женщин с нами гуляли С. Каменомостская, И. Карпова (первая жена Алика), Р. Каллош.

Мы ехали за город и обратно обычно на электричке, в день проходили километров 25–30, иногда и больше. Было несколько «рекордов», скажем, пройти из Серпухова в Каширу — это около 60 км — за день. Шли почти без остановок, перекусывали бутербродами. Летом купались, если по дороге была вода, — Алик очень любил плавать и нырять. Изредка разводили костры. В первые годы мы чаще гуляли вокруг Савёловской железной дороги (или шли с неё на Ярославскую или Ленинградскую дороги), так как Алик жил



Начало 1960-х гг.

около Савёловского вокзала. То, что, скажем, я жила в другом конце города, в расчёт не принималось, правда эти северные места — красивейшие в Подмосковье. Когда же Алик переехал в район университета, мы стали больше гулять вокруг Киевской дороги.

Ходили лесами, полями, часто тропили зимой. В распутицу, случалось, ходили и по бетонкам — окружным дорогам, тогда по ним почти не было движения. В молодости весной и осенью Алик надевал за город кирзовые сапоги, которые считал очень удобной обувью (для меня кирзовые сапоги и портянки ассоциируются ещё и с сол-

датами в походе). На лыжах он катался в байковом костюме того типа, что был принят у нас в 1940-е годы. Только в конце жизни у него появились, наконец, «современный» лыжный костюм и красивая шапочка. Деревянные лыжи, впрочем, всегда были хорошие.

На этих прогулках путь выбирал Алик. Когда мы были вдвоём, как-то не приходилось спорить, куда идти, зато если народу было больше, начинали препираться. Правда обычно Алик всё равно никого не слушал, а шёл, куда считал нужным, и остальные покорно следовали за ним. Кстати, то же упрямство он проявлял и в более серьёзных дальних походах.

Многодневные походы — летние и зимние «дикие» походы — особая статья нашего быта. Описывая нашу жизнь и жизнь наших знакомых, невозможно их обойти. Мы любили путешествовать, нам нравилось оставаться наедине с природой, да и поездки по стране были сравнительно дешёвы. Обычно в отпуск мы не ездили ни в дом отдыха, ни на дачу, а отправлялись в поход: в горы или в тайгу — пешком, по воде — на байдарках. (Впрочем позже, когда уже работал в университете, дачу на лето Алик снимал, чтобы, живя там и работая, иметь возможность в будни немного погулять и покупаться.) Несколько раз зимой вместе в друзьями Алик ходил в лыжные походы, а летом плавал на байдарках по северным рекам и озёрам. В горы он ходил мало и, по-моему, не очень их любил и понимал. В горах тоже предпочитал «идти своим путём», не признавая серпантинных, лез по склону в лоб, спускался туда, куда ему казалось правильным. Впрочем и на озере в непогоду он мог уйти «в открытое море». Словом, в походах с ним было нелегко.

Как правило, весной, в половодье, мы по несколько дней плавали на байдарках. Обычно это происходило на майские праздники. Алик хорошо грёб, не боялся, как я уже говорила, холода, умело разводил костёр на стоянках, мог легко надуть ртом мяч, чтобы поиграть в футбол. Он вообще был физически сильным человеком, особенно сильными были у него руки, пальцы.

Ещё он любил мастерить — чинил в походе сломанную байдарку, мог починить лыжу. Кстати, из частей сломанной байдарки и из лыжных палок он соорудил кухонный столик, который с гордостью демонстрировал. И у себя, и у меня в доме он вбивал гвозди в бетонные стены — словом, действительно был мастер на все руки.

Как и многие москвичи, в марте 1953 года мы (Алик, А. Юшкевич, С. Каменомостская и я) пошли было в Колонный зал прощаться

со Сталиным (зачем? — это был общественный психоз!). Дошли до спуска по бульвару со Сретенки на Трубную и, к счастью, испугавшись давки в толпе, выбрались назад. Алик говорил потом, что это он знал проходной двор, через который мы ушли.

Как я уже говорила, выглядел Алик неброско, практически не носил пиджаков, а ходил в свитере, надетом на рубашку. В компании разговаривался не сразу, хотя был вполне остроумным собеседником. Его иногда считали зазнайкой потому, что он не всегда здоровался, встречая знакомых на факультете, а он просто плохо видел и не сразу узнавал людей (вне занятий он редко носил очки). Был он весьма неприхотлив в быту, в еде. Думаю, это шло от традиции в семье, да и жил он в юности довольно бедно. Когда он стал работать в университете, у него всегда оставались деньги от зарплаты и он охотно давал их в долг, спокойно относясь к тому, что эти долги не всегда возвращали. «Я понял, что у него дети и просто нет денег», — заметил он однажды об одном из таких должников.

Гуляя вместе, звоня друг другу по телефону несколько раз на неделе, мы, естественно, говорили о многом: о жизни, о людях, нас окружавших, о политике, о книгах, которые читали. Болтая, любили вспоминать истории из нашей студенческой и походной жизни. Втроём, с А. Юшкевичем, иногда даже сначала «решали», кто из нас перескажет какой-нибудь из полюбившихся эпизодов. В серьёзном плане прогнозы Алика на жизнь нашей страны были не слишком радужными (да и кто тогда мог предвидеть скорый крах советской системы?!). Но при этом он любил и Москву, и университет, и свой образ жизни.

В разное время у него бывали разные мысли о возможности эмигрировать (они зависели и от настроения, и от уровня неприятностей на факультете). Но однажды, в период интенсивных отъездов, на мой прямой вопрос, хочет ли он уехать, он сказал: «Нет. Я люблю природу Подмосковья. Я люблю русский язык. У меня здесь несколько друзей, ты в том числе».

Как и всем нам, Алику очень хотелось посмотреть мир, побывать в разных странах. И ещё больше хотелось ему ездить ради контакта с математиками и физиками. Но он был почти «невыездным». Успел побывать в Польше и Венгрии (там, кстати, он жил часть времени у Карея Маяуса, а часть — просто в Математическом институте, в каком-то кабинете. Это — из примеров его неприхотливости). Ещё он был в Монголии.

Обо всех поездках Алик интересно рассказывал. Рассказывал он и о своей первой поездке на Колыму, я запомнила нарисованную им картину ужасающего экологического урона, который наносит драга золотодобытчиков, буквально перерывающая долину небольшой речки. Во время одного из отпусков он нанялся туда рабочим в геологическую партию. Такие поездки мы иногда совершали вместо более традиционных туристских походов. А в Магадане работал школьный друг Алика — геолог. Вторая поездка на Колыму стоила Алику жизни...

Как я уже писала, Алику хотелось поехать по миру, тем более что в 1970-е годы научных приглашений у него было очень много (ими был забит ящик письменного стола). Но поездки стали невозможны: он написал письмо ректору МГУ Р.В. Хохлову о бедственном положении на мехмате творчески активных математиков и их учеников. После гибели Хохлова письмо попало к факультетскому начальству, и оно сделало всё, чтобы «наказать» Алика и никуда не пускать. Даже после доброжелательного указания ректора Логунова «оформить» его в Польшу, факультет тянул больше года, «футболя» бумаги от одного члена партбюро к другому. Алик погиб, не дождавшись разрешения.

Мне бы хотелось подчеркнуть, что при внешней увлечённости одной математикой Алику не были чужды гражданские чувства. Письмо Хохлову тому пример.

Иностранные языки Алик знал плохо. В последние годы его жизни, когда в Москву приезжали хотевшие общаться с ним физики, он несколько раз просил меня принять участие в их совместных прогулках по Москве, помочь в переводе с английского.

А по-русски Алик говорил хорошо — богатым, даже несколько книжным языком. Он очень много читал, и у него была неплохая библиотека художественной литературы (помимо большой математической библиотеки). Вообще он был разносторонне образованным человеком, любил классическую литературу, историю, с удовольствием читал, например, китайские хроники. Любимыми книгами были «Приключения бравого солдата Швейка», «Остров пингвинов», сборник стихов Гейне. Любил Алик и музыку. На концерты он ходил нечасто, но мать дома много играла на пианино.

Летом 1980 года Алик во второй раз в жизни поехал на Колыму, снова рабочим в геологическую партию. По рассказам рабочих этой партии, в последний день перед предполагавшимся отлётом Алика

в Москву они, возвращаясь, сплавлялись вниз по течению реки на надувной лодке. Лодки эти очень плохо управляемы, и они попали в протоку с завалом. А завалы на сибирских реках страшны: навстречу течению ежом торчат стволы деревьев, под завал бьёт сильная струя воды. Все выскочили из лодки, оттянули её (значит, было неглубоко!), а когда оглянулись, Алика не было. Как он попал под завал, никто не видел. Он утонул. Его жена — Елена Григорьевна Карпель — и Виктор Павлович Паламодов полетели на Колыму, привезли тело в Москву.

У Алика осталась четырёхлетняя дочь Наташа...

Как всякому активно работающему математику, Алику очень нужно было признание, которое только начало приходить к нему в конце его жизни, а в полной мере проявилось, к сожалению, лишь после смерти.

Я написала об Алике не как о математике — профессионально мы не пересекались. Но мы встречались почти каждую неделю, он был хорошо знаком со всеми моими друзьями, иногда бывал у меня на вечеринках, неизменно бывал у меня на днях рождения и традиционно дарил розы. А на новоселье подарил мне молоток с выгравированной на нём дарственной надписью. Очень редко, всего несколько раз за все годы, он устраивал вечеринки у себя, приглашая своих учеников и друзей. Когда я сломала ногу, он пришёл в больницу с чёрной икрой. Называл он меня Никиточкой. Он был моим близким другом, которого я очень ценила, на которого всегда могла положиться.

БЕРЕЗИН — ЭТО БЫЛ СУПЕР!

В. П. Маслов

В бытность студентом третьего курса физического факультета МГУ я познакомился с Аликом Березиным через своего близкого друга Н. Корста, который жил с Аликом в одном доме и знал его с детства.

Мальчишки во дворе звали Алика Берибесом. Он жил в двухкомнатной квартире со своей матерью, Эсфирью Абрамовной Рабинович, которая обожала своего сына и очень приветствовала его увлечение физикой и математикой. В роли хозяйки дома она привлекала друзей сына с явной доброжелательностью. А ещё, как мне запомнилось, Эсфирь Абрамовна была весьма небезразлична к тому, что происходит в Израиле, регулярно слушала израильское радио.

Работал Алик и летом, и зимой за письменным столом, вплотную придвинутым к широко раскрытому окну. Размышляя над какой-нибудь задачей, ходил по комнате из угла в угол. Часто свои размышления продолжал во время прогулки в лесу. Однажды, когда он приехал ко мне на дачу, мы пошли погулять по близлежащему лесу, беседуя по дороге. После возникшей на ходу паузы я о чём-то его спросил, в ответ последовало: «Ты прерываешь мои мысли, не перебивай меня, я работаю». Несомненно, это было размышление над какой-то математической задачей.

Часто мы говорили о политике и политиках. Я помню, как он удивил меня, сказав, что Хрущёв является единственным гарантом нашей безопасности. Это было тем более странно, что я, как и его мать, испытывал к Хрущёву неприязнь, почти отвращение. Было ясно, что Алик относится к будущему с большим опасением.

Много лет спустя я подарил ему свою первую книгу. Он её прочёл и через некоторое время вернул со своим посвящением, которое было смешной пародией на моё, которое я-то считал весьма трогательным. В возвращённой мне книге было сделано ещё и много уместных замечаний, некоторые из которых были весьма остроум-

ными. Например, одно из утверждений книги он шутливо откомментировал, написав: «Это явный волюнтаризм, осуждённый нашей родной партией».

Вместе мы подолгу обсуждали искусство математики, основные направления математических исследований, говорили о ведущих математиках. Алик считал, что надо заниматься двумя далеко стоящими друг от друга разделами математики, работая в каждом профессионально и с полной отдачей. И это, говорил он, помогает в обоих исследованиях.

Алик «присуждал» воинские звания известным математикам. Например, он произвёл Л. С. Понтрягина в полковники, а И. М. Гельфанда и М. К. Крейна в генералы. Причина, как он объяснил, состояла в том, что у Л. С. Понтрягина, в отличие от И. М. Гельфанда и М. Г. Крейна, не было своей армии (учеников и последователей).

Березин делил математиков на «в основном исследователей» и «в основном учителей». Его собственная самооценка была весьма скромной, он говорил, что его призвание — учить, а не создавать. Конечно, это было неверно. Но это свидетельствует, насколько серьёзно он относился к своей миссии преподавателя. Безусловно, в глубине души Алик понимал, что его исследования очень важны. Его чрезвычайно задевало, что некоторые из его работ не были сразу приняты к публикации. Это его очень огорчало.

Подход Алика к науке всегда был абсолютно независимым, во многом он опережал своё время. Ещё в 1979 году, за год до своей трагической гибели, Алик очень огорчился, что математическое сообщество не чувствует, где проходит передовой фронт исследований. В некотором смысле он напоминал набоковского Пнина, я хочу этим сказать, что он выглядел незащищённым, не производил впечатления бойца...

Люди, которые живут впереди своего времени, умирают рано.

МОЙ ВЕЧНО МОЛОДОЙ СТАРШИЙ ДРУГ

АЛИК БЕРЕЗИН

А. Кириллов

Я не помню, когда я впервые увидел Алика Березина. Скорее всего, это было на втором курсе (1955/56), когда он читал спецкурс «Представления полупростых групп Ли». Я помню, как я был весьма впечатлён красотой множества неприводимых представлений алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ и элегантностью доказательств, основанных на коммутационных соотношениях. С тех пор я часто говорил с Аликом о математике и это сильно повлияло на моё отношение к нашей науке. Например, он часто повторял, что особые точки, исключения, суть самые интересные объекты¹⁾, в то время как я полагал более важным понимать общий случай. Кроме того, он в это время уже начинал работать в математической физике и постоянно подчёркивал, что стиль работы там сильно отличается от работы в математике.

Например, каждое новое продвижение обсуждается незамедлительно во многих семинарах и творческих группах и автору приходится напрягаться, чтобы не отстать от волны новых работ, спровоцированных его начальным результатом.

Кроме того, в математике нередко бывает, что кто-то, изобретя новое понятие или новый способ рассуждений, долго и не всегда успешно ищет, где бы его применить. В матфизике на первом плане задача, и надо среди всего арсенала математики выбрать (или изобрести заново) нужные методы для её решения. Поскольку заранее ничего об этих методах неизвестно, физик должен основательно знать всю математику, а не какие-то её разделы. И действительно, Ландау или Фейнман, например, знали большинство разделов современной математики не хуже специалистов-математиков.

¹⁾ Кто-то из классиков сказал: «Функции, как и люди, определяются своими особенностями». Я прочитал это позже, но Алик вполне мог бы подписаться под этим высказыванием.

Алик в этом смысле следовал лучшим образцам²⁾.

Ни одну область математики он не рассматривал как чуждую его исследованиям. Он старался ориентироваться во всём, и это ему неплохо удавалось.

Во главе нашей кафедры теории функций и функционального анализа стоял Д. Е. Меньшов, тогда ещё вполне бодрый 70-летний старик, очень напоминавший Дон Кихота. Среди сотрудников были маститые, но полные сил И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, Б. В. Шабат, Б. М. Левитан, А. И. Маркушевич и молодые Ф. А. Березин, Р. А. Минлос, Е. А. Горин. Некоторое время я был самым молодым сотрудником кафедры. Вскоре к нам присоединились В. П. Паламодов и В. А. Олейников.

Алик очень заботливо относился ко мне и к Паламодову и всячески опекал нас. Например, если бы не он, я бы опоздал на собственную защиту в ноябре 1961 года, поскольку никак не мог убедить студентку на экзамене, что выше тройки она не заслуживает.

С Аликом меня связывает и несколько туристско-спортивных воспоминаний. Мы много ходили по Подмоскovie, а пару раз были вместе в серьёзных байдарочных походах. Помню, что меня, воспитанного в строгом туристском стиле, модном тогда на мехмате, поразило предложение Алика не назначать ежедневных дежурных, а положиться на добровольцев, которые бы вставали раньше, ложились позже и делали всю «грязную» работу. Поразительно, но это сработало. Я помню, как я сам встал как-то ночью, при свете полночного солнца помыл посуду, набрал морошки и испёк к завтраку пирог. Потом снова лёг и утром присоединился к недоумению остальных: откуда взялся ещё тёплый пирог, стоящий рядом с костром.

Этот поход запомнился также 33-километровым волоком. Оставив наших женщин отдыхать и приводить себя в порядок на озере, мы с Аликом и его другом Валерой Никольским вернулись за байдарками, оставленными недалеко от станции, и тащили их на себе под «палящим» солнцем, раздевшись по самое некуда.

²⁾Не могу удержаться от цитирования одного из «Анекдотов Семинара Гельфанда», которые я надеюсь опубликовать когда-нибудь. Человек видит своего приятеля, бегущего за трамваем.

Ч. Ты куда несёшься?

П. Да вот, бегу за трамваем, экономлю 30 копеек.

Ч. Дурак, бегай лучше за такси — сэкономишь 3 рубля!

В это же время Алик познакомил меня со своими знакомыми из тогдашнего круга диссидентов: Людой Алексеевой, Колей Вильямсом, Валерой и Адой Никольскими, Николаем Кавериним. Я, надо сказать, был тогда увлечён наукой и в политическом отношении был весьма наивным. Разумеется, я понимал всю ложь и бессмысленность официальной идеологии и делил людей на два типа: тех, кто пользовался этой идеологией в корыстных целях, и тех, кто старался по мере сил от неё отмежеваться и жить, засунув голову в песок в надежде, что пронесёт. Возможность хоть как-то протестовать я даже не рассматривал, как явно утопическую. К сожалению, я только недавно прочитал письмо Алика Березина ректору МГУ Рэму Хохлову, написанное в начале 1970-х годов. Возможно, оберегая нас от возможных последствий, Алик не сказал ни мне, ни остальным молодым членам кафедры об этом письме. Мы в то время чувствовали то же самое, но решился сказать это вслух только Алик.

Немного о научной стороне дела. У нас с Аликом не было совместных работ, кроме сборника задач по функциональному анализу, которые мы собирали вместе с ним, Гориным и Паламодовым. Наверное, это моя особенность: у меня вообще мало совместных работ. (Исключения: И. М. Гельфанд и, в последнее время, мои аспиранты).

Я был восхищён работой Алика про операторы Лапласа и возмущён позицией западных математиков, которые заметили формальный пробел в работе (впрочем, легко устранимый) и предпочли не заметить всю логику изложения, приводившую к фундаментальным результатам. Однако молодым математикам следует учесть этот опыт и более аккуратно соблюдать принятые на западе стандарты строгости³⁾. Известие о гибели Алика застало меня только по возвращении из нашего летнего домика под Изюмом, куда мы скрылись от московской Олимпиады. Это была поистине громадная утрата для семьи, для друзей, для нашей кафедры и всей математики. До сих пор, с удовлетворением отмечая присутствие подсоветской⁴⁾ математики на многочисленных конференциях и семинарах, я всё более ценю вклад Березина в математику и в людей, которые её делали и делают.

³⁾К некоторому оправданию советских математиков можно заметить, что в СССР опубликовать сколько-нибудь подробное изложение своих результатов для молодого математика, особенно из провинции, было почти невозможно.

⁴⁾Не могу придумать лучшего названия для той математики, которая существовала на территории бывшего СССР в 1950–60 годы, а теперь распространяется по всему свету.

ОБ АЛИКЕ БЕРЕЗИНЕ

А. М. Вершик

Уход Березина был неожиданным и загадочным. Во всякой смерти есть загадка, но смерть Алика — вдали от Москвы, в геологической экспедиции, в которой не было друзей, и никто точно не знает, как это произошло, — была как бы исчезновением. Я помню момент, когда мне сообщили об этом, и ощущение неправдоподобия случившегося.

Последний наш долгий разговор был за полгода до этого, во время школы под Минском. Этот разговор произвёл на меня сильное впечатление — я почувствовал очень сильный пессимизм Алика. Шёл 1979 год. Душная атмосфера «застоя»: никаких надежд на оздоровление общественной жизни, жёсткая борьба с инакомыслием, активная эмиграция, отвратительная обстановка в университете. Мы долго гуляли вечером по тихому лесу. Алик говорил об обычных для наших разговоров вещах — о ситуации на мехмате и о её безнадёжности, о знакомых, отъезжающих или нет, о невозможности настоящих контактов с западными математиками и о том, как этим пользуются некоторые здесь и там.

Но в тот вечер больше всего речь шла о еврейской проблеме, о чём обычно мы почти не говорили. Я помню, что именно на это я обратил внимание: такой мрачный прогноз о возможных событиях я слышал нечасто. Алик говорил, что он боится погромов и прямых гонений, что в воздухе носятся идеи коммунофашизма, и т. д. Я привёз в ту школу разный сам- и тамиздат и нашу «Сумму» (реферативный ленинградский самиздатский журнал), в которых эта проблема также обсуждалась, показывал всё это и ему. Как и некоторым авторам-диссидентам, мне будущие опасности виделись несколько иначе, и я пытался разубедить его в том, что погромы реальны. Сейчас, по прошествии стольких лет и событий можно сказать, что были периоды, когда его прогноз почти сбывался, чутьё не совсем обмануло его. Однако позже, когда я думал об этом, мне всё казалось, что

апокалиптичность его предчувствий мистическим образом не была случайной.

Впервые я встретился с Березиным в начале 1960-х гг. у нас в Ленинграде. Он был в расцвете своей популярности и часто бывал приглашён к нам. Первый разговор сначала смутил меня: он заявил, что мои результаты о гауссовских динамических системах давно известны, но затем принял мои возражения, а я оценил его умение мгновенно проникать в предмет и, конечно, его широкие познания. С тех пор мы многократно встречались и беседовали о математике, о друзьях и знакомых. Эти встречи были не столь часты — 2-3 раза в год, я больше слушал и расспрашивал, во всяком случае в первые годы. Думаю, что постепенно у нас установился внутренний контакт, который и называется дружбой. Было понятно, почему общение с ним не у всех получается — он бывал безапелляционен, иногда поверхностен, но всё это было второстепенным в его интеллектуальном облике.

Мы (в Ленинграде) часто приглашали его выступить на заседаниях Математического общества, на семинаре В. И. Смирнова и О. А. Ладыженской и др. Мне кажется, он любил приезжать к нам и беседовать с близкими ему по работе коллегами (с Л. Д. Фаддеевым, О. А. Ладыженской, М. С. Бирманом, В. С. Буслаевым и др.). Я бывал с ним вместе во многих школах (Казивели-1966, Казань-1971, Ташкент-1975, Минск-1979 и др.). Везде его участие было активным и существенным.

Обращало на себя внимание то, с каким интересом и желанием адаптировать он относился ко всему интересному и новому в математике, услышанному им в школах, — он хотел мгновенно найти этому место в своём непрерывно строящемся математико-физическом универсуме. Помню, что он рано указал роль современной топологии в математической физике. С другой стороны, он не скрывал своего отношения к псевдонаучным или неглубоким работам и докладам, в особенности в околофизических областях.

Березин занимал совершенно особое место в московском и союзном математическом мире. Он начинал как один из самых успешных и любимых учеников Гельфанда по теории представлений. Огромное число фактов, открытий, связей, найденных в этот период — к концу 1950-х годов, — составили ядро этой новой теории. Роль самого Гельфанда в этом невозможно переоценить. Однако многое было тогда лишь намечено, кое-что нуждалось в исправле-

ниях и дополнениях. Это можно отнести и к замечательным первым работам Березина, выполненным вместе или под руководством учителя. Недостатки ли этих работ или иные обстоятельства были причиной размолвки, но, к сожалению, взаимодействие учителя и ученика прекратилось сравнительно рано и уже не возобновлялось. Работая с Гельфандом позже, в 1970-х гг., и дружа с Аликом, я неоднократно пытался убедить обоих в полезности и важности их сближения, но не очень преуспел в этом.

Если говорить о роли Березина в развитии нашей математики, то я бы начал с того, что, на мой взгляд, именно с него начался тот важнейший переход к физике в работе многих математиков. Он первым в своём поколении, следуя своему пониманию науки, решился потратить огромные усилия на то, чтобы войти в теоретическую физику как физик, а не только, как математик, и сумел сделать это. Можно долго говорить о том, в какой степени это можно и нужно делать, оставаясь математиком, есть примеры того, как математик становится физиком, но Березин нашёл свою пропорцию и стал активнейшим математическим физиком и пропагандистом физических задач. Именно он ввёл в этот круг идеи многих математиков, ставших выдающимися специалистами в теории математических моделей современной физики. Многие из них являются авторами этого сборника. Ведущие физики 1930–1950-х гг., подчас плохо владевшие математической техникой тех лет, относились к математике как минимум сдержанно. В том, что к 1970–1990-м годам положение резко изменилось, большая заслуга Березина.

Его любимыми темами были квантование и грассманов анализ. В создании грассмановского анализа и суперматематики Березин сыграл решающую роль. По существу, общую программу построения этой теории он наметил ещё в своей первой книге. Кстати, эта книга, написанная первоначально как статья, пролежала несколько лет в редакции «Успехов математических наук» без движения, а затем была опубликована в серии «Библиотека Успехов». Много лет он с энтузиазмом рассказывал об этих идеях и убеждал многих заняться ими, но настоящий взрыв интереса был много позже.

Алик, увы, успел захватить лишь начало безоговорочного признания своих идей. Сейчас суперматематика (название случайное и неудачное, но Березин тут ни при чём) стала чем-то вроде параллельной математики: всякий результат должен иметь свой «супераналог».

Вклад Березина в математическую теорию квантования столь разнообразен, что коротко его охарактеризовать невозможно. Я отмечу лишь несколько моментов. Популярное понятие квантовой группы является развитием идеи деформации универсальной обёртывающей, которую высказывал Березин, правда не в той форме, которая стала достижением 1980-х годов. История и фундаментальная роль скобки Ли — Березина — Кириллова — Костанта, также возникшей в связи с квантованием, хорошо известна. Как мне показалось, Березин считал цикл работ и идей по квантованию своей основной и излюбленной темой.

Я помню многие разговоры с ним на разные темы. Большинство из них так или иначе связаны с ответвлениями от основной темы и могут служить примерами приложения физических идей к чисто математическим проблемам. Одна из них — аппроксимация в динамических системах — получила широкое развитие, хотя роль Березина осталась в тени. Он интересовался континуальными интегралами (здесь он справедливо считал себя одним из зачинателей), теорией факторов фон Неймана, C^* -алгебрами, асимптотическими задачами в алгебре и др. Все разновидности спектральной теории операторов, теории рассеяния, теории спектров матриц и дифференциальных операторов — всё это было всегда в центре его внимания. Помню дискуссии о вариационном исчислении, о неголономной механике ¹⁾, алгебраических аспектах теории интегрируемых систем.

Наследие математика далеко не исчерпывается его печатными работами и даже рукописями; трудноуловимая для последующих поколений часть наследства учёного остаётся в его докладах и беседах, в тех идеях, которые он обдумывал, а затем популяризовал среди коллег, наконец в его влиянии на других. Все эти компоненты в изобилии присутствовали в творчестве Березина: своим талантом и энтузиазмом, своими работами, семинарами, многочисленными до-

¹⁾Т. е. с неинтегрируемыми ограничениями на скорости. Наиболее внятный обзор неголономной механики см. в лекциях Вершика в дополнении к книге В. Сергеева «The thermodynamic approach to market» ([arXiv:0803.3432](https://arxiv.org/abs/0803.3432)). А самое забавное и неожиданное — тот факт, что СУПЕРмногообразия Минковского (те, на которых физики высоких энергий строят все свои модели) все до одного неголономные. И многие проблемы в построении моделей теоретической физики связаны не с суперизацией, а с неголономностью, для описания специфики которой дифференциальная геометрия не была достаточно разработана. — *Прим. ред. Д. Л.*

кладами и контактами он сумел привлечь к новым задачам многих известных и молодых математиков.

Его научная биография, богатая научными событиями, оборвалась рано. Сложности советской жизни талантливого, не вполне лояльного учёного, а к тому же и еврея, не прошли даром для Алика. Не хочется перечислять здесь все несправедливости и удары, обрушивавшиеся на него со стороны властей и недоброжелателей. По природе мужественный человек, Березин находил силы встать выше мелочей жизни и работать, работать. Реализовался ли его незаурядный дар полностью? Можно ли ответить на этот вопрос? И всё же, я думаю, он успел сказать нам очень многое.

1995 г.

ОБ АЛИКЕ БЕРЕЗИНЕ И О ЕГО ВРЕМЕНИ

Виктор Паламодов

В 1964 году, вскоре после окончания аспирантуры, я оказался в подразделении механико-математического факультета, где в то время работал Феликс Березин. Ровесники Феликса называли его Аликом. Я был моложе, и восьмилетняя разница в возрасте тогда казалась большой.

Мы сблизились с ним в 1968 году, после того как оказались в числе 99 математиков, подписавших протест на арест Есенина-Вольпина — история, хорошо известная моим ровесникам. Есенин-Вольпин был из немногих смелых людей, кто публично протестовал против судебного преследования Синявского и Даниэля.

Жизненный путь Алика был суров: безотцовщина, скитания, голодные военные и послевоенные годы. Он кончает мехмат в памятном 1953 году — разгар борьбы с «космополитизмом» и юдофобской кампании, названной «делом врачей». Алик был рекомендован в аспирантуру мехмата, но начальство не допустило его к вступительным экзаменам. В результате после окончания университета Алик оказался в вечерней школе, где проработал преподавателем математики три года.

Смерть лидера режима и последующее политическое развитие привели к ослаблению запрета, и в 1956 году Алик был принят в МГУ на работу на мехмат и даже сразу зачислен в штат. Быстро пройдя две академические ступени — кандидатскую и докторскую диссертации — и проявив яркий талант, Алик мог бы стать претендентом на должность профессора в упомянутом подразделении. С научной точки он, несомненно, этого заслуживал, но никогда не получил этой должности. Почему? Вопрос «почему?» представлялся тогда наивным. По логике власти основанием к запрету на должность было то обстоятельство, что, будучи недопущенным к поступлению в аспирантуру в 1953 году из-за своей «врачебной» национальности, Алик получил в своем «досье» отметку о небла-

гонадежности, которая уже никогда не подлежала отмене даже после публичной реабилитации всех врачей, что дали имя той кампании.

Тем не менее власть принимала во внимание квалификацию «винтика» и собирала на мехмате преподавательский и научный потенциал, который намного превосходил потребности самого факультета. Для чего? На моей памяти, кроме Монголии, где Алик проработал недолгое время, была история с посылкой нескольких моих сверстников в Гвинею, позже несколько коллег поехали (или были направлены) на Кубу, кто-то отправился в Афганистан в период советской интервенции. Ясно, что нас рассматривали как компоненту советской экспансии по всему миру.

Кто персонифицировал власть на мехмате? Немало мог сделать ректор Иван Георгиевич Петровский, он-то и добился принятия Алика и Роберта Минлоса на младшие научные должности. При этом, учитывая сопротивление «своего» аппарата, Петровский персонально ходил во все инстанции с бумагами Березина и Минлоса для их оформления на работу в университет. Декан факультета имел весьма ограниченные властные функции, к тому же местный партком мог его «съесть», как это и произошло однажды на моей памяти. Настоящие «руководящие указания» шли из парткома МГУ, который находился под пристальным вниманием ЦК КПСС.

Запрет на выезд за рубеж был в числе многих тогдашних запретов и предписаний, таких как: не слушать «враждебное» радио, не читать журналы, которые издаются за рубежом и доступны вроде бы легально некоторым лицам, и т. д. Выезды за границу предоставлялись (весьма скупой) некоторым особо доверенным лицам. Для Алика запрет на общение с зарубежными коллегами был очень болезненным, и он этого не скрывал в наших разговорах. В то время не было видно перспективы ослабления этого и других запретов. Советская власть казалась вечной в масштабах человеческой жизни!

На самом деле, её распад начался ещё в 1953 году, когда новые лидеры отказались от массовых чисток и репрессий, а без этих средств система стала разваливаться. Мало кто понимал это тогда, когда мы были молоды, азартно работали, жаждали общения и признания.

Вопрос выезда за границу и контактов с иностранцами был сложным и для власти в то «вегетарианское» время — ведь каждый, кто побывал за границей и не остался там, представлял проблему,

так как его благонадежность после знакомства с Западом автоматически ставилась под сомнение. В то же время официального запрета на легальное пересечение границы не было. Такой запрет затруднил бы позиции левых партий на Западе, являвшихся важным средством давления на свои правительства с целью ослабить их противодействие советскому влиянию и экспансии (кампания против «Полярисов», антивоенные выступления и т. д.). В этой ситуации власть прибегала к паллиативным мерам: не отрицая права «населения» на попытки выезда, всячески саботировала его реализацию.

Контроль над корреспонденцией, приходящей в МГУ из-за рубежа, был одной из таких мер. Как мне рассказывали, зарубежная почта мешками отправлялась в незаметное помещение Главного здания МГУ и после «обработки», длившейся неделю или больше, крупными порциями появлялась на механико-математическом факультете. Это было заметно, поскольку все почтовые ячейки одновременно заполнялись пачками писем в авиаконвертах характерного образца. Эта как бы не существующая, но «важная» служба, видимо, не справлялась с потоком писем, многие из которых содержали приглашения на научные встречи. Целый ящик в письменном столе Алика был забит такими письмами. Его попытка выехать в ЦЕРН (Женева) на продолжительное время получила чёткий отказ, а после того как он обратился к новому ректору Р. Хохлову с письмом о бедственном положении на факультете, Алик окончательно был лишен всякой возможности выезда за рубеж.

Я был в аналогичной ситуации, но время от времени принимался «оформлять документы» без особой надежды, лишь с целью протиснуть сопротивление системы. Процедура «оформления» включала получение порядка 15–20 подписей или «виз» и прохождение четырех или пяти партийно-гэбэшных инстанций. Обычно дело стопорилось на уровне факультета. Помню, однажды я принес письмо с приглашением главе «МИД» факультета по фамилии Кудрявцев. Прочитав письмо, с плохо скрываемым раздражением он поднял на меня свои бесцветные глаза:

— А где конверт от этого письма?

Я показал ему конверт. Внимательно осмотрев его, он сказал:

— Вы вряд ли успеете пройти медкомиссию и оформить все документы к дате, указанной в приглашении.

Ответ меня не удивил, но я задумался, зачем он осматривал конверт?

По всей видимости, он убедился, что конверт не прошёл перлюстрацию.

Примитивный способ перлюстрации путём обработки конверта паром оставил бы заметный след на бумаге. Позднее мне говорили, что технику перлюстрации в МГУ усовершенствовали, будто бы теперь в конверт могут ввести катетер с миниатюрной камерой, через которую текст выводится на экран. Другой способ вроде бы состоял в том, что письмо, написанное на полупрозрачной бумаге, освещали сильным светом, а изображение, полученное на просвет, обрабатывали с помощью специальной компьютерной программы, которая дигитально разворачивала сложенную в конверте втрое страницу письма. Я, однако, не верил, что такие способы могут успешно работать со всем потоком корреспонденции. Однажды я заметил, что конверт, который я получил на факультете, лишён боковой кромки — она была просто срезана острой бритвой!

Впрочем, Алик не был совсем лишён общения с иностранцами. Партком факультета сделал ему не подлежащее отказу предложение стать научным руководителем студента, приехавшего из Египта. В одной из долгих прогулок по подмосковным лесам он с юмором рассказывал, что этот египтянин не изнурял себя научным трудом, понимая ситуацию Алика, который должен был отвечать перед начальством за его защиту. Так продолжалось до тех пор, пока режим Насера в Египте не сменился властью Садата, чьё отношение к советским намерениям было совсем иным. Египетский аспирант быстро понял, что его больше не будут тянуть за уши, и начал заниматься усерднее.

Во время тех лесных прогулок было невозможно избежать разговоров на политические темы. Однажды я показал одну из карт Подмосковья, так называемую туристскую карту, указывая на её грубое несоответствие географии места, которое я хорошо знал. Алик объяснил, что это не опечатка, искажения вносятся намеренно!

— Зачем?

— Для того, чтобы мы, т.е. простые туристы, не чувствовали себя хозяевами в своей стране!

Он мне показал в уголке карты мелкую надпись вроде «Составлено Управлением ГК...», которая означала подразделение в КГБ.

Где-то в шестидесятые годы меня настиг поток самиздата. Я помню, что первым таким текстом, который я прочёл, была известная программа А.Д. Сахарова. В той программе Сахарова шла речь

о конвергенции «социализма» и капитализма, т.е. об их действительном или ожидаемом сближении. Грёзы Сахарова представлялись наивными; их реальный смысл стал мне ясен значительно позднее. Этот самиздатский текст указывал начало эволюции Андрея Дмитриевича от главного оружейника режима к правозащитнику, образ которого заслонил прежнего Сахарова.

Роль Сахарова в недавней истории противоречива. Он, совместно со своими сотрудниками, вручил жестокой власти технологию водородной бомбы. Помнится, первое публично признанное испытание этого оружия произошло в 1956 году, а вскоре Советская Армия вторглась в Венгрию. Взаимосвязь этих событий очевидна. Отмирание советской системы без водородного оружия могло бы быть более быстрым, и Алик успел бы увидеть «свет в конце тоннеля».

Смысл пророчества Сахарова я понял значительно позже: эти системы действительно в чем-то конвергируют! Централизация власти в Европейском Союзе, разрастающаяся Брюссельская бюрократия, квазиидеология, состоящая из тошнотворной политкорректности и ликующей содомии, лицемерие и двойные стандарты, беспринципная внешняя политика и вооружённая агрессия на Юго-Востоке Европы! Думаю, всё же это не полная аналогия: Европа не повторяет развитие СССР, а движется к упадку по своей собственной траектории, являя лишь сходные симптомы.

Пространство научной деятельности внутри «большой зоны» было весьма ограничено из-за сурового научного (и личного) климата. В условиях полуфеодалных отношений в науке академическая карьера была весьма затруднена для тех, кто не состоял при каком-либо научном «бароне». Помню обращённый ко мне вопрос одного провинциального «барончика»:

— А с кем Вы работаете, Виктор Павлович? (То есть на кого Вы работаете?)

При этом Алик сохранял независимость в поведении и в своей научной позиции. Это было ключевой чертой его характера. Невозможно было представить себе Алика, работающего на кого-либо или в какой-либо области ради некоего авторитета. И. М. Гельфанд, бывший активным в то время на факультете, на первых порах помогал Алику, рекомендовал его ректору. Спустя некоторое время отношение Израиля Моисеевича к Алику, рано ставшему независимым исследователем, изменилось. Между ними произошёл острый

конфликт, который Алик болезненно переживал. Суть обиды Алик мне объяснил, но я не стану её здесь описывать.

Физика, точнее новая математическая физика, была его основной областью. Большое влияние на Алика оказал, видимо, знаменитый семинар Льва Давидовича Ландау. Известно, что активное участие в этом семинаре было занятием не для слабонервных. Однажды Алик был настолько шокирован резкостью выпада Ландау в его адрес, что высказал по адресу Льва Давидовича афоризм, который мне запомнился: «Масштаб учёного-физика характеризуется размером вреда, который он нанёс науке».

Но несмотря на изоляцию и трудности прямых профессиональных контактов, Алику всё же удалось «спеть свою песню». О значении вклада Березина в науку подробно написал Роберт Минлос. На моей памяти Алик был поглощён созданием «суперматематики», как эта область тогда называлась. Он отыскивал «супераналоги» для базисных алгебраических и аналитических конструкций и пытался изложить их в систематическом виде. Но для завершения работы, как было им задумано, у него не хватило времени...

Вклад Алика в суперанализ и теорию супергрупп теперь всемирно оценён и термин «березиниан» необратимо вошёл в науку. Общая концепция квантования, выдвинутая и развитая Феликсом Березиным более 30 лет назад, приобретает сейчас всё большее признание. Все книги Березина переведены и переиздаются вплоть до последнего времени.

Не всё в той жизни было так мрачно и беспросветно. Возможность оказаться далеко от города, например в лесу, была главным лекарством для психики Алика, нагруженной негативными эмоциями. Именно в лесу или где-то ещё, где не было видно строений или развалин, напоминавших о почти вездесущем режиме. Пешие, велосипедные, лыжные вылазки и дальние походы были для Алика главным удовольствием и средством сохранения душевного равновесия.

Был ещё один важный мотив в выборе путей его странствий...

Летом 1969 года группа математиков, более 50 человек, оказалась в дальнем путешествии, организованном красноярскими математиками. Теплоход с участниками научной конференции на борту отплыл из Красноярска вниз по Енисею. После пары дней плаванья мы оказались меж безлюдных берегов, покрытых необозримой тайгой. Стояла жаркая июньская погода, но мы были недоступны

для комаров посреди широкой реки, а 20 июня наше судно пересекло полярный круг недалеко от Игарки. Мы наблюдали солнце, скользящее над горизонтом несколько суток подряд. На стоянках мы прыгали с палубы в теплую енисейскую воду, темную от гниющих на дне бревен. Из Дудинки отправились по железной дороге в город Норильск, трагически известный в советской истории. Алик внимательно вглядывался в развалины каторжных лагерей, встречавшихся по пути. Остатки колючей проволоки и покосившиеся столбы были видны повсюду по обе стороны железнодорожного полотна. Это не было праздное любопытство, он, несомненно, пытался представить каторжную жизнь в ГУЛАГе, известную нам по самиздату, и, видимо, примеривал её на себя.

После возвращения теплохода в Красноярск группа из пятнадцати человек отправилась на следующее приключение. Мы пошли в поход через тайгу по направлению к реке Мана. В духоте влажного леса насекомые получили свой шанс. По предложению Алика путешественники — все мужчины — предприняли ответные меры. Мы разделись догола, оставшись только в обуви, а одежду запихнули в рюкзаки. Двигаясь цепочкой по густой тайге, каждый постоянно рассматривал спину идущего впереди, отыскивая клещей, которые прыгали на нас с ветвей, ориентируясь на запах, и потом ползали по спинам, чтобы отыскать удобное место для укуса. Прочие насекомые никого не волновали: они не были переносчиками бруцеллёза и энцефалита.

Выйдя к реке километрах в двадцати выше впадения Маны в Енисей, мы стали готовиться к сплаву. Алик взял на себя роль лидера и стал уверенно плотить бревна. Древесина, заготовленная в верховьях, просто сбрасывалась в реку для самосплава. Свежесрубленные бревна лежали на берегу в любом месте реки. Плот получился отличный, и мы с восторгом прошли все пороги, обгоняя другие плоты, построенные менее квалифицированными руками.

Стиль жизни сложился у Алика в трудные (как и у многих его сверстников) детские и отроческие годы. В его облике и одежде не было никаких признаков официальности вроде галстуков, белых рубашек и т. д. Он не носил никакого подобия пиджака и этим сильно отличался от окружавших его функционеров и конформистов. Рубаша блеклых цветов в клетку, ворот которой никогда не застегивался, зимой поверх неё свитер. Очки он надевал только в случаях крайней необходимости, вероятно, и в этом проявлялся его минимализм.

Старомодный портфель завершал ненавязчивый аскетический стиль, который был для него органичным. Ясно было, что дома никто не оказывает на него давления с целью придать ему более конформный облик. К нему вполне приложима риторическая фраза Остапа Бендера «Разве я похож на человека, у которого есть родственники?». Эта фраза в ещё большей степени характеризует его мать, Эсфирь Абрамовну Рабинович, его единственного родного человека, оставшегося в живых из некогда многочисленной семьи.

Также весьма упрощёнными были ритуалы общения Алика с друзьями и знакомыми. Однажды он завёл со мной разговор на необычную тему, рассказав с мягким юмором об одной даме, с которой он, видимо, недавно познакомился. В его словах я почувствовал необычные для него ноты. Спустя год или около того я оказался у него дома и обнаружил, что его квартира сплошь завешена детскими пелёнками. Но мой приход не послужил поводом для формального знакомства с его молодой женой и с Наташей, его новорождённой дочерью. Новые обстоятельства не изменили стиль жизни Алика. С Еленой Карпель и Наташей я познакомился значительно позже...

Летом 1980 года Алик получил возможность отправиться на Колыму в качестве участника геологической партии. Он и раньше настойчиво добивался этого шанса, открывавшего для него возможность осуществить давнишнюю мечту — побывать в ТОМ месте. Слово «Колыма» много говорит для наших соотечественников, она описана в воспоминаниях выживших лагерников. Под «Колымой» понималась система ГУЛАГовских лагерей, расположенных в бассейне реки с этим названием. Из географии понятно, что климат там крайне суров, а побег невозможен. Геологическая партия, где работал Алик, должна была вернуться, сплавляясь по реке Сеймчан, притоку Колымы. Я остро завидовал Алику, но произошло совсем не то, что ожидалось. Мне пришлось — таки увидеть Магадан. Я возвращался в Москву вместе с Леной Карпель, сопровождая гроб Алика. Горечь невосполнимой потери заполняла душу...

Наука для Алика была способом преодолеть ущербность физического пространства-времени, в котором он жил. Эта наука осталась с нами и со всем миром навсегда.

24 декабря 2007 г.

ПОДАРОК СУДЬБЫ

Михаил Шубин

Это чисто личные заметки о моём знакомстве и отношениях с Феликсом Александровичем Березиным.

Я уверен — моя встреча с Ф. А. Березиным, возможность довольно долгое время общаться с ним и у него учиться были одним из лучших подарков моей судьбы.

Впервые мы встретились в 1967 году на школе по спектральной теории и теории представлений в маленьком местечке Загульба, летнем курорте на Каспийском море недалеко от Баку. Мне было тогда 22 года, я только закончил первый год учёбы в аспирантуре под руководством профессора Марка Иосифовича Вишика.

В здании, где нас разместили, было, наверное, мало одноместных номеров, да я и не рассчитывал на такую роскошь для себя лично. Меня поселили в трёхместной комнате, где кроме меня оказались Ф. А. Березин и ещё один выпускник моего возраста Гриша Литвинов. Феликсу Александровичу было тогда 37 лет, и с нашей с Гришей точки зрения он был очень знаменит и заслуживал самого высокого уважения. Но для администрации школы, очевидно, он не дотягивал до того уровня, чтобы заслужить отдельную комнату. Так или иначе, все трое мы мирно жили в одной комнате. Поначалу, насколько я теперь понимаю, Феликс Александрович пристально наблюдал за нами и внимательно слушал наши разговоры о математике. В какой-то момент он спросил:

— Не хотите ли вы выучить квантовую механику?

— Хотим, конечно, — ответили мы.

То, что за этим последовало, было полной неожиданностью для меня и для Гриши:

— Давайте тогда напишем книгу о ней, — предложил Феликс Александрович.

Не знаю, что почувствовал Гриша, но меня это предложение потрясло. В ту пору мне казалось, что авторы книг — это какие-то полубоги, не менее того. Увидеть собственное имя на обложке книги представлялось тогда чем-то недостижимым. Конечно, это было очень привлекательное предложение. Я не мог поверить, что Феликс Александрович говорит всерьёз, приглашая таких неопытных людей, как мы с Гришей, к соавторству, но со всей очевидностью он говорил серьёзно. Он объяснил, чего от нас хочет: мы должны были превратить в книжку некие конспекты его лекций, добавив кое-что из того, что он нам объяснит.

Вот так начались мои отношения с Ф. А. Березиным.

К сожалению, книжка продвигалась очень медленно. В большинстве разделов физики я был совершенно неграмотен, равно как в спектральной теории и почти во всех требуемых аспектах математики. В конспектах Феликса Александровича почти не было доказательств, и нам приходилось их додумывать самим — это было легче, чем искать в книжках и статьях других авторов, потому что в библиотеках не было нужного материала, не говоря уж о полном отсутствии копировальной техники (ксероксов и подобного рода вещей). Феликс Александрович готов был прийти на помощь, когда мы его об этом просили, но в его доказательствах обычно обнаруживались лакуны, а мы не осмеливались обращаться к нему за дополнительными разъяснениями. Гриша оставил это дело после того, как овладел основами квантовой механики и написал одну главу, а я продолжал, и, как понимаю лишь теперь, за всю жизнь это была моя наиболее интенсивная попытка чему-то научиться.

Я разобрался не только в квантовой механике, но также в спектральном анализе, спектральной теории и теории представлений. Больше того, исчез страх перед физикой и физиками. Вначале мне не очень хотелось посещать семинар Березина, где говорили о физике, потому что боялся, что ничего не пойму. Однажды я поделился этими опасениями с Феликсом Александровичем, а он спросил:

— Знаете ли Вы уже, что в квантовой механике физическая величина — это самосопряжённый оператор?

— Да, знаю.

— Ну, тогда вам больше нечего опасаться, — заверил меня Феликс Александрович.

После этого, слушая его выступления, я убедился, что почти так оно и есть. В дальнейшем подобная ситуация иногда вновь возни-

кала, но я уже не боялся докладов по физике, осознав, что не так уж многое требуется, чтобы их понять.

Обычно, чтобы поговорить о математике, я приходил к Феликсу Александровичу домой. В МГУ не было специальных помещений, поэтому люди в основном работали дома. При таких встречах частенько он делился со мной своими размышлениями не только о математике, но и о разных аспектах жизни. Он был отважный человек, никогда не отступал от своих моральных принципов, хотя и не был «законченным» диссидентом.

Иногда мы вместе катались на лыжах. Для меня это было тяжёлым испытанием, потому что Феликс Александрович был намного сильнее и на лыжах ходил значительно лучше меня. На таких прогулках мы тоже много говорили о жизни вообще, в различных её проявлениях.

Наша совместная работа над книгой, к сожалению, так и не была завершена в том виде, как её замыслил Феликс Александрович. А всё из-за того, что я был ленив, и ещё мне казалось, что самолично способен делать что-то и поинтереснее. Предварительная версия была опубликована на русском языке в 1973 году под названием «Лекции по квантовой механике». Однако это была лишь малая часть того, что планировалось. Потом работа продолжалась медленно, но, что удивительно, Феликс Александрович никогда не выговаривал мне за это, хотя я, безусловно, заслуживал нагоняя.

Только после его трагической смерти я осознал, какое преступное легкомыслие проявил по поводу этой работы. Мне вдруг стало ясно, что я потерял уникальную возможность больше узнать у Березина, но ведь я был уверен, что у меня ещё полно времени для завершения книги на требуемом уровне. Только в 1983 году, под воздействием А. С. Шварца, я закончил эту работу, как смог, и на русском языке вышла книга под названием «Уравнение Шрёдингера». Перевод на английский занял ещё восемь лет, хотя работа над ним началась немедленно (английская версия была опубликована Клювером в 1991 году).

Другой период моей жизни, когда Ф. А. Березин играл очень важную роль, — время, когда я представил первоначальный вариант докторской диссертации (1974 год). Я кое-что сделал в области спектральной теории почти периодических дифференциальных операторов, в частности, нашёл способ, как в этом случае можно применить алгебры фон Неймана.

Все окружающие говорили, что я собрал достаточный материал для диссертации. Все, кроме Феликса Александровича. Он объяснил мне, что в работе недостаёт применения полученных результатов в математической физике, и указал направление, в котором надо искать, где это применение будет полезным. Феликс Александрович обратил моё внимание на физику твёрдого тела и физику неорганизованных систем, высказав предположение, что интегральная плотность состояний может совпадать с функцией спектрального распределения, которое я вычислил с помощью алгебр фон Неймана. В итоге я нашёл подтверждение этой догадки, что составило одну из лучших глав моей диссертации. Феликс Александрович даже настоял, чтобы основные результаты были опубликованы в журнале «Успехи математических наук» и чтобы я сделал доклад на Московском математическом обществе.

Всё это я проделал, хотя в то время сомневался, действительно ли надо на это тратить время, потому что все эти действия привели к длительной отсрочке защиты (а я прекрасно знал, что на защиту подавались диссертации гораздо более низкого уровня и без этих добавлений). Но впоследствии я имел возможность убедиться, как прав был Феликс Александрович, давая мне этот совет. Вскоре, после того как диссертация, уже вполне удовлетворяющая всем требованиям Березина, была представлена к защите, кое-кто начал мутить воду, пытаясь меня утопить, так что для меня началась битва не на жизнь, а на смерть. И уж не знаю, что было бы, если бы я проиграл. Но я выиграл благодаря поддержке таких выдающихся ученых, как В. Арнольд, А. Колмогоров, В. Марченко, В. Маслов, С. Новиков, С. Соболев, Л. Фаддеев. Вряд ли они смогли бы мне помочь, если бы я сделал лишь то, что намеревался до разговора с Березиным.

Теперь уже имя Ф. А. Березина навеки вписано в математику и математическую физику хотя бы благодаря понятиям «березиниан» и «интеграл Березина» в антикоммутирующих переменных. Но следует помнить, что он также был человеком высоких моральных принципов и, кроме того, очень добрым и деликатным. Это помогало его ученикам и тем, кто вместе с ним работал или просто составлял его окружение. Многие студенты, посещавшие его занятия, запомнили Феликса Александровича как одного из тех преподавателей, кто не смотрел на студентов свысока, а в моём восприятии таких в Москве было совсем немного.

Лично я уверен, что моя встреча с Ф. А. Березиным в 1967 году изменила мою жизнь, и бесконечно ему за это благодарен.

О МОЕМ УЧИТЕЛЕ ФЕЛИКСЕ АЛЕКСАНДРОВИЧЕ БЕРЕЗИНЕ

В. Ф. Молчанов

Мне посчастливилось быть учеником Феликса Александровича Березина. Вместе с Джавватом Хаджиевым мы были его первыми аспирантами (1962—1965 гг.). Воздействие этой незауряднейшей личности на меня было определяющим. Мое отношение к весьма многому в математике и вне её было воспитано под его влиянием. Пожалуй, всё что я сделал в математике — это решение и развитие поставленных им задач. Его безвременная кончина была для меня сильнейшим ударом, без него до сих пор я чувствую себя осиротевшим.

Впервые я увидел Ф.А., когда, будучи студентом второго курса мехмата МГУ, пришел на семинар «Задачи из алгебры и анализа», которым он руководил вместе с Р.А. Минлосом. До сих пор помню, что было на этом занятии: двойко-периодические функции по книге Дж. Спрингера «Введение в теорию римановых поверхностей», даже помню докладчика — им был И. Корнфельд (кажется, студент четвертого курса). Мне очень понравилось, как Ф.А. вёл семинар, его точные и остроумные комментарии, вся атмосфера семинара, всё было любопытно, интересно и вдохновляюще. И внешне он был весьма привлекательным: высокий открытый лоб, умный, пронизательный и насмешливый взгляд, покоряющая улыбка, сам — молодой, подтянутый, быстрый. С этого времени я на всю жизнь к нему приклеился. Это было прекрасное и незабываемое время — время, когда я учился на мехмате (был студентом и аспирантом), а моим учителем был Ф.А. Семинары Ф.А. были для меня основными (наряду с семинарами И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова, П. К. Рашевского,

М. А. Наймарка и Д. П. Желобенко, А. А. Кириллова, Э. Б. Винберга).

В это время (в начале 60-х годов) на мехмате МГУ появилась группа студентов, переведённых из университетов Узбекистана (Ташкентского и др.). Среди них самым сильным был Джавват Хаджиев, ставший вскоре моим близким другом. Вместе мы писали под руководством Ф. А. курсовые и дипломные работы, и он нас обоих вместе взял к себе в аспирантуру.

Стиль его руководства учениками (аспирантами и др.) был примерно следующим. Задачу он ставил в нескольких фразах, вместе с указаниями на то, зачем она нужна ученику (мне, Джаввату и др.) и вообще теории. Задачи оказывались удивительно глубокими и с большим будущим. Если даже задача не решалась успешно в полном объеме, работа над ней оказывалась чрезвычайно полезной. Он давал большую свободу: если у тебя не было ничего дельного, ты мог не приходить к нему месяц и больше. Но если хоть какие-нибудь результаты были, он был готов обсуждать их в долгих беседах. Он сразу видел слабые места или пробелы, ухмылялся, говорил: «Старого воробья на мякине не проведёшь», и мы должны были удаляться и исправлять рассуждения. Он никогда не спускался до подкидывания своих результатов, он воспитывал в учениках самостоятельность. Это была жестокая, но хорошая школа. По-видимому, для весьма сильного в то время мехмата это был идеальный стиль. Как-то на своём семинаре Израиль Моисеевич Гельфанд со свойственной ему парадоксальностью сказал: «Настоящий аспирант должен быть таким, у которого руководитель может поучиться. У меня было два настоящих аспиранта, это Березин и Кириллов».

Кстати, о сильном мехмате: мне кажется, что как раз на 1950–60-е годы пришелся расцвет мехмата, я это мнение слышал от многих людей.

Вообще, Ф. А. ценил своё время и старался не заниматься борьбой с ветряными мельницами. Помню его шуточный (впрочем, достаточно серьёзный) принцип: «Если я вижу, что студент может пересдать, то я ставлю ему „неуд“, а если я вижу, что он не может пересдать, то я сразу ставлю ему „удовл“».

Рукописи учеников (статьи, диссертации) Ф. А. обычно читал в присутствии этих учеников, читал придирчиво и педантично, это его редактирование было чрезвычайно полезным и запоминалось на всю жизнь.

Ф.А. требовал от нас, чтобы мы рассказывали свои результаты на возможно большем количестве семинаров, и всегда спрашивал: «Вы рассказывали это тому-то или тому-то?» Когда я, повинувшись сыновнему долгу, решил вернуться после окончания аспирантуры в Тамбов (удивительное, по мнению многих, решение), он сказал: «Володя, Вы должны каждый месяц по крайней мере три дня быть в Москве», и я это его настояние неукоснительно выполнял: приезжал в Москву, был на семинарах, докладывался ему и т. д.

Вообще, мне кажется, с нами (учениками, аспирантами...) он был достаточно суров, особенно вначале. После защиты своей докторской диссертации он заметно помягчел. Между нами всегда была дистанция: учитель — ученик. Но с другой стороны, у нас с ним были достаточно близкие отношения (насколько это возможно при той дистанции, о которой я сказал), он часто делился со мной своими оценками разных вещей, событий и людей. Конечно, все его мысли и суждения находили во мне внимающего, заинтересованного и отзывчивого слушателя. Я часто бывал у него дома и на даче, разговаривал с его мамой и его женой и нянчил его дочь Наташу — ей было 2–3 года.

Первая задача, которую Ф.А. мне поставил, была связана с вычислением характеров симметрической группы. Он сказал: «Повозитесь с конечными группами, чтобы у вас появилась интуиция для групп Ли». Неприводимый характер симметрической группы есть собственная функция для операторов свёртки с характеристическими функциями классов сопряжённых элементов. Вопрос: нельзя ли, используя достаточно простые классы (транспозиции, тройные циклы и т. д.), получить уравнения для характеров, которые бы полностью определяли эти характеры? Такой подход, как я понимаю, он предложил в связи с его работами по операторам Лапласа на полупростых группах Ли. Задача оказалась весьма трудной, я получил некоторые интересные формулы в разных направлениях, по пути переоткрыл некоторые формулы А. Юнга, И. Макдональда и т. д. Но задача о явном вычислении характеров симметрической группы является, по-видимому, трансцендентно трудной задачей, и я отошёл в сторону. Через некоторое время, когда в мире возрос интерес к этой тематике (в связи с разными задачами из физики), Ф.А. попенял мне: «Вот, Володя, если бы Вы не бросили заниматься симметрической группой, Вы были бы первым специалистом в этих вопросах».

Джаввату Хаджиеву Ф.А. поставил некоторую задачу из теории инвариантов — сначала для группы $SU(2)$. Эта тематика была популярной в конце XIX и начале XX веков, затем интерес как-то упал. Задача оказалась интересной, Джаввату пришлось изучать старые работы классиков и старые книги (помню, как долго он возился с книгой Алексеева, изданной в 80-х годах XIX века). Но работы Джаввата дали толчок новому развитию теории инвариантов, их подхватили участники семинара Э. Б. Винберга (В. Л. Попов, Д. В. Алексеевский, А. Г. Элашвили и др.).

В какой-то день, в то время, когда я был в растерянности, не имея перед собой перспективы, Ф.А. нашёл для меня великолепную задачу. Я хорошо помню этот момент: он провожал меня по вечерней Москве от своего дома в Тихвинском переулке, мы шли уже по Пушкинской улице, и он сказал: «Володя, посчитайте сферические (зональные) функции на однополостном гиперboloиде. Они должны быть обобщёнными функциями».

Эти две фразы содержали целую грандиозную программу! Это сейчас все эти вещи стали классикой и фольклором, а тогда сферические функции были известны только на римановых пространствах, они были обычными функциями, а однополостный гиперboloид — это первый пример нериманова (псевдориманова) пространства. Формулы разложения дельта-функции по сферическим функциям для псевдоримановых пространств (формулы Планшереля) просто не было. Был, правда, один пример формулы Планшереля для псевдориманова пространства (мнимого пространства Лобачевского), полученной в другой форме И. М. Гельфандом и М. И. Граевым.

Мне пришлось строить всю теорию — для псевдоримановых пространств — с самого начала: с определения сферических функций, использующего H -инварианты, с определения преобразований Фурье и Пуассона, связанных с H -инвариантами, с нахождения метода разложения и т. д. и т. п. Мне удалось найти в явном виде формулу разложения дельта-функции по сферическим функциям для всех полупростых симметрических пространств ранга один (в частности для гиперboloидов произвольной сигнатуры и, в том числе, того самого однополостного гиперboloида). Явные формулы для произвольного ранга — дело будущего.

В то время, когда Ф.А. предложил мне задачу об однополостном гиперboloиде, он занимался построением квантования на классе

эрмитовых симметрических пространств (это римановы пространства). Поэтому он, естественно, предложил мне попытаться построить квантование в его духе сначала на этом самом однополостном гиперboloиде. Как я уже сказал, однополостный гиперboloид — псевдориманово пространство, он входит в класс так называемых параэрмитовых пространств. Имеется глубокая аналогия между двумя этими классами пространств, которая начинается на уровне координат (например, комплексные координаты на плоскости Лобачевского аналогичны орисферическим координатам на однополостном гиперboloиде, связанным с прямолинейными образующими) и продолжается на уровне формул и т. д. Но при переходе от римановых пространств к псевдоримановым трудности возрастают в чрезвычайной степени.

Сам Ф.А. в построении квантования на эрмитовых симметрических пространствах получил совершенно замечательные результаты (например, он нашел удивительно красивую формулу для собственных чисел некоторого оператора, который сейчас называется преобразованием Березина). Необходимым инструментом в построении служат представления, которые сейчас называются каноническими представлениями (термин взят из одной работы А. М. Вершика, И. М. Гельфанда и М. И. Граева), или представлениями Березина.

Кстати, несмотря на признанную роль Ф.А. в этом круге вопросов, на Западе иногда имеет место недооценка его вклада (возможно, из-за незнания русской математической литературы). Например, в одном случае мне пришлось приложить усилия для восстановления справедливости. Имеется некоторое множество значений параметра, которое было открыто Ф.А., и он этим гордился, но на Западе как-то оно стало называться множеством Воллака (the Wallach set), хотя у Воллака оно появилось через пять лет после Ф.А., я настаивал перед многими математиками, что справедливо называть это множество множеством Березина или хотя бы множеством Березина — Воллака (the Berezin — Wallach set). Похоже, это дало свои результаты.

Из задачи, которую поставил мне Ф.А., вырастает общая задача об изучении канонических представлений и построении квантования на параэрмитовых симметрических пространствах и, более общим образом, на симплектических симметрических пространствах. Она оказалась чрезвычайно интересной и плодотворной. Более того, многие конструкции можно перенести на произвольные полупростые

симметрические пространства. Во-первых, канонические представления надо рассматривать в весьма общей постановке, нужно отбросить стесняющее условие унитарности и рассматривать представления, действующие в весьма широких пространствах (в сечениях линейных расслоений, в обобщённых функциях и т. д.). Во-вторых, канонические представления порождают очень интересный класс так называемых граничных представлений. Изучение таких представлений — одна из самых интригующих задач анализа.

В целом вся эта теория может быть рассматриваема как построение некоторой неунитарной версии гармонического анализа на симметрических пространствах.

Развитие этой теории я рассматриваю для себя как задачу продолжения идей Ф.А. Влияние Ф.А. здесь несомненно, многие объекты носят имя Ф.А.: преобразование Березина, символы Березина, ядра Березина, представления Березина.

Добавлю, что сейчас эта тематика служит предметом исследований математиков из многих стран: Франции, Японии, Нидерландов, Швеции, Дании, США и др.

Я воспринял только одну из сторон многогранного таланта Ф.А.: гармонический анализ и квантование на симметрических пространствах. Наверно, для одного человека — для меня — этого вполне хватит. Другие задачи, которыми он занимался, — задачи, связанные с физикой (суперматематика и др.), — прошли мимо меня, быть может, к сожалению. Как-то я спросил его, почему он перебросился от математики к физике, он, улыбаясь, ответил в таком духе, что в математике ему задач по плечу уже нет, а вот в физике есть.

*Заведующий кафедрой математического анализа
Тамбовского государственного университета
имени Г.Р. Державина,
доктор физико-математических наук,
профессор В. Ф. Молчанов*

30 декабря 2007 года

НИЧТО ЧЕЛОВЕЧЕСКОЕ...

Григорий Литвинов

Феликс Александрович Березин — мой любимый учитель (оговорюсь, что есть у меня и другие любимые учителя, начиная с моего незабвенного научного руководителя Петра Константиновича Рашевского).

В середине шестидесятых годов я был участником студенческого семинара Ф. А. Березина по функциональному анализу и математической физике на механико-математическом факультете МГУ и этим семинаром очень дорожил. На семинаре в деталях (и с очень неожиданными комментариями руководителя) разбирались очень интересные конкретные задачи. Уже тогда я отчетливо понимал, что Феликс Александрович — великий математик и что он довольно сильно отличается от других профессоров и преподавателей (формально он тогда числился старшим научным сотрудником кафедры теории функций и функционального анализа).

Тем не менее общаться с Феликсом Александровичем было очень легко. Он очень внимательно относился к научной молодежи и тратил на нас много времени. Очень хорошо понимал наши психологические (и, разумеется, научные) проблемы и всегда был готов дать конкретный совет и поддержать. При этом никогда не давил на собеседника, был предельно деликатен и старался в максимально возможной степени учесть особенности способностей, интересов и характера молодого человека (это хорошо отражено в воспоминаниях Д. А. Лейтеса, см. настоящую книгу и её прототип на английском языке).

Кстати, читая забавные воспоминания Лейтеса (в особенности эпизод, связанный со мной), понимаешь, как обычно пишется история. В действительности дело было так: в конце шестидесятых годов была организована летняя математическая школа по функциональному анализу. Она проводилась на берегу Каспийского моря в Азербайджане, в поселке Загульба вблизи Баку. Так получилось,

что Феликс Александрович, Миша Шубин (мой однокурсник и друг) и я заняли отдельный «аппартамент» с гостиной, спальней, кухней, лоджией и т. п. Такая роскошь объясняется тем, что обычно в Загульбе отдыхала местная партийная верхушка.

Однажды Феликс Александрович сидел в гостиной и писал статью, связанную с моделью Изинга. Для этой области характерны чрезвычайно длинные формулы. При этом Феликс Александрович посматривал в какую-то книжку. Посмотрит в книжку — и напишет очень длинную формулу. Стало любопытно, откуда же черпается такая премудрость. Когда Феликс Александрович на короткое время отошёл от письменного стола, я подошёл и увидел, что он читал «Последние стихи о любви» Поля Элюара на французском языке. На мой вопрос, как связаны эти стихи с математической активностью, последовал ответ: «Таким способом удаётся растормозить подсознание».

Через некоторое время Феликс Александрович дочитал Элюара и спросил, нет ли у меня другой книжки. Не без ехидства я предложил прекрасный сборник научной фантастики Клиффорда Саймака. К моему разочарованию, картина не изменилась: заглядывая в книжку Саймака, Феликс Александрович продолжал выписывать длинные формулы. Зато через некоторое время обнаружилось, что незаконченная рукопись лежит на столе, а её автор лежит на диване и читает книжку. Ничто человеческое не было чуждо Феликсу Александровичу...

Примерно в это же время я спросил Феликса Александровича, как лучше всего выучить квантовую механику. «Можно прочитать много книг, но лучше одну написать. Давайте напишем!» — был ответ. Как раз в то время Феликс Александрович пытался получить от слушателей хороший конспект своих лекций по квантовой механике, но удовлетворительного текста ни у кого из них не оказалось. Тогда было решено, что конспект напишут люди, которые лекции не посещали, т. е. М. А. Шубин и я. Так возникло написанное при моем участии ротاپринтное издание Ф. А. Березина и М. А. Шубина «Лекции по квантовой механике» (МГУ, 1972).

Я написал вводную «физическую» главу «Основные понятия квантовой механики» (и часть обширного математического приложения) и при этом на каком-то уровне действительно выучил предмет.

В дальнейшем расширенная версия книги (под названием «Уравнение Шрёдингера») была издана на русском (в 1983 году) и на

английском (Клювер, 1991) языках. Первоначально планировалось, что английский текст «Лекций» мы подготовим в Венгрии, получим за это деньги в форинтах и весело их истратим.

Мы получили очень красивые приглашения на венгерском языке, но, как обычно, Феликса Александровича не выпустили из страны.

В конце шестидесятых годов Феликс Александрович начал разрабатывать анализ функций от коммутирующих и антикоммутирующих переменных (в дальнейшем предмет стал называться суперматематикой), и эта деятельность принесла ему поистине всемирное и всеобщее признание. Как-то Феликс Александрович сказал, что был бы рад, если бы я начал работать в этой области. В принципе и я был бы рад, но был увлечен другой работой и к тому же тратил много времени на подготовку и оформление кандидатской диссертации. Так у меня руки и не дошли, а Феликс Александрович, со свойственной ему деликатностью, не настаивал.

Позднее я понял, что совершил большую ошибку и постарался усвоить урок. Поэтому когда появилась возможность заняться вместе с Виктором Павловичем Масловым и его сотрудниками новой идемпотентной математикой (теперь эту область чаще называют тропической математикой), эту возможность я уже не упустил. Спасибо Феликсу Александровичу за урок.

Постепенно научное знакомство перешло в знакомство более личное, и я осознал, что и творческая, и обыденная жизнь Феликса Александровича была совсем не лёгкой. Несмотря на большие математические достижения он далеко не сразу получил возможность работать на мехмате и какое-то время работал учителем в средней школе. Публикация многих его работ задерживалась, они не получали должного признания, а результаты приписывались другим математикам. Его систематически не выпускали в зарубежные поездки. Были семейные проблемы.

Но вот, казалось, жизнь наладилась. Успешно шла любимая работа. Пришло признание на родине и за рубежом. Фамилия Березин вошла в название важных математических понятий и конструкций. Не было больших проблем со здоровьем и работоспособностью, зато была любимая жена Елена Григорьевна Карпель и обожаемая дочь Наташа. Но судьба была жестокой.

На этом стремительном взлёте Феликс Александрович трагически погиб...

Светлая память.

МОИ ВСТРЕЧИ С ФЕЛИКСОМ АЛЕКСАНДРОВИЧЕМ БЕРЕЗИНЫМ НА ФОНЕ НАШЕЙ ТОГДАШНЕЙ ЖИЗНИ

Д. Гитман

Заочное знакомство

Фамилию Березина я впервые увидел на обложке книги «Метод вторичного квантования», появившейся в 1965 году в нашем магазине научно-технической книги, куда я, будучи студентом-теоретиком четвертого курса физфака Томского госуниверситета (это в Сибири, пояснение для живущих не в России), захаживал почти каждый день. К тому времени я активно изучал квантовую механику и квантовую теорию поля, а слова «операторы рождения и уничтожения» звучали для меня как музыка. Я тогда считал, что являюсь знатоком в этом вопросе, изучил технику этих операторов в изложении различных авторов, в частности по циркулировавшему в то время методическому пособию Боголюбова «Метод вторичного квантования» на украинском языке и книге Швебера «Введение в квантовую теорию поля», являвшейся в то время для меня своего рода библией.

Однако уже после первого поверхностного знакомства с книгой Березина я понял, что фактически знаю только арифметику этого дела, а алгебру и анализ мне ещё предстоит изучить. Хотя реальная необходимость чтения и штудирования, в прямом смысле этого слова, этой замечательной книги возникла для меня лишь через несколько лет, автор Березин, как в то время для меня почти любой автор книг по теоретической физике, сразу попал в список небожителей. Лишь много позже я понял, что действительно дельных, а тем более замечательных книг ой как мало; все они всегда при мне, а эта книга Феликса Александровича на первом месте.

Так случилось, что при решении многих задач, которыми я занимался начиная с окончания университета и по сегодняшний день, я, так или иначе, опирался на идеи и методы из книг и статей Феликса Александровича Березина. Мне также посчастливилось встречаться с ним лично и даже обсуждать некоторые научные и ненаучные проблемы. Причем надо сказать, что для меня воспоминания о Березине автоматически переплетаются с воспоминаниями о некоторых задачах, связанных с его идеями и развитыми им методами, и каким-то странным образом непреодолимо влекут за собой некоторые воспоминания о нашей тогдашней жизни. Да простит меня читатель, если я в какой-то мере переборщу с последними в этих заметках.

Как мы попали в Сибирь

Здесь я собираюсь сделать небольшое личное отступление — так, мне кажется, читателю будет легче понять мои тогдашние, а может и все последующие, ощущения и оценки.

Я родился в 1944 году в Ташкенте, куда моя мать попала из Киева во время эвакуации. Её отец — мой дед, профессор философии, директор Украинской национальной библиотеки — был арестован в 1936 году, осуждён на 10 лет без права переписки, со ссылкой на Колыму. Его расстреляли в Москве в 1937 году, как сообщил мне в Магадане в 1973 году один высокопоставленный КГБэшник, знакомый моих тамошних знакомых, утешив меня фразой: «Вашему деду сильно повезло, сюда его не довели». Моя бабушка была в то время сослана в Уфу как жена репрессированного.

Мой отец после трех лет на передовой из-за тяжелых ранений демобилизовался и попал в Ташкентский госпиталь. Когда он шел по городу в первый же день после выписки из госпиталя весь перевязанный, с ещё незажившими ранами, на него напал некий хулиган с криками: «Пока мы воюем, вы, жида, отсиживаетесь в теплом тылу».

После окончания войны наша семья переехала в Ленинград, где мы вчетвером (вместе с вернувшейся из ссылки бабушкой) снимали угол в комнате коммунальной квартиры. Работу отец в то время потерял, мать работала лаборанткой в мединституте. При этом бабушка, обладавшая уникально посессивным¹⁾ характером, редким даже для идише мамы, сильно усложняла жизнь моих родителей. В результате семья распалась.

¹⁾Посессивный — от possessive (англ.) собственнический.

Мать, чрезвычайно красивая женщина, приняла предложение выйти замуж за известного профессора-терапевта (бывшего все годы войны, включая блокаду, главным терапевтом Ленинградского фронта). Однако вскоре профессор был уволен с работы из Ленинградского медицинского института в связи с начавшимся «делом врачей». Знающие люди посоветовали уехать из Ленинграда во избежание ареста. Мы отправились в Сибирь, в славный город Томск, где тамошний ректор мединститута на свой страх и риск принял профессора на работу. Так в 8 лет я начал свой сибирский период жизни, длившийся 31 год. Здесь я закончил сначала школу, а в 1966 году и физфак Томского госуниверситета.

Несмотря на то что я был одним из самых сильных студентов (извините за явную нескромность, но что было, то было, я получил диплом с отличием), меня не оставили в аспирантуре при университете (пятый пункт, святое дело, я даже не жаловался, все всё понимали). Однако система была рациональной, как я теперь понимаю, она не разбрасывалась способными людьми и находила способ их разумного использования при сохранении определенного порядка. Мне дали место в аспирантуре в Томском институте радиоэлектроники у тамошнего заведующего кафедрой физики Эдуарда Абрамовича Аринштейна, тоже не допущенного к университету. Здесь я начал делать кандидатскую диссертацию по квантовой статистике, где техника операторов рождения и уничтожения и метод производящих функционалов являлись основным аппаратом. Так я естественным образом должен был обратиться снова к книге Березина по вторичному квантованию.

В 1969 году я защитил кандидатскую диссертацию и с 1975 года работал заведующим кафедры матанализа Томского пединститута. Там мне позволили (система решила, что это полезно для Томска) создать научную группу (даже удалось взять двух ребят некоренной национальности, Иосифа Бухбиндера и Сеню Шварцмана), которая в определенном виде существует и до сего времени. Из Томска мне удалось выбраться в Москву в 1985 году, а с 1992 года я живу и работаю в Сан-Паулу.

Первое очное знакомство с Березиным

В то время мы работали над проблемой квантового рождения частиц в сильных внешних полях. И здесь я уже должен был серьёзно

обратиться к книге Березина. Дело в том, что ключевым моментом в такого рода задачах являются линейные преобразования одной системы операторов рождения и уничтожения к некоторой другой, такие преобразования в книге Березина назывались каноническими. В этой книге был представлен исчерпывающий анализ всего, что связано с этим вопросом. Тем не менее, в обиход вошел термин «преобразования Боголюбова». Действительно, Боголюбов при решении некоторых задач делал линейные преобразования операторов рождения и уничтожения, однако именно Феликс Александрович перевел этот вопрос с «арифметического» на высокий математический уровень, в частности указав, как важно различать преобразования «собственные» и «несобственные».

Именно из книги Березина я узнал, что только собственные канонические преобразования не выводят вакуумный вектор из исходного гильбертова пространства. Применив критерий собственности, установленный Березиным, к преобразованиям моей задачи, я немедленно получил, что он эквивалентен ясному физическому требованию конечности плотности рождаемых из вакуума частиц. Я был очень доволен. Впоследствии, когда я рассказал об этом Феликсу Александровичу, я видел, что ему это тоже понравилось.

Одна из задач, которую я решал в те годы, привела меня к проблеме с неким квадратичным гамильтонианом. Следуя имевшемуся у меня опыту, а также многочисленным известным мне из статей и книг примерам, я пытался диагонализировать этот гамильтониан и привести его в каждой моде к так называемому каноническому виду «а крест на а», что автоматически бы решало задачу. И сделать это я собирался с помощью вышеупомянутых канонических преобразований операторов рождения и уничтожения. Это удалось легко сделать почти для всех значений одного параметра, от которого зависел гамильтониан.

Однако для некоторых значений этого параметра в некоторых модах этого сделать не удавалось. Более того, было видно, что спектр этих мод непрерывный, что также говорило о том, что привести эти моды к вышеупомянутому каноническому виду нельзя. Для меня это было неожиданным. Даже в книге Березина такая ситуация не описана явно, не говоря уже о стандартных учебниках по квантовой механике. Обсуждения с тем немногочисленным кругом теоретиков, которые имелись в то время в Томске, не прояснили

задачу, и я решил ехать в Москву к самому Березину за консультацией.

Я позвонил в Ленинград моему двоюродному дяде — известному математику Анатолию Вершику, — бывшему с Березиным в приятельских отношениях, с просьбой устроить мне эту консультацию. Он это сделал, я прилетел в Москву и пришел на мехмат МГУ, где была назначена встреча с Феликсом Александровичем.

Встреча состоялась в коридоре мехмата. Как я потом узнал, Березин не имел преподавательской ставки, а числился на непостоянной ставке исследователя и, наверное, не имел достойного угла на кафедре. С первого взгляда я понял, что он должен был быть именно таким, каким он был. Огромный лоб, приятнейшее, умнейшее лицо интеллигентного и очень деликатного человека. Все время он был погружен в себя, однако при этом было видно, что он делает огромные усилия, чтобы у меня не создалось впечатление, что ему наш разговор неинтересен, хотя чем ему мог быть интересен разговор с неизвестным молодым провинциалом.

Я быстро, стараясь не занимать его время, объяснил возникшую проблему. Он отреагировал мгновенно, без всяких эмоций, сказав, что в общем случае в одной моде каноническим преобразованием квадратичная форма операторов рождения и уничтожения приводится к одной из двух канонических форм: первая, описанная везде, — это «а крест на а», а вторая — это «а крест на а крест плюс а на а». При этом не существует канонического преобразования, которое переводит одну форму в другую. Я остолбенел, поняв тут же, что это сразу разрешает мою проблему. Но почему же об этом нигде не написано (до сих пор этот простой, но нетривиальный факт почти не известен людям, я недавно ещё раз проверил это на человеке очень высокого уровня)?

В это время Феликс Александрович, казавшийся до того слегка заторможенным, вдруг резко повернулся, оживился и окликнул проходящего мимо него по коридору человека: «Имярек (не помню его имени), ты не помнишь, какие имеются представления у группы (не помню какой)?». Было видно, что получив некий ответ, он одной своей половиной, из деликатности, все ещё продолжал наш разговор, а другой уже обдумывал ответ того человека. После этого мы распрощались и я, мучаемый противоречивыми чувствами, побрел «домой». В те годы, приезжая в Москву, я останавливался у тёти Сони, двоюродной сестры моей матери, которая имела комнату

в коммунальной квартире на Чистых прудах и работала всю жизнь кассиршей в гастрономе, еле сводя концы с концами — контрпример для антисемитов, считающих, что бедный еврей рождается только мертвым.

Мне было грустно: я, с одной стороны, понимал, что поход был успешным, я полностью разрешил мою проблему, а с другой стороны, я, в очередной и не в последний раз, с горечью думал, как мне не повезло, что я живу в провинции и не имею постоянного общения с людьми, от которых действительно можно было бы многому научиться. Боже мой, как я завидовал тем ребятам, которые жили тогда в Москве, могли посещать известные научные семинары и учиться у действительно выдающихся учёных, которых тогда в Москве было очень много. Мы ведь тогда не могли свободно выбрать место проживания (место прописки), только в 1985 году, уже будучи доктором наук, мне удалось с неимоверным трудом (фактически обманув систему) переехать в Москву. Перестройка, порушившая систему в 1990 году, забросила меня в Бразилию, снова сделав провинциалом, и снова я езжу в Москву пообщаться с хорошими людьми, среди которых, к сожалению, уже нет Феликса Александровича.

На одном семинаре в Институте физпроблем

Начиная с 1974 года я считался членом так называемой научной группы Ефима Самойловича Фрадкина, который работал в теоретическом отделе имени И. Е. Тамма в ФИАНе²⁾ и который, после одного моего выступления на семинаре ФИАН, предложил работать с ним. Надо сказать, что первым, кто зазвал меня на семинары в ФИАН, был нетривиальный человек и физик Толя Шабад. Я стал часто приезжать в Москву, уже знал многих физиков теоретиков, короче уже не был тем провинциалом, которым я себя ощущал в описанном выше эпизоде. Иногда я виделся с Феликсом Александровичем на конференциях и московских семинарах. Один такой эпизод почему-то врезался мне в память.

Это было на одном из семинаров, который проходил в Институте физических проблем и фактически был совместным семинаром теоротдела этого института и Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау. Атмосфера и обстановка на таких семинарах была

²⁾ФИАН — Физический институт Академии наук

весьма специфической (думаю, она известна многим, и не мне начинать здесь её подробно описывать). Однако для понимания эпизода скажу, что первые ряды, как правило, занимались прямыми учениками или бывшими сотрудниками Ландау, затем шли их ученики и сотрудники, а уж затем чужаки. Причем «большие» люди, не принадлежавшие к школе Ландау (но друзья), тоже располагались в первых рядах.

Видно было, что распределение в направлении от доски имеет здесь важное значение, в отличии, скажем, от семинаров теоротдела ФИАН. При этом обстановка в первых рядах царила самая неприкаянная, громко обсуждались всевозможные, часто ненаучные, темы, и это продолжалось в течение всего семинара в том случае, если докладчик был не из прямых учеников или не из негласно признанных молодых звезд. Кроме того, докладчик, не принадлежавший к последним двум категориям, почти сразу же после начала доклада перебивался из первых рядов громкими и резкими выкриками типа «Это все давно известно!» или «Это надо делать по-другому!», а чаще всего: «Это все ерунда, бред!». При этом перебивающий часто выскакивал к доске, оттеснял докладчика и начинал свои собственные импровизации.

Для меня реальная научная иерархия всех присутствующих давно была известна (несомненно, большинство среди них были замечательными учёными) и я, с трудом пытаюсь услышать докладчика, лениво отмечал про себя часто имевшееся несоответствие между территориальным расположением учёных и их реальным научным весом. И вдруг, с сочувствием оглядывая последние ряды, я увидел Феликса Александровича, скромно примостившегося там. Осознание какого-то диссонанса было настолько велико, что я решил подойти поближе и удостовериться, что это действительно Березин. Это в самом деле был он, мы обменялись впечатлениями, а после семинара Березин тихо ушел, так и не замеченный и не остановленный никем.

Я понял, что большинство присутствующих там его и не знало, а для тех, кто его, может быть, и знал, он не казался тем учёным первой величины, каким он был для меня, и которым, как показала жизнь, являлся в действительности. Это различие в оценке Березина было симптоматичным, школа Ландау имела свой взгляд на то, как надо делать физику, а, скажем, школа ФИАН — другой. Мне кажется, что они по-настоящему узнали Березина лишь после

появления суперсимметрии и суперструн, а может, после того как в работах Саши Полякова появился интеграл Березина по антикоммутирующим переменным.

Березин — мой оппонент!

Теперь я собираюсь приступить к описанию ряда встреч с Феликсом Александровичем и эпизодов, которые имели место в конце 1970-х годов. И снова мне придется сделать небольшое отступление, повествующее о нашей тогдашней жизни, которое поможет понять некоторые нюансы описываемых далее эпизодов с участием Березина.

Как я уже писал, в Томском пединституте мне позволили создать небольшую группу, набрав некоторых людей исключительно по научному принципу, не обращая внимания на их национальность. Об этом стало известно в ФИАНе, и вот однажды ко мне подошли Борис Воронов, сотрудник теоротдела, и Игорь Тютин, не являющийся сотрудником этого отдела, но участник семинаров и вообще свой там человек. Они поведали мне следующую историю.

Оказывается, Тютин, не имеющий позиции в ФИАНе, работает в некоем полузакрытом техническом институте, где директор — известный академик — очень любит теоретическую физику. Будучи всемогущим, а в те времена директора таких заведений имели абсолютную власть и почти неограниченные возможности, он создал в этом институте теоротдел (не очень-то вписывающийся в структуру института), где занимались чистой теоретической физикой, в том числе квантовой теорией поля и гравитацией. Начальник этого теоротдела (назову его условно «К») взял Игоря на работу. Здесь надо сказать, что каждый, кто так или иначе когда-нибудь встречался с Тютиным, знал, что это голова, каких больше нет, а то, что он не имеет позиции в ФИАНе и не является ещё академиком, объясняется ненаучными причинами. На этом все и смиряться, чего я до сих пор понять не могу («Рабинович с детства отличался критическим складом ума»).

Самого Тютина такое положение дел не сильно тяготило (или он это умело скрывал). Однако к моменту нашего разговора у Тютина возникли реальные проблемы. Дело в том, что к этому времени он закончил докторскую диссертацию, но не мог получить от «К» необходимые бумаги (по-моему, характеристику от партбюро), нужные

для организации защиты. Разлад с «К» — это отдельная, теперь уже смешная, а в то время не очень, история, которую я здесь опускаю. Было ясно, что нужно менять работу, чтобы получить возможность защитить докторскую. В ФИАН в то время Тютина не брали, на что были свой объективные (еврей по матери) и субъективные причины (моя интерпретация, что среди них не последней была: а вдруг все поймут, кто умнее всех).

Итак, ребята ставят передо мной вопрос: а нельзя ли взять Тютина в Томский пединститут, и не просто взять, а так, чтобы он не потерял прописку в Москве, где живет с женой и сыном (потеряв прописку в Москве, её уже не восстановишь)? Я загораюсь этой идеей, понимая, что присутствие Тютина в нашей группе позволит в короткий срок перейти от провинциальной физики к совершенно другому уровню работ. После возвращения в Томск я иду на прием к ректору нашего института В. И. Лимонову и выкладываю ему эту идею, описывая, какой замечательный учёный Тютин и как мы все повысим свой научный уровень, работая с ним рядом. Кроме того, у него готова докторская, институт получит молодого доктора наук, что немаловажно для престижа вуза.

Прежде чем продолжить изложение, я должен описать читателю, кто такой был Лимонов. Он пришел на ректорство из обкома партии, где курировал отдел науки Томской области. Если в верхах системы и выживали «в некотором смысле нормальные люди» (которые не делали гадости из любви к искусству, а только по необходимости), то Лимонов был одним из них. Это он принял меня на работу и допускал вольности в кадровой политике. Я думаю, что частично это был альтруизм, а частично он это делал, желая продемонстрировать, как он может поднять захолустный пединститут, а затем с этим багажом двинуться выше по номенклатурной лестнице. Человек он был культурный и неглупый.

Я понял, что Лимонова заинтересовало то, что я говорил, и он что-то про себя вычисляет. После некоторого раздумья он говорит: «Как же так, такой блестящий учёный и не может найти себе место в Москве? Может он пьяница или бабник? Вы скажите прямо, бабник для меня — это даже достоинство». Я вижу, что он ищет легкие рациональные объяснения ситуации (чисто русская фамилия Тютин не наталкивает его на другие объяснения) в надежде, что нет самого страшного, — если Тютин диссидент, тогда уже ничего не сделать. И тут я чисто интуитивно мгновенно нахожу удобное для него объяс-

нение и говорю: «Виктор Иванович, к сожалению, Тютин не бабник, он прекрасный семьянин, просто у него мать еврейка, посмотрите его документы». Трудно передать радость этого русского человека от того, что у кого-то мать оказалась еврейкой. Все стало ясно, степень опасности допустимая, вопрос решаемый, и он тут же сказал: «Берём». Так Тютин стал сотрудником Томского пединститута, и мы с ним стали заниматься квантованием — одной из любимых Березинских тем.

Вскоре Тютин защитил докторскую диссертацию, а затем и я закончил докторскую диссертацию, с защитой которой начались свои проблемы. После всевозможных обсуждений с Фрадким было решено подать мою диссертацию в учёный совет Новосибирского института ядерной физики, где было много специалистов по проблемам квантовой электродинамики с внешними полями. Это тоже Сибирский регион, и тамошний заведующий теоретическим отделом Владимир Николаевич Байер соглашался быть оппонентом. Тогдашний директор института академик Будкер согласился взять диссертацию к защите, но, не успев оформить это решение официально, неожиданно скончался.

Новое руководство института и те, кто там меня поддерживали, вдруг начали осторожничать. Меня просили немного подождать: ожидалось, что из Новосибирска в Москву должен переехать влиятельный член учёного совета по защитам, назову его условно академик «В» (который якобы не жалуется инвалидов пятой группы), а также рекомендовали подобрать очень сильных оппонентов на случай, если этого не произойдет. Я до сих пор не знаю: был ли «В» действительно столь тенденциозен, но тогда я сильно обеспокоился.

Однако Фрадкин сразу сказал: «Попросим Березина, против него никакой «В» не устоит». Я не понял, он что, шутит? Хотя я и был знаком с Феликсом Александровичем, но наши научные направления не пересекались, он, по-видимому, и не знал, чем я занимаюсь, да и было как-то страшновато предстать с моими, как мне казалось, математически простыми методами перед самим Березиным. Но Фрадкин отмел все аргументы такого рода. Теперь я понимаю, что тогда он мне дал фору в оценке ситуации, за что я ему сильно благодарен. По-видимому, он видел, что я склонен, начитавшись Березина, к производящим функционалам, каноническим преобразованиям, когерентным состояниям, функциональным интегралам, антикоммутирующим переменным, символам операторов и дру-

гим подобным техническим вещам, они переполняли мою диссертацию. И что Березину это может понравиться. Мне тогда казалось (с возрастом это прошло), что все знают такие вещи и широко ими пользуются.

Через какое-то время Фрадкин сказал, что Березин ждет моего звонка для обсуждения диссертации. Я позвонил, и Березин мне назначил встречу в его квартире на Винницкой. Он встретил меня в прихожей в спортивном виде и босиком, сказал, что так всегда ходит по дому. Мне было не до этого, я нервничал, ожидая начала обсуждения диссертации. Березин сказал, что окончательное решение — быть или не быть оппонентом — примет после детального обсуждения работы. Затем мы сразу же начали смотреть диссертацию. Он был спокоен, доброжелателен и мгновенно схватывал суть дела.

В первый раз мы рассмотрели только небольшой раздел. Следующие две встречи проходили в квартире, где он жил с Еленой Григорьевной, но её я тогда так и не видел (мы познакомились через много лет, об этом написано в её воспоминаниях). В комнату часто забегала их маленькая дочь Наташа, подходила к столу и смотрела, что мы делаем. К дочери Березин относился спокойно, не сюсюкался с ней, и глядел на неё как-то задумчиво. В конце концов мы обсудили все разделы диссертации, Березин согласился быть оппонентом, а я был уверен, что он, по крайней мере, всё понял, в отличие от многих физиков (конечно, не нужно включать в этот список Тютинна), с которыми я обсуждал мои проблемы уже долгое время. Мне также показалось, что он во всё это ввязался не только потому, что Фрадкин попросил, но и чтобы извлечь для себя какую-то пользу, узнать, что другие делают.

Колымские истории

Иногда во время наших встреч, связанных с диссертацией, мы обсуждали не только физические проблемы: он расспрашивал о моей жизни, как я попал в Сибирь, что думаю о том и о сём, сам комментировал некоторые моменты, и я был рад, что мы ко многим вещам относимся одинаково. Не побоюсь сказать, что мы были из одного лагеря, что было, как ни странно, не так уж и тривиально. Многие вещи, казавшиеся мне очевидными, — ненависть к сталинизму и антисемитизму, к системе управляемой жалобами и прожжёнными циниками всяческих мастей, симпатии к Сахарову

и (тогдашнему) Солженицыну и т. п., — не были таковыми для некоторых моих знакомых профессиональных физиков и математиков. Однажды я сказал Березину, что дважды, в 1973 и 1974 годах, бывал на Колыме, в Магадане. Он попросил рассказать подробнее.

А дело было так. В то время меня, молодого доцента Томского института радиоэлектроники, назначили председателем так называемой выездной комиссии по приему вступительных экзаменов. Комиссия выезжала на летние каникулы в славный город Магадан (столица колымского края, или столица бывшего колымского ГУЛАГа) и там организовывала вступительные экзамены в наш институт. Два раза по полтора месяца активного взаимодействия с различными слоями магаданского населения произвели на меня неизгладимые впечатления и превратили мое восприятие ужасов сталинской системы из схематичного, книжного в кричащее, насыщенное рассказами живых бывших узников колымских лагерей, картинами тамошних страшных (даже в летнее время) мест. Прочтя потом «Архипелаг ГУЛАГ» Солженицына, я даже сказал приятелям: «Мне кажется, что он в самых страшных местах не бывал». Хотя ясно, что и я узнал в тех поездках, по-видимому, лишь малую толику того, что было.

Тогда я пересказал Феликсу Александровичу только некоторые впечатления и несколько историй.

О том, что прилетев в разгар лета, мы ехали из аэропорта в город по дороге, по обочинам которой лежал нарастающий лед, а шофёр рассказывал о долине смерти, то ли мы вдоль неё ехали, то ли она располагалась недалеко. Так вот в этой долине в любом месте человеческие кости составляют слой в несколько метров в глубину...

О том, как нас (как особо важных гостей) некий военный чин вывез на стандартную развлекательную прогулку на небольшом военном корабле в Охотское море. Как я уже говорил, дело было летом, но никакой плащ не спасал от пронизывающего холода. Чёрные рваные тучи буквально спускались с неба, касаясь катера, ни птиц, ничего живого вокруг. Мы приблизились к берегу примерно на полкилометра. Берег — это крутые дикие голые скалы. Там я понял, что если ад существует, то он должен быть именно таким. Таким он и сохраняется в моём воображении по сегодняшний день.

Вдруг неведомо откуда из тумана к нашему катеру приближается убогая утлая посудина с неким существом в ней. На катере её уже ждали, как выяснилось потом, это был обычный номер програм-

мы для развлечения важных гостей. Все дальнейшее происходило безмолвно. С катера сбросили в лодку какой-то пакет и верёвку. Существо в лодке привязало к верёвке огромную корзину, которая была поднята на борт. Затем лодка исчезла в тумане. Корзина оказалась набитой огромными живыми крабами, предназначенными для дальнейшей варки и пиршества на катере. Человек в лодке, как было сказано, без ног и немой, бывший зек, без имени и отчества, без документов (сколько я повидал таких в Магадане в ту пору), появляется здесь обменивать крабов на соль и спички. После этой информации как-то расхотелось есть крабов, да и веселиться вообще.

Другая история попала ко мне так. Один мой знакомый магаданский журналист как-то привел меня в некий спортивный комплекс и познакомил с одним из его работников, крепкого вида человека среднего возраста, сказав мне: «Этот человек не в себе, но его здесь держат, он тихий. Расспроси его, он тебе расскажет свою, даже по здешним меркам, необыкновенную историю».

Мы познакомились, я поинтересовался, как ему удастся так спортивно выглядеть в его возрасте, потом он сказал, что может покатать меня на моторной лодке по морю (Охотскому)... Я в то время был самоуверен во всех смыслах, физически достаточно силен, не мучим сомнениями и страхами, так что его предложение воспринял с энтузиазмом. Как я теперь понимаю, это его подкупило, и на пути к берегу моря он рассказал мне свою историю.

В 1934 году его семья — осужденные отец с матерью и трое детей, из которых он младший, двухлетний, — направлялась с материка (кажется из Находки) в трюме какого-то судна на Колыму. Это были первые (!) этапы заключённых на Колыму, которая в то время была совершенно дикой необитаемой территорией (равная Франции или что-то в этом роде), покрытой вековыми лесами (говорят, что уже в пятидесятых годах любую дощечку нужно было вести с материка, лесоповал был основным занятием заключенных). До сих пор сообщение с остальной частью России возможно лишь по морю или воздушным путем, поэтому и прижился островной образ этой территории, а остальная Россия воспринималась как материк. Судно бросило якорь в море и заключенных в лодках отвезли на дикий берег, где и бросили без всего (абсолютно без всего: без пищи, одежды, палаток и без охраны) зимовать до следующего года, до прихода следующего конвоя. Ни лагерей, ничего там в то время ещё не было. ГУЛАГ там только начинался, ещё предстояло освоить эту терри-

торию, положив в землю миллионы зёков. В первые же месяцы вся семья и большинство заключенных погибли от холода и голода, а он выжил, превратившись в зверя. Затем десятилетия жизни в лагерях и на поселении, а теперь вот он свободный человек, имеет работу, правда семьи нет.

Тут мы прибыли на берег, там находилась небольшая алюминиевая лодка (так называемая в те времена казанка) с подвесным мотором. Такие лодки неустойчивы даже на спокойной реке, а выходить на ней в открытое Охотское море, которое, как правило, штормит (хотя тогда было только балла два...), было очевидным самоубийством. Сейчас ничто бы не заставило меня сесть в эту лодку, а тогда я под впечатлением от его рассказа, мучимый нестерпимой жалостью к этому фактически давно убитому человеку, сел и мы помчались в открытое море.

Мы мчались в тумане, опять пронзительный ледяной ветер, лодка скачет с волны на волну, а я начинаю понимать, что если она сейчас опрокинется, то в ледяной воде Охотского моря (летом, быть может, +4 по Цельсию) через несколько минут неминуема смерть. Он сидел на корме и выжимал из мотора все, на что тот был способен. Он не имел цели напугать меня или вселить в меня ужас, он, возможно, вообще забыл обо мне. Мне казалось, что он ещё весь в своем рассказе, на него снова накатились видения его страшной жизни. По-видимому, он не цеплялся за неё, а даже бессознательно торопил её конец. Но всё-таки мы вернулись. Его и его рассказ я помню и буду помнить всю жизнь.

Еще я помню, что в связи с колымскими мотивами пересказал Феликсу Александровичу откровение одного бывшего чекиста, работавшего в свое время на Дальнем Востоке в системе ГПУ, который, выйдя в отставку, служил в нашем институте начальником отдела кадров. Он относился ко мне хорошо, всегда помогал и прикрывал нашу группу, а однажды, выпив после похода на демонстрацию, разоткровенничался. Не помню в связи с чем, я, под впечатлением недавно прочитанного «Архипилага ГУЛАГ», начал говорить об ужасах перевозки заключенных в так называемых вагонах Столыпина. На что он вдруг заметил: «А ты знаешь, что иногда все-таки заключенные бежали из поездов по пути на Дальний Восток. И на перекличках, на остановках некоторых не досчитывались». Он помолчал, а затем: «А недочёта не могло быть... Тогда вопрос решался так: люди из конвоя шли в ближайший населенный пункт, хватали

там первых попавшихся соответствующего возраста и вида и замещали ими бежавших...»

Конечно, Феликс Александрович, живя в Москве и имея гораздо больший, по сравнению со мной, круг общения с критически настроенной к режиму интеллигенцией, в принципе знал всё о системе, но мне показалось, что мои колымские истории его не оставили равнодушным. Тогда он сказал: «А вы напишите об этом, Дима». Кто мог тогда знать, что он скоро погибнет именно на Колыме, а я приведу эти истории в книге воспоминаний о нем?

Защита в новосибирском Академгородке

Итак, Березин — оппонент, и защита моей докторской в Институте ядерной физики в новосибирском Академгородке назначена на декабрь 1979 года. Я с командой поддержки (Тютин, Багров, Лавров и Шварцман) прилетел в новосибирский Академгородок утром за день до защиты. Мороз был необычайно сильный даже для этих мест, около 45 градусов по Цельсию ниже нуля. Березин должен был прилететь вечером. Мне выделили газик, и я поехал в аэропорт его встречать, взяв на всякий случай чью-то меховую шапку с ушами. Это оказалось весьма кстати. Произошло невероятное. Самолет прилетел раньше на час, и когда мы въехали на привокзальную площадь, на ней уже стоял в темной морозной мгле окоченевший Березин в легком осеннем пальтишке и без шапки. Кто пробовал минус 45, тот поймет мой ужас (Тютин не поймет). Однако Феликс Александрович и виду не подал, что замерз или что что-то не так. Шапку, правда, надел, и мы помчались в гостиницу, где команда поддержки с ещё одним моим оппонентом Борисом Михайловичем Барбашевым уже накрыла стол, накупив приличное количество водки.

Я не мог себе вообразить, что буду пить в ночь перед защитой, однако все без исключения, и Феликс Александрович тоже, приводили столько аргументов в пользу выпивки, что я махнул рукой и веселье началось. Я пил и ел со всеми, немного трусил перед предстоящим завтра событием, но одной своей половиной наблюдал за Березиным в такой необычной обстановке. Из этого вечера мне запомнилось на всю жизнь именно поведение (не знаю, верное ли это слово — поведение, может, вернее — реакции) Березина.

Постараюсь описать то, что я увидел, и свою интерпретацию увиденного. Сидевшие за столом считали необходимым развеселить

меня, вдохнуть в меня уверенность и даже наглость перед предстоящей защитой. Грубо шутили, часто использовали ненормативную речь, рассказывали неприличные анекдоты, громко смеялись, и т. п. Если бы там не было Березина, я бы считал это нормальным, но тогда мне казалось, что такая атмосфера несовместима с ним, с его присутствием. И я, пытаясь охладить народ, наблюдал за реакцией Березина. И было так трогательно видеть: да, это не его атмосфера, грубость его коробила, однако он тщательно скрывал это, он не хотел быть белой вороной, он отчаянно, может быть только в этот момент, но хотел быть как все. Он смеялся над неприличными анекдотами, шутил, однако сам на грубости он не был способен.

Он, конечно, был белой вороной даже среди нас, не говоря уже о среднестатистическом населении России. Я прекрасно знаю это состояние белой вороны: в Сибири я был чужой — еврей с сильно отличающейся от сибиряков внешностью, в Москве — провинциал из Сибири, да ещё и еврей, в Бразилии — агрессивный русский. Даже в Израиле, куда я прилетел сразу же после начала перестройки, думая, что меня там примут с распростёртыми объятиями, мне говорили: «Вот вы приезжаете на всё готовое, а мы тут...» и так далее.

На следующий день мы все пошли в Институт ядерной физики на защиту. В тот день на Совете стояла защита двух докторских диссертаций, первая — Золотарева (зятя Будкера и ближайшего сотрудника председателя учёного совета Баркова) — об экспериментальном подтверждении несохранения чётности и моя, неизвестного Гитмана из Томска, на абстрактные темы квантовой теории поля. Пока Золотарев уверенно и спокойно отрабатывал свой номер, я пребывал в довольно удручённом состоянии. Еврейское счастье: утром стало известно, что накануне в Академгородок с визитом прибыли из Москвы президент Академии наук СССР Александров, а с ним уже списанный нами со счетов академик «В». Более того, «В», оставаясь членом учёного совета, обещал воспользоваться случаем и посетить его заседание.

И действительно, только я приступил к выступлению, в зал заходит «В», в прекрасном настроении садится в центре на первый ряд и берёт у секретаря в руки мою диссертацию. Далее следует следующая пантомима: «В» открывает первую страницу, читает название работы и фамилию автора. Улыбка медленно сползает с его лица, он разворачивается в сторону зала, точнее в сторону, где концентрируются члены учёного совета, на его лице читается: что же вы,

гады, без меня творите? Затем он возвращается в исходное состояние и начинает недовольно листать мою диссертацию. Я, понимая, что всё пропало, кое-как бубню доклад, ожидая худшего. После окончания доклада — вопросы. «В» задает вопрос: «А какое практическое значение имеет Ваша работа?». Я что-то мямлю в ответ, какое уж практическое значение имеет квантовое рождение частиц в сверхкритических полях, которых фактически нет в природе. На душе мерзко, спасает глубокая мысль: ну и хрен с ним. Сажусь на место и жду позорного конца.

И тут слово предоставляется оппоненту Березину. Он быстрым решительным шагом выходит на трибуну и, обращаясь прямо к «В», начинает свою речь так³⁾: «Уважаемый профессор, мы знаем, насколько велик был Лев Давидович Ландау, однако и он не всегда был прав. Ведь он так и не принял диаграммы Фейнмана. Так это объяснимо, ведь Ландау мог и без них рассчитать любой процесс. Но ведь это Ландау, а рядовым учёным эти диаграммы принесли и приносят много пользы. Мне кажется, Вы рискуете повторить это поучительное заблуждение Льва Давидовича и недооценить диаграммную технику, развитую в работе Гитмана, она ведь может оказаться весьма полезной при решении ряда задач...» Что там ещё говорилось далее, было уже неважно. Видно было, что «В» сначала обалдел, а затем, подумав, благосклонно закивал головой, сравнение с Ландау сделало свое дело — Березин выиграл партию.

Тогда я просто был рад: Березин меня спас, защитил, показал всем, что он полностью разобрался в работе и одобряет её. И только теперь, прочтя воспоминания Елены Григорьевны, я понял, что то его выступление на моей защите не было экспромтом, он подготовился серьёзно к возможному столкновению и с удовольствием и блеском нашел возможность обезоружить и победить оппонента, именно эта его блестящая способность полемиста отмечена в воспоминаниях Елены Григорьевны. Было видно, что настроение в зале изменилось, в результате голосование было единогласным, то есть даже «В» проголосовал «за».

Вечером был банкет, где собралась узкая компания: приехавшие со мной друзья, мой Новосибирский приятель Чаплик и оппоненты. Я был счастлив, всем благодарен и в разгаре банкета попросил присутствующих разрешения последовательно поднять тост за каж-

³⁾У меня есть её магнитофонная запись.

дого из них. Каждый тост я предварял какими-то характеристиками «тостуемого» (конечно, это было нескромно с моей стороны, но меня понесло, хотелось обо всех сказать что-то хорошее, да и было что сказать). Сидевшие за столом формально и фактически имели различный научный вес, но было очевидно, что самым известным и маститым там был Березин. Несмотря на это было видно, что ему очень приятно слышать хорошее о других. Ему и в голову не приходило, что он тут звезда первой величины и хорошие слова о других могли бы его хоть как-то задеть. Безусловно, я сказал много хорошего о нём и о том, как он мне помог, а затем и о других сидевших за столом.

Когда же дошла очередь произнести тост за Тютин (который тогда был значительно моложе Березина и не имел широкой известности), я сказал только одну фразу, которую, мне казалось, не стоит говорить в присутствии Березина, но я сказал: «А теперь я хочу выпить за человека, который знает всё в теоретической физике». Конечно, для присутствующих за столом профессионалов важен был код, переносимый этой фразой, а не её абсолютный смысл. И тут произошло то, что я запомнил на всю жизнь и что окончательно сформировало для меня безупречный образ Феликса Александровича как учёного и человека. Он резко поднялся с бокалом в руке, как будто все время ждал этого, искренне и с какой-то (мне понятной) радостью воскликнул: «Да, давайте выпьем за человека, который знает всё и от которого я многому научился».

В этот вечер я видел Березина в последний раз.

1980 год

Ещё на банкете мы договорились с Феликсом Александровичем о его приезде в Томск летом следующего 1980 года для чтения у нас лекций и организации небольшого туристического похода по таёжным местам. В начале лета 1980 года мы созванивались, уточняя детали этого визита. Однако неожиданно он позвонил мне в Томск и, извиняясь, сказал, что один приятель устроил для него возможность попутешествовать по Колыме... Детали он мне не рассказывал. Мне стало как-то не по себе. Дело в том, что этот приятель — замечательный человек и учёный — имел весьма сомнительную репутацию в туристических кругах. Он тоже был любителем туристических походов, и было известно, что в походах, где он участ-

вует, что-то случается. Конечно, он был совершенно ни при чем, но возник эффект чёрной кошки. Я сильно сожалел, пожелал Феликсу Александровичу интересного похода, и мы договорились перенести его визит в Томск на следующее лето.

Я срочно перепланировал все летние дела, но тем не менее остался в июле в Томске. Туда в середине июля мне и позвонил Тютин сообщить о том, что Березина уже больше нет. Мой мир, итак состоявший в основном из тёмного фона с редким вкраплением светлых мест, резко потемнел. Детали трагедии никто не знал, а я, склонный к пессимистическому видению действительности да к тому же сильно злой к тому времени на систему, воображал худшее. Теперь, прочтя воспоминания Елены Григорьевны, я вижу, что, к сожалению, основания для этого у меня были...

Время шло, мы с Тютиним занимались вопросами квантования, столь близкими Феликсу Александровичу, широко использовали его идеи и методы и даже написали книгу на тему квантования, которую, естественно, посвятили ему. На первой странице этой книги написано: «*We dedicate our book to the memory of the prematurely deceased outstanding scientist, mathematician Felix Alexandrovich Berezin, whose influence can hardly be overestimated. Felix Alexandrovich took great interest in quantization problems and to a great extent stimulated us in our studies*». ⁴⁾

В конце 1980-х мы заново открыли для себя одну замечательную работу Феликса Александровича о квантовании спиновой частицы, написанную им в 1975-1977 годах в соавторстве с Мишей Мариновым. В этой работе фактически раскрывалась ещё одна сторона грассмановых переменных. Они не только обеспечивали принцип соответствия для фермиевских полей и частиц, но и позволяли в результате квантования получать квантовые спиновые системы с конечномерными гильбертовыми пространствами. Я затем ещё много возился с различными обобщениями той первой модели Березина — Маринова, непроизвольно подтверждая свою фатальную приверженность его идеям и методам. До сих пор я вынашиваю некие планы в этом направлении.

⁴⁾Мы посвящаем нашу книгу памяти безвременно погибшего выдающегося учёного-математика Феликса Александровича Березина, влияние которого на нас трудно переоценить. Феликс Александрович уделял большое внимание проблемам квантования, и это в значительной степени стимулировало наши исследования в этом направлении. (Пер. с англ.).

Читатель уже знает из воспоминаний Елены Григорьевны о нашем с ней, я думаю, не случайном знакомстве в конце 1980-х. Узнав её, я существенно пополнил для себя образ Феликса Александровича. Думаю, что вообразить рядом с ним другую женщину было бы невозможно. Их дочку Наташу, привлекавшую в то время моё внимание своей внешней и внутренней похожестью на Феликса Александровича, я больше не видел.



*Борис Воронов, Дмитрий Гитман и Игорь Тютин (справа налево)
на могиле в 2005 г. (снимает Семён Конштейн)*

УСТНЫЕ РАССКАЗЫ

Дмитрий Лейтес

Le soleil entre tes jambes...¹⁾

P. Eluard. Les derniers poèmes d'amour

Получив «полупроходной» балл на вступительных экзаменах на мехмат и будучи Лейтесом и, даже хуже того (для мехматовского начальства: мне это говорил (лично) декан П. М. Огибалов в 1972 году) — матшкольником от Н. Н. Константинова, я был отвергнут целиком, на обе половины. (Сделано это было правильно: я знал, куда шел, мог бы и получше подготовиться; тем более, что через год-другой и это бы не помогло, что тоже было ясно видно.²⁾)

Мне сильно не хотелось идти в Красную Армию³⁾, поэтому я пошел туда, где хоть и преподавали математику, но конкурса не было: на языковой поток математического факультета МГПИ им. В. И. Ленина, точнее, для верности, на французский подпоток, где конкурс был отрицательный⁴⁾. (Как выразился потом ехидный Андрей Зелевинский: «„Математика на французском“... Ну, а скажем, ...лыжи — на английском... понимаю, понимаю».)

Department of Mathematics, Stockholm University, Roslagsv. 101, SE-106 91 Stockholm, Sweden; mleites@math.su.se.

¹⁾Для не читающих по-французски: «Солнце меж твоих бедер...» (*П. Элюар. Последние поэмы о любви*).

²⁾См. *Shifman M.* (ed.) *You Failed Your Math Test, Comrade Einstein*. Singapore: World Scientific Publishing, 2005.

³⁾Однако месяц в военных лагерях после четвертого курса был самым безмятежным в моей жизни. Березин на это хмыкнул: «Вы, Дима, — военная косточка...»

⁴⁾После каждого экзамена для ликвидации недобора с общего (неязыкового) потока администрация добавляла наиболее, как ей казалось, достойных доверия, правда слабоватых подготовкой: выпускниц рабфака и тех, кто шел по направлению или с рекомендацией «от кого надо».

В течение первого года я, учась в «пед», ходил вечерами на мехматовские спецсеминары. Времени было в обрез: к концу года наша группа должна была уже слегка говорить по-французски, ибо из нас на совесть готовили преподавателей для дружественных африканских стран — бывших колоний. (Дружба эта чахла на глазах, и мой набор был последним.) А на занятиях по военному делу заставляли сдавать на права и — много небрежней, чем французскому и даже математике, но тоже бесплатно — учили водить грузовик. Поэтому (на всякий случай: лишние права не повредят) я задержался в МГПИ ещё на год, уже получив «добро» на перевод в МГУ.

Учиться в МГПИ было тоскливо. Благодаря вождению даже военное дело было отдушиной⁵⁾.

Отдушиной были и семинары на мехмате, и хождение в гости к Ф. А. Березину, с которым меня познакомил его школьный приятель, удачно оказавшийся моим дядей. К большому моему разочарованию, никаких математических заданий Березин мне не давал, и мы разговаривали о книжках, которые я читал (математические и беллетристику), так что мне по глупости казалось, что это были светские, а не деловые визиты. Березин же, как это теперь мне ясно, за разговорами о дзен-буддизме или фильмах (например, другого его одноклассника, М. Калика) пытался понять, что мне интересно, чтобы задача соответствовала внутренним склонностям.

В один из таких визитов Березин познакомил меня с Г. Л. Литвиновым. Мы уходили от Березина вместе, и, прощаясь с Березиным, Григорий Лазаревич предложил мне погулять. Конечно же, я пошёл. Дело было осенью, вечером; то и дело моросило. Грише было тогда уже двадцать, и он держался как патриарх, а в тот вечер даже но-

⁵⁾ Даже такие яркие профессора, как П. С. Новиков и Д. А. Райков, не могли перевесить обязательное посещение лекций по педагогикам и методикам преподавания («кто умеет — делает сам, кто не умеет — учит других, а кто и этого не может — готовит методички по методикам преподавания»). Даже наличие М. Ф. Бокштейна (классика, который в 1920-х придумал «гомоморфизм Бокштейна»), лучше других следившего за докладами на научных семинарах и норовившего иногда, задумавшись, читать лекции для общего (неязыкового) потока по-французски или по-английски (он также мог, подначенный «на слабо» хулиганистами студентами, прыгавшими на перемене на учительский стол, впрыгнуть на него с места — в возрасте за 60 и при росте около 155 см вместе с каблуками и с коком надо лбом), не перевешивало «давления среды», не понимавшей, зачем тратить молодые (или какие угодно) годы на любые науки.

сил палку, которая, судя по походке, ему была совершенно не нужна. Иногда, правда, он мерял ею лужи.

Так как говорить со мной, неграмотным, об операторах обобщённого сдвига на группах было бессмысленно, Гриша вел беседу, комментируя, как это у математиков часто принято, разных общих знакомых и незнакомых.

Подошла очередь и Березина.

Однажды, рассказывал Гриша, они с Березиным оказались в инспекционной комиссии Министерства высшего и ещё какого-то образования, и в качестве инспекторов поехали в командировку (современное произношение — «на халяву») куда-то в Азию. Я слушал эту историю как байку: какой бюрократ даст просто математику (да ещё Березину или, там, Литвинову) промылиться в такую поездку? (Видимо, я был не так уж неправ в своем недоумении: иногда эта поездка описывалась действующими лицами как командировка то ли на конференцию, то ли на школу; менялось и место.)

В то время Березин изучал символы операторов и опубликовал несколько статей, местами напоминавшие трактаты прошлого века, где формулы аналитиков не умещались на странице.

Березин и Литвинов жили в одном гостиничном номере, и Литвинов был до крайности заинтригован березинским поведением: днём они занимались всякими делами, а в редкие вечера, свободные от «товарищеских ужинов», Березин часть времени изучал какую-то книжицу, скрытую от нескромных глаз Гриши под плотной бумагой. Потом, спрятав книжицу в карман пиджака, Березин садился к столу и, иногда заглядывая в книжицу, писал длиннющие формулы.

Хотя переписывание, по возможности без ссылок, чужих статей (особенно с иностранного языка) переживало в то время очередной подъём (как на Западе, так и в остальных частях света), Гриша не мог всё же допустить и мысли, что Березин просто перерисовывает чей-то иностранный препринт. (Формат книжечки был явно не советский.) Показывать загадочную книжку Березин, очевидно, не хотел, а от разговора о ней ловко уклонялся.

К этому времени я уже слегка подустал слушать о загадочных символах операторов и традициях математиков в их отношениях с интеллектуальной собственностью (а зря не слушал: с этими отношениями я вскоре столкнулся вплотную) и спешил домой, где меня ждала моя первая книжка французских стихов. Хоть и в оригинале, но понятная (сборник стихов Eluard'a). Некоторые места, которые

я уже разобрал, были довольно зажигательно написаны; мне было интересно продолжить.

Но тут, когда я преодолевал особенно скользкое и лужистое место, Гриша признался, что как-то раз, когда Березина куда-то позвали, он, Гриша, был не в силах терпеть неизвестность дольше. Как (шаровая) молния метнулся Литвинов к столу, вытащил (презрев заветы и мамы, и бабушки) из кармана чужого пиджака книжку и, трепеща, открыл. Гриша сказал, что вообще-то он не знает французского. Но название одолел, хотя книга была и не о математике: Р. Eluard «Les derniers poèmes d'amour».

В лужу я ухитрился не плюхнуться. А вот интереса к занятиям математикой с Березиным, и без того немалого, в частности к задаче Березина, Гришина история прибавила. С тех пор я, как говорится, только об ей и думаю, и ни разу не пожалел.

* * *

...Да что там говорить, институт был, и директор был, и Алик, и лаборатория была, и баба, ставящая ожоги и двигавшая стаканы, и дама с удлинёнными пальцами на руках, лечившая Генеральных секретарей, была, и таракан был. И советники из ЦК КПСС были, и загорелый американец, и военные, строившие огромные камеры, да и многое ещё... Всё смешалось в истории, запуталось, и пойдёшь сейчас разберись, что там в действительности было, а чего не было...

А. Торин. Экстрасенс

По совету друзей, я эту историю как-то записал, а однажды, лежа в больнице, проявил слабость: показал навестившему меня Грише Литвинову. Тот всё исчеркал замечаниями, но, процитировав тов. Сталина «Нэ так всо было. Савсэм нэ так», распространять разрешил (куда ему было деться), а я утешал себя тем, что вспоминал ещё и Ежи Леца: «В действительности всё не так, как на самом деле».

Для этого издания Г. Л. Литвинов согласился и дать замечания, якобы восстанавливающие «историческую справедливость», и добавить собственные воспоминания.

* * *

Читателю, которому моя байка покажется слишком легковесной, поясню: мне не удалось изложить по-русски хоть что-нибудь серьёзное про Березина без занудства, уже привычного в воспоминаниях дилетанта. А этого бы Березин не потерпел: он всегда старался, как выражалась моя прабабка, «сосать из горчицы сахар». Например, увидев у меня какой-то сборник статей натовской конференции, сказал:

— Смотрите, Дима! НАТО даёт деньги на конференции по теории представлений. Вы бы предложили Алёше⁶⁾ поговорить с дедушкой, чтобы страны Варшавского договора спонсировали конференции по изучению супералгебр Ли...

Мы с Ф.А. посмеялись и не предложили. А ведь зря: сегодня я думаю (вернее, уверен: взгляните, благодаря кому появился перевод «Законов Паркинсона»), что и Алеша, и его дед поддержали бы. А ведь тогда, хотя бы по первости, и нижние чины, и даже товарищи офицеры, услышав «супер», вставали бы во фрунт...

Через год после открытия наш с Алёшей семинар выродился в SoS — мой единоличный (с тех пор и по сегодня — неформальный; да и аспиранты у меня тоже до сих пор как на подбор — «внебрачные»: с официальным, но лишь для документации, соруководителем) *Seminar on Supersymmetries*. Его продукция должна вскоре начать выходить в издательстве МЦНМО: лучшим делом памяти Березина является, конечно же, реализация и развитие его идей. Поэтому появление в свет в издательстве МЦНМО (и — я надеюсь на поддержку друзей и коллег Березина — вскоре в переводе на английский в Springer'e или в AMS) березинских «Лекций

⁶⁾Внук А. Н. Косыгина (в то время — премьер-министра СССР, второго начальника в стране) был тогда аспирантом И. М. Гельфанда (и М. И. Граева) на кафедре ТФФА, т. е. коллегой Березина. Одно время (длившееся минут 46, но за эту поддержку я и сейчас ему благодарен) мы с Алёшей вели семинар по суперсимметриям в МГУ.

«*Où sont les neiges d'autrefois, où sont-elles...*» (Где снега минувших дней, где они...).

по статистической физике», до сих пор (через 44 года после того, как Ф. А. их прочел) содержащих НОВЫЙ (по крайней мере, не охваченный другими учебниками) подход и единообразное изложение бозе-и ферми-статистик, — отрадное явление. (Как говорится, «любить они умеют только мертвых». Процесс, как уже не говорится, пошёл.)

Поэтому, Феликс Александрович, не ждите Вы для себя ни света, ни покоя.
Никогда не будет Вам ни покоя, ни света.

А. и Б. Стругацкие. Хромая судьба

Березин рассказывал мне, как он получил свою первую работу.⁷⁾ В те дни подходило к финишу известное «Дело врачей». На распределении Березину было сказано с большой теплотой: «В Вашей рекомендации от научного руководителя [И. М. Гельфанда] сказано, что у Вас есть несомненные способности к научной работе. Поэтому мы Вам даем возможность взращивать Ваш талант в месте, равно близком сразу трём научным центрам, известным во всем мире: Одессы, Львова и Москвы».

Я забыл, как называлась та деревня, что имела в виду.

Однако через несколько дней после распределения Сталин умер, а ещё примерно через месяц значительную часть распределений пересмотрели (не без усилий со стороны студентов). В аспирантуру Березина все-таки не взяли, а направили учителем в среднюю школу,

⁷⁾ В те времена, те студенты и студентки, что не были беременны или не получили освобождения по не менее уважительной причине (были ну очень активными комсомольцами, например) должны были пройти распределение, а получив назначение — отработать два, кажется, года на том и только том предприятии, куда распределены. Иначе — под суд.

Представители крупных заводов, исследовательских институтов и разнообразных министерств встречались в течение нескольких дней с выпускниками незадолго до защиты дипломов, и каждая сторона подыскивала себе кандидатов. Способные студенты могли избежать распределения, поступив в аспирантуру. Для этого была необходима, но совершенно недостаточна, рекомендация научного руководителя, поддержанная партгруппой кафедры. Туда же, впрочем, бывали рекомендованы студенты обладающие не математическими, а иными талантами. Они получали рекомендации из других, менее очевидных, мест.

но в Москве, где он, собственно, и жил. (Не надо думать, что такая злая судьба ждала обязательно евреев. Достаточно было быть ярким и независимым студентом, и совсем не только в сталинское время. Например, рекомендация Вере Сергановой, одной из моих самых сильных учениц и учеников, официально числившейся у Ю. И. Манина, не была поддержана партгруппой кафедры алгебры в середине 1980-х. Это один пример из многих, я просто упомянул тот, что мне ближе. Аналогичные истории происходили и на распределениях после аспирантур.)

Давление общества и импринтинг стереотипов поведения родителей и учителей часто играют роль в формировании характера (а с ним — судьбы). Березин был студентом И. Гельфанда, да ещё посещал семинары Л. Ландау. Оба этих гения были, что называется, «сильными личностями»; большинству людей с ними было очень непросто. Вместе с мамой Березина (тоже несгибаемого характера человеком) они определенно составляли основную и важнейшую часть березинской «референтной группы», в терминах психологов.

К концу жизни Березина к тяготам, общим для всех, прибавились и новые личные заботы. У него появилась семья, он должен был заботиться не только о ней, но и о своей тяжело больной маме, и он отчаянно старался успеть в ногу со взрывом интереса к суперсимметриям, записывая всё, что мог (и чего не мог) сделать хотя бы в теории представлений супералгебр Ли. Несколькими своими ярчайшими идеями в других направлениях он при этом пожертвовал, бросив их. Некоторые из них были потом поняты и разработаны после его гибели (см. обзор, а главное — книги, Ю. Неретина⁸⁾, который одну из таких березинских идей развивает).

Березин стал чаще демонстрировать неадекватные реакции. Однажды, меньше чем за год до его смерти, мы с ним зашли на кафедру теории функций и функционального анализа, к которой он был приписан (как и Р. А. Минлос, В. П. Паламодов, А. А. Кириллов и И. М. Гельфанд, наряду ещё с десятком-другим преподавателей). Дело было в августе, на мехмате было пустынно, и большущий стол, за которым помещались на заседаниях все члены этой многочленной кафедры, был завален стопками писем, накопившихся за каникулы. Ряд писем был адресован А. А. Кириллову, сколько-то —

⁸⁾Вообще на страничке Неретина имеется немало полезного: <http://www.mat.univie.ac.at/~neretin/>.

И. М. Гельфанду, были там письма и некоторым другим членам кафедры, но бóльшая часть писем была Березину. Их было слишком много даже для нескольких высоких стопок, и с полдюжины писем свалились на пол. С пяток писем попали и в корзинку для бумаг, стоявшую под столом: очевидно, кто-то подвинул корзинку с прохода под стол, а сквозняк сдул письма. Я нырнул под стол, чтоб выудить письма, упавшие на пол и в корзинку; все они оказались адресованы Березину. Увидев это, он необыкновенно побледнел и сказал: «Вот видите, Дима, как они меня ненавидят», и наотрез отказался допустить возможность того, что письма сдуло случайно.

Мне было очевидно, что хотя с Березиным бывало нелегко, и наверняка какие-то из его коллег его не любили, а кто-то, может, действительно ненавидел, но в этом конкретном случае его реакция была параноидальна⁹⁾. Было ли его (всегдашнее на моей памяти, с первого дня знакомства) ощущение непереносимой тяжести бытия, а главное — обреченности, обоснованным — другой вопрос. Для него самого — несомненно было.

В этих байках я хотел показать также, что поведение Ф. А. часто напоминало мне описания тех людей, которым объявили, что их казнят: может — завтра на рассвете, а может — через неделю, и которые, глядя на своих мучителей, смачно сплевывают, чтобы показать, что у них во рту не пересохло от страха, и используют каждое оставшееся мгновение, чтобы насладиться жизнью.

⁹⁾Хоть я и читал у И. Ильфа «Картина Репина: „Иван Грозный отмежевывается от своего сына“», а с некоторыми людьми, вроде описанных Ильфом, я даже был знаком, но ещё не понимал, с кем дружу. И вот лишь недавно я случайно узнал, что в данном случае реакция Березина была хоть и бурновата, но по существу: важное и срочное письмо, адресованное Березину, однажды, незадолго до описанного случая, оказалось на другой кафедре.

СЕМЬ ИСТОРИЙ

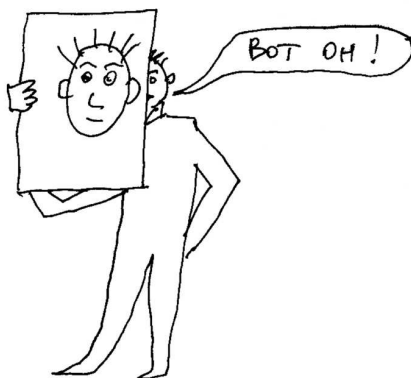
С. Конштейн

Дарвинизм

Однажды Березин залез на высокую сосну, чтобы достать со стоящей рядом ели застрявшую там кошку. Когда я восхитился его умением лазить по деревьям, он ответил: «Я ведь произошёл от обезьяны!»

«Существует ли профессор Березин?»

спросили на конференции в Польше Альберта Соломоновича Шварца после того, как он прочитал доклад Березина, которого на эту конференцию не выпустили. «Конечно, существует!», ответил Альберт Соломонович, взял лист бумаги и карандаш и за несколько секунд доказал существование профессора Березина.



Профессор Шварц
доказывает существование
профессора Березина

«Как отличить хорошую математическую работу от плохой?»

спросил кто-то из физиков Феликса Александровича на семинаре по математической физике.

— Когда этот же вопрос задали N, — ответил Березин (чему равно N, я не помню), — то N в ответ на это рассказал следующую притчу.

Вот эта притча.

Вызвал хан начальника гарема, и велел найти для гарема новую женщину, так как все старые ему надоели. Срок — 3 дня, награда — мешок золота в случае хорошего выполнения задания или казнь в противном случае. А чтобы начальник гарема не сбежал, к нему были приставлены шпионы. После бесплодных поисков зашёл бедняга в портный кабак, где пил, плакал и с тоской смотрел на отплывающие корабли. Увидел хозяин кабака рыдающего вельможу, поинтересовался причиной его горя, и предложил помощь в обмен на половину награды. Женщине, которую привёл хозяин кабака, было далеко до красоток из гарема, но хозяин кабака уверил, что хан будет доволен. На следующее утро радостный начальник гарема отнёс хозяину кабака весь мешок золота, и поинтересовался у него, чем же так хороша эта женщина, которая явно хуже всех прежних обитательниц гарема. «Я бы тебе объяснил», — ответил хозяин кабака, — «но всё равно не поймёшь. Евнух...»

Читатели газет

На конференции по оптимальной организации производства основоположник советской социологии Шляпентох выступил с докладом «Методы получения достоверной социологической информации». В этом докладе прозвучала следующая история.

ЦК КПСС поручил каким-то людям выяснить, насколько охотно пойдёт советский народ защищать Родину в случае чего. Эти люди стали задавать москвичам разные вопросы, среди которых был и вопрос, какую газету они предпочитают — «Правду» или «Известия», а потом сделали вывод, что читатели «Правды» пойдут защищать Родину более охотно, чем читатели «Известий». В результате руководство «Известий» имело неприятный разговор в ЦК.

Я пересказал эту историю Березину, а тот при встрече со Шляпентохом поинтересовался, правдива ли она. Шляпентох почему-то

на меня обиделся. «Я же привёл эту историю в качестве примера *неправильной* методики!» воскликнул он после всех инвектив. Может, этот пример был гипотетическим, а не реальным?

«12 стульев»

Преамбула. В юмористическом разделе «Клуб 12 стульев» «Литературной газеты» был опубликован рисунок с изображением двух алкоголиков, из головы одного из них висала ленточка с записанной мыслью. А мысль была математической формулой: некий предел + сумма некоего ряда + некий интеграл = 3,62. Что такое 3,62, тогда знали все — цена бутылки водки. Предел и сумму ряда я вычислил легко, а чтобы вычислить интеграл, пришлось довольно долго читать разные книжки. Через несколько месяцев в тех же «12 стульях» появился тот же рисунок в уменьшенном виде с показанным письмом какого-то читателя, который тоже проверил формулу из рисунка, убедился в её правильности, и за то, что усомнился в этом, наложил на себя строгую эпитамию, как это было принято в «Клубе 12 стульев»¹⁾.

Амбула. Когда я поступал в аспирантуру к Березину, а разные люди и обстоятельства этому мешали, он меня предупредил, что мне будет устроен экзамен с пристрастием по функциональному анализу, и устроил мне несколько часовую репетицию, совместив её с прогулкой по оврагу между Винницкой и Матвеевской. Через день Березин прислал ко мне гонца с просьбой срочно позвонить. Оказалось, для того, чтобы спросить, умею ли я вычислять тот самый интеграл из «12 стульев».

А до упомянутого экзамена дело не дошло, ибо к разным людям и обстоятельствам присоединился партком.

Изобретения бывают интересные, а бывают приятные

Как-то я похвастался Березину, что в 6-м классе школы придумал, как сделать телевизор в несколько раз тоньше. В ответ Березин сообщил, что он в своё время придумал, что можно модулировать радиосигнал поляризацией.

¹⁾Задолго до того нашёлся такой читатель «Клуба 12 стульев», который сообщил редакции, что у них ошибка, и что накладывают не эпитамию, а эпитимию. Редакция извинилась перед этим читателем и наложила строгую эпитамию на всех виновных в ошибке.

А когда Березин угостил меня сваренным им вареньем из изюма, это побудило меня к небезуспешным экспериментам по варке варенья из чего ни попадя.

Вежливость королей

«Лучше опоздать, чем прийти раньше», — с тонкой улыбкой заметил как-то Березин, и тем самым изменил мой стиль жизни. Впрочем, когда я как-то опоздал более, чем на час, на встречу с ним и Мариновым, Березин был очень недоволен.

Недавно один культуролог рассказал мне, что приемлемая величина опоздания является этнокультурным параметром. Вспомнил какого-то индийского профессора, который в США опоздал на свою лекцию на 3 часа, и который был весьма удивлён, что студенты его не дождались.

Ч А С Т Ь IV

НА СЕМИНАРЕ БЕРЕЗИНА

О СЕМИНАРЕ Ф.А. БЕРЕЗИНА

**Борис Воронов, Дмитрий Гитман, Семён Конштейн,
Игорь Тютин, Анатолий Шабад**

В процессе подготовки этой книги выяснилось, что о семинаре Ф.А. Березина упоминают многие авторы воспоминаний, но никто не рассказал о нём подробно. Однако семинар этот являлся одним из любимых детищ Феликса Александровича, он отдал ему много сил и времени. По инициативе Д. Гитмана была организована беседа по скайпу между бывшими участниками семинара, в настоящее время оказавшимися на большом расстоянии друг от друга (Д. Гитман (Д.Г.) — в Сан-Паулу, И. Тютин (И.Т.), Б. Воронов (Б.В.), А. Шабад (А.Ш.) — в Москве, С. Конштейн (С.К.) — в Ярославле). Ниже приводится запись этой беседы.

Д. Г. — Алло! Привет! Сколько вас там человек? Назовите себя.

А. Ш. — В данный момент нас двое. Игорь и я. Сейчас в ФИАНе, откуда мы с тобой ведём беседу, проходит сессия памяти Ландау, столетие со дня его рождения. Воронов там. Он подойдёт с минуты на минуту.

И. Т. — Без Воронова не годится. Я пойду его позову.

Д. Г. — Не надо никуда бегать, он сам появится. Я, к моему большому сожалению, не мог посещать семинар Березина: жил в те годы в Сибири. Так что мне на этой конференции может быть отведена роль только задающего вопросы, а вам, соответственно, — роль отвечающих или вспоминающих. Моё предложение состоит в следующем: я буду задавать вопрос или серию вопросов, а вы по очереди отвечайте, причём в строго определённом порядке. Пусть первым говорит Игорь Тютин, как самый неразговорчивый, потом — Анатолий Шабад, как среднеразговорчивый, а потом уж слово дадим Борису Воронову, как неограниченно разговорчивому. Семёну же Конштейну, находящемуся в данный момент в Ярославле, позволяется включаться, когда сам пожелает.

А. Ш. — Я-то думал, что самый разговорчивый — это я.

Д. Г. — Ну, тебе до Воронова далеко, хотя ты и бывший член Госдумы.

А. Ш. — Сам ты — бывший член, а я — депутат. Ну ладно, давай командуй, бразильский диктатор томского происхождения!

Д. Г. — Да уж, куда тебе деваться. Итак, первая группа вопросов: когда семинар был организован, кто это придумал, в чём заключалась его идея, кто были первые участники семинара? Были ли вы на первом семинаре, если нет, то когда каждый из вас начал семинар посещать, и как вообще он проходил?

И. Т. — Совершенно не помню, как и почему я попал на семинар, было это в 1969 году, так что все остальные твои вопросы отпадают сами собой.

С. К. — Я начал посещать семинар в начале 1970-х, когда точно — не помню, ездил на семинар из Ярославля, выезжал часа в два-три и к 6–7 часам приезжал в Москву.

А. Ш. — Мне было проще, я ездил из ФИАНа, но всё же тоже был уставшим и голодным, покупал по дороге два плавленых сыр-ка — «Новый» или «Дружба», — а с семинара мы возвращались уже поздно ночью. Начал я посещать семинар в 1962 году. Кто меня туда затащил, совершенно не помню. Я только окончил университет. На первом заседании семинара я не был. Те заседания, на которых я был, были явно не первыми.

Помню, что вёл семинар какой-то Березин, что за фигура, я тогда совершенно не знал и не интересовался. Ну, ведёт семинар, значит ему так надо. Очень было страшно, я его боялся. Иногда вдруг ему приходило в голову, что на протяжении семинара мы ничего не понимаем, что было правдой, и тогда он начинал спрашивать людей: «А вы понимаете?». И вдруг он спросил меня: «А почему это интеграл движения?». А я вообще не врубался, что это за интеграл движения, почему...

Д. Г. — Алло! Ничего не слышно. Ты, видно, возбудился и что-то задел.

А. Ш. — Я возбудился? Это интеграл движения меня возбудил. Ну, продолжаю. Так вот, я знаю, что интеграл движения — это что-то, что коммутирует с гамильтонианом. Кто там был гамильтониан, я не отслеживал, тем более — почему с ним кто-то там перестановочен, но пролепетал: «Потому что коммутирует с гамильтонианом». Ф. А. остался доволен, у него создалось ложное представление, что слушатели, типичным представителем которых

я был в его глазах, что-то понимают. Вот это самое первое впечатление.

Помню, там ещё был Роберт Адольфович Минлос. У Ф. А. была такая манера. Он мог сказать, махнув рукой, мол, пустяки вы говорите. Вот когда я, делая сообщение в первый раз, хотел на этот жест обидеться, потом вдруг увидел, что так же он обращается с Минлосом, ну, я решил, уж если так он обращается с Минлосом, то, значит, и мне негоже обижаться, и приходилось терпеть. Но манера была неприятной. Несмотря на это, все задачи своей диссертации я Березину докладывал, работа есть работа.

Д. Г. — Дополнительный вопрос. Было ли тебе сразу ясно, какой была тема семинара, или она была широкая, не обязательно квантование?

А. Ш. — Тема была — то, что мы в принципе могли бы понимать, вот так я это воспринимал тогда. Как это ни дико звучит, всё здание науки представлялось мне тогда одномерной конструкцией с одним измерением — высотой, я и по сей день не изжил рудиментов этих первобытных представлений: по мере накопления силы человек поднимается с уровня на уровень, и у каждого свой потолок. На самом деле, как я понял позже, это был семинар по квантовой механике. Теория поля также была представлена. Но я пришел не за этим. Я пришел для того, чтобы попытаться подняться на одну ступеньку вверх, понимая, что семинар этот и есть то самое место, где это надо делать.

Если говорить о тематике серьёзно, как это я сейчас припоминаю, то первой темой, в которую мы погрузились на семинаре, стали полюса Редже в нерелятивистской квантовой механике. В то время физики бросились вслед за В. Н. Грибовым и Г. Домокошем применять реджелогии к задачам рассеяния элементарных частиц при высоких энергиях. Это было весьма спекулятивное перенесение результатов в другую сферу, с точки зрения математики — грязь. С ним, однако, связывались далеко идущие надежды на достижение нового уровня понимания физической реальности. Можно сказать, что они в дальнейшем оправдались.

Ф. А. Березина эта сторона дела интересовала только в порядке любопытства. Он, однако, задался целью профессионально разобраться в исходной, вполне математически поставленной, задаче Т. Редже. Так что нерелятивистской теории рассеяния были посвящены многие заседания семинара в 1961 и 1962 годах. А аспирант

Б. М. Левитана Мираббас Гасымов, участник семинара, даже в результате сделал вполне математическую работу на эту тему, а я — по итогам этих обсуждений — доклад в ФИАНе на семинаре И. Е. Тамма. Как ни парадоксально, слушатели того семинара, т. е. непосредственно те, кто занимался применением реджистики в физике высоких энергий, не владели основами исходной теории Редже (что, как стало понятно, было большим упущением!), так что нобелевский лауреат завершил тот семинар словами «Спасибо, что Вы нас просветили!»

Д. Г. — Можно задать тебе вопрос?

А. Ш. — Ну, давай, задавай.

Д. Г. — Как ты вообще понимал, почему Ф. А. этим занялся, такой как бы филантропией, студентов учить? Ему же необязательно было это делать?

А. Ш. — Я был тогда маленький, и такими вопросами не задавался. Например, зачем учителя в школе нас учат? Я думал, если они это делают, значит, это им зачем-то надо — нас учить. Также и здесь, я не задумывался, зачем человеку это надо. Теперь-то могу себе примерно это представить, но тогда я такими вопросами не задавался. Я даже не понимал, что это за человек, какого он уровня. Много позднее Ф. А. как-то пожаловался мне, что его обязывают читать лекции первичного уровня на младших курсах, а ему это совершенно неинтересно, более того, как он сказал, ведёт к утрате квалификации. Думаю, что семинар был для него способом включения в некоторые, новые для него и при этом смыкающиеся с физикой, темы при участии целого коллектива молодых людей. Одновременно семинар служил средством удовлетворения глубоко внутренней потребности Ф. А. — учить.

Д. Г. — Было ли явно видно, что именно он руководит семинаром?

А. Ш. — Ну, это всё было понятно. Руководил семинаром, конечно, он. Был ещё соруководитель, Минлос. Он сидел за партой, рядом, и время от времени вставлял кое-какие замечания. Минлос был менее активным, но он регулярно был на семинаре и всегда помогал Ф. А. семинар вести. Чувствовалось, что Ф. А. был очень заинтересован в присутствии Р. А. Имя-то Минлоса мы хорошо знали: он был соавтором известной книги трёх авторов — Гельфанда, Минлоса и Шапиро — о представлениях и применениях группы вращений и группы Лоренца. Эта книга тогда была совсем свежей. А имя Березина было совсем неизвестно.

Д. Г. — Ну, если ты закончил, то дай слово Воронову.

А. Ш. — Видишь, я не оказался коротко говорящим.

Д. Г. — Это станет ясно только после выступления Воронова.

Б. В. — Могу, к сожалению, начать с того же, с чего начал Толя. Я не помню точной даты, когда я появился на семинаре. Но хорошо помню, при каких обстоятельствах я о семинаре узнал.

С подсказки покойного Бори Струминского начиная с 3-го курса я ходил на мехмат слушать общеобразовательные лекции¹⁾. Там я прослушал нескольких людей — Рашевского, Шилова, Левитана — по разным разделам общей математики, и тогда же Боря мне подсказал, что, вообще говоря, помимо лекций полезно посещать семинары. Я не знал, какой семинар мне выбрать и пошёл к доске, где были вывешены расписания семинаров. Они вывешивались не сразу, не с 1 сентября, а немного позднее, семинары начинали работать с октября. Я пришёл на мехмат, подошёл к доске объявлений, эти семинары назывались «дополнительными факультативными семинарами», и увидел объявление: тогда-то там-то начинает работать семинар с названием «Математические задачи квантовой механики». И я пришёл на этот семинар.

Его руководителями были в то время Березин и Минлос, но Березин в этом дуэте явно доминировал. Один из эпизодов, это подтверждающих, был такой: Минлос начал что-то говорить, Ф. А. его осадил (они были приятели), сказав, что тот выражается неаккуратно, на что Минлос, ничуть не обидевшись, сказал: «Знаешь что, Алик, я сейчас скажу это своими словами, а потом ты перескажешь, как это надо сказать».

Когда я туда пришёл, они занимались квантовой статистикой, о ней рассказывал Добрушин. На семинар Березина я сразу же стал ходить регулярно, чувствуя, что там я получаю то, что не получаю нигде. Там я учился говорить. Ф. А. учил правильно ставить задачи, правильно задавать вопросы и правильно на них отвечать. Я почувствовал немедленно, что именно такого учителя, как Ф. А., мне не хватает.

У меня сейчас впечатление, что я появился на семинаре осенью 1960 года. Был ли это первый год, я не знаю, это можно уточнить у того же Минлоса или у Володи Финкельберга. Володя был одним из первых, а может быть, и просто самым первым слушателем се-

¹⁾Борис Воронов учился на физфаке МГУ.

минара Березина, потому что как раз тогда Ф. А. руководил известной работой Березина — Финкельберга — Похила, целью и содержанием которой было точное решение задачи о полном квантовомеханическом описании (собственные функции, спектры, матрица рассеяния) системы многих частиц с точечным взаимодействием на прямой. По-моему, это был один из первых, если не первый, пример точно решаемой многочастичной модели. И именно тогда эта работа там, на семинаре, рассказывалась.

Мне кажется, что в это же время (а может, это было позднее?) Ф. А. рассказывал о своём, совместном с Шубиным, курсе лекций по квантовой механике для мехматян. После учебника Ландау и Лифшица эти лекции были для меня откровением: я узнал о существовании другого, более строгого и более общего формализма и о другом языке квантовой механики. В 1972 году они вышли в университетском ротапринтном издании под названием «Лекции по квантовой механике». Помню, какое впечатление на физиков-теоретиков Томска произвели пересказанные мною отдельные разделы этих «Лекций», посвящённые теории рассеяния. Уже после смерти Ф. А. лекции были доведены Шубиным до самостоятельной книги «Уравнение Шрёдингера», изданной под двумя именами.

Кроме того, Ф. А. тогда обкатывал свою будущую книгу о вторичном квантовании и учил нас вторичному квантованию. Манера проведения семинара была разной, но Ф. А. старался загрузить слушателей. Когда возникал какой-то общий вопрос, организовывал что-то вроде сеанса ликбеза, часто выступал сам или приглашал кого-то со стороны. У нас выступала масса известных людей с общими построениями, а частные работы по заданию Ф. А. рассказывались слушателями. Вот, пожалуй, и всё, что я могу сказать о начале семинара.

А. Ш. — Дополню одним эпизодом из осени 1962 года. После каникул собрался семинар. Вот как его подготовил Ф. А. Он просмотрел кучу статей, опубликованных за лето в физическом журнале «Nuovo Cimento». На семинаре Ф. А. стал эти работы раздавать участникам для изучения. Его заинтриговал странный термин: «Вот здесь пишут про какой-то максимальный аналитический принцип. Что это ещё такое?» Я сказал, стесняясь, что у нас это называется «принцип максимальной аналитичности» и звучит примерно так: амплитуды рассеяния обладают только такими особенностями в плоскости комплексной энергии, которые необходимы,

и никакими другими». Для математика это должно было звучать как полная дикость, поэтому я, наверное, покраснел. Тем не менее Ф.А. заинтересовался и поручил кому-то доложить об этом принципе.

Б.В. — В какой последовательности появлялись на семинаре люди, я не помню. Вначале помню Финкельберга и Похила, а потом, начиная с 1962 года, появились Толя Шабад, Володя Игнатович, Данила Хомский. Помнится, он рассказывал статью Хаага о нетривиальном математическом содержании модели БКШ (Бардина — Купера — Шриффера) сверхпроводника и знаменитом преобразовании Боголюбова. Тогда мы впервые узнали о неэквивалентных представлениях канонических коммутационных соотношений в квантовой теории поля.

В 1964 году пришёл Витя Сушко. Он сразу стал очень активным участником семинара. Тогда он был аспирантом МГУ, мы часто с ним вместе сидели в библиотеке и беседовали, в частности, по поводу семинара.

А.Ш. — Кстати, о преобразовании Боголюбова. Оно тогда вызывало восхищение как необычно изящное и ключевое. Феликс же Александрович по его поводу небрежно заметил, что Н.Н. Боголюбов просто оказался первым математиком, занявшимся соответствующим вопросом.

Д.Г. — Как часто проходил семинар?

Б.В. — Каждую неделю. Вначале по средам, потом по четвергам. Начинаясь он в 18 часов, длился два часа, иногда затягивался. Но Ф.А. не был сторонником затягивания семинара. Обычно он семинар прекращал, а потом могла продолжаться свободная беседа либо в стенах университета, либо по дороге к метро.

Д.Г. — Мы не установили точную дату начала семинара, но — вторая половина вопроса — когда он закончился?

И.Т. — Семинар имел два отрезка времени. Начало — дата не ясна, потом он прервался в середине 1960-х годов, когда из семинара ушёл Минлос. Во втором периоде Ф.А. единолично семинар возобновил.

Б.В. — Почему семинар прерывался и насколько, я не помню. У меня ощущение, что я всю жизнь ходил на семинар Березина. Потом он изменил день, вместо среды стал четверг. Подозреваю, что он это сделал как свидетельство того, что начался период независимого существования семинара. И тематика в значительной мере

тоже изменилась под влиянием того же Ф. А. Во втором периоде, начиная с 1970-х годов, фактически соруководителем семинара стал А. С. Шварц. Он пришёл, быстро освоился и занял на семинаре лидирующие позиции, часто рассказывал и комментировал. К концу 1970-х годов Шварц несколько отошёл и перестал быть соруководителем, оставаясь частым слушателем, а соруководителем стал Паламонов.

Закончился семинар следующим образом. В 1980 году погиб Березин. Хотя Ф. А. не стало, было принято решение семинар продолжать, но потом он прекратился естественным образом. Таким, как при Ф. А., семинар уже не был.

Д. Г. — Хорошо. Давайте следующую серию вопросов. Не могли бы вы вспомнить какие-то темы на семинаре или какие-то течения, которые потом вылились в новые интересные работы?

Пауза.

Д. Г. — Алло! Алло! Вы меня поняли?

И. Т. — Перевариваем твой вопрос.

Б. В. — Приведу один пример. Начиная с какого-то времени постоянным участником семинара стал Миша Маринов, и из сотрудничества Березин — Маринов родилась известная работа по псевдоклассической механике частиц со спином и её квантованию. Развивая суперматематику, Ф. А. обсуждал возможность объяснения спина с помощью антикоммутирующих переменных. Мишу, который пропагандировал у нас теорию струн, где такие переменные тоже появлялись, заинтересовала эта идея. Березин с Мариновым объединились, но работали вне семинара, на семинаре их совместная работа только рассказывалась. Она не была продуктом деятельности коллектива семинара.

Д. Г. — Имеется статья Березина в Comm. Math. Phys. за 1975 г. «Общая концепция квантования», в которой он пытался сформулировать отображение классических механик и т. д. и некоторые постулаты квантования. Он это обсуждал на семинаре?

Б. В. — Не то слово. Квантование изначально и длительное время было темой семинара. Ф. А. все свои работы и идеи по этой части обкатывал на семинаре. Активнейшим образом, без стеснения и боязни, обсуждал, что такое квантование и как можно квантовать. Особо его занимало квантование систем с неплоским фазовым пространством, например, квантование на кэлеровых многообразиях.

В связи с этим он увлечённо обсуждал и строил то, что теперь называется *деформационным квантованием*.

Д. Г. — С помощью когерентных состояний, да?

Б. В. — Этого не помню. Но что я чётко запомнил — так это то, что *квантование есть некоммутативная деформация алгебры наблюдаемых на фазовом пространстве*. Думаю, что я застал начало этой истории. Когда я только пришёл на семинар, квантование, символы операторов — всё это было уже на слуху. Березин тогда готовил свою знаменитую книгу «Метод вторичного квантования». С увлечением учил он нас квантованию, при этом постоянно вызывал к доске.

Как это принято на мехмате, теорию мы проходили в форме упражнений. Я, например, часто оказывался у доски, чтобы произвести нормальное упорядочение или построить нормальные символы операторов.

Ещё одна тесно связанная с этим тема — теория самосопряжённых расширений симметрических операторов применительно к квантовой механике систем с сингулярным взаимодействием. О самосопряжённых расширениях я узнал тоже от Ф.А. на семинаре, когда он рассказывал их совместную с Фаддеевым статью по трёхмерному дельта-потенциалу. Статья подробнейшим образом обсуждалась на семинаре, в частности, запомнились разъяснения Минлоса.

На меня эта статья произвела огромное впечатление, я узнал ещё об одной неоднозначности квантования, о которой от физиков никогда не слышал: *по одному и тому же формальному выражению для гамильтониана можно, вообще говоря, построить много квантовых механик*. По-моему, эта работа была в своё время недооценена: она открывала новое направление в квантовой механике, осознание которого продолжается до сих пор.

Пусть я повторяюсь, но скажу, что все обсуждаемые темы были непосредственно связаны с работой Ф.А. Это был действительно его рабочий семинар.

Д. Г. — Как так произошло, что за все эти годы не появилась фигура, которая тоже бы активно втянулась в генерацию идей по квантованию? Я имею в виду квантование в понимании Березина.

Б. В. — Почему не появилась фигура, сопоставимая с Ф.А.? Возможный ответ — в личности Березина, его таланте. Никто не мог с ним сравниться по следующим качествам: он умел говорить на

двух языках, он мог выслушать физика и так переформулировать его утверждение (часто неясное, а иногда и просто ошибочное, на что он тоже указывал), чтобы придать ему правильный математический смысл, т.е. сформулировать задачу или придать ей точный математический смысл.

А. Ш. — Показательный случай произошёл с диссертацией одного моего аспиранта. Наша с ним работа докладывалась на семинаре Березина. Особого интереса Ф. А. не проявил. Когда ему что-нибудь нравилось, он говорил — у него было словечко такое — «Здорово!». Мне так хотелось, чтобы он его произнес! Я думал, вот сейчас выйду, выступлю, а он скажет: «Здорово!». А он не сказал... Тем не менее выслушал всё нормально, правда вначале он испытывал раздражение от затянувшегося непонимания. Наконец, он применил такой приём, лишив меня на время инициативы: «Нет, вы молчите, а я буду вам серию вопросов задавать. Отвечайте только „да“ или „нет“». А когда я таким образом на все вопросы ответил, он сказал: «Тогда я вообще ничего не понимаю». Это продолжалось два семинара подряд, но в конце концов всё разъяснилось и встало на свои места. Поэтому я был совершенно уверен, что всё в порядке, и спустя некоторое время попросил Ф. А. быть оппонентом на кандидатской защите моего аспиранта. Он согласился.

Заодно — к слову пришлось — я рассказал ему историю, как этот бедолага живёт на метеостанции на горе Чегет, в свободное от метеонаблюдений время героически занимается наукой, как он спустился на лыжах по «черной трассе» — северному спуску, вдрызг разбился и с разбитой головой приехал заниматься со мной на спортбазу под горой, где мы тогда отдыхали большой ФИАНовской компанией.

Подходит время защиты, и тут происходит драма. Аспирант мой едет к Ф. А., объясняет ему свою диссертацию. Тот в полной ярости, мол, что за дребедень такую ему рассказывают, пишет отзыв на кандидатскую, которая состоит из одного абзаца, где написано, что «в работе решена такая-то задача», и дальше идет изложение задачи, которая выглядит в этом изложении абсолютно тривиальной. И мне звонит в крайнем возбуждении: «Вы мне что-то говорили, какой он несчастный. Повторите-ка поскорее!» Тем самым Ф. А. хотел сказать, что если это надо из соображений гуманизма, то, уж так и быть, он подпишет положительный отзыв. Но и в этом случае ему нужно было самооправдание для такого нарушения профессио-

нального долга: ведь он не втёмную дал согласие быть оппонентом, и срывать защиту ему совершенно, понятное дело, не хотелось.

Ну, я тоже не мог согласиться с подобным раскладом и сказал, что такая постановка вопроса меня не устраивает, лучше я приеду и расскажу сам, в чём состоит работа. Он говорит: «Ладно, приезжайте». Пока я к нему ехал, я был в таком шоке — защита должна была произойти на днях, — что чуть не попал под машину. По дороге решил, что привести ситуацию в равновесие можно только какой-нибудь выходкой. Поэтому, едва войдя в квартиру на Винницкой улице, я с порога с деланной категоричностью заявил, что отзыв, представленный Ф. А., не удовлетворяет требованиям ВАК, предъявляемым к произведениям этого жанра. И не покраснел перед ним, как за 10 лет до того. Ф. А. заулыбался, дальнейшие разъяснения прошли гладко, без эмоций.

Но интересно было следующее — проявилось столкновение двух культур. Он сказал: «Вы, физики, пишете как-то по-другому, излагаете всё вместе, результаты свои и чужие, с одной стороны — развесисто и красиво, но непонятно, какие вещи куда и с чем соотносятся, сама постановка задачи неясна. А мы, математики, мы ничего этого не пишем, мы сразу начинаем «решена такая-то задача. Точка. Это так, а вот это так и тогда вот это так. И всё». Вот я с тех пор и думаю, читая математические тексты, если пишет всё-таки умный математик, он напишет предысторию, и с чем это едят, и зачем это нужно. Но большинство трудов математиков написано именно так: дано, произведём такие-то действия, теорема такая-то... и получаем. Я до сих пор не понимаю, как они живут и почему они нас не понимают. И, с другой стороны, мы тоже их не понимаем.

Б. В. — А теперь я расскажу об эпизоде, который тебе, Дима, хорошо известен. Где-то в начале 1960-х годов на семинаре появился наш товарищ, который в то время был аспирантом Фрадкина и занимался у него так называемой парастатистикой. А у Ф. А. была такая манера — он немедленно старался познакомиться с вновь пришедшим следующим способом — он спрашивал: «Скажите, а чем вы занимаетесь?» Я с этого начинал и, по-моему, Толя тоже. Так вот, вновь пришедший начал рассказывать о неканонических коммутационных соотношениях, их представлениях и своих идеях по этому поводу.

Надо сказать, человек он очень своеобразный и увлекающийся. Вскоре он забросил «высоколобую» теоретическую физику и пе-

решил в Дубну ко Льву Фёдоровичу Шапиро, где занялся, по его словам, «живой физикой»: холодными нейтронами. И занялся успешно, даже книгу написал. «Но кто хлебнул солёного ветра теории поля...» — он до сих пор предаётся общетеоретическим фантазиям концептуального характера.

Но тогда нам были предложены фантазии по живому материалу. Ф. А. докладчика постоянно поправлял, тот кипятился, и кончилось это сценой, которую помню как сейчас. Когда выступающий, защищаясь, прибег к последнему аргументу: «Вы требуете от меня математических формулировок, а это — физика!», Березин сделал публичный выговор в следующей форме: «По моему мнению, физик-теоретик — это переводчик, который может переводить с языка физики на язык математики, устанавливая тем самым контакт между двумя сообществами, разумеется, дружественный, плодотворный, а вы мне напоминаете переводчика, который знает только один язык, и то плохо». Выступавший обиделся насмерть и после этого перестал посещать семинар.

А. Ш. — Это было не просто так, но именно мировоззренческая несовместимость. Этот человек был отторгнут и с семинара Березина, и из аспирантуры Фрадкина. Потом, когда он уехал в Дубну, то говорил, что вот там встретил настоящих, правильных физиков.

Б. В. — Как видите, Ф. А. бывал достаточно резким. Я бы сказал, что он был учитель не добренький, и если он отчитывал, то отчитывал без всяких экивоков и смягчений. Меня он сёк беспощадно, по счастью, я абсолютно не обижался, т. к. понимал свой уровень и был ему только благодарен за беспощадное ученье. В результате этой порки, как мне казалось, я становился чуть более квалифицированным.

Ещё раз: в научном общении, тем более в споре, он бывал резок. Принцип у него был такой — говорить правду, всю правду, ничего, кроме правды, причём не стесняясь в выражениях. Но его резкость предполагала, что он говорит с вами на равных, он поднимал вас до своего уровня. Вначале он пытался вникнуть, но потом требовал некоторого уровня обсуждения. Если человек это выдерживал, он продолжал общение. Если же человек не выдерживал, не рос систематически в беседах с ним, не поднимался до того уровня, который требовался, то к такому человеку он терял интерес.

Не все выдерживали. И случалось не раз, что человек с высокой самооценкой обижался на резкую критику и уходил навсегда.

А. Ш. — Вот нас всех он так драл, когда мы выступали, а однажды пришёл делать доклад посторонний приглашённый, солидный человек из Стекловки, что-то про статистику рассказывал. И вдруг я вижу: Ф. А. обращается с ним, как обычно на семинарах обращаются с докладчиками, т. е. уважительно и почтительно, не делая из него идиота, хоть в том случае выступающего вполне можно было представить в таком виде. И я подумал: «Значит, всё же кое-какая субординация присутствует».



На семинаре

Б. В. — Возвращаюсь к рассказу об атмосфере, которая сплавивала нас всех на семинаре. Ф. А. понимал сам и нас учил, как надо с разными людьми говорить на интересующую их тему, так называемых физиков-теоретиков он понимал, даже такого слабого разлива, какими мы тогда были, так же как и высоколобых математиков. Ф. А. часто устраивал обзорные доклады видных математи-

ков, многих я там повидал: Познера, В. П. Маслова, С. П. Новикова, Ю. И. Манина, Я. Г. Синая — всех сейчас не вспомню. Ф. А. своим постоянным комментарием и переводом на понятный слушателям семинара язык разъяснял суть сказанного и тем самым обучал. Он очень хорошо чувствовал аудиторию и добивался того, чтобы рассказ человека, абсолютно не приспособленный для этой аудитории, становился ясным и понятным.

Это талант — талант учителя, руководителя. Это такой же талант, как талант Ландау, талант Тамма. Ничего подобного ни у кого другого я больше на мехмате не видел. Гельфанда, к сожалению, я не слушал. Как-то я пришёл к нему на семинар, понял, что это не моё, и ушёл. Это был чисто математический семинар, я там не понимал ничего.

Д. Г. — Я вижу всё время один и тот же круг слушателей. Но в то время в Советском Союзе, в частности в Москве, было много блестящих физиков-теоретиков, что, они передвигались в параллельном мире с вашим семинаром? Семинар Березина их не касался? А их деятельность на семинаре как-то комментировалась?

Б. В. — Я тебе так скажу. Я догадываюсь, о чём ты хочешь спросить. В то время в Москве была масса теоретических семинаров: семинар Ландау в Физпроблемах, семинары Тамма, вторичный и пятничные, в ФИАНе, семинар Померанчука в ИТЭФе, боголюбовский семинар в МИАНе, семинар Иваненко в МГУ. Многие из них интерферировали. Я, например, ходил на семинар Ландау до 1964 года в обязательном порядке, а на семинар в МИАНе — ещё дольше. К сожалению, после Ландау семинар в Физпроблемах быстро опустел. Масса людей из-под Шварца, его ученики и дипломники, как и сам Шварц, постоянно ходили на семинар Березина и семинар Тамма. Более того, сам Березин ходил на семинар Ландау и, правда, очень редко, появлялся на семинаре Тамма. В 1970-е годы на семинар Березина пришли люди из МИАНа — их, видимо, привёл Витя Сушко: Андрей Погребков, Игорь Волович, Олег Завьялов. Олег сразу стал активным участником, слушал, выступал с докладами по квантовой теории поля, в частности по теории перенормировок. Но потом у них с Березиным произошла размолвка, и он исчез. Часто у нас бывал Пётр Кулиш из ЛОМИ ²⁾.

²⁾Теперь ПОМИ РАН. Пессимисты читают это сокращение в одно слово. — *Прим. ред. Д.Л.*

А. Ш. — Я уже рассказал, как разработки семинара Березина по теории полюсов Редже сослужили службу по просвещению физического сообщества.

Д. Г. — Фрадкин ходил на семинар Березина?

Б. В. — Нет, Фрадкин не ходил, это было не его. Но то, что они — Фрадкин и Березин — постоянно общались, это мне известно. И по телефону, и просто прогуливались вместе.

Д. Г. — Они говорили о физике или о положении в обществе?

Б. В. — Конечно, они не могли не говорить о физике. Например, Баталин не ходил на семинар Березина, он ходил на Гельфанда, но что такой существует, он прекрасно знал. Более того, многие свои работы он «пропускал» через Феликса Александровича. Это мне хорошо известно. Конечно, это делалось по подсказке Фрадкина.

Д. Г. — Были ли какие-то комментарии на семинаре Березина о той деятельности, которая зарождалась в Черноголовке — Поляков, молодой Мигдал?

Б. В. — Поляков на семинаре не был ни разу. А был ли там Мигдал — этого я не помню. Но точно помню, что они были постоянными участниками семинара Тамма, не как слушатели, а как докладчики.

Д. Г. — Мой вопрос таков: в Черноголовке в те годы зарождалась некая деятельность, рождались идеи, которые потом вылились в теорию струн и т. д. Эти вещи Ф. А. интересовали?

Б. В. — Я не помню, чтобы они нашли какое-то отражение на семинаре. Но, с другой стороны, точно интегрируемые задачи отражение в деятельности семинара нашли. Более того, несколько раз у нас выступал Замолотчиков и объяснял точную решаемость задачи рассеяния в двумерных теориях поля.

А. Ш. — Классическая работа Ал. Б. и А. Б. Замолотчиковых начинается со ссылки на уже упоминавшуюся работу Ф. А. Березина, Г. П. Похила и В. М. Финкельберга, в которой была впервые открыта факторизованная матрица одномерного рассеяния частиц.

Б. В. — Теорию струн нам рассказывал Маринов. Струны, их квантование, аномалии — всё это мы проходили по Маринову.

Д. Г. — Так как у нас совершенно молчит Тютин, то поставлю обратную задачу: можешь ли ты художественно обрисовать его, Тютину, взаимодействие с Ф. А. на семинаре?

Б. В. — Внешнее впечатление было такое: вот человек, Игорь Тютин, который ничуть не тушевался ни перед Березиным, ни перед

кем иным. Когда ему указывали на какие-то неточности в его рассказе с точки зрения математиков, он говорил: «Ну и пусть, я буду говорить вот так». И продолжал вести свой рассказ. Когда в процессе его рассказа о единой теории электрослабых взаимодействий возникли упреки в некорректном использовании математической терминологии, он их парировал словами типа: «Если вам мои слова не нравятся, я ничего поделать не могу. Вы понимаете, о чём я говорю, значит, этого достаточно». Вот манера, с которой держался Тютин.

Березин Тютина сразу жутко зауважал и отзывался о нём с почтением, не позволяя себе никаких, даже малейших, упреков. И у Паламодова Игорь потом тоже выступал.

А. Ш. — Вот что я вспомнил. По-видимому, это было в то время, когда в семинаре был перерыв. Ф. А. мне позвонил и говорит: «Толя, это Вы написали работу об уравнивании Кортвега — де-Фриза?» Я говорю: «Нет, не я». «Ах, — говорит, — как жалко». Его в этот момент заинтересовал метод обратной задачи квантовой механики, применённый к решению нелинейных уравнений. По-моему, именно вскоре после этого разговора семинар восстановился, и думаю, что один из двух действительных авторов той ставшей знаменитой работы, мой почти однофамилец, а на самом деле пятигородный (!) брат, Алексей Шабат там потом выступал.

Д. Г. — Хочу задать вопрос, важный для написания воспоминаний: нельзя ли перечислить всех мало-мальски заметных учёных, которые прошли через семинар Березина?

Б. В. — Спрашивая, кто участвовал в семинаре, ты имеешь в виду докладчиков или слушателей?

Д. Г. — Слушателей, конечно.

А. Ш. — Ну, многих сегодня мы уже припомним. Кто-то из них был значительной фигурой, кто-то незначительной. Не думаю, что мы сейчас ещё кого-то вспомним. Были люди с мехмата. Кто они, куда они потом делись, стали ли они великими учёными, мы этого не знаем. Несомненной исторической достопримечательностью семинара стало то, что на нём впервые докладывалась работа А. А. Белавина, А. М. Полякова, Ю. С. Тюпкина и А. С. Шварца о самодуальных решениях в теории поля Янга — Миллса, признаваемая как открытие инстантонов.

Б. В. — Через семинар Березина прошло много математиков. Помню такую личность, Изю Сигала, он был несколько раз на семинаре.

К сожалению, математики и физики на семинаре держались отдельно и очень редко взаимодействовали. Березин пытался пробить эту стену. Помню по себе одну его такую попытку объединить математиков и физиков, посещавших семинар, совместной работой. После одного моего методического доклада по функциональной формулировке квантовой теории поля он сказал, что это надо обязательно систематизировать и опубликовать, и дал мне в помощники своего ученика-математика. Но из этого ничего не вышло. Для нас оказалось невозможным придать строгую математическую форму построениям, включающим континуальный интеграл, построениям, которые до сих пор в значительной мере имеют характер наводящих соображений.

Никто из математиков у нас, кроме Березина, не мог эффективно контактировать с физиками. Ну ещё, пожалуй, Шварц, про которого Витя Сушко говорил: «Всё понимающий, делающий тонкие замечания Шварц». Но у Шварца были свои ученики из МИФИ, причём они были гораздо более формальны.

А. Ш. — Одно время Переломов был активным участником семинара.

Б. В. — Мы вспомнили про небезызвестную работу Переломова и Попова по сингулярным потенциалам. К сожалению, она полностью прошла мимо семинара Березина. Я думаю, Ф. А. не видел там никакого математического содержания.

Д. Г. — Вы можете вспомнить ещё что-нибудь позитивное?

Б. В. — Добавлю, когда в начале 1960-х годов я пришёл на семинар, Ф. А. обсуждал несамосопряжённые задачи, т. е. задачи на собственные значения для несамосопряжённых операторов и разложения по собственным функциям таких операторов.

Д. Г. — Сейчас это вошло в моду, по этому поводу проводятся конференции.

Б. В. — Ничуть не сомневаюсь. Эта математическая деятельность имеет, наверное, без малого 60-летнюю историю. В начале 1960-х годов она нашла отражение в журнале «Nuovo Cimento». Я забыл фамилию этого человека, в своё время он был очень известен, он обсуждал вполне физические задачи о резонаторах с дырками, о болтающейся струне с трением на конце. Аналогичные задачи имеются и в квантовой механике, и они Березина интересовали.

Д. Г. — Может быть, чтобы отойти от высоких материй, я задам такой вопрос. Вот, например, если я встречаю каких-то молодых

людей, которые ходят ко мне на семинар, у меня всегда возникает такая прагматическая мысль: если это люди способные, нельзя ли делать какие-то совместные задачи? Потому что интересных несделанных задач всегда куча, а руки не доходят. Поэтому всегда, когда появляются молодые люди, возникает мысль как-то, грубо говоря, их использовать и начать с ними что-то делать. Вот почему у Ф. А. такая мысль не возникала, например, в отношении вас?

С. К. — Почему не возникала? Возникала.

А. Ш. — Конечно, возникала.

Д. Г. — Но вы об этом ничего не говорили.

А. Ш. — Он меня раз запряг, и я даже исписал целую тетрадку, искал какие-то решения. Когда одно решение нашёл — ему нужны были связанные состояния, а я нашёл резонанс, — пришёл к нему, а он не поддержал, говорит: «Нет, резонансом мы заниматься не будем». Я сразу сник, и этот вопрос заглох.

Д. Г. — То есть попытки были, но они не вылились в какие-то публикации.

А. Ш. — У Сушко была совместная работа, у Финкельберга тоже.

Б. В. — С Мариновым была. Они начали это на семинаре, я прекрасно помню, как Ф. А. предложил Маринову скооперироваться.

Б. В. — И меня он дважды пытался загрузить. Об одной такой попытке, неудачной, дать аккуратную функциональную формулировку квантовой теории поля, я уже рассказывал. А второй раз он пытался меня подключить перед самой его смертью. Мы не успели ничего сделать. Буквально в мае 1980 года, семинар уже заканчивался, он вдруг поставил вопрос: «Мы используем антикоммутирующие переменные, но неужели у них нет прямого физического смысла? Нет ли какого-либо объекта, который определяется антикоммутирующими переменными прямо в физике?» В частности, его огорчало в псевдоклассической механике, что всё это чисто формальные вещи. Но раз это работает, должен же быть какой-то эквивалент, партнёр, то, что теперь называют «суперпартнёр», в настоящей физике. Он сказал: «Ну, кто хочет на эту тему подумать?» Меня тоже эта проблема занимала и огорчает до сих пор, потому что ответа я так и не знаю. А тогда я сказал: «Вы знаете, Ф. А., мне это интересно». «Хорошо, приходите ко мне». И мы провели с ним одну беседу, стали собирать литературу. Было это то ли в конце мая, то ли в начале июня, буквально перед самым его отъездом. А через месяц он погиб.

А. Ш. — Пусть Конштейн скажет.

С. К. — Я с ним несколько лет занимался формулой следов и даже ездил по его заданию к Буслаеву в Ленинград.

Б. В. — Погоди, речь идёт о следах на каких-то алгебрах, по-видимому, да?

С. К. — Нет, речь идёт о вычислении вириальных коэффициентов через следы матриц рассеяния подсистем.

Б. В. — Ага, понял. Продолжай, теперь я понял, о чём ты говоришь.

С. К. — То есть я хотел сказать, что Ф. А. заставил меня сделать очень тяжёлые, в общем-то, вещи, формула следов — это была довольно тяжёлая работа.

Д. Г. — И что-нибудь опубликовали?

С. К. — Дело в том, что он опубликовал статью про эту формулу. Очень красивый результат, но неправильный, а после этого появилась статья Буслаева и Меркурьева о том же, не столь красивая. И я долго разбирался, какой результат правильный и где ошибка.

Д. Г. — Общаясь много лет с участниками семинара, не мог Ф. А., даже обсуждая математические и физические задачи, как-то не комментировать ход событий за стенами комнат, т. е. всякие гуманитарные вещи, своё отношение. Даже я, читая лекции здесь, в Сан-Паулу, иногда ругаю президента и ещё что-нибудь, тем самым выражая своё отношение к тому и сему. На этих семинарах можно было как-то понять отношение Ф. А. к действительности за окном?

А. Ш. — Вообще-то между нами была большая дистанция, во всяком случае, вначале. Всё-таки разница и в возрасте, и в положении. Но по мере того как проходило время, более доверительные разговоры стали появляться. Была у нас с ним совместная, я бы сказал, драма, связанная с побегом одного человека в Швецию. Это отдельная история.

Д. Г. — Хорошо бы, чтобы ты её рассказал.

А. Ш. — Рассказать? Ну, хорошо. Сейчас не помню, в связи с этой историей или отдельно, он однажды бросил такую фразу: «Наверное, пора эвакуироваться». До этого у него не дошло. Если бы он пожил подольше, наверное, он бы уехал. Это предположительно правильно.

А моя история заключается в том, что ко мне на семинар ходил молодой человек, Александр Журжин, который потом перешёл к Ф. А. и стал его дипломником. При этом он очень стеснялся того

обстоятельства, что ушёл от меня. Мне, конечно, это было смешно, потому что это как бы несопоставимые масштабы.

Ну, хорошо. Так Ф. А., не знаю, хохмы ради или руководствуясь другими соображениями, взял и назначил меня быть у этого парня рецензентом на дипломной работе. Я, конечно, согласился. Пришёл на защиту, сам Березин не появился. Но когда я пришёл, меня вызвали на кафедру, открыли передо мной диплом этого самого Журжина и, тыча пальцем в заглавный лист, сказали:

— А ЭТО вы видели?

Что же было это ЭТО? Было написано, что диплом посвящается некоему человеку, была указана его фамилия, которую я не помню, и далее следовало: «который научил меня хвастаться».

— Что такое «научил хвастаться»?

Я говорю:

— Ну, видел, ну и что?

Я перевернул страницу и стал читать работу. Тогда Базаров, он был партсекретарём физфака, а второй был зав. кафедрой теоретической физики, говорит:

— Мы его не допустим к защите, если он не уберёт это посвящение.

Я решил, что можно это дело как-то смягчить и начал смягчать. В этот момент вошёл сам Журжин, и они нагло так ему сказали:

— Уберите это.

Ну, когда к человеку обращаются так нагло, да ещё в присутствии рецензента, естественно, он говорит:

— Нет, не уберу.

— Ну, тогда всё, защита не состоится.

Я сразу позвонил Ф. А., говорю: «Вот такая история, я тут ни при чём». Он отвечает: «А я тут при чём?» Дальше события развивались следующим образом. Примерно через полгода Журжин всё же защитился. Меня уже не приглашали. Защита, кажется, была закрытой, как она проходила, я не знаю.

А потом Журжин сбежал в Швецию. Получаю из Швеции письмо, причём — на работу, в ФИАН. В нём написано: «Я пишу вам из Швеции, где нахожусь после 26-дневного путешествия через Кольский полуостров и Финляндию». То есть человек тайно пересёк границу с Финляндией, потом пересёк всю страну, никому не раскрываясь, потому что знал, что Финляндия сдаёт перебежчиков из СССР, затем перешёл в Швецию и там уже сдался властям.

И просит меня дать ему рекомендацию для поступления в аспирантуру.

И тут вдруг звонит мне Ф. А. и говорит: «Надо встретиться». Мы с ним встречаемся на улице, и он рассказывает, что Журжин позвонил ему из Швеции и тоже просит Ф. А. прислать ему рекомендацию в аспирантуру, добавляя: «Я хотел бы продолжить с Вами работать», на что Ф. А. ответил: «Если Вы хотели со мной работать, так и работали бы, я же Вас не прогонял. Что же Вы уехали?» Но, тем не менее, Березину, так же как и мне, пришлось иметь дело с КГБ.

Д. Г. — Елена Григорьевна в своём очерке тоже упоминает об этом случае и пишет, что Ф. А., невзирая на всю опасность ситуации, тайно с оказией рекомендацию Журжину всё же переслал.

А. Ш. — Я знаю, что Журжин потом куда-то поступил, появились несколько его работ, потом он исчез с физической стези.

Но самое смешное было не это. Когда КГБшники пришли на физфак, те решили всё это свалить на меня — мол, я дал рекомендацию. Но на себе они рвали волосы за то, что сами заставили Журжина вырвать страницу с посвящением, потому что теперь они не могли сказать, кому оно было адресовано, кто научил его хвастаться, потому что очевидно же, что эта сука и подговорила его бежать, это же ясно. Я посетовал Ф. А., что не помню фамилию человека, кому адресовано посвящение, а он сказал: «Ну и хорошо, что не помните». И так я до сих пор её не помню. Я понял, что это был студент 6-го курса, не исключено, что он тоже был участником семинара Березина, наверняка одно время он там бывал.

Д. Г. — Может быть, Тютин что-то добавит?

Б. В. — Тютин только пожимает плечами.

Д. Г. — Давайте так. Я попытаюсь сформулировать мой вопрос ещё раз, потому что вы все его как-то проигнорировали, рассказав эпизод про какого-то Журжина, эпизод сам по себе забавный, но мало относящийся к делу и характеризующий Ф. А., больше в моральном плане, как человека абсолютно порядочного и незаурядного мужества. Я не могу интерпретировать, что вы не поняли, о чём я спрашивал, потому что все вы люди неглупые, вы всё прекрасно поняли, но проигнорировали. Поэтому я попытаюсь задать его ещё раз, и если увижу, что вы продолжаете уваливать, то перейдём к другим темам. Хорошо?

Смех, голоса: «Давай, давай!»

Д. Г. — Не могло случиться такого, что за все годы общения с Ф. А. в разных ситуациях не проскальзывали его высказывания о действительности за окном. Как Ф. А. относился к режиму, к тому, что он был фактически в загоне в МГУ, как он относился к тому, что его фактически не выпускали за границу и т. д. и т. п.? Были ли такие обсуждения? Можете ли вы сказать об этом что-либо или вам просто не хочется об этом говорить?

Б. В. — Из присутствующих я был на самом почтительном расстоянии от Ф. А., поэтому могу сказать лишь очень коротко. С другими людьми, более ему близкими и по духу, и по частоте общения, такие разговоры, возможно, велись, но в моём присутствии я видел нежелание Ф. А. погружаться в публичные обсуждения. Мы обычно общались в компании из нескольких человек, когда, например, возвращались с семинара домой и шли к метро. У него было несколько запретных тем, в том числе и эта.

Единственным проявлением его отношения к окружающей действительности были иногда живые и резкие высказывания о мехмате. Например, он рекомендовал мою поездку в Карпач (Польша), и когда мы обсуждали с ним эту поездку, он, чуть-чуть приоткрывшись, излил на меня свою боль от того положения, в котором он находился на мехмате. Я бы так сказал: его положение на мехмате — это систематическая обструкция со стороны партячейки, которая была на мехмате очень сильна, тем более когда это касалось заграничных поездок. И я видел, что его просто систематически «гнобили». Его неоднократно приглашали за границу, я хорошо это знал, но, по-моему, он съездил всего один раз, вот в этот самый Карпач, и всё. Во всех других приглашениях партком ему отказывал, и проявление желчи Ф. А. по этому поводу я пару раз наблюдал.

Это было не недовольство, не сожаление, а, как бы это сказать, тяжелейшая безысходность, которая никак не разрешима. И он сильно по этому поводу горевал, наверное, даже негодовал, но это негодование внешне никак не проявлялось.

А. Ш. — Поначалу дистанция между нами была такой, что никакие разговоры на эти темы были невозможны. С течением лет ситуация изменилась, дистанция уменьшилась, привыкли. Но многого от него я не слышал. Видимо, он чувствовал, что никакой разности в наших взглядах по этому поводу не было, поэтому, собственно, и говорить-то было не о чем. И так всё ясно.

По поводу ситуации на факультете он говорил больше. Ну, во-первых, он рассказал мне, как он ходил к Хохлову, тогдашнему ректору МГУ, и ставил вопрос о ненормальном положении на факультете. Хохлов отнёсся к этому сочувственно и в заключение отпустил глубокомысленное замечание: «Плохо, что Вы, Ф. А., и другие профессора, которые думают так же, как Вы, не члены партии».

Смех.

А. Ш. — Но в чём-то у него были преувеличенно болезненные реакции. Например, он мне говорил вещи, которыми я тогда был потрясён, да и сейчас как-то не могу поверить. Речь шла о приёме на факультет.

Однажды он сказал:

— Знаете, какое-то количество евреев принимают, но совершенно не того качества.

— Это почему же?

— Чтобы потом можно было сказать: «Вот, приняли евреев, а посмотрите на них, это студенты весьма среднего уровня».

А потом ещё добавил:

— Да и русских выбирают не самых талантливых.

— А это ещё почему?

— Талантливый человек, он же независим, с ним же возни сколько! Да подальше от греха возьмём середнячков. Такая вот кастрация.

Д. Г. — Видишь, под конец ты очень интересные вещи рассказал.

А. Ш. — Это специфика жанра, беседа по мере продолжения должна становиться интересней. На самом деле, я собирался об этом рассказать, потом забыл. Ты мне напомнил.

Б. В. — Толя пробудил во мне одно воспоминание. Однажды Ф. А. сделал исключение в своей сдержанной манере общения со мной на общественные темы. Это было, когда выслали Сахарова. В декабре 1979 года войска вошли в Афганистан, и тут же выслали Сахарова. Ф. А. немедленно обратился ко мне (ведь Сахаров был сотрудником теоротдела): «Что же у вас там происходит?» И было видно, с каким живым интересом он ждёт мой рассказ о происходящем и стремится пополнить имеющиеся у него сведения. Он пересказывал мне содержание, видимо, «голосов», которые, очевидно, очень внимательно слушал. Он был возбуждён необычайно и опасался, не обрушится ли теперь вся махина на нас, не вернутся ли те времена, о которых страшно и вспомнить. Он считал, что всё висит

на волоске, может в ближайший момент рухнуть, и мы все, возможно, никогда больше и не встретимся на семинаре. Вот такое было у него настроение.

А. Ш. — Для разрядки расскажу хохму. Однажды Ф. А. позвонил в Госконцерт и попросил два билета в консерваторию, сказав: «Это говорит Березин». И ему немедленно дали два билета, а он мне говорил: «А что, я ведь правду сказал, я ведь действительно Березин». А в Госконцерте, конечно, подумали, что это участник известного сатирического дуэта Тимошенко и Березин.

Смех.

Д. Г. — Ну, что, есть ещё что-нибудь интересное?

А. Ш. — А ещё в 1974 году мы с ним вместе ездили в Ташкент. Там была какая-то школа в Чимгане, это в горах под Ташкентом. На школе в основном были математики. Кстати, там был и Конштейн.

С. К. — Да, потом на семинаре я рассказывал об этой школе. Помню, слушатели полулежат в чайхане на ватных одеялах, в одной руке у каждого пиала с чаем, а в другой — кристалл сахара. А Березин стоит у доски, в одной руке у него пиала с чаем, а в другой — мел.

А. Ш. — Меня он там не выпустил, сказал: «Ваша работа математиков не заинтересует». Не заинтересует, ну и не надо. Там было и так интересно — в аудитории, где делали доклады, вдруг гадюка появилась. А ещё, мы тогда с Ф. А. поехали на эту конференцию на перекладных, он тоже хотел посетить замечательное место в Средней Азии, Хорезм. Мы там провели день, ночевали в какой-то гостинице, и там нам не дали чистого белья. Ну, всё же это глухое место в Средней Азии. Однако Ф. А. заставил горничную нам перестелить, что меня несколько удивило.

А потом в Ташкенте его принимал, и меня за компанию, его ученик-математик Джавват Хаджиев, который работал в Ташкентском университете, и было это уже по высшему разряду. Мы пошли гулять в горы и, увлечшись каким-то разговором, забыли, что мы в горах, а стало уже темнеть. Батюшки, а куда же идти? И мы решили — там, где стояли, там и легли спать. Разожгли костёр, и Ф. А. сказал, что хорошо переносит холод, что холод ему совершенно безразличен, поэтому меня он положил около костра, а сам лёг уже за мной. И так мы проспали до утра. Вообще-то я был удивлён, он был даже без штормовки, только в рубашке, а ночи там холодные,

всё же климат континентальный, и было это в начале мая, да ещё в горах на некоторой высоте. Утром мы проснулись и поняли, что хорошо сделали, что не пошли вниз, потому что был такой крутой спуск, что и при свете дня мы еле-еле спустились.

Ещё один сюжет, который мне пришёл в голову. Это отношение Фрадкина к гибели Березина. Ефим Самойлович отреагировал довольно странным образом, в том смысле, что он был убеждён, что Ф.А. специально заманили в путешествие и убили.

Д. Г. — А ты читал воспоминания Елены Григорьевны? Там есть кусок, посвящённый этому моменту.

А. Ш. — Да, читал, но что-то не помню. И что она пишет?

Д. Г. — Она описывает кучу всяких несуразностей, когда она приехала в Магадан забирать тело, и это наводит на всякие мысли. Обратись ещё раз к её воспоминаниям.

А. Ш. — Хорошо. Фрадкин, наверное, не знал об этих подробностях?

Д. Г. — Нет, просто Фрадкин априори обладал таким негативным восприятием действительности. Честно говоря, мне тоже так казалось, когда я не имел никакой информации. Это, так сказать, настрой человека, это не связано с информацией.

Ещё Боря не рассказал о прогулках с Ф.А. после семинара. И Тютин ещё ничего не сказал.

Б. В. — По просьбе Димы расскажу о некоторых эпизодах вне семинара.

Начну с прогулок. Обычно после семинара, вечером, некоторые участники вместе с Ф.А. шли пешком от главного корпуса к метро; по-моему, Березин никогда не пользовался транспортом и ходил к себе домой из университета пешком. Шли неспешно и говорили о разном. Могли продолжать разговор, начатый на семинаре, могли обсуждать научные или околонаучные новости, университетские или институтские дела. Иногда заходила речь о выдающихся личностях или о замечательных открытиях. Помню, однажды возник спор: какой из прошедших веков был для математики и физики самым замечательным с точки зрения достижений и прорывов. Миша Маринов уверенно назвал XIX век. Я пробовал возразить, наверное, имея в виду физику. Неожиданно для меня, Ф.А. поддержал Мишу: «Конечно, девятнадцатый!»

Теперь о реакции Березина на критику в его собственный адрес. Было, по-моему, это в 1976 году на марковской конференции

по квантовой гравитации (точно дату не помню). Надо сказать, что Марков умел собирать конференции, там бывали лучшие люди, из самых-самых. Например, там бывал Уиллер. Мне кажется, что считалось за честь получить приглашение Маркова. Березин был приглашён. И приглашён был Питер Невенхойзен, один из создателей супергравитации. Это тоже достаточно резкий в суждениях человек. И если представляется случай сделать ядовитое замечание, то он его не упустит. Невенхойзен встретился с Березиным в МГУ и во время беседы в резкой форме указал Ф. А. на его ошибку в работе, касающейся суперматриц. Да и вообще «плохо» с ним беседовал. Ф. А. рассказал мне об этой встрече и очень переживал, что у него, действительно, есть ошибка. Мы с ним пытались эту ошибку исправить, но это не удалось, ошибка была очевидной. А Питер держался гордо, «ткнув» великому человеку. Для меня же было удивительным, что Ф. А. так переживает. Ну что, бывают ошибки, что делать, «ткнули» — обидно, ну и ладно. Нет, Ф. А. переживал чрезвычайно болезненно.

Может, это был не первый случай? Я помню высказывание одного партийного функционера с мехмата по поводу Ф. А.: «Мы только то и делаем, что исправляем ошибки Березина». Что тут сказать? Наверное, вспомнить «дедушку Крылова»: «Орлам случается и ниже кур спускаться...», можно вспомнить и продолжение.

И совсем смешной случай произошёл на той самой конференции. Там был человек по фамилии Теразава, японец. Сидим мы как-то с Ф. А. в перерыве между заседаниями, беседуем о чём-то своём. Вдруг подходит этот Теразава к Ф. А. и говорит:

— Послушайте, когда же Вы отдадите мне мои бумаги?

Березин поворачивается к нему:

— Какие бумаги?

— Ну как же. Я Вам вечером дал свои бумаги, Вы сказали, что за ночь их посмотрите и сейчас же вернёте.

— Я у Вас никаких бумаг не брал, что Вы?

— Как не брали?! Помните, мы с Вами вчера беседовали на такую-то тему, помните? — и заговорил о космологии. Ф. А. говорит:

— Знаете, на тему космологии я не мог бы с Вами беседовать.

— Нет, мы беседовали, более того, беседа продолжалась почти час.

Поскольку разговор идёт по-английски, я спрашиваю Ф. А.:

— Вы по-английски хорошо понимаете?

— Я понимаю, что он от меня чего-то хочет, но я вижу его в первый раз.

Тогда я обращаюсь к Теразаве и говорю:

— Скажите, пожалуйста, профессор, может быть, Вы объясните мне, в чём дело, потому что Феликс Александрович Березин искренне не понимает, что Вы у него просите.

— Ну как же, Сахаров, — говорит он, — ведь мы с Вами вчера беседовали...

— Так Вы обращаетесь к Сахарову? — спрашиваю я.

— Да, конечно, к Сахарову!

И тут у меня в голове возникает образ Сахарова — длинный, сутулый, с яйцевидной головой, практически лысый, и рядом плотный, коренастый, с пышной шевелюрой Ф. А. Но с точки зрения японца это одно и то же.

С. К. — Нет, нет, в действительности, что-то общее в них было.

Б. В. — Ну, не знаю, для меня — европейца — это совершенно разные типы.

Д. Г. — Но вот Конштейн находит же общее.

Б. В. — Ну, Конштейн известный специалист по парадоксам.

С. К. — Я, правда, воспринимал их как внешне подобных.

Б. В. — Ну, если ты так воспринимал, то от тебя я это охотно жду. Ты часто создаёшь парадоксальные ситуации, так и здесь.

Д. Г. — Я этого Теразаву хорошо знал, и он никогда никого не путал.

Б. В. — Ну, тут ничего не могу сказать.

Д. Г. — Ну что, есть ещё что-нибудь интересное? И что же Тюнтин?

И. Т. — Ну, если я точно не помню ни одного слова, ни одного эпизода.

Б. В. — Вот если бы надо было сказать крепкое, солёное слово или послать кого-нибудь далеко-далеко, вот тут бы он включился с энтузиазмом.

Д. Г. — Давайте перейдём к обсуждению эпилога.

А. Ш. — Семинар Березина нас воспитывал, а не только просвещал. Имело ли это значение для большой науки? Только в той мере, в какой некоторые работы действительно вышли из этого семинара.

Мы воспитывались двояко. С одной стороны, здесь, в ФИАНе, была формальная физическая школа. Изначально математической формальности не было, потом появилась, а по нынешним време-

нам — так и вовсе укрепились. С другой стороны, конечно, семинар был каналом, через который сам Березин становился известен среди физиков. Я имею в виду здесь, в Москве, но не за границей. Так что это была некоторая реализация личности, и не только его, но вместе с ним и других специалистов. Вообще, через семинар устанавливались контакты между разными сообществами. Пока это всё, что мне пришло в голову, теперь давай ты, Боря.

Б. В. — Во-первых, я полностью согласен с Толей. Только хотел бы изложить в личностном плане, применительно к себе. Я в действительности проходил две школы. Одну — школу теоротдела и общения с выдающимися физиками. И беседуя с ними, слушая их, общаясь, может быть и не напрямую, а наблюдая их контакты и присутствуя при беседах, я понемногу начал понимать, что такое физика. Конечно же, физика — это ни в коем случае не математика, как одно время я думал.

Д. Г. — Ты помнишь эту замечательную дискуссию...

А. Ш. — А, да-да. Знаменитая дискуссия — должны ли мы отличаться от математиков ещё чем-то, кроме того, что мы плохо знаем математику.

Б. В. — Мне вспомнился давний эпизод из жизни теоротдела, известный как «бунт аспирантов». Упрёк старшим товарищам сводился к тому, что теоротдел, обладая гигантским потенциалом, не учит своих аспирантов физике. Своей исторической фразой «пока мы отличаемся от математиков только тем, что плохо знаем математику» Шабад придал ему законченную художественную форму. Игорь Евгеньевич сперва возмутился, а потом обеспокоился: чего же конкретно хотят молодые люди? и чем им можно помочь? И началась общая дискуссия на вечную, по-видимому, тему: что такое физика и чем она отличается от математики, как учатся физике, и как учить физике, и т. д. Дискуссия продолжалась и позднее, и были сделаны определённые оргвыводы. Конечно, временные, — универсального ответа и универсальных рецептов, по-видимому, не существует. Поэтому и дискуссия периодически возобновляется.

Но вернусь к началу своего высказывания. Итак, с одной стороны, я проходил школу ФИАН. А с другой стороны, я проходил школу Березина. Дело в том, что часто качественных соображений, которые высказывали физики, мне не хватало. Пока они не были формализованы, я не до конца понимал, о чём идёт речь, чувствовал себя потерянно и не готов был продолжать беседу. Я часто требовал

большей строгости в постановке задачи и последующих рассуждениях, больше формул и силлогизмов. Это некоторыми физиками отнюдь не приветствовалось, они считали это моим недостатком: я-де слишком ригористичен и даже хуже — формалист (на физфаке таких людей в моё время обзывали «гомоморфистами»). Как однажды сказал про меня Дима, «способен загубить любую свежую идею». Я же, если формальную схему не пойму, часто вообще ничего не пойму. А у Ф. А. я получал именно то, в чём нуждался. Березин учил меня слушать и мыслить конструктивно, т. е. уметь переводить физические понятия и термины, физические данные на математический язык и потом работать уже в математических терминах в достаточно строгих рамках. При этом иногда выясняются неожиданные новые моменты и открываются новые возможности.

Литературу я читаю медленно, занудно, придираясь к каждой неточной фразе, и часто впадаю в ступор. А вот в живом рассказе на семинаре в теоротделе, или у Березина, или же в непосредственной беседе с физиками или математиками я в конце концов выяснял суть дела и, с одной стороны, продвигался в своём понимании физики, а с другой — узнавал новую математику и новые возможности. Для меня это просто неоценимо, но это моя индивидуальная особенность. Пусть повторюсь. Но меня вырастили две школы, два учителя. Одна школа — это В. Я. Файнберг и семинар теоротдела ФИАН, это люди из теоротдела, такие как И. Е. Тамм, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Д. А. Киржниц, Л. В. Келдыш, А. В. Гуревич, люди, остающиеся для меня недостижимыми образцами энциклопедического физического мышления. Стыдно признаться, но А. Д. Сахарова я практически никогда не понимал; могу здесь оправдаться только фразой Зельдовича, что Андрей Дмитриевич — это машина на неизвестном принципе действия.

А. Ш. — Юрий Абрамович Гольфанд, видимо, именно тогда, когда была эта дискуссия, которую Борис назвал бунтом аспирантов, сказал: «Ну, что такое физическое представление? Это когда ещё не всё понятно».

Б. В. — Хочу добавить, что после этого Гинзбург взорвался: «А вы вообще не физик!» — и тон его был такой, что Юрий Абрамович покраснел.

А. Ш. — Тогда Игорь Евгеньевич возмутился нашему вопиющему заблуждению, ему было совершенно ясно, что физика и математика — это совсем не то же самое. Между тем, постановка нами

в вызывающей форме жизненного вопроса о соотношении физического и математического знания произошла под влиянием, конечно же, посещения семинара Ф. А., его прямым следствием.

В теоротделе я, как ученик Фрадкина, овладевал формализмом, это какая-то «недоматематика». Когда мы говорим «формалист», это значит, что человек получает физический результат не вследствие некоторых естественных физических соображений, а с помощью формул или каких-то математических построений, в рамках процедуры, предусмотренной имеющимся аппаратом. Есть такие физики, которые говорят: «Я формул не воспринимаю, вы мне уравнения не пишите, но я вот знаю, что физически это должно быть так-то и так-то».

В теоротделе не приветствовался такой подход. Фрадкин был формалистом, он признавал лишь то, что получено с помощью формул. Он говорил: «Вы не путайте то, что должно быть, что ожидается, с тем, что вы получили. Отличайте от того, что вы примысливаете, отдавайте себе отчет в том, что есть свойство модели или приближения, а что вечный результат. Физика годится для наводящих соображений и для интерпретации того, что выведено с помощью формул».

А когда речь шла о такой математике, которую мы видели у Ф. А., это был не формализм, это было потруднее — не с помощью формул достигается результат, а главным образом с помощью конструкций, нацеленных на доказательства. Это совершенно другое.

Должен сказать про себя, что корм этот был не в коня. Формализм — это я хорошо усвоил, я всегда любил такую ситуацию, когда можно написать уравнение, поработать с формулами, повычислять интегралы и чего-то получить. А доказывать — мне это так и не привилось. Ни в одной из моих работ не встречается слово «доказательство», а только «вывод», «вычисление», «рассмотрение», «получение».

Случилась ещё одна характерная дискуссия, уже позже, на вторичном семинаре в ФИАНе. Сцепились между собой Мейман и Шварц. Мейман был уже ветеран, заслуженный учёный, как математик занимался атомным проектом, долго сотрудничал с физиками и считал, что он знает, что это за животные и как с ними надо обходиться. А Шварц был тогда моложе, и он поставил какие-то вопросы, а Мейман сказал: «Эти вопросы, которые вы тут обсуждаете, они физиков, на самом деле, не интересуют». И оказался неправ.

Теперь мы знаем, что вопросы, которые ставил Шварц, оказались весьма и весьма актуальными для физиков. В общем виде никогда эта дилемма не будет решена.

Б. В. — На ту же тему. Должен сказать, когда я появился у Ф. А., то уровень, на котором проводился семинар, и требования, которые предъявлялись слушателям, честно говоря, на свежего человека вроде меня, пришедшего с физфака, полуграмотного в математике, а в физике совсем неграмотного — я это признавал, — производили первое время подавляющее впечатление. Надо было преодолеть комплекс неполноценности. Это у меня продолжалось довольно долго. Надо было освоить огромный материал, научиться говорить на новом языке и, самое главное, надо было выработать в себе способность принять такое требование — повышенное требование к доказательной силе построения, если можно так выразиться. Например, я знал теоретическую механику, скобки Пуассона и т. п. по физфаку, и на меня, и не только, она производила впечатление жуткого занудства.

Однажды эта тема была затронута на семинаре. И я увидел, Боже мой, это такая математика, такой аппарат — причём я видел, это адекватный аппарат, — и такая красотища! Например, Ф. А. сказал: «Что такое механика? Теория косых форм на симплектических многообразиях». А я и слов-то таких не слыхал! И когда это постепенно стало укладываться у меня в голове, я думал: «Боже мой, какая это красота, какие красивые результаты получаются на этом языке!» То есть раньше я говорил, грубо говоря, лапотным языком, а здесь — настоящий язык, адекватный, изящный. И то изящество конструкций и получаемых на этой основе результатов, которое демонстрировал Ф. А. — как-то невольно у него это получалось, — когда он что-то рассказывал или кто-то ещё рассказывал, хороший математик рассказывал, производило впечатление необыкновенной красоты, на меня, во всяком случае. И я завидовал — вот, чёрт возьми, я этого не знаю и вообще уже никогда не узнаю в полной мере. Но я счастлив, что я это слышал.

Вообще, много чего я у Ф. А. слышал. Не могу сказать, что я много усвоил, но много чего я слышал и понимаю, на каком языке в некоторых случаях надо говорить. Это не исключает другого языка, физического, языка более интуитивного, естественного, модельного. Как это часто бывает, физик придумывает красивую модель, и вдруг оказывается, что в ней содержатся ключевые, далеко идущие идеи,

и простыми выкладками и соображениями он демонстрирует, как можно получить результат, который он потом обобщает. Но, конечно, теми средствами, которые он использовал, общий результат ни за что не получишь, надо подключать на помощь уже настоящую математику. В общем, так: я видел, как работает математика в физике, и видел я это на семинаре Березина. Это не то, что полезно, что облегчает — нет, это углубляет понимание, увеличивает возможности, иногда неизмеримо.

А. Ш. — Мы же подвергались влиянию и других школ. У нас в теоретическом деле был такой великий человек, ныне покойный, Давид Абрамович Киржниц. У него было любимое выражение: «кипячёная вода». Для непосвящённых объясню, что это значило: все знают, что воду надо кипятить перед тем, как пить, сырую воду пить нельзя, но мы все всегда пьём сырую воду, и ничего с нами от этого обычно не происходит. Так же и всякие математические тонкости, которые накладывают запреты и делают некоторые физические результаты недостаточно надёжными, — это и есть «кипячёная вода»: с одной стороны надо бы, а с другой стороны — обойдёмся.

Это так называемый физический уровень строгости, для многого достаточный, но и не избыточный. В физике по большей части нельзя работать на математическом уровне строгости. Есть целая группа людей, которые так и делают, а есть и другие. Это, можно сказать, разделение труда. Фрадкин говорил: «Математика умнее человека». Это его любимое выражение, что значило: вы не должны руководствоваться физической интуицией, она вас куда-нибудь заведёт, и вы споткнётесь. Нужно руководствоваться формальными построениями, которые сами вас приведут к результату, а вот обоснованность этих формальных построений, это уже не наш вопрос, это выходит за пределы физического уровня строгости.

Б. В. — Согласен с тем, что сказал Шабад. Сам Ефим Самойлович Фрадкин ни в коем случае математиком не был, он придумывал конструкции, которые работали. Он говорил: «Я должен придумать формальные конструкции, которые эффективно и быстро приводят к ответу, и научить им других». А обосновать этот формализм он, честно говоря, и не брался. Для него было важно, что это работает, это — рабочий формализм, это — работающие формулы. Иногда это было нагромождение формул, но это его не смущало.

А. Ш. — Так что вот здесь мы имели такое соединение. Конечно, нет никакого ответа на вопрос, что есть физика и что есть математи-

ка. И сегодня мы знаем, что имеются разногласия в математизации физики. Причём одни люди имеют физическое образование, другие — математическое, неважно, какое именно, потом опыт работы расставляет их по местам соответственно их интересам и способностям. Вот такое разделение труда. Но, конечно, если мы посмотрим в ретроспективе последних 30—40 лет, то увидим, что уровень математизации физики существенно возрос. И в то же время, мы видели примеры, когда математика заводила не туда, в тупик. Например, эти алгебры со звёздочкой, аксиоматическая теория поля.

Б. В. — На неё (аксиоматику) ставили как на универсальное средство, а она отказала. И в конце концов первичная формальная аксиоматика была сметена валом калибровочных теорий, которые абсолютно не укладывались в её рамки. Там всё было нарушено. Всё сыпалось.

А. Ш. — В этой связи могу сказать, что семинар Березина, когда он начинался для нас, совпал, в общем-то, с периодом кризиса, как мы это понимаем теперь. Пропала вера в существование динамических теорий, и люди бросились на аксиоматику, которая была доведена до своей крайности — теории алгебр со звёздочкой. Эти теории алгебр со звёздочкой никак не отразились в семинаре Березина, по-видимому, он чувствовал, что это путь в никуда. В общем, когда вернулась динамика, почти забытая, математика стала делом аккуратности в изложении, проверки общих свойств. Дальнейшее развитие пошло всё же по динамическому пути. Но, должен сказать, что содержание семинара оставалось как-то вне этого кризиса.

Б. В. — Лично я на семинаре никогда не ощущал, не видел каких-то проявлений кризисности. Наоборот, у Ф. А. была масса идей, которыми он щедро делился, и, по-видимому, очень острое восприятие всяких новых вещей. У него обязательно слушались новые, самые современные работы, с которыми, по-видимому, он сам лично связывал возможности какого-то прорыва, именно физического, а не математического. Потому часто к нам на семинар приглашались математики, не занимавшиеся непосредственно физическими проблемами, но занимавшиеся такой математикой, которая к физике имела отношение, иногда непосредственное.

Ранее я уже упоминал несколько видных фамилий. Уж про Шварца я не говорю. Он был тесно связан с физиками, работал с ними, и ребята Шварца много рассказывали у нас. Многие докладывавшиеся математические работы имели характер решения задач,

возникших в физике, или обобщения результатов, полученных физиками, за счёт того, что проблема ставилась адекватно и решалась адекватными средствами. Приходилось привлекать новые понятия, новую математику, неизвестную физикам. Таких задач всегда была тьма. Общих разглагольствований о кризисе я от Ф. А. никогда не слышал, и, по-моему, он никогда ни с кем о нём не говорил.

А. Ш. — Это слово даже не звучало.

Б. В. — Меня привело на мехмат ясное осознание кризисности той ситуации, в которую я попал на физфаке, потому что та физика, которая там читалась, не отвечала тому, что я слышал со стороны. А с другой стороны, уровень даже того, что излагалось, меня тоже не устраивал.

А. Ш. — Где-то у Ф. А. написано в одной из книг, что...

Б. В. — Я скажу. У Ф. А. совместно с Шубиным есть прекрасная книга, «Уравнение Шрёдингера», там в предисловии написано, что, читая физические тексты по квантовой механике, читатель-математик не может избавиться от впечатления систематического надувательства, и что этого впечатления авторы пытались избежать.

А. Ш. — Там сказано даже конкретнее...

Б. В. — Именно, там сказано, что при систематическом изложении квантовой механики физические учебники стараются избежать использования многих нетривиальных сведений из общего функционального анализа, заменяя их ссылками на аналоги из конечномерной линейной алгебры, что и производит на читателя-математика вышеупомянутое впечатление.

Например, добавлю от себя, операторы всегда можно применять к любому вектору, они коммутируют в обычном смысле, операторы всегда представляются матрицами, сумма двух самосопряжённых операторов всегда есть самосопряжённый оператор, спектр оператора — это его собственные значения. Каждое из этих утверждений, строго говоря, неверно, но изложение ведётся так, что это как будто бы верно. А это не только неверно, но часто приводит к парадоксам и ошибкам. Но физики умные, они в конце концов проверяют и получают правильный ответ.

А. Ш. — Я помню, на семинаре Березина тоже возник один раз какой-то мимолётный разговор о том, кто же такие физики. Не помню, кто задал вопрос, может быть, Минлос, а Ф. А. сказал: «Да, они вроде бы ничего не понимают, и всё ими неправильно воспринимается, но они умеют считать». Это звучало как признание чуда.

Б. В. — Не знаю точно, кому принадлежит эта байка, может быть, Ф. А.: «Настоящий физик говорит ответ. Неважно, как он к нему пришёл, но ответ в конце концов оказывается правильным. И задача математика — понять физика и довести его ответ „до ума“». Не помню, когда произошёл этот разговор. Может быть, он случился тогда, когда к нам пришёл Кобзарев рассказывать про современную теорию элементарных частиц. Неожиданно возник спор, фактически о взаимоотношении математики и физики в этой науке. Кобзарев рассказывал, а мы наскакивали на него, говоря, что язык теории элементарных частиц — это квантовая теория поля, а то, что он говорит, в рамки квантовой теории поля не укладывается. А Кобзарев спокойно отвечал: «Не укладывается, ну и бог с ней. Что такое эта квантовая теория поля?!» — «Как, квантовая теория поля, — это священная корова!» — «Нет, никакая она не священная». И улыбался нам так снисходительно, ныне покойный, к сожалению, Кобзарев. По-видимому, у него были свои комплексы, но этого комплекса перед математикой у него абсолютно не было. Хотя он понимал, я полагаю, математиков и имел с ними очень тесный контакт.

Я знаю, есть книжка Кобзарева и Манина о взаимоотношении физики и математики, резкая довольно книга, но то ли он, то ли кто-то другой сказал, что хороший физик отличается тем, что он, поняв задачу, в конце концов говорит ответ, и ответ этот, как правило, правильный. А математик часто даже не догадывается, какой же здесь может быть ответ.

С. К. — Вы помните книжку Березина по статфизике «Статистическая механика»? Это такой препринт большого формата.

Б. В. — Кажется, ротапринтное издание МГУ?

С. К. — Так вот, у меня были нелады с книжкой Ландау и Лифшица, которую я сильно не любил по ряду причин. И эту науку я потом прочитал в книжке Березина ³⁾ ⁴⁾.

Б. В. — Повторяю, я тоже некоторые вещи, которые не понимал у Ландау и Лифшица, потом понял по Березину. Но Ландау фи-

³⁾ В 2008 году, после 44-летнего перерыва, эти лекции вышли в отредактированном виде в издательстве МЦНМО. Насколько мне известно, до сих пор больше нигде в книжках по статфизике бозе-и ферми-системы не описывались столь единообразно на языке суперсимметрии. — *Прим. ред. Д. Л.*

⁴⁾ А также в лекциях Минлоса, книжке Керзона Хуанга (на которую Минлос сослался дважды — на К. Хуанга и на Х. Керзона, и эта шутка мне нравится до сих пор) и задачнике Кубо.

зик, и мы констатируем ещё раз общеизвестный факт, что физики и математики — разные люди. Может быть, не столько по предмету интереса, в конце концов, он, видимо, у тех и других один — Природа, но по способам её постижения. Этот вопрос обсуждался у нас недавно на вторнике, доклад делал Келдыш. Он излагал и комментировал высказывания двух известных физиков, фамилию одного не помню, а второй — Лафлин⁵⁾, о положении в современной теоретической физике и высказывания Фаддеева на ту же тему. И было видно, что оценки лежат, если можно так выразиться, в ортогональных плоскостях. От себя Келдыш добавил, что в эйнштейновском сборнике он нашёл высказывание Германа Вейля на эту тему. Вейль высказался в том плане, что физики и математики идут к истине разными путями. Физики — это особые люди, и математики — тоже особые люди, и говорят они по-разному, у каждого из них — свой язык. Но желательно, конечно, чтобы в конце концов они договорились о единстве некоторых истин по данному предмету.

А. Ш. — Как микроитог этой дискуссии, можно процитировать Маяковского⁶⁾:

Лошадь
сказала,
взглянув на верблюда:
«Какая
гигантская
лошадь-ублюдок».
Верблюд же
вскричал:
«Да лошадь разве ты?!

⁵⁾Robert Betts Laughlin, нобелевский лауреат (за открытие дробного эффекта Холла).

⁶⁾А можно процитировать и Джеймса Лафлина в переводе М. Немцова:

Ну и ладно
раз так
значит
так и я просто
верну вас на место
в коробку с этикеткой
«чудесные люди».

Ты
просто-напросто —
верблюд недоразвитый».
И знал лишь
бог седобородый,
что это —
животные
разной породы.

Д.Г. — Ну, хорошо, на этой поэтической ноте заканчиваем дискуссию? Вам пора ужинать, а мне обедать.

Ч А С Т Ь V

ПРИЛОЖЕНИЯ

МАТЕРИАЛЫ ИЗ АРХИВА Ф.А. БЕРЕЗИНА

Письмо ректору Московского государственного университета академику Р. В. Хохлову

Глубокоуважаемый Рем Викторович!

Я считаю своим долгом поделиться с Вами некоторыми соображениями относительно математического отделения механико-математического факультета. Его нынешнее состояние, по моему мнению, неудовлетворительно, а будущее тревожно.

На механико-математическом факультете существует группа профессоров, являющихся крупными математиками, деятельность которых определяет научное лицо факультета, во всяком случае его математической части. Кажется естественным, чтобы эти люди принимали активное участие в решении жизненно важных для факультета вопросов: приёме новых студентов и аспирантов, конкурсных делах, определении научной политики. Нынешняя администрация факультета, однако, практически полностью устранила наиболее авторитетных математиков от решения всех этих вопросов. Решения принимаются узким кругом лиц, которые часто оказываются неквалифицированными, никакого способа влиять на них сотрудники факультета, не входящие в эту узкую группу, не имеют. В результате факультету наносится большой вред. По моему мнению, если нынешнее положение вещей не изменится решительным образом, то существует опасность деградации факультета как всесоюзного центра по подготовке высококвалифицированных математиков и как научного центра.

Я хочу привести несколько фактов из различных областей жизни факультета, подтверждающих это мнение.

1. Приём новых студентов

Это основной вопрос жизни факультета. В настоящий момент происходит перемещение центра тяжести общественных интересов

в сторону от точных наук к гуманитарным, что сказывается, в частности, в уменьшении конкурса на наш факультет. С другой стороны, широко развитая система репетиторов маскирует разницу между людьми, натасканными на решение типовых задач, и людьми, имеющими подлинные математические способности. В таких условиях ответственное отношение к приёму приобретает особое значение. С момента прихода к власти нынешней администрации факультета приёмом новых студентов руководит заместитель декана М. К. Потапов. В течение этого времени в приёмную комиссию на наш факультет ни разу не входили крупные математики, прекрасно знакомые к тому же со школьной программой. К их числу относятся, например, профессора В. Н. Алексеев, В. И. Арнольд, А. А. Кириллов, В. П. Паламонов, доценты А. М. Стёпин, М. А. Шубин. Этот список далеко не полон. Приёмная комиссия работает неквалифицированно, в результате чего резко снизился средний уровень студентов, а также заметно уменьшилось среди них число талантливых математиков.

Снижение среднего уровня отмечается многими преподавателями, работающими на факультете достаточно долго для того, чтобы иметь возможность сравнивать. Это снижение не отражается в цифрах успеваемости, так как при приёме экзаменов всегда происходит адаптация к среднему уровню студентов. Однако сама эта адаптация иногда принимает чёткие и характерные формы.

Так, например, на кафедре дифференциальных уравнений в целях повышения успеваемости были радикально упрощены экзамены: если раньше на экзаменах студенту предлагались теоретический вопрос и задача, то теперь задача отменена. Уменьшение числа талантливых математиков среди студентов факультета сказывается на качестве аспирантов. Оно не поддаётся формальному контролю, однако ощущается многими сотрудниками факультета. По-видимому, уменьшение талантливых математиков среди студентов не является секретом и для администрации. Об этом говорит характерный эпизод, произошедший в истекшем году на студенческой математической олимпиаде, проводимой нашим факультетом. По условиям олимпиады все вузы делятся на три группы, причём механико-математический факультет входит в первую группу, а МИИТ (Московский институт инженеров транспорта) наряду с некоторыми другими техническими вузами — во вторую. В прошлом году команда МИИТа в своей группе заняла первое место, далеко опередив всех соперни-

ков. На этом основании МИИТ просил о переводе своей команды в этом году в первую группу, в чём ему, однако, было отказано. Тем не менее студенты — члены команды МИИТа попросили у дежурных по аудитории тексты задач первой группы и приступили к их решению. Когда это обстоятельство выяснилось, команда МИИТа была дисквалифицирована.

Единственное рациональное объяснение, которое, как мне кажется, имеет этот эпизод, состоит в следующем. Администрации прекрасно известно, что в МИИТ поступило некоторое количество очень способных математиков, не принятых на механико-математический факультет. Их участие в команде, конкурирующей с нашей, могло бы лишить нашу команду победы, или, во всяком случае, сделать эту победу менее убедительной.

О характере работы приёмной комиссии можно до некоторой степени судить по следующему факту. Мне известны фамилии одиннадцати человек, победителей московской и всесоюзной школьных математических олимпиад, не принятых в 1975 году на наш факультет. Этот список заведомо неполон.

В течение многих лет на нашем факультете существовали традиции активного привлечения студентов. Эта работа проводилась на разных уровнях: через школьные математические кружки, организацию олимпиад в Москве и на периферии и, наконец, путём перевода на второй и третий курсы студентов периферийных университетов, прошедших первоначальное обучение на родине. Сотрудники нашего факультета специально командировались в эти университеты для отбора кандидатов на перевод. В настоящее время существует поколение значительных математиков, судьба которых складывалась таким образом. Из них я хочу упомянуть Д. Хаджиева, моего ученика, недавно защитившего докторскую диссертацию, декана математического факультета Ташкентского университета.

Сейчас вся эта работа находится в заброшенном состоянии. Впрочем, надо отметить, что в самое последнее время в связи с указанием ректората была реорганизована вечерняя математическая школа. Однако в новом виде она существует пока ещё слишком недолго, чтобы можно было судить о её роли в приёме новых студентов.

Полностью прекращены командировки сотрудников факультета в периферийные университеты для отбора среди студентов младших курсов кандидатов на перевод на наш факультет. Это обстоятельство

резко снижает роль нашего факультета как всесоюзного центра по подготовке высококвалифицированных математиков.

В истекшем году уже никто не командировался для проведения областных олимпиад.

2. Приём в аспирантуру

Во время деятельности нынешней администрации произошёл ряд случаев, когда по разного рода странным причинам до вступительных экзаменов в аспирантуру не допускались лица, рекомендованные их научными руководителями.

Некоторые из этих лиц — Хованский, Блехер, Зархин, Койтман — вскоре защитили диссертации вне аспирантуры и в настоящее время являются значительными математиками.

Подобные происшествия особенно участились в самое последнее время на кафедре алгебры. Не были допущены до аспирантских экзаменов Скорняков, Кифер (рекомендованы Ю. И. Маниным), Лейтес (рекомендован А. Л. Онищиком).

Относительно Лейтеса мне известно, что к моменту окончания МГУ он имел несколько работ, из которых одна была опубликована, остальные сданы в печать. Кроме того, он был весьма активным комсомольцем. Причиной отказа послужило наличие тройки, полученной им на втором курсе. При таких условиях эта причина кажется чисто формальной.

3. Отношение администрации к сотрудникам. Приём новых сотрудников

Я считаю, что администрация факультета подходит без должной ответственности к приёму новых сотрудников. По причинам, не имеющим делового характера, не был принят на работу на факультет блестящий математик Габриэлов, несколько лет назад окончивший аспирантуру по кафедре теории функций и функционального анализа (руководитель — профессор В. П. Паламонов). В то же время на факультет принят ряд лиц, не обладающих необходимой квалификацией. В последнее время появилась тенденция зачислять на постоянную работу лиц чисто административным образом, без какого бы то ни было обсуждения их кандидатуры сотрудниками кафедр, на которые эти лица поступают. (Например, в 1976 г. на кафедру теории функций и функционального анализа был зачислен по окончании аспирантуры А. А. Шкаликов, причём сотрудники кафедры никак не

были с ним ознакомлены.) Такая практика таит в себе очень большую опасность засорения факультета неподходящими кадрами.

Вызывает недоумение политика администрации в отношении совместителей. Кажется очевидным, что для этой цели должны приглашаться лишь крупнейшие математики Советского Союза либо специалисты в тех областях математики, которые на факультете представлены недостаточно. Однако фактически дело обстоит так не всегда. Например, на кафедре теории функций в качестве совместителей на факультете работают: И. М. Гельфанд, А. Г. Витушкин, А. А. Гончар, С. Б. Стечкин, А. К. Гуцин. Я считаю, что приглашение Стечкина и Гуцина ничем не оправдано. С. Б. Стечкин является известным математиком и хорошим лектором. Однако он является специалистом по теории функций, очень сильно представленной на нашем факультете основными сотрудниками кафедры и по своему научному уровню он над ними существенным образом не возвышается. Что же касается А. К. Гуцина, то он является весьма второстепенным специалистом по дифференциальным уравнениям. Другими словами, не только его научный уровень недостаточен, с моей точки зрения, для приглашения на наш факультет в качестве совместителя, но даже его математическая специальность не имеет никакого отношения к той кафедре, на которую он приглашён.

Администрация факультета пренебрежительно относится ко многим сотрудникам.

Одним из примеров такого отношения является невключение ряда крупных математиков, работающих на факультете, например профессоров А. А. Кириллова и В. П. Паламодова, в состав учёных советов факультета. Другим примером служит укоренившаяся в последнее время практика, когда конкурсная комиссия не выносит никакого решения по поводу того или иного сотрудника, откладывая своё решение на год или более. Среди сотрудников, оказавшихся в таком положении, находится, например, талантливый математик доцент А. М. Виноградов. Его переизбрание откладывается уже в течение двух лет.

Однако особенно возмутительной является история с профессором Г. Е. Шиловым, который не был переизбран на очередной срок и вскоре после этого умер. Г. Е. Шилов был не только крупным математиком, безраздельно связавшим свою судьбу с механико-математическим факультетом, но и блестящим педагогом, автором очень популярных учебников, одним из создателей курса функционального

анализа на нашем факультете (так называемый «Анализ-III»). Заслуги Г. Е. Шилова перед нашим факультетом очень велики и его отсутствие будет сказываться ещё длительное время.

Не желая дольше терпеть пренебрежительное отношение к себе со стороны администрации, с факультета уже уволился ряд сотрудников, среди них — крупный математик, ведший очень активную педагогическую работу на факультете, доктор физико-математических наук А. Л. Онищик.

В случае если обстановка на факультете не будет оздоровлена, его примеру могут последовать другие сотрудники, составляющие в настоящее время научное ядро факультета.

4. Научная политика

В условиях математического отделения нашего факультета администрация не имеет возможности предписывать сотрудникам темы их научной деятельности. Поэтому научная политика может состоять лишь в том, чтобы приглашать учёных со стороны для усиления того или иного направления, и в установлении контактов с различными научными центрами.

По моему мнению, научная политика нынешней администрации факультета неудовлетворительна. Прежде всего сошлюсь на уже приведённый пример. Несмотря на то что теория функций очень сильно представлена на нашем факультете, на работу в качестве совместителя привлечён специалист в этой области С. Б. Стечкин. С другой стороны, хотя математическая физика находится отнюдь не в таком хорошем положении, с факультета уволены физики-теоретики, привлечённые И. Г. Петровским для её усиления.

Более того, одному из виднейших советских специалистов в области математических вопросов квантовой теории поля профессору А. С. Шварцу было запрещено читать спецкурс по квантовой теории поля. Этот спецкурс читался на общественных началах и был прерван в середине года.

Аналогичным образом администрация прервала работу на нашем факультете видных математиков, специалистов по математической экономике, сотрудников ЦЭМИ Б. С. Митягина и А. Б. Катка, хотя математическая экономика не относится к числу дисциплин, представленных на факультете сколько-нибудь удовлетворительным образом. Тем самым были ликвидированы в зародыше намечавшиеся научные контакты между нашим факультетом и ЦЭМИ.

Вообще в традициях нашего факультета всегда было очень свободное представление активно работающим математикам, не являющимся сотрудниками факультета, возможности вести семинары или спецкурсы на общественных началах или же за почасовую оплату. Это всегда сильно повышало тонус работы со студентами и служило гибким средством для усиления тех научных направлений, которые в этом нуждались. Нынешняя администрация впервые стала регламентировать такую деятельность, причём способом никак не скоординированным ни с научной ценностью, ни с популярностью у студентов тех или иных спецкурсов или спецсеминаров.

Наконец, я хочу отметить, что в последние годы крупные научные международные центры: Принстонский институт перспективных исследований (США), Оксфордский университет (Англия), ЦЕРН (Швейцария) проявили большую заинтересованность в установлении контактов с нашим факультетом, пригласив некоторых сотрудников¹⁾. Однако, администрация факультета под различными надуманными предлогами сорвала эти контакты. Я считаю, что этим был нанесён ущерб развитию математики в нашей стране.

Я хочу воспользоваться случаем и высказать также своё мнение о мерах, необходимых для улучшения работы факультета.

1. Во главе факультета должна стоять администрация, состоящая из крупных учёных, пользующихся большим профессиональным авторитетом. В первую очередь это относится к декану факультета. В настоящее время, как мне кажется, не существует лица, которое могло бы с одинаковой компетентностью руководить как механическим, так и математическим отделением факультета. Может быть, следует в связи с этим предусмотреть должность заместителя декана по механическому отделению в том случае, если деканом является математик, и заместителя декана по математическому отделению в том случае, если деканом является механик.

2. Я считаю, что одной из причин неудовлетворительного положения на факультете является непроницаемый покров таинственности, которым нынешняя администрация окружает все свои действия. Этот вопрос мне кажется очень важным. Деятельность администра-

¹⁾Ф. А. Березин не указывает, что эти три приглашения были получены лично им, но скорее всего, не только им. — *Прим. Е. Г. Карпель.*

ции должна быть гласной. Для достижения этой цели представляется полезным следующее.

а) Ежегодные отчёты администрации должны перестать быть формальностью. Для этого сотрудникам факультета следует заблаговременно, не позже чем за две недели, рассылать повестки, в которых должен быть приведён текст отчётного доклада или хотя бы его краткое изложение.

б) О каждом заседании деканата должен вывешиваться бюллетень с перечнем рассмотренных вопросов, решениями, списком присутствовавших лиц.

Этот бюллетень должен храниться, сотрудники факультета должны иметь возможность при желании ознакомиться с любым из этих бюллетеней, администрация в своей деятельности не должна руководствоваться никакими решениями, не зафиксированными в них.

в) В случае приёма на работу нового сотрудника необходимо предварительно проводить заседание кафедры, на которую этот сотрудник принимается. На заседании должен быть заслушан доклад заведующего кафедрой или представителя администрации о научных достижениях рекомендуемого лица. На это заседание следует приглашать сотрудников других кафедр, имеющих с ним общие научные интересы.

г) Учёные советы должны обсуждать кандидатуры всех лиц, рекомендуемых в аспирантуру сотрудниками факультета. В случае если чья-либо кандидатура вызывает возражения, возражения эти должны быть высказаны открыто.

3. Следует улучшить состав учёных советов. Как я уже писал, в них в настоящее время не входит ряд очень авторитетных учёных, являющихся основными сотрудниками факультета.

В то же время членами учёных советов являются странные лица, систематически опускающие недействительные бюллетени при голосовании по поводу диссертаций или же голосующие «за» или «против» независимо от качества диссертации. В результате дважды в течении весны этого года возникали позорные ситуации, когда при наличии лишь положительных устных и письменных отзывов учёные советы провалили диссертации. (Одним из членов учёного совета была даже сделана попытка морально оправдать такое поведение совета ссылкой на тайну голосования.) В обоих случаях во избежание более крупного скандала учёные советы признавали «недей-

ствительными» протоколы счётной комиссии, с тем чтобы получить возможность голосовать вторично.

4. Мне кажется, что следует восстановить давнюю традицию, согласно которой каждый активно работающий математик, не являющийся сотрудником факультета, мог при желании вести спецсеминар для студентов или читать спецкурс на общественных началах или за почасовую оплату. Никаких формальностей, кроме разрешения заинтересованной кафедры, для этого требовать не нужно.

5. Я считаю, что для полнокровной жизни математического отделения нашего факультета на нём должны развиваться не только традиционные направления, имеющие внутриматематическое значение, но и математические основы других наук.

Наиболее существенными здесь мне представляются:

а) математическая физика в широком смысле слова, включающая в себя математические основы квантовой механики, статистическую физику и квантовую теорию поля;

б) математическая биология;

в) математическая экономика.

Наиболее благополучно в настоящее время обстоит дело с математической физикой. Что же касается математической биологии и математической экономики, то они представлены на факультете крайне слабо. Однако в Москве существуют серьёзные математический коллективы, занимающиеся математической биологией и математической экономикой. Я думаю, что следует поощрять их сотрудничество с нашим факультетом.

В перспективе мне кажется целесообразным создание кафедр математической физики, математической биологии и математического экономического анализа.

Приведённые в этом письме оценки деятельности администрации, а также оценки некоторых математиков, являются моими личными и поэтому, возможно, субъективными. Однако я знаю, что они разделяются рядом сотрудников факультета.

Что касается приводящихся здесь фактов, то они также могут быть подтверждены рядом сотрудников факультета.

Ф. А. Березин

Механико-математический факультет,
кафедра теории функций и функционального анализа.

Правлению Московского математического общества

В последние годы участились конфликты при защите докторских диссертаций. Их причиной частично является разноречивостью в требованиях к уровню диссертаций, а частично, к сожалению, соображения, лежащие вне математики.

Я думаю, что Московское математическое общество не должно оставаться в стороне от этих конфликтов, во всяком случае, когда речь идёт о диссертациях членов Общества.

По моему мнению, всякий раз, когда член Общества готовится к подаче докторской диссертации, у правления Общества должно быть чёткое мнение о качестве работы. В случае если правление считает предлагаемую диссертацию удовлетворяющей необходимым требованиям, оно должно поддержать диссертанта, в противном случае рекомендовать ему воздержаться от подачи диссертации. Поддержка диссертации может, по усмотрению правления Общества, принимать разнообразные формы, но обязательно должна включать в себя создание определённого общественного мнения. (Кроме этого возможны, например, выступление на защите, или, при необходимости, официальный запрос в ВАК.)

В случае возникновения до защиты диссертации конфликта, мне кажется разумным просить лиц, авторитетных в той области математики, которой принадлежит диссертация, и выбранных по согласованию с диссертантом и его противниками, разобраться в существе спора. После этого должна состояться встреча всех заинтересованных лиц для детального обсуждения. В некоторых случаях отчёт о такой встрече, может быть, будет целесообразно публиковать в УМН в разделе «Математическая жизнь в СССР».

Целью такого обсуждения является создание чёткого и обоснованного общественного мнения о качестве предлагаемой диссертации и существе возражений против неё.

Я думаю, что предлагаемая мной инициатива Московского математического общества содействовала бы установлению общепризнанных критериев уровня работ, которые могут защищаться в качестве докторских диссертаций и имела бы большое моральное значение. Она содействовала бы также увеличению престижа Московского математического общества.

Ф. А. Березин
17. 02. 1970 г.

Я сказал и тем спас свою душу.²⁾

²⁾Латинское выражение «Dixi et animam levavi» — сказал и тем облегчил душу — здесь намеренно перефразировано и усилено. — *Прим. Е. Г. Карпель.*

НЕКРОЛОГИ

Феликс Александрович Березин

14 июля 1980 г. в результате несчастного случая погиб Феликс Александрович Березин.

Жизнь Ф. А. Березина оборвалась в расцвете его математического таланта — об этом свидетельствует не только то, что он успел уже сделать, но и его замыслы, неоконченные статьи и книги.

Ф. А. Березин родился 25 апреля 1931 г. в Москве. После окончания школы в 1948 г. он поступил на механико-математический факультет МГУ и окончил его в 1953 г. Три года он преподавал математику в одной из московских школ, а затем, начиная с 1956 г., до конца своей жизни работал на механико-математическом факультете Московского государственного университета сначала в должности младшего, а с 1962 г. — в должности старшего научного сотрудника кафедры теории функций и функционального анализа.

Главным стержнем научных интересов Ф. А. Березина была математическая физика. Ныне математическая физика охватывает большое число сложных и порой крайне абстрактных математических теорий и конструкций, возникших из стремления ясно осмыслить фундаментальные физические теории (квантовую физику, теорию тяготения, статистическую физику и т. д.). И в том, что сейчас утвердилось именно такое широкое понимание математической физики, и в её популярности среди математиков (и даже среди физиков) немаловажна роль Ф. А. Березина. Более 20 лет назад он был покорён красотой и значительностью математических проблем в квантовой теории, и они навсегда остались лейтмотивом его математического творчества.

Первой крупной работой Ф. А. Березина, относящейся к середине 50-х годов, ещё до его обращения к математической физике,

была работа 1956 г. об операторах Лапласа на полупростых группах Ли [8] ¹⁾. В ней содержался замечательный результат: описание всех неприводимых бесконечномерных представлений комплексных полупростых групп Ли в банаховых пространствах. На современном языке теорема Березина может быть сформулирована так: всякое неприводимое представление группы G изоморфно подфактору элементарного представления (т. е. представления, индуцированного одномерным характером борелевской подгруппы). Глубина этого результата видна из того обстоятельства, что несмотря на значительные усилия, следующий шаг в этом направлении был сделан лишь спустя 20 лет. А именно, Д. П. Желобенко и М. Дюфло получили явную классификацию всех неприводимых представлений, указав, какие из подфакторов элементарных представлений эквивалентны друг другу.

В 1956 г. Ф. А. Березин по совету И. М. Гельфанда, под чьим сильным влиянием он в то время находился, углубляется в изучение квантовой теории поля — с этого момента начинаются его занятия математической физикой.

В первый период этих занятий, со второй половины 50-х годов и до середины 60-х, Ф. А. Березин много размышлял над вопросами спектральной теории и, в частности, теории рассеяния для многочастичного оператора Шрёдингера. Хотя полученных им самим окончательных результатов немного — несколько работ, в которых разбираются те или иные частные ситуации (см. [13, 21, 23, 24, 25]), — его наблюдения, соображения и идеи, возникшие в результате занятий, оказали большое влияние на ряд математиков и физиков, общавшихся с ним, и, в итоге, немало послужили тому пониманию картины спектра и рассеяния в квантовой задаче n тел, которым мы ныне обладаем.

В самом начале 60-х годов Ф. А. Березин выполнил свою работу по формализму вторичного квантования, изложенную позднее в его известной монографии «Метод вторичного квантования» [26]. Этот формализм, издавна используемый физиками, основан на представлении линейных операторов, действующих в так называемом фокковском пространстве, в виде функций (чаще всего полиномов) от некоторых специальных образующих в алгебре всех таких операторов — операторов «рождения» и «уничтожения». Ф. А. Березин

¹⁾Список печатных работ Ф. А. Березина см. в конце книги.

придал этому исчислению элегантную форму, сопоставив каждому такому полиному некоторый полиномиальный функционал на алгебре функций — в случае симметрического фокковского пространства, или элемент некоторой грассмановой алгебры — в случае антисимметрического фокковского пространства, — так что при действиях с операторами (перемножения, сопряжения, преобразованиях, возникающих от канонической замены исходных образующих, и т. д.) соответствующие функционалы преобразуются тем или иным привычным математику способом: дифференцированием, перемножением, заменой переменных, континуальным интегрированием. Этот метод применялся самим Ф. А. Березиным и его учениками при изучении некоторых одномерных моделей квантовой теории поля: модель Тирринга (как для случая нулевой, так и для случая положительной массы), нелинейное вторично-квантованное уравнение Шрёдингера и др. (см. [15, 27, 35]). Следует отметить, что эти работы в значительной мере повлияли на появление и развитие нынешней конструктивной теории поля.

Занятия Ф. А. Березина вторичным квантованием имели ряд важных научных последствий. А именно, вновь пробудился интерес к старой задаче об описании представлений коммутационных и антикоммутационных соотношений (см. по этому поводу обзор В. Я. Голодца в Успехи матем. наук. 1969. Т. 24, № 4. С. 3—64). Другая тема, родившаяся отчасти из занятий вторичным квантованием и развивавшаяся Ф. А. Березиным в течение многих лет, — общее осмысление процедуры квантования. Хотя этими вопросами Ф. А. Березин занимался с середины 60-х годов, наиболее полно его концепция выражена в цикле статей 1973—1976 гг. (см. [51, 55—58]). Согласно основной идее этих работ квантование имеет следующий точный математический смысл: алгебра квантовых наблюдаемых является деформацией алгебры классических наблюдаемых, причем параметром деформации служит постоянная Планка, а направление деформации (первая производная по параметру в нуле) задается скобкой Пуассона. В случае плоского фазового пространства эта точка зрения эквивалентна обычной. В остальных случаях она приводит к новой содержательной теории. В частности, в статьях Ф. А. Березина в «Известиях АН СССР» [55, 58] рассмотрен случай, когда фазовым пространством служит однородная симметрическая область в комплексном пространстве. Им обнаружен новый интересный

эффект: множество возможных значений постоянной Планка дискретно и ограничено сверху.

Ранее, во второй половине 60-х годов, в связи со своими занятиями квантованием Ф. А. Березин публикует работу [32], в которой изучаются представления операторов в гильбертовом пространстве с помощью различных систем образующих в алгебре таких операторов (в качестве таких образующих рассматривались pq -символы, qr -символы, символы Вейля, виковский символ — используемый обычно во вторичном квантовании). Отметим, что во многих своих аспектах эта работа близка к возникшей в это же время теории псевдодифференциальных операторов, играющей теперь большую роль в математической физике. Таким образом, в работах Ф. А. Березина ([32], а затем [46, 48]) независимо появились многие важные идеи этой теории, хотя, к сожалению, значение работ Ф. А. Березина с этой точки зрения было осознано далеко не сразу.

Наконец, быть может, одна из самых важных для современной математической физики тема, истоки которой также восходят к работе Ф. А. Березина по вторичному квантованию, — это нынешняя суперматематика: теория супергрупп и супералгебр Ли и их представлений, анализ на супермногообразиях. Формальное исчисление в грассмановой алгебре, которое было развито Ф. А. Березиным в связи с формализмом вторичного квантования в антисимметричном фоковском пространстве, навело его на мысль о том, что «существует нетривиальный аналог анализа, в котором роль функций выполняют элементы алгебры Грассмана» [19, 26, 29, 41], т. е. анализ, в котором на равных правах с коммутирующими переменными выступают антикоммутирующие переменные. Эту идею он настойчиво пропагандировал и тщательно собирал подтверждающие примеры и конструкции. Важнейшие из них — интеграл Березина по антикоммутирующим переменным [26], затем так называемый «березиниан» — аналог якобиана при замене антикоммутирующих переменных [29]. Позже в совместной работе Ф. А. Березина и Г. И. Каца [41] были введены формальные супергруппы Ли и была указана связь между ними и супералгебрами Ли, обобщающая экспоненциальное отображение и теорию групп Ли. Наконец, последний важный в новой теории объект — супермногообразие — был введён Д. А. Лейтесом²⁾ на основе идеи, предложенной Ф. А. Берези-

²⁾См. [21] на с. 32. *Прим. ред. Д. Л.*

зиным [60]. Построение супермногообразия осуществляется в духе современной алгебраической геометрии — изучать многообразие с помощью локальных алгебр гладких функций на них — лишь с той разницей, что в случае супермногообразия следует рассматривать супералгебры.

К середине 70-х годов пионерские идеи Ф. А. Березина стали распространяться, и группы суперсимметрий, т. е. супергруппы Ли преобразований «суперпространства—времени», стали появляться в работах физиков. Благодаря трудам Ю. А. Гольфанда и Е. П. Лихтмана, Д. В. Волкова и В. А. Акулова, Весса и Зумино, В. И. Огиевского и многих других появилась надежда, что на языке суперанализа может быть адекватно сформулирована единая теория поля. Это связано со следующим фундаментальным предположением о структуре «пространства—времени»: «пространство—время» — супермногообразие, точки которого — обычное пространство—время, а группа преобразований — супергруппа, расширяющая группу Пуанкаре с помощью нечетных генераторов.

В последний год своей жизни Ф. А. Березин начал писать книгу по суперматематике; к несчастью, эта книга не была им закончена. Мы надеемся, что написанная часть книги будет опубликована и принята с большим интересом математиками и физиками.

Заветной мечтой Ф. А. Березина, как и многих, было построить непротиворечивую квантовую теорию поля. Почти всю свою деятельность — занятия задачей n тел, квантованием, суперанализом и т. д. — он рассматривал как предварительный подход к этой трудной проблеме. У него были некоторые наблюдения и соображения, с ней связанные, так, например, он заметил, что процедура перенормировки в квантовой теории поля некоторыми чертами напоминает теорию расширений симметрических операторов, и долгое время верил, что перенормировки могут быть хорошо осмыслены в рамках этой теории: исходный гамильтониан поля корректно определен лишь как симметрический оператор на некотором подходящем множестве в фоковском пространстве, а истинный гамильтониан получается как его самосопряжённое расширение. Хотя в общем случае эта идея оказалась неверной, она привела к двум очень хорошим работам: совместной с Л. Д. Фаддеевым работе о δ -образном взаимодействии двух квантовых частиц [13] и работе о модели Ли [18]. Во второй работе Ф. А. Березин дополнительно воспользовался соображением Гейзенберга о том, что модель Ли

следует изучать в пространстве с индефинитной метрикой, и построил, таким образом, гамильтониан модели Ли как расширение симметрического оператора в пространстве с индефинитной метрикой.

Ф. А. Березин довольно часто в 60-е годы обращался к статистической физике. В 1965 г. появилась его совместная с Я. Г. Синаем работа о существовании фазового перехода в ферромагнитных решётчатых системах с финитным взаимодействием [34]. В последующие годы Ф. А. Березин довольно долго пытался получить явную формулу для статистической суммы в трёхмерной модели Изинга, используя технику вторичного квантования, которую он очень любил и в душе своей, видимо, считал универсальным средством. Некоторые полученные им в этом направлении результаты опубликованы в [38, 44].

Таков в главных чертах научный путь Ф. А. Березина. Однако его достижения и их роль в математической физике полностью понятны только на фоне его педагогической деятельности в широком смысле этого слова. Он терпеливо прививал многим физикам, общавшимся с ним, вкус и любовь к математическому мышлению, к изяществу абстрактных математических умозрений и учил их применять всё это в конкретных задачах.

Ф. А. Березин 24 года работал на механико-математическом факультете Московского государственного университета. Почти все эти годы он руководил научным семинаром по математической физике (иногда один, иногда совместно с кем-нибудь ещё). Этот семинар был хорошо известен среди физиков и математиков, в нём было воспитано много хороших учёных, и его участники сделали немало превосходных работ. Он вёл также в разные годы и учебные семинары по теории представлений и функциональному анализу. Он читал факультативные курсы по квантовой механике, статистической физике, квантовой теории поля, континуальным интегралам. Его курсы по квантовой механике и статистической физике были опубликованы в ротапринтных изданиях [49, 50]. Ф. А. Березин собирался со временем усовершенствовать эти курсы и сделать их более доступными для широкого круга читателей, но не успел.

В жизни Ф. А. Березин был человеком исключительной скромности, большого внутреннего благородства и абсолютной неприязнтельности.

Мы верим, что имя Феликса Александровича Березина среди математиков и физиков не будет забыто. В будущем, когда взойдут все брошенные им в науку семена, его будут вспоминать часто и светло.

*Н. Н. Боголюбов, И. М. Гельфанд, Р. Л. Добрушин,
А. А. Кириллов, М. Г. Крейн, Д. А. Лейтес,
Р. А. Минлос, Я. Г. Синай, М. А. Шубин*

Памяти Феликса Александровича Березина

14 июля 1980 г. трагически погиб известный математик и физик, доктор физико-математических наук профессор Феликс Александрович Березин. Погиб в полном расцвете сил и таланта, когда ему столько ещё предстояло сделать. 25 апреля 1981 г. ему исполнилось бы пятьдесят лет.

В личности Феликса Александровича воплотилась ясно сформировавшаяся в последнее десятилетие тенденция сближения физики и математики. Ф. А. Березин представлял тип учёного, глубоко понимавшего физику и воспринимавшего её как неисчерпаемый источник новых ярких математических идей. Вместе с тем, он много сделал для понимания и решения собственно физических проблем.

Научные интересы Ф. А. Березина были очень широки. Начало его творческой деятельности было связано с теорией представлений групп, давно нашедшей важнейшие приложения в теоретической физике. Наиболее крупные полученные им здесь результаты состоят в описании неприводимых бесконечномерных представлений комплексных полупростых групп Ли в банаховых пространствах и в описании операторов Лапласа — Казимира. В конце 50-х годов Ф. А. Березин начинает активно интересоваться теоретической физикой, в первую очередь — квантовой теорией поля. Он работает над развитием функционального подхода в квантовой теории поля, и итогом его ранних работ в этой области явилась замечательная монография «Метод вторичного квантования» (М.: Наука, 1965). Эта

монография получила всемирное признание у физиков-теоретиков и математиков.

Суть функционального подхода состоит в установлении соответствия между квантовыми операторами и их так называемыми символами, т. е. некоторыми системами функций (в случае теории поля — функционалов) на фазовом пространстве классической системы. На языке символов Ф. А. Березиным были получены новые неравенства для спектральной функции оператора Гамильтона произвольной квантовой системы. На этом же пути он первым выявил в методе континуального интеграла известные неоднозначности квантования, связанные с упорядочением операторов.

Ф. А. Березин последовательно распространил континуальный подход на ферми-поля. Это привело его к созданию анализа, в котором на равных правах с обычными функциями выступают функции антикоммутирующих переменных, т. е. элементы алгебры Грассмана. Им были высказаны и в значительной мере разработаны ключевые идеи относительно того, каким образом основные понятия математического анализа и теории групп могут быть перенесены на этот общий случай. Особенно полезным оказалось введённое им понятие интеграла по коммутирующим и антикоммутирующим переменным. В его честь аналог якобиана для таких интегралов получил название березиниана. Инициированные им исследования по теории супергрупп и супермногообразий составили новую область математики, получившую название суперматематики. Результаты и идеи Ф. А. Березина в этой области играют исключительно важную роль при построении аппарата суперсимметричных теорий элементарных частиц и особенно супергравитации — одного из наиболее перспективных направлений современной теоретической физики.

Благодаря своей богатейшей эрудиции Ф. А. Березин плодотворно работал и в других областях теоретической физики. Так, он одним из первых понял специфические особенности квантовомеханической задачи многих тел. Его идеи и методы существенно способствовали корректной формулировке и выяснению картины спектра этой задачи. Еще в 1961 г. в работе Ф. А. Березина и учеников была указана точно решаемая модель двумерной теории поля. Он возвращался к двумерным теориям и в последующие годы, когда их исследование начало привлекать внимание многих физиков. Ф. А. Березину принадлежит новый подход к проблеме квантования динамических систем общего вида, фазовое пространство которых обладает неев-

клидовой геометрией. Он неоднократно подчёркивал важность геометрических идей в современной физике. Всё более глубокое проникновение в современную теоретическую физику новейших математических идей и изощрённых методов побуждало советских и зарубежных физиков к консультациям с Феликсом Александровичем, одним из немногих, кто свободно владел обоими современными языками — как математическим, так и физическим. Общение с ним всегда было поучительным, а консультации — полезными и плодотворными.

Многим Ф. А. Березин запомнится как умелый и требовательный педагог. В течение ряда лет он читал на механико-математическом факультете МГУ курсы лекций по функциональному анализу, квантовой механике и статистической физике. Конспекты его лекций (некоторые из них были изданы издательством МГУ) отличаются глубиной и свежестью подхода к предмету. Много лет работал руководимый Ф. А. Березиным семинар по теоретической физике, бывший для многих физиков-теоретиков настоящим университетом математической культуры.

Последние годы научно-педагогическая деятельность Ф. А. Березина была особенно плодотворной. Нелепый случай оборвал его жизнь в самом расцвете.

Все лично знавшие Феликса Александровича Березина навсегда сохранят память об этом глубоко честном, талантливом и всесторонне образованном человеке.

*Ю. И. Манин, М. А. Марков, С. П. Новиков,
В. И. Огиевецкий, В. Я. Файнберг, Е. С. Фрадкин*

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ Ф.А. БЕРЕЗИНА

- [1] Линейные конечномерные представления групп Ли с коммутативным радикалом // ДАН СССР. 1953. Т. 93, № 5. С. 759–761.
- [2] Однородные расширения комплексного пространства // ДАН СССР. 1964. Т. 99, № 6. С. 890–892. (Совм. с И. И. Пятецким-Шапиро.)
- [3] Операторы Лапласа на полупростых группах Ли // ДАН СССР. 1956. Т. 107, № 1. С. 9–12.
- [4] Представления комплексных полупростых групп Ли в банаховом пространстве // ДАН СССР. 1956. Т. 110, № 6. С. 897–900.
- [5] Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях // Успехи матем. наук. 1956. Т. 11, вып. 3 (69). С. 211–215. (Совм. с И. М. Гельфандом.)
- [6] Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях // Труды ММО. 1956. Т. 5. С. 311–361. (Совм. с И. М. Гельфандом.)
- [7] Представления групп // Успехи матем. наук. 1956. Т. 11, вып. 6 (72). С. 13–40. (Совм. с И. М. Гельфандом, М. И. Граевым, М. А. Наймарком.)
- [8] Операторы Лапласа на полупростых группах Ли // Труды ММО. 1957. Т. 6. С. 371–463; 1963. Т. 12. С. 453–466.
- [9] Операторы Лапласа на полупростых группах Ли и некоторых симметрических пространствах // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12, вып. 1 (73). С. 152–156.
- [10] Зональные сферические функции и операторы Лапласа на некоторых симметрических пространствах // ДАН СССР. 1958. Т. 118, № 1. С. 9–12. (Совм. с Ф. И. Карпелевичем.)
- [11] Представления групп Ли // Труды 3-го Всесоюзн. матем. съезда. М., 1958. Т. 3. С. 244–254. (Совм. с И. М. Гельфандом, М. И. Граевым, М. А. Наймарком.)
- [12] Аналог теоремы Лиувилля для симметрических пространств с отрицательной кривизной // ДАН СССР. 1959. Т. 125, № 6. С. 1187–1189.
- [13] Замечание об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом // ДАН СССР. 1961. Т. 137, № 5. С. 1011–1014. (Совм. с Л. Д. Фаддеевым.)

- [14] Канонические преобразования операторов в представлении вторичного квантования // ДАН СССР. 1961. Т. 137, № 2. С. 311–314.
- [15] О модели Тирринга // ЖЭТФ. 1961. Т. 40, № 3. С. 885–894.
- [16] О модели Ли // ДАН СССР. 1962. Т. 143, № 3. С. 811–814.
- [17] «Колючая роза» — либретто оперы (перевод с белорусского). М.: Оперная студия МГУ, 1962. (Совм. с Р. А. Минлосом.)
- [18] О модели Ли // Матем. сб. 1963. Т. 60, вып. 4. С. 425–446.
- [19] О канонических преобразованиях в представлении вторичного квантования // ДАН СССР. 1963. Т. 150, № 5. С. 959–962.
- [20] Об одной модели квантовой теории поля // Успехи матем. наук. 1963. Т. 18, вып. 5. С. 225–226.
- [21] Некоторые математические вопросы квантовой механики систем с большим числом степеней свободы // Труды 4-го Всесоюзн. матем. съезда. М., 1964. Т. 2. С. 532–541. (Совм. с Р. А. Минлосом и Л. Д. Фаддеевым.)
- [22] Об операторах в представлении вторичного квантования // ДАН СССР. 1964. Т. 154, № 5. С. 1063–1065.
- [23] Уравнение Шрёдингера для системы одномерных частиц с точечным взаимодействием // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем. 1964. Т. 1. С. 21–28. (Совм. с Г. П. Похилом, В. М. Финкельбергом.)
- [24] Формула следов для многочастичного уравнения Шрёдингера // ДАН СССР. 1964. Т. 157, № 3. С. 1069–1072.
- [25] Асимптотика собственных функций многочастичного уравнения Шрёдингера // ДАН СССР. 1965. Т. 163, № 4. С. 795–798.
- [26] Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.
- [27] Релятивистская двумерная модель самовзаимодействующего фермионного поля с ненулевой массой покоя // ЖЭТФ. 1965. Т. 48, № 5. С. 1293–1306. (Совм. с В. Н. Сушко.)
- [28] Применение метода функционалов к некоторым задачам многих тел // Тезисы сообщений Международного конгресса математиков в Москве. М., Наука. 1966. С. 28.
- [29] Автоморфизмы грассмановой алгебры // Матем. заметки. 1967. Т. 1, вып. 3. С. 269–276.
- [30] Выражение квантовой статистической суммы через операторы рассеяния // Проблемы многих тел и физика плазмы. М.: Наука, 1967, с. 3–10.
- [31] Несколько замечаний об ассоциативной оболочке алгебры Ли // Функц. анализ и его прил. 1967. Т. 1, № 2. С. 1–14.

-
- [32] Об одном представлении операторов с помощью функционалов // Труды ММО. 1967. Т. 17. С. 117–196.
- [33] Системы одномерных частиц с парным взаимодействием // Проблемы многих тел и физика плазмы. М.: Наука, 1967, с. 11–17.
- [34] Существование фазового перехода у решеточного газа с притяжением между частицами // Труды ММО. 1967. Т. 17. С. 197–212. (Совм. с Я. Г. Синаем.)
- [35] Об одной модели квантовой теории поля // Матем. сб. 1968. Т. 76, № 3. С. 3–25.
- [36] Алгебры Ли с дополнительной структурой // Матем. сб. 1968. Т. 77, № 32. С. 201–221. (Совм. с Ф. И. Карпелевичем.)
- [37] Несколько замечаний о представлениях соотношений коммутации // Успехи матем. наук. 1969. Т. 24, № 4. С. 65–88.
- [38] Плоская модель Изинга // Успехи матем. наук. 1969. Т. 24, № 3. С. 3–22.
- [39] Соотношения между корреляционными функциями в классической статистической физике // Теор. и матем. физика. 1970. Т. 3, № 1. С. 115–125.
- [40] Всесоюзный симпозиум по теории голоморфных функций многих комплексных переменных. 24 июня–4 июля 1969 // Успехи матем. наук. 1970. Т. 25, № 1. С. 219–220. (Совм. с С. Г. Гиндикиным, А. А. Кирилловым и В. П. Паламодовым.)
- [41] Группы Ли с коммутирующими и антикоммутирующими параметрами // Матем. сб. 1970. Т. 82, № 3. С. 343–359. (Совм. с Г. И. Кацем.)
- [42] Конспект лекции по анализу III. М.: Изд. МГУ, 1970.
- [43] Symbols of operators. Coloquia Mathem // Soc. Janos Bolyai. 5. Hilbert space operators. Tihany (Hungary). 1970. P. 21–25. (Совм. с М. А. Шубиным.)
- [44] Число замкнутых несамопересекающихся контуров на плоской решетке // Матем. сб. 1971. Т. 85, № 1. С. 49–64.
- [45] Невинеровские континуальные интегралы // Теор. и матем. физика. 1971. Т. 6, № 2. С. 194–212.
- [46] Виковские и антивиковские символы операторов // Матем. сб.. 1971. Т. 86, № 4. С. 578–610.
- [47] Выпуклые функции от операторов // Матем. сб. 1972. Т. 88, № 2. С. 268–276.
- [48] Ковариантные и контравариантные символы операторов // Изв. АН. 1972. Т. 36, № 5. С. 1134–1167.
- [49] Лекции по статистической физике. М.: Изд-во МГУ, 1972.

- [50] Лекции по квантовой механике. М.: Изд-во МГУ, 1972. (Совм. с М. А. Шубиным.)
- [51] Квантование в комплексных ограниченных областях // ДАН. 1973. Т. 211, № 6. С. 1263–1266.
- [52] Несколько замечаний о распределении Вигнера // Теор. и матем. физика. 1973. Т. 17, № 13. С. 305–318.
- [53] Гамильтонов формализм в общей задаче Лагранжа // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29, № 3. С. 183–184.
- [54] Спектральные свойства обобщенных теплицевых матриц // Матем. сб. 1974. Т. 95, № 2. С. 305–325.
- [55] Квантование // Изв. АН. Сер. матем. 1974. Т. 38, № 5. С. 1116–1175.
- [56] Общая концепция квантования // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29, № 6. С. 200–201.
- [57] General concept of quantization // Commun. Math. Phys. 1975. V. 40, № 2. P. 153–174.
- [58] Квантование в комплексных симметрических пространствах // Изв. АН. Сер. матем. 1975. Т. 39, № 2. С. 363–402.
- [59] Классический спин и алгебра Грассмана // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 21, № 11. С. 678–680. (Совм. с М. С. Мариновым.)
- [60] Супермногообразия // ДАН. 1975. Т. 224, № 3. С. 505–508. (Совм. с Д. А. Лейтесом.)
- [61] Об ассоциативных алгебрах функций // Вестн. МГУ. Матем., мех. 1976. № 1. С. 33–38. (Совм. с Ф. И. Карпелевичем.)
- [62] Representation of the infinite direct product of universal coverings of isometry groups of the complex ball // Repts Math. Phys. 1976. V. 9, № 1. P. 15–30.
- [63] Представления супергруппы $U(p, q)$ // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, № 3. С. 70–71.
- [64] Супермногообразия // Успехи матем. наук. 1977. Т. 32, № 1. С. 154.
- [65] Particle spin dynamics as the Grassmann variant of classical mechanics // Ann. Phys. (USA). 1977. V. 104, № 2. P. 336–362. (Совм. с М. С. Мариновым.)
- [66] Сборник задач по функциональному анализу. М.: МГУ, 1977. (Совм. с А. Д. Гвишиани, Е. А. Гориным, А. А. Кирилловым.)
- [67] Строение супералгебр Ли с полупростой четной частью // Функц. анализ и его приложения. 1978. Т. 12, № 1. С. 64–65. (Совм. с В. С. Ретах.)

- [68] Представления непрерывного прямого произведения универсальных накрывающих группы движения комплексного шара // Труды ММО. 1978. Т. 36. С. 275–293.
- [69] Связь между ко- и контрвариантными символами операторов на классических комплексных симметрических пространствах // ДАН. 1978. Т. 241, № 1. С. 15–17.
- [70] О строении супералгебр Ли с полупростой четной частью // Вестн. МГУ. Матем., мех. 1978. № 5. С. 63–67. (Совм. с В. С. Ретах.)
- [71] Models of Gross-Neveu type are quantization of a classical mechanics with nonlinear phase space // Comm. Math. Phys. 1978. V. 63, № 2. P. 131–153.
- [72] Георгий Исаакович Кац (1924–1978) (некролог) // Успехи матем. наук. 1979. Т. 34, № 2. С. 185–188. (Совм. с Ю. М. Березанским, Н. Н. Боголюбовым, Л. И. Вайнерманом, Ю. Л. Далецким, А. А. Кирилловым, В. Г. Палюткиным, Б. И. Хацетом, С. Д. Эйдельманом.)
- [73] Инстантоны и грассмановы многообразия // Функц. анализ и его прил. 1979. Т. 13, № 2. С. 75–76.
- [74] Дифференциальные формы на супермногообразиях // Ядерная физика. 1979. Т. 30, № 4. С. 1168–1174.
- [75] Математические основы суперсимметричных теорий поля // Ядерная физика. 1979. Т. 29, № 6. С. 1670–1687.
- [76] Теоретико-групповая интерпретация уравнений типа Кортевега–де Фриза // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14, № 2. С. 50–51. (Совм. с А. М. Переломовым.)
- [77] Супермногообразия // В кн.: Элементарные частицы. Седьмая школа физики ИТЭФ. Вып. 1. М.: Атомиздат, 1980. С. 119.
- [78] The group with Grassmann structure $UOSP(1, 2)$ // Communications in Mathematical Physics (1965–1997). 1980. V. 78, № 3. P. 409–428. (Совм. с В. Н. Толстым.)
- [79] Континуальный интеграл по траекториям в фазовом пространстве // Успехи физич. наук. 1980. Т. 132, № 3. С. 497–548.
- [80] Суперсимметричная модель нескольких классических частиц со спином // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 32, № 1. С. 76–78. (Совм. с В. Л. Голо.)

Посмертные издания

- [81] Уравнение Шрёдингера. М.: Изд-во МГУ, 1983. (Совм. с М. А. Шубиным, при участии Г. Л. Литвинова.)
- [82] Метод вторичного квантования. 2-е изд. / Под ред. и с предисловием М. К. Поливанова. М.: Наука, 1986.

- [83] Алгебра и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд-во МГУ, 1983.
- [84] Schrödinger equation. Dordrecht: Kluwer, 1991. (Совм. с М. А. Шубиным, при участии Г. Л. Литвинова и с Дополнением Д. А. Лейтеса.)
- [85] Introduction to superanalysis / Edited and with a foreword by A. A. Kirillov. With an appendix by V. I. Ogievetsky. Translated from the Russian by J. Niederle and R. Kotecky. Translation edited by Dimi-
itri Leites // Mathematical Physics and Applied Mathematics, № 9. Dordrecht—Boston, MA: D. Reidel Publishing Co., 1987.
- [86] Лекции по статистической физике. Изд. 2-е. М.—Ижевск: РХД, 2002; изд. 3-е, испр. / Под ред. и с предисловием Д. А. Лейтеса. М.: МЦНМО, 2008.