Рихардъ Дедекиндъ.

Что такое числа и для чего они служатъ?

Ἀεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει.

ПЕРЕВОДЪ СЪ НѢМЕЦКАГО

ПРИВАТЪ-ДОЦЕНТА

Н. Парфентьева.

КАЗАНЬ.
Типо-литографія Императорскаго Университета
1905.

Рихард Дедекинд

Что такое числа и для чего они служат?

Ἀεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει.

Перевод с немецкого приват-доцента Н. Парфентьева

Под общей редакцией Г. И. Синкевич

Москва ♦ Ижевск

2015

УДК 51(092)
ББК 22.1г
Д262

Дедекинд Р.
Что такое числа и для чего они служат? — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2015. — 98 с.

Работа Дедекинда «Что такое числа и для чего они служат?», изданная в 1888 году в Германии, содержит изложение его теории множеств как числовых систем, созданной в один период с теорией множеств Георга Кантора и в совместных с ним спорах и обсуждениях. Книга Дедекинда была переведена на русский язык в 1905 году и с тех пор не переиздавалась. В настоящем издании воспроизводится перевод первого русского издания.

ISBN 978-5-4344-00??-?

http://shop.rcd.ru
http://ics.org.ru

Оглавление

Предисловие редактора

Выдающийся немецкий математик Рихард Юлиус Вильгельм Дедекинд является автором теории действительного числа, основанной на созданном им методе сечений.

Биографический очерк

Рихард Дедекинд родился 5 октября 1831 года в Брауншвейге (Brunswick, Braunschweig), родине Карла Гаусса. Его семья была известной и уважаемой в городе. Отец, Юлиус Левин Ульрих Дедекинд, сын врача, был известным юристом, профессором колледжа Каролинум (Collegium Carolinum) в Брауншвейге (этот колледж в 1795 году закончил Гаусс). Мать Дедекинда, Каролина Генриетта, урожденная Эмпериус (Emperius), была дочерью Иоганна Эмпериуса, профессора того же колледжа, впоследствии ставшего директором герцогского музея. После того, как наполеоновские войска разграбили музей, Иоганн Эмпериус в 1815 году поехал в Париж и добился возвращения экспонатов музея.[1] В семье было четверо детей, Рихард был младшим. Его брат Адольф стал председателем окружного суда в Брауншвейге, сестра Матильда умерла в 1860 году; другая сестра, Юлия, стала писательницей и поэтессой, с ней он прожил вторую половину своей жизни. В те времена квартиры профессоров были на территории университетов, и дети росли в академической атмосфере, среди картин и скульптур, слушая музыку. Рихард был очень музыкален, был превосходным виолончелистом и пианистом.

Рихард окончил гимназию Брауншвейга, увлекался химией и физикой, но в 1848 году, поступив в колледж Каролинум, стал заниматься математикой, так как хотел найти в ней логическую структуру естественных наук. Там он изучал элементы аналитической геометрии, алгебру, механику и анализ. В 1850 году поступил в Геттингенский университет (Georgia

[1] Эти и некоторые другие биографические сведения приводятся согласно статье Томаса Сонара (*см.* Sonar Th., Brunswick's Second Mathematical Star: Richard Dedekind (1831–1916) *The Mathematical Intelligencer*, 2012, Vol. 34, №2, pp. 63–67).

Augusta), где оказался подготовленным по математике лучше других студентов. Лекции читали В. Вебер, И. Листинг, М. Штерн и изредка К. Гаусс. В университете существовал математический семинар для методической подготовки учителей гимназий. На этом семинаре Дедекинд подружился с Б. Риманом. Если Риман горячо интересовался практическими и экспериментальными занятиями, тяготел к вопросам математического анализа, Дедекинд был сосредоточен на теоретической науке, прежде всего алгебре и теории чисел. В Геттингене началась их долгая дружба, продолжавшаяся до самой смерти Римана в 1866 году. В 1857 году больной Риман провел некоторое время в семье Дедекиндов в их летнем доме в Бад-Гарцбурге. Томас Сонар полагает, что в беседах с Кантором Дедекинд употреблял термин «Mannigfaltigkeit» (многообразие, множество) под влиянием его первого использования Риманом.

Весной 1850 года Дедекинд, как он вспоминает, прослушал элементы теории чисел в небольшом, но очень интересном курсе Штерна (M. A. Stern, 1807–1894).

В зимнем семестре 1850/51 года Дедекинд посещал лекции Гаусса по методу наименьших квадратов. Краткий отчет Гаусса содержит информацию об этом курсе, вот воспоминания Дедекинда, написанные в 1901 году:

«В начале следующего зимнего семестра я решил, что достаточно подготовлен, чтобы слушать его лекции по методу наименьших квадратов, и, вооружившись журналом посещения лекций, не без сердечного трепета, я вступил в его жилище, где увидел его сидящим за письменным столом. Мое сообщение, казалось, мало порадовало его, я слышал также, что он не любил вести курсы; после того, как он написал свое имя в журнале, он сказал после некоторой паузы: «Возможно, вы знаете, что всегда очень неясно, состоятся ли мои лекции; где вы живете? У парикмахера Фогеля? Хорошо, это удачно, так как он также и мой парикмахер, я уведомлю вас через него несколькими днями позже». Через несколько дней Фогель, личность, известная всему городу, весь преисполненный важностью своей миссии, вошел в мою комнату сказать мне, что несколько других студентов тоже записались и тайный советник Гаусс будет читать курс.

Нас было девять студентов, все мы были очень старательны, редко кто-то из нас пропускал, хотя путь в обсерваторию зимой бывал иногда неприятен. Аудитория, выделенная из служебного помещения Гаусса как прихожая, была очень маленькой.

Мы сидели за столом, длинные стороны которого были удобны для троих, но не четверых. Напротив двери у внешнего края сидел Гаусс, и когда все мы присутствовали, то те двое из нас, кто приходил позже, должны были плотно придвигаться к нему и класть тетради на колени. Гаусс носил легкую черную шапочку, очень длинный коричневый кафтан, серые брюки; обычно он сидел в удобной позе, смотрел вниз, немного наклоняясь и положив согнутые руки на колени.

Он говорил без записей, довольно легко, очень понятно, просто и отчетливо; но когда он хотел сделать особое ударение на новом пункте, он использовал особенно характерные слова, затем он внезапно поднимал голову, поворачивался к одному или другому сидящему рядом с ним и пристально смотрел на него своими прекрасными проникновенными голубыми глазами. Это было незабываемо. Если он возвращался к пояснению принципов развития математических формул, то он вставал и в величавой, очень прямой позе писал на доске своим особым красивым почерком; он всегда экономно и продуманно распределял весьма небольшое пространство доски. Для числовых примеров, тщательному завершению которых он придавал большое значение, он приносил с собой необходимые данные на маленьких листочках бумаги.

24 января 1851 года Гаусс закончил изложение первой части своего курса, в котором он познакомил нас с основами своего метода наименьших квадратов. Далее последовало исключительно ясное развитие основных понятий и важных теорем анализа и вероятностей, иллюстрируемых оригинальными примерами, которые служили введением во вторую и третью методику установленного метода, в который я должен был углубляться. Могу только сказать, что мы следили за ним с неослабевающим интересом в этих искусных лекциях, где уже были рассмотрены несколько примеров из теории определенных интегралов. Но нам, как и самому Гауссу, который сначала неохотно согласился читать этот курс, казалось, что он стал испытывать некоторое удовольствие, обучая нас. Конец наступил 13 марта, Гаусс встал, все мы были вокруг него, и он отпустил нас с дружескими прощальными словами: «Мне остается только поблагодарить вас за большое старание и внимание, с которым вы слушали мои лекции, возможно, изложенные слишком сухо». Полвека прошло с тех пор, но эти так называемые сухие лекции навечно остались в моей памяти как самые лучшие из всех, что я когда-либо слушал».[1]

В следующем семестре Дедекинд снова слушал лекции Гаусса по специальной геодезии. В 1852 году, всего лишь после четырех семестров, он

[1] James I., *From Euler to von Neumann*, Cambridge University Press, 2002, pp. 195–198.

завершил свою докторскую работу под руководством Гаусса, став последним из его студентов и написав диссертацию по теории интегралов Эйлера. Гаусс свидетельствовал, что Дедекинд очень много знал и был самостоятелен, вдобавок имел «благоприятные многообещающие виды на будущее».

По окончании Геттингенского университета Дедекинд не выполнил достаточных требований для получения права на преподавание (точнее — на занятие профессорской должности, хабилитация), поэтому он провел еще два года, заполняя пробелы, и квалифицировался как приват-доцент через несколько недель после Римана. После того, как в 1855 году в Геттинген приехал Дирихле (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859), чтобы после смерти Гаусса занять его место профессора высшей математики, Дедекинд посещал его лекции по теории чисел, теории потенциала, неопределенным интегралам и уравнениям в частных производных. Влияние Дирихле на Дедекинда было огромно, Дедекинд признавался, что общение с Дирихле сделало его новым человеком. Вскоре между ними завязались тесные дружеские отношения, и он вошел в круг Дирихле. Жена Дирихле, Ребекка, была сестрой композитора Феликса Мендельсона. Их дом был всегда открыт для гостей, которые собирались поговорить о литературе и музыке. Приходили известные музыканты и композиторы, в том числе Брамс. Гости часто музицировали, Дедекинд как виолончелист и пианист был желанным участником. Светские друзья семейной пары Дирихле иногда сожалели, что такая талантливая и обаятельная женщина, как Ребекка, вышла замуж за простого математика.

Интересы Дедекинда постепенно сместились от эллиптических и абелевых функций к теории Галуа, он первым начал преподавание этой теории в Геттингенском университете (его лекции слушали всего два студента). На следующий год он вновь читал этот курс для двух студентов, а в 1856 году одному слушателю. Тогда жалование преподавателя зависело от количества студентов, записавшихся на его лекции, Дедекинд был вынужден обратиться к герцогу Брауншвейгскому за вспомоществованием, его ходатайство было удовлетворено. В 1858 году Дедекинд по рекомендации Дирихле принял приглашение в Технический университет (Eidgenössisches Polytechnikum) Цюриха на должность профессора математики. Обучая будущих инженеров, он впервые пришел к мысли о недостаточном обосновании арифметики для нужд математического анализа.

В 1859 году Дедекинд вместе с Риманом совершил поездку в Берлин, где встречался с Вейерштрассом и Куммером.

Рис. 1. Дедекинд в возрасте 37 лет

В 1862 году колледж Каролинум его родного города был преобразован в Технический институт (сейчас Технический университет), Дедекинд вернулся и преподавал в нем до 1894 года, отклоняя приглашения в другие университеты. В 1872 году он стал первым президентом расширенного Технического университета Брауншвейга[1]. Он никогда не был женат и прожил остаток своей жизни с матерью[2] и со своей незамужней сестрой Юлией. Дедекинд был избран членом Берлинской (1880), Римской и Французской (1900) академий наук. Он получил докторские степени в университетах Осло, Цюриха и Брауншвейга. Известно, что скромность и научная молчаливость Дедекинда привела к тому, что в 1904 году «Математический календарь» опубликовал сообщение о смерти Дедекинда, якобы случившейся 4 сентября 1899 года. В письме редактору Дедекинд написал: «По моим собственным наблюдениям я в тот день был вполне здоров и вел оживленный разговор о теории множеств с моим гостем и уважаемым другом Георгом Кантором (из Галле), который в связи с этим нанес мне смертельный удар, но не мне самому, а сделанной мной ошибке».[3]

В 1871 году Дедекинд, обобщив теорию многочленов и алгебраических чисел, ввел в математику абстрактные алгебраические структуры: кольца[4], идеалы и модули. Совместно с Кронекером он создает общую теорию делимости. Исследования Дедекинда были изданы в виде приложения к «Теории чисел» Дирихле 1863 года.[5] Биограф Дедекинда Эдвардс (H. M. Edwards) полагает, что «Теория чисел», изданная после смерти Дирихле, в действительности написана Дедекиндом.[6] Сам Дедекинд

[1]Сейчас студенты университета Брауншвейга называют себя «Dedekinder».

[2]Умерла в 1894 году.

[3]Landau E., Richard Dedekind, *Nachrichten von der K. Gesellsch. Der Wiss. Zu Göttingen. Gesch. Mitt. Ausdem Jahre*, 1917, pp. 50–70.

[4]Термин «кольцо» не принадлежит Дедекинду, его позже ввел Гильберт.

[5]Dirichlet L. P., *Vorlesungen über Zachlentheorie*, Hrsg. von R. Dedekind, Braunschweig, 1863, 1871, 1879, 1894, 414 p.

[6]Edwards H. M., Dedekind's invention of ideals, *Bull. London Math. Soc.* 1983, Vol. 15, pp. 8–17.

Рис. 2. Портрет Дедекинда в университете Брауншвейга

в письме Кантору 19 января 1879 года писал: «Я полностью занят переработкой теории чисел Дирихле»[1]. Сочинения Дирихле под редакцией Дедекинда вышли в Брауншвейге тремя изданиями. Можно лишь сожалеть, что русский перевод лекций Дирихле по теории чисел не содержит знаменитого XI дополнения, написанного Дедекиндом, в котором изложена теория идеалов. В 1927 году университет Брауншвейга украсили парадные портреты Гаусса и Дедекинда. На портрете кисти Кёнигсдорфа Дедекинд держит в руке «Теорию идеалов» — книгу, которой отдельно не существует, это «XI дополнение» к лекциям Дирихле.

Дальнейшее развитие оснований высшей алгебры во многом обязано открытиям Дедекинда.

В течение всей жизни его отличала большая научная порядочность и деликатность. Он принимал участие в изданиях Дирихле, Гаусса, Римана (в 1868 году, «О представлении функций при помощи тригонометрических рядов» и «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии», а в 1876 году вместе с Вебером издал сочинения Римана, написав большой биографический очерк), и считал этот труд более важным нежели публикацию собственных результатов. В 1995 году в Эвансвилле (Индиана, США) была найдена переписка Дедекинда с Кантором, Фробениусом и Вебером, сейчас она выкуплена и хранится в архиве университета Брауншвейга. Фрагменты переписки Кантора и Дедекинда (49 фрагментов) по немецкому изданию Э. Нётер и Ж. Кавальеса 1937 г.[2] опубликованы на русском языке в переводе Ф. А. Медведева (см. Г. Кантор. Труды по теории множеств. Москва, 1985).

Сочинения Дедекинда в трех томах (67 работ и переписка) вышли в Брауншвейге в 1930-х годах.[3] Подробный анализ публикуемой здесь работы Дедекинда содержится у Д. Джойса[4].

[1] Имеется в виду работа Дедекинда над третьим изданием лекций Дирихле.

[2] *Briefwechsel Cantor – Dedekind*, Hrsg. von E. Noether, J. Cavaillès, Paris: Hermann, 1937.

[3] Dedekind R., *Gesammelte mathematiche werke*, Hrsg. von R. Fricke, E. Noether, Ö. Ore, Vol. 1 (1930), Vol. 2 (1931), Vol. 3 (1932).

[4] Joyce D. E., *Notes on Richard Dedekind's «Was sind und was sollen die Zahlen?»*, Clark University, 2005, 37 p. (http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/numbers/dedekind.pdf).

Первый перевод сочинения Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа» был сделан С. О. Шатуновским и издан в Одессе в 1894 году в журнале «Вестник опытной и экспериментальной физики» (№ 191–192), затем переиздавался в Одессе в издательстве «Матезис», он также доступен в интернете.[1]

Рис. 3. Дедекинд в возрасте 55 лет, во время написания работы «Что такое числа и для чего они служат?»

В начале 1870-х годов Дедекинд познакомился с Георгом Кантором. Знакомство перешло в долголетнюю дружбу и сотрудничество; горячий интерес и молодой энтузиазм Кантора уравновешивался спокойной рассудительностью Дедекинда, который был старше на 14 лет. Их отношения пережили и период бурной увлеченности, и раздражения, отчуждения и прекращение переписки. Оба они любили проводить лето в горах Германии и Швейцарии (Гарц и Интерлакен), где и познакомились. Желание двадцатисемилетнего Кантора найти понимающего собеседника и советчика развеяло сомнения Дедекинда в важности его собственных размышлений о построении теории числа средствами теории множеств. Они были настолько увлечены обсуждением создаваемой Кантором теорией множеств, что, когда Кантор в 1874 году женился и проводил с молодой женой Валли медовый месяц в Гарце, к ним присоединился Дедекинд, и они с Кантором целыми днями обсуждали вопросы теории множеств.

Дедекинд наряду с Кантором считается основателем теории множеств. Его работы стали наглядным примером применения новых методов. Дедекинд применил аксиоматический метод построения системы натуральных чисел в 1888 году в работе «Что такое числа и для чего они служат?»[2].

Он ввел основные операции над множествами в объеме, нужном ему для операций над множеством алгебраических чисел, обобщил понятие отображения, ввел понятие цепи. Система аксиом, сформулированная здесь

[1] Первый английский перевод Бемана появился только в 1901 году.

[2] Dedekind R., *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, 1888 (в русском переводе: Дедединд Р., *Что такое числа и для чего они служат?*, Казань, 1905).

Дедекиндом для натуральных чисел, год спустя была развита и упрощена Дж. Пеано[1] (1858–1932), чье имя за ней и закрепилось, но еще до него Дедекинд показал, как основные теоремы арифметики получаются из сформулированных аксиом.

В начале XX века аксиоматический метод был окончательно принят школой Гильберта как основополагающий в математике.

Определение числа через сечение, данное Дедекиндом, включено в курсы современного математического анализа.

Непрерывность и теория действительного числа у Дедекинда

В период работы профессором в Цюрихе Дедекинд читал курс математического анализа и, как он сам замечает, ощутил недостаток в обосновании арифметики. Геометрическая интерпретация приближения переменной величины к пределу не могла быть строгой, хотя и удобна в преподавании. Дедекинд поставил себе цель дать чисто арифметическое определение непрерывности, которое будет достаточным основанием анализа бесконечно малых. Как пишет сам Дедекинд: «Это мне удалось 24 ноября 1858 года, и несколько дней спустя я сообщил результаты своих размышлений моему дорогому другу Durège'у[2], что привело к продолжительной и оживленной беседе. Впоследствии я излагал эти мысли о научном обосновании арифметики то одному, то другому из моих учеников, читал об этом предмете доклад в ученом обществе профессоров здесь, в Брауншвейге, но я не мог окончательно решиться на действительное опубликование, потому, во-первых, что изложение представляется нелегким, и потому еще, что самый предмет так мало плодовит. Несколько дней назад, 14 марта [1872 года], в то время как я наполовину стал уже подумывать, чтобы избрать эту тему предметом настоящего юбилейного сочинения[3], ко мне в руки попала, благодаря любезности ее автора, статья E. Heine[4] (Crelle Journal, Bd. 74)[5],

[1] Peano G., *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Torino: Bocca, 1889, 49 p.

[2] Дюреж Генрих (1821–1893), немецкий математик, работал вместе с Дедекиндом в Цюрихе. Автор работ по теории функций комплексной переменной и эллиптическим функциям.

[3] Автор выпустил это сочинение к юбилею своего отца. — *Примечание С. О. Шатуновского.*

[4] Генрих Эдуард Гейне (1821–1881), немецкий математик, коллега Кантора.

[5] В этой статье «Лекции по теории функций» Э. Гейне вводит понятие непрерывности с помощью фундаментальных последовательностей, используя, как он сам признает, некоторые результаты Г. Кантора (в русском переводе: Гейне Э. Г., Лекции по теории функций / пер. и прим.

которая и подкрепила меня в моем решении. По существу, я вполне согласен с содержанием этого сочинения, но должен откровенно сознаться, что мое изложение кажется мне более простым по форме и более точно выдвигающим настоящее ядро вопроса. В то время как я писал это предисловие (20 марта 1872 года), я получил интересную статью «Ueber die Ausdehnung eines Satzes der Theorie der trigonometrischen Reichen» G. Cantor'a (Mathem. Annalen von Clebsch und Neumann, Bd. 5)[1], за которую высказываю искреннюю благодарность остроумному автору. Как мне кажется, при быстром чтении аксиома[2] в § 2 вполне согласуется, независимо от внешней формы изложения, с тем, что я отмечаю ниже в § 3, как сущность непрерывности[3]. Какую же пользу представит выделение, хотя бы только в понятии, вещественных чисел еще более высокого порядка[4], я, согласно с моим пониманием системы вещественных чисел, как совершенной в самой себе, еще признать не в состоянии»[5].

Дедекинд рассматривал свойства равенства, упорядоченности, плотности множества рациональных чисел (числового корпуса, термин, который ввел Дедекинд в дополнениях к изданным им лекциям Дирихле). При этом он старался избегать геометрических представлений. Определив отношения «больше» и «меньше», Дедекинд утверждает их транзитивность; существование между двумя различными числами бесконечного множества других чисел; возможность для любого числа разбиения множества рациональных чисел на два бесконечных класса, таких, что числа одного из них мень-

Г. И. Синкевич // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвузовский тематический сборник трудов: Вып. 18 / под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. Б. Г. Вагера (СПбГАСУ), СПб., 2012, с. 26–46).

[1] В русском переводе: Кантор Г., Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов (*см.*: Кантор Г., Труды по теории множеств. Москва: Наука, 1985, с. 9–17).

[2] «Каждой числовой величине соответствует определенная точка прямой, координата которой равна этой числовой величине и притом равна в том смысле, который объяснен в указанном параграфе, и обратно. В соответствии со сказанным выше я рассматриваю точку прямой как определенную, если ее расстояние от 0, рассматриваемое с определенным знаком, задано как числовая величина, значение, или предел λ-вида». (*Там же*, с. 13–14.)

[3] «Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса, это рассечение прямой на два куска». (*См.*: Дедекинд Р., Непрерывность и иррациональные числа / пер. С. О. Шатуновского. 4-е испр. изд. Одесса: Матезис, 1923, с. 17.)

[4] Дедекинд имеет в виду понятия предельной точки и производного множества, определяемых Кантором в работе 1872 года.

[5] Дедекинд Р., Непрерывность и иррациональные числа / пер. С. О. Шатуновского. 4-е испр. изд. Одесса: Матезис, 1923, с. 10–11.

ше данного, и другого, числа которого больше данного числа; причем само число, производящее это разбиение, может быть отнесено либо к одному, либо к другому классу, и тогда оно будет либо наибольшим для первого, либо наименьшим для второго класса.

После этого Дедекинд рассматривает точки на прямой линии и устанавливает для них те же свойства, что и только что установленные для рациональных чисел, постулируя, что каждому рациональному числу соответствует точка на прямой линии.

Но на прямой есть бесконечно много точек, которые не соответствуют никакому рациональному числу, например, величина диагонали квадрата с единичной стороной. Отсюда следует необходимость арифметическим путем дополнить множество рациональных чисел, чтобы новая (расширенная) область чисел обрела такую же полноту или непрерывность, что и прямая. Ранее понятие иррациональных чисел было связано с измерением протяженных величин, то есть с геометрическими представлениями. Дедекинд стремится ввести новое понятие чисто арифметическими средствами, то есть определить иррациональные числа посредством рациональных чисел:

«Предыдущее сравнение области рациональных чисел с прямой привело к открытию в первой изъянов, неполноты, или разрывности, между тем как прямой мы приписываем полноту, отсутствие пробелов, или непрерывность. В чем же собственно состоит непрерывность? Все и заключается в ответе на этот вопрос, и только в этом ответе мы приобретаем научное основание для исследования *всех* непрерывных областей. Смутными разговорами о непрерывной связи малейших частиц, конечно, многого не достигнешь. Дело в том, чтобы дать точный признак непрерывности, который мог бы служить базисом действительных дедукций. Долгое время я напрасно об этом думал, но, наконец, нашел искомое. Разные лица, вероятно, оценят эту находку различно, но все же я думаю, что большинство найдет ее содержание весьма тривиальным. Оно состоит в следующем: в предыдущих параграфах обращено было внимание на то, что каждая точка p прямой производит разложение прямой на две части таким образом, что каждая точка одной части расположена влево от каждой точки другой. Я усматриваю теперь сущность непрерывности в обратном принципе, т. е. в следующем: «Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса, — это рассечение прямой на два фрагмента. Если система всех действительных чисел распадается на два класса такого рода, что каждое число первого класса меньше каждого числа второго класса, то существует одно и только одно число, производящее это разложение»[1].

Это свойство прямой Дедекинд называет аксиомой, принимая которую, мы придаем прямой непрерывность. Причем Дедекинд утверждает, что это наш мысленный акт, который производится независимо от того, является ли реальное пространство непрерывным или разрывным, это мысленное заполнение новыми точками не влияет на реальное бытие пространства.

Далее Дедекинд переходит к построению иррациональных чисел. Он называет сечением деление множества рациональных чисел любым числом, обращая внимание на то, что либо в одном классе есть наибольшее, либо в другом классе есть наименьшее, и обратно, если сечение обладает этим свойством, то оно производится либо наименьшим, либо наибольшим числом. В то же время существует бесконечно много сечений, которые не могут быть произведены рациональным числом. Дедекинд приводит такой пример: «Пусть D будет положительное целое число, но не квадрат целого числа <...>, $\lambda^2 < D < (\lambda+1)^2$. Если возьмем для второго класса A_2 каждое положительное рациональное число, которого квадрат $> D$, а для первого класса A_1 все остальные рациональные числа, то это подразделение составит сечение (A_1, A_2), то есть каждое число a_1 будет меньше каждого числа a_2... Это сечение не производится, однако, никаким рациональным числом... В том свойстве, что не все сечения производятся рациональными числами, и состоит неполнота, или разрывность, области рациональных чисел.

Получается, что в одном классе нет наибольшего, а в другом классе нет наименьшего числа, производящего это сечение. В таком случае, если сечение не может быть произведено рациональным числом, мы *создаем* новое, *иррациональное* число, которое рассматривается нами как вполне определенное этим сечением (A_1, A_2)... Каждому определенному сечению соответствует одно и только одно рациональное или иррациональное число. Два числа неравны, если они соответствуют различным сечениям. Между ними можно определить отношения “больше” или “меньше”»[2].

Дедекинд рассматривает непрерывность области $\mathfrak{R}$ вещественных чисел: «Область $\mathfrak{R}$ обладает еще и непрерывностью, то есть имеет место следующее предложение: если система $\mathfrak{R}$ всех действительных чисел распадается на два класса a_1 и a_2 такого рода, что каждое число α_1 класса a_1

[1] Дедекинд Р., Непрерывность и иррациональные числа / пер. С. О. Шатуновского. 4-е испр. изд. Одесса: Матезис, 1923, с. 17–18.

[2] *Там же*, с. 19–21.

меньше каждого числа α_2 класса a_2, то существует одно и только одно число α, производящее это разложение»[1].

Он определяет вычисления с вещественными числами. При этом он доказывает теорему о непрерывности арифметических операций: «Если число λ есть результат вычислений, совершенных над числами α, β, γ, ..., и если λ лежит внутри интервала L, то можно указать интервалы A, B, C, ... (внутри которых лежат числа α, β, γ, ...) такого рода, что результат такого же вычисления, в котором, однако, числа α, β, γ, ... заменены числами соответственных интервалов A, B, C, ..., будет всегда представлять число, лежащее внутри интервала L»[2]. Дедекинд сетует на трудность изложения этой теоремы, что облегчается с введением понятий переменных величин, функций и пределов. Заметим, что, несмотря на то, что работа была написана в 1872 году, Дедекинд не пользуется уже разработанным аппаратом математического анализа, созданным Вейерштрассом, в частности, его языком ε-δ. Понятие предела носит у него качественный оттенок. Дедекинд по существу использует только те аспекты непрерывности, которые нужны ему для обоснования понятия числа и арифметических операций над числами средствами теории множеств.

Дедекинд устанавливает связь введенных им понятий с основными положениями анализа бесконечно малых. Определение предела он дает в таком виде: «Говорят, что переменная величина x, пробегающая последовательные определенные численные значения, приближается к постоянному *пределу* α, если она в ходе процесса изменения *окончательно* заключается между каждыми двумя числами, между которыми α само лежит, или, что то же, если разность $x - \alpha$, взятая абсолютно, опускается ниже всякого данного значения, отличного от нуля»[3].

Дедекинд доказывает теорему: «Если величина x возрастает постоянно, но не сверх всяких границ, то она приближается к некоторому пределу»[4].

На этом заканчивается работа Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа».

Одновременно с появлением концепции Дедекинда появились концепции Шарля Мере, Карла Вейерштрасса и Георга Кантора. Статья Гейне «Лекции по теории функций» 1872 года содержала определение числа, данное Кантором, в 1869 году во Франции вышла работа Шарля Мере с таким же построением[1], но соотечественниками она осталась неоцененной, а в Германии — неизвестной из-за франко-прусской войны. Теперь французы говорят «определение действительного числа Мере – Кантора – Гейне». Правда, Мере, определив иррациональные числа как пределы последовательностей рациональных чисел, на этом останавливается[2]. Гейне и Кантор идут дальше, образуя новые последовательности из иррациональных чисел (иерархию предельных точек).

[1] *Там же*, с. 25.
[2] *Там же*, с. 28.
[3] *Там же*, с. 29.
[4] *Там же*, с. 29.

Кантор о сравнении различных способов введения понятия числа и непрерывности

28 апреля 1872 года, получив работу Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа», Кантор писал ему: «Искренне благодарю Вас за Вашу работу о непрерывности и иррациональных числах. Как я теперь смог убедиться, точка зрения, к которой я пришел несколько лет тому назад, отправляясь от занятий арифметикой, фактически совпадает с Вашими взглядами; имеется различие лишь в способе введения числовых величин. Я вполне убежден, что Вы правильно выявили сущность непрерывности»[3].

Правда, в их последующей переписке содержится полемика о способе определения непрерывности, и в 1882 году Кантор пишет Дедекинду: «Я пытался обобщить Ваше понятие сечения и воспользоваться им для определения понятия континуума, но мне это не удалось. Напротив, мой исходный пункт — счетные «фундаментальные последовательности» (под ними я понимаю последовательности, элементы которых неограниченно сближаются друг с другом) — кажутся годящимися для этой попытки»[4].

К 1878 году Кантор переходит от анализа точечных областей к понятию мощности, формулирует гипотезу континуума, рассматривает непрерывные отображения между множествами различной размерности. Тем острее он ощущает недостаточность определения непрерывности через сечение.

[1] Méray Ch., Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données, *Revue des Sociétés savantes, Sci. Math. phys. nat.*, 1869, (2) 4, pp. 280–289.
[2] Синкевич Г. И., Развитие понятия непрерывности у Шарля Мере // Труды X Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. Ярославль: ЯГПУ, 2012, с. 180–185.
[3] Кантор Г., Труды по теории множеств. Москва: Наука, 1985, с. 327.
[4] *Там же*, с. 356.

В 1883 году Кантор сравнил различные формы введения числа в цикле работ «Основы общего учения о многообразиях. Математически-философский опыт учения о бесконечном»[1]: «Я хотел бы вкратце и построже сказать о трех известных мне и в существенном однородных главных формах строго арифметического изложения учения об общих действительных числах. Это *прежде всего* способ введения, которым в течение ряда лет пользовался в своих лекциях об аналитических функциях профессор Вейерштрасс и некоторые намеки на которые можно найти в программной работе г-на Э. Коссака (Die Elemente der Arithmetik. Berlin 1872). *Во-вторых*, г-н Р. Дедекинд в своем сочинении «Stetigkeit und irrationale Zahlen» (Braunschweig, 1872) опубликовал своеобразную форму определения. *В-третьих*, в 1871 году я предложил (Math. Ann. 1872, Bd. 5, S. 123) форму определения, внешне имеющую сходство с вейерштрассовской...»[2].

«В форме определения г-на Дедекинда в основу кладется *совокупность всех* рациональных чисел, но разделенных на две группы таким образом, что если мы обозначим числа первой группы U_ν, а числа второй группы через B_μ, то всегда $U_\nu < B_\mu$. Подобное деление множества рациональных чисел г-н Дедекинд называет его «сечением», обозначает через $(U_\nu \mid B_\mu)$ и сопоставляет ему число b. Если сравнить два подобных сечения $(U_\nu \mid B_\mu)$ и $(U'_\nu \mid B'_\mu)$ друг с другом, то, как и при *первой* форме определения, оказывается всего *три* возможности, соответственно которым представленные обоими сечениями числа b и b' или приравниваются друг к другу, или принимается, что $b > b'$, или $b < b'$. Первый случай имеет место, — если отвлечься от некоторых, легко регулируемых исключений, возникающих при рациональности определяемых чисел, — лишь при полном тождестве обоих сечений. В этом наблюдается решительное и безусловное преимущество данной формы определения по сравнению с обеими другими, а именно то, что каждому числу b соответствует лишь *единственное* сечение. Но она сопровождается и тем крупным недостатком, что числа в анализе *никогда* не представляются в форме «сечений», в которую их приходится лишь вписывать весьма искусственным и сложным образом»[3].

В XX веке исследования А. Н. Колмогорова показали, что все эти концепции эквивалентны.[4]

[1]Кантор Г., Труды по теории множеств. Москва: Наука, 1985, с. 81–87.

[2]*Там же*, с. 81.

[3]*Там же*, с. 84–85.

[4]Колмогоров А. Н., К обоснованию теории вещественных чисел // УМН, 1946, №1, с. 217–219. Тихомиров В. М., Аксиоматический метод и теория действительных чисел в лекциях А. Н. Колмогорова // Математика в высшем образовании, 2014, №12, с. 149–154.

Н. Н. Парфентьев, переводчик книги Дедекинда

Книга Дедекинда «Что такое числа и для чего они служат?» была издана в Брауншвейге в 1888 году, второе издание вышло там же в 1893 году. На русском языке она была издана в 1905 году в Казани. Переводчиком книги на русский язык был Николай Николаевич Парфентьев (1877–1943), выпускник Казанского университета, с 1904 года приват-доцент этого университета.

В 1905 году он был уволен из университета за участие в студенческих волнениях, в том же году восстановлен. В 1908 году был направлен на два с половиной года за границу (Геттинген, Мюнхен и Бордо) для подготовки к профессорскому званию. Диссертацию «Исследования по теории роста функций» Парфентьев защитил в 1911 году. Список литературы к его диссертации содержит 219 названий. Руководителем Парфентьева был А. В. Васильев, профессор и председатель Совета физико-математического общества при Казанском университете. Васильев известен как математик, историк математики и общественный деятель[1], благодаря которому в России были изданы в русском переводе многие труды зарубежных математиков, в том числе Г. Кантора.

Будучи студентом, Парфентьев перевел фрагменты «Элементарной геометрии» Ф. Клейна, а став преподавателем, вел студенческий кружок, в котором студенты переводили работы Пуанкаре, Гельмгольца, Кронекера, Ганкеля под руководством и редактированием Парфентьева. В 1912 году Парфентьев получил медаль «Памяти Н. И. Лобачевского» за отзыв о работе Л. Шлезингера.[2] С 1930 года заведовал кафедрой механики, читал курсы теории упругости и гидромеханики, тензорный анализ, теорию относительности, интегральные уравнения, геометрию Лобачевского, математическую статистику, технику научных вычислений, создал новую лабораторию оптических методов. Скончался в Казани в 1943 году от сердечной болезни.

В XIX – начале XX века для приготовления к профессорскому званию выпускников университетов отправляли на два года за границу. Многие из них, слушая лекции европейских математиков и изучая литературу в библиотеках, в свои научные работы включали подробный обзор по ис-

[1]Бажанов В. А., Александр Васильевич Васильев, 1853–1929: ученый, организатор науки, общественный деятель. Казань: изд. Казанского ун-та, 2002.

[2]Премия имени Н. И. Лобачевского Казанского физико-математического общества присуждалась с 1897 года за выдающиеся работы в области геометрии, а за критический анализ работы номинанта рецензенту вручали памятную медаль.

тории и современному состоянию вопроса, привозили, переводили и издавали наиболее значительные научные книги и статьи. Назовем С. О. Шатуновского (первые публикации переводов Кантора и Дедекинда на русском языке в 1894–1896 годах), И. Ю. Тимченко (обзор теории функций, 1892 г.), В. Л. Некрасова (подробнейший обзор состояния теории множеств, 1908 г.), А. В. Васильева (серия книг «Новые идеи в математике», 1913–1915 гг.).

О работе Дедекинда «Что такое числа и для чего они служат?»

Дедекинд выбрал для работы «Что такое числа и для чего они служат?» эпиграф Ἀεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει — «Человек всегда считает»[1]. Книга посвящена сестре Юлии и брату Адольфу.

В 1888 году символика теории множеств еще не сформировалась, и Дедекинд для обозначения отношения «принадлежит, является частью» использует символ 3, этот же символ использован и в русском издании 1905 года. В данном издании этот символ заменен на $\in$.

Он излагает теорию множеств (систем) как теоретическую основу арифметики. Дедекинд формулирует определение бесконечного множества без использования отрицания: система называется бесконечной, если она подобна какой-либо правильной своей части; в противном случае система называется конечной (определение 64). Бернард Больцано сформулировал это как свойство бесконечного множества в работе «Парадоксы бесконечного», изданной в 1851 году[2]. Дедекинд указывал на происхождение идеи определения из «Парадоксов бесконечного» Больцано. Действительно, в этом сочинении Больцано пишет: «Два бесконечных многообразия могут быть в таком отношении к другому, что с одной стороны возможно соединить каждую вещь одного многообразия с некоторой вещью другого в пару таким образом, что не останется в обоих многообразиях ни одной вещи, соединенной в пару, и ни одна вещь не будет входить в две или несколько пар. С другой стороны, возможно при этом, что одно из этих многообразий заключает в себе другое просто как часть, так что множества, которые они представляют, если мы рассматриваем составляющие их вещи как равные, то есть как единицы, имеют между собой самые разнообразные отношения»[1]. Заметим, что Больцано предвосхитил все появившиеся во второй половине XIX века концепции действительного числа: в 1817 году в работе «Аналитическое доказательство. . . » Больцано вводит понятие точной верхней границы, на основе которой построена концепция Вейерштрасса; в этой же работе он вводит критерий сходящейся последовательности, который использовал в 1821 году Коши и на основе которого построены концепции Мере 1869 года и Кантора – Гейне 1872 года. В 1830-е годы Больцано начал создавать теорию действительного числа, используя понятие сечения, на которой строил свою концепцию Дедекинд. Рукопись Больцано «Grössenlehre» была издана только в 1930-е годы.

[1] Благодарю Л. Я. Жмудя за консультацию и перевод с греческого.

[2] В русском переводе: Больцано Б., Парадоксы бесконечного / пер. под ред. И. В. Слешинского. Одесса: Матезис, 1911, 119 с.

Теория Дедекинда, как и теория Кантора, принадлежит к периоду «наивной» теории множеств, когда еще не было строгой аксиоматики, позже созданной Цермело и Френкелем, а терминология еще не сформировалась.

Под «вещью» Дедекинд понимает элемент множества, рассматривая принадлежность вещей к одному множеству через их связанность в нашем сознании. Эта связь создает новый объект в сознании. Последовательность возникновений новых смыслов образует лестницу смыслов[2], согласованную с предшествующим построением математики, образующую новые понятия, новое представление о непрерывности числовой области. Понятие числа независимо от представлений о физическом и геометрическом пространстве, оно является продуктом нашей мысли. Дедекинд противопоставляет свою концепцию числа равносильным и строгим концепциям Вейерштрасса и Кантора, а также полемизирует с О. Штольцем[3], Ж. Таннери и Л. Кронекером, заявившим: «Бог создал целые числа, все остальное — дело рук человека». Дедекинд вводит числа только в § 6.

Теорема 66 Дедекинда — «Существуют бесконечные системы» — самая необычная во всей работе. Она настолько отличается от строгого обоснованного изложения Дедекинда и выходит за пределы математической терминологии в область онтологии, что кажется инородной. Тем не менее, она является центральной идеей всего изложения. Это аллюзия к восхождению по лестнице смыслов, упомянутой выше. Дедекинд апеллирует к «Парадоксам бесконечного» Больцано. Больцано в § 13 утверждает, что понятие «бес-

[1] Больцано Б., Парадоксы бесконечного / пер. под ред. И. В. Слешинского. Одесса: Матезис, 1911, с. 30.

[2] Кантор использовал иерархию предельных точек.

[3] В своей работе Штольц делает попытку ввести актуально бесконечно малые. См. Stolz O. B., *Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung*, Math. Ann., 1881, Bd. 18, s. 255–279.

конечный» обладает предметностью: «Многообразие предложений и истин самих в себе бесконечно»[1]. Дедекинд говорит: «Наш мир представлений, то есть совокупность S всех тех вещей, которые могут быть объектами нашей мысли, — бесконечен».

В настоящем издании за небольшими исключениями сохранен язык русского издания 1905 года.

Приношу искреннюю благодарность Г. М. Полотовскому за помощь в подготовке текста.

Г. И. Синкевич,
СПбГАСУ
galina.sinkevich@gmail.com

[1] *Там же*, с. 17.

Предисловие

Все доказуемое не должно быть принимаемо в науке на веру без доказательства. Хотя это требование и кажется очевидным, все же при обосновании даже простейшей науки, именно той части логики, которая занимается числами, по самым новейшим теориям[1] оно ничуть не может считаться строго выполненным. Я называю здесь Арифметику (Алгебру, Анализ) только частью логики; этими словами я хочу сказать, что понятие о числе я считаю совершенно независимым от представлений и воззрений на пространство и время: для меня оно чистый продукт законов нашей мысли. Мой ответ на поставленный этой книгой вопрос в самом общем смысле формулируется так: числа суть свободные создания человеческого духа, и они служат средством, дающим нам легче и яснее постигать различие вещей. Строя науку о числах чисто логически и создавая в ней непрерывную числовую область, мы в состоянии точно исследовать наши представления о пространстве и времени, приводя последние в связь с созданной в нашем духе числовой областью[2]. Если мы точно проследим за тем, чтó мы делаем при счете множества или численности вещей, то мы придем к рассмотрению особой способности нашего духа — относить одну вещь к другой, создавать соответствие между двумя какими-либо вещами или же отображать одну вещь помощью другой; без этой способности, вообще говоря, никакая мысль — невозможна.

На этом единственном, но по моему мнению, безусловно необходимом фундаменте должна быть воздвигаема вся наука о числах, как я уже об этом однажды сказал, упоминая о настоящей работе еще до ее появления[3]. План

[1] Из известных мне работ я упомяну здесь о заслуживающем полного внимания учебнике Арифметики и Алгебры Schröder'a (Leipzig, 1873), в котором мы найдем также указатель литературы, а затем о мемуарах Кронекера и Гельмгольца, посвященных понятию о числе, счету и измерению (Sammlung der an Zeller gerichteten philosophischen Aufsätze, Leipzig, 1887). Появление этих работ побудило и меня выступить со своими собственными, в некоторому отношении похожими, но по основным принципам существенно отличными теориями, которые у меня создались вот уже много лет и без влияния кого-либо со стороны.

[2] Сравни § 3 моей работы «Непрерывность и иррациональные числа», 1872.

[3] Dirichlet's Vorlesungen ueber Zahlentheorie, 3-te Aúflage, 1879, § 163, Anmerkung aúf § 480.

такого изложения создался у меня еще до издания моей работы о непрерывности, но впервые лишь после появления последней, да и то с большими перерывами, происходящими в силу усиленных занятий по должности и вследствие других необходимых работ, я в промежуток времени от 1872 по 1878 год на немногих листах дал свой первый абрис, который тогда же просмотрели несколько математиков и отчасти оспаривали. Он носит такое же заглавие и содержит, если и не приведенные в образцовый порядок, однако все существенные основные мысли моей настоящей работы, которая дает только их детальное развитие; из таких общих пунктов моей работы я упомяну здесь о ясном отличии конечного от бесконечного (64), о понятии «о численности» вещей (161) и о доказательстве, что известное под именем полной индукции (или заключения от n к $n+1$) доказательство действительно обладает силой доказательств (59, 60, 80), и что также определение помощью индукции — вполне определенно и лишено противоречий (126).

Эту работу в состоянии понять всякий, кто обладает, как говорят, здравым человеческим смыслом; философские или математические школьные сведения необходимы для этой цели в весьма ничтожном количестве.

Но я очень хорошо знаю, что иной едва ли признает за свои те числа, которые сопровождали его всю жизнь, как верные и заслуживающие доверия друзья, в том замаскированном виде, какой я им придам; он будет испуган длинным рядом простых заключений, отвечающих свойству нашего рассудка — лестницы, тщательным расчленением ряда мыслей, на которых покоятся законы чисел, и у него не хватит терпения следить за доказательством тех истин, которые ему кажутся ясными и верными в силу его ложного внутреннего ясновидения. Я, напротив, в возможности сводить такие истины к другим, более простым (рядом заключений иногда длинных и по-видимому искусственных), вижу неоспоримое доказательство того, что обладание ими и вера в них никогда не дается нам непосредственно — помощью внутреннего ясновидения, но всегда приобретается только путем более или менее полного повторения отдельных заключений. Я мог бы эти последние в силу быстроты их следования друг за другом грубо сравнить с той мыслительной деятельностью, которую производит искусный чтец при чтении: ведь чтение всегда является повторением, более или менее полным, тех отдельных процессов, которые начинающему стоило большого труда одолевать при чтении по складам. Напротив, очень малая часть последних — и поэтому очень малая работа или напряжение духа — замечается у искусного чтеца для того, чтобы правильно угадать

настоящее, истинное какое-либо слово, — конечно, все же лишь с очень большой вероятностью; известно ведь, что самому искусному корректору иногда случается пропускать печатные ошибки в словах, т. е. читать фальшиво, но последнее было бы невозможно, если бы при чтении по слогам надлежащая цепь мыслей воспроизводилась полностью.

Точно также и мы с самого рождения бываем вынуждены беспрестанно, и все в усиливающейся степени, относить одну вещь к другой, и благодаря этому развиваем в себе ту способность нашего духа, на которой основано создание чисел; поэтому уже в самые первые годы нашей жизни, благодаря такому беспрестанному, хотя и бессознательному, упражнению и связанному с ним образованию суждений и — целого ряда заключений, — мы приобретаем ценную группу собственно арифметических истин, на которых позже наши первые учителя основываются, как на чем-то простом, само собой понятном, заложенном в нашем самосознании, и тут случается, что некоторые в сущности очень сложные понятия, как например численность вещей, ошибочно считаются за простые. В этом смысле (который я, копируя известное изречение, выражаю словами ἀεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει), последующие страницы, как попытка воздвигнуть науку о числах на единственном основании, могут рассчитывать на благосклонный прием, а также и других математиков могут побудить к тому, чтобы длинный ряд заключений был выполнен в более удобном и менее громоздком виде.

Сообразно цели настоящей работы я ограничиваюсь только рассмотрением ряда так называемых натуральных чисел. Каким образом устанавливается дальнейшее обобщение понятия о числе, создание нуля, отрицательных, дробных, иррациональных и комплексных чисел, путем сведения их всегда к более первичным простым понятиям, и притом без всякой примеси чуждых представлений (как например представления об измеряемой величине), а основные понятия могут быть по моему мнению с полной ясностью выделены сразу наукой о числах, все это я показал по крайней мере на примере иррациональных чисел в своей первой работе о непрерывности (1872 г.); совершенно подобным же образом, как это я уже высказывал там же (§ 3), можно трактовать и другие обобщения без трудности, и я позволю себе посвятить этому предмету связное изложение. При такой точке зрения оказывается самоочевидным и вовсе не новым то обстоятельство, что всякая, хотя бы и очень отдаленная, теорема алгебры или высшего анализа может быть сформулирована как теорема о натуральных числах; это — утверждение, которое я не раз слышал из уст Дирихле. Я ничуть, конечно, не вижу чего-либо похвального в стремлении на самом деле постоянно предпринимать такое утомительное изложение, не пользуясь и не имея в виду никаких других чисел кроме натуральных, да и Дирихле был далек от этого. Напротив, величайшие и самые плодотворные успехи и в математике, и в других науках часто обязаны созданию и введению новых понятий в тот момент, когда к этому вынуждает частое обращение к сложным явлениям, которые поддаются объяснению при помощи первичных понятий в очень сложной форме. По этому вопросу я летом в 1854 году в Геттингене при занятии мной должности приват-доцента перед философским факультетом произнес речь, замысел которой был одобрен Гауссом; но здесь не место входить в большие подробности относительно всего этого.

Вместо детального изложения я ограничусь лишь несколькими замечаниями, относящимися к моей прежней, уже вышеупомянутой работе о непрерывности и иррациональных числах. В ней изложена задуманная еще осенью 1858 года теория иррациональных чисел, основанная на том в область рациональных чисел входящем понятии (§ 4), которое я назвал сечением и впервые строго исследовал: оно служить корнем доказательства непрерывности новой области действительных чисел (§ 5, IV). Она кажется мне проще, я могу это сказать спокойно, чем теории о том же отличные друг от друга, Вейерштрасса и Г. Кантора, обладающие равным образом совершенной строгостью. Позже без существенных изменений она была принята Dini в его Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali (Pisa, 1878); но то обстоятельство, что мое имя на протяжении всей книги упоминается вовсе не при объяснении чисто арифметического понятия «сечения», а лишь случайно упомянуто в том месте, где дело идет о существовании некоторой соответствующей сечению измеряемой величины, легко могло бы дать повод к подозрению, что моя теория основана на рассмотрении таких величин. Нет ничего неправдоподобнее такого мнения: в значительной степени я уже в § 3 своей работы привел различные основания, почему я отбрасываю совершенно вмешательство соизмеряемых величин, и именно в заключение по поводу их существования я заметил, что для значительной части науки о пространстве непрерывность ее образов очень часто является необходимым предположением, и все же, несмотря на это, она в работах по геометрии упоминается правда, но лишь по имени вскользь, и никогда не объясняется отчетливо, т. е. не делается доступной доказательству. Для того, чтобы объяснить все это ясней, я укажу, например, на следующее. Если мы возьмем три, не лежащие на одной прямой произвольные точки A, B и C с тем лишь ограничением, что отношения их расстояний AB, AC

и BC суть алгебраические[1] числа, и если мы допустим еще существование в пространстве таких точек M, для которых отношения AM, BM и CM к AB суть также алебраические числа, то состоящее из таких точек пространство, как легко видеть, повсюду прерывно; но все же несмотря на прерывность, на пустоты такого пространства в нем, насколько я вижу, выполнимы все построения, встречающиеся в Элементах Евклида, и столь же точно, как и в совершенно непрерывном пространстве; прерывность следовательно такого пространства в Евклидовской науке не была бы замечена, не была бы вовсе почувствована. Поэтому если кто-нибудь скажет мне, что мы в состоянии мыслить пространство не иначе, как только непрерывное, то я усомнился бы в этом — и обратил бы его внимание на то, насколько более глубокое и тонкое научное образование необходимо для отчетливого познания и понимания сущности непрерывности: ведь кроме рациональных, также иррациональных и алгебраических отношений мыслимы еще и трансцендентные. И мне особенно приятно сознавать, что человек без всякого представления о соизмеримых величинах путем лишь конечной системы простых умозаключений может подняться до создания отвлеченной непрерывной числовой области; а после уже с этим вспомогательным средством ему, по моему мнению, будет возможно создать отчетливое представление и о непрерывном пространстве.

Такую же теорию иррациональных чисел, основанную на понятии сечения, мы находим у Tannery в его «Introduction à la théorie des fonctions d’une variable» (Paris, 1886). Если я понимаю правильно одно место из предисловия к этой книге, автор создал такую теорию самостоятельно в то время, когда ему не были известны ни моя работа, ни упомянутая в том же предисловии к Fondamenti, Dini; такое совпадение является для меня радостным доказательством того, что мое собственное понимание природы вопроса вполне гармонирует с тем, что исповедуется также и другими математиками, например г. М. Пашем в его введении к дифференциальному и интегральному исчислениям (Leipzig, 1883). Но я никак не могу согласиться с Таннери дальше, когда он называет эту теорию развитием одной мысли, обязанной своим происхождением Ж. Бертрану, сформулированной в его «Traité d’arithmétique» и заключающейся в следующем: определить иррациональное число — это значит задать ряд всех рациональных чисел меньших определяемого числа и всех рациональных чисел бóльших его. По поводу такой формулировки, которая потом была повторена г. О. Штоль-

[1] Dirichlet’s Vorlesungen ueber Zahlentheorie, § 159 der zweiten, § 160 der dritten Auflage.

цем в предисловии к его второму изданию «Vorlesungen ueber allgemeine Arithmetik» (Leipzig, 1886), как это кажется без глубокого исследования, я позволю себе заметить следующее. Убеждение, что иррациональное число действительно можно рассматривать вполне определенным только что описанным заданием чисел, было без всякого сомнения и до Бертрана всегда общей собственностью для всех математиков, занимавшихся понятием об иррациональном числе; ведь каждый вычислитель, вычисляющий приближенно иррациональный корень уравнения, обладает, конечно, таким способом их определения; и если мы, как это выразительно делает Бертран в своей книге (предо мной лежит 8-е издание, 1885), будем понимать иррациональное число как отношение измеряемых величин, то такой способ их определения был уже формулирован весьма отчетливо в знаменитом определении, установленном Евклидом для равенства отношений (Элементы, V.5). Это древнее убеждение, конечно, послужило источником как моей теории, так и теории Бертрана и некоторых других, более или менее законченных попыток обосновать введение иррациональных чисел в арифметику. Но если мы попробуем вполне соглашаться и дальше с г. Таннери, то при более серьезном размышлении мы тотчас же должны заметить, что изложение Бертрана, в котором понятие о сечении в его логической ясности вовсе отсутствует, никакого подобия с моим не имеет, особенно там, где он пользуется, как средством, существованием соизмеримых величин, что́ я по выше изложенным основаниям совершенно отбрасываю. Но, несмотря даже на это обстоятельство, мне кажется, что изложение его заключает в определениях и доказательствах, основанных в последующем на принятии существования таких величин, еще некоторые столь существенные пробелы; так что я считаю свое утверждение, выраженное еще в моей прежней работе (§ 6), о том, что теорема $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ еще нигде строго не доказана, а также и вообще свое суждение об этом, в некоторых других отношениях прекрасном труде, которого я тогда еще не знал, — за правильное.

5.X.1887 Р. Дедекинд

§ 1
Система элементов

1. Условимся на будущее время понимать под *вещью* всякий объект нашего сознания. Для того, чтобы было удобней вести речь о «вещах», мы будем означать их какими-либо знаками, например буквами, и будем просто говорить о вещи a или об a, разумея под a в действительности, конечно, означаемый буквой a объект, но не самую букву. Вещь бывает вполне определена всем тем, что о ней может быть сказано или может быть мыслимо. Вещь a есть та же самая, что b — тождественна с b, и b тождественно с a, если *все* то, что мыслимо об a, мыслимо равным образом об b. То обстоятельство, что a и b суть только знаки или символы для означения одной и той же вещи, будем символически означать так: $a = b$ или $b = a$. Если кроме того $b = c$, т. е. если c так же, как и a, есть символ для вещи, означаемой знаком b, то $a = c$. Если же только что указанного сходства объектов, означаемых символами a и b, не существует, то a и b называются различными: a есть объект отличный от b, а b — отличен от a; в этом случае существует какое-либо свойство в одном объекте, такое, какое в другом отсутствует.

2. Очень часто случается, что какие-либо различные вещи $a, b, c, \ldots$, из каких-либо соображений рассматриваемые с некоторой общей точки зрения, сразу бывают мыслимы в нашем сознании; мы скажем в этом случае, что вещи $a, b, c, \ldots$ образуют *систему* S, и каждую из них будем называть *элементом* — они все содержатся в S, и обратно S состоит из них.

Такая система S (или их совокупность, многообразие, собрание), как объект нашего сознания, точно также является вещью (1); она будет вполне определенной, если о каждой вещи будет известно, является ли она элементом S или нет[1]. Системы S и T будут тождественны одна с другой —

[1]Вопрос — каким образом и какими методами достигается эта определенность — для последующего является совершенно безразличным: подлежащие здесь развитию законы от этого вовсе не зависят и будут иметь место при всяких обстоятельствах. Упоминаю об этом потому,

символически это означим $S = T$, — если каждый элемент системы S принадлежит и системе T, и наоборот каждый элемент системы T есть в то же время элемент S. Ради большего единообразия является выгодным для дoпоследующего допустить и тот исключительный случай, когда система S состоит из одного только элемента a, т. е. a принадлежит S, а каждый отличный от a элемент ей не принадлежит. Системы же, лишенные элементов, мы по некоторым причинам выключаем из рассмотрения, хотя для других исследований может быть очень удобным считаться с ними.

3. Определение. Система A называется **частью** системы S, если каждый элемент системы A есть в то же время элемент системы S. Так как подобное соотношение между системами A и S нам будет очень часто встречаться, то мы символически будем означать его так: $A \in S$. Обратный символ $S \ni A$, коим может быть означено то же соотношение, мы ради ясности и простоты будем совершенно избегать, но по недостатку подходящего слова будем говорить, что S — *целое* относительно A, что означает: среди элементов S находятся все элементы системы A. Так как каждый элемент s системы S согласно (2) может быть понимаем как система, то мы можем также пользоваться таким означением: $s \in S$.

4. Теорема. В силу (3) очевидно $A \in A$.

5. Теорема. Если $A \in B$, а $B \in A$, то $A = B$.
Доказательство вытекает непосредственно из (3) и (2).

6. Определение. Система A называется *правильной* частью системы S, если A есть часть S, но отлична от S.
Согласно (5) S не есть тогда часть A, т. е. согласно (3) в S есть такие элементы, которых нет в A.

7. Теорема. Если $A \in B$, а $B \in C$, что короче можно записать — $A \in B \in C$, то $A \in C$, и притом A наверное будет правильной частью C, если A есть правильная часть B, или если B есть правильная часть C.
Доказательство следует из 3 и 6.

8. Определение. Под системой *составной* из каких-либо систем A, B, C, …, которую мы будем означать символом $\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$, будем понимать систему, элементы которой определены следующим условием: вещь только тогда принадлежит системе $\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$ как элемент, когда она является элементом какой-либо из систем — или A, или B, или C, … Допускаешь также и тот случай, когда мы имеем дело с единственной системой A, тогда очевидно $\mathfrak{M}(A) = A$. Заметишь, что система $\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$, составленная из A, B, C, …, не должна быть смешиваема с системой, элементы коей суть сами системы A, B, C, …

что недавно проф. Кронекер (в 99-м томе Journal für Mathematik, с. 334–336) пытался положить на свободное созидание понятий в математике некоторые ограничения, которые я не считаю законными; но входить в подробности по этому вопросу будет уместно тогда, когда выдающийся математик представит мотивы для необходимости или для целесообразности подобных ограничений.

9. Теорема. Каждая из систем A, B, C, … суть части системы

$$\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots).$$

Доказательство следует непосредственно из 8 и 3.

10. Теорема. Если A, B, C суть каждая части системы S, то $\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots) \in S$.
Доказательство вытекает из 8 и 3.

11. Теорема. Если P есть часть какой-либо из систем A, B, C, …, то $P \in \mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$.
Доказательство следует из 9 и 7.

12. Теорема. Если каждая из систем P, Q, … суть части какой-либо из систем A, B, C, …, то

$$\mathfrak{M}(P, Q, \ldots) \in \mathfrak{M}(A, B, C, \ldots).$$

Доказательство вытекает из 11 и 10.

13. Теорема. Если A составлена из каких-либо систем P, Q, …, то $A \in \mathfrak{M}(P, Q, \ldots)$.

Доказательство. Каждый элемент A согласно 8 есть в то же время элемент какой-либо из систем P, Q, …, следовательно, согласно 8, этот элемент будет также принадлежать и системе $\mathfrak{M}(P, Q, \ldots)$, откуда при помощи 3 следует доказываемая теорема.

14. Теорема. Если каждая из систем A, B, C, … составлена из каких-либо систем P, Q, …, то

$$\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots) \in \mathfrak{M}(P, Q, \ldots).$$

Доказательство следует из 13 и 10.

15. Теорема. Если каждая из систем P, Q, ... есть часть какой-либо из систем A, B, C, ..., и если в свою очередь каждая из последних составлена из каких-либо первых, то

$$\mathfrak{M}(P,\, Q,\, \ldots) = \mathfrak{M}(A,\, B,\, C,\, \ldots).$$

Доказательство следует из 12, 14 и 5.

16. Теорема. Если $A = \mathfrak{M}(P,\, Q)$, а $B = \mathfrak{M}(Q,\, R)$, то

$$\mathfrak{M}(A,\, R) = \mathfrak{M}(P,\, B).$$

Доказательство. В силу предыдущей теоремы 15, как $\mathfrak{M}(A,\, R)$, так и $\mathfrak{M}(P,\, B)$, каждая равны $\mathfrak{M}(P,\, Q,\, R)$.

17. Определение. Вещь g называется *общим* элементом для систем A, B, C, ..., если она принадлежит каждой из систем, т. е. и A, и B, и C, ...

Аналогично система T называется *общим делителем* систем A, B, C, ..., если T является частью для каждой из систем A, B, C, ...; под *общим* наибольшим делителем T систем A, B, C, ... мы понимаем вполне определенную систему $\mathfrak{G}(A,\, B,\, C,\, \ldots)$, которая состоит из *всех* элементов g, являющихся общими для каждой из систем A, B, C, ..., и которая, следовательно, служит общей частью тех же систем. Здесь мы снова допускаем тот случай, когда у нас имеется одна только система A; в этом случае очевидно $\mathfrak{G}(A) = A$. Может случиться, что системы A, B, C, ... не имеют ни одного общего элемента, тогда они не обладают никакой общей частью, а следовательно, не обладают и общим делителем; они называются в этом случае *взаимно простыми*, и символ $\mathfrak{G}(A,\, B,\, C,\, \ldots)$ не имеет здесь смысла (сравни конец 2). Мы почти всегда будем предоставлять читателю при встречах с теоремами об общих наибольших делителях придумывать условия их существования, а равным образом находить надлежащее толкование этих теорем в случае отсутствия общего делителя.

18. Теорема. Всякая общая часть A, B, C, ... есть общая часть и $\mathfrak{G}(A,\, B,\, C,\, \ldots)$.

Доказательство следует из 17.

19. Теорема. Всякая часть $\mathfrak{G}(A,\, B,\, C,\, \ldots)$ есть общая часть каждой из систем A, B, C, ...

Доказательство следует из 17 и 7.

20. Теорема. Если каждая из систем A, B, C, ... является *целым* (3) относительно какой-либо из систем P, Q, ..., то $\mathfrak{G}(P,\, Q,\, \ldots) \in \mathfrak{G}(A,\, B,\, C,\, \ldots)$.

Доказательство. Дело в том, что каждый элемент системы $\mathfrak{G}(P,\, Q,\, \ldots)$ является общим элементом P, Q, ..., т. е. также общим элементом A, B, C, ..., что и нужно было доказать.

§ 2

Отображение системы

21. Определение[1]**.** Под *отображением* φ какой-либо системы S будем понимать тот закон, согласно которому каждому определенному элементу s системы S принадлежит некоторая вполне определенная вещь, которая называется *изображением* s и означается символом $\varphi(s)$; можно то же обстоятельство выражать словами: $\varphi(s)$ *соответствует* элементу s, или $\varphi(s)$ получается из s путем *отображения* φ, или s переходит в $\varphi(s)$ путем отображения φ.

Если теперь T есть какая-либо часть S, то конечно в отображении φ системы S должно содержаться и отображение T, которое ради простоты означим тем же символом φ, и смысл этого символа заключается в том, что каждому элементу t системы T (и в тоже время системы S) соответствует некоторое изображение $\varphi(t)$; ясно тогда, что система, состоящая из всех изображений $\varphi(t)$, будет изображением системы T и может быть означена символом $\varphi(T)$; смысл символа $\varphi(S)$ — очевиден. Как на пример отображения системы можно указать, например, на приписывание элементам системы определенных знаков или имен. Простейшим случаем отображения системы является тот, при котором каждый из ее элементов переходит в отображении в самого себя; такое отображение называется *тождественным*. Ради удобства мы в последующих теоремах 22, 23 и 24, относящихся к производимому отображению φ какой-либо системы S, будем означать изображения элементов s и ее частей T соответственно через s' и T'. Кроме того установим раз и навсегда, что малые и большие буквы латинского алфавита без значков означают соответственно элементы и части нашей системы S.

22. Теорема[2]**.** Если $A \in B$, то $A' \in B'$.

Доказательство. Дело в том, что каждый элемент в A' является изображением некоторого элемента в A, следовательно некоторого элемента в B, а отсюда, конечно, и в B'.

[1] Сравни Dirichlet's, Vorlesungen über Zahlentheorie, 3-te Auflage, 1879, § 163.
[2] Сравни теорему 27.

23. Теорема. Изображение системы $\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$ есть $\mathfrak{M}(A', B', C', \ldots)$.

Доказательство. Если мы означим систему

$$\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$$

(которая в силу 10 является частью системы S), через M, то каждый элемент m' ее изображения M' соответствует некоторому элементу m системы M; так как m, в силу 8, является элементом какой-либо из систем A, B, C, $\ldots$, то m' будет элементом какой-либо из систем A', B', C', $\ldots$, т. е., в силу 8, и m' будет элементом $\mathfrak{M}(A', B', C', \ldots)$; таким образом, в силу 3,

$$M' \in \mathfrak{M}(A', B', C', \ldots).$$

С другой стороны, так как A, B, C, $\ldots$ в силу 9 суть части системы M, то A', B', C', $\ldots$, согласно 22, суть части M', т. е. согласно 10 система $\mathfrak{M}(A', B', C', \ldots) \in M'$. Из сопоставления этой записи с выше сделанной, в силу 5, вытекает доказываемая теорема, т. е.

$$M' = \mathfrak{M}(A', B', C', \ldots).$$

24. Теорема[1]. Изображение любого общего делителя систем A, B, C, $\ldots$, а следовательно, и изображение их наибольшего общего делителя $\mathfrak{G}(A, B, C, \ldots)$ суть делители системы $\mathfrak{G}(A', B', C', \ldots)$.

Доказательство. Подобного рода отображения в силу 22 суть общие делители A', B' C', $\ldots$, а потому теорема следует при помощи 18 непосредственно.

25. Определение и теорема. Если φ есть отображение какой-либо системы S, а ψ — отображение изображения $S' = \varphi(S)$, то из φ и ψ получается некоторое *составное*[2] отображение θ системы S, которое состоит в том, что каждому элементу s системы S отвечает изображение

$$\theta(s) = \psi(s') = \psi(\varphi(s)),$$

где $\varphi(s) = s'$. Это отображение θ короче можно означать или символом $\psi \cdot \varphi$, или $\psi\varphi$, также изображение $\theta(s)$ можно означать через $\psi\varphi(s)$,

[1] Сравни теорему 29.

[2] Смешения составления отображений с составлением систем элементов (8) опасаться нечего.

причем нужно обращать внимание на места букв φ и ψ, так как символ $\varphi\psi$, вообще говоря, лишен смысла, и только тогда имеет место, когда $\psi(S') \in S$.

Пусть теперь χ — отображение системы $\psi(S') = \psi\varphi(S)$ и пусть η — отображение системы, составленное из ψ и χ, т. е $\eta = \chi\psi$, тогда

$$\chi\theta(s) = \chi\psi(s') = \eta(s') = \eta\varphi(s),$$

т. е. составные отображения $\chi\theta$ и $\eta\varphi$ для каждого элемента s системы S тождественны между собой, т. е. $\chi\theta = \eta\varphi$. Эта теорема согласно значениям символов θ и η может быть очень удобно выражена равенством

$$\chi \cdot \psi\varphi = \chi\psi \cdot \varphi,$$

а отображение, составное из φ, ψ и χ, можно означить кратко через $\chi\psi\varphi$.

§ 3

Подобие отображения. Подобные системы

26. Определение. Отображение φ системы S называется *подобным* или *однозначным*, если различным элементам a и b системы S отвечают всегда различные изображения $a' = \varphi(a)$ и $b' = \varphi(b)$. Так как в этом случае из равенства $s' = t'$ всегда следует равенство $s = t$, то каждый элемент s' системы $S' = \varphi(S)$ является изображением некоторого единственного вполне определенного элемента s системы S; на этом основании мы можем отображению φ системы S противопоставить *обратное* отображение, которое мы означим через $\overline{\varphi}$, системы S', состоящее в том, что каждому элементу s' системы S' отвечает изображение $\overline{\varphi}(s') = s$; это отображение очевидно также подобно. Из предыдущего следует, что $\overline{\varphi}(S') = S$, т. е. φ и $\overline{\varphi}$ суть сопряженно обратны по отношению друг к другу, и, следовательно, согласно 25, составленное сложное из φ и $\overline{\varphi}$ отображение $\overline{\varphi}\varphi$ есть тождественное отображение (21). Кроме того к § 2 можно сделать следующие добавления с удержанием прежних обозначений.

27. Теорема[1]**.** Если $A' \in B'$, то $A \in B$.

Доказательство. Ведь если a есть какой-либо элемент в A, то a' будет элементом в A' и, следовательно, в B', и вместе с тем $a' = b'$, причем b есть элемент B: но так как из $a' = b'$ вытекает $a = b$, то каждый элемент a в A является элементом и для B, ч. т. д.

28. Теорема. Если $A' = B'$, то $A = B$.
Доказательство вытекает из 27, 4, 5.

29. Теорема[2]**.** Если $G = \mathfrak{G}(A, B, C, \ldots)$, то

$$G' = \mathfrak{G}(A', B', C', \ldots).$$

[1] Сравни теорему 22.
[2] Сравни теорему 24.

Доказательство. Каждый элемент системы

$$\mathfrak{G}(A', B', C', \ldots)$$

во всяком случае содержится в S', т. е. g' будет изображением некоторого содержащегося в S элемента g; но, так как g' служит общим элементом для A', B', C', $\ldots$, то g, согласно 27, будет общим элементом систем A, B, C, $\ldots$, а также системы G; вместе с тем каждый элемент системы $\mathfrak{G}(A', B', C', \ldots) = G'$ является изображением некоторого элемента g в системе G, поэтому $\mathfrak{G}(A', B', C', \ldots) \in G'$, а отсюда при помощи теорем 24 и 5 непосредственно вытекает наша теорема.

30. Теорема. Тождественное отображение какой-либо системы — всегда подобное отображение.

31. Теорема. Если φ есть подобное отображение системы S, а ψ — подобное отображение системы $\varphi(S)$, то из φ и ψ составленное отображение $\psi\varphi$ системы S — также подобно, а соответствующее ему обратное отображение $\overline{\psi}\,\overline{\varphi} = \overline{\varphi}\,\overline{\psi}$.

Доказательство. Различным элементам a и b соответствуют различные изображения $a' = \varphi(a)$ и $b' = \varphi(b)$, а этим последним в свою очередь будут отвечать снова различные изображения $\psi(a') = \psi\varphi(a)$ и $\psi(b') = \psi\varphi(b)$; ясно отсюда, что $\psi\varphi$ — подобное отображение. Далее каждый элемент $\psi\varphi(s) = \psi(s')$ системы $\psi\varphi(S)$ применением $\overline{\psi}$ переходит в $s' = \varphi(s)$, а этот последний переходит в s применением $\overline{\varphi}$, откуда следует, что $\psi\varphi(s)$ переходит в s при помощи $\overline{\varphi}\,\overline{\psi}$, ч. т. д.

32. Определение. Системы R и S называются *подобными*, если существует такое подобное отображение φ системы S, что $\varphi(S) = R$ и, следовательно, $\overline{\varphi}(R) = S$. Очевидно, что в силу 30 всякая система подобна самой себе.

33. Теорема. Если R и S — подобные системы, то всякая система Q, подобная с R, подобна также с S.

Доказательство. Пусть φ и ψ — соответственные подобные отображения систем S и R, такие, что $\varphi(S) = R$, $\psi(R) = Q$, тогда (согласно 31) $\psi\varphi$ будет таким подобным отображением, что будет выполнено равенство $\psi\varphi(S) = Q$, ч. т. д.

34. Определение. Все системы мы можем разделить на *классы*, именно мы будем группировать в один определенный класс все те — и только те — системы Q, R, S, $\ldots$, которые все подобны некоторой одной определенной системе R — *показателю* класса. В силу предыдущей теоремы 33, класс, очевидно, не изменится, если за показатель класса будет выбрана некоторая другая, принадлежащая ему система.

35. Теорема. Если R и S — подобные системы, то всякая часть S будет подобна некоторой части R; то же будет справедливо для правильных частей систем R и S.

Доказательство. Если φ подобное отображение S, и $\varphi(S) = R$, и если $T \in S$, то, в силу 22, система, подобная с T, именно $\varphi(T) \in R$; если же T есть правильная часть системы S, и s — некоторый не содержащийся в T элемент системы S, то $\varphi(s)$ — элемент системы R, — в силу 27, не может содержаться в $\varphi(T)$, т. е. $\varphi(T)$ будет также правильной частью для R, ч. т. д.

§ 4

Отображение системы в себе самой

36. Определение. Если φ представляет собой подобное или не-подобное отображение системы S, и если $\varphi(S)$ является частью какой-либо системы Z, то мы будет называть φ отображением системы S в системе Z и скажем, что S помощью φ отображена в Z. Мы скажем далее, что φ — отображение системы S *в самой себе*, если $\varphi(S) \in S$, и в этом параграфе мы исследуем общие законы такого рода отображений, причем обозначения § 2 мы удержим и здесь, именно мы положим $\varphi(s) = s'$, $\varphi(T) = T'$. Изображения s', T', на основании 22 и 7, снова являются соответственно элементами и частями S, как все означенные латинскими буквами объекты.

37. Определение. K называется *цепью*, если $K' \in K$. Обращаем здесь внимание на то обстоятельство, что это название не приписывается какой-либо определенной части K системы S самой по себе: мы даем его, имея в виду только лишь определенное отображение φ; в отношении же другого отображения системы S помощью себя самой K очень часто может и не быть цепью.

38. Теорема. S есть цепь.

39. Теорема. Изображение K' какой-либо цепи K представляет собой также цепь.

Доказательство. Дело в том, что из $K' \in K$, в силу 22, следует также $(K')' \in K'$, ч. т. д.

40. Теорема. Если A есть часть цепи K, то также $A' \in K$.

Доказательство. Из $A \in K$, в силу 22, следует $A' \in K'$, а так как, в силу 37, мы имеем $K' \in K$, то, согласно 7, очевидно, $A' \in K$, ч. т. д.

41. Теорема. Если изображение A' является частью какой-либо цепи L, то существует такая цепь K, которая удовлетворяет условиям: $A \in K$, $K' \in L$, и система $\mathfrak{M}(A, L)$ может служить такой цепью K.

Доказательство. Положим, в самом деле, что $K = \mathfrak{M}(A, L)$, тогда, в силу 9, условие $A \in K$ — выполнено. Так как далее, в силу 23, мы имеем $K' = \mathfrak{M}(A', L')$, и так как, в виду сделанного допущения, $A' \in L$ и $L' \in L$, то, в силу 10, выполнено и другое условие $K' \in L$, а отсюда следует, что $K' \in K$, так как (согласно 9) $L \in K$, т. е. K — действительно цепь, ч. т. д.

42. Теорема. Система M, составленная из каких-либо цепей A, B, $C, \ldots$, сама представляет собой цепь.

Доказательство. Так как (в силу 23)

$$M' = \mathfrak{M}(A', B', C', \ldots)$$

и по положению $A' \in A$, $B' \in B$, $C' \in C, \ldots$, то (в силу 12) имеем $M' \in M$, ч. т. д.

43. Теорема. Общий наибольший делитель G каких-либо определенных цепей A, B, $C, \ldots$ есть также цепь.

Доказательство. Так как G, в силу 17, — общий делитель систем A, B, $C, \ldots$, то G' будет, в силу 22, делителем систем A', B', $C', \ldots$, а так как по положению

$$A' \in A, \quad B' \in B, \quad C' \in C, \quad \ldots,$$

то (в силу 7) G' есть также делитель систем A, B, $C, \ldots$, т. е. (в силу 18) она есть часть G, ч. т. д.

44. Определение. Если A представляет собой какую-либо часть системы S, то мы означим через A_0 общий наибольший делитель всех тех цепей (например S), для которых A является частью; очевидно, такой общий делитель A_0 существует (сравни 17), так как уже само A является общей частью этих цепей. Так как A_0, на основании 43, есть цепь, то мы будем называть A_0 *цепью системы* A. Это определение также относится к лежащему в основании строго определенному отображению φ системы S помощью себя самой, и на будущее время мы ради ясности будем иногда употреблять вместо A_0 символ $\varphi_0(A)$; точно также цепь системы A, относящуюся к другому отображению ω, означили бы через $\omega_0(A)$. Относительно этого очень важного понятия имеют место следующие теоремы.

45. Теорема. Система $A \in A_0$.

Доказательство. Ведь A — общий делитель всех тех цепей, для которых A_0 является общим наибольшим делителем, а отсюда, при помощи теоремы 18, непосредственно получаем нашу теорему.

46. Теорема. $(A_0)' \in A_0$.

Доказательство. Согласно теореме 44, система A_0 — цепь (37).

47. Теорема. Если A есть часть цепи K, то также $A_0 \in K$.

Доказательство. Дело в том, что A_0 — общий наибольший делитель всех тех цепей, для которых A является частью; ясно, что она будет делителем и цепей K, для которых A есть часть.

48. Примечание. Легко убедиться, что данное в 44 параграфе понятие о цепи A_0 — вполне охарактеризовано теоремами 45, 46 и 47.

49. Теорема. $A' \in (A_0)'$.
Доказательство вытекает из 45 и 22.

50. Теорема. $A' \in A_0$.
Доказательство основывается на 49, 46 и 7.

51. Теорема. Если A — цепь, то $A_0 = A$.

Доказательство. Так как A_0 — часть A, то, в силу 47, также и $A_0 \in A$, откуда, на основании 45 и 5, теорема очевидна.

52. Теорема. Если $B \in A$, то $B \in A_0$.
Доказательство основывается на 45 и 7.

53. Теорема. Если $B \in A_0$, то $B_0 \in A_0$, и обратно.

Доказательство. Ведь если A_0 — цепь, то из $B \in A_0$, в силу 47, также и $B_0 \in A_0$; обратно, если $B_0 \in A_0$, то также и $B \in A_0$, в силу 7, так как (согласно 45) $B \in B_0$.

54. Теорема. Если $B \in A$, то $B_0 \in A_0$.
Доказательство основывается на 52 и 53.

55. Теорема. Если $B \in A_0$, то также и $B' \in A_0$.

Доказательство. Согласно 53, мы имеем $B_0 \in A_0$, а так как (согласно 50) $B' \in B_0$, то, на основании 7, теорема — очевидна. Тот же самый результат мы получим, пользуясь 22, 46 и 7 или 40, как это легко видеть.

56. Теорема. Если $B \in A_0$, то также и $(B_0)' \in (A_0)'$.
Доказательство основывается на 53 и 22.

57. Теорема и определение. Всегда имеет место равенство $(A_0)' = (A')_0$, т. е. изображение цепи системы A есть вместе с тем и цепь изображения системы A. Мы будем означать эту систему просто через A'_0, а называть будем ее по произволу или *изображением цепи*, или *цепью изображения*. При более отчетливом означении, данном в параграфе 44, та же самая теорема могла бы быть записанной так:

$$\varphi(\varphi_0(A)) = \varphi_0(\varphi(A)).$$

Доказательство. Пусть $(A')_0 = L$, и мы знаем, на основании 44, что L есть цепь; кроме того (в силу 45) $A' \in L$; вместе с тем, в силу 41, существует такая цепь K, которая удовлетворяем условиям — $A \in K$ и $K' \in L$; поэтому, в силу 47, также и $A_0 \in K$, т. е. $(A_0)' \in K'$, и (в силу 7) $(A_0)' \in L$, т. е.

$$(A_0)' \in (A')_0.$$

С другой стороны, (в силу 49) $A' \in (A_0)'$ и кроме того $(A_0)'$ есть цепь, в силу 44 и 39; поэтому, пользуясь еще (47), мы имеем также

$$(A')_0 \in (A_0)'.$$

Сопоставляя две только что сделанные окончательные записи, мы в силу (5) получаем доказываемую теорему.

58. Теорема. $A_0 = \mathfrak{M}(A, A'_0)$, т. е. цепь системы A составлена из A и из изображения цепи A.

Доказательство. Положим ради краткости

$$L = A'_0 = (A_0)' = (A')_0,$$

и пусть $K = \mathfrak{M}(A, L)$. Мы знаем на основании 45, что $A' \in L$, а так как L — цепь, то тоже самое будет иметь место и для K; далее (в силу 9) $A \in K$ и, следовательно, в силу 47, также и

$$A_0 \in K.$$

С другой стороны, (согласно 45) $A \in A_0$, а также, согласно 46, $L \in A_0$, поэтому, в силу 10,

$$K \in A_0.$$

Теперь теорема — очевидна, так как $K = A_0$ (5).

59. Теорема о полной индукции. Для того, чтобы доказать, что цепь A_0 является частью какой-либо системы Σ — последняя может быть или не быть частью какой-либо системы S, — достаточно показать, что
ϱ) $A \in \Sigma$, и
б) изображение каждого элемента, общего системам A_0 и Σ, служит элементом также и для самой Σ.

Доказательство. Если условие (ϱ) имеет место, то, в силу 45, непременно существует общий наибольший делитель $G = \mathfrak{G}(A_0, \Sigma)$, и притом (в силу 18) $A \in G$; так как, кроме того, в силу 17,

$$G \in A_0,$$

то G будет частью нашей системы S, которая посредством φ отображена в себе самой; в силу 55, также будем иметь еще $G' \in A_0$. Если же и условие (*б*) выполнено, т. е. если $G' \in \Sigma$, то G', как делитель систем A_0 и Σ, в силу 18, будет делителем их общего наибольшего делителя G, т. е. G есть цепь (37), а так как, как мы уже выше заметили, $A \in G$, то, в силу 47, также и

$$A_0 \in G,$$

откуда, комбинируя записи, относящиеся к A_0 и G, получаем, что $G = A_0$, т. е., в силу 17, действительно $A_0 \in \Sigma$, ч. т. д.

60. Предыдущая теорема представляет собой, как это обнаружится позже, научное основание для доказательства, известного под именем *полной индукции* (заключения от n к $n + 1$); она может быть формулирована следующим образом: для того, чтобы доказать, что все элементы цепи A_0 обладают некоторым определенным свойством $\mathscr{F}$ (или что теорема $\mathfrak{S}$, в которой идет речь о некоторой неопределенной вещи n, законна для всех элементов n цепи A_0), достаточно показать, что
ϱ) все элементы a системы A обладают свойством $\mathscr{F}$ (или что теорема $\mathfrak{S}$ — законна для всех a) и
(*б*) свойство $\mathscr{F}$, которым обладает каждый элемент n системы A_0, принадлежит также и изображению n' этого элемента n (или что теорема $\mathfrak{S}$, как только она законна для элемента n системы A_0, наверное законна и для изображения этого последнего n').

В самом деле, если мы через Σ означим систему всех вещей, обладающих свойством $\mathscr{F}$ (или тех, для коих имеет место теорема $\mathfrak{S}$), то полное согласие только что данной формулировки теоремы с формулировкой, данной выше, обнаруживается непосредственно.

61. Теорема. Цепь системы $\mathfrak{M}(A, B, C, \ldots)$ есть система $\mathfrak{M}(A_0, B_0, C_0, \ldots)$.

Доказательство. Если мы означим первую систему через M, а последнюю через K, то K, в силу 42, будет несомненно цепью. Так как каждая из систем A, B, C, ..., в силу 45, является частью какой-либо из систем A_0, B_0, C_0, ..., и так как кроме того $M \in K$, в силу 12, то, в силу 47,

$$M_0 \in K.$$

С другой стороны, в силу 9, каждая из систем A, B, C, ... служит частью M, т. е., в силу 45 и 7, каждая будет частью цепи M_0; в силу 47, очевидно каждая из систем A_0, B_0, C_0, ... будет частью M_0, а вместе с тем, в силу 10,

$$K \in M_0.$$

При помощи 5, комбинируя интересующие нас записи, видим, что

$$M_0 = K.$$

62. Теорема. Цепь системы $\mathfrak{G}(A, B, C, \ldots)$ будет частью системы $\mathfrak{G}(A_0, B_0, C_0, \ldots)$.

Доказательство. Означим первую систему через G, а вторую — через K; K, в силу 43, представляет собой цепь. Так как каждая из систем A_0, B_0, C_0, ... является целым, в силу 45, относительно соответствующих систем A, B, C, ..., и так как кроме того (20) $G \in K$, то, в силу 47, необходимо $G_0 \in K$, ч. т. д.

63. Теорема. Если $K' \in L \in K$, т. е. если K есть цепь, то и L — также цепь. Если же L — правильная часть K, и если U — система всех тех элементов K, которые отсутствуют в L, если далее цепь U_0 — правильная часть K, а V — система всех тех элементов K, которых нет в U_0, то $K = \mathfrak{M}(U_0, V)$ и $L = \mathfrak{M}(U'_0, V)$. Наконец, если $L = K'$, то $V \in V'$.

Доказательство этой теоремы, которой мы равно как и двумя предыдущими, пользоваться вовсе не будем, предоставляем произвести читателю.

§ 5

Конечное и бесконечное

64. Определение[1]**.** Система S называется *бесконечной*, если она подобна какой-либо правильной своей части (32); в противном случае S называется *конечной* системой.

65. Теорема. Всякая система, состоящая из одного элемента, — конечна.

Доказательство[2]. Такая система не обладает никакой правильной частью (2, 6).

66. Теорема. Существуют бесконечные системы.

Доказательство. Наш мир представлений, т. е. совокупность S всех тех вещей, которые могут быть объектами нашей мысли, — бесконечен. Дело в том, что, если s есть элемент системы S, то мысль s' об s, как о предмете нашего сознания, сама является элементом системы S. Если теперь мы будем рассматривать s' как изображение $\varphi(s)$ элемента s, то тогда мы получим в φ некоторое определенное отображение системы S, обладающее тем свойством, что изображение S' является частью S, и притом S' очевидно — правильная часть S, так как в S существуют такие элементы (например наше собственное «я»), которые отличны от всякой такой мысли s' и, следовательно, не содержатся в S'. Наконец очевидно, что, если a и b — различные элементы в S, то их изображения a' и b' — также различны, т. е. отображение φ — однозначно (подобно) (27). Таким образом S — бесконечна.

[1] Если бы мы хотели пользоваться здесь понятием о подобных системах, то мы могли бы сказать еще так: $\boldsymbol{S}$ называется бесконечной, если в ней существует такая часть (правильная) (6), в которой может быть однозначно отображена сама система $\boldsymbol{S}$ (26, 36). Я сообщил об этом определении «бесконечного», являющимся ядром всех моих исследований, в 1882 году г. Г. Кантору, а несколькими годами ранее гг. Шварцу и Веберу. Все другие известные мне попытки положить различие между «конечным» и «бесконечным» кажутся мне настолько мало удачными, что я отказываюсь подвергать их критике.

[2] Подобные соображения находятся в § 13 «Paradoxien des Unendlichen von Bolzano» (Leipzig, 1851).

67. Теорема. Если R и S — подобные системы, то R — конечна или бесконечна, смотря по тому, конечна S или бесконечна.

Доказательство. Если S — бесконечна, т. е. подобна некоторой своей части S', то, так как R и S — подобны, S', согласно 33, должна быть подобна R, и, в силу 35, она подобна некоторой части R, которая в свою очередь, в силу 33, подобна с R, т. е. R — действительно бесконечна.

68. Теорема. Всякая система S, обладающая бесконечной частью T, — бесконечна; другими словами, всякая часть конечной системы — конечна.

Доказательство. Если T — бесконечна, т. е., если существует такое однозначное отображение ψ системы T, что $\psi(T)$ — правильная часть T, то мы можем, если T — часть S, это отображение ψ превратить в более полное φ, полагая, если s — элемент системы S, $\varphi(s) = \psi(s)$ или $\varphi(s) = s$, смотря по тому, принадлежит s системе T или нет. Новое отображение будет очевидно однозначным; в самом деле, если a и b — различные элементы S, то, если они в то же время принадлежат системе T, изображение $\varphi(a) = \psi(a)$ отлично от $\varphi(b) = \psi(b)$, так как ψ — однозначное отображение; далее, если a принадлежит T, а b не принадлежит, то $\varphi(a) = \psi(a)$ отлично от $\varphi(b) = b$, так как $\psi(a)$ содержится в T; наконец, если ни a, ни b не принадлежат T, то также $\varphi(a) = a$ отлично от $\varphi(b) = b$, что нужно было показать. Теперь $\psi(T) \in T$, т. е., в силу 7, также и часть S, а потому очевидно, что $\varphi(S) \in S$. Затем $\psi(T)$ — правильная часть T, поэтому в T существуют такие элементы t, а следовательно и в S, которые не заключаются в системе $\psi(T) = \varphi(T)$; а так как изображение $\varphi(s)$ всякого не содержащегося в T элемента s есть само s, т. е. отлично от t, то t, вообще говоря, не может заключаться в $\varphi(S)$. Таким образом $\varphi(S)$ — правильная часть, и, следовательно, S — бесконечна.

69. Теорема. Всякая система, которая однозначна с некоторой частью какой-либо конечной системы, сама конечна.

Доказательство основывается на положениях 67 и 68.

70. Теорема. Если a — элемент системы S, и если T — совокупность всех отличных от a элементов в S — конечна, то S — также конечна.

Доказательство. Мы должны показать (согласно 64), что, если φ — какое-либо однозначное отображение S в себе самой, то изображение $\varphi(S)$ или S' никогда не может быть правильной частью S, но всегда $= S$. Очевидно $S = \mathfrak{M}(a, T)$ и, следовательно, при означении изображений буквами со значками, в силу 23, система $S' = \mathfrak{M}(a', T')$, и в силу однозначности отображения φ элемент a' не заключается в T' (26). При допущении, что $S' \in S$, элемент a', а также и всякий элемент T', должны равняться или a или одному из элементов T. Если, поэтому, a не содержится в T', — мы сначала разберем этот случай — то $T' \in T$, и, следовательно, необходимо $T' = T$, так как φ — однозначное отображение и так как T — конечная система; далее мы заметили уже выше, что a' не заключается в T'; следовательно, оно не заключается и в T, откуда $a' = a$, т. е. в данном случае действительно $S' = S$. В противоположном случае, когда a содержится в T' и, следовательно, является изображением b' некоторого содержащегося в T элемента b, мы означим через U совокупность всех элементов u системы T отличных от b; тогда $T = \mathfrak{M}(b, U)$ и (согласно 15) $S = \mathfrak{M}(a, b, U)$, следовательно $S' = \mathfrak{M}(a', a, U')$. Определим теперь новое отображение ψ системы T, полагая $\psi(b) = a'$ и вообще $\psi(u) = u'$, тогда (в силу 23) $\psi(T) = \mathfrak{M}(a', U')$. Очевидно, что ψ — однозначное отображение, так как таковым было φ, и так как a не заключается в U, а следовательно a' — в U'.

Так как далее a и каждый элемент u — отличны от b, то (в силу однозначности φ) a' и каждый элемент u' — отличны от a, т. е. они заключены в T; поэтому $\psi(T) \in T$, а так как T — конечно, то $\psi(T) = T$, т. е. $\mathfrak{M}(a', U') = T$. Отсюда имеем (15), что $\mathfrak{M}(a', a, U') = \mathfrak{M}(a, T)$, т. е. в силу равенства $S' = \mathfrak{M}(a', a, U)$ видим, что $S' = S$. Таким образом и в этом случае теорема доказана.

§ 6

Просто бесконечные системы. Ряд натуральных чисел

71. Определение. Система N называется *просто бесконечной*, если существует однозначное отображение φ системы N в себе самой такое, что N оказывается цепью (44) некоторого элемента, отсутствующего в $\varphi(N)$. Мы назовем этот элемент — в последующем мы будем означать его символом 1 — *основным элементом*, а система просто бесконечная N благодаря такому отображению φ будет *приведена в порядок*. Если мы удержим прежние удобные обозначения для изображений и цепей (§ 4), то сущность просто бесконечной системы N заключается в существовании некоторого отображения φ системы N и некоторого элемента 1, причем должны быть выполнены следующие условия α, β, γ, δ:

α. $N' \in N$.

β. $N = 1_0$.

γ. Элемент 1 отсутствует в N'.

δ. Отображение φ — однозначно (подобно).

Из условий α, β, γ, δ непосредственно видно, что всякая просто бесконечная система N — действительно бесконечная система (64), так как она подобна своей правильной части N'.

72. Теорема. В каждой бесконечной системе S просто бесконечная система N заключается как часть.

Доказательство. Согласно 64 существует такое однозначное отображение φ системы S, что $\varphi(S) = S'$ будет правильной частью в S; существует, поэтому, такой элемент 1 в S, которого нет в S'. Очевидно, что цепь $N = 1_0$, соответствующая такому отображению φ системы S в себе самой (44), есть просто бесконечная помощью φ приведенная в порядок система, так как характеристические условия п. 71 — α, β, γ, δ — здесь все выполнены.

73. Определение. Если мы при рассмотрении какой-либо системы N, просто бесконечной и приведенной в порядок помощью отображения φ, совершенно отвлечемся от особенных свойств ее элементов, а исключительно обратим внимание только лишь на их различимость друг от друга и примем в расчет лишь те соотношения, в которые они вступают друг с другом благодаря приводящему в порядок систему отображению φ, то тогда элементы системы называются *натуральными* или (ординальными) *порядковыми* числами, или же просто *числами*, а основной элемент 1 называется *основным числом числового ряда* N. Считая числа свободными от всякого иного содержания (абстрагируя), мы можем очевидно с полным правом считать числа за свободное создание нашего духа (чистый продукт нашей мысли).

Соотношения или законы, которые будут выводимы исключительно из условий α, β, γ, δ в п. 71 и которые в силу этого будут одними и теми же для всех приведенных в порядок просто бесконечных систем независимо от того, какие названия приписать случайно выбранным из системы отдельным элементам (сравни 134), составляют ближайшую задачу *науки о числах — арифметики*.

Пользуясь понятиями и теоремами § 4, относящимися к отображению системы в себе самой, мы сейчас же получаем непосредственно ряд следующих теорем, в которых под a, b, $\ldots$, m, n, $\ldots$ мы будем понимать всегда элементы N, т. е. числа, под A, B, C, $\ldots$ — части системы N, а под a', b', $\ldots$, m', n', $\ldots$, A', B', C', $\ldots$ — соответствующие им изображения, получаемые помощью приводящего в порядок систему отображения φ; под изображением n' некоторого числа n мы будем понимать *следующее за* n число.

74. Теорема. Всякое число n, согласно 45, содержится в его цепи n_0, и в силу 53 условие $n \in m_0$ равнозначно с условием $n_0 \in m_0$.

75. Теорема. В силу 57, имеем $n'_0 = (n_0)' = (n')_0$.

76. Теорема. $n'_0 \in n_0$ на основании 46.

77. Теорема. $n_0 = \mathfrak{M}(n, n'_0)$ на основании 58.

78. Теорема. $N = \mathfrak{M}(1, N')$, т. е. всякое число, отличное от основного числа 1, является элементом N', т. е. служит изображением некоторого числа.

Доказательство основывается на 77 и 71.

79. Теорема. N представляет собой единственную числовую цепь, в которой содержится основной элемент 1.

Доказательство. Действительно, если 1 — элемент какой-либо числовой цепи K, то в силу 47 соответствующая ему цепь $N \in K$, но тогда $N = K$, так как само собой понятно, что $K \in N$.

80. Теорема о полной индукции (заключение от n к n'). Для того, чтобы доказать, что какая-либо теорема — законна для всех чисел n какой-либо цепи m_0, достаточно показать, что
ϱ) она законна для $n = m$ и
б) из справедливости ее для какого-либо числа n цепи m_0 всегда следует справедливость ее для следующего числа n'.

Эта теорема получается непосредственно из более общих теорем 59 и 60. Нам чаще всего будет представляться тот случай, когда $m = 1$, т. е. m_0 — полный числовой ряд N.

§ 7

Бо́льшие и меньшие числа

81. Теорема. Всякое число n — отлично от следующего за ним числа n'.

Доказательство помощью полной индукции. Действительно,
ϱ) теорема — истинна для числа $n = 1$, так как оно не заключается в N' (70), в то время как следующее число $1'$, как изображение содержащегося в N числа 1, является элементом N';
б) если теорема истинна для какого-либо числа n, и если мы положим следующее число $n' = p$, то n отлично от p, а отсюда, в силу 26, на основании подобия (71), приводящего в порядок систему отображения φ, следует, что n', т. е. p, также отлично от p'. Таким образом, теорема — законна и для следующего за n числа.

82. Теорема. В цепном изображении n_0' некоторого числа n находится изображение последнего (в силу 74, 75), но не само число n.

Доказательство помощью полной индукции. Действительно,
ϱ) теорема — истинна для случая $n = 1$, так как $1_0' = N'$ и, в силу 71, основное число 1 в N' отсутствует;
б) если теорема — истинна для некоторого числа n, и если мы положим $n' = p$, то n в p_0 не содержится, т. е. оно отлично от всякого содержащегося в p_0 числа g, причем в силу подобия (однозначности) отображения φ следует, что n', т. е. p, отлично от всякого содержащегося в p_0' числа g', т. е. оно в p_0' не заключается. Таким образом теорема — справедлива и для следующего за n числом p, ч. т. д.

83. Теорема. Цепное изображение n_0' есть правильная часть цепи n_0.
Доказательство вытекает из 76, 74 и 82.

84. Теорема. Из $m_0 = n_0$ следует $m = n$.

Доказательство. Так как m заключается в m_0 (74) и

$$m_0 = n_0 = \mathfrak{M}(n, n_0')$$

на основании 77, то, если бы теорема была ложной, т. е. m было бы отлично от n, m должно бы было заключаться в цепи n'_0, и тогда на основании 74 имели бы $m_0 \in n'_0$, т. е. и $n_0 \in n'_0$, но этот результат противоречит теореме 83; таким образом наша теорема доказана.

85. Теорема. Если число n не заключается в числовой цепи K, то $K \in n'_0$.

Доказательство помощью полной индукции. Действительно,
ϱ) теорема в силу 78 — истинна для $n = 1$;
σ) если теорема справедлива для какого-либо числа n, то она справедлива и для следующего числа $p = n'$, так как, если p не заключается в числовой цепи K, то на основании 40 также и n не заключается в K, а потому, в силу нашего предположения, $K \in n'_0$, а так как (на основании 77) $n'_0 = p_0 = \mathfrak{M}(p, p'_0)$, т. е. $K \in \mathfrak{M}(p, p'_0)$, и p не содержится в K, то $K \in p'_0$, ч. т. д.

86. Теорема. Если число n не заключается в числовой цепи K, но его изображение n' заключается, то $K = n'_0$.

Доказательство. Так как n не содержится в K, то (в силу 85) $K \in n'_0$, а так как $n' \in K$, то и $n'_0 \in K$ в силу 47, откуда вытекает $K = n'_0$.

87. Теорема. Во всякой числовой цепи K существует одно и только одно (по 84) число k, такое, что его цепь $k_0 = K$.

Доказательство. Если основное число 1 содержится в цепи K, то (на основании 79) $K = N = 1_0$. В противном случае пусть Z будет система всех чисел отсутствующих в K; так как основное число 1 заключается в Z и Z является лишь правильной частью числового ряда N, то Z не может быть цепью (по 79), т. е. Z' не может быть частью для Z; поэтому в Z должно существовать такое число n, изображение которого отсутствует в Z и, следовательно, наверное есть в K. Так как n находится в Z и, следовательно, отсутствует в K, то (на основании 86)

$$K = n'_0, \quad \text{т. е.} \quad k = n'.$$

88. Теорема. Если m и n — различные числа, то (по 83 и 84) одна и только одна из цепей m_0, n_0 является правильной частью другой, притом или $n_0 \in m'_0$, или $m_0 \in n'_0$.

Доказательство. Если n содержится в m_0, т. е., на основании 74, также $n_0 \in m_0$, то m не может заключаться в цепи n_0 (так как иначе, в силу 74, было бы $m_0 \in n_0$, т. е. тогда было бы $m_0 = n_0$ и, следовательно, (в силу 84) m равнялось бы n), а отсюда следует, на основании 85, что $n_0 \in m'_0$. В противоположном случае, когда n не содержится в цепи m_0, мы непосредственно видим, что (на основании 85) $m_0 \in n'_0$.

89. Определение. Число m называется *меньшим* числа n, а число n *бóльшим* числа m, если выполнено условие

$$n_0 \in m'_0,$$

которое может быть также, на основании 74, выражено еще так

$$n \in m'_0.$$

Символически означим это так:

$$m < n \quad \text{и} \quad n > m.$$

90. Теорема. Если m и n — какие-либо числа, то существует один и только один из следующих случаев λ, μ, ν:
λ. $m = n$, $n = m$, т. е. $m_0 = n_0$,
μ. $m < n$, $n > m$, т. е. $n_0 \in m'_0$,
ν. $m > n$, $n < m$, т. е. $m_0 \in n'_0$.

Доказательство. Ведь если имеет место случай λ (84), то ни случай μ, ни случай ν не имеют места, так как никогда не может быть, чтобы $n_0 \in n'_0$ (83). Если же случай λ места не имеет, то, в силу 88, может иметь место один и только один из случаев — или μ или ν.

91. Теорема. $n < n'$.

Доказательство. Здесь условие для случая ν в 90 будет удовлетворено равенством $m = n'$.

92. Определение. Для того, чтобы выразить, что m или равно n, или меньше n, но не больше n, пользуются означением

$$m \leqslant n \quad \text{или же} \quad n \geqslant m$$

и говорят, что m *не больше* n, а n *не меньше* m.

93. Теорема. Каждое из условий

$$m \leqslant n, \quad m < n', \quad n_0 \in m_0$$

равнозначно с каждым из остальных.

Доказательство. Если $m \leqslant n$, то из условий λ и μ в 90 всегда следует $n_0 \in m_0$, так как (по 76) $m'_0 \in m_0$.

Обратно, если $n_0 \in m_0$, т. е., в силу 74, также $n \in m_0$, то из равенства $m_0 = \mathfrak{M}(m, m'_0)$ следует, что или $n = m$, или же $n \in m'_0$, т. е. $n > m$. Таким образом условие $m \leqslant n$ равнозначно с $n_0 \in m_0$. Далее из 22, 27 и 75 вытекает, что это же условие $n_0 \in m_0$ равносильно с $n'_0 \in m'_0$, т. е. (в силу μ в 90) оно равнозначно с $m < n'$, ч. т. д.

94. Теорема. Каждое из условий

$$m' \leqslant n, \quad m' < n', \quad m < n$$

равнозначно с каждым из других.

Доказательство вытекает непосредственно из 93, если мы там заменим m через m', и из μ в 90.

95. Теорема. Если $l < m$ и $m \leqslant n$, или если $l \leqslant m$ и $m < n$, то $l < n$. Если же $l \leqslant m$ и $m \leqslant n$, то $l \leqslant n$.

Доказательство. Дело в том, что из условий, эквивалентных данным теоремами (89 и 93) $m_0 \in l'_0$ и $n_0 \in m_0$ следует (в силу 7) $n_0 \in l'_0$; то же самое мы получим из условий $m_0 \in l_0$ и $n_0 \in m'_0$, так как в силу первого из них $m'_0 \in l'_0$. Наконец из $m_0 \in l_0$ и $n_0 \in m_0$ также получаем $n_0 \in l_0$, ч. т. д.

96. Теорема. В каждой части T системы N существует одно и только одно *наименьшее* число k, т. е. такое число, которое меньше всякого другого числа, находящегося в T. Если T состоит из некоторого единственного числа, то это число и есть наименьшее.

Доказательство. Так как T_0 представляет собой цепь (44), то по теореме 87 существует такое число k, цепь которого $k_0 = T_0$. Так как отсюда (в силу 45, 77) следует, что $T \in \mathfrak{M}(k, k'_0)$, то k должно очевидно заключаться в T (так как иначе было бы $T \in k'_0$, т. е., в силу 47, также $T_0 \in k'_0$, и выходило бы, что $k_0 \in k'_0$, что, в силу 83, невозможно), а всякое отличное от k число системы T должно находиться в k'_0, т. е. быть больше k на основании 89; имея в виду еще 90, мы видим, что действительно существует одно только наименьшее число в T.

97. Теорема. Наименьшим числом цепи n_0 служить n, а наименьшим из всех чисел является основное число 1.

Доказательство. В силу 74 и 93, условие $m \in n_0$ равнозначно с $m \geqslant n$, или же наша теорема вытекает непосредственно из доказательства предыдущей, так как, если положим $T = n_0$, то очевидно $k = n$ (51).

98. Определение. Если n — какое-либо число, то мы будем означать символом Z_n систему всех тех чисел, которые *не больше* n, т. е. не содержатся в n'_0.

Условие

$$m \in Z_n,$$

в силу 92 и 93, очевидно равнозначно с каждым из следующих условий:

$$m \leqslant n, \quad m < n', \quad n_0 \in m_0.$$

99. Теорема. $1 \in Z_n$ и $n \in Z_n$.

Доказательство следует из 98 или же из 71 и 82.

100. Теорема. Каждое из равнозначных (согласно 98) условий

$$m \in Z_n, \quad m \leqslant n, \quad m < n', \quad n_0 \in m_0$$

равнозначно также с условием

$$Z_m \in Z_n.$$

Доказательство. Дело в том, что, если $m \in Z_n$, т. е. $m \leqslant n$, и если $l \in Z_m$, т. е. $l \leqslant m$, то (в силу 95) $l \leqslant n$, т. е. $l \in Z_n$; если поэтому $m \in Z_n$, то каждый элемент l системы Z_m является также элементом системы Z_n, т. е. действительно $Z_m \in Z_n$. Обратно, если $Z_m \in Z_n$, то в, силу 7, также $m \in Z_n$, так как (в силу 99) $m \in Z_m$, ч. т. д.

101. Теорема. Условия λ, μ, ν, данные в 90, могут быть выражены также следующим образом:

λ. $m = n$, $n = m$, $Z_m = Z_n$,

μ. $m < n$, $n > m$, $Z_{m'} \in Z_n$,

ν. $m > n$, $n < m$, $Z_{n'} \in Z_m$.

Доказательство вытекает непосредственно из 90, если мы припомним, что, в силу 100, условия $n_0 \in m_0$ и $Z_m \in Z_n$ равнозначны.

102. Теорема. $Z_1 = 1$.

Доказательство. По 99 основное число 1 заключается в Z_1, каждое же отличное от 1 число, в силу 78, заключается в $1'_0$, т. е., в силу 98, в Z_1 не содержится.

103. Теорема. В силу 98 имеем $N = \mathfrak{M}(Z_n, n'_0)$.

104. Теорема. $n = \mathfrak{G}(Z_n, n_0)$, т. е. n — единственный элемент, общий системам Z_n и n_0.

Доказательство. Из 99 и 74 следует, что n содержится и в Z_n, и в n_0; каждый же отличный от n элемент цепи n_0, в силу 77, заключен в n'_0, поэтому, в силу 98, он отсутствует в Z_n.

105. Теорема. На основании 91 и 98 число n' не заключено в Z_n.

106. Теорема. Если $m < n$, то Z_m правильная часть Z_n, и обратно.

Доказательство. Если $m < n$, то (в силу 100) $Z_m \in Z_n$, а так как (99) число n, содержащееся в Z_n, находиться в системе Z_m не может (98), так как $n > m$, то Z_m — правильная часть Z_n. Обратно, если Z_m — правильная часть Z_n, то $m \leqslant n$, в силу 100, и, так как m не может равняться n, иначе было бы также $Z_m = Z_n$, то m должно быть меньше n.

107. Теорема. Z_n — правильная часть $Z_{n'}$.
Доказательство вытекает из 106, так как $n < n'$ (91).

108. Теорема. $Z_{n'} = \mathfrak{M}(Z_n, n')$.

Доказательство. Ведь всякое в $Z_{n'}$ содержащееся число, в силу (98), $\leqslant n'$, и, следовательно, в силу 98, оно является элементом Z_n; поэтому наверное $Z_{n'} \in \mathfrak{M}(Z_n, n')$. А так как обратно (107) $Z_n \in Z_{n'}$ и $n' \in Z_{n'}$ (в силу 99), то согласно (10) $\mathfrak{M}(Z_n, n') \in Z_{n'}$, откуда при помощи 5 имеем теорему доказанной.

109. Теорема. Изображение Z'_n системы Z_n есть правильная часть системы $Z_{n'}$.

Доказательство. Каждое в Z'_n содержащееся число служит изображением m' некоторого числа m, содержащегося в Z_n, и так как $m \leqslant n$, т. е. (в силу 94) и $m' \leqslant n'$, то отсюда видно, что $Z'_n \in Z_{n'}$, в силу 98. А так как число 1 находится в Z_n в силу 99, но по 71 не может находиться в изображении Z'_n, то Z'_n — правильная часть $Z_{n'}$.

110. Теорема. $Z_{n'} = \mathfrak{M}(1, Z'_n)$.

Доказательство. Каждое отличное от 1 число системы $Z_{n'}$, в силу 78, является изображением m' некоторого числа m, а это последнее должно быть не больше n, т. е. по 98 оно должно содержаться в Z_n (так как иначе

будет $m < n$, т. е. по 94 также будет и $m' > n'$, следовательно, m' (по 98) не содержалось бы в $Z_{n'}$); далее из $m \in Z_n$ следует также $m' \in Z'_n$, поэтому наверное

$$Z_{n'} \in \mathfrak{M}(1, Z'_n).$$

Но с другой стороны, $1 \in Z_{n'}$ по 99 и $Z'_n \in Z_{n'}$ по 109, поэтому (в силу 10) $\mathfrak{M}(1, Z'_n) \in Z_{n'}$; теперь ясно, в силу 5, что теорема наша истинна.

111. Определение. Если в некоторой системе чисел E существует элемент g, который больше всякого другого содержащегося в E числа, то g называется *наибольшим* числом системы E; в силу 90 очевидно, что такое наибольшее число в E может быть только одно. Если система состоит из единственного элемента, то этот элемент и будет наибольшим числом системы.

112. Теорема. В силу 98, число n — наибольшее в системе Z_n.

113. Теорема. Если в E существует наибольшее число g, то $E \in Z_g$.

Доказательство. Ведь каждое содержащееся в E число $\leqslant g$, поэтому, в силу 98, оно должно находиться в Z_g.

114. Теорема. Если E — часть системы Z_n, или если существует, что одно и тоже, такое число n, что все содержащиеся в E числа не больше n, то E обладает некоторым наибольшим числом g.

Доказательство. Система всех тех чисел p, которые удовлетворяют условию $E \in Z_p$ — а согласно предположению таковые существуют — есть цепь (37), так как, в силу 107 и 7, следует, что и $E \in Z_{p'}$, поэтому она равна g_0 (в силу 87), в которой g будет наименьшим из этих чисел (96 и 97). Так как $E \in Z_g$, то каждое содержащееся в E число не больше g (98), и мы должны только показать, что число g само заключается в E. Это непосредственно видно, если $g = 1$, так как тогда Z_g, в силу 102, а следовательно также и E состоят из единственного числа 1. Но если g — отлично от 1 и следовательно, в силу 78, является изображением f' некоторого числа f, то (по 108) $E \in \mathfrak{M}(Z_f, g)$; если бы теперь g не содержалось в E, то было бы $E \in Z_f$, и тогда, следовательно, среди чисел p существовало бы такое число f, которое было бы меньше g, (91), но это противоречит вышесказанному; поэтому g содержится в E.

115. Определение. Если $l < m$, а $m < n$, то мы скажем что m *лежит между* l и n (также между n и l).

116. Теорема. Не существует ни одного числа, которое бы лежало между n и n'.

Доказательство. Как только $m < n'$, т. е. $m \leqslant n$ по 93, то в силу 90 невозможно, чтобы было $n < m$.

117. Теорема. Если t — некоторое число в T, но не наименьшее (96), то существует в T одно и только одно ближайшее к t и меньшее его число s, т. е. такое число, что $s < t$; и в T нет ни одного числа, лежащего между s и t. Точно также, если t есть некоторое не наибольшее (111) число в системе T, то в той же T существует всегда одно и только одно наивозможно близкое и большее t число u, такое, что $t < u$, и в тоже время нет ни одного числа в T лежащего между t и u. Таким образом в системе T число t будет ближайшим большим, чем s, и ближайшим меньшим, чем u.

Доказательство. Если t — не наименьшее число в T, то пусть будет E система всех тех чисел системы T, которые меньше t; тогда (на основании 98) $E \in Z_t$, поэтому (114), в E существует некоторое наибольшее число s, которое очевидно обладает свойствами, данными теоремой, и причем такое число — единственно. Если же t — не наибольшее в T, то по 96 среди чисел T существуют такие, которые больше t, и среди них есть одно наверное наименьшее u, которое, будучи одно только, удовлетворяет условиям, выраженным в теореме. Справедливость заключительного в теореме замечания очевидна.

118. Теорема. В N число n' ближайшее большее, чем n, и n ближайшее меньшее, чем n'.

Доказательство вытекает из 116 и 117.

§ 8

Конечные и бесконечные части числового ряда

119. Теорема. Всякая система Z_n в 98 — конечна.

Доказательство помощью полной индукции (80). Действительно,
ϱ. теорема — истинна для $n = 1$ на основании 65 и 102;
б. если Z_n — конечна, то из 108 и 70 следует, что $Z_{n'}$ — также конечна.

120. Теорема. Если m и n — различные числа, то Z_m и Z_n суть неподобный системы.

Доказательство. Ради симметрии допустим, что $m < n$, тогда по 106 система Z_m — правильная часть Z_n, а так как Z_n — конечна по 119, то, в силу 64, системы Z_m и Z_n суть неподобные системы.

121. Теорема. Всякая часть E числового ряда N, которая обладает наибольшим числом (111), — конечна.

Доказательство вытекает из 113, 119 и 68.

122. Теорема. Всякая часть U числового ряда N, которая не обладает наибольшим числом, — просто бесконечна (71).

Доказательство. Если u — какое-нибудь число в U, то по 117 в U существует одно и только одно ближайшее большее, чем u, число, которое мы означим через $\psi(u)$ и будем рассматривать его как изображение u. Только что нами вполне определенное отображение ψ системы U очевидно обладает свойством

$$\alpha. \quad \psi(U) \in U,$$

т. е. U будет отображено помощью ψ в себе самой. Если далее u и v — различные числа в U, то мы положим ради симметрии (по 90), что $u < v$; тогда по 117 из определения ψ следует, что $\psi(u) \leqslant v$ и $v < \psi(v)$, т. е., в силу 95, $\psi(u) < \psi(v)$. Таким образом, в силу 90, изображения $\psi(u)$ и $\psi(v)$ различны, т. е.

δ. отображение ψ — однозначно (подобно).

Если теперь u_1 — наименьшее число (96) системы U, то всякое в U содержащееся число $u \geqslant u_1$, а так как вообще $u < \psi(u)$, то (в силу 95) $u_1 < \psi(u)$, т. е. u_1 (в силу 90) отлично от $\psi(u)$, т. е.

γ. элемент u_1 системы U не содержится в $\psi(U)$.

Таким образом $\psi(U)$ — правильная часть системы U, и поэтому, в силу 64, система U — бесконечная система. Если мы теперь согласно с 44 означим через $\psi_0(V)$ соответствующую отображению ψ цепь системы V, где V — какая-либо часть U, то нам остается еще только показать, что

$$\beta. \quad U = \psi_0(u_1).$$

В самом деле, так как всякая такая цепь $\psi_0(V)$ на основании ее определения (44) является частью системы U, отображенной в себе самой помощью ψ, то ясно, что $\psi_0(u_1) \in U$; в свою очередь из 45 очевидно, что находящийся в U элемент u_1 наверное принадлежит также и $\psi_0(u_1)$; но допустим противное, что существуют в U такие элементы, которых нет в $\psi_0(u_1)$, тогда среди них, в силу 96, должно быть наименьшее число w, и так как оно в силу только что сказанного отлично от u_1 — наименьшего числа системы U, то по 117 в U должно быть ближайшее число v, меньшее чем w, т. е. $w = \psi(v)$, но так как $v < w$, то v, на основании определения w, должно находиться в $\psi_0(u_1)$, а отсюда, в силу 55, следует, что $\psi(v)$, т. е. w также должно находиться в $\psi_0(u_1)$; но этот результат противоречит определению w, поэтому выше сделанное предположение ложно; таким образом $U \in \psi_0(u_1)$ и следовательно $U = \psi_0(u_1)$, как утверждает теорема. Из условий α, β, γ и δ согласно 71 вытекает, что U является приведенной в порядок помощью ψ просто бесконечной системой.

123. Теорема. В силу 121 и 122, какая-либо часть T числового ряда N — конечна или бесконечна смотря по тому, существует или нет в системе наибольшее число.

§ 9

Определение отображения числового ряда помощью индукции

124. Во всем последующем мы будем означать по-прежнему малыми латинскими буквами числа и вообще удержим все обозначения предыдущих §§ 6–8, в то же время под Ω мы будем понимать произвольную систему, элементы коей могут и не содержаться в N.

125. Теорема. Если θ — произвольное подобное или неподобное отображение некоторой системы Ω в себе самой, и если нам задан некоторый вполне определенный элемент ω в системе Ω, то каждому числу n соответствует одно и только одно отображение ψ_n соответствующей числовой системы Z_n, определенной в 98, удовлетворяющее следующим условиям[1]:

I. $\psi_n(Z_n) \in \Omega$,
II. $\psi_n(1) = \omega$,
III. $\psi_n(t') = \theta\psi_n(t)$, если $t < n$, причем знак $\theta\psi_n$ имеет значение, обрисованное в 25.

Доказательство помощью полной индукции (80). Действительно,
ϱ. теорема — истинна для $n = 1$: в этом случае, в силу 102, система Z_n состоит из единственного числа 1, и отображение ψ_1 поэтому вполне определено условием II и притом так, что условие I — выполнено, а условие III вовсе отпадает;
б. если теорема — справедлива для какого-либо числа n, то покажем, что она законна также и для следующего числа $p = n'$, причем начнем с доказательства того, что может существовать одно только соответствующее отображение ψ_p системы Z_p. В самом деле, если отображение ψ_p удовлетворяет условиям:

[1] Ради ясности мы здесь и в последующей теореме 126 ввели отдельно условие I, хотя в сущности оно — следствие условий II и III.

I$'$. $\psi_p(Z_p) \in \Omega$,
II$'$. $\psi_p(1) = \omega$,
III$'$. $\psi_p(m') = \theta\psi_p(m)$ при $m < p$,

то в нем содержится также (в силу 21 и потому, что $Z_n \in Z_p$ (107)) отображение системы Z_n, которое очевидно удовлетворяет тем же самым условиям I, II, III, как и ψ_n, а потому оно совершенно совпадает с ψ_n; поэтому для всех чисел, в Z_n содержащихся, т. е. тех чисел m, кои меньше p и $\leqslant n$, должно быть

$$\psi_p(m) = \psi_n(m), \tag{m}$$

и, как частный случай,

$$\psi_p(n) = \psi_n(n). \tag{n}$$

Так как далее p, на основании 105 и 108, есть единственное в системе Z_p число, отсутствующее в Z_n, и так как в силу III$'$ и (n) должно быть также еще

$$\psi_p(p) = \theta\psi_n(n), \tag{p}$$

то справедливость нашего утверждения о существовании единственного только отображения ψ_p системы Z_p, удовлетворяющего условиям I$'$, II$'$ и III$'$, обнаруживается сейчас же, так как ψ_p только что выведенными условиями (m) и (p) вполне сводится на ψ_n. Теперь мы должны показать, что обратно этими условиями (m) и (p) вполне определенное отображение ψ_p системы Z_p действительно удовлетворяет условиям I$'$, II$'$ и III$'$. Очевидно условие I$'$ получается из (m) и (p) с обращением внимания на I и на то, что $\theta(\Omega) \in \Omega$. Точно так же условие II$'$ вытекает из (m) и II, так как число 1 по 99 находится в Z_n. Справедливость же условия III$'$ для чисел m меньших n вытекает из (m) и III, а для остающегося еще числа $m = n$ вытекает из (p) и (n). Таким образом всем вышеизложенным мы добились того, что из справедливости нашей теоремы для числа n следует ее справедливость для следующего числа p.

126. Теорема об определении помощью индукции. Если θ — произвольное (подобное или неподобное) отображение некоторой системы Ω в себе самой, и если ω — некоторый определенный элемент в Ω, то существует одно и только одно отображение ψ числового ряда N, удовлетворяющее условиям:

I. $\psi(N) \in \Omega$,
II. $\psi(1) = \omega$,
III. $\psi(n') = \theta\psi(n)$, где n — означаем любое число.

Доказательство. Если действительно существует такое отображение ψ, то в нем (по 21) должно заключаться также отображение ψ_n системы Z_n, удовлетворяющее данным в 125 условиям I, II и III, тогда, так как существует всегда одно и только одно такое отображение ψ_n, необходимо мы должны иметь

$$\psi(n) = \psi_n(n). \tag{n}$$

Так как этим ψ — определено совершенно, то отсюда следует, что такое отображение ψ может быть только одно (сравни заключение 130). Что, обратно, определенное условием (n) отображение ψ удовлетворяет также нашим условиям I, II и III, — вытекает с легкостью из (n) при обращении внимания на доказанные свойства I и II, равенство (p) в 125.

127. Теорема. При сделанных в предыдущей теореме предположениях имеет место равенство

$$\psi(T') = \theta\psi(T),$$

где T — какая-либо часть числового ряда N.

Доказательство. Если t означает всякое число системы T, то $\psi(T')$ состоит из всех элементов $\psi(t')$, а $\theta\psi(T)$ из всех элементов $\theta\psi(t)$; отсюда следует наша теорема, так как $\psi(t') = \theta\psi(t)$ (согласно III в 126).

128. Теорема. Если мы удержим те же предположения и если мы будем означать через θ_0 цепи (44), которые соответствуют отображениям θ системы Ω в себе самой, то

$$\psi(N) = \theta_0(\omega).$$

Доказательство. Помощью полной индукции (80) мы прежде всего покажем, что

$$\psi(N) \in \theta_0(\omega),$$

т. е. что всякое изображение $\psi(n)$ является элементом $\theta_0(\omega)$. Действительно,

ϱ. эта теорема — истинна для случая $n = 1$, так как (в силу 126.II) $\psi(1) = \omega$ и так как (согласно 45) $\omega \in \theta_0(\omega)$;

б. если теорема справедлива для какого-либо числа n, т. е. если $\psi(n) \in \theta_0(\omega)$, то согласно 55 также $\theta(\psi(n)) \in \theta_0(\omega)$, т. е. (на основании 126.III) $\psi(n') \in \theta_0(\omega)$, и мы видим, что теорема верна также для следующего числа n'.

Для того, чтобы доказать далее, что каждый элемент ν цепи $\theta_0(\omega)$ содержится в $\psi(N)$, т. е. что

$$\theta_0(\omega) \in \psi(N),$$

мы опять воспользуемся полной индукцией, именно применим к системе Ω и к отображению θ теорему 59. Действительно,

ϱ. элемент $\omega = \psi(1)$ заключается в $\psi(N)$;

$б$. если ν — элемент общий цепи $\theta_0(\omega)$ и системы $\psi(N)$, то $\nu = \psi(n)$, где n означает какое-либо число, а отсюда, в силу 126.III, следует, что $\theta(\nu) = \theta\psi(n) = \psi(n')$, т. е. $\theta(\nu)$ также принадлежит системе $\psi(N)$. Из доказанных теорем

$$\psi(N) \in \theta_0(\omega) \quad \text{и} \quad \theta_0(\omega) \in \psi(N),$$

в силу 5, вытекает желаемое: $\psi(N) = \theta_0(\omega)$.

129. Теорема. При тех же самых предположениях вообще имеет место равенство

$$\psi(n_0) = \theta_0(\psi(n)).$$

Доказательство помощью полной индукции (80). Действительно,

ϱ. теорема справедлива на основании 128 для $n = 1$, так как $1_0 = N$ и $\psi(1) = \omega$;

$б$. если теорема справедлива для какого либо числа n, то

$$\theta(\psi(n_0)) = \theta(\theta_0(\psi(n))),$$

а так как, в силу 127 и 75,

$$\theta(\psi(n_0)) = \psi(n_0'),$$

на основании же 57 и 126.III

$$\theta(\theta_0(\psi(n))) = \theta_0(\theta(\psi(n))) = \theta_0(\psi(n')),$$

то наше первое равенство преобразуется в

$$\psi(n_0') = \theta_0(\psi(n')),$$

т. е. теорема справедлива также для числа n', следующего за n.

130. Замечание. Прежде чем приступить к важнейшим приложениям теоремы об определении помощью индукции, доказанной в 126, (§§ 10–14), следует обратить внимание на одно обстоятельство, благодаря которому только что упомянутая теорема существенным образом отличается от теоремы об индукции, доказанной в 80, или же в 59 и 60, как бы ни казалось родство между ними очень близким.

В самом деле, теорема 59 является вполне общей для всякой цепи A_0, если только A служит какой-либо частью некоторой — помощью произвольного отображения φ отображенной в себе самой — системы S (§ 4); совершенно иначе обстоит дело с теоремой 126, которая предполагает только существование лишенного противоречий (однозначного) отображения ψ просто бесконечной системы 1_0. Если бы мы захотели (при удержании прежних предположений относительно Ω и θ) в этой теореме вместо числового ряда 1_0 взять произвольную цепь A_0 из некоторой цепи упомянутой выше S и определить ψ, — отображение, системы A_0 в Ω, например, совершенно так же, как это сделано в 126, II и III, т. е. чтобы

ϱ. каждому элементу a в A соответствовал определенный выбранный из Ω элемент $\psi(a)$, и

$б$. для каждого находящегося в A_0 элемента n и его изображения $n' = \varphi(n)$ имело место условие $\psi(n') = \theta(\psi(n))$, то очень часто нам случалось бы вовсе не иметь такого отображения ψ, так как условия ϱ и $б$ могут противоречить друг другу даже тогда, когда бы мы ограничили свободу выбора соответствия в пункте ϱ надлежащим образом, имея в виду $б$. Вот пример, достаточный для того, чтобы убедиться в сказанном. Если система S, состоящая из двух различных элементов a и b, с помощью φ отображена в себе самой так, что $a' = b$, $b' = a$, то очевидно $a_0 = b_0 = S$; пусть далее состоящая из трех элементов α, β и γ система Ω помощью θ также отображена в себе самой так, что $\theta(\alpha) = \beta$, $\theta(\beta) = \gamma$, $\theta(\gamma) = \alpha$; если теперь мы будем искать такое отображение ψ системы a_0 в Ω, чтобы $\psi(a) = \alpha$ и, кроме того, чтобы для всякого содержащегося в a_0 элемента n всегда было $\psi(n') = \theta\psi(n)$, то мы сейчас же натолкнемся на противоречие: дело в том, что для $n = a$ имеем $\psi(b) = \theta(\alpha) = \beta$, а отсюда для $n = b$ имеем $\psi(a) = \theta(\beta) = \gamma$, между тем как $\psi(\alpha) = \alpha$.

Но если отображение ψ системы A_0 в Ω, удовлетворяющее условиям ϱ и $б$ без противоречия, существует, то из 60 без затруднений видно, что оно — вполне определено, потому что, если отображение χ удовлетворяет тем же самым условиям, то мы имеем вообще $\chi(n) = \psi(n)$, так как эта теорема на основании ϱ законна для всех содержащихся в A элементов $n =$

$= a$ и так как она в силу своей законности для элемента n системы A_0 на основании $б$ законна также и для его изображения n'.

131. Для того, чтобы обрисовать ясней поле применимости нашей теоремы 126, мы здесь прибавим к сказанному одно рассуждение, которое является полезным также и для других исследований, например, для так называемой теории групп.

Мы рассматриваем систему Ω, элементы коей находятся между собой в известного рода связи, обнаруживающейся в том, что из некоторого элемента ν под влиянием некоторого элемента ω получается всегда снова вполне определенный элемент той же самой системы Ω, который мы означим через $\omega \cdot \nu$ или $\omega\nu$ и который, вообще говоря, нужно отличать от $\nu\omega$. Мы можем понимать это еще в том смысле, что каждому определенному элементу ω соответствует некоторый вполне определенный, например, помощью отображения системы $\dot{\omega}$ в себе самой, которое означим через $\dot{\omega}$, элемент ν, если только каждый элемент ν дает вполне определенное изображение $\dot{\omega}(\nu) = \omega\nu$.

Если мы применим теперь к системе Ω и ее элементу ω теорему 126, заменяя в последней означенное через θ отображение нашим $\dot{\omega}$, то каждому числу n будет отвечать некоторый вполне определенный, содержащийся в Ω, элемент $\psi(n)$, который мы теперь означим через ω^n и временно назовем n-й степенью ω; это понятие вполне определено наложенными на него условиями

II. $\omega' = \omega$,
III. $\omega^{n'} = \omega\omega^n$,

а его существование обосновано доказательством теоремы 126.

Если же вышеупомянутая связь элементов обладает еще и таким свойством, что для произвольных элементов μ, ν и ω всегда выполнено $\omega(\nu\mu) = (\omega\nu)\mu$, то имеют место также такие теоремы

$$\omega^{n'} = \omega^n\omega, \quad \omega^m\omega^n = \omega^n\omega^m;$$

доказательство их легко производится помощью полной индукции (80), и мы предоставляем произвести его читателю.

Предыдущее общее рассуждение можно непосредственно применить к следующему примеру. Если S — система произвольных элементов, а Ω — соответствующая система, элементы которой представляют собой все отображения ν системы S в себе самой (36), то эти элементы составляются по

способу 25, так как $\nu(S) \in S$, и так как из таких отображений ν и ω составное отображение $\omega\nu$ снова является элементом Ω. Тогда все элементы ω^n являются также отображениями S в себе самой, и мы скажем, что они происходят путем повторения отображения ω. Мы хотим теперь обнаружить ту простую связь, которая существует между этим понятием и понятием о цепи $\omega_0(A)$, обрисованном в п. 44, причем A снова будет означать у нас какую-либо часть S. Если мы означим ради краткости произведенное путем отображения ω^n изображение $\omega^n(A)$ через $A_{n'}$, то из III и 25 видно, что $\omega(A_n) = A_{n'}$.

Отсюда помощью полной индукции (80) мы легко увидим, что все эти системы A_n суть части цепи $\omega_0(A)$. Действительно,
ϱ. это утверждение, в силу 50, имеет место для $n = 1$, и
$б$. если оно имеет место для числа n, то из 55 и из условия $A_{n'} = \omega(A_n)$ вытекает, что оно справедливо также и для следующего числа n'.

Далее, в силу 45, $A \in \omega_0(A)$, поэтому из 10 вытекает, что система K, составленная из всех изображений A_n, является частью системы $\omega_0(A)$. Обратно, так как (в силу 23) $\omega(K)$ составляется из $\omega(A) = A_1$ и всех систем $\omega(A_n) = A_{n'}$, т. е., в силу 78, из всех систем A_n, которые по 9 суть части K, то (в силу 10) $\omega(K) \in K$, таким образом K есть цепь (37), а так как $A \in K$ по 9, то, в силу 47, следует также, что $\omega_0(A) \in K$. Иными словами $\omega_0(A) = K$, т. е. имеет место следующая теорема: «Если ω — какое-либо отображение системы S в себе самой, а A — какая-либо часть системы S, то соответствующая отображению ω цепь системы A состоит из A и всех получающихся помощью повторения отображения ω изображений $\omega^n(A)$».

Предоставляем читателю с этим новым пониманием цепи прийти к прежним теоремам 57 и 58.

§ 10

Классы просто бесконечных систем

132. Теорема. Все просто бесконечные системы подобны числовому ряду N, а следовательно друг другу (33).

Доказательство. Пусть просто бесконечная система Ω помощью отображения θ приведена в порядок (71), и пусть ω будет ее основным элементом; если мы через θ_0 означим снова отображение соответствующих цепей (44), то, в силу 71, имеет место следующее:

α. $\theta(\Omega) \in \Omega$;

β. $\Omega = \theta_0(\omega)$;

γ. ω отсутствует в $\theta(\Omega)$;

δ. отображение θ однозначно.

Если ψ означает определенное в 126 отображение числового ряда N, то из β и 128 имеем сейчас же

$$\psi(N) = \Omega,$$

и мы должны только еще показать, согласно 32, что ψ есть однозначное отображение, т. е. (26) что различным числам m и n соответствуют различные изображения $\psi(m)$ и $\psi(n)$. Ради симметрии мы, согласно 90, допустим, что $m > n$, т. е. $m \in n'_0$ и доказательство теоремы сводится лишь к обнаружению того, что $\psi(n)$ не входит в $\psi(n'_0)$, т. е. не входит в $\theta\psi(n_0)$ в силу 127. Докажем это для всякого числа n помощью полной индукции (80). В самом деле,

ϱ. эта теорема — справедлива согласно γ для $n = 1$, так как $\psi(1) = \omega$ и $\psi(1_0) = \psi(N) = \Omega$,

б. если теорема — истинна для какого-либо числа n, то она имеет место также для следующего числа n': если бы $\psi(n')$, т. е. $\theta\psi(n)$, содержалось в $\theta\psi(n'_0)$, то, в силу δ и 27, в $\psi(n'_0)$ должно бы было входить $\psi(n)$, между тем наше допущение говорит нам как раз противоположное.

133. Теорема. Всякая система, которая подобна некоторой просто бесконечной системе, а следовательно, в силу 132, 33, также и числовому ряду N, представляет собой систему просто бесконечную.

Доказательство. Если Ω — некоторая подобная числовому ряду N система, то, согласно 32, существует такое подобное отображение ψ системы N, что

$$\text{I.}\quad \psi(N) = \Omega,$$

положим еще

$$\text{II.}\quad \psi(1) = \omega.$$

Если мы означим символом $\overline{\psi}$, согласно 26, обратное, также подобное (однозначное) отображение системы Ω, то каждому элементу ν системы Ω соответствует некоторое определенное число $\overline{\psi}(\nu) = n$, такое, которого изображение $\psi(n) = \nu$. Далее числу n отвечает некоторое вполне определенное число $n' = \varphi(n)$, следующее за n, а этому n' в системе Ω в свою очередь отвечает определенный элемент $\psi(n')$; таким образом каждому элементу ν системы Ω соответствует некоторый определенный элемент $\psi(n')$ той же самой системы, который мы, как изображение ν, означим через $\theta(\nu)$. Этим самым отображение θ системы Ω в себе самой совершенно определено[1], и для доказательства нашей теоремы мы должны только показать, что Ω помощью θ становится просто бесконечной приведенной в порядок системой (71), т. е. что все приведенные в доказательстве 132 условия α, β, γ и δ — выполнены.

Условие α непосредственно усматривается из определения θ. Так как, далее, каждому числу n соответствует элемент $\nu = \psi(n)$, для которого имеет место $\theta(\nu) = \psi(n')$, то вообще должно иметь место равенство

$$\text{III.}\quad \psi(n') = \theta\psi(n),$$

откуда видно, имея в виду еще I, II и α, что отображения θ и ψ удовлетворяют всем условиям теоремы 126; поэтому условие β вытекает из 128 и I.

Согласно 127 и I имеем

$$\psi(N') = \theta\psi(N) = \theta(\Omega),$$

а присоединяя сюда условие II и подобие отображения ψ, мы получаем условие γ, так как иначе $\psi(1)$ заключалось бы в $\psi(N')$, но тогда и число 1

[1] Очевидно θ согласно 25 составлено из $\overline{\psi}$, φ и ψ, т. е. есть $\psi\varphi\overline{\psi}$.

должно было бы находиться в N' (27), что невозможно (по 71, γ). Наконец, если μ и ν — элементы системы Ω, а m и n — соответствующие числа — их изображения, т. е. $\psi(m) = \mu$, $\psi(n) = \nu$, то из допущения $\theta(\mu) = \theta(\nu)$ следовало бы $\psi(m') = \psi(n')$ (см. выше), откуда в силу подобия ψ и φ имели бы: $m' = n'$ и $m = n$, но тогда $\mu = \nu$. Таким образом условие δ также имеет место.

134. Замечание. На основании двух предшествующих теорем 132 и 133 все просто бесконечные системы представляют очевидно класс в смысле 34. Далее, обращая внимание на 71 и 73, мы видим, что каждая теорема о числах, т. е. об элементах n некоторой, при помощи отображения φ приведенной в порядок, просто бесконечной системы N, и притом такая теорема, в которой мы отвлекаемся совершенно от специальных свойств элементов n и ведем речь только лишь о понятиях, основанных на идее порядка, обладает вполне общей законностью также и для всякой другой помощью отображения θ правильно распределенной просто бесконечной системы Ω, элементы коей ν; причем переход от системы N к системе Ω происходит помощью изученного в 132 и 133 отображения ψ, которое каждый элемент n системы N превращает в некоторый элемент ν системы Ω (пример: перевод какой-либо арифметической теоремы с одного языка на другой). Этот элемент ν мы можем назвать n-м элементом в системе Ω, а само число n есть n-е в числовом ряде. То же самое значение, каким обладает в отношении законов системы N отображение φ, такое, что за каждым элементом n следует строго определенный $\varphi(n) = n'$, будет иметь в отношении тех же самых законов системы Ω отображение θ, полученное при помощи отображения ψ, если только за элементом n, преобразованным в $\nu = \psi(n)$, следует новый элемент $\theta(\nu) = \psi(n')$, преобразованный из n'; поэтому мы имеем полное право сказать, что φ помощью ψ превращено в θ, что символически выражается $\theta = \psi\varphi\overline{\psi}$ или $\varphi = \overline{\psi}\theta\psi$.

После всего сказанного мы думаем, что данное в 73 определение понятия о числах вполне обосновано. Перейдем теперь к дальнейшим применениям теоремы 126.

§ 11

Сложение чисел

135. Определение. Ближайшей задачей является применение обрисованного в 126 отображения ψ числового ряда N, которое можно представить как некоторую вполне определенную *функцию* $\psi(n)$, к тому случаю, когда означенная там система Ω, в которой содержится изображение $\psi(N)$, представляется самим числовым рядом N, так как для такой системы Ω отображение θ системы в себе самой мы уже имеем, именно отображение θ в этом случае будет как раз тем отображением φ, благодаря которому N становится приведенной в порядок просто бесконечной системой (71 и 73). В этом случае $\Omega = N$, $\theta(n) = \varphi(n) = n'$ и таким образом

$$\text{I.} \quad \psi(N) \in N;$$

остается только еще для полного определения ψ выбрать по произволу элемент ω из Ω, т. е. из N. Если мы положим $\omega = 1$, тогда ψ будет тождественным отображением (21) системы N, так как оно вообще удовлетворяет условиям:

$$\psi(1) = 1 \quad \text{и} \quad \psi(n') = (\psi(n))'$$

благодаря равенству $\psi(n) = n$. Если же мы хотим произвести какое-либо другое отображение ψ системы N, то за ω нужно выбрать какое-либо отличное от 1 содержащееся в N' согласно 78 число m', причем само m означает какое-либо число (не изображение). Так как отображение ψ, очевидно, зависит от выбора этого числа m, то мы означим изображение $\psi(n)$ произвольного числа n символом $m + n$ и назовем это число *суммой*, получаемой из числа m *прибавлением* числа n, или просто суммой чисел m и n. Она, согласно 126, вполне определена условиями[1]:

$$\text{II.} \quad m + 1 = m';$$

$$\text{III.} \quad m + n' = (m + n)'.$$

[1]Настоящее, непосредственно на теореме 126 основанное определение сложения кажется нам простейшим.

136. Теорема $m' + n = m + n'$.

Доказательство помощью полной индукции (80). Действительно,
ϱ. теорема верна для $n = 1$, так как (в силу 135.II)

$$m' + 1 = (m')' = (m+1)',$$

а, в силу 135.III,

$$(m+1)' = m + 1';$$

б. если теорема верна для какого-либо числа n, и если мы положим следующее число $n' = p$, то

$$m' + n = m + p,$$

т. е. также должно быть и

$$(m' + n)' = (m + p)';$$

в силу 135.III,

$$m' + p = m + p',$$

т. е. теорема верна и для следующего числа p.

137. Теорема. $m' + n = (m+n)'$.
Доказательство основывается на 136 и 135.III.

138. Теорема. $1 + n = n'$.

Доказательство помощью полной индукции (80). Действительно,
ϱ. теорема верна, согласно 135.II, для $n = 1$;
б. если она верна для числа n, и если мы положим $p = n'$, то $1 + n = p$, следовательно, $(1+n)' = p'$, и, в силу 135.III, $1 + p = p'$, т. е. теорема верна для следующего числа.

139. Теорема. $1 + n = n + 1$.
Доказательство следует из 138 и 135.II.

140. Теорема. $m + n = n + m$.

Доказательство с помощью полной индукции (80).
ϱ. Теорема верна, согласно 139, для $n = 1$.

При пользовании развитым в 131 понятием можно сумму $m + n$ определить также через $\varphi^n(m)$ или через $\varphi^m(n)$, причем φ имеет вышеуказанное значение. Для доказательства полного согласия этих определений с вышеданным, нужно только (согласно 126) показать, что, если $\varphi^n(m)$ или $\varphi^m(n)$ мы означим через $\psi(n)$, то будут выполнены условия $\psi(1) = m'$, $\psi(n') = \varphi\psi(n)$, что помощью полной индукции (80), имея в виду 131, легко можно получить.

б. Если она верна для какого-либо числа n, то сейчас же следует $(m+n)' = (n+m)'$, т. е. (в силу 135.III)

$$m + n' = n + m',$$

а (в силу 136) $m + n' = n' + m$, т. е. теорема верна для следующего числа n'.

141. Теорема. $(l+m) + n = l + (m+n)$.

Доказательство помощью полной индукции (80).
ϱ. Теорема истинна для $n = 1$, так как (согласно 135.II, III) $(l+m) + 1 = (l+m)' = l + (m+1)$.
б. Если она законна для какого-либо числа n, то сейчас же получаем

$$((l+m)+n)' = (l+(m+n))',$$

или, в силу 135.III,

$$(l+m) + n' = l + (m+n)' = l + (m+n'),$$

т. е. теорема — верна для следующего числа.

142. Теорема. $m + n > m$.

Доказательство помощью полной индукции (80).
ϱ. Теорема — верна для $n = 1$ в силу 135.II и 91.
б. Если она верна для какого-либо числа n, то она верна, в силу 95, также и для следующего n', ибо (135.III и 91)

$$m + n' = (m+n)' > m + n.$$

143. Теорема. Условия $m > a$ и $m + n > a + n$ равнозначны.

Доказательство помощью полной индукции (80).
ϱ. Теорема на основании 135.II и 94 справедлива для $n = 1$.
б. Если она верна для какого-либо числа n, то она законна также и для следующего n', так как условие $m + n > a + n$, согласно 94, равнозначно с $(m+n)' > (a+n)'$, т. е., в силу 135.III,

$$m + n' > a + n'.$$

144. Теорема. Если $m > a$ и $n > b$, то также

$$m + n > a + b.$$

Доказательство. Из наших предположений, согласно 143, следует

$$m+n>a+n \quad \text{и} \quad n+a>b+a,$$

или (в силу 140) $a+n>a+b$, откуда, согласно 95, вытекает наша теорема.

145. Теорема. Если $m+n=a+n$, то $m=a$.

Доказательство. Если бы m не равнялось a, то по 90 или $m>a$, или $m<a$; соответственно этому по 143 было бы или

$$m+n>a+n \quad \text{или} \quad m+n<a+n,$$

что противоречит положению.

146. Теорема. Если $l>n$, то существует одно и только одно (по 145) число m такое, что $m+n=l$.

Доказательство помощью полной индукции (80).
ϱ. Теорема — верна для $n=1$, ибо, если $l>1$, т. е. (89) если l находится в N', т. е. является изображением m' некоторого числа m, то из 135.II вытекает, что $l=m+1$.
б. Если теорема верна для какого-либо числа n, то покажем, что она верна для следующего n'. Ведь, если $l>n'$, то, по 91 и 95, также $l>n$, и, следовательно, должно быть такое k, что условие $l+k=n$ выполнено. Так как k отлично от 1 (138) (иначе было бы $l=n'$), то оно, по 78, является изображением m' некоторого числа m, и, следовательно, $l=m'+n$ или $l=m+n'$ по 136.

§ 12

Умножение чисел

147. Определение. После того, как в предыдущем § 11 мы нашли бесконечную систему новых отображений числового ряда N в себе самом, мы можем каждым из них, согласно 126, снова воспользоваться с целью произвести еще новые отображения ψ системы N. Для этого мы полагаем $\Omega=N$ и $\theta(n)=m+n=n+m$, где m — некоторое определенное число, причем во всяком случае очевидно снова

$$\text{I.} \quad \psi(N) \in N.$$

Остается для полного определения ψ еще только выбрать по произволу элемент ω из N. Простейшим случаем будет тот, когда мы этот выбор поставим в известное согласие с выбором θ, именно мы положим $\omega=m$. Так как здесь вполне определенное отображение ψ зависит от этого числа m, то мы означим соответствующее произвольному числу n изображение $\psi(n)$ символом $m\times n$, или $m\cdot n$, или mn, и назовем это число *произведением*, которое происходит из числа m *умножением* на число n, или короче произведением чисел m и n. Последнее, в силу 126, очевидно совершенно определено условиями

$$\text{II.} \quad m\cdot 1=m,$$
$$\text{III.} \quad mn'=mn+m.$$

148. Теорема. $m'n=mn+n$.

Доказательство помощью полной индукции (80).
ϱ. Теорема — справедлива для $n=1$ согласно 147.II и 135.II.
б. Если она справедлива для какого-либо числа n, то мы имеем

$$m'n+m'=(mn+n)+m',$$

а отсюда (в силу 147.III, 141, 140, 136, 141, 147.III) получаем

$$m'n' = mn + (n + m') = mn + (m' + n) = mn + (m + n') = \\ = (mn + m) + n' = mn' + n',$$

т. е. теорема — законна и для следующего числа n'.

149. Теорема. $1 \cdot n = n$.

Доказательство помощью полной индукции (80).
ϱ. Теорема — истинна, в силу 147.II, для $n = 1$.
б. Если теорема справедлива для какого-либо числа n, то сейчас же имеем $1 \cdot n + 1 = n + 1$, т. е. (на основании 147.III и 135.II) $1 \cdot n' = n'$. Таким образом, теорема истинна и для следующего числа n'.

150. Теорема. $mn = nm$.

Доказательство помощью полной индукции (80).
ϱ. Теорема по 147.II и 149 справедлива для $n = 1$.
б. Если она законна для какого-либо числа n, то несомненно, что

$$mn + m = nm + m,$$

т. е. (по 147.III и 148) $mn' = m'n$. Теорема справедлива, следовательно, и для следующего числа n'.

151. Теорема. $l(m + n) = lm + ln$.

Доказательство помощью полной индукции (80).
ϱ. Теорема (по 135.II, 147.III и 147.II) справедлива для $n = 1$.
б. Если она справедлива для какого-либо числа n, то мы имеем

$$l(m + n) + l = (lm + ln) + l,$$

но по 147.III и 135.III

$$l(m + n) + l = l(m + n)' = l(m + n'),$$

а по 141 и 147.III

$$(lm + ln) + l = lm + (ln + l) = lm + ln',$$

таким образом $l(m + n') = lm + ln'$, т. е. теорема справедлива также для следующего числа n'.

152. Теорема. $(m + n)l = ml + nl$.
Доказательство вытекает из 151 и 150.

153. Теорема. $(lm)n = l(mn)$.

Доказательство помощью полной индукции (80).
ϱ. Теорема — верна (по 147.II) для $n = 1$.
б. Если она верна для какого-либо числа n, то получаем

$$(lm)n + lm = l(mn) + lm$$

или (по 147.III, 151 и 147.III) имеем

$$(lm)n' = l(mn + m) = l(mn'),$$

т. е. теорема верна и для следующего числа n'.

154. Замечание. Если бы мы в 147 не допускали вовсе соотношения между ω и θ, а положили бы $\omega = k$ и $\theta(n) = m + n$, то, в силу 126, мы получили бы менее простое отображение ψ числового ряда N: для числа 1 имели бы $\psi(1) = k$, а для всякого другого, представленного в виде n', было бы $\psi(n') = mn + k$, и, обращая внимание на предыдущие теоремы, мы легко убедились бы, что условие $\psi(n') = \theta\psi(n)$, т. е. $(n') = m + \psi(n)$, удовлетворяется для всех чисел n.

§ 13

Возвышение в степень чисел

155. Определение. Если мы снова в теореме 126 положим $\Omega = N$, $\omega = a$ и $\theta(n) = an = na$, то мы получим отображение ψ системы N, которое, во всяком случае, удовлетворяет условию

$$\text{I.} \quad \psi(N) \in N.$$

Соответствующее изображение $\psi(n)$ числа n мы означим символом a^n и назовем это число *степенью* числа a, называемого *основанием*, число n называется *показателем* a. Это понятие совершенно определяется условиями

$$\text{II.} \quad a^1 = a,$$

$$\text{III.} \quad a^{n\prime} = a \cdot a^n = a^n \cdot a.$$

156. Теорема. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Доказательство помощью полной индукции (80).
ϱ. Теорема по 135.II, 155.III и 155.II справедлива для $n = 1$;
б. Если она справедлива для какого-либо числа n, то имеем

$$a^{m+n} \cdot a = (a^m \cdot a^n)a.$$

По 155.III и 135.III

$$a^{m+n} \cdot a = a^{(m+n)\prime} = a^{m+n\prime},$$

а по 153 и 155.III

$$(a^m \cdot a^n) \cdot a = a^m(a^n \cdot a) = a^m \cdot a^{n\prime},$$

т. е. $a^{m+n\prime} = a^m \cdot a^{n\prime}$ — следовательно теорема справедлива также и для следующего числа n'.

157. Теорема. $(a^m)^n = a^{mn}$.

Доказательство помощью полной индукции (80).
ϱ. Теорема — истинна по 155.II и 147.II для $n = 1$.
б. Если она — справедлива для какого-либо числа n, то мы имеем сейчас же

$$(a^m)^n a^m = a^{mn} \cdot a^m,$$

но (по 155.III)

$$(a^m)^n a^m = (a^m)^{n\prime},$$

а (по 156 и 147.III)

$$a^{mn} \cdot a^m = a^{mn+m} = a^{mn\prime},$$

т. е. $(a^m)^{n\prime} = a^{mn\prime}$; следовательно теорема справедлива также и для следующего числа n'.

158. Теорема. $(ab)^n = a^n b^n$.

Доказательство помощью полной индукции (80).
ϱ. Теорема истинна (по 155.II) для $n = 1$.
б. Если она справедлива для какого-либо числа n, то (по 150, 153 и 155.III) имеем также

$$a(a^n b^n) = (a \cdot a^n) b^n = a^{n\prime} b^n,$$

и отсюда

$$((ab)^n a) b = (a^{n\prime} b^n) b.$$

Далее (по 153 и 155.III)

$$((ab)^n \cdot a) b = (ab)^n (ab) = (ab)^{n\prime},$$

также

$$(a^{n\prime} b^n) b = a^{n\prime} \cdot (b^n \cdot b) = a^{n\prime} b^{n\prime},$$

т. е. $(ab)^{n\prime} = a^{n\prime} \cdot b^{n\prime}$, т. е. теорема верна и для следующего числа n.

§ 14
Число элементов конечной системы

159. Теорема. Если Σ — некоторая бесконечная система, то каждая из определенных в 98 числовых систем Z_n однозначно отображаема в Σ (т. е. подобна некоторой части Σ), и обратно.

Доказательство. Если Σ — бесконечна, то, в силу 72, наверное существует такая часть T в Σ, которая — просто бесконечна, т. е. (по 132) подобна числовому ряду N, а потому (по 35) каждая система Z_n, как часть T, подобна некоторой части в T и следовательно подобна некоторой части в Σ.

Доказательство обратной теоремы, хотя оно и кажется простым, гораздо сложней. Если всякая система Z_n однозначно отображаема в Σ, то каждому числу n соответствует такое однозначное отображение α_n системы Z_n, что $\alpha_n(Z_n) \in \Sigma$. При существовании некоторого такого данного нам для исследований ряда таких отображений α_n, относительно которых мы ничего в дальнейшем не предполагаем, мы выводим при помощи теоремы 126 существование нового ряда таких отображений ψ_n, которые обладают следующим специальным свойством: всякий раз, как только $m \leqslant n$, т. е. (по 100) $Z_m \in Z_n$, отображение ψ_m части Z_n заключается (21) в отображении ψ_n системы Z_n, иными словами отображения ψ_m и ψ_n для всех, содержащихся в Z_m, чисел совершенно друг с другом совпадают, и всегда будет

$$\psi_m(m) = \psi_n(m).$$

Для того, чтобы упомянутую теорему применить для этой цели, мы будем понимать под Ω такую систему, элементами коей являются все вообще возможные однозначные отображения в системе Σ всех систем Z_n, а с помощью данных нам, также заключающихся в Ω, элементов α_n мы определим отображение θ системы Ω в себе самой следующим образом. Если β есть какой-либо элемент из Ω, например, представляет собой какое-либо однозначное отображение в Σ определенной системы Z_n, то система $\alpha_{n'}(Z_{n'})$ никак не может быть частью системы $\beta(Z_n)$, так как тогда (по 35) система $Z_{n'}$ была бы частью для Z_n, т. е. она (по 107) была бы подобна своей правильной части, следовательно была бы бесконечной, но это противоречит теореме 119. Поэтому в $Z_{n'}$ наверное существует одно число или несколько различных чисел p, таких, что $\alpha_{n'}(p)$ не заключается в $\beta(Z_n)$; из этих чисел p мы выбираем — исключительно ради определенности — всегда наименьшее k (96) и, так как $Z_{n'}$ (по 108) состоит из Z_n и n', определяем отображение γ системы $Z_{n'}$ под тем условием, чтобы для всех содержащихся в Z_n чисел m изображение $\gamma(m) = \beta(m)$ и кроме того $\gamma(n') = \alpha_{n'}(k)$; такое, очевидно, однозначное отображение γ в системе Σ системы $Z_{n'}$ мы рассматриваем как изображение $\theta(\beta)$ отображения β; этим самым отображение θ системы Ω в себе самой вполне определено.

После того, как фигурирующие в 126 вещи Ω и θ нами определены, мы выбираем, наконец, для означенного там через ω элемент α_1 из системы Ω; тогда отображение ψ числового ряда N в системе Ω (по 126) становится вполне определенным: оно, если мы соответствующее изображение $\psi(n)$ произвольного числа n означим теперь через ψ_n, удовлетворяет условиям

$$\text{II.}\quad \psi_1 = \alpha_1,$$
$$\text{III.}\quad \psi_{n'} = \theta(\psi_n).$$

Помощью полной индукции (80) мы увидим сейчас, что ψ_n — однозначное отображение системы Z_n в Σ. Действительно,
ϱ. это — справедливо в силу II для $n = 1$,
$б$. если же наше утверждение имеет место для какого-либо числа n, то из III и в силу характера описанного выше перехода θ от β к γ вытекает, что утверждение справедливо также и для следующего числа n'.

Точно также мы покажем помощью полной индукции (80), что, если m — какое-либо число, то вышеупомянутое свойство

$$\psi_n(m) = \psi_m(m)$$

действительно имеет место для всех чисел $n \geqslant m$, т. е., в силу 93 и 74, для всех чисел цепи m_0. Действительно,
ϱ. это непосредственно очевидно для $n = m$, и
$б$. если это является свойством некоторого числа, то из III и в силу свойства θ снова видно, что оно принадлежит также и числу n'. Теперь, установив специальное свойство наших новых рядов отображений ψ_n, мы в состоянии очень просто доказать нашу теорему.

Мы определяем отображение χ числового ряда, заставляя каждому числу n соответствовать изображение $\chi(n) = \psi_n(n)$; очевидно (по 21) все отображения ψ_n заключаются в этом отображений χ. Так как ψ_n было отображением Z_n в Σ, то мы непосредственно видим, что числовой ряд N помощью χ равным образом отображен в Σ, т. е. $\chi(N) \in \Sigma$. Пусть далее m и n — различные числа, и допустим ради симметрии по 90, что $m < n$; тогда в силу предыдущего $\chi(m) = \psi_m(m) = \psi_n(m)$, $\chi(n) = \psi_n(n)$; но так как ψ_n было однозначным отображением Z_n в Σ, а m и n — различные элементы системы Z_n, то $\psi_n(m)$ отлично от $\psi_n(n)$, т. е. $\chi(m)$ отлично от $\chi(n)$, иными словами χ — однозначное отображение системы N. Но так как N — бесконечная система по 71, то по 67 то же самое законно и для подобной ей системы $\chi(N)$, а следовательно по 68, так как $\chi(N)$ — часть Σ, законно также и для Σ.

160. Теорема. Система Σ — конечна или бесконечна смотря по тому, существует ей подобная система Z_n или нет.

Доказательство. Если Σ — конечна, то по 159 существует такая система Z_n, которая не может быть однозначно отображена в Σ; так как по 102 система Z_1 состоит из единственного числа 1 и, следовательно, является однозначно отображаемой в каждой системе, то наименьшее число k (96), для которого система Z_k не отображается однозначно в Σ, должно быть отлично от 1, т. е. по 78 должно равняться некоторому n', и так как $n < n'$ по 91, то очевидно существует некоторое подобное (однозначное) отображение ψ системы Z_n в Σ; если бы теперь $\psi(Z_n)$ было правильной частью Σ, т. е. в Σ был бы такой элемент α, которого нет в $\psi(Z_n)$, то, так как $Z_{n'} = \mathfrak{M}(Z_n, n')$, по 108, мы могли бы отображение ψ превратить в отображение ψ системы $Z_{n'}$ в Σ, полагая $\psi(n') = \alpha$; но согласно нашему допущению $Z_{n'}$ не отображается однозначно в Σ; поэтому $\psi(Z_n) = \Sigma$, т. е. Z_n и Σ — подобные системы. Но ведь, если система Σ — подобна некоторой конечной системе Z_n, то Σ по 119 и 67 — конечна.

161. Определение. Если Σ — некоторая конечная система, то по 160, 120 и 33 существует одно и только одно число n, которому отвечает некоторая, однозначно подобная системе Σ, система Z_n; такое число n называется численностью[1] содержащихся в системе Σ элементов (или же степенью (Grad) системы Σ), и мы скажем в этом случае, что Σ состоит из n элементов, или образует систему в n элементов, а число n говорит нам, *как много* заключается в Σ элементов[2]. Если числа употребляются для того лишь, что-

[1] Так мы переводим слово «Anzahl». — *Прим. пер.*

[2] Ради ясности и простоты на будущее время мы ограничим понятие о численности исключительно лишь конечными системами; если поэтому мы говорим о численности известных

бы точно выразить только что определенное свойство конечных систем, то они называются *кардинальными* или *количественными* числами.

Как только выбрано определенное однозначное отображение ψ системы Z_n, помощью которого становится $\psi(Z_n) = \Sigma$, то каждому содержащемуся в Z_n числу m (т.е. всякому числу $m \leqslant n$) соответствует некоторый определенный элемент $\psi(m)$ системы Σ, и обратно по 26 каждому элементу системы Σ помощью обратного отображения $\overline{\psi}$ соответствует определенное число m в Z_n. Очень часто обозначают все элементы системы Σ одной буквой, например α, приписывая ей различные числа, как значки, так что $\psi(m)$ можно означить через α_m.

Также говорят еще, что эти элементы *сосчитываются* и *приводятся* помощью ψ определенным образом *в порядок*, причем α_m называют m-м элементом системы Σ; если $m < n$, то $\alpha_{m'}$ называется *следующим* за α_m элементом, а α_n — *последним* элементом.

При таком *сосчитывании счета* элементов числа m снова являются порядковыми или ординальными числами (73).

162. Теорема. Все подобные некоторой конечной системе системы обладают одним и тем же числом элементов (одной и той же численностью).

Доказательство следует непосредственно из 33 и 161.

163. Теорема. Число (численность) содержащихся в Z_n элементов, т.е. тех чисел, которые не больше n, есть n.

Доказательство. По 32 система Z_n подобна себе самой.

164. Теорема. Если система состоит из единственного элемента, то число ее элементов равно 1, и обратно.

Доказательство непосредственно следует из 2, 26, 32, 102 и 161.

165. Теорема. Если T — правильная часть некоторой конечной системы Σ, то число элементов системы T меньше таковою же для системы Σ.

Доказательство. По 68 система T — конечная система, т.е. подобна некоторой системе Z_m, где m — означает численность элементов в T; пусть далее n будет численностью элементов в Σ, т.е. Σ подобна Z_n, то по 35 система T будет подобна некоторой правильной части E системы Z_n,

---

вещей, то этими словами выражается лишь, что система, элементы коей суть эти вещи, — конечна.

и по 33 системы Z_m и E подобны друг другу; если бы теперь было $n \leqslant m$, т.е. $Z_n \in Z_m$, то E по 7 также было бы правильной частью системы Z_m, и следовательно Z_m была бы бесконечной, но это противоречит 119; поэтому $m < n$ по 90, ч.т.д.

166. Теорема. Если $\Gamma = \mathfrak{M}(B, \gamma)$, где B — система n элементов, а γ — некоторый отсутствующий в B элемент из системы Γ, то Γ состоит из n' элементов.

Доказательство. Если $B = \psi(Z_n)$, где ψ означает некоторое подобное (однозначное) отображение системы Z_n, то по 105 и 108 мы всегда можем φ расширить до подобного же отображения системы $Z_{n'}$, полагая $\psi(n') = \gamma$, тогда будет очевидно $\Gamma = \psi(Z_{n'})$.

167. Теорема. Если γ — некоторый элемент из системы Γ, состоящей из n' элементов, то n — численность всех других элементов в Γ.

Доказательство. Если B означает совокупность всех отличных от γ элементов в Γ, то $\Gamma = \mathfrak{M}(B, \gamma)$; если теперь b — численность элементов конечной системы B, то по предыдущей теореме — численность элементов в Γ будет b', т.е. равна n', откуда по 26 следует, что $n = b$.

168. Теорема. Если A состоит из m элементов, а B из n, и A и B не имеют ни одного общего элемента, то система $\mathfrak{M}(A, B)$ состоит из $m + n$ элементов.

Доказательство помощью полной индукции (80).
ϱ. Теорема — справедлива для $n = 1$ по 166, 164, 135.II.
б. Если теорема имеет место для какого-либо числа n, то она законна также и для следующая числа n'. В самом деле, если Γ — система из n' элементов, то (по 167) можно положить $\Gamma = \mathfrak{M}(B, \gamma)$, где γ — какой-либо элемент, а B — система n других элементов в Γ. Если теперь A — система m элементов, каждый из которых отсутствует в Γ и следовательно в B, и если мы положим $\mathfrak{M}(A, B) = \Sigma$, то согласно допущению численность элементов в Σ есть $m + n$, а так как γ не входит в Σ, то по 166 численность содержащихся в $\mathfrak{M}(\Sigma, \gamma)$ элементов равна $(m + n)'$, т.е. (по 135.III) $m + n'$, но ведь, в силу 15, очевидно $\mathfrak{M}(\Sigma, \gamma) = \mathfrak{M}(A, B, \gamma) = \mathfrak{M}(A, \Gamma)$, то $m + n'$ будет численностью элементов в $\mathfrak{M}(A, \Gamma)$.

169. Теорема. Если A и B — конечные системы с числом элементов соответственно m и n, то $\mathfrak{M}(A, B)$ — конечная система, и численность ее элементов не больше $m + n$.

Доказательство. Если $B \in A$, то $\mathfrak{M}(A, B) = A$ и численность m элементов этой системы по 142 меньше $m + n$, как утверждает теорема. Но если B — не часть A, и T — система всех тех элементов в B, которые отсутствуют в A, то по 165 их численность $p \leqslant n$, и так как $\mathfrak{M}(A, B) = \mathfrak{M}(A, T)$, то по 143 численность этой системы есть $m + p$, а $m + p \leqslant m + n$.

170. Теорема. Всякая система, состоящая из некоторого конечного числа n конечных систем, конечна.

Доказательство помощью полной индукции (80).
ϱ. Теорема сама собой понятна для $n = 1$ в силу 8.
б. Если теорема имеет место для какого-либо числа n, и если Σ составлена из n' конечных систем, то пусть A будет одна из этих систем, а B — совокупность всех остальных систем; тогда численность последних по 167 есть n, и в силу нашего допущения B — конечная система. Но ведь очевидно $\Sigma = \mathfrak{M}(A, B)$, поэтому из 169 следует, что Σ — также конечная система.

171. Теорема. Если ψ — какое-либо неподобное отображение некоторой конечной системы Σ из n элементов, то численность элементов изображения $\psi(\Sigma)$ меньше n.

Доказательство. Если мы из всех тех элементов системы Σ, которые обладают одним и тем же изображением, будем выбирать всякий раз произвольно только *по одному*, то система T всех этих выбранных элементов, очевидно, является правильной частью системы Σ, так как ψ — неподобное отображение системы Σ (26). Вместе с тем очевидно, что содержащееся в ψ отображение этой части T (21) есть однозначное (подобное) и $\psi(T) = \psi(\Sigma)$; поэтому система $\psi(\Sigma)$ подобна некоторой правильной части T системы Σ, и мы при помощи 162 и 165 получаем теорему.

172. Заключительное замечание. Хотя только что было доказано, что численность m элементов системы $\psi(\Sigma)$ меньше численности n системы Σ, все же в некоторых случаях мы часто будем говорить, что численность элементов системы $\psi(\Sigma)$ равна n. Но только тогда, вполне естественно, слово «численность» нужно понимать в несколько другом, отличном от настоящего (161), смысле; именно, если α — какой-либо элемент системы Σ, и a — численность тех элементов системы Σ, которые обладают одним и тем же изображением $\psi(\alpha)$, то $\psi(\alpha)$ — элемент системы $\psi(\Sigma)$ — будет понимаем как заместитель a элементов, которые, по крайней мере по своему происхождению, могут быть понимаемы как отличные друг от друга,

и $\psi(\alpha)$ в этом случае войдет в счет как a-кратный элемент системы $\psi(\Sigma)$. Благодаря этому, мы приходим во многих случаях к очень полезным понятиям о системах, в которых каждый элемент наделен известным числом (частотой), показывающим, сколь часто один и тот же элемент сосчитывается, фигурирует как элемент системы. Выше, например, мы могли бы сказать, что n есть численность сосчитанных в этом смысле элементов $\psi(\Sigma)$, тогда как m — численность действительно различных элементов этой системы совпадает с численностью элементов T. Подобного рода уклонения от первоначального смысла какого-либо искусственно созданного выражения (положения), являющиеся не чем иным, как обобщениями первоначальных понятий, в математике происходят очень часто; но входить глубже по этому вопросу не является целью настоящей работы.

Дедекинд Рихард

Что такое числа и для чего они служат?

Дизайнер ?. ?. ?
Технический редактор ?. ?. ?
Компьютерный набор и верстка ?. ?. ?
Корректор ?. ?. ?

Подписано в печать 28.08.2014. Формат $60 \times 84\ ^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. ???. Уч. изд. л. ????.
Гарнитура ???. Бумага офсетная № 1.
Тираж ???? экз. Заказ № 12-??.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
http://shop.rcd.ru   E-mail: mail@rcd.ru   Тел./факс: +7 (3412) 50-02-95