ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ТВЕРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

Н.Д.Дроздов

ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Тверь 2006

УДК 51-7 (075.8)
ББК В1я73-1
Д 75

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор Сиротинин Е.С.,
доктор экономических наук, заведующая лабораторией проблем региональной экономики, доцент Лапушинская Г.К.

Н.Д.Дроздов
История и методология прикладной математики. Учебное пособие, Тверь: Твер. гос. ун-т, 2006. 303 с., рис. 6, библ. 12

Учебное пособие предназначено для студентов университетов, обучающихся на факультетах прикладной математики. Пособие содержит существенно расширенный материал лекционного курса «История и методология прикладной математики», прочитанного на отделении магистратуры факультета прикладной математики и кибернетики Тверского гoударственного университета 1997-1999 гг. Раздел пособия, содержащий методологию и логику прикладных исследований, может быть полезным для лиц, не окончивших соответствующие факультеты университетов, но занимающихся прикладными математическими исследованиями в самых различных областях науки и техники, т.е. использующих математические модели для решения практических задач. Особое внимание в этом разделе уделено проблеме постановки задачи в реальных условиях работы исследователей.

УДК 51-7 (075.8)
ББК В1я73-1

Печатается по решению методической комиссии факультета ПМиК ТвГУ

Содержание

Предисловие

Стимулом к написанию пособия явилось то, что при обучении студентов на факультетах прикладной математики университетов обычно недостаточно внимания уделяется особенностям методологии и логике прикладной математики, в том числе методологическим аспектам моделирования. Пренебрежение этой необходимой для подготовки прикладных математиков областью знаний особенно отчетливо проявляется на младших курсах при изучении основ математики, т.е. когда закладываются основы научного мировоззрения будущего специалиста. Что касается методических аспектов моделирования, то непонимание их важности характерно, в той или иной мере, для всего периода обучения.

При отсутствии понимания особенностей методологии и логики прикладной математики, специалисты - прикладные математики, обладая достаточными теоретическими математическими знаниями, оказываются беспомощными в применении своих знаний для решения конкретных задач. Им приходится переучиваться и, что особенно печально, при таком "переучивании" происходит, как правило, приспособление молодого специалиста к установившимся подходам к решению прикладных проблем со всеми вытекающими отсюда последствиями - говорить о вкладе молодого специалиста в ускорение научно-технического прогресса уже не приходится. Явления застоя в наибольшей степени заметны в управленческих структурах, где сегодня наиболее опасны традиционный волюнтаризм при решении возникающих проблем и вопиющая неграмотность при прогнозировании результатов принимаемых решений, а молодые специалисты, будучи не подготовлены к самостоятельному осмыслению и постановке реальных задач, оказываются не в состоянии способствовать научно-обоснованному решению задач управления.

Предметный непрофессионализм существенно снижает эффективность использования ЭВМ. Старый бумажный бюрократизм превратился в бюрократизм компьютерный, и он куда более опасен – за ЭВМ можно укрыться. Н.Винер в 1954 г на вопрос почему так низка – всего 10% эффективность использования ЭВМ, ответил: «Потому то нужен разум, чтобы знать, что давать машине». Н.Н. Моисеев неоднократно подчеркивал, что математику, занимающемуся прикладными исследованиями, нужно уметь самому искать то «жемчужное зерно», которое впоследствии он назовет моделью.

Сегодня методологии прикладной математики по-прежнему уделяется недостаточно внимания. Так, в интересный и полезной, на наш взгляд, книге В.Русанова и Г.Рослякова[1] методология прикладной математике сведена, в основном, к описанию истории развития и применения алгоритмов и численных методов решения задач - что само по себе, представляет безусловный интерес. Но при этом оставлены без внимания основополагающие аспекты методологии прикладных математических

[1] В.В.Русанов, Г.С.Росляков. «История и методология прикладной математики». М., 2004 г.

исследований, развитые ранее в трудах ряда русских математиков, успешно сочетающих в своей работе теорию и практику[2].

Разделить историю развития теоретической и прикладной математики невозможно и не нужно. Именно в совместном развитии двух ветвей математики проявляется мощное влияние математики на развитие человеческого общества, проявляется основная линия развития математики – обеспечение потребностей общества. Исходя из этих положений, следует рассматривать *историю прикладной математики как историю участия прикладной математики в совместном плодотворном развитии двух тесно взаимодействующих ветвей единой науки математики*

При подготовке учебного пособия автор в значительной степени опирался на собственный опыт работы - более двадцати лет в одном из прикладных НИИ. В пособии широко цитируются источники, указанные в списке литературы. Цитируемые положения, с которыми автор полностью согласен, написаны точным и образным языком, и нет никакой необходимости в поиске других формулировок.

Несколько большее внимание, чем обычно принято в подобных пособиях, уделяется описанию процесса моделирования в логико-алгебраических терминах. При использовании такого описания представляется возможным более четко пояснить, что такое адекватность модели исследуемой системе, в чем заключается разница между моделью реального объекта и различными спекуляциями, претендующими на прикладные исследования.

В заключение еще одно замечание. Прикладные математические исследования связаны с анализом проблем в реальных системах и их результатом обычно являются рекомендации по принятию конкретных решений. При этом приходится иметь дело с различными оппонентами, заинтересованными в той или иной части в результатах исследований. Не следует ожидать, что среди оппонентов будут только квалифицированные люди и только лица, действительно заинтересованные в лучшем решении проблемы. Не исключено, что в числе оппонентов окажутся лица, обладающие властью, но либо не достаточно грамотные, либо просто решающие свои частные корыстные задачи. Прикладной математик должен обладать немалым мужеством, чтобы объективно провести исследование, а затем отстоять научно-обоснованные выводы и рекомендации. Можно заявить, что все это вне науки. Отнюдь нет. Прикладные исследования ведутся в обстановке реального мира, при непрерывном воздействии окружающей среды и это одна из основных их особенностей, принципов. Соответственно, в примерах постановки задач особое внимание уделяется влиянию «внешних» обстоятельств на постановку задачи. Весьма показательным в этой части является разработка системы противоракетной

---

[2] 2. Например, во второй половины XX века в России проблемам методологии прикладных математических исследований значительное и конструктивное внимание уделяли Н.Н.Моисеев и Е.С.Вентцель.

обороны, где научное обоснование постановки задачи подменялось политической коньюктурой и амбициями вывокопоставленных чиновников от науки.

1. Чистая (теоретическая) и прикладная математики – две стороны одной науки – математики.

1.1. Прикладная математика и моделирование.

Предметом прикладной математики – предметом прикладных математических исследований являются фрагменты реального мира: явления природы, социально-экономические системы, производственные процессы, технические конструкции, структуры управления и пр. Математическое моделирование – инструмент прикладных математических исследований, инструмент прикладной математики.

Прикладное исследование начинается с уяснения возникшей задачи. Это уяснение цели исследования является первым важным этапом разработки модели. Исследование завершается обеспечением реализации выработанных рекомендаций, что также должно быть предусмотрено при разработке модели.

Таким образом, представляется невозможным разделить два понятия: прикладное математическое исследование и прикладное математическое моделирование.

1.2. Две стороны математики.

Математика – наука, изучающая *схемы моделей безотносительно к их конкретному воплощению и методы (способы) использования моделей для решения конкретных задач*. Если вначале математика занималась простейшими числовыми моделями, то теперь наибольший интерес представляют более *сложные качественные* модели.

У математики есть и другая функция. А именно, *язык математики, ее методы используются в других науках.* Об этой функции математики так сказал Галилей: *«Философия природы написана в грандиозной книге – Вселенной, которая открыта нашему пристальному взгляду. Но понять эту книгу может лишь тот, кто научился понимать её язык и знаки, которыми она написана. А написана она на языке математики и письмена ее – геометрические фигуры, без которых нельзя понять по-человечески ее слова, без них - тщетное кружение в тесном лабиринте».*

О решающем значении математики в развитии наук говорили еще многие выдающиеся деятели культуры. Приведем еще два высказывания.

«Учение о природе будет содержать науку в собственном смысле лишь в той мере, в какой может быть применена к ней математика» (Иммануил Кант).

«Математика дает точным естественным наукам определенную меру уверенности в выводах, достичь которой без математики они не могут» (Альберт Эйнштейн).

Сегодня в принципе невозможно представить, не прибегая к математике, наши знания в виде непрерывной единой системы. Необходимо и существенное расширение многих традиционных представлений о содержании и принципах математических исследований. Количественный аспект является одной из важнейших сторон математики. Но этот аспект далеко не исчерпывает математику. Математика развивается прежде всего как дисциплина, создающая качественные методы анализа.

В математике различают два направления (две ветви): *теоретическую (чистую)* и *прикладную*. Большинство математиков придерживаются положения, что эти два направления являются двумя непрерывно обогащающими друг друга сторонами одной науки – математики. Для известного американского математика Т.Саати это очевидно, он говорит о своей любви к обеим сторонам математики: *к чистой – за ее возвышенный уход от реальности; к прикладной – за ее страстное стремление к жизни.*

Математика всегда отвечает потребностям человеческого общества. Все важные направления математики, так или иначе, связаны с решением задач, стоящих перед человечеством. Плодотворные математические идеи не произвольная игра ума, они всегда отражают реальный Мир, пусть часто в весьма абстрактном виде и в очень сложной причинно - следственной связи. На определенном этапе человеческое общество осознает необходимость и важность как теоретических обобщений прикладных математических исследований в различных областях науки и техники, так и чисто теоретических математических построений и создает математикам условия для работы в этих направлениях. Чтобы гений Ньютона проявил себя в эпохальных научных результатах, потребовалось создание обществом соответственных условий для его работы. Как правило, влияние социально-экономических факторов на математику происходит не непосредственно, а через другие науки: экономику, географию, астрономию и др.

Взаимосвязь, единство двух сторон математики, их взаимообогащение особенно отчетливо заметны, если обратиться к истории развития математики. Подчас очень трудно в конкретных условиях установить связь того или иного теоретического направления математики с конкретной человеческой практикой. Однако связь легко просматривается сквозь перспективу столетий. И более того, всякий крупный прорыв человеческой мысли в новые области техники и физики, как следствие, всегда стимулировал развитие математики.

Новая теория, генерируемая запросами практики, возникнув, может начать самостоятельную жизнь, казалось бы, не связанную с исходной посылкой, а затем возвращает сторицей то, что она использовала для своего развития, то, что послужило исходным пунктом. Такое положение, в частности, имеет место, когда появляется прикладная проблема, для решения которой существующего математического аппарата оказывается не достаточно.

Иногда плодотворные теоретические идеи сами порождают новые математические теории, причем порой в этих теориях не видно ничего утилитарного. Однако теоретические результаты, кажущиеся при появлении бесполезными, становятся со временем необходимыми для решения вновь появившихся практических проблем, и теоретические математические абстракции эффективно используются для постановки и решения новых прикладных задач. Не редки случаи, когда прикладная задача только сформулирована, а математический аппарат, который может быть использован для ее решения, уже существует.

И все же периодически появляются высказывания, и даже дискуссии относительно содержания и взаимоотношений чистой и прикладной сторон математики. Приведем некоторые "крайние" позиции.

1. "Математика есть создание чистого разума и поэтому не нуждается в связи с другими сферами деятельности". (*Л.Морден*)

2. "Под словом математика … подразумевается чистая математика. Кроме нее существует прикладная … Задачей статьи является проведение четкой и недвусмысленной линии раздела, даже не линии, а заградительной полосы между этими двумя совершенно разными областями науки". (*А.Китайгородский*)

3. "Математика едина. Это положение означает, что деление математики на чистую и прикладную не может быть строго проведено, что чистая и прикладная математики являются частями единого неразрывного целого, называемого математикой, что эти части невозможно четко отделить одну от другой". (*Л.Кудрявцев*)

4. " Чисто логические концепции должны составлять, так сказать, твердый скелет организма математики, сообщающий ей устойчивость и достоверность. Но сама жизнь математики, ее продуктивность относится преимущественно к приложениям. Изгнать приложения из математики это то же самое, что искать живое существо с одной только костной основой без мускулов, нервов, сосудов". (*Ф.Клейн*)

Представляется, что высказанное Ф.Клейном мнение относительно единства математики предельно убедительно. При дальнейшем изложении будем придерживаться положения, что *чистая (теоретическая) и прикладная математика не что иное, как две стороны одной науки – математики*. Использование терминов "чистая", "прикладная" оказывается удобным, вследствие естественного разделения направлений деятельности математиков, что, соответственно, приводит к необходимости дифференциации подготовки математиков. В большинстве случаев вместо термина "прикладная математика" ближе к существу было бы "прикладные математические исследования".

Известен спор между Фурье и Якоби относительно смысла и стимулов математического творчества. По мнению Якоби - это прославление человеческого Разума, по мнению Фурье - содействие объяснению природы. Каждое из этих утверждений определяет основные направления развития математики. Но необходимо к определению Фурье добавить: и содействие решению реально существующих практических задач во всех областях человеческой деятельности.

Можно ли понять некоторых математиков-теоретиков в их стремлении изгнать приложения из математики? Если последовательно придерживаться этой позиции, то следует придти к заключению, что наука может развиваться вне связи с реальным миром. Существует естественное разделение труда, нельзя упрекнуть конкретного математика, что он предпочитает заниматься только чистой математикой, если он и безразличен к тому, как будут использованы его результаты в прикладных задачах. Вместе с тем не нужно использование разработанных математических моделей в других науках считать прикладной математикой. Здесь математика просто выполняет свою функцию языка наук. Прикладная математика – это всегда *прикладное математическое исследование* – разработка в определенной степени новой математической модели.

В заключение раздела приведем высказывание об отношении математической теории к практике великого русского математика П.Л. Чебышева*: «Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования, или новые стороны в предметах давно известных».*

2.. История прикладной математики

2.1. Основные этапы истории математики

В истории математики динамическая связь между теоретическим и прикладным направлениями проявляется и в характерной для всех наук *периодической смене эпох: эпохи дробления наук и эпохи обобщений*. Соответственно, на определенном этапе развития общества происходит активное *проникновение* математики в новые для нее области, накапливаются результаты теоретических и прикладных исследований, затем возникает необходимость в *обобщении* полученных знаний, систематизации понятий и определений, в создании математического аппарата для решения новых классов задач.

На *начальном этапе* развития человечества ведущая роль была у прикладной ветви математики: возникали различные системы счета, геометрические представления, велись астрономические наблюдения. Такое положение характерно для эпохи неолита и далее для древних Египта и Мексики. Интересно, что так называемые арифметические начала, с чего сегодня начинается изучение математики, появились значительно позже.

В *Древней Греции* после накопления результатов решения практических задач началось активное развитие теоретической ветви математики. Впервые в нашей истории произошло в использовании математических знаний разделение труда: чистая теоретическая математика стала занятием аристократии, а вычисления - уделом рабов. Отрыв теории от приложений привел к некоторым кризисным ситуациям.

На *начальных этапах феодализма* Западная Европа находится в полу варварском состоянии, хозяйственная деятельность, торговля пришли к упадку. Почти отсутствовали факторы, стимулирующие развитие математики.

В *эпоху Возрождения* началось бурное развитие торговых городов и, как следствие, мощный толчок в развитии наук, в том числе в математики и в 1-ую очередь ее прикладной ветви. Алгебраисты XVI столетия являлись участниками общекультурного движения, они были медиками, архитекторами, географами, купцами.

Дальнейшее развитие наук связано с появлением *капитализма*. Появление новых результатов в математики связано с именами Галилея, Кеплера, Ньютона и др. Математический способ мышления для них - основное оружие естествознания. В их работах теоретические результаты непосредственно определялись прикладными задачами.

К *середине XIX столетия* математика представляла собой огромное и хаотичное здание, состоявшее из большого числа плохо связанных между собой частей, доступ к которым был понятен лишь узким специалистам. Даже такие крупные математики как Эрмит, Вейерштрасс, Кели, Бельтрами могли успешно работать только в нескольких областях математики. Эта специализация и как следствие разобщенность порой достигала устрашающих размеров. Знаний по отдельным направлениям развития математик накопилось много, но они были не связаны, порой под одинаковыми терминами понималось различные математические построения. Чтобы математика развивалась далее успешно, было необходимо систематизировать полученные результаты. века В математике наступил период успешного развития теории. В работах *Кантора* по теории множеств, *Вейерштрасса* по теории функций и ряда других математиков были выработаны основные понятия, общие термины. В результате была созданы основы для дальнейшего развития математики как науки. Некоторые математики - теоретики потребовали, чтобы все исследования, претендующие на математические, проводились на предельно строгой теоретической основе. Были попытки исключить из математики результаты, в основе которых лежал эксперимент. Поскольку в вычислениях абсолютная строгость не достижима, математики перестали вычислять.. Была положена основа разделения всех доказательств на строгие и нестрогие без учета реальной возможности достижения «строгости». Попытки удаления приложений из математики не были продуктивными, фактически они сдерживали развитие математики как движущей силы общества. Необходимый синтез двух сторон математики нашел в XVIII столетии отражение в трудах *Лагранжа и Лапласа* по механике. В работах ряда выдающихся математиков XIX столетия сочетание совершенного математического аппарата с глубоким проникновением в существо явлений привели к выдающимся открытиям в физике и астрономии (электромагнитная теория Максвелла, открытие Нептуна и Плутона, предсказание Дирака о позитроне и др.). Новые обобщающие принципы математики (теория групп, риманово понятие функции и пространства и др.) развивались в девятнадцатом столетии в трудах *Клейна, Ли и Пуанкаре*.

В *XX столетии* произошла научно-техническая революция. Новые проблемы физики, биологии, экономики привели к постановке новых сложных задач перед математикой, стимулировали ее развитие. Решение ряда реальных задач оказалось возможным только при объединении формальных и неформальных подходов, использования вычислительных экспериментов. Фундаментальные исследования успешно проводились и в чисто теоретической, и в прикладных областях. Наряду с этим резко сократился интервал между фундаментальными результатами и их практической реализации в самых различных областях науки и техники..

Приведем некоторые примеры взаимодействия теоретических и экспериментальных исследований

На примере развития небесной механики хорошо прослеживается, как экспериментальные наблюдения способствовали уточнению теории, а теория, в свою очередь, направляла практические исследования. Гелиоцентрическая модель солнечной системы была опубликована Коперником в 1543 г. В результате систематического наблюдения за движением планет Тихо Браге (1546-1601) обнаружил расхождение теории Коперника с данными наблюдений. Опираясь на эти наблюдения, Кеплер сформулировал с 1601 по 1618 гг. три закона движения планет. Строгое математическое обоснование и уточнение законов Кеплера было дано

Ньютоном. Во времена Ньютона было известно шесть планет. В 1781 г. была обнаружена планета «Уран». Поскольку траектория этой планеты не соответствовала однозначно теории Ньютона, было сделано предположение о наличии других планет. Траектории еще двух планет были рассчитаны, а затем и сами планеты были обнаружены: «Нептун» в 1846.г, «Плутон» в 1915 г. Используя более совершенные методы, Лаплас (1749-1827) показал, что некоторые особенности движения ряда планет, которые вроде не укладываются в теорию Ньютона, на самом деле также объясняются этой теорией, в частности он уточнил теорию приливов, создал теорию движения спутников Юпитера.

Поучительный пример того, как практические задачи стимулирует математические изыскания, представляет поиск метода определения долготы судна. Задача возникла как вполне практическая. Правительство, академии, частные лица поощряли исследования в этой области. Необходимость решения проблемы была одним из мотивов, стимулирующих создание Лондонского королевского общества и Парижской Академии наук. В процесс поиска решения проблемы были усовершенствованы навигационные приборы и часы, исследованы движения Луны и спутников Юпитера. Математика получила развитие в изучении Гюйгенсом маятниковых часов, в исследованиях Ньютоном задачи о двух телах. Нужды картографии привели к появлению математической теории Меркатора и Ламберта. Гук, экспериментируя с пружинными стопорами, заложил основы теории упругости, а Галилей, проводя опыты в Атлантике, стал основателем теории земного магнетизма. Все эти исследования по астрономии, картографии, навигации, механики способствовали развитию математического анализа.

Сегодня в принципе невозможно представить, не прибегая к математике, наши знания в виде непрерывной единой системы. Но необходимо и существенное расширение многих традиционных представлений о содержании и принципах математических исследований. Количественный аспект является одной из важнейших сторон математики. Но этот аспект далеко не исчерпывает математику. Математика развивается, прежде всего, как дисциплина, создающая качественные методы анализа.

Необходимость дальнейшего взаимодействия математики с другими науками, особенно с физикой, биологией, экономикой, очевидна. Успех этого взаимодействия связан с адекватным описанием функционирования сложных систем в условиях неопределенностей различного вида. Для исследования больших сложных систем различной природы требуется дальнейшее развитие математики, в том числе теории и методов использования имитационных моделей, работающих в диалоговом режиме.

Далее рассматриваются основные этапы истории математики[3], основное внимание акцентировано на значение прикладных исследованиях в развитии математики как науки.

2.2. Математика на заре чловечества

Примерно 10 тыс. лет тому назад человечество вступило в новый каменный век - неолит. На смену охоте и рыболовству пришло земледелие, пассивное отношение человека к природе сменилось активным. Начали развиваться ремесла: плотничье, гончарное, ткацкое. Совершались замечательные открытия: гончарный круг, тележное колесо. В позднем неолите появилась выплавка и обработка меди и бронзы. Развитие торговых связей между возникшими поселениями способствовало совершенствованию техники, в том числе изготовления медных, а затем бронзовых орудий и оружия.

Развитие ремесел и торговли способствовало формированию абстрактных понятий, кристаллизации понятия «число». Появился счет, сначала с основанием пять, потом десять. Модель счета – это, по-видимому, первая математическая модель. Необходимость определять размеры и емкость предметов привела к появлению единиц измерений, вначале очень грубых: палец, фут, локоть. Люди в эпоху неолита обладали острым чувством геометрии форм. Обжиг и раскраска глиняных сосудов, изготовление камышовых циновок, обработка металлов выработали представление о плоскостных и пространственных соотношениях. Появление орнаментов было, по-видимому, связано вначале с религиозными обрядами.

Потребности в измерении времени возникли в глубокой древности. Можно предположить, что первобытный человек первоначально различал смену дня и ночи, позднее и смену времен года. Отсчет времени и, следовательно, определенные сведения о движении солнца, луны, звезд имели место у самых древних племен. Более систематический характер эти сведения получили с развитием торговли и земледелия. .. Использование при плавании наблюдений за созвездиями привело к появлению представлений о сфере, окружностях и углах. Необходимость измерять длительные промежутки времени привели в последствии к созданию календарей. Лунные календари появились у древних кочевых пастушеских племен

Различные системы счета, геометрические представления, астрономические наблюдения характерны для эпохи неолита и далее для древних Египта и Мексики. Так называемые арифметические начала, с чего сегодня начинается изучение математики, появились значительно позже.

Таким образом, вначале истории человечества развитие математики шло в процессе решения сугубо практических задач. Появление первых математических понятий определялось непосредственно *нуждами*

[3] При изложении настоящего раздела за основу принята монография: Д.Я.Стройк . «Краткий очерк истории математик», М., 1994 г.

человеческого существования, необходимостью решать *конкретные задачи взаимодействия человека и природы*

2.3. Древний Восток (5 - 3 тысячелетия до н.э.)

1. В 5-3 тысячелетиях до нашей эры новые общественные отношения складывались в основном вдоль рек Нила, Тигра, Евфрата, Инда, несколько позже Ганга, Хуанхе, еще позднее Янцзы. Субтропический климат, развитие ирригационных систем, интенсивное земледелие обеспечили высокий урожай. В результате совместных усилий населения обширных районов повысился уровень жизни, появились избытки урожая. Возникло централизованное управление и началось разделение труда и усиленное расслоение общества. Появилось много новых профессий: ремесленники, солдаты, писцы, жрецы. Сложилась династическая система управления - восточный деспотизм. Руководящая роль была, как правило, у жрецов, разбирающихся в движении тел, смене времен года, землеустройстве, хранении запасов, налогах. Общественная эволюция шла медленно. Менялись цари, династии, а экономические основы оставались неизменными.

Развитие математик Древнего Востока было преимущественно связано *с необходимостью решения практических задач: проведения календарных расчетов, организации общественных работ, распределения урожая и пр.* Шло накопление технических знаний, в том числе в металлургии, и в медицине. В первую очередь совершенствовались измерения и арифметика. В результате накопления знаний, появились зачатки теоретической геометрии, из арифметики выросла алгебра. Статичный характер общественного строя приводил к тому, что научные сведения сохранялись без изменения столетиями. Трудность в датировании восточной науки связано с материалом закрепления знаний (Двуречье - это глиняные таблички, Китай, Индия_ древесная кора или бамбук, Египет - папирус). Хранилища знаний могли быть уничтожены в результате войн, стихийных бедствий.

2. Египет, Китай, Индия, Месопотамия развивались замкнуто. Их культура, письменность отличались. Отличался и уровень математических знаний, но не намного. Для всех был характерен арифметико-алгебраический период развития математики. Несколько выделялась Вавилонская школа.

Данные о состоянии математики в *Египте* получены по двум сохранившимся папирусам. Математика аддитивного вида базировалась на десятичную систему с обозначениями похожими на римские. Решаемые задачи носят практический характер, например, о количестве хлеба в различных сортах пива, о хранение зерна и пр. Многие задачи сводились к уравнениям с одним неизвестным, для обозначения которого существовал иероглиф - «хау». Отсюда название египетской математики – хау-исчисления. В задачах встречались арифметическая и геометрическая прогрессии. Некоторые задачи имели геометрическую природу и касались преимущественно измерений.

Египетская астрономия содержала календарь, длина года в котором равнялась 365 дням, год длился 365 дней и делился на 12 месяцев по 30 дней каждый и 5 дополнительных дней в начале года. Сутки делились на 24 часа.

3. Одновременно с Египтом возник второй очаг цивилизации в долине *рек Тигр и Евфрат,* где до VI века до н.э. существовало рабовладельческое государство со столицей городом Вавилон. *Математика Двуречья* достигла более высокого уровня по сравнению с египетской. Уже в последний шумерский период (2100 г. до н.э.) получила развитие шестидесятеричная система счисления в сочетании с десятичной системой, фактически введена позиционная (поместная) система счисления, которая, по сути, не отличается от современной позиционной системы. Развитие этой системы связано с решением практических задач управления, что следует из множества текстов того периода, в которых арифметические вычисления используются при поставках зерна, скота и т.п. Позиционная система записи чисел и шестидесятеричная система счисления явились существенным достижением человечества.

При первой вавилонской династии (около 1950 г. до н.э.) семитское население подчинило себе исконных жителей - шумеров. Арифметика стала развиваться в хорошо разработанную алгебру. Явно выраженный арифметико - алгебраический характер проявился и в геометрии, развивающейся на основе практических задач, связанных с измерениями. На базе алгебраических достижений проводились сложные вычисления, связанные не только с измерениями и расчетами налогов, но и со сложными астрономическими задачами. Одна из особенностей вавилонской математики – это тесная связь геометрических задач с алгеброй. Вычисления проводились с использованием разнообразных таблиц. С третьего тысячелетия до н.э. вавилоняни употребляли позиционную шестидесятеричную систему счисления. Примерно с 700 г. до н.э. математика в астрономии стала играть большую роль, чем наблюдения. Существенным достижением была теория движения солнца и луны.

Математика Древнего Вавилона оказала огромное влияние на развитие математических исследований на Ближнем и Среднем Востоке, Китае, Индии и Европе. До сего времени используются введенная в Вавилоне система деления часа на 60 минут, минуты на 60 секунд, окружности на 360 градусов.

4. Согласно летописной истории известно, что учебник по математике в *Китае* существовал в XI веке до н.э. К сожалению, в период первой китайской «культурной революции» (213 г до н.э.) большинство китайских книг было уничтожено, а сотни философов и ученых зверски истреблены. Дошедшим до нас математическим произведением Древнего Китая является «Девять книг о математическом искусстве» (152 г. до н.э.). В нем содержатся результаты, полученные в более ранние периоды. Система счисления в Китае была десятичной и уже со второго тысячелетия до нашей

эры - позиционной. При календарных расчетах применялась нечто вроде шестидесятичной системы. Математика «Девяти книг» состояла в основном из задач и указаний по их решению. Для китайской математики характерны вычислительно-алгебраическое направление, а также непрерывность традиций и тесная связь с общественными задачами. При помощи математики китайцы вычисляли площади полей и помещений, объемы зернохранилищ. Кандидаты на должность, подвергавшиеся экзамену, должны были цитировать тексты «Девяти книг» по памяти.

Достижением китайской математики было введение отрицательных чисел и правила их сложения. Значения числа $\boldsymbol{\pi}$ было получено в Китае в V веке с точностью, которую превзошел астроном аль-Каши только чрез 1000 лет.

Китайская математика не была изолирована от науки стран Средней Азии Ближнего и Среднего Востока и в последующем оказала влияние через эти страны на математику Европы. Однако многие результаты китайской математики стали известны в Европе уже после того, как эти результаты европейцы получили сами.

5. В середине третьего тысячелетия до н.э. в долине реки Инд существовала развитая цивилизация Древних индийских математических текстов не сохранилось. Однако Китай и Индия имели тесные культурные и экономические связи, что определило общий характер развития математики в этих странах. Первый сохранившийся математический текст *Индии* «Сурья» (300-400 гг.) был посвящен в основном астрономии. Наиболее известные математики Индии Арисхабата (560 г), Брхмагупта (625 г.) и их ученики развивали арифметико-алгебраическое направление математики, а также тригонометрию и задачи, связанные с измерениями. В Индии было положено начало учению о тригонометрических величинах, развита алгебраическая символика, положившая начало развитию алгебры как науки. Индийские математики знали комбинаторику. Достижением индийских математиков является десятичная позиционная система счета с нулем и правила выполнения арифметических операций в том виде как это используется сегодня в большинстве стран.

В индийской математике дедуктивный характер математических исследований отсутствовал, преобладали вычислительно-алгебраические методы, геометрические задачи носили сугубо практический характер.

Некоторые выводы.

Развитие математика Древнего Востока определялось преимущественно необходимостью решения практических задач, т.е. в Древнем Востоке развивалась в основном *прикладная ветвь математики*.

В практических задачах, решение которых было связано с применением математики, можно выделить множество направлений. Это, измерения длин (расстояний), площадей, объемов, различные расчеты, связанные с организацией производства и с организацией торговых сделок, организация общественных работ, учет собранного урожая, организация сбора налогов и распределения доходов, проведение календарных расчетов и пр. Задача обоснования календарных расчетов привела к изучению мироздания, как такового, организации астрономических измерений и вычислений.

По мере расширения области применения математики начали формироваться теоретические основы математики. В первую очередь, по-видимому, это относится к определению понятия числа и методов ее представления. Соответственно, появлялись все более свершенные системы счисления. В Египте за 2000 лет до н.э. применялась непозиционная десятичная система счисления, немного позже в Индии была создана десятичная позиционная система, существующая до сего времени. Важным этапом развития теоретических основ математики было обобщение методов вычислений – создание вычислительных алгоритмов. Во всей математике Древнего Востока нет доказательств. Имеют место предписания: делай то, делай так то. Работоспособность алгоритмов иллюстрировалась численными примерами. В процессе совершенствования вычислительных алгоритмов развивалось арифметико-алгебраическое направление математики. Практические задачи измерений способствовали развитию геометрии. Астрономические наблюдения и измерения инициировали развитие тригонометрии, созданию теории движения солнца и луны (Двуречье). Египетская астрономия дала человечеству календарь, основные положения которого сохранились до нашего времени.

В VIII веке труды индийских математиков и астрономов были переведены на арабский язык. После перевода с арабского на латынь *эти труды стали достоянием ученых Европы.*

2.4. Древняя Греция

1. Древняя Греция - колыбель Европейской культуры.

В истории Древней Греции можно выделить три периода (эпохи).

Первая эпоха, в свою очередь, включает несколько этапов.

XII–VIII вв. до н.э. - Критско-Микенский период называемый гомеровским периодом.. Основные центры политической и культурной жизни этого периода - остров Крит и восточная часть Пелопоннеса с рядом городов, в том числе Микены, Тиринф. Греческое общество этого периода характеризуется относительно развитым скотоводством, земледелием. На смену бронзе пришло железо, что привело к перевороту в военном деле. Импульс получила вся экономика: ремесла, торговля. На новой экономической базе произошло разложение первобытно общинного строя, возникает патриархальное рабство.

VIII-VI вв. до н.э. – в Греции происходят крупные сдвиги в материальном производстве. Растет торговля, появляются деньги, обостряется борьба демоса с аристократией. Растет рабовладение, которое становится основой экономического и социального строя На побережье Средиземного и Черного морей появляются греческие колонии. Возникают рабовладельческие города-государства – полисы. Столкновение в Афинах аристократии и демоса привело к победе демоса и реформам Солона (594 г.

до н.э) и Клисфена (509 г. до н.э.), утвердив в конечном счете строй античной рабовладельческой демократии.

V в. до н.э. - греко - персидские войны. В ходе войны выдвинулись Афины, возглавившие союз приморских греческих государств. Одновременно существовал союз пелопонесских государств, возглавлявшийся Спартой. В 449 г. до н.э окончательная победа греков и начало золотого века Греции. Афины становятся центром новой цивилизации. Соперничество Афин и Спарты за сферы экономического и политического влияния, а также борьба демократических и олигархических течений внутри городов привели к пелопонесской войне (431-404 гг. до н.э.), окончившейся победой Спарты. Гегемония Спарты была кратковременной, в связи с потерей греческими городами-государствами самостоятельности в 338 г до н.э.

В IV веке после возвышения Александра Македонского завершилась первая эпоха древнегреческой цивилизации..

2. В Греции в VI веке до н.э. сложилось определенное представление о мире. Суть этого представления заключается в следующем. Все процессы в природе протекают по точному плану, в основе которого лежат математические законы. Если приложить человеческий разум к изучению природы, то эти математические закономерности будут поняты.

Развитие наук, том числе математики связано с изменениями, происходящими в греческом обществе и государстве. Возникший в Греции новый общественный уклад создал новый тип человека. Купец - путешественник жил в эпоху великих географических открытий, не разделял воззрений Востока, не признавал ни власти абсолютного монарха, ни власти в виде божества. В условиях политической и общественной борьбы развивались философские и политические воззрения, а вместе с ними и новая греческая наука и новая математика.

Греки скоро поняли, что математики Востока теоретическими доказательствами не занимались. Греческие ученые хотели получить ответ на вопрос «Почему?», а не только на вопрос «Как?». Более того, их интересовало, какое место занимает математика в мире человека, как математика может помочь найти порядок в хаосе. После накопления результатов прикладных математических исследований в Греции началось активное развитие теоретической ветви математики. В золотой век Греции группа критически мыслящих софистов стали рассматривать накопившийся математический материал с целью уяснения его сути (но не пользы)

Своеобразие развития рабовладельческого общества, его расслоение привели к появлению аристократии, имеющий свободное время для размышлений, занятия наукой. В конечном счете, это привело к первой попытке разделить теоретическую и прикладную ветви математики. Теория стала развиваться весьма интенсивно, но определенный отрыв теории от приложений привел к некоторым кризисным ситуациям. Сложилась консервативная позиция, согласно которой теория - удел избранных, занятие теорией - благородное дело, а практической математикой, вычислениями заниматься зазорно, это дело рабов. Соответственно, в греческой математике произошло разделение *на «арифметику» - науку о числах и «логистику» - вычисления.* К логистике относились: операции с целыми числами, численное извлечение корней, счет с использованием вычислительных устройств (типа абака), вычисления с дробями численное решение задач, сводящихся к уравнениям третьей степени включительно, практические задачи земледелия, архитектуры и др. Этот перечень фактически относится к прикладному направлению математики.

Таким образом, впервые произошло разделение математики на две ветви: теоретическую и прикладную.

3. Согласно преданию отцом греческой математики был купец *Фалес Милетский* (ок. 623-ок.547 до н.э.). Фалес был провозглашен первым из семи мудрецов Древней Греции. Он был купцом, государственным деятелем, инженером, математиком, философом. Посетив в первой половине VI века до н.э. Вавилон и Египет, Фалес ознакомился с достижениями восточной математики и ознакомил с математикой Востока греков.

Фалес и его ученики изучали геометрию, выдвинули ряд положений относительно основ «всего сущего» Фалесу приписывали открытие годового движения Солнца на фоне неподвижных звезд, объяснение, что Луна светит отраженным светом. Согласно легендам Фалес успешно применял геометрию для решения практических задач. Так, он определил высоту пирамиды по длине ее тени, определил расстояние до корабля по трем установленным на побережье палкам. Известные афоризмы Фалеса характеризуют глубину его философского мышления[4]

4. В конце VI века центр развития математики и античной философии (италийская математика) переместился в Великую Грецию – совокупность колоний на побережье Южной Италии и Сицилии. К италийцам относятся пифагорейцы и элеаты.

Первая научная школа, предложившая свою модель строения вселенной, основанную на математических понятиях была основана *Пифагором* (ок. 570-500 до н.э). Изучение арифметики, геометрии, астрономии, музыки проводилось Пифагором и его учениками для познания вечных законов природы. Пифагорейцы стремились найти в природе и обществе неизменное. В основе их философии лежало понятие «число»: «Вещи – суть копии чисел, числа – начала вещей»; «Все есть число и все из чисел». Отсюда следует, что отношения между различными количествами должны быть отношениями целых чисел. Пифагорейцы разделили числа на разнообразные классы. Целые числа рассматривались в качестве основополагающих универсальных объектов, к операциям над которыми сводились не только математические построения, но и все многообразие явлений действительности - отношения между различными количествами должны быть отношениями целых чисел. В последствии сами пифагорийцы

---

[4] Примеры афоризмов: «Больше всего пространство, потому что оно все в себе содержит», «Сильнее всего необходимость, ибо оно имеет над всем власть», «Многословие вовсе не является показателем разумного».

обнаружили, что отношение диагонали квадрата к его стороне не является целым.

Прикладное приложение математики у Пифагора и его учеников заключается в первую очередь в использовании математической идеологии для познания сути бытия. Вместе с тем решились и вполне практические задачи, Так *Архит Тарентский* (ок.428-356 до н.э.) – крупнейший представитель позднего пифагореизма установил первые принципы механики, создал модель «летающего голубя». Считают, что он изобрел блок и винт. Им написаны книги; «О флейте», «О машине» «О земледелии» и др. Архит был выдающимся государственным деятелем, пост стратега он занимал семь раз (хотя по закону этот пост одно лицо не могло занимать лишь дважды).

Пифагорийцы способствовали открытию иррациональных чисел, приданию геометрии характера науки, созданию теории пропорций и пр. Их вклад в развитие математики, в возникновение последующих математических школ весьма существенен.

Важнейшей научной заслугой Пифагора считается систематическое введение доказательства в математику, прежде всего в геометрию. С этого момента математика стала наукой.

Философская школа элеатов (V век до н.э.) строили свои рассуждения на основе физической сущности мироздания. Но именно они показали невозможность бесконечной делимости и всякого движения, если полагать, что пространство и время состоят из неделимых частей. Представители этой школы *Ксенофан, Параменид, Зенон и Мелис*.

Зенон Элейский (ок. 490-430 до н.э.) утверждал, что разум постигает только абсолютное бытие, а изменение есть только кажущееся. Его считают изобретателем диалектики. Выдвинутые им парадоксы (дихотомия, Ахиллес и черепаха, стрела, стадион) вскрыли противоречия в некоторых интуитивных представлениях о бесконечно большом и бесконечно малом. Зенон впервые указал на внутреннюю противоречивость понятий непрерывного и дискретного, конечного и бесконечного. Открытие иррациональности и парадоксы Зенона привели к вопросу: «Можно ли считать математику точной наукой?»

5. Расцвет классической Греции относится к периоду с 479 г. до н.э. до 431 г. до н.э. Основные научные достижения этого периода относятся ко времени правления *Перикла* (ок 490-429 до н.э.). К этому период относится деятельность афинской группы мыслителей. В это время в Афинах жил выдающийся греческий математик, автор первого систематического изложения геометрии. Это сочинение было утеряно, но полагают, что оно охватывало содержание пертых четырех книг «Начал» Евклида.

Первая крупная Афинская школа - это школа софистов, странствующих учителей. Математические проблемы, изучаемые софистами, были в основном связаны со знаменитыми задачами древности: удвоение куба, трисекции угла, квадратура круга. Серьезные математические исследования начались с величайшего греческого философа *Платона* (ок. 427- 347 до н.э)

– ученика Сократа и учителя Архимеда. В Афинах Платон открыл знаменитую школу - Академию, просуществовавшую более девяти веков. Платон считал, что реальность и рациональность физического мира могут быть достигнуты только с помощью математики, ибо «Бог вечно геометризует». Платон заложил основы дедуктивно –аксиоматического метода, сыгравшего значительную роль в развитии всех областей математики, Он один из основателей метода рассуждения от противного. Его труды содержат математические разделы по теории чисел, стереометрии и космических фигур – пяти правильных многогранников.

Руководителем другой афинской философской школы – Лицея является ученик Платона *Аристотель* (384-322 до н.э.). Хотя в Лицее математика играла второстепенную роль, сам Аристотель успешно занимался математикой. Аристотель считал, что математические объекты «лишь определенные акциденции физических вещей, абстрагируемых умом». Он является творцом дедуктивной логики, а также дал важное определение бесконечности: «Бесконечность – это не то, за чем ничего нет, а то, за чем всегда что-нибудь есть».

6. *Вторая эпоха развития Греции и греческой науки - эпоха эллинизма*[5] (350 - 200гг. до н.э.) наступила после смерти Александра Македонского (323 г. до н.э.) и распада его империи на несколько крупных эллинистических государств-монархий, в том числе монархия Птоломеев (Египет, культурный центр Александрия), монархия Селевкидов (Месопотамия, Сирия, Персия) и Македония. Политический строй эллинистических государств – сочетание элементов древневосточных монархий. Эта эпоха характеризуется расцветом наук. Греческая цивилизация распространилась на обширные районы Востока. Старая культура Востока и греческая цивилизация, соприкасаясь и смешиваясь, привели к значительным научным достижениям, в том числе в математике. Новая столица Египта Александрия стала научным культурным и экономическим центром всего эллинистического мира.

В эпоху эллинизма у греческой математики появились новые задачи. Сохранив свои особенности, она испытала влияние астрономических и административных достижений Востока. Взаимовлияние оказалось весьма плодотворным. Требования практики - запросы ирригации, астрономии - во многом определили развитие вычислительной математики. Основные результаты получены в математике в эпоху эллинизма в городах *Александрия, Афины* (центр образования), *Сиракузы* и др. Во многом успехи математики связаны с именами Евклида, Архимеда и Аполлония.

Центром математики была Александрия, построенная в 332 г. до н.э. В Александрии в период царствования династии Птолемеев (330-305 г. до н.э.) был создан научный центр «Музей» с огромной библиотекой. *Евклид* (306 - 283 гг. до н.э.) был одним из первых математиков, работающих в Музее. Ему принадлежат «Начало» (13 книг) и «Данные». В «Началах» систематизированы и строго изложены результаты математики, полученные

[5] Эллины –самоназвание греков.

к III веку до н.э., включающие три важных открытия: теорию отношений Евдокса (ок. 408-355 до н.э.), теорию иррациональных Теэтета (ок. 414-369 до н.э.) и теорию пяти правильных тел. Основные положения изложены в этих книгах на строго логической основе, алгебраические выводы даны в геометрической форме. Влияние Евклида на все последующее развитие математики огромно.

Архимед (287-212-гг. до н.э.) - математик, астроном, архитектор, механик. В его работах блестяще сочетаются теоретическое и прикладное направления математики. Архимед родился и жил в Сиракузах, погиб при участии в обороне Сиракуз, осажденных римлянами. Для работ Архимеда характерны алгоритмическая направленность, использование механики как инструмента, для получения математических результатов, применение математических методов в физике, совершенствование техники вычислений. Важным вкладом в вычислительную математику явился разработанный Архимедом метод интегральных сумм для вычисления площадей и объемов. С помощью специально построенной вычислительной системы Архимед определил число песчинок, которыми можно было бы заполнить Вселенную. При этом он использовал гелиоцентрическое представление Аристарха (310-230 г до н.э.). При решении ряда геометрических задач (вычисление площади параболического сегмента и др.) им был разработан вычислительный метод механических аналогий. В творчестве Архимеда присутствуют и элементы дифференцирования.

Архимед был и выдающимся механиком и инженером. К числу полученных им наиболее значительных результатов относится закон о потери веса телами, погруженными в жидкость. Им созданы военные метательные машины, устройство для поднятия тяжестей, изобретен винтовой двигатель и др.

Творчество Архимеда оказало огромное влияние на развитие математики.

Аполлоний (260-170 г. до н.э.) – третий выдающийся математик эпохи эллинизма. Им написан трактат из 8 книг «О кониках» - о эллипсе, параболе и гиперболе, определяемых как сечения кругового конуса.

В эпоху эллинизма *Аристарх Самосский* (280 г до н.э.) выдвинул гипотезу о центральном месте Солнца - современниками она не была принята. *Гиппарх* (161 -126 г. до н.э.) обосновал на основании наблюдений геоцентрическую модель Мира, опередив на три столетия Птолемея.

7. *Третья и последняя эпоха античного общества* - эпоха господства Рима. Рим завоевал Грецию в 146 г., Месопотамию - в 64 г., Египет - в 30 г до н.э. Римская империя была землевладельческим государством. Рабовладельцы как класс не заинтересованы в развитии науки, культуры и расширение рабовладельческих хозяйств привело, в конечном счете, к упадку античного общества.

После захвата Греции Римом Александрия оставалась центром математических знаний. Новых математических результатов в этот период получено мало. Наиболее значительное произведение этой эпохи

«Альмагест» *Птолемея* - астрономический труд, блестящее приложение математических знаний для решения прикладной проблемы (использованы стереографическая проекция, рассчитаны таблицы тригонометрических величин).

Последнее большое математическое сочинение этой эпохи, созданное в Александрии - «Собрание» *Паппа* (конец 3-го столетия) - учебник греческой геометрии. Многие математические достижения Древней Греции стали известными по этому учебнику, в котором даны соответствующие исторические справки.

Последним математиком Александрии, внесших в математику новые идеи, был *Диофант* (III век). Он известен как автор «Арифметики» в 13 книгах, где материал изложен чисто аналитически. Сочинения Диофанта определили в различной степени направления исследований Ферма, Эйлера, Гаусса и других математиков.

Академия в Афинах была закрыта в 529 г. как языческая. В 630 г. арабы взяли Александрию. Судьба Александрийской библиотеки не известна.

8. За время менее чем два столетия, греки овладели математикой, которая до этого складывалась тысячелетиями Заслуга греков в части превращения математики в науку несомненна. Разделение математики на теоретическую (арифметика) и прикладную (логистика) было связано с желанием придать математике научную строгость и, соответственно, в эту эпоху были получены новые замечательные результаты в математической теории..

Определенный консерватизмом мышления греческой аристократии, постулирование границы между двумя ветвями математики, пренебрежение аристократии прикладными задачами, связанными с вычислениями. сдерживало развитие алгебраического направления и способствовало возникновению в математике в 4 веке до н.э. кризисных явлений.

Придя к заключению, что совокупность геометрических величин более полно, чем множество рациональных чисел, греки создали геометрическую алгебру, первичными элементами которой являются отрезки прямой. С ними определены все операции исчисления. Возникающие при этом геометрические построения осуществляется циркулем и линейкой без делений. Методы геометрической алгебры практически очень громоздки и неудобны в применении. Геометрическому исчислению присущи и другие недостатки. Довольно скоро выяснилось, что существуют задачи, не решаемые с помощью циркуля и линейки. К ним относятся три знаменитых задачи Древней Греции:). С помощью геометрических построений были найдены только приближенные решения этих задач.

Геометрическое толкование чисел сдерживало развитие алгебры,. не знали греки отрицательных чисел. Возникла трудность с понятием бесконечности (для преодоления этой трудности был разработан метод исчерпывания (предела), открывший новые возможности в развитии математики). Принятая система счета была десятичной, но не позиционной что безусловно усложняло вычисления. Не была понята гелиоцентрическая модель Мира.

Несмотря на разграничения двух направлений математики, развитие теоретической математики способствовало совершенствованию вычислительной практики и обеспечивало решение задач, возникающих в астрономии, сельском хозяйства, мореплавании, а запросы практики способствовали развитию прикладных математических исследований и математики в целом. Взаимодействие математической теории и практики усилилось в эпоху эллинизма, когда взаимодействие греческой цивилизации и традиций Востока привело к новому расцвету наук.

Попытки объяснения Мира, сущности бытия с помощью математических построений можно, по-видимому, также отнести к попыткам греков решить такие проблемы, которые они считали, в определенном смысле, насущными, имеющими практическое значение. Это направление исследований способствовало развитию философии, а также популяризации математики, как самостоятельной науки.

Таким образом, основы современной математики были заложены в Древней Греции. В математике были намечены области, требующие строгих теоретических построений. Разделение математики на два направления в конечном итоге способствовало развитию математики в целом и, в дальнейшем, к объединению этих направлений, что наглядно проявилось в работах Архимеда, Гиппарха, Птолемея .

2.5. Восток после упадка античного общества

1. В VI-м веке арабы стремительно овладели большей частью Западной и Средней Азии, а также стали обладателями значительной части западно-римского государства (Сицилия, Северная Африка, Испания). На завоеванных землях было создано феодальное государство – Халифат, объединивший арабские государства с огромную империю. Везде греко-римская культура заменялась культурой ислама.

Развитие общественно-экономических отношений в арабском мире вызвало развитие науки, в том числе математики. Строились обсерватории, библиотеки, появились и оплачиваемые ученые. Начался перевод на арабский язык трудов ученых Древности: переводились труды Архимеда, Евклида, Птолемея. Многие труды греческих математиков известны только в арабском переводе. Используя геометрию греков и алгебру индийцев арабы придали математики тот вид, который способствовал в последствии быстрому развитию математических знаний в Западной Европе в XVI столетии.

Развитие науки зависело от поддержки ученых халифами и по мере успеха очередных завоевателей происходила смена научных центров

2. Месопотамия стала центром торговых путей. Халифы Багдада (7-8 в) покровительствовали наукам, особенно астрономии и математике..

Видный арабский математик *Мухамед абн Муса аль-Хорезми* (787-ок.850) родился в Хорезме, в818 г. по приглашению халифа переехал в Багдад, где ему было поручено заведование книгохранилищем, получившем название «Дом мудрости» и являющемся по существу в IX –XII веках Академией наук халифата. Известные математические труды аль-Хорезми «Арифметически трактат» и «Алгебраический трактат». Алгебра рассматривалась им как самостоятельная наука. Им введен новый термин «алгебра», а словом «algorithms» (латинизированное имя автора) стал обозначаться вычислительный процесс, проводимый по определенным правилам. В его трудах содержится решение квадратичного уравнения, приведены тригонометрические таблицы. Из его книг мир узнал о десятичной системе счета.

Аль-Хорезми успешно использовал математику в различных областях знаний. Известны его фундаментальные труды по астрономии и географии. В частности, он измерил длину меридиана. Аль-Хорезми был талантливым организатором науки. Он возглавлял три экспедиции в различные области халифата, руководил работой ученых в различных областях знаний. Ученики аль-Хорезми Абу Камиль (ок. 850-930), Аль-Караджи (умер ок.1030) продолжили развитие алгебры, как самостоятельной отрасли математики.

3. В Северной Персии в эпоху процветания государства турок сельджуков жил *Омар Хайям* (1038-1124) астроном и философ, получивший на Западе известность как поэт. Омар Хайям реформатор персидского календаря, автор «Алгебры», содержащей систематическое изложение алгебраических уравнений 3-ей степени. В своем труде «Ключ к трудным местам Евклида» Хайям пытался доказать аксиому о параллельных или заменить ее другими аксиомами. Математические основы календаря Хайяма были использованы для французского календаря эпохи революции конца XVIII века. Омар Хайям не принадлежал непосредственно к Багдадской математической школе.

4. В 1256 г. монголы разграбили Багдад. Невдалеке возник новый научный центр, построенный для *Насирэддин Туси,* по-арабски *Ат Туси* (1201-1274).

Внук Чингис хана Хулагу-хан сделал своей столицей азербайджанский город Марага, где построил в 1289 т обсерватоию. Научным руководителем обсерватории стал Насирэддин.

Насирэддин занимался постулатом Евклида о параллельных прямых, численными приближениями алгебраических чисел. Существенен его вклад в развитие тригонометрии.. При решении астрономических задач был накоплен большой фактический материал, как по плоской, так и по сферической тригонометрии. Этот экспериментальный материал был систематизирован в трудах Насирэддина Из разрозненных математических результатов, полученных в астрономии, была создана наука о тригонометрических функциях и способах решения задач, связанных с плоскими и сферическими треугольниками. Были составлены довольно точные таблицы тригонометрических функций. Насирэддин перевел с греческого на арабский язык и снабдил комментариями и добавлениями важнейшие математические, астрономические м физические труды древних авторов. труды Для работы в Мараге были привлечены многие выдающиеся ученые того времени. Марагинская школа вошла в историю как центр науки XIII века.

5. Арабская математика Востока достигла высокого уровня развития в работах самаркандской школы, возглавляемой внуком Тамерлана Углубеком (349-1449) и директором его знаменитой обсерватории аль-Каши (умер около 1436)

Аль Каши – узбекский ученый (1430-е годы) жил и работал в Самарканде. Был первым директором знаменитой лучшей в то время обсерватории Углубека, где работали астрономы и математики. Аль Каши принадлежит ряд отличных работ по вычислительной математике. Им получено число π с 17-ью десятичными знаками. Под руководством Аль Каши составлялись таблицы синусов с шагом в одну минуту с точностью до девятого десятичного знака. Для проведения вычислений с необходимой точностью Аль Каши разработал метод последовательных приближений (метод итераций). В своих вычислениях он пользовался шестидесятеричной системой, которая применялась в сложных астрономических расчетах. Аль Каши ввел в науку десятичные дроби, аналогично десятичным ввел 60-ричные. Сформулировал правила действий с 60-ричными числами и правило перевода их в десятичные

6. Арабские математики VIII XV проделали огромную работу по переводу на арабский язык и комментарии математики Древней Греции и Индии. Вместе с тем они сыграли положительную роль в дальнейшем развитии математической науки, существенно продвинули результаты греческих математиков в основном в алгоритмическо-алгебраическом направлении. Безусловными заслугами арабских математиков является распространение позиционной десятичной системы. Замечательные результаты получены в тригонометрии, которая развивалась как часть астрономии.

Выдающиеся представители математики Ближнего и Среднего Востока были, как правило, людьми всесторонне образованными, успешно использовали достижения математики для развития других наук. Безусловно, значителен их вклад в прикладное направление математики, разработку вычислительных методов решения математических задач. Так ими проведено вычисление чрезвычайно точных и полных тригонометрических таблиц, разработан прием извлечения корня из чисел, применение числовой алгебры в измерительной геометрии и тригонометрии, открытие замечательного итерационного приема численного решения одного из видов кубического уравнения и др.

Результаты арабов были освоены в Западной Европе только в XVI столетии.

2.6. Западная Европа. Возрождение (XII-XVI столетия)

1. Длительный период в странах Западной Европы общественная жизнь и экономические условия оставались такими же, как во время упадка Римской империи. Арабы лишили Византийскую империю и ее провинций выхода к Средиземному морю. Хозяйственная деятельность во многих районах Европы сокращалась. Западная Европа перешла в полу варварское состояние. Следующая фраза из книги В.А.Стеклова[6] наглядно иллюстрирует уровень знаний в то время. «До чего дошло отупление людей можно судить по тому, что даже через 7 веков после Р.Х. чудом учености считался монах Буда за то только, что он был единственным человеком, понимавшим четыре правила арифметики и способным применять их на практике».

2. В XI-XIV веках в Западной Европе начинает постепенно развиваться феодализм - экономика древнего мира уступала место новым феодальным порядкам. В XV-XVIII веках также постепенно происходит переход к капиталистическим отношениям. Начало этого периода преобразований - XV-XVI века в Европе называют эпохой Возрождения.

В начале этого периода математика в Западной Европе была в примитивном состоянии. Математические тракты носили характер поверхностного заимствования. Практических задач, стимулирующих развитие математики, не было. Однако теоретическая математика имела некоторое развитие. Философы - схоласты, изучая Платона и Аристотеля, размышляя о природе божества, приходили к тонким рассуждениям о природе континуума, бесконечности и движения, что в последствии способствовало развитию теории бесконечно малых. Главенствующую роль в идеологической жизни общества играла теология Она основывалась на канонизированном и догматизированном учении Аристотеля, системе мира Птолемея и религиозных учениях Отцов церкви. Вначале учение Аристотеля было запрещено, как противоречащее догматам Церкви. Затем его идеи приспособлены к Священному Писанию. В XIII веке была создана доктрина: при сотворении Вселенной Бог руководствовался математическими принципами. Первостепенной обязанностью ученого является поиск математического плана ,по которому Бог создал Вселенную.

Развитие научных знаний существенным образом способствовало организация, начиная с XI века, учебных заведений. Одна из первых школ была создана еще в X веке во Франции монахом *Гербертом*. Начиная с XII века в Европе начали возникать университеты: в Болонье и Салерно, затем в Оксфорде и Париже (1167 г.), Кембридже (1209 г.), Неаполе (1224 г.) и в других городах. Первые университеты создавались под покровительством церкви, в XVI-XVII веках они перешли под контроль государств. Характерная особенность университетского образования состояла в том, что оно заключалось в основном в разъяснении книг известных авторов, включенных в программу обучения. В первых университетах властвовала схоластика. В течение длительного времени математик оставалась

---

[6] В.А.Стеклов. «Математика и ее значение для человечества». 1923.

второстепенной дисциплиной, ни отдельных кафедр, ни преподавателей математики не было. Позднее в образовательный курс ввели первые две книги «Начал» Евклида, лекции по астрономии, началам оптики, тории пропорций. Несмотря на второстепенную роль математики, из стен университетов вышел ряд замечательных ученых, в том числе *Иоганн Мюллер-Региомонтан, Николай Коперник.*

XII век стал для Европы веком «великих переводов» трудов греческих и арабских математиков на латинский язык.

3. Во второй половине XV века в Европе стала быстро развиваться промышленность, на смену ремесленникам пришла мануфактура. В !453 г. появилась первая печатная книга. Необходимость новых рынков сбыта явилась стимулом для поиска новых земель, которые и были открыты в результате великих путешествий Христофора Колумба (1451-1506 Васко де Гама (1469-1524), Фернана Магеллана (1480-1521). В XII -XIII столетиях возникли первые коммерческие города в Италии (Генуя, Пиза, Венеция, Милан, Флоренция), затем во Франции и других районах Европы. Позже торговые города выходят поддержке феодальных князей победителями в борьбе с феодалами - землевладельцами.. В результате в Европе появляются первые национальные государства.

Развитие в XV- XYI вв. военного дела дало новую область применения геометрии. Именно в это время появилось много новых инструментов, были написаны книги по применению артиллерии.

Развитие промышленности, торговли, мореплавания привело к развитию наук. Города начали устанавливать коммерческие связи с Востоком. Западные купцы и студенты познакомились с цивилизацией стран ислама, и с сохранившейся в этих странах греческой классикой. В растущих торговых городах под влиянием торговли, навигации, астрономии и землемерия развивалась практическая математика. Вначале развитие математики носило чисто прикладной характер. Наибольший интерес бюргеры проявляли к практическим вычислениям. К ним присоединились и работники университетов, заинтересованных улучшением вычислительных методов для решения астрономических задач. Несколько столетий алгебру и геометрию вне университетов преподавали мастера счета, не знающие математической классики, но обладающие твердыми знаниями по навигации и бухгалтерии.

Первым из купцов, чьи математические работы выявляют известную зрелость, был *Леонардо из Пизы (Фибоначчи сын Боначчо*) (1180-1240). Вернувшись из путешествия на Восток, он написал Книгу абака» - 15 разделов (1202 г.), содержащую сведенья об алгебре и арифметике, а затем «Практику геометрии» В его работах нашли отражение труды греческих и арабских математиков, приводятся решения большого числа задач. В разделах 8-11 Книги абака дано приложение арифметики к коммерческим расчетам. Получен ряд новых результатов, в том числе выведен ряд Фибоначчи, как результат решения задачи о размножении кроликов.

Английский философ *Роджер Бэкон* (1214-1292) считал математику основой всех наук. Ему принадлежит заявление: «Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества.»

Известный математик XIV века профессор Парижского университета *Николай Орезм* (1323-1382) ввел впервые дробные показатели степени и правила пользования ими. В XV веке французский математик *Шюке* (1445-1500) ввел нулевые и отрицательные показатели.

Выдающийся математик XV столетия *Иоганн Мюллер из Кенигсберга* (иначе *Региомонтанус)* (1436-1476) переводил все доступные ему математические рукописи. Его математические труды оказали глубокое влияние на дальнейшее развитие тригонометрии, и ее применение в астрономии и алгебре. Будучи замечательным вычислителем, он составил таблицу синусов с интервалом в одну минуту. Был автором первых печатных астрономических таблиц. В Нюрнберге он основал одну из первых астрономических обсерваторий Европы.

Во второй половине XV века в Европе подвились многочисленные учебники по арифметике. В 1489 г. в Лейпциге вышла книга *Яна Видмана* (1460-ок.1489) «Быстрый и красивый способ счета для всякого вида счета».

Большую роль в поднятии авторитета и значения математики в конце XY столетия сыграл *Леонардо да Винчи* (1452-1519) - живописец, скульптур, архитектор, механик и математик. Он говорил: «Никакое человеческое исследование не может считаться истинной наукой, пока оно не прошло математическое доказательство». Леонардо разработал теорию перспективы, разработал «метод неделимых».

В XV столетии мастера счета в Италии владели арифметическими операциями, включая действия с иррациональностями, а итальянские художники были хорошими геометрами. Мастером счета был францисканский монах *Лука Пачоли* (ок. 1445-1514). В его книге «Сумма арифметики» (1494) труды Фибоначчи были изложены в переработанном виде. Книга содержала все , что было известное в то время по арифметике, алгебре и тригонометрии. После этой книги использование индийско - арабских цифр стало общепринятым, а сделанные в конце книги замечания о невозможности решения уравнений $\mathbf{x^3 + mx = n}$, $\mathbf{x^3 + n = mx}$ стало отправной точкой в работах математиков Болонского университета - одного из наиболее крупных в Европе. Его студентами в разное время были Пачоли, Дюрер, Коперник.

4. Только в XV-XVI столетиях европейские математики сумели перейти к дальнейшему развитию математики греков и арабов. В Болонском университете была разработана теория решения кубических уравнений, что в свою очередь послужило толчком к развитию теории комплексных чисел (Бомбелли, «Алгебра» 1572г.). К концу XVI века получила развитие теория решения алгебраических уравнений до 4-ой степени.

Франсуа Виет (1540 - 1603) ввел в теорию алгебраических уравнений буквенные обозначения, что оказало огромное влияние на все последующее развитие алгебры. Усовершенствование техники вычислений также в значительной степени является результатом совершенствования обозначений. Виет доказал ряд теорем по связи корней и коэффициентов уравнений, получил разложение тригонометрических функций кратных дуг, ввел в математику бесконечное произведение, улучшил результат Архимеда, вычислив число π с десятью десятичными знаками.

Новые запросы формулировались развивающимися национальными государствами. Инженеры были нужны для возведения публичных зданий и сооружений. Важной областью математических исследований по-прежнему оставалась астрономия. Это было время великих астрономических теорий. Коперник (1473-1543), *Тихо Браге* (1546-1601), *Кеплер* (1571-1640) совершили революцию в астрономии.

Коперник в книге «О вращении небесных тел » изложил результаты своих исследований о гелиоцентрической системе мира. Система Коперника изменила существующие представления о строении мира, явилась фундаментом дальнейшего развития науки. Вскоре последовали открытия Галилея и Кеплера, а затем и механика Ньютона.

Решающее влияние на математику стал оказывать труды Платона, его преклонение перед количественными и математическими рассуждениями. Появлялись все более точные тригонометрические и астрономические таблицы. Совершенствовались методы решенья уравнений. Вычислительная техника достигла новых высот. После открытия морского пути в Индию итальянские города перестали быть основной дорогой на Восток В новых государствах Франции, Англии, Голландии возрос спрос на математиков. В числе великих математиков - теоретиков и вычислителей XVII столетия известны инженер *Симон Стевин*, астроном *Иоганн Кеплер*, землемеры *Андриан Влакка и Езекиль де Деккера*.

Стевин (1548-1620) в работе “Десятая” ввел десятичные дроби - составную часть проекта унификации всей системы мер на десятичной основе, что явилось существенным этапом развития вычислительной математики, ставшем возможным благодаря принятой индийско - арабской системе счисления.

5. Математик XVII в. был одновременно математиком, механиком, астрономом и даже философом. Все это способствовал органическому слиянию физической, математической, философской, а иногда и конструкторской мысли. Среди ученых того времени было много любителей, т.е. людей, занимающихся наукой помимо своей основной деятельности: адвокатов, судей, монахов, торговцев. По-прежнему они были изолированы друг от друга. Первый европейский «Журнал ученых» начал выходить с 1665 г. (еженедельно, но нерегулярно. Задачи журнала были определены издателем следующим образом: перечень важных книг и характеристика их краткого содержания, печатание хвалебных речей скончавшимися ученым и знакомство с их трудами, описание новых

изобретений и полезных экспериментов в различных областях науки, проведение дискуссий и др. Одной из центральных фигур первой половины XVII в францисканский монах *Марен Мерсенн* (1588-1649), которого называли «главным почтамтом для всех ученых Европы». Мерсенну принадлежит ряд оригинальных трудов по математике, измерению скорости звука, проблемам наследственности и др. Но его главная заслуга в том, что он выполнял миссию посредника в круга самых знаменитых ученых Европы Его келья стала центром научного кружка, в который входили *Этьен и Блез Паскали*, *Ферма* и многие другие ученые. В числе его корреспондентов были *Декарт, Галилей, Гюйгенс*. Его уникальный талант заключался в умении ставить новые научные проблемы, умело направлял интересы ученых на решении задач, которые представлялись ему наиболее важными. Мерсенн был также и популяризатором науки. Усилия Мерсенна по установлению связей между учеными имели результатом начала их коллективной деятельности. Его можно считать создателем такого научного объединения, на базе которого позднее образовалась Парижская академия наук (1666).

В XV- XYI вв. несмотря на значительные теоретические достижения, математика в основном развивалась в прикладных исследованиях. В это время было создано и усовершенствовано множество инструментов для навигации, астрономии, торговли. Иллюстрацией большого значения, которое придавалась измерения разного рода может служить картина «Измерители», приписываемая школе Франса Флориса (1516-1570).[7]

Таким образом, основным стимулом развития математики в эпоху Возрождения явились запросы *торговли, мореплавания, строительства, земледелия, механики и др.* Наиболее энергично развивалась *прикладная математика. Алгебраисты XVI столетия являлись участниками общекультурного движения, они были медиками, архитекторами, географами, купцами, Достижения математиков эпохи Возрождения определили последующие выдающиеся достижения европейских астрономов.*

2.7. XYII столетие

1. В XYII столетии в странах Западной и Центральной Европы продолжалось интенсивное развитие капиталистических отношений. Экономические ресурсы европейских государств необычайно возросли. В противовес феодальному схоластическому мышлению формировалось светское мировоззрение. Революция в астрономии позволило совершенно по-новому взглянуть на возможности человека объяснять астрономические явления.

Дальнейшее распространение мануфактур, развитие горного дела, строительство ветряных мельниц и каналов, постройка судов для океанических плаваний, изобретение огнестрельного оружия и книгопечатания - все это выдвигало новые технические проблемы. Отсюда

[7] Иллюстрация фразы римского поэта Горация: «Есть мера во всем».

естественное ускоренное развитие теоретической механики, изучение движения и изменения вообще. Возросла потребность в инженерах, способных решать возникшие технические проблемы.

В математике важное место по-прежнему отводилось вычислительному направлению - «счетному уклону», отвечающему запросам купеческого класса. Наряду с этим все большое значение приобретали задачи механики, эффективного использования и усовершенствования машин, анализ астрономических наблюдений..

Существенным совершенствованием вычислительной техники стало изобретение алгоритмов. Английский лорд *Дж. Непер* (1550 - 1617) написал "Описание удивительного канона логарифмов" (1615). После смерти Непера профессор Лондонского колледжа *Бриггс* в соответствие с рекомендациями Непера усовершенствовал логарифмы и опубликовал в 1624 г. "Логарифмическую арифметику". Полная таблица логарифмов с десятичным основанием была опубликована *де Деккером* и *Блаком* в 1627 г. Натуральные логарифмы появились одновременно с Бриггсовскими, но не были вначале должным образом оценены.

Активность математиков в это время поддерживалась оживленной перепиской, а также деятельностью дискуссионных кружков, из которых вырастали академии как оппозиция университетам. Университеты оставались носителями средневекового подхода, при котором предполагалось изложение научных знаний в установившихся, застывших формах. Академии напротив были проникнуты духом поиска новых научных результатов. Первая академия основана в Неаполе (1560 г.), затем последовали академии в Риме (1603 г.), Лондоне (Лондонское королевское общество - 1662 г.), Париже (1666 г.).

В это время единственной наукой о природе, обладающей систематическим строением, была механика, базирующаяся на математике. Математика стала действенным инструментом для изучения Вселенной.

2. Первую универсальную модель мира предложил *Декарт* (1596-1650). В основе его модели лежало положение, что все явления природы (в том числе теплота, свет, электричество) объясняются механическим взаимодействием элементарных математических частиц. В модели введено понятие «близкодействия»; введено отношение между длительностью и временем; пространство отождествлялось с протяженностью; время определено как одно из пространственных осей принятой системы координат. Философские принципы Декарта – «мыслю, следовательно существую», «подвергай все сомнению», «делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничто не пропущено» и др. Им сформулированы поражающие глубиной правила собственной морали

Математические работы Декарта связаны с его работами по физике и философии. В «Геометрии» (1637 г.) Декарт применил свой метод для объединения алгебр и геометрии, получил новые результаты по аналитической геометрии. Почти 150 лет алгебра и аналитическая геометрия развивались в направлении, определенном Декартом..

Под влиянием развития страхового дела и изучения задач, связанных с азартными играми, появилась математическая теория вероятностей. Ее основы были заложены *Ферма* и *Паскалем* (1654 г.), *Гюйгенсом* (1657 г.). Таблицы смертности были составлены *Виттом и Галлеем* (1671, 1693 гг.).

3. Замечательным примером получения новых математических результатов при решении практических задач была работа *Христиана Гюйгенса* (1629-1695) «Маятниковые часы» (1673 г.), в которой при поиске лучшего способа измерения времени рассмотрены не только маятниковые часы, но и эволюта и эвольвента. Изучение часов оказало влияние на развитие механической концепции мира.

Выше уже был приведен характерный для XVII века поучительный пример того, как поиск метода определения долготы судна стимулировал математические изыскания в различных теоретических и прикладных направлениях. Необходимость решения этой задачи была одним из мотивов, стимулирующих создание Лондонского королевского общества и Парижской Академии наук. Исследования по астрономии, картографии, навигации, механики способствовали развитию математического анализа. Проблема определения долготы была решена, когда была создана удовлетворительная теория движения Луны и изобретен хронометр.

4. В своих вычислениях математики использовали труды Герона и Архимеда - именно в этот период были опубликованы латинские издания их трудов. В то же время, ради получения практических результатов, допускалось и пренебрежение Архимедовой строгостью что, в частности, проявилось при вычислении центров тяжести различных фигур - одной из любимых задач математиков того времени.

Иоганн Кеплер увидел в гелиоцентрической системе действие некоторой единой силы, обосновал зависимость между периодами вращения планет и их расстояниями от солнца, ввел представление об эллиптических траекториях, сформулировал три закона движения планет Кеплер в своих трудах по астрономии, связанных с большими вычислениями, отказался от Архимедовой строгости. Он говорил, что доказательства Архимеда «абсолютны и во всех отношениях совершенны», но оставлял их для людей склонных увлекаться точными доказательствами. В своей «Стереометрии винных бочек» (1615 г.) Кеплер вычислил объемы тел, получаемых при вращении конических сечений вокруг осей, лежащих с ними в одной плоскости

5. В развитии науки выдающаяся роль принадлежит *Галилео Галилею* (1564-1642 гг.) - итальянскому физику, астроному, математику, филологу. Заслуга Галилея прежде всего в развитии духа современной науки, основанной на гармонии теории и эксперимента - научное значения, по определению Галилея, имеет только та теория, которая подтверждена экспериментом. Галилеем сформулирован принцип относительности, согласно которому все механические явления происходят одинаково во всех

системах, находящихся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Не будучи собственно математиком, Галилей занимает видное место в истории математики. Он глубоко изучил доступные ему труды Архимеда, всячески пропагандировал применение математических методов при изучении явлений природы и сам дал образцы такого применения. В своих «Беседах» (1638 г.) Галилей пришел к математическому описанию движения, к зависимостям между расстоянием, скоростью и ускорением. Он не привел систематическое изложение своих взглядов на математический анализ, предоставив это своим ученикам Торричелли и Кавальери. Галилей сделал много открытий в естествознании: закон инерции, закон колебания маятника; развил новую механику свободно падающих тел, обосновал параболическую теорию движения, был основателем теории упругости, теории земного магнетизма защищал теорию Коперника. Ему также принадлежит ряд выдающихся открытий в астрономии (открыл гор на Луне, 4 спутника Юпитера, фазы Венеры, пятна на Солнце, звездное строение Млечного Пути).

6. Работы физиков, астрономов, математиков в различных областях знаний в конечном счете привели к получению новых оригинальных результатов в теоретических разделах математики, в том числе к созданию новых областей математических исследований. Перечислим некоторые результаты, полученные в XVII столетии.

Виллис (1616-1703) был первым математиком, у которого алгебра по настоящему переросла в анализ. Метод обращения к бесконечности был у Виллиса достаточно примитивным, но новые результаты он получал.

Кавальери (1598 1647) - ученик Галилея в своей «Геометрии» (1695) построил упрощенный вариант исчисления бесконечно малых. Кавальери опубликовал более десяти книг по математике и астрономии, в которых рассматривались задачи измерения на небесной сфере, отражение света от параболических, эллиптических и гиперболических зеркал, определения фокусов зеркал и чечевиц, вычисления площадей и объемов т др.

Ферма (1601-1665) – юрист, математика была него лишь увлечением. Несмотря на это, он стал основоположником плодотворных областей математики: аналитической геометрии, исчисления бесконечно малых, теории вероятностей. В 1638 г. под влиянием работ Кавальери предложил свой метод отыскания максимумов и минимумов. Ферма сформулировал также основной принцип оптики, из которого выводятся законы отражения и преломления света. Круг математических интересов Ферма был весьма широк.

Блез Паскаль (1623- 1664) вместе с Ферма является основателем математической теории вероятностей. Его идея относительно интегрирования, бесконечного и бесконечно-малого оказали влияние на Лейбница. Паскаль также изобрел счетную машину.

7. Исаак Ньютон (1643-1727). С 1669 до 1696 гг. - заведующий кафедрой Кембриджского университета, В 1696 поступил на службу в ведомство монетного двора, вначале инспектором, а затем директором. В

1672 г. избирается членом Лондонского королевского общества, а с 1703 г. является его президентом.

В физике, астрономии, механике, математики Ньютон получил новые результаты, определившие дальнейшее развитие науки. Опираясь на труды Галилея и полученные Кеплером эмпирически, закономерности движения планет, И.Ньютон разработал строгую научную теорию механики, описывающую движение и небесных тел, и земных объектов одними и теми же сформулированными им тремя законами механики, открыл универсальный закон тяготения. Ньютон обосновал корпускулярную теория света, получил результаты о распространении световых волн, сложном составе света, исследовал интерференцию и дифракцию света, открыл дисперсию света и хроматическую аберрацию.

Распространяя на всю Вселенную закон тяготения, Ньютон пришел к выводу, что Вселенная является не конечной, а бесконечной. В работах Ньютона и его последователями получила развитие дискретная (корпускулярная) модель мира - материя рассматривалась как вещественная субстанция, состоящая из отдельных атомов – корпускул. Существенными характеристиками ньютоновского мира были пребывающее всегда в покое трехмерное пространство; время, не зависящее ни от пространства, ни от материи; движение, как перемещение. в пространстве по непрерывным траекториям Вселенная, по Ньютону, - гигантский и полностью детерминированный механизм, где события и процессы являют собой цепь взаимосвязанных причин и следствий. Раскрывая сущность времени и пространства, Ньютон определил их как «вместилища самих себя и всего существующего. Во времени все располагается в смысле порядка последовательности, в пространстве в смысле порядка положения». Он определил два типа понятий пространства и времени; абсолютные (математические) и относительные (кажущиеся).

При разработке законов механики Ньютон пришел к дифференциальному и интегральному исчислению. Соответствующий аппарат был изложен им как теория флюксий. Теория была разработана в 1665-1666 годах, опубликована в 1736 г. уже после смерти Ньютона. Ньютон ввел переменные величины – флюенты, зависящие от времени, и обозначил их латинскими буквами **u, x, y.** Скорости их изменения обозначались как u', x', y', это флюксии производные по времени от флюент. Несколько позже были введены u'', x'', y'', т.е. флюксии от флюксий. Первая задача, сформулированная Ньютоном, заключается в определении соотношения между флюксиями по заданному соотношению между флюентами. Эта первая задача теории флюксий – задача дифференцирования и получения дифференциального уравнения. Вторая основная задача заключалась в определении соотношений между флюентами по заданному соотношениями между флюксиями. Это задача интегрирования дифференциального уравнения, в частности, нахождения первообразной. Сложилась новая математическая дисциплина – теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Ньютон предложил методы решения поставленных задач. Пользоваться теорией флюксий достаточно сложно.

В рамках своей теории он дал динамическое объяснение приливов и отливов и иных явлений, имеющих место при движении небесных тел, изложил основы теории движения Луны, решил задачу о притяжении сфер, заложив тем самым основы теории потенциалов.

Им разработано исчисление конечных разностей, которое нашло применение в многочисленных приложениях в численных и приближенных методах, В последствие на основе работ Ньютона создан метод конечных разностей для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Полученные Ньютоном зависимости широко применяются в современной вычислительной практике.

Ньютон обладал исключительным научным авторитетом. В фундаментальном труде «Математические принципы натуральной философии» (1687) на два столетия определил представление о картине мира, пространстве и времени.

8. Лейбниц (1646-1716) – выдающийся математик столетия, его вклад в математику равен вкладу Ньютона. Большую часть жизни провел при ганноверском дворе на службе у герцогов.

При создании интегрального и дифференциального исчисления Лейбниц ввел хорошо продуманные, удобные символику и термины, многие из них дошли до наших дней. Идеи дифференциального исчисления изложены Лейбницем в 1684 г. в маленькой журнальной заметке «Новый метод для максимумов и минимумов, а также для касательных, для которого не является препятствием дробные и иррациональные количества, и особый вид исчисления для этого». В статье использованы термины характеристического треугольника (dx, dy, ds), даны правила дифференцирования суммы, произведения, частного, степени. Получено условие $dy = 0$ для экстремума функции и $d^2 y = 0$ для точек перегиба. Через два года в статье Лейбница «О глубокой геометрии» были даны правила интегрирования. Интеграл представлен как сумма всех ординат, которых бесконечно много. Для интеграла введен сохранившийся до сего времени символ $\int dx$.

С появлением статей Лейбница начался исключительно плодотворный период развития математики.

Начиная с 1687 г. Лейбниц стал активно сотрудничать с братьями Бернулли Якобом и Иоганном. До конца века они втроем разработали значительную часть интегрального и дифференциального исчисления.

Лейбниц сочетал в себе ярки математический талант с широкими гуманитарными склонностями. Знания его были весьма разносторонними. Он успешно работал в области философии, истории, лингвистики, теологии, биологии, геологии. Обладал способностью к изобретательской деятельности После Паскаля одним из первых изобрел счетную машину. В 40 лет он совершенствовал свою счетную машину, которая кроме четырех действий арифметики могла извлекать квадратные корни, пришел к идее парового двигателя, содействовал объединению тогда разрозненной Германии. Оказал заметное влияние на развитие науки в России. Был знаком с Петром 1, обсуждал с ним проект организации Академии наук в Петрограде, по просьбе Петра 1 разрабатывал проекты развития образования, научных исследований и государственного управления России.

Движущейся силой его жизни были поиски всеобщего метода овладения наукой, понимания сущности единства вселенной.

9. *Семья Бернулли*: основатели математической династии *Якоб* и *Иоганн,* сыновья Иоганна - *Николай и Даниил* внесли большой вклад в теоретическую математику и ее приложения. Якоб Бернулли (1654-1705) – один из основоположников теории вероятностей. Иоганн Бернулли (1667-1748) считается одним из создателей вариационного исчисления. Им поставлена и исследована задача о брахистохроне.

10. Таким образом, в эпоху Возрождения естественные науки развивались, используя язык математики. Работы математиков охватывали много новых и старых областей. В прикладных исследованиях рождались новые теоретические проблемы, были получены их решения, одновременно развивались новые направления теории.

В результате работ плеяды замечательных математиков появился общий метод дифференцирования и интегрирования, построенный с пониманием, что один процесс является обратным к другому. Такое открытие могло быть сделано только людьми, которые овладели как геометрическим методом греков, развитым Кавальери, так и алгебраическим методом Декарта и Виллиса. Такие люди появились после 1660 г. в лице Лейбница и Ньютона. Свои открытия в области анализа они сделали независимо друг от друга. Ньютон получил результаты первым, Лейбниц первым выступил в печати.

Это было время предтеч. Великие мыслители XYII столетия, занимаясь решением практических задач, видели в математике *инструмент познания природы, искали общие методы мышления, позволяющие выявить истины в науке. Теория и практика шли рядом*. В это время все выдающиеся математики были философами, а выдающиеся философы - математиками.

2.8. XVIII столетие

1. Развитие математики в XVIII столетии шло ускоренными темпами. Исследования велись в основном в академиях: Парижской, Берлинской, Петербургской. Просвещенные деспоты. Фридрих I, Екатерина I, Людовики XV и XYI любили окружать себя учеными мужами, интересовались результатами исследований, особенно практическими результатами..

Наиболее крупные математики XVIII столетия: *Ньютон* (1642-1727), *Лейбниц* (1646-1716), *братья Бернулли Якоб* (1654-1715) и *Иоган*н (1667-1748), *Тейлор* (1685-1731), *Стирлинг* (1692-1770), *Маклорен* (1698-1748),*Эйлер* (1707-1783), *Даламбер* (1717-1783), *Ламберт* (1728-1777),*Лагранж* (1736-1813). *Лаплас* (1749-1827), *Лежандр* (1752-1883), *Карно* (1753- 1823) и многие другие..

В эти годы математики успешно развивались и теоретическое и прикладное направления математики. Математики занимались дальнейшим развитием анализа, его приложениями к механике и решением тех задач, которые возникали по мере развития экономики, расширения торговых связей. Развитие теоретической математики, совершенствование ее методологии происходило в значительной степени под влиянием проблем, возникающих при исследовании природных явлений, и задач развивающегося общества. Это видно из приведенных выше данных о работах Ньютона и Лагранжа и характерно для многих других математиков столетия. Покажем это на примере деятельности Эйлера и математиков французской школы.

2. *Леонард Эйлер* (1707-1783) – самый крупный математик XYIII столетия. Работал в академиях Берлинской (1741- 1766 гг.) Петербургской (1725-1746 и 1766 – 1783 гг.). Жизнелюб, дважды женат, имел тринадцать детей. В 1735 г. потерял один глаз, в 1766 – второй. Будучи слепым, продолжал активно работать. Результаты своих исследований диктовал ученикам. При жизни опубликовал 530 книг и статей. После его смерти Петербургская академия публиковала оставленные им рукописи в течение 47 лет. Всего опубликовано 886 работ Эйлера, относящихся как к теоретической, так и к прикладной областям математики. Далее приведен краткий, далеко не полный перечень работ: тригонометрия в современном изложении, анализ бесконечных рядов, в том числе получение зависимости $\mathbf{e^x = \cos x + i \sin x}$, исследования в области аналитической геометрии, изучение функции дзета и ее связи с теорией простых чисел, том по дифференциальному исчислению, три тома интегральных исчислений, теория дифференциальных уравнений, теорема Тейлора, методы нахождения max и min функций, полное введение в алгебру, аналитическое изложение механики, теория движения ракет и комет, исследование по гидравлике, кораблестроению, артиллерии, новая теория музыки. Результаты исследований во всех областях изложены систематически и четко – образец для учебников. Обозначения приведены к современному виду. Эйлер руководил группой молодых математиков, занимающихся различными частными проблемами, а после смерти Эйлера участвующих в публикации его рукописей и продолжении его работ.

Научные работы Эйлера охватывают почти всю математику того времени и во многих областях им сделаны значительные открытия. Научная деятельность Эйлера имела прикладную направленность. К формулировке новых теоретических проблем и построению математических теорий он приходил при рассмотрении конкретных практических задач. Около 40% его работ посвящено задачам астрономии, физики, гидродинамики, небесной механики, баллистики, кораблестроения, оптики, картографии и др.

Для России труды Эйлера имели особое значение. С Россией он был связан практически в течение всей своей научной деятельности. В годы жизни в Берлине он оставался деятельным членом Петербургской академии, печатал в ее изданиях значительную часть своих работ, руководил занятиями молодых ученых. Многие прикладные работы Эйлера, например, по картографии (составление первого в России сборника научно обоснованных карт) и морскому делу, выполнялись в ответ на запросы русских правительственных учреждений. В России печатались и его фундаментальные работы, и его учебники элементарного содержания, способствующие значительному повышению уровню математического просвещения. У Эйлера учились первые русские академики по математике С.К. Котельников (1723 1806), и по астрономии С.Я.Румовский (1734-1812), известный также как автор нескольких математических работ.

3. Во Франции математические исследования развивались независимо от Эйлера. Интеллектуальная оппозиция вела борьбу со старым режимом, с церковью, запретившей, в частности, труды Декарта. Оппозиция после 1750 г. имела своим центром издание «Энциклопедия» с редактором *Дени Дидро* и ведущим математиком *Даламбером*. Выпущено в 1751-1772 гг. 28 томов.

Представляет интерес, имеющий в то время спор между картезианцами и ньютонианцами, – вытянута или сплющена Земля у полюсов (Решающее слово оказалось за Эйлером – согласно принципу наименьшего действия должен иметь минимальное значение интеграл $\int \mathbf{mvds}$).

Жан ле Рон Даламбер (1717-1783) – подкидыш, не законный сын аристократа, с 1754 г. «непременный секретарь» Французской академии. В 1743 г. появился его «Трактат по динамике», содержащий метод сведения динамики твердых тел к статике – «принцип Даламбера». Он продолжал успешные исследования и публикации по многим прикладным проблемам, в том числе по гидродинамике, аэродинамике и задаче трех тел. В 1747 г. опубликовал теорию колебания струн, что сделало его, вместе с Даниилом Бернулли, основателем теории дифференциальных уравнений в частных производных. Даламбер занимался и проблемами обоснования математики. Ввел понятие предела, пытался доказать «Основную теорему алгебры», занимался основами теории вероятностей.

Теория вероятностей быстро развивалась в это время благодаря дальнейшей разработке идей Ферма, Паскаля и Гюйгенса. *Авраам де Муавр* (1667-1754) - французский гугенот, поселившийся в 1685 г. в Лондоне, написал «Учение о случае» (1716 г.). Муавр вывел функцию нормального распределения как аппроксимацию биноминального распределения и дал формулу, равносильную формуле Стирлинга. Интерес к теории вероятностей был вызван деятельностью образовавшихся в то время многочисленных лотерей и страховых компаний.

Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) с 19 лет был профессорам артшколы в Турине, далее с 1766 г. по 1786 г. (до смерти Фридриха II) работал в Берлине, затем переехал в Париж. Во время революции участвовал в реформе мер и весов. С 1795 г. профессор Нормальной школы, с 1797 г. профессор Политехнической школы. В ранний период своей деятельности дал чисто аналитическую теорию вариационного исчисления и сразу применил свою теорию к задачам динамики. Принимал участие также в разработке одной из основных проблем своего времени – теории движения Луны, дал первые частные решения задачи трех тел. В 1767 г. издал работу «О решении численных уравнений», в 1770 г. «Размышления об алгебраическом решении уравнений».

Вторую часть своей жизни Лагранж посвятил созданию больших трудов: «Аналитической механике» (1788 г.) и «Теории аналитических функций» (1797 г.). «Аналитическая механика» - наиболее ценный его труд. Результаты Эйлера, Даламбера и других математиков восемнадцатого столетия здесь обработаны и представлены в обобщенном виде, что привело к обобщенным координатам и к уравнению движения в лагранжевой форме:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=F_t\,.$$

Книга Лагранжа явилась триумфом чистого анализа, геометрический подход Ньютона был полностью отброшен.

Гаспар Монж (1746 1818) – с 1768 г. профессор математики и физики, в 1784 г назначен инспектором морских училищ Франции. Активный участник Французской революции. Был морским министром, возглавлял организацию военной промышленности. После прихода к власти Наполеона был ближайшим его соратником. В 1815 г лишен Бурбонами всех титулов и права преподавания в Политехнической школе, создателем и фактическим руководителем которой он был на протяжении 20 лет.

Как математик Монж создал новую науку начертательную геометрию. Он также написал первый наиболее полный учебник по дифференциальной геометрии, в котором были изложены и полученные им новые результаты..

Пьер Симон Лаплас (1749-1827) - последний из ведущих математиков восемнадцатого столетия. Сын скромного землевладельца из Нормандии легко менял сои политические взгляды. И во времена революции, и при Наполеоне, и при Людовике XVIII занимал ряд преподавательских и административных должностей, успешно продолжая свою математическую деятельность. Ему принадлежат два крупных труда: «Аналитическая теория вероятностей» (1812) – очень обширный труд (подробно рассмотрены азартные игры, теорема Бернулли и ее связь с интегралом нормального распределения, теория наименьших квадратов, руководящей мыслью в работе являлось применение производящих функций) и «Небесная механика» (5 томов ,1799 1825 гг.), явившее собой завершение трудов

Ньютона, Клеро, Даламбера, Эйлера, Лагранжа и самого Лапласа. Обоим монументальным произведениям сопутствовало популярные работы: «Философский опыт относительно вероятностей» (1814 г.) и «Изложение системы мира» (1796 г.). В работах Лапласа нашло отражение то, как восемнадцатое столетие понимало механический материализм. Известен предполагаемый ответ Лапласа Наполеону, который попытался упрекнуть его, заявив, что в его книгах нет упоминаний о боге: «Государь, я не нуждаюсь в этой гипотезе».

4. Математика в России развивалась в первую очередь благодаря Эйлеру – основоположнику математических школ России. Успешно работали в России *Николай Бернулли* (1695-1726) и *Даниил Бернулли* (1700-1782) .Последний, кроме теоретических работ по матанализу, получил интересные результаты в прикладной области: вывел основное уравнение стационарного движения идеальной жидкости, разработал кинетические представления о газах, применил теорию вероятностей к статистике населения, занимался физиологией и медицины.

С.К.Котельников (1723-1806, - наиболее выдающийся ученик Эйлера, первый русский ученый, имеющий самостоятельные работы по математике и механике. Автор восьми работ по анализу и смежным областям математики.

Большая группа русских математиков успешно работала над созданием учебников математики на русском языке. Ими были опубликованы оригинальные работы по математике, механике, физике, астрономии, геодезии. В их числе: *Л.Ф.Магницкий* (1707-1783), *С.Е Гурьев* (1733-1788), *М.Е.Головин* (!756-2790), *Н.И.Фусс* (1755-1826), *С.Я.Румовский* (1734-1812), *Ф.И.Шуберт* (1758-1825, и другие.

5. Итак, в приведенном кратком обзоре работ ведущих математиков восемнадцатого столетия находит подтверждение положение, что математики в это время не разделяли теорию и приложения. Это положение подтверждается и работами многих других математиков XVIII столетия, чья деятельность здесь не рассматривалась. Успешное решение ряда прикладных проблем способствовало и развитию теории - получению замечательных результатов в математическом анализе.

К концу века некоторые ведущие математики высказали положение, что в результате трудов Эйлера, Лагранжа, Даламбера, Лапласа и других область математических исследований исчерпана. Время показало ошибочность этого заявления. Развивающееся человеческое общество, проблемы, возникающие в ряде наук, ставили перед математикой новые задачи. Для их решения потребовалось дальнейшее развитие математической теории, совершенствование методологии математических исследований.

2.9. XIX столетие

1. Французская революция и наполеоновская эпоха создали благоприятные условия для развития наук. На континенте Европы началась промышленная революция, появились новые общественные классы,

возникли новые демократические идеи, устаревшие формы мышления подвергались критике, школы и университеты были преобразованы и обновлены. В девятнадцатом столетии математики уже не обитали при королевских дворах – быть членами академий уже не являлось их главным занятием. Обычно они работали в университетах и технических школах, являлись и преподавателями и исследователями.

Развитие математики в XIX столетии оказалось также обусловленным следующими обстоятельствами. Математики при независимых исследований различных проблем пользовались длительное время различными обозначениями и для одних и тех же понятий водили различные определения. Появилась необходимость в устранение этого недостатка. Требовалось навести порядок в теоретических основах, построить логический базис математики. *Обоснование важнейших математических понятий было в математическом анализе практически завершено в первой половине XIX века* (*Коши, Больцано, Вейерштрасс и др*.).

Определенное число математиков стали заниматься исключительно теоретическими проблемами, более того, в теоретической области стала развиваться узкая специализация: алгебраисты, аналитики, специалисты по математической логике, математической статистике и др. Одновременно возник пристальный интерес к строгости доказательств, У некоторых теоретиков появился определенный снобизм. Была положена основа разделения всех доказательств на строгие и нестрогие, лежащие вне математики. Высокая степень одаренности выдающихся математиков девятнадцатого столетия Гаусса, Римана, Клейна, Пуанкаре позволила преодолеть тенденции развития математики только в направлении «высокой строгости» и предотвратить разделение математики на теоретическую и прикладную. Известно высказывание Клейна, что чисто логические концепции должны составлять твердый скелет организма математики, сообщающей ей устойчивость и достоверность, но сама жизнь математики относится преимущественно к приложениям. Кризис математики рассмотрен более подробно далее в п. 2.11

2. Девятнадцатое столетие называют «золотым веком» математики. Были заложены основы и развиты новые направления математики.

В геометрии: создана неевклидова геометрия (*Гаусс, Лобачевский*), стали самостоятельными областями аналитическая и дифференциальная геометрии (*Монж, Гаусс, Дарбу* и др.), достигла расцвета проективная геометрия (*Понселе, Штаудт, Штейнер*), создана геометрия обобщенных пространств (*Риман, Ли*), заложены основы топологии (*Риман, Пуанкаре*) и др[8].

В алгебре: установлены критерии разрешимости ряда уравнений, создана теория конечных групп (*Руффини, Галуа, Гаусс, Коши, Кэли, Жордан*), заложены основы теории бесконечных групп (*Клейн, Ли*), разработана теория гиперкомплексных числовых систем (*Гамильтон,*

[8] «и др.» здесь и далее относится к перечню решенных математических проблем и к перечню математиков, участвующих в решении конкретных проблем.

Грассман, Кэли, Гурвиц), алгебраических числовых систем и теория инвариантов (*Гильберт*) и др.

В математическом анализе построена общая *теория множеств (Кантор), теория действительного числа (Вейерштрасс*, *Дедекинд*), теория функций, теория числовых и функциональных рядов (*Фурье, Коши, Вейерштрасс)* и др.

Теория функций комплексного переменного сформировалась в самостоятельную область математики (*Эйлер, Гаусс, Коши, Абель, Лоран, Вейерштрасс, Пуанкаре*), разработана геометрическая теория функций комплексного переменного (*Риман, Гаусс*) и дано приложение таких функций к физике и механике (*Жуковский, Клейн*) и др.

В теории чисел доказан асимптотический закон распределения простых чисел (*Чебышев, Адамар*), построена арифметика целых комплексных чисел. (*Гаусс*), осуществлено асимптотическое построение арифметики натуральных чисел (*Пеано, Кронекер, Дедекинд* и др.)

В теории дифференциальных уравнений доказан ряд основополагающих положений (*Коши, Липшиц, Ковалевская, Дарбу, Коркин, Ермаков, Клейн, Ли, Пуанкаре, Ляпунов*), Возникла и стала успешно развивается теория уравнений математической физики (*Остроградский, Ковалевская*) и др..

В теории вероятностей доказана предельная теорема, введено нормальное распределение случайных величин (*Лежандр, Гаусс, Чебышев*) и др.

Выдающиеся математики XIX столетия по-прежнему видели *перспективы развития математики во взаимодействии ее теоретической и прикладной ветвей.* В этой связи можно сослаться на труды *Гаусса, Римана, Клейна Гамильтона, Остроградского, Грина, Жуковского, Чебышева,_Ляпунова, Пуанкаре* и др. Математики XIX столетия создали *предпосылки для триумфа математики в XX веке,* обеспечившей решение сложнейших практических задач в физике, в освоении космоса, в управление сложными системами и др.

3. Выше отмечено участие конкретных лиц в развитии различных направлений математики. Далее рассмотрим немного подробнее направление деятельности некоторых наиболее известных математиков XIX столетия. В заключении этого рассмотрения перечислим имена замечательных математиков столетия, чьи конкретные работы, в виду ограниченных возможностей учебного пособия, оказались не рассмотренными.

Карл Фридрих Гаусс (1777-1855), вундеркинд, получивший образование в Гетингенском университете. В 1799 г. получил степень доктора. С 1807г. и до 1855г – директор астрономической обсерватории и профессор родного университета. От политических проблем был в стороне.

Успешно развивал различные направления математики. Уже в ранние годы с 17 лет начал делать поразительные открытия. В 1799 г. дал первое строгое доказательство основной теоремы алгебры (о количестве корней алгебраического уравнения). В его «Арифметических исследованиях» (1801 г.) все достижения предыдущих математиков по теории чисел обогащены таким образом, что это можно считать началом современной теории чисел. Центральное место в книге занимает теория квадратичных форм, вычетов и уравнений второй степени. Высшим достижением является закон квадратичной взаимности, «золотая теорема»

В дальнейшем Гауссом получены результаты по гипергеометрическим рядам, теории поверхностей, биквадратичным вычетам, новой теории комплексных чисел, началом теории потенциалов как отдельной ветви математики и др.

Большое внимание Гаусс уделял практическим задачам. Занимаясь астрономией, Гаусс решил проблему расчета орбиты планеты по малому числу наблюдений, опубликовал «Теорию движения небесных тел» (1809), исследования по вековым возмущения и др. Заинтересовавшись геодезией, Гаусс выполнил обширную работу по триангуляции, опубликовал «Общие исследования относительно кривых поверхностей» (1827 г.). В 1833-1834 гг. Гаусс заинтересовался физикой, выполнил большую экспериментальную работу по земному магнетизму, а вместе с Вебером он создал абсолютную систему электромагнитных единиц и первый в Германии электромагнитный телеграф. Трудно найти такую область теоретической и прикладной математики, в которую Гаусс не внес бы существенного вклада. Исследования Гаусса по прикладным проблемам приводили, как правило, к новым результатам в теоретической области

После смерти Гаусса выяснилось, что ряд полученных результатов, им не были опубликованы. В частности, Гаусс открыл эллиптические функции (1800), пришел к идее неевклидовой геометрии и достаточно глубоко ее разработал. (1818).

Адриен Мари Лежандр (1752-1833) работал по тем же вопросам теоретического и прикладного плана, что и Гаусс (фундаментальные работы по теории чисел, эллиптические и эйлеровые интегралы, важные работы по геодезии и астрономии, основы и методы евклидовой геометрии). Большое значение для развития математики имели его труды «Основы геометрии» (1794 г.), «Упражнения по интегральному исчислению» в трех томах (1811-1819 гг.), «Трактат об эллиптических функциях и эйлеровых интегралах» (1827-1831 гг.).

Новым этапом в истории французской математики явилось учреждение в конце восемнадцатого века военных школ и академий, в которых значительное место уделялось обучению математики. В 1794 г. была учреждена Парижская политехническая школа – в последующем образец для всех технических и военных школ девятнадцатого века. Важной составной частью учебного плана было преподавание математики, а также исследования по теоретическим и прикладным проблемам математики. Многие крупные французские математики были студентами, профессорами или экзаменаторами политехнической школы. Для обучения в школе были созданы новые учебники по математике.

Работы *Гаспара Монжа* продолжали ученики политехнической школы. *Шарль Дюпен* (1784-1873) развивал аналитической геометрию, *Виктор Понселе* (1788-1867.) – основал проективную геометрию. *Этьен Малюс* (1775-1812) открыл поляризацию света (1810), *Андре Мари Ампер* (1775-1836) выполнил выдающиеся работы по уравнениям в частных производных, после 1820 г он стал пионером в области электромагнетизма, Дюпен способствовал модернизации геометрической оптики. Геометрическое направление в статике утвердил *Луи Пуансо* (1777-1859).

Наиболее выдающимися математиками, связанными с ранним периодом Политехнической школы, кроме Лагранжа и Монса, были *Симеон Пуассон* (1781-1840)., *Жозеф Фурье* (1768-1830) *Огюстен Коши* (1789-1857 гг.). Все трое глубоко интересовались применением математики к механике и к физике и все трое благодаря таким интересам пришли к открытиям в чистой математике.

Коши роялист, эмигрировал из Франции, вернувшись в Париж, получил право преподавать в Парижской академии, не принося присяги правительству. Коши - основатель математической теории упругости, автор многочисленных работ по оптике и механике. Однако основная слава пришла к нему в результате работ по математическому анализу – и его приверженности к строгости математического анализа. Вместе с Гауссом, Абелем и Больцано он принадлежит к пионерам внедрения в математику повышенной строгости.

Теория функций комплексного переменного стала в работах Коши новой самостоятельной ветвью исследования. Обоснование анализа, данное Коши, («Курс анализа» –1821 г. и «Резюме лекций, прочитанных в Королевской политехнической школе» - 1823 г.) является общепринятым в современных учебниках. Коши заложил также основы для ответа на ряд вопросов и парадоксов.

Вильяму Роуэну Гамильтону (1805-1865), принадлежат оригинальные исследования по оптике и динамике, («Общий метод динамики» - 1834-1835 гг.). Замысел Гамильтона заключался в том, чтобы из одного общего принципа вывести как оптику, так и динамику. Уравнения динамики записаны им в канонической форме, что вошло в состав математики. Законы физики и механики выводились им вариации некоторого интеграла. «Гамильтонова функция» используется в современной теории относительности и квантовой физике. В 1843 г. он открыл кватернионы, изучению которых он посвятил оставшуюся часть жизни.

Георг Фридрих Бернхард Риман (1826-1866) оказал существенное влияние на все дальнейшее развитие математики (введение в анализ топологических представлений, теория функции комплексного переменного, гипергеометрические и абелевы функции, эллиптические модулярные функции, тэта-ряды, фундаментальные работы по тригонометрии, по основам анализа, по основам геометрии, применение ТФКП к задаче о распределении простых чисел. Дал общую идею пространства (многообразия), подробно исследовал многообразия (названные римановы), обобщающие геометрии Евклида, Лобачевского - Бойаи. Его именем назван определенный интеграл, эллиптическая геометрия, дзета функция. Им прочитаны лекции по тяготения, электричества и магнетизма опубликована (1875) математической физике, теории, Том лекций «Тяготение, электричество, магнетизм» опубликован в 1875г.

Карл Теодор Вейерштрасс (1815–1897), (функции – устранение неточностей в понятиях, алгебраические и дифференциальные уравнения, сходимость рядов, развитие ТФП, сведение принципов математического анализа к арифметическим понятиям). Вейерштрасс знаменит своим отношением к математической строгости. «В основном это заслуга научной деятельности Вейерштрасса, что теперь в анализе существует полное согласие и уверенность относительно таких способов рассуждений, которые основаны на понятии иррационального числа и предела вообще, и ему мы обязаны тем, что существует единодушие относительно всех результатов, даже в наиболее сложных вопросах, касающихся дифференциальных и интегральных уравнений», /Гильберт, 1926 г./

Феликс Клейн (1849-1925), (теория групп – обобщающий (объединяющий) подход к различным направлениям в математике, сделавший возможным синтез геометрических и алгебраических трудов). Под руководством Клейна Геттинген с его традициями стал новым центром математических исследований.

Георг Кантор (1845-1918), (теория иррациональных чисел, теория множеств –, теория трансфинитных кардинальных чисел, основанную на систематическом использовании бесконечности , создание новой области математических исследований - теории множеств, явившейся основой современной теории функции действительной переменной, топологии, алгебры, теории групп, функционального анализа и других разделов современной математики. Обнаруженные парадоксы вызвали критику теория множеств со стороны ряда математиков- главный оппонент Кронекор).

Анри Пуанкаре (1854-1912) успешно развивал как теоретические основы математики (работы по автоморфным и фуксовым функциям, дифференциальным уравнениям, топологии, основам математики), так и применение математики в других науках В какой то мере он подвел итоги деятельности целой плеяды блестящих теоретиков и прикладников XIX века. Будучи профессором Сорбонны, он каждый год читал курсы по новому предмету, демонстрируя достижения математики в различных прикладных областях: теории потенциалов, электричестве, термодинамике, теплопроводности, капиллярности, оптике, электромагнетизму, небесной механике. При разработке новых идей в небесной механике Пуанкаре построил свою теорию асимптотических разложений, сделал выдающиеся открытия, касающиеся поведения интегральных кривых дифференциальных уравнений. Кроме того, Пуанкаре написал ряд популярных книг, которые способствовали пониманию проблем современной математики. Труды

Пуанкаре существенно повлияли на последующие представления в области космогонии, топологии, теории вероятностей, теории относительности.

Существенный вклад в развитии различных разделов теоретической и прикладной математики внесли: *Эварист Галуа* (1811-1832), *Нильс Генрик Абель* (1802-1829), *Янош Бойаи* (1802-1860), *Карл Густав Якоби* (1804-1851), *Петер Лежен Дирихле* (1805-1859), *Леопольд Кронекер* (1823-1891), *Ричард Дедекинд* (1831-1916), *Якоб Штейнер* (!796-1863), *Джордж. Грин* (1793-1843), *Артур Кели* (1821-1895), *Джемс Джозеф Сильверст* (1814-1897), *Мариус Софус Ли* (1842-1894), *Томас Иоанесс Стилтьес* (!856-1894), *Лиувилль* (1809-1882), *Дарбу* (1842-1917), *Адамар* (1865-1963) и многие другие выдающиеся математики XIX-го столетия.

4. В XIX-м столетии большое число работ русских математиков было посвящено применению математики для решения задач механики и физики, развитию вычислительной математики, приближенных методов вычислений. При построении математических курсов в вузах многие математики России ставили в качестве одной из основных задачу научить студентов применению математических методов на практике. Такой подход к преподаванию математики нашел продолжение в XX веке, в наиболее отчетливом виде он нашел отражение в трудах Я.В.Успенского (см. XX век)

Лобачевский Николай Иванович (1792-1856) создал новую геометрическую систему – неевклидову геометрию. С 1823 по 1855 год он написал несколько трактатов в защиту новой геометрии. Работы Лобачевского были оценены должным образом только после его смерти. Он также внес большой вклад в алгебру и анализ.

Остроградский Михаил Васильевич (!801-1862), (Новые результаты получены по математическому анализу (интеграл по объему и интеграл по поверхности), математической физике, дифференциальным уравнениям, механике, теории вероятностей, вариационному исчислению, теория тепла, теории волн, колебанию упругих сред).Остроградский был не только знаменитым математиком но и знаменитым механиком. Значительное внимание он уделял сочетанию теоретических исследований с практикой, причем понимал необходимость, чтобы это сочетание присутствовало в лекционных курсах. Так, с 1836 г. по 1857 г. из своего курса по аналитической механике он постепенно исключил параграфы, не имеющие практических приложений, и, наоборот, усиливал изложение вопросов, важные для прикладной и строительной механики. Математическую школу, которой длительное время руководил Остроградский, более точно следует называть инженерной механико-математической школой, поскольку она объединяла три важных школы отечественной науки: аналитической механики, математической физики и прикладной механики. Кроме этих трех школ предметом исследования Школы Остроградского являлись различные области строительной механики и механики грунтов, разделы испытания материалов, инженерные изыскания, методическая ветвь, в рамках которой разрабатывалась методика преподавания и велась подготовка учебников и др.

Буняковский В.Я. (1804-1889), (многочисленные работы по анализу, теории чисел, теории вероятностей, применение теории вероятностей к решению задач, возникающих при организации страхового дела, ссудных касс. демографическом анализе, исследований административной деятельности). Уточненный список публикаций Буняковского содержит 210 наименований[9].

Чебышев Панфутий Львович (1821- 1894) являлся во второй половине девятнадцатого столетия главой Петербургской математической школы. 35 лет читал лекции в Петербургском университете. Имел много учеников, успешно определял им направление плодотворных исследований. Наиболее выдающиеся его ученики - А.А. Марков, А.М. Ляпунов. Замечательными являются работы Чебышева по теории чисел, интегрируемости «дифференциальных биномов», новой теории приближения функций, теории ортогональных многочленов. Теория вероятностей, развития Чебышевым в связи с запросами прикладных проблем, стала строгой математической дисциплиной. Занимаясь кинематикой механизмов, Чебышев изобрел ряд оригинальных механизмов, в том числе арифмометр непрерывного действия.

В 1856 г. П.Л.Чебышев опубликовал статью «О построение географических карт» и выступил с речью «Черчение географических карт». Во второй статье (речи) Чебывшев опубликовал свою знаменитую теорему «Наивыгоднейшая проекция для изображения какой-нибудь части земной поверхности на карте есть та, в которой на границе изображения, масштаб сохраняет одну и ту же величину» В работах дана новая постановка вопроса, кроме того введен новый минимаксный критерий искажения географических карт. Шарль Эрмит назвал Чебышева «гордостью науки России, одним из величайших геометров всех времен».

Петерсон Карл Михаилович (1828-1881). (Работы по анализу кривизны поверхностей, дифференциальным уравнениям с частными производными)

Имшенецкий Василий Григорьевич (1832- 1892). (Развитие и обобщение методов Якоби в решении дифференциальных уравнений ас частными производными, новое приложение метода вариации произвольных постоянных интегрированию уравнений с частными производными).

Коркин Александр Николаевич (1837-1908). (Развитие методов интегрирования, разработка метода решения двучленных уравнений и, совместно с Золотаревым, метода определения минимума положительных квадратичных форм)

Золотарев Егор Иванович (1847-1878) (Обоснование теории делимости целых алгебраических чисел, одно из доказательств теоремы взаимности, создание, независимо от Дедекинда, теории идеалов).

Ковалевская Софья Васильевна (1850-1891) (Работы по системам дифференциальных уравнений в частных производных, Работы о

---

[9] Е»рмолаева Н.С., Сытая Г.Н.. «Список публикаций В.Я.Буняковского»// Историко-математические исследования. Вторая серия, выпуск 10 (45) 2005. В этом списке статьи в Энциклопедическом лексиконе и Энциклопедическом словаре идут под одни номером, таких статей более сорока

преломлении света в кристаллах, о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки и др.)

Федоров Евграф Степанович (1853-1919). (Выдающиеся результаты анализа структуры и симметрии кристаллов. «Федоровские группы», «федоровские тела»).

Марков Андрей Андреевич. (1856-1922). Основные работы: обоснование метода наименьших квадратов, цепи Маркова, исследования по арифметической теории квадратичных форм, по проблемам моментов. Интересны прикладные исследования Маркова по картографии, результаты которых опубликованы в двух статьях в 1889 г. и в 1895 г. Марков ставил своей целью найти все возможные (в том числе наилучшее) изображения на плоскости произвольной поверхности вращения. Что он и сделал, решив четыре задачи при различных исходных условиях.

Ляпунов Александр Михайлович. (!857-1918). (Проведено впервые в строго математической постановке исследование проблемы устойчивости механических систем с конечным числом степеней свободы. Существенный вклад в теорию дифференциальных уравнений и теорию потенциалов. Последние два десятилетия своей жизни посвятил исследованию форм равновесия вращающихся жидкостей отличных от эллипсоидальных. В процессе этих исследований получен ряд новых результатов по теории математики, например по теории нелинейных интегралов).

Млодзеевский Болеслав Корнеевич (1858- 1923). (Работы по дифференциальной геометрии, математическому анализу и механике).

Молин Федор Эдуардович (1861-1941). (Новые результаты по теории гиперкомплексных чисел, теории групп, теории эллиптических функций).)

Граве Дмитрий Александрович (1863-1934). (Создание первой в России крупной алгебраической школы, Работы по проективной геометрии, упрощение теории Галуа, изложение теории идеалов с помощью функционалов).

Стеклов Владимир Андреевич (1864-1926). (Основатель школы математической физики в России, опубликовано 150 работ, в том числе по математическому анализу, теории упругости и гидростатике).

Власов Алексей Константинович (1868-1922). (Положил начало применения проективной геометрии к начертательной, написал двухтомный «курс высшей математики), выдержавший пять изданий).

Чаплыгин Сергей Александрович (1869-1042). (Выдающиеся открытия в аэродинамике, гидродинамике, теоретической механике, Решении задач вариационного исчисления, приближенных вычислениях, метод Чаплыгина приближенного решения дифференциальных уравнений)

Поссе Константин Александрович (1847-1928) (Ряд работ по математическому анализу и теории функций).

5. Таким образом, в XIX столетии значительно вырос в математике объем теоретических исследований. В середине века наступил период определенного доминирования теории, причем была достигнута определенная строгость доказательств. В работах *Коши, Больцано,*

Вейерштрасса, Кантора и ряда других математиков были выработаны основные понятия, общие термины. В результате была созданы основы для дальнейшего развития математики как науки. Умелое сочетание математического аппарата и глубокого проникновения в существо природных явлений привело в XIX столетии к выдающимся открытиям в физике и астрономии (электромагнитная теория Максвелла, открытие Нептуна и Плутона, предсказание Дирака о позитроне и др.). Существенен вклад в развитии прикладных математических исследований выдающихся русских ученых *Остроградского, Буняковского, Чебышева, Ковалевской, Федорова, Маркова, Ляпунова, Стеклова, Чаплыгина.*

2.10. Математика в XX столетии

1. Величие XX века в том, что он изменил, преобразовал почти все представления человечества об окружающем Мире. В этом процессе математика играла выдающуюся роль. XX век явился для математики периодом интенсивного развития, прорыва в новые области.

В первой половине XX века были созданы новые теории строения материи, существенное развитие получила техника: авиация, электротехника, радиотехника и др. Появление новой техники было связано с созданием сложных математических моделей и выдвижением новых требований к математике. Однако стремительный прогресс науки и техники, в том числе математики относится, главным образом, ко второй половине столетия. Десятки новых научных направлений, сотни научных школ, тысячи талантливых математиков, появление современных методов исследования, компьютеризация во многих отраслях знания обеспечили математике ведущую роль в прогрессе человечества, в развитии нового этапа научно-технической революции. Следует особо отметить значение использования математических знаний для исследования и создания сложнейших информационных систем, обоснования и разработки эффективных методов управления человеко-машинными системами, создания систем автоматического управления. Математика триумфально вошла и в быт.

Период после окончания войны с 1945 г. до конца века по праву называется новым замечательным этапом научно-технической революции

2. В XX веке математика участвовала во многих грандиозных деяниях века и некоторые из них подвели человечество к грани всемирной катастрофы.

На первую половину XX века пришлись две мировые войны, в России еще и война гражданская. Войны первой половины века нанесли огромный урон всему человечеству, оставили после себя шлейф локальных войн. Экономическое развитие многих стран остановилось, более того ряд стран в своем развитии были отброшены назад. Развитие науки и техники во время войн шло, в основном, в интересах развития вооружения. Огромное количество математиков успешно обслуживало военно-промышленный комплекс по обе стороны баррикад. Создание ряда новейших образцов оружия потребовало построения сложнейших моделей и больших расчетов

Однако в США и в первой половине столетия экономика и наука развивались достаточно успешно. Это явилось, в частности, следствием массовой эмиграции в США выдающихся исследователей из Европы, в том числе и из России.

3. На XX век пришлось и существование двух тоталитарных государств, идеологическая направленность которых, мягко говоря, не способствовала прогрессивному развитию науки.

С приходом к власти фашистов математической науке Германии был нанесен серьезный урон. Геттингенская математическая школа была разгромлена. В результате борьбы за чистоту арийской расы из страны иммигрировали многие деятели науки, в том числе выдающиеся математики, в числе которых *Р.Курант, А.Э.Нетер, Э.Ландау, Г.Вейль и* . Отказался эмигрировать из нацисткой Германии *Феликс Х*аусдорф. Однако в январе 1942 г. он узнал, что будет отправлен в концентрационный лагерь и покончил жизнь самоубийством вместе с женой и сестрой жены. Весьма прискорбно, что некоторые математики Германии оправдывали расправу над учеными «неарийцами». Известный математик, ученик Клейна *Л. Бейербах* развил целую теорию относительно неполноценности еврейского мышления, плодом которого, согласно его теории, является дегуманизация математики, ее отчуждение от природы и практического применения.

4. В Советском Союзе идеологическое наступление на науку, технику и культуру прошло несколько стадий (до 1941 г.: шахтинское дело, дело промпартии, процессы по «разоблачению» деятельности Троцкого, Зиновьева, Рыкова, Бухарина и др.). Во время войны 1941 45 гг ученые России достойно внесли свой вклад в победу. Однако в 1947-53 гг было организовано новое сильнейшее идеологическое давление на науку и культуру. В эти годы науке и культуре был под флагом борьбы с космополитизмом нанесен колоссальный ущерб. В области культуры появились многочисленные разгромные постановления (Об опере Мурадели, О 2-ой серии кинофильмов «Большая жизнь» и «Иван Грозный», журналах «Звезда» и «Ленинград», творчестве Шостаковича, Прокофьева, Ахматовой, Зощенко и др.). Результатом «ленинградского дела» 1950 года, стал, буквально, разгром партийной и советской организации Ленинграда, аресты и расстрелы многих лиц, отличившихся в годы войны, в том числе Вознесенского, Кузнецова, Попкова. Оказались арестованными многие выдающиеся ученые и конструкторы (Туполев, Королев и многие другие). В области науки наиболее сильный ущерб был нанесен биологии, кибернетике, языкознанию Аресты, ссылки и расстрелы, клеветнические заявления относительно прогрессивных деятелей культуры и науки, всплеск антисемизма, в том числе убийство Михоэлса, «дело врачей-отравителей» и другие «успешные» операции на идеологическом фронте способствовали созданию в стране тягостной атмосферы доносительства, взаимного недоверия, угодничества, и не только. Сложившаяся в стране тягостная

морально-нравственной атмосферы способствовало разложению общества, потере большей частью интеллигенции гуманистических традиций. Атмосфера доносов, использования идеологических инсинуаций для решения личных и групповых проблем затронула научные круги. В науке в то числе математике и, особенно, в прикладных исследованиях руководящую роль стали играть администраторы от науки, защищающие диссертации по совокупности «своих» (фактически подчиненных сотрудников) трудов, Руководящие должности в научных учреждения, конструкторских бюро занимались, на основе семейных или клановых связей. Эта кадровая «традиция» закрепилась и просуществовала до последних лет Советского Союза. (Например, сыновья членов Политбюро Суслова и Устинова, будучи средними (далеко не вдающимися) сотрудниками одного из КБ, были назначены руководителями крупных НИИ).

Период с 1946 по 1953 годы определил отставание СССР в биологии, науки о компьютерах, развитии элементной базы для вычислительных и управленческих систем и в ряде других направлениях науки и техники, Последствия этого отставания ощущаются в России и в XXI веке.

5. Не обошли в XX столетии в СССР различные идеологические спекуляции и математику. Идеологическая ржавчина коснулась и математических кругов. По мнению С.П.Новикова, среди математиков СССР было значительно число талантливых, выдающихся математиков, но, редкостно аморальных. Он пишет: «Весь список академиков математиков, за честность которых я бы поручился, состоял из моего отца – П.С.Новикова, а также С.Н. Бернштейна, Л.В.Канторовича и И.Г.Петровского»[10]. За приверженность к православию был сослан в Казань выдающийся математик Д.Ф.Егоров. Против признанного лидера Московской математической школы Лузина Н.Н. в середине 30-х годов на страницах центральной прессы была предпринята мощная идеологическая атака. Сигналом к массированной травле Лузина послужила статья в «Правде» 3.07.1956 г. Против Лузина были выдвинуты надуманные обвинениям «во враждебности ко всему советскому и в угодничестве по отношению к представителям иностранной науки».

Характеристикой сложившейся в стране морально-нравственной атмосферы является то, что в наступлении на Лузина активно участвовали математики П.С Александров, С.Л.Соболев, А.Н.Колмогоров а также ученики Лузина: А.Я Хинчин., А.О Гельфонд., Л.А Люстерник. В защиту Лузина выступили математики старшего поколения: С.Н. Бернштейн и А.Н Крылов.

Действительно, некоторые основания для критики направлений работ Лузина были. Он организовал работу большого коллектива молодых ученых

---

[10] . Новиков С.П. Вторая половина XX века и ее итог кризис физико- математического сообщества в России и на Западе. // Историко-математические исследования. Вторая серия, выпуск 7 (42), 2002.

на решение наиболее трудных и актуальных задач дескриптивной теории множеств. Однако появились новые направления развития математики, происходил естественный рост и расщепление школы - талантливые ученики создавали собственные школы с оригинальной тематикой. По-видимому, должной поддержки от Лузина они получали не всегда. Однако это ни в какой мере не извиняет участие в идеологической травле Лузина ряда выдающихся советских математиков и его учеников. Все могло бы кончиться для Лузина трагически, если бы дело не было неожиданно остановлено по приказу свыше.

Сталинские репрессии коснулись также известных математиков член-корреспондента АН ССР В.С Игнатовского., академика АН СССР М.Ф Кравчука. Математики подвергались преследованиям и за участие в прикладных исследованиях в направлениях науки, преследуемых из идеологических соображений правительством. Так, А.А.Ляпунов и А.Н.Колмогоров успешно занимались математическими вопросами биологии В августе 1948 г. на сессии ВАСХНИЛ генетика была объявлен «вне закона». Вскоре после этой сессии в МГУ было собрание, на котором математикам ставили в вину занятия вопросами генетики

6. Советская наука в течение четверти века - примерно с 1930 по 1955 была в значительной мере отделена от остального мира железным занавесом. Однако политические спекуляции и идеологическое давление не смогли и полностью подавить научный потенциал СССР.

В первой половине XX века математика развивалась главным образом в национальных рамках, и в начале века ведущую роль играли французская и немецкая математическая школы. В последующие десятилетия значительную роль стали играть российские математические школы. Советская математическая школа окончательно сложилась в 30-е годы и громко заявила о себе во второй половине XX века.

Общий подъем математических исследований в СССР стал следствием целого ряда факторов, важнейший из которых - высокий уровень математики, достигнутый в России к началу века. Советское государство, оказавшись во враждебном окружении, должно было заботится о своей обороне. Большое значение приобрели разработки, обеспечивающее развитие военной техники. Снятие сословных и национальных барьеров привело к притоку в высшую школу, затем в науку молодежи, которой доступ туда ранее был затруднен. Другая сторона политики государства – классовый подход. От ученых и преподавателей вузов требовалось в основу своей деятельности положить марксистское учение. Отсюда и практика чистки в вузах, оголтелые компании против ученых.

После окончания Гражданской войны сложившиеся ранее две ведущие математические школы - московская (Лузин и его ученики) и петербургская (Чебышев и его ученики) развивались относительно раздельно при наличии определенных научных разногласий. Состоявшийся в 1934 г в Ленинграде второй Всесоюзный математический съезд и переезд Президиума Академии наук и ведущих научно-исследовательских институтов, в том числе

Математического института им. В.А.Стеклова в Москву фактически подвели итог под созданием единой советской математической школы. Участник этих событий Б.Н.Делоне в интервью 14 декабря 1973 г. так определил значение этих событий: «…между школой Эйлера-Чебышева петербургской и школой Лузина московской- французской, парижской – все время был такой антагонизм, что те этих не понимали, эти –этих, пока Академию не перевели в Москву. Когда в тридцать четвертом или в тридцать пятом, в начале, перевели Академию в Москву, мы начали сближаться, и вот из этого сближения обеих школ и получилось, ну, вот то, что мы сейчас называем «советская математика»[11] Итог слияния двух школ был чрезвычайно плодотворным. Возник мощный исследовательский потенциал, объединенный вокруг математического института им. В.А.Стеклова, механико-математического факультета и Научно-исследовательского института математики м механики МГУ и Московского математического общества.

7. Общее поступательное развитие мировой математической науки в XX столетии характеризуется рядом фундаментальных результатов, полученных в теоретической и прикладной областях математики, и успешным использованием математических методов для решения проблем во всех областях науки и техники. Последнее и способствовало наступлению научно-технической революции.

Главным достижением теоретической математики XX века - понятие бесконечно мерного пространства, или, подробнее гильбертова пространства и его различных обобщений – пространства банахова, векторного, топологического и т.п. С этими объектами связаны огромные области современной математики, включая теорию линейных операторов, теорию обобщенных функций, представления групп и многое другое. Полностью принадлежит XX веку топология, развитие которой оказалось связанным с мировыми войнами. Достижение прикладной математике – разработка теории и методов применения математических моделей инструмента для решения сложнейших реальных проблем.

Для математики XX века характерны:

1) изменение масштаба исследований – число математиков увеличилось за столетие, по крайней мере, на два порядка.

2) обретение математикой интернационального характера

3) расширение тематики исследования, многие направления родились и поучили развитие в XX веке

4) плодотворное использование математики для решения прикладных проблем во всех областях науки

Интернационализации математики способствовало компьютеризация мирового сообщества, появление Интернета

Два человека оказали основное влияние на развитие математики в XX столетии – Пуанкаре и Гильберт. Для Пуанкаре основным стимулом было

---

[11] С.С Демидов, Т.А.Тарасов «Математика в России и в СССР».// Историко-математические исследования. Вторая серия, выпуск 10 (45) 2005.

объяснение законов природы (хотя его участи в развитии абстрактных разделов математики весьма значимо). Для Гильберта одним из величайших стимулов было – постичь архитектуру самой математики.

Многих математика привлекает своей близостью к философии, ибо она является опорой философских воззрений и призвана исследовать сами границы познания.

Для ведущих математиков XX столетия свойственно успешное решение конкретных трудных задач и изучение глобальных конструкций, создание новых понятий и теорий. К числу задач, успешно решенных математиками в XX столетии, следует отнести:

- новое осмысление явления детерминированного хаоса, отчетливое понимание связи между неустойчивостью динамики и стохастическими свойствами соответствующих динамических систем;
- развитие аппарата обобщенных функций;
- открытие преобразования Радона, имеющего большие последствия как в самой математики, так и в ее приложениях, в частности в медицине это привело к рождению томографии;
- построение теории солитонов – волн с необычными свойствами;
- развитие теории, описывающей явления, «приводящие к скачкам» (теории катастроф);
- создание как бы параллельной математики, в которой изучаются супергеометрические, супералгебраические, супераналитическме объекты и теория др.

Во второй половине столетия были решены проблема Ферма, проблема о четырех красках, проблема (гипотеза) Кеплера об укладке шаров, 13-ая проблема Гильберта.

8. Успехи теоретической математики привели к увлечению некоторых математиков абстрактными построениями в различных разделах математики и к неоправданной дифференциации даже в узких направлениях науки. Вновь наметился разрыв между математическими теориями и потребностями практики и даже от исследований в родственных математике науках (физике, астрономии, механике и др.) Возникли вполне определенные кризисные явления в математике. Более подробно это явление рассмотрено в следующем пункте

9. Выдающиеся математики XX столетия продолжали успешно сочетать теоретические исследования с решением практических задач, и более того многие теоретические проблемы были поставлены и затем успешно решены именно в результате конкретных запросов практики, что очень характерно для развития науки в XX веке. К концу века были разработаны новые полходы к созданию моделей сложных многосвязных систем, внедрению информационных технология, развита принципиально новая элементная база, созданы модели систем военного и гражданского назначения, способные обеспечить решение сложнейших практических задач.

Влияние запросов практики на теоретические и прикладные исследования наиболее существенным образом проявилось в математических исследованиях, выполняемых в СССР и США в интересах военно-промышленных комплексов (ВПК). Создание атомного, а затем водородного оружия стало возможным благодаря использованию математических моделей и проведению неординарных расчетов. С помощью сложных имитационных моделей были получены независимо в СССР и в США одинаковые оценки результатов возможных последствий массированных ракетно-ядерных ударов. Эти оценки послужили основанием для отказа СССР и США от обмена подобными ударами и заключении договора об ограничении средств воздушно-космического нападения. Проблемы автоматического управления в промышленности и в военных системах стимулировали развитие кибернетики, методов оптимального управления, что оказалось возможным благодаря применению теории функции комплексного переменного, преобразований Фурье и Лапласа и других разделов математики. Потребности развития авиации стали стимулом к рождению аэродинамики. Появление радио способствовало развитию новой области математики – теории нелинейных колебаний. Многие разделы теории вероятностей использовались для решения задач управления военными системами. Проблемы шифровки секретных сообщений и эффективной передачи их по каналам связи привели к рождению нового раздела в математике – теории информации и развитию теории кодирования. Весьма велика роль математиков в создании идеологии конструирования компьютеров и их программного обеспечения (здесь следует отметить существенный вклад *фон Неймана*).

При создании математических моделей сложных многосвязных систем: атомного оружия, мирного использования атомной энергии, космических систем, средств управления человеко-машинными военными и социально-экономическими системами потребовалось решение ряда новых математических проблем. К числу таких проблем относился учет нелинейностей. Уравнения, описывающие сложные объекты, существенно нелинейны, анализ влияния нелинейностей на поведение систем имеет определяющее практическое значение. Проблемы были преодолены, благодаря совместному участию в создании математических моделей лучших математиков и специалистов в других областях знаний.

Другая проблема возникла в СССР в связи с созданием систем, обеспечивающих управление военными объектами в реальном времени. Такие системы автоматического управления потребовались, в частности, при создании системы противоракетной обороны, где, например, ошибка в подрыве заряда противоракеты в доли секунду приводит к промаху, измеряемому в километрах. Поскольку в 1950-е годы в СССР машин с быстродействием, необходимым для управления средствами системы ПРО, не было, возникла задача разработки комплекса из нескольких совместно работающих ЭВМ. Например, такой комплекс в составе пяти машин М-50 был создан сотрудниками ИТМиВТ под руководством *В.Бурцева* - ученика академика *Лебедева.* Работы по созданию новой техники и математических моделей проводилась в середине XX века в условиях «железного занавеса» и, соответственно, строгой секретности.

10. Рассмотрим вклад отдельных математиков в развитии математической науки в XX столетии. Особое внимание уделим прикладным исследованиям.

Творчество *Давида Гильберта* (1862-1943) охватывало практически все области современной математики и оказало решающее влияние на развитие математики в XX веке. Его труды и его личность выдающегося ученого оказали глубокое влияние на развитии математических наук вплоть до XXI столетия. Большой вклад он внес в обоснование математики путем ее полной формализации с последующим доказательством непротиворечивости формализованной математики. Сформулированные им в 1900 г двадцать три проблемы явились в математических исследованиях стимулом для новых подходов и методов. Благодаря Гильберту в Геттингенском университете возникла всемирно известная математическая школа. Известные математики этой школы *Г. Минковский* (1864-1909), *Э..Г.Ландау* (1877-1938), *Р.Курант* (1888-1972), *К.Д.Т.Рунге* (1856-1927), *Г.Герглоц* (1881-1953), *Г.К.Х.Вейль* (1885-1955), *А.Э.Нетер* (1882-1935). Большинство исследований этих математиков было посвящено теоретическим проблемам. В то же время полученные ими фундаментальные теоретические результаты по вариационному исчислению, дифференциальным и интегральным уравнениям, функции комплексного переменного, операционному исчислению способствовали развитию ряда прикладных направлений. Известен и ряд работ математиков этой школы, посвященных непосредственно прикладным проблемам: исследования (вопросы специальной теории относительности *(Г.Минковский),* измерение спектральных линий (*Т.Рунге*), теория групп в атомной механике, теория атомных спектров (*Х.Вейль* и др.). Основные труды *Г.Х.Харди* (1877-1947) относятся к теории чисел и теории функций, но ему также принадлежат работы по генетике.

Как математик *Норберт Винер* (1894-1964) получил известность своими работами по теории потенциала, гармоническим функциям, рядам и преобразованию Фурье, общему гармоническому анализу. Всемирную известность принесла Винеру созданная им наука об управлении. Изданная в Париже в 1948 г его книга «Кибернетика» оказала большое влияние на дальнейшее развитии науки, использовании достижений современной математики для решения задач управления.

Джон фон Нейман (1903- 1957) известен выдающимися результатами своих исследований, как в теоретической, так и в прикладной математике. Известны его работы по математической логике, аксиоматической теории множеств, теории меры и теории действительных переменных. В 1927-1929 гг. он стал основоположником математического аппарата квантовой механики. В середине 1930-х годов Нейман был занят задачами аэродинамической турбулентности, для чего ему потребовалось обратиться к проблемам приближенных вычислений на ЭВМ.

Нейман был одним из пионеров информатики и внес значительный вклад в эту науку: развивал теорию ячеистых автоматов, построением надежных схем из ненадежных элементов. В теории игр он доказал теорему о минимаксе, используемую в многочисленных приложениях.

Алан Матисон Тьюринг (1912- 1954). В1935 – 1936 гг. Тьюринг создал теорию логически вычисляющих машин. Ныне машина Тьюринга является базовой темой в теории автоматов, а в его время она была теоретической основой ЭВМ, созданных в 1940 годах. Во время второй мировой войны с 1939 по 1943 г занимался расшифровкой немецких кодов. В 1946 г. представил новый проект ЭВМ, имеющей то время самый большой объем памяти. В книге «Вычислительные машины и интеллект» утверждал, что в конечном счете можно создать компьютер, думающий н хуже человека. Последние его работы посвящены применению математики в биологии.

Перечислим математиков XX века (не упомянутых отдельно в тексте настоящего раздела), получивших выдающиеся результаты в различных разделах теории и способствующих развитию прикладных направлений в математике: *Ф.Хаусдорф* (1868-1942), *Э.Ж.Картан* (1869-1951), *К.Каратеодри* (1873-1950), *Л.Э.Я.Броуэр* (1881-1966), *В.Бляшке* (1885-1965), *С.Рамануджан* (1887-1920), *К.Гедель* (1906-1978), *М.Ф.Атья* (р.1929). Список, безусловно, может быть существенно продолжен.

11 Перечислим математиов России, известных выдающимися результатами, как в теоретической области, так и при применении математики для решения различных практических задач.

В развитии теоретической математики в России определяющая роль принадлежит Д.Ф.Егорову и Н.Н.Лузину.

Егоров Дмитрий Федорович (1869-1931).проводил исследования в различных областях математики, осуществил принципиально новый подход к исследованиям по теории поверхностей и теории прямолинейных конгруэнций. Ученики Д.Ф.Егорова – Н.Н.Лузин, С.П.Фиников, И.Г.Петровский, В.В.Степанов, И.В.Привалов, В.В.Голубев, С.С.Бюшгенс, Л.Н.Сретенский и другие прославили российскую математическую науку выдающимися результатами.

Диапазон научных интересов *Лузина Николая Николаевича* (1883-1950), чрезвычайно широк: теория функций, дескриптивная теория множеств, основания математики, дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия, приложения классического анализа, конформные отображения. В каждой из этих областей им получены глубокие результаты. Всемирно известны написанные им учебники. Лузин является создателем знаменитой московской математической школы, он воспитал целую плеяду математических светил России. Его ученики *М.А.Лаврентьев, П.С.Урысон, П.С. Александров, Д.Е.Меньшов, А.Н Колмогоров, А.Я.Хинчин, Л.Г.Шпирельман, П.С.Новиков, Л.А.Люстерник, Н.К.Бари, Л.В.Кельдыш,* *А.П.Ляпунов и др.* успешно работали как в теоретической, так и в прикладной областях.

.

Жуковский Николай Егорович (1847-1921), с 1887 г. - заведующий кафедрой в МВТУ, с 1905 г. – президент Московского математического общества. В математике он решил ряд проблем уравнений математической физике и теории ФКП, применив ее к решению задач аэродинамики и гидродинамики. построение первой аэродинамической трубы). Жуковского справедливо называют основоположником современной гидроаэродинамики. До 1900 г. большинство его работ (из 80) были посвящены гидродинамике (проблема качки судов, реактивные водометные двигатели и др.), с 1889 г. появились его работы по воздухоплаванию, он открыл метод присоединенных вихрей, разработал теорию подъемной силы крыла и вихревую теорию винта. В 1902 г. построил в университете первую аэродинамическую трубу, в 1910 г. организовал аэродинамическую лабораторию. Подготовил большое количество теоретиков, экспериментаторов, инженеров, летчиков. В его лице органически соединялся ученый-теоретик и инженер-практик

Крылов Алексей Николаевич (1863-1945) активно занимался научными исследованиями в области приложения математики к кораблестроению. Многосторонняя теоретическая деятельность Крылова сливалась с практической деятельностью государственного масштаба. Он создал теорию килевой качки, составил таблицы непотопляемости, разработал теорию вибрации судов, дал полное изложение теории девиации магнитного компаса и др. Для вычисления основных характеристик корабля – остойчивости и плавучести – он разработал рациональные приемы, ставшие классическими. В 1904 г он построил первую в России машину для интегрирования дифференциальных уравнений. Его курсы лекций «О приближенных вычислениях» (1906 г.), «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики» (1912) свидетельствуют о его преподавательском таланте.

Фридман Александр Александрович (1888 - 1925) – математик и геофизик, создатель теории нестационарной вселенной. Основные работы Фридмана посвящены проблемам динамической метеорологии, гидродинамике сжимаемой жидкости, физике атмосферы и релятивистской космологии. Полученные им в 1922-24 гг. первые нестатические решения уравнений Эйнштейна при исследовании релятивистских моделей Вселенной положили начало развитию теории нестационарной Вселенной. Были проанализированы нестационарные однородные модели с пространством положительной кривизны. Нестационарность рассмотренных моделей описывается зависимостью радиуса кривизны и плотности от времени. Фридман выяснил типы поведения таких моделей, допускаемые уравнениями тяготения, причем модель стационарной Вселенной Эйнштейна оказалась частным случаем. Результаты, полученные Фридманом, получили высокую оценку Эйнштейна. Наряду с большой научной работой, Фридман в течении ряда лет читал курсы высшей математики и теоретической механики в различных вузах Ленинграда. Им созданы новые оригинальные курсы: приближенные вычисления и решение численных уравнений, специальные курсы дифференциальной геометрии и тензорного анализа, гидромеханики, прикладной аэродинамики, теоретической механики.

Успенский Яков Викторович, (1883-1947.). Основные научные работы принадлежат теории чисел, теории вероятности и алгебре.

Большое внимание он уделял преподаванию математиков в технических вузах. По случаю предполагаемого открытия в Петрограде в 1915 г Института инженеров земельных улучшений Успенский разработал проект преподавании математики в техническом вузе. В этом проекте он предлагал преподавать математику на трех курсах (в то время как в то время в России математический курс в технических школах заканчивался на третьем семестре) При этом отмечал, что математика в XIX сстолетии все более удаляется от областей прикладных знаний согласно фразе Липшица: «Наукой надо заниматься ради нее самой, а не ради какой-либо пользы». Отмечая, что для Ньютона, Эйлера, Лапласа подобная фраза была бы совершенно не приемлима, Успенский излагает свой проект преподавания математики в технических вузах.

Основные положения проекта сводятся к следующему.

(1). Из курса математики исключить все, что не является необходимым для связности изложения и не находит в дальнейшем применения.

(2). В изложении следует сознательно избегать логически строгих, но утомительных рассуждений.

(3). Следует излагаемую теорию иллюстрировать примерами прикладного характера. Поскольку это возможно.

(4). Различные отделы курса математики надо расположить таким образом, чтобы по возможности все, необходимое для других предметов, было бы уже пройдено не только теоретически, но и на практических занятиях.

(5). На практических занятиях следует кроме примеров, имеющих целью дать некоторый навык в применении теории, решение конкретные задачи с доведением до конца числовых вычислений.

Далее в проекте Успенский излагает подробный проспект содержания отдельных разделов математики по семестрам.

Хинчин Александр Яковлевич (1894-1959) –один из первых учеников Н.Н.Лузина, вел исследования в области теории функций, теории вероятностей, теории массового обслуживания. Его работы способствовали успешному развитию соответствующих направлений прикладных исследований.

Широта научных интересов *Лазаря Ароновича Люстерника* (1889-1981) была необыкновенной: дифференциальные уравнения, топология, вариационное исчисление, геометрия, вычислительная математика, специальные функции и многое другое Им создан ряд новых математических областей. В годы ВОВ под его руководством выполнялись специальные исследования военного значения, в частности созданы эффективные таблицы выбора курса самолета. В послевоенные годы активно занялся совершенно новым для того времени кругом проблем, связанных с программированием, был инициатором создания в университетах страны кафедр вычислительной математики. С 1969 г. под редакцией Л.А.Люстерника на мехмате МГУ стали выходить сборники трудов из серии «Математические вопросы управления производством».

Лаврентьев Михаил Алексеевич (!900-1980). – с 1957 г председатель Сибирского отделения АН СССР. Основные труды по теории функций, теории дифференциальных уравнений, ТФКП, механике сплошной среды. Получил важные результаты в прикладной математике и механике – в теории крыла, теории удара тел о воду, тории струй, теории волн и др. Создал теорию кумулятивных зарядов, теоретические основы конструирования кораблей на подводных крыльях. Лаврентьеву присваиваются де ученые степени: доктора технических наук (1934) и доктора физико-математических наук (1935), что свидетельствует о том, что в его исследованиях наука и практика находились в тесном единстве.

Лаврентьев явился одним из инициаторов создания Сибирского отделения АН СССР, был его первым председателем. Сибирское отделение АН СССР стало первым в стране научным центром, объединившим организационно и территориально институты, работающие в различных научных направлениях. В центре даны образцы успешного применения математических методов для решения прикладных проблем в различных направлениях науки.

Колмогоров Андрей Николаевич (1903-1987) является во многих областях математики и ее приложений: первооткрывателем: метрическая теория функций, теория множеств, математическая логика, теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика, функциональный анализ, теоретико-множественная и алгебраическая топология, теория турбулентности и динамических систем, теории информации, алгоритмов и др. Всемирную известность получили аксиоматика Колмогорова теории вероятностей, интеграл Колмогорова, его критерии для полинома наилучшего приближения и в математической статистике, аксиомы отделимости в топологии. работы по временным рядам и др. Для Колмогорова характерна поражавшая всех широта научных интересов. Колмогоров обладал замечательным умением решить трудную и важную математическую задачу, и в то же время был разумным и дельным в приложениях, в естественных и гуманитарных науках. Помимо математики, где ему принадлежат классические достижения, он получил заметные результаты по физике, механике, геофизике, океанологии, теории стрельбы, биологии, стиховедении. Для его работ в прикладных направлениях характерно глубокое проникновение в самую суть сложных физических процессов. Так например, опубликованные им работы по турбулентности имели не формально математический, а отчетливо физический характер. В ранние годы он написал замечательную работу по истории.

У Колмогорова был замечательный дар – находить узловые точки проблемы, открывать то, что впоследствии оказывается нужнм очень многим. Были у него и некоторые странности: в образовании он боролся с геометрией, изгонял комплексные числа.

Он опубликовал свыше 350 работ, создал научные школы, воспитавшие десятки математиков, в том числе 6 академиков (*А.И.Мальцева, С.М.Никольского, Ю.В.Прохорова, И.М.Гельфанда, Б.В.Гнеденко, В.И.Арнольда).*

В.В.Леонтьев (1906 - 1998) – экономист. Будучи квалифицированным математиком, критически относился к формальному применению математических теорий к объяснению мировых экономических проблем, поскольку, по го мнению, экономические исследования должны опираться на эмпирические наблюдения, а экономические теории, обобщать наблюдения и проверяться практикой. Вместе с тем научные произведения В.В.Леонтьева отличаются аналитической строгостью и разработанная им оптимизационная модель экономической динамики является классической математической моделью экономики. Леонтьев был удостоен Нобелевской премии в 1973 г. «за развитие метода «затраты - выпуск» и за применение метода к решению важных экономических проблем».

Лаптев Герман Федорович (1909-1972), основное направление его работы дифференциальная геометрия. В своих первых научных работах он решил ряд прикладных задач, связанных с авиацией. С 1932 г. до конца своей жизни он работал в Военно-воздушной академии им. Н.Е.Жуковского, воспитал большую группу учеников.

Научные исследования *Мстислава Всеволодовича Келдыша* (1911-1978) посвящены многим фундаментальным проблемам теоретической и прикладной математики: теории колебаний, аэродинамики, теории волн на поверхности жидкости, теории удара о воду, теории флаттера. теории потенциала, конформным отображениям, проблеме «шимми» (самовозбуждающихся колебаний передней стойки шасси самолета, ведущих к ее поломке) и др. Уже в 1933 г. он успешно применил математические методы для решения задач гидро-и аэродинамики Он по праву считается главным Теоретиком космонавтики. После запуска первого спутника Земли Келдыш является научным координатором общегосударственных программ по освоению ближнего и дальнего космоса. Он же руководит созданием методов расчета задач атомной техники. В стране формировался новый раздел математики – вычислительная и прикладная математика. Келдыш лично участвовал в создании новых вычислительных методов и алгоритмов, развивая численные методы решения задач математической физики.

Важные математические результаты, полученные Келдышем в, казалось бы, абстрактных разделах математики, были вызваны необходимостью решения конкретных прикладных задач. Например, полученные им результаты в разработанной теории несамосопряженных операторов были вызваны необходимостью раскрыть причины колебаний конструкций.

В научном творчестве *Андрея Николаевича Тихонова* (1906-1993) органически сочетались исследования в самых абстрактных разделах математики с решением важных задач прикладного характера. Им получены новые результаты в теории топологических пространств, доказаны теоремы единственности для уравнений теплопроводности, заложены основы теории дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, выполнены фундаментальные исследования по разработке теории и методики применения электромагнитных полей для изучения внутреннего строения земной коры. Он создал метод решения некорректно поставленных задач. В МГУ по его инициативе создан факультет вычислительной математики и кибернетики, деканом которого он был длительный период.

Ландау Л.Д.(1908 - 1968) – физик теоретик. Работы Ландау – блестящий образец применения математики для исследования проблем теоретической физики. Перечень исследований Ландау поражает широтой.. Его вклад в теоретическую физику охватывает все - от гидродинамики до квантовой теории поля. Введение принципа сохранения комбинированной четности соседствует в его творчестве с теорией фазовых переходов второго рода и теорией промежуточного состояния сверхпроводников. А исследование основ квантовой электродинамики – с построением теории квантовых жидкостей.

Понтрягин Лев Семенович (1908-1988) осуществлял исследования в топологии, теории непрерывных групп, теории оптимальных процессов и других областях современной математики. Получил ряд новых результатов, в том числе фундаментальные результаты по дифференциальным играм, сформулировал принцип максимума, дающий необходимые условия управления процессом, Работы Понтрягина и его учеников оказали большое влияние на развитие теории управления и вариационного исчисления.

Первые научные работы *Леонида Витальевича Канторовича* (1912-1986). относились к теории функций и множеств, приближенным методам анализа. Интерес к экономическим проблемам у него возник во второй половине 30 годов Толчком для разработки метода принятия экономических решений, известного сегодня как метод линейного программирования, послужила показавшаяся первоначально частной практическая задача о планировании загрузки производства, с которой к Канторовичу обратились сотрудники Ленинградского фанерного треста. Однако для решения задачи потребовалось разработать новые методы. В1939 г вышла небольшая брошюра «Математические методы организации и планирования производства», где было зафиксировано открытие, за которое в 1975 г. ему была присуждена Нобелевская премия «:за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов». В1951 г. Канторович совместно с В.А.Залгаллером опубликовал книгу, описывающую их работу по использованию линейного программирования. Через восемь лет он опубликовал известную работу «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов».В конце 50 годов по инициативе Канторовича в Ленинграде были развернуты исследования по теории и численным методам математического программирования, был успешно решен ряд практических задач.

Соболев Сергей Львович (1908-1989). В работах Соболева была сформулирована концепция рассмотрения решений дифференциальных уравнений в частных производных как обобщенных функций (функционалов). Созданное им понятие обобщенной функции привело к появлению новых методов, позволивших решить ряд проблем математической физики. Идеи обобщенных функций используются в механике, теоретической физике, в ряде инженерных дисциплин. Сами функционалы образуют нормированные пространства, называемые пространствами Соболева.

Соболев активно развивал прикладные математические исследования. В молодые годы им опубликовано более 30 работ по исследованию распространения волн в упругих средах. После 1943 г Соболев в обстановке полной секретности занимался расчетом сложных систем получения кондиционного ядерного горючего. Разработанная (1947) Соболевым математическая модель колебаний вращающейся жидкости положила начало новым разделам функционального анализа и математической физики. Будучи заведующим кафедрой вычислительной математики МГУ (1952-1959), Соболев разработал новый подход использования понятий и теорем функционального анализа в теории численных методов.

Три академика *Лаврентьев, Соболев и Христианович* явились инициаторами создания Сибирского отделения АН СССР.(решение о создании принято в 1957 г.). Соболев в течение четверти века возглавлял л в этом научном центре Институт математики. Под его руководством проводились интенсивное использование математических методов для решения практических проблем, в том числе была построена математическая теория взрыва, разработаны метод предсказания паводка в речных руслах, велись исследования в области математической лингвистки и др.

Важную роль сыграл Соболев в становлении кибернетики. После смерти Сталина он одним из первых выступил против антинаучных попыток оторвать фундаментальные направления в математике от их приложений.[12]

Гнеденко Борис Владимирович (1912-1995) – выдающийся ученый в области теории вероятностей, математической статистики и их приложений, успешно работал в области истории и философии математики «Очерки по истории математики» Б.В.Гнеднко были подвергнуты в 1992 г. критике за «слишком много свободомыслия», «политическую индифферентность» и др.. Дискредитация полезного исследования, а заодно и автора шло под лозунгом «… быстрейшего и наиболее полного осуществления указаний И.В.Сталина и решений XIX съезда КПСС о всемерном развертывании

[12] Статья в «Правде» в июле 1954 г.: «О научной критике, новаторстве и догматизме».

критики и самокритики в научной работе…». От дальнейших преследований Гнеденко спасло изменение политической ситуации в стране в связи со смертью Сталина.

Моисеев Никита Николаевич (1917-2000) . последовательно развивал идеи создания в математики нового направления, которое о предлагал назвать «теорией информационных процессов». Содержанием этого направления должно стать теория и методология совместного применения формальных и неформальных подходов при изучении (анализе и синтезе) сложных многофункциональных систем. Первым шагом в этом направлении является создание имитационных систем, включающих ЭВМ, функционирующих в интерактивном режиме. Как никто другой, он понимал значение методологии прикладной математики при использовании математических методов в практических задач. Особое внимание обращал на необходимость изучения математиком физической сущности системы при создании ее модели. В своей творческой деятельности Моисеев активно способствовал становлению нового научного направления. Он участвовал в развитии математических методов для решения практических задач во многих областях науки. В 1950-1960 гг. он предложил прямой метод вариации фазового пространства, что значительно упростило поиск оптимальных траекторий космических объектов. В середине 1960-х годов усовершенствовал методы рационального распределения ресурсов. С 1967 г., являясь заместителем директора ВЦ АН СССР работает над созданием вычислительных методов для решения аэрокосмических задач, участвует в разработке новых образцов авиационной и ракетной техники. Выдающейся заслугой Моисеева является участие в разработке и реализации имитационной модели анализа последствий взрыва нескольких ядерных бомб. Было показано, что такой взрыв приведет к роковому для человечества последствию - «ядерной зиме». В последние годы своей жизни Моисеев занимался экологическими проблемами.

Самарский Александр Андреевич (р.в 1919 г.), ученик А.Н.Тихонова в течение 50 лет вел научную и производственную работу по созданию новой техники, решению задач машиностроения и ядерной энергетики, руководил работами по расчету первых ядерных и термоядерных изделий. Автор уникальных численных методов. Являясь одним из основоположников современной методологии математического моделирования, построил общую теорию разностных схем, общую теорию устойчивости операторно-разностных уравнений, теорию итерационных методов решения операторных уравнений. Им разработаны и широко используются на практике методы численного решения задач механики, ядерной физики, физики плазмы.

Шафаревич Игорь Ростиславович (р. 1923) решил девятую проблему Гильберта (1948) и обратную задачу Галуа (1952). Он проявил глубокую озабоченность ролью математики в прогрессивном развитии человечества. Свои взгляды он изложил в лекции, прочитанной им в Геттингенской

Академии наук «О некоторых тенденциях развитии математики» (лекция опубликована в 1973 г)). Он пишет, что с самого момента рождения математики «обнаружилось то свойство математики, благодаря которым в ней яснее, чем где-либо, проявляются общечеловеческие тенденции. Именно поэтому тогда (когда математика сложилась как наука в работах пифагорейцев) математика послужила моделью, в которой были выработаны основные принципы дедуктивной науки». Далее Шафаревич выражает надежду, что «по той же причине она (математика) теперь может послужить моделью для решения основной проблемы нашей эпохи: обрести высшую религиозную цель и смысл культурной деятельности человечества.»

К числу выдающихся математиков Советского Союза, не упомянутых выше персонально, относятся: *В.Ф.Каган* (1869-1953), *С.Н.Бернштейн* (1880-1968), *С.П.Финников* (1883-1964), *П.А. Широков* (1895-1944), *И.Г.Петроввский* (1901-1973), *П.С.Урысон* (1898-1924), *П.С.Александров* (1896-1982, *Д.Г.Шнирельман* (1905-1938), *П.С.Новиков* (1901-1975), *И.М.Виноградов* (1891-1983), *А.И.Мальцев* (1909-1967), *А.Д. Александров* (1912-1999), *А.Г.Курош* (1908-1971).

Существенный вклад в развитие теоретических аспектов прикладной математики и методологии применении математических методов для решения практических задач внесли *Д.А.Вентцель, С.В.Бахвалов, В.С.Пугачев, А.А.Петров, И.Г.Поспелов, П.С.Краснощеков, Ю.Б.Гермейер, Зубов, В.В.Федоров. А.А. Шанаин* .и многие другие.

Необходимость сочетания у выпускников университетов высокого уровня теоретической подготовки с умением применять свои знания для решения прикладных задач неоднократно подчеркивалась и проводилась в жизнь многими замечательными математиками России XIX и XX вв. Можно, например, сослаться на Остроградского, Чебышева, Ландау и многих других. В полной мере требование такого сочетания не выполняется в университетах России XXI-го столетия. Соответствующие методологические проблемы существуют и в технических вузах

12. Успешная работа многих российских математиков осталась за завесой секретности. Недостаточно поуляризуются работа математиков в прикладной области и в настоящее время. Вот два примера (возможно, не самых показательных) исследований двух русских математиков в прикладной области.

Беленький Виталий Зиновьеви,. 1935 г.р. Автор около 150 публикаций, трех монографий. В 60-х гг. занимался разработкой вычислительных методов и алгоритмов, Важнейшей работой этого периода является исследование сходимости итеративных процессов для решения выпуклых экстремальных задач. Совместно с В.А.Волконским и С.А.Иванковым построена общая теоретическая схема исследования сходимости игровых процессов, совместная монография «Итеративные методы в теории игр и программировании» (1974 г.). Разработана алгебра компьютерного дифференцирования.и на ее основе построена программная система. С 1980 гг. исследования в области экономической динамики: цикл работ по стационарным линейным моделям, развитие принципа оптимальности на основе введенного понятия «объективный функционал» и др., ряд работ по стохастической оптимизации: фидуциональный последовательный анализ, процесс уточнения «с независимыми вычитаниями энтропии».

В сотрудничестве с институтом кристаллографии АН СССР выполнена монография «Геометрико-вероятностные модели кристаллизации» (1970-85 гг.).

С 1990 г ведет активную преподавательскую деятельность (МГУ, МИЭиМ, Российская экономическая школа)

Гаврильц Юрий Николаевич, р.1935 г. Автор более 100 научных работ, в т.ч. две персональных и коллективных монографии. Один из ведущих специалистов в области моделирования социально-экономических процессов. Под его руководством сложилась научная школа математического моделирования и прогнозирования и решения прикладных задач. Наиболее существенные результаты получены им в следующих областях: разработка теории, методики и техники причинного анализа для изучения статистических систем социально-экономических переменных большой размерности, исследование влияния социальных факторов в оптимизационных и равновесных макромоделях на их свойства, исследование проблемы согласования интересов и нахождения компромисса, построения функций полезности и использование их в анализе социального поведения, моделирование динамики мнений и предпочтений населения.

Отдельные результаты научных исследований обсуждались на научно-практических семинарах МВД, отделов ФАПСИ, использовались при подготовке решений Вологодской области, Краснодарского края, Волоколамского и Чеховского районов МО.

С1964 г. ведет активную научно-педагогическую деятельность на кафедре математических методов анализа экономики экономического факультета МГУ.

При перечислении работ зарубежных и советских математиков явно не достаточно упомянуты лица, обеспечившие современное состояние науки о компьютерах и современной вычислительной техники. Значение для прогрессивного развития человечества работ по обоснованию архитектуры ЭВМ, разработке современных программных средств, созданию мощной элементной базы вычислительной техники и техники связи просто невозможно переоценить

Таким образом, в XX столетии имел место очередной этап *научно-технической революции.* Новые проблемы физики, биологии, экономики привели к постановке новых сложных задач перед математикой, стимулировали ее развитие. Развитие информационных технологий способствовало появлению новых возможностей применения математики. Успешное решение новых сложнейших задач, возникших в науке и технике, оказалось возможным, в том числе, благодаря преодолению попыток созданию искусственных границ между теоретической и прикладной сторонами математики. Ряд значимых практических задач был решен только при *объединении формальных и неформальных подходов*, при широком применении вычислительных экспериментов. Фундаментальные исследования успешно проводились не только в теоретической, но и прикладной области. Наряду с этим резко сократился интервал между фундаментальными результатами и их практической реализацией в самых различных областях науки и техники.

Успехи науки, в том числе прикладных направлений математики привели к полному *изменению жизненного уклада* населения Земли и главным образом населения США, Западной Европы и крупных мегаполисов других стран. Самым существенным образом изменилось информационное обеспечение повседневной жизни, а также уровень автоматизации бытовых услуг.

2.11. XX век и кризис математического сообщества

1.В первой половине XX века на первый план математических исследований выдвинулись основания математики, а также проблемы обоснования и строгих доказательств. Определенные достижения в теории привели к увлечению некоторых математиков абстрактными построениями в различных разделах математики и к неоправданной дифференциации даже в узких направлениях науки. Более того, математики, выполняя исследования на базе введенных в узкой области математики понятий и терминологии, порой не понимали друг друга и, вели параллельные дублирующие исследования. Математика стало ориентироваться исключительно на единое строгое изложению. В математическом сообществе стали признаваться лишь стопроцентно строгие теоремы, длина которых зачастую стала немыслимой. Строгомания постепенно превратилась в мифологию, в веру, в самообман. Строгие доказательства стали требовать во всех приложениях, при использовании математики в естественных науках. Все «нестрогие» исследования инженеров, артиллеристов стали считать лежащим вне математики, без учета реальной возможности достижения «строгости».

Это привело к сокращению содержательного изучения тех разделов математики, которые ориентировались на использование в естественных науках. В учебных планах математических факультетов университетов изучение современной теоретической физики не предусматривалось Сформировался специалист, заинтересованный в развитии математики ради ее самой. Такое положение складывалось и в СССР и на Западе.

В рассуждениях о значимости только строгих доказательств отсутствовало понимание того, что для ряда насущных практических задач «строгого» решения не существует. Более того, по мере усложнения научных проблем возникает все большее число задач, для решения которых требуются специальные математические методы, несовместимые с классическим подходом. Также отсутствовало понимание, что, хотя увеличение объема знаний в любой науке приводит к необходимости «узких» специалистов, это не должно приводить к распаду наук на части.

. Таим образом, наметился разрыв между математическими теориями и потребностями практики и даже от исследованиями в родственных математике науках (физике, астрономии, механике и др.). Определенное число математиков-теоретиков стали вновь придерживаться утверждения, что истинные математики должны заниматься только теорией, а математические приложения - это другая наука. В определенной мере здесь наблюдалось возвращение к философии аристократии Древней Греции. Попытки разделения математики на чистую и прикладную имели место и в XIX в. Благодаря работам выдающихся математиков XIX столетия эти тенденции не возобладали.

Для поколения ученых конца XIX начала XX века математика была инструментом познания мира. Многие ведущие ученые-математики, работая в областях астрономии, механики, гидродинамики, электромагнетизма и теории упругости, получили несравненно более важные результаты, чем в чистой математике.

Однако в XX в. дебаты о разделении математики возобновились. Показателен в этом отношении отрицательный отзыв Гильберта на доклад Винера на конференции: «такого отвратительного доклада я еще не слышал». В 1970-х годах в СССР на страницах нескольких номеров «Литературной газеты» прошла дискуссия по вопросу: «Является ли теоретическая и прикладная математика единой наукой или различными науками?». Нашлись математики, которые заявили, что между этими разными науками необходимо поставить сплошную стену.[13] Дискуссия была завершена ссылкой на известное высказывание Клейна о том, что теоретическая математика является твердой основой – скелетом организма математики, а сама жизнь математики в приложениях.[14]

В конце 30-х годов группа французских математиков объединилась в желании построить всю математику на новой аксиоматической основе. Стал выпускаться многотомный трактат «Элементы математики», издаваемый под псевдонимом Никола Бурбаки. Работа оказалась незавершенной. Сама же цель представляется утопичной, так как невозможно поспеть за развитием науки, но нельзя и отрицать значения работ, которые приводят к созданию языка, понятного для всех математиков.

3. Во второй половине XX века получил дальнейшее развитие процесс формализации, порой искусственного усложнения математических текстов. Формальный язык не прозрачен, он всегда узкопрофилен, существенно затрудняет взаимное проникновение идей, разделяет даже близкие разделы до непонятности.. Бесполезная всеусложняющая алгебраическая формализация языка математики – это слишком серьезная широко распространившаяся болезнь - проявление кризиса, ведущего к

[13] Это положение высказано в дискуссионной статье профессора Китайгородского.
[14] Полностью заявление Клейна приведено в гл.

определенной бессмысленности функционирования абстрактной математики, превращения ее в организм, потерявший единый разум, где органы дергаются без связи друг с другом. Очевидно, не нужно искусственно, без нужды простое делать сложным. А уж создавать тяжелую теоретико-множественную аксиоматизацию анализа начиная с элементов, (как Бурбаки) – это, возможно, уже перебор, который может только убить весь реальный анализ..

По ультра абстрактному пути пошла французская школа, начиная с Лебега и Бореля. Школа Гильберта была идейно более богатой, поощрявшей взаимодействие с внешним миром. Гильберт и его ученики хотя и провозгласили программу единой аксиоматизации математики и теоретической физики, но понимали это не тривиально.

Современная математика реально сложна. Выучить ее трудно. На первый взгляд было бы естественно облегчить изучение, делая изложение как можно более прозрачным. Ведь формализация языка науки, осуществленная в бурбакистском стиле – это не полезная формализация Гильберта, упрощающая понимание. Это - формализация, усложняющая понимание, мешающая единству математики и ее взаимодействию с другими науками. Нужно бороться за сохранение прозрачного общенаучнрго стиля, который обеспечит объединение математики.

4. Одним из показателей кризиса математики в XX в является открытие новых антиномий.[15] При попытках подвести прочный фундамент здания математики важнейшим оказалось доказательство непротиворечивости. При этом большое значение имели две проблемы: континуум-гипотеза и аксиома выбора. Аксиома выбора по сути сводится к проблеме, как следует понимать *существование* всего, что анализируется в математике. Именно в этих основах математики и возникли неразрешимые противоречия.

В XX веке было разработано несколько различных подходов к устранению противоречивости в фундаментальных основах математики. Ключевым вопросом, на который различные группы математиков дают разные ответы, был вопрос о том, существует ли математика объективно вне человека, или же она является плодом его разума. Основными направлениями в поисках обоснования математики являлся логицизм, интуиционизм, формализм, теоретико-множественный подход[16].. Представители этих направлений отстаивали продуктивность своего подхода и по-своему разрешали парадоксы, имеющие место в обоснованиях

---

[15] Антиномия - парадоксальная ситуация, когда можно убедительно доказать два взаимоисключающих суждения. К началу XX века были обнаружены антиномии, связанные с основными понятиями теории множеств.

[16] Разновидностью интуиционизма является сформировавшаяся в СССР к 50-м годам XX века конструктивная математика - течение в обосновании математики, для которого характерно исследование конструктивных процессов и объектов алгоритмическими методами.

математики. При этом проблемы доказательств непротиворечивости математики и полноты аксиоматических систем сохранялись

Решающий вклад в критическое осмысление теоретических проблем математики внесло открытие Геделя, который в своей работе «О формально неразрешимых утверждениях (оснований математики и родственных систем)», опубликованной в 1931 г., получил два результата, которые фактически потрясли математику

Первым из результатов является теорема о неполноте, в которой утверждается, что если формальная теория, включающая арифметику целых чисел, не противоречива, то она не полна.

Второй результат содержал утверждение, что непротиворечивость любой достаточно мощной математической системы, охватывающей арифметику целых чисел, не может быть установлена средствами самой этой системы на основе математических принципов, принятых различными школами в основаниях математики: логицистами, формалистами и представителями теоретико-множественного направления.

Следствием этих результатов явилось то, что математика была вынуждена отказаться от претензий на абсолютную достоверность или значимость своих результатов. Положение осложнялось невозможностью доказать непротиворечивость. Результаты Геделя послужили поводом для известного заявления А.Вейля: «Бог существует, поскольку математика, несомненно, не противоречива, но существует и дьявол, поскольку доказать ее непротиворечивость мы не можем»[17].

5. Одна из основных причин кризиса математических наук - распад образования, начинающийся в начальной и средней школе и продолжающийся в университетах.

До середины XX века в качестве оной из основных черт образовательной системы в СССР была весьма жесткая система экзаменов (по математике с 10-ти летнего возраста). Создавался твердый фундамент, на котором можно было строить будущее математическое образование. Чтобы закрепить школьные знания, практиковались математические кружки и олимпиады.

.Но уже с 60-х годов стала нарастать критика трудностей школьного образования. Образование сильно облегчили, сняли большинство экзаменов. Одновременно шло снижение уровня образования на математических факультетах вузов. В СССР к тому же имел место антисемизм, а также рост бесчестности персонала, особенно на приемных экзаменов, а также возрастание влияния профессоров, пропагандирующих идеологию марксизма-ленинизма, и нового типа администраторов с высокими научными званиями, которые даже свою кандидатскую диссертацию сами не делали. В СССР возникли «стопроцентно фальсифицированные крупные ученые». Понятие другим странам не известное. Когда железный занавес пал, многие талантливые математики иммигрировали, так как в России им места не было

[17] Текст Вейля приведен по монографии В.Панова (см. Л.)

На Западе за последние 20-25 лет, т.е. в конце XX-го столетия, также произошел кардинальный спад уровня школьного и университетского математического образования, причем в США падение школьного образования, по-видимому, особенно сильное.

Реформа образования в России в начале XXI века приведет к усилению кризиса образования. Прослеживаются следующие тенденции.

а). Переход к единому экзамену фактически означает, что школьные учителя вместо обучения школьников наукам, будут вынуждены натаскивать их на «решение» тестов, достаточно низкого научного уровня.

б) Дух коммерциализации проникает в школу и в вуз, успешно развращает персонал учебных заведений и учащихся. Коррупция проникла в вузы и школы. Школьное обучение дорожает, становится не подъемным для некоторых семей. Идея всеобщего среднего образования реально оказывается не реализуемой

в) Платное обучение вытесняет в вузе бесплатное. Для многих одаренных школьников двери вузов оказываются закрытыми. Увеличение процента обучающихся на платной основе заметно снижает средний уровень знаний студентов

г). Низкий уровень благосостояния многих семей, невысокие стипендии приводят к тому, что многие студенты вынуждены совмещать учебу и работу. Нередки случаи, когда студенты дневной формы обучения систематически пропускают занятия, в том числе такие занятия, которые трудно компенсировать самостоятельной работой. Естественно это приводит к заметному снижению качества усвоению материала. Студент–троечник, студент-«хвостист» - распространенные понятия.

д) Безответственная выдача лицензий привела к появлению большего числа коммерческих вузов, преподавательский состав которых и уровень обучения не отвечает даже существующим стандартам.

6. Кризис математики нашел свое отражение во взаимодействии математики и физики. Место математики в физических науках нельзя определить раз и навсегда. Ее связь так богата и многообразна, как и само содержание этих наук.

Длительный период математика и физика развивались в тесном контакте. Многие крупные математики Ньютон, Лагранж, Лаплас, Фурье, Гаусс, Пуассон, Риман и др. были одновременно математиками и физиками. В конце XIX века появились новые разделы физики со своими математическими законами. Если проследить параллельное развитие математики и физики, то можно заметить, что в физике XX века самые революционные идеи опирались на математику, которая как бы специально для этого уже создана. К началу XX в. физико-математическое сообщество стояло очень высоко.

В 20-х годах сообщество математиков оторвалось от сообщества физиков-теоретиков. К середине 30-х годов XX в. союз математики и физики был существенно нарушен. Этому способствовало, в частности, весьма абстрактное изложение теоретической математики, погоня за абсолютной строгостью. Этот период длился примерно лет тридцать. Затем партнерские отношения были восстановлены. Например, математический расчет работы ядерных устройств является одним из основных методов получения информации о работе нового изделия. После запрещения ядерных испытаний – это единственный метод. Однако, определенные трения во взаимоотношениях математики и физики сохранились. Очевидно, это связано с тем, что успешное решение сложнейших задач современной теоретической физики возможно лишь при глубоком проникновении в физическую сущность процессов. Именно поэтому новые результаты в теоретической математике достаточно часто получают физики-теоретики.

В 80-90–ые годы XX века физика возглавила прогресс человечества, в этом участвовала и математика. При этом заслуги конкретных ученых, обеспечивших научно-технический прогресс, длительное время держались в тайне

7. Какой то период в связи с появлением быстродействующих ЭВМ в прикладных исследованиях, в том числе в физике, имело место некритическое использование имитационного моделирования и, соответственно, определенное пренебрежительное отношение математиков-вычислителей к теоретическим исследованиям, обобщениям. Благодаря ряду теоретических результатов, способствующих успехам в прикладных исследованиях, не обоснованная замена без оснований аналитических моделей имитационными не зашло далеко.

В прикладных исследованиях в XX веке получил развитие параллелизм, что в значительной мере явилось следствием доведенной до абсурда системы секретности. Например, в СССР были отгорожены стеной секретности научно-исследовательские институты Министерства обороны, занимающиеся одинаковыми или смежными проблемами.

7. Наличие кризиса сообщества математиков с его системой образования *не означает кризиса математики, как науки*

Математика или, во всяком случае, ее большая часть, включая современную абстрактную математику, - это очень ценное для человечества знание. Но эту ценность не так просто реализовать. Лидеры математики должны быть людьми общенаучно грамотными, знать пути, соединяющие математику с внешним миром, уметь искать новые связи, помочь ориентироваться молодежи. В противном случае не видно, как внутриматематические достижения могут быть полезны обществу.

Деятельность в чистой науке не избавляет от общественного долга перед наукой; напротив, будучи материально и политически независимыми, ведущие математики должны защищать ценности науки от новоявленных аналогов Лысенко, всяких сумасшедших и безграмотных открывателей «вечных двигателей». Периодически стали возникать совсем нелепые антинаучные фантомы, производящие большой шум (расшифровка «библейских кодов», псевдоистория Фоменко и пр.).

Защита ценностей науки –обязанность математиков перед обществом. Если верхний слой математики не может этого делать – грош ему цена.

Математические закономерности являются мощным средством познания явлений реального мира и, более того, математическим знаниями порой исчерпываются наши представления о реалиях Мира. И математические закономерности позволяют ориентироваться в непознанных явлениях, использовать их в практической деятельности. Например, при использовании теории гравитации Ньютона или теории электромагнитного поля Максвелла приходится признать незнание основных физических механизмов явлений. На математику возложено описание того, что, в сущности, не известно. В современной физике все чаще интуитивное и физическое содержание заменяется математическим описанием. Например, атом – это система уравнений, описывающая происходящие в атоме процессы.

То, что кризис математического сообщества, не означает кризиса науки математики, что подтверждается и тем, что математика все больше проникает в другие науки, получает в приложениях новые импульсы к своему развитию, активно способствует дальнейшему развитию научно-технической революции. Существенные математические результаты получают и специалисты других наук, в значительной степени это имеет место в теоретической физике.

Полной ясности, как ликвидировать кризис математического сообщества, нет. Наступил век биологии, которая делает чудеса. Но и биологии требуется математическая поддержка, которая будет достаточно успешной лишь при развитии новых областей математики. Во всяком случае, важно помнить, что *полнокровная жизнь математики в ее приложениях.*

2.12. О синтезирующей роли математики

Человечество в XX веке приобрело огромные возможности и оказалось перед лицом больших опасностей. НТР - эпоха ответственных решений, которые необходимо принимать не интуитивно, а на научной основе с использованием математических моделей, позволяющих прогнозировать возможные результаты решений. Необходимость в совершенствовании математических методов, системного подхода для изучения сложных систем и обоснования принимаемых решений не вызывает возражений.

Особенность современного этапа НТР заключается в том, что на передний план прикладных исследований все в большой степени выходят проблемы научно-обоснованного управления большими человеко-машинными системами. Однако продолжается практика принятия волюнтаристских решений и экспериментирования на реальных системах, что, зачастую, приводит к катастрофическим результатам. К чему приводят не обоснованные, не проверенные на моделях решения приходиться наблюдать в России, в годы перестройки экономических отношений.

Предпринимаеме попытки принятия масштабных решений, направленных на обеспечение позитивного развития земной цивилизации, безуспешны. Человечество в результате своей деятельности может уже сегодня нарушить квазистатическое равновесие биосферы и дать толчок, который приведет биосферу в такое состояние, где человеку места уже не будет. Таким образом, существует проблема коэволюции человека и биосферы, т.е. обеспечение такого их совместного развития, которое не выведет параметры атмосферы из области гомеостатиза человечества. Необходимы исследования в двух направлениях: определение необходимых условий коэволюции и формирование рекомендаций по управлению человеческим обществом, обеспечивающим эти условия. Сегодня представление о конечных глобальных целях человечества поверхностно. Общие модели разрабатываются не достаточно, а частные модели нуждаются в обобщениях. Вместо выработки решений в интересах всего человечества, национальные группировки, религиозные конфессии, государства погрузились в начале XXI века в пучину конфликтов, возросли попытки силового решения конфликтов, растет число терактов. Теория конфликтов развивается успешно, но не видно эффективных результатов ее применения

Огромную роль в прогрессе математики сыграло изучение свойств абстрактных пространств со сложной топологической структурой. Однако развитие синтезирующих конструкций задерживается не трудностями развития абстрактных областей математики. Неспособность современной математики полностью удовлетворить потребности анализа проблем естествознания вряд ли может быть преодолена на пути использования пространств более сложной топологии.

Современное состояние физики и инженерных наук обязано, в первую очередь, понятиям сплошной среды и поля. Математика континуума является одним из величайших достижений человечества. Необходимость понять мир в целом, определить его основные черты требует определенного уровня агрегирования, и именно идея непрерывности дала наглядную асимптотику реальности. Но для детального изучения фрагментов реального мира следует перейти к дискретному описанию. Дискретная структура материальных тел - одна из основных особенностей материи, без учета которой нельзя сколь угодно детально изучить ее свойства. Для работы с ЭВМ математики придумали способы дискретизации континуума - абстрактное дискретное приближенное описание дискретных процессов. К сожалению, хороших методов описания и анализа процессов дискретной природы математика в достаточной мере не заготовила. Создание эффективных средств анализа моделей дискретной природы будет одним из важнейших инструментов изучения объектов реального мира.

Для изучения сложных явлений всегда возникает необходимость в диалоге исследователей разнообразной компетентности, владеющих методами той дисциплины, которую они представляют. Это приводит к необходимости преодоления определенных барьеров несовместимости.

Ключевой проблемой такого диалога является объединение формальных методов, свойственных математике, с неформальными методами, традиционными для гуманитарных дисциплин. В настоящее время разрабатываются мощные имитационные модели, являющиеся важной основой совместной работы ученых разных специальностей при изучении сложнейших явлений мира, процессов развития цивилизации. Математика выступает как связующее звено диалога между представителями различных профессий.

Объединение формальных и неформальных подходов должно привести к развитию новой научной дисциплины, которую академик Н.Н.Моисеев предлагал назвать «*теорией неформальных процедур*». Имитационные системы, функционирующие в диалоговом режиме, и являются первым элементом аппарата этой теории. Процедура использования диалоговых систем - это алгоритм, в котором присутствует человек со всеми его особенностями. Теория подобных алгоритмов нуждается в дальнейшей разработке.

В основе больших диалоговых систем лежат математические модели. От того, как построена эта система, во многом зависит успех исследования. Обязательно должен быть принят понятный всем исследователям язык общения. Алгоритмический язык - это новый тип формализации, способ общения между исследователями разнообразной специализации. Вопрос исследователя должен так интерпретироваться, чтобы машине был не только понятен вопрос, но и была бы включена в действие управляющая программа, формирующая ответ на языке понятным исследователю. Создание имитационных систем связано не только с техническими и программистскими трудностями, но и с дальнейшем развитием теории информатики. Известно, что при многократных повторениях на имитационных моделях вариантных расчетов возникают новые представления о содержании той информации, которая закодирована формальным языком модели.

Синтезирующая роль математики в процессе развития знаний бесспорна. Но будущее ее место не столько в совершенствовании ее традиционных глав, сколько в создании новых направлений, способных заложит основы архитектуры междисциплинарных исследований на базе дискретного описания изучаемых процессов и алгоритмов, допускающих вмешательство человека".

Порой недооцениваются возможности математики в поиске новых подходов к решению таких задач, которые сегодня не описаны на языке математики. Это, в частности, проявляется при попытках представить чистую (теоретическую) и прикладную стороны математики как независимые науки. Однако именно взаимодействие этих двух частей математики позволит более четко понять природу основного противоречия науки - противоречия между *фрагментарностью науки и бесконечностью изучаемого ею мира*, поскольку любая научная теория является лишь гомоморфным отражением фрагмента реального мира. Теоретические построения математики дают надежду, что это противоречие может быть «сглажено» таким образом, что окажется возможным улучшить взаимодействие двух направлений культуры: науки и религии. Наука получит надежду, что модели реального мира - это те относительные истины, которые действительно приближают человечество к некоторой абсолютной истине, а также получит критерии для оценки ответственности ученых за возможные последствия результатов исследований. Религия, используя достижения современной науки, получит возможности для формулирования более обоснованных гипотез об абсолютной истине, точнее, о приближении к этой истине. Все это должно в конечном итоге уменьшить «глубокую раздвоенность и скрытую вражду не только между государством и церковью, но и внутри самой науки, в лоне всех церквей, в глубине совести всех мыслящих людей". Конечно, это задача не только математики, но вклад математики в ее решении должен и может быть весомым

3. Методология прикладных математических исследований

3.1. Особенности подготовки прикладных математиков

Чистая и прикладная математика, будучи двумя частями единой науки, различаются направленностью, целями исследования, именно тем, что позволяет одной уходить от реальности и требует от другой разбираться в сущности этой реальности, способствовать ее развитию.. Поэтому, несмотря на единство основных положений, а также на тесную взаимосвязь двух сторон математики, существуют *значительные особенности в логике и методологии* каждой из этих ветвей математики. Методология прикладных исследований определяет особенности разработки моделей для прикладных исследований и применения этих моделей. Соответственно, подготовка прикладных математиков производится по учебному плану, отличному от учебного плана подготовки математиков. К сожалению, в полной мере существующие учебные планы задачу дифференциации подготовки математиков не решают.

Прежде, чем обратиться к рассмотрению особенности подготовки прикладных математиков приведем следующие, на наш взгляд, принципиальные положения, вытекающие из всего исторического опыта разития математики.

В прикладных исследованиях одинаково вредны как стремление к *безупречной строгости доказательства,* так и *увлечение эмпиризмом.* Требования математиков-теоретиков обеспечить безусловную строгость в приложениях сродни претензии на изоморфное отображение действительности, на абсолютную истину. Жесткость теоретических конструкций может быть в определенных случаях весьма полезна и в прикладных исследованиях. Однако при исследовании объектов реального мира более предпочтительны *гибкие подходы,* учитывающие относительность исходных посылок и реально достижимую строгость.

В тоже время, прикладные исследования *без должного ознакомления с уже имеющимися результатами и обобщениями* приводят порой к бесполезной трате средств, а нежелание или неумение осмыслить, обобщить результаты эксперимента может привести к потере информации, к содержательно бедным, а, порой, и неверным выводам.

Под термином *"прикладной математик"* понимается далее математик, занимающийся прикладными исследованиями в любой области. Ясно, что это не обязательно специалист, окончивший соответствующий факультет высшего учебного заведения. Речь идет о необходимости владения при прикладных исследованиях определенными знаниями, обеспечивающими положительный результат.

Какими же знаниями должен обладать математик, занимающийся прикладными исследованиями?

Кратко это можно сформулировать следующим образом.

Прикладной математик должен:

1) знать *математические методы, возможности их применения,* для

чего достаточно уверенно ориентироваться во всех разделах математики;[18]

2) владеть *логикой и методологией прикладной математики, методологией моделирования;*

3) владеть *искусством постановки и формализации задачи.*

Об этом пишет Р.Акофф, подводя итоги своей 30-ти летней практической деятельности в области поиска подходов к решению проблем[19]:

«Вначале я подходил к решаемым проблемам с общеметодологической точки зрения. Затем методология отошла на второй план, уступив место математическому подходу. В конечном итоге и общая методология и научные методы стали моими союзниками при решении проблем. Однако по мере того, как я все в большей степени использовал и то и другое, я все больше убеждался, что даже в совокупности общая методология и научные методы не могут обеспечить вполне удовлетворительного подхода к решению проблемы. То есть, ни о каком неожиданном решении, которое мы обычно называем "красивым", не может быть и речи. Хорошее решение может быть получено только при таком подходе к решению проблем, который содержит элементы искусства, т.е. элементы творчества».

Если первые два требования к знаниям прикладного математика, являющиеся обязательными для успешных прикладных исследований, относятся к науке, то последнее требование творческого подхода к задаче предполагает наличие у исследователя специфических способностей, качеств, т.е., в значительной мере, относится к искусству. "Искусством моделирования может овладеть тот, кто обладает оригинальным мышлением, изобретательностью и находчивостью, равно как и глубокими знаниями систем и явлений, которые необходимо моделировать"[20].

Творческая постановка задачи является важным этапом прикладного математического моделирования. Применению математических методов можно научить. Способность к творчеству можно только развивать, путем изучения опыта других исследователей, изучения существующих моделей. Ознакомление с опытом моделирования дает возможность избежать типовых ошибок, сэкономить средства, сократить путь к "хорошему решению". Весьма ценен собственный опыт исследования, критическое осмысливание ошибок, а также глубокое знание исследуемой конкретной реальности. Следует обратить внимание и на то, что знание методологии прикладной математики существенным образом способствует развитию творческого потенциала исследователя.

Интеллектуальные качества, опыт и специальные знания исследователя имеют важнейшее значение при создании моделей для решения реальных

---

[18] Можно иронизировать по поводу выражения «достаточно уверенно ориентироваться». Однако, если подходить к вопросу без предубеждений, то всегда оказывается понятным, что и как в конкретном разделе математики нужно изучить, чтобы затем, когда появится необходимость обратиться к соответствующему разделу.

[19] Р.Акофф. «Искусство решения проблем». М., 1982.

[20] И.Грекова. «Методологические особенности прикладной математики на современном этапе ее развития». // «Вопросы философии» 6.1976.

задач. "Поэтому невозможно написать учебник, изучив который исследователь мог бы браться за любую прикладную задачу. Если бы такой учебник был рекомендован, то следование ему могло скорее привести к ограничению творческих возможностей, чем способствовало бы их развитию".

В предисловии к настоящему учебному пособию отмечено, что отсутствие знаний по логике и методологии прикладной математики приводит к тому, что по окончании вуза специалисты оказываются не готовыми к участию в прикладных исследованиях. Им приходится "перестраиваться". Эта перестройка, порой, напоминает ломку, так как сопровождается отбрасыванием многих "чистых" определений, теорем и приемов, на категоричности которых настаивает чисто дедуктивный образ мышления. Перестройка на другую методологию (переучивание) обходится весьма дорого и происходит болезненно. Так в одном из прикладных институтов молодым специалистам, окончившим университет и обладающим хорошими теоретическими знаниями, отводилось для "входа в работу" до двух лет и, зачастую, безрезультатно. Отсюда появляется и проблема так называемых "невостребованных знаний".

Математические методы: их обоснования, алгоритмы, а также вопросы программной реализации занимают наибольшую часть учебного плана подготовки прикладных математиков в университетах. Соответствующие курсы обычно перегружены классическими началами, а также доказательствами теорем существования, сходимости. Доказательства эти рассматриваются для всех крайних, порой практически не встречающихся случаев. Одна из причин отсутствия в вузах должного внимания изучению особенностей подходов к постановке и решению прикладных задач заключается в том, что у значительного числа математиков-преподавателей вузов, в том числе работающих на факультетах прикладной математики, существует мнение о безусловной значимости и научной ценности только чистой математики. В соответствии с этим мнением строятся курсы и пишутся учебники для будущих прикладников.

В ответ на просьбу дать оценку программе по математике, составленной для одного из физических факультетов, Л.Д.Ландау писал: "При всей важности математики для физиков, физика, как известно, нуждается в считающей аналитической математике; математики же, по непонятной мне причине, подсовывают нам в качестве принудительного ассортимента логические упражнения.. Мне кажется, что давно пора обучать физиков тому, что они сами считают нужным для себя, а не спасать их души вопреки их собственному желанию. Мне не хочется дискутировать с достойной средневековой схоластики мыслью, что путем изучения не нужных им вещей люди будто бы научатся логически мыслить. Я категорически считаю, что из математики, изучаемой физиками, должны быть полностью изгнаны всякие теоремы существования, слишком строгие доказательства и т.п."

Одинаковые недостатки в подготовке прикладных иматематиков имеют место, как в России, так и в других странах. Так Мк-Лоун отмечает, что в «проведенном обследовании, охватившем как дипломированных математиков, окончивших университеты Великобритании, так и тех, кому приходится руководить работой математиков, явно ощущалась недооценка моделирования во многих традиционных математических курсах. Такие вопросы, как постановка задач, разработка новых идей и распространение этих идей (или существующих теорий) на новые области приложений, критический анализ выполненных работ, информация о полученных результатах и их интерпретация (особенно для нематематиков) – все это обычно лишь весьма бегло освещается в учебных планах по математике для студентов старших курсов. Между тем названные навыки (наряду с другими) считаются в образовании студентов главными»[21].

Холл подчеркивает, что «целью прикладной математики является математическое осмысление действительности. С другой стороны инженеру-практику, пожалуй, более важно знать, выдержит ли его мост предполагаемую нагрузку, а администратору больницы – найти способ сократить время, затрачиваемое пациентами амбулатории на ожидание, - иными словами, получить конкретные ответы на конкретные вопросы, а не стремиться к более возвышенным целям»[22].

Критическое отношение теоретиков к прикладным работам приводит порой к появлению у некоторых исследователей комплекса "математической неполноценности" и к стремлению "усилить" теоретически свою работу. Это, в ряде случаев, приводит к появлению печатных трудов по прикладным проблемам, искусственно насыщенных математическими выкладками и в результате трудных для чтения, а иногда к самым нелепым наукообразным упражнениям.

К настоящему времени имеется достаточное количество учебников и монографий, в которых излагаются особенности подходов прикладной математики. В работах обобщается опыт прикладных исследований - опыт создания моделей, даются рекомендации по технологическим аспектам моделирования, таким как типовые структуры моделей, этапы моделирования, работа с входной информацией, методы обработки исходов моделирования и пр., а также и аспектам, связанным с организацией взаимодействия исследователя и заказчика, обеспечением внедрения полученных и принятых рекомендаций. Однако, адресуя студентов и специалистов-исследователей к работам, посвященным прикладным математическим исследованиям, следует обратить внимание на то, что описание созданных моделей может порой создать иллюзию легкости получения необходимой модели, организации вычислительного эксперимента и выработки действенных рекомендаций.

---

[21] Математическое моделирование», под ред. Дж.Эндрюс, Р.Мак-Лоун, М., 1979

[22] Там же

Здесь уместно привести следующее замечание относительно содержания научных отчетов:

"К сожалению, результаты всех научных исследований излагаются и обобщаются нам в форме логической реконструкции событий, имеющих целью оправдать смысл полученных результатов. Эта логическая реконструкция имеет мало общего со способом, при помощи которого исследования проводились в действительности. Ни в одном научном отчете вы не найдете описания фальстартов, ошибочных предположений, принятых и затем отвергнутых, разочарований, вызванных ошибками, и внезапных озарений".

И, далее, аналогичное замечание относительно математического образования.

"Большой объем накопленных знаний, впрессованный в учебник или лекционный курс, просто не оставляет времени и места для познания природы и творческих усилий, затраченных на добывание этих знаний. Безупречная логика в организации лекционного материала, совершенство его подачи делают для слушателей незаметными швы и элементы конструкций, они чувствуют себя скорее посетителями храма науки, нежели его обитателями и тем более строителями. Разделы учебного плана, требующие активной работы студентов (упражнения, практикумы), часто носят тренировочный, целевой характер, при котором отсутствует элемент постановки задачи или поиска метода решения, столь необходимый для развития творческого воображения".

3.2. Системный подход - основа методологии системного анализа.

Методология прикладных математических исследований базируется на *методологию системного анализа* и, соответственно, включает определение используемых понятий, общую характеристику проблемы системных исследований и системный подход - наиболее общую часть методологии прикладных исследований, ее основу.

3.2.1. Система. Основные определения.

1. Системная терминология не только несет определенную нагрузку, способствует взаимопониманию исследователей, работающих в различных областях знаний, но и способствует четкому определению подходов и методов системного анализа, являющихся эффективным инструментом анализа и синтеза сложных систем любой природы.

Систему будем далее понимать как конкретный объект исследования.

В общем, понимании *система есть нечто, на что может воздействовать среда, и это нечто реагирует на возмущения, проявляя при этом свои свойства.*

Наиболее удобным является определение системы путем перечисления свойств, признаков, обязательных для любой системы.

Соответственно, *системой* называется совокупность элементов, обладающая следующими признаками:

а) *целостностью* – возможностью выделить систему из оружающей среды, определить ее границы, а также определенной независимостью системы от внешней среды и от других систем;

б) *связностью,* т.е. наличием связей, которые позволяют посредством переходов по ним от элемента к элементу соединить два любых элемента системы,. Простейшими и основными связями являются последовательное и параллельное соединения элементов, а также положительная и отрицательная обратные связи;

в) *функцией* - наличием целей (функций, возможностей), не являющихся простой суммой целей (функций, возможностей) элементов, входящих в систему. Несводимость (степень несводимости) свойств системы к сумме свойств ее элементов называется *эмерджентностью*.

Элемент системы - это часть системы - объект, внутреннее строение которого безотносительно к рассматриваемой системе при определенной цели ее изучения и соответствующем способе разложения.

Упорядоченность отношений, связывающих элементы системы, определяет *структуру системы* как совокупность элементов, функционирующих в соответствии с установившимися между элементами системы связями. Связи определяют важный для системы порядок обмена между элементами *веществом, энергией, информацией*. В сложных системах особое значение для организации управления имеют информационные связи.

Состояние системы - это набор значений основных параметров системы, определяющий характер ее функционирования на определенном временном интервале

Функции системы **-** это ее свойства, приводящие к достижению цели. Функционирование системы проявляется в ее переходе из одного состояния в другое или в сохранении какого-либо состояния в течение определенного периода времени. *Поведение системы* - это ее функционирование во времени. *Целенаправленное (целеустремленное)* поведение ориентировано на достижение системой предпочтительной для нее цели.

В системе, состоящей из связанных между собой, взаимодействующих подсистем, оптимум для всей системы не является функцией (например, суммой) оптимумов подсистем, входящих в систему. Это положение иногда называют теоремой оптимумов системного подхода. Теорема, безусловно, допускает построение противоречивых примеров, когда оптимум системы достигается при достижении оптимума в каждой подсистеме. Подобные примеры, противоречащие основным положениям (теоремам), вполне допустимое явление в прикладной математике.

Большими системами называют системы, включающими значительное число элементов с однотипными связями. *Сложными системами* называют системы с большим числом элементов различного типа и с разнородными связями между ними. Определения эти весьма условны. Более конструктивным является определение большой сложной системы как системы, на верхних уровнях управления которой не нужна и даже вредна вся информация о состоянии элементов нижнего уровня. В кибернетики мера сложности связывается с понятием *разнообразия*. В частности, из принципа разнообразия следует, что анализ систем (процессов, ситуаций), обладающих определенным разнообразием, возможен лишь с использованием управляющих систем, способных порождать, по крайней мере, не меньшее разнообразие.

Системы, содержащие активные элементы (подсистемы), то есть такие элементы, которые имеют возможность самостоятельно принимать решения относительно своего состояния, называются *организационными системами* (*оргсистемами, организациями*). Таким образом, в оргсистемах свойством целеустремленности обладает как вся система, так и отдельные ее элементы. Этим организация отличается от системы, называемой *организмом*. Между отдельными элементами (органами) организма существует разделение труда (функций), но только организм в целом может быть целеустремленным. Одной из основных задач управления оргсистемами является поиск целенаправленных воздействий на систему, приводящих к желаемому результату.

Системы бывают *открытыми и закрытыми*. Закрытые системы имеют четко очерченные, жесткие границы. Для их функционирования необходима защита от воздействия среды. Открытые системы обмениваются с окружающей средой энергией, информацией и веществом. Обмен с внешней средой, способность приспосабливаться к внешним условиям является для открытых систем непременным условием их существования. Все организации являются открытыми системами.

2. Понятие "структура системы" играет при анализе и синтезе систем ключевую роль, причем существенное значение имеет следующий тезис (закон) кибернетики.

"Существуют *законы природы*, которым подчиняется поведение *больших многосвязных систем любого характера:* биологических, технических, социальных и экономических. Эти законы относятся к процессам *саморегуляции и самоорганизации* и выражают именно те "руководящие принципы", которые определяют *рост и устойчивость, обучение и регулирование, адаптацию и эволюцию систем.* На первый взгляд, совершенно различные системы, с точки зрения кибернетики, совершенно одинаковы, поскольку они демонстрируют так называемое *жизнеспособное поведение*, целью которого является выживание.

Подобное поведение системы определяется не столько специфическими процессами, происходящими в ней самой, или теми значениями, которые принимают даже важнейшие из её параметров, но, в первую очередь, *её динамической структурой, как способом организации взаимосвязи отдельных частей единого целого.* Важнейшими элементами структуры системы являются *контуры обратных связей и механизмы условных вероятностей,* которые и обеспечивают саморегулирование, самообучение и самоорганизацию системы. Основной результат деятельности системы -

это её *исходы*. Для того, чтобы исходы отвечали нашим целям, необходимо соответствующим образом организовать структуру системы". То есть, для получения требуемых исходов необходимо уметь воздействовать на обратные связи и механизмы условных вероятностей, а также уметь оценивать результаты этих воздействий.

Условием успешного результата подобных воздействий является учёт следующего тезиса (закона) кибернетики.

«Системе с определённой структурой свойствен *набор (интервал) состояний равновесия.* Под влиянием внешних воздействий система может перейти в одно из своих возможных состояний или разрушиться**».**

3. Система в своем развитии проходит несколько этапов: возникновение, становление, преобразование.

Возникновение - сложный противоречивый процесс, связанный с понятием "нового". Этот процесс, в свою очередь, можно разделить на два этапа: 1) скрытый - появление новых элементов и новых связей в рамках старого; 2) явный, когда накопившиеся новые факторы приводят к скачку - появлению нового качества.

Процесс *становления* связан с дальнейшим количественным увеличением качественно тождественных множеств элементов системы и с появлением у системы новых качеств.

Противоречия между качественно тождественными элементами является одним из источников развития системы. Следствие этого противоречия - стремление элементов разойтись в пространстве. С другой стороны существуют системообразующие факторы, которые не дают системе распасться. К тому же существует граница системы, выход за которую может быть губительным для элементов системы и для системы в целом. Кроме того, на каждую систему действуют другие системы, препятствующие расширению системных границ, Все это определяет целостность как специфическое свойство зрелой системы.

Приобретаемые системой новые функциональные качества включают в себя специфические свойства, приобретенные системой в процессе ее общения с внешней средой. Наиболее перспективными оказываются те элементы системы, функции которых соответствуют потребностям существования системы в конкретной внешней среде. Система в целом становится *специализированной*. Она может успешно функционировать только в той среде, в которой она сформировалась. Всякий переход системы в другую среду неизбежно вызывает ее *преобразование.*

Система в период зрелости внутренне противоречива, вследствие двойственности своего существования как системы, завершающей одну форму движения и являющейся носителем более высокой формы движения. Даже при благоприятных внешних условиях внутренние противоречия приводят систему в состояние *преобразования* - неизбежному этапу развития системы. Внешними причинами преобразования системы являются: изменения внешней среды; проникновение в систему чуждых элементов, воздействующих на структуру системы. Внутренние причины:

ограниченность пространства развития и обострение противоречий между элементами системы; накопление ошибок при развитии системы (мутации в живых организмах); прекращение воспроизводства элементов, составляющих систему.

Преобразование системы может привести как к гибели системы, так и к возникновению качественно иной системы, причем в последнем случае степень организованности новой системы может быть равной или более высокой, чем степень организованности преобразуемой системы. Таким образом, при определенных условиях возможен скачкообразный переход системы на новый более высокий (или более низкий) уровень упорядоченности. Причём переход системы к различным свойственным ей состояниям, а также разрушение системы могут быть результатом как достаточно сильных внешних воздействий, так и относительно слабых флюктуаций длительно существующих или усиливающихся за счет положительных обратных связей. Переход системы на новый уровень организованности в определенных ситуациях представляет собой случайный процесс выбора системой одного из возможных путей эволюции. Здесь вновь нужно подчеркнуть слово "возможных", т.е. разумно говорить о создании условий перехода системы в одно из свойственных ей состояний.

Возможны два крайних варианта изменения структуры системы. Назовем их условно *революционный* и *эволюционный*. При революционном преобразовании предполагается, что созданию новой организации, новой структуре должна предшествовать *насильственная ломка* структуры старой. Обычно после такой насильственной ломки система переходит на более низкий уровень упорядоченности, формирование новой структуры затягивается на длительный, порой неопределенный, срок. При эволюционном преобразовании новые отношения формируются в рамках существующей структуры, внутри системы появляются новые связи, новые тенденций ее развития. При накоплении количественных изменений возможен и скачкообразный, и в этом смысле революционный, переход системы в новое равновесное состояние - к новой структуре, к которой система *внутренне готова*. В этом случае суть революционного преобразования сводится к уничтожению отдльных элементов, препятствующих становлению новой структуры. В социально-экономических системах такими элементами являются обычно органы управления.

4. Если предположить, что состояние системы может быть представлено набором из ***n*** параметров, то *каждому состоянию системы будет соответствовать точка в n-мерном пространстве состояний системы*, а функционирование системы проявится в перемещении этой точки по некоторой траектории в пространстве состояний. В общем случае достижение желаемого состояния возможно по нескольким траекториям, множество которых зависит от ограничений, накладываемых на систему, в том числе внешней средой. Эти ограничения определяют область допустимых траекторий. Предпочтительность траектории определяется

оценкой качества траектории. Для определения предпочтительной траектории из числа допустимых вводится критерий качества функционирования системы - в общем случае (формально) в виде некоторых целевых (критериальных) функций (функционалов, отношений). На предпочтительной (оптимальной) траектории целевые функции достигают экстремальных значений. Процесс выбора лучшей траектории хорошо описывается в терминах вариационного исчисления. Целенаправленное вмешательство в поведение системы, обеспечивающее выбор системой оптимальной траектории, называется *управлением.*

5. В социально-экономических системах (организационных системах) выбор оптимального решения затруднен целым рядом трудностей и ограничений, в том числе большими затратами для получения информации, необходимой для получения оптимального решения, и возможностями человека по обработки информации.

Значение когнитивных ограничений сформулировано в *теории неполной рациональности* (Г.Саймон), к которой приведены альтернативные интерпретации рационального повеления, позволяющие четко сформулировать условия, при которых рациональное поведение возможно.

Теория неполной рациональности позволяет скорректировать понимание рациональности как нормы следующим образом.

Во-первых, степень рациональности зависит от процедуры принятия решения. Чем более рационален индивид, тем сложнее процедура, тем большее число факторов и соответствующей информации должно быть принято во внимание. В случае неполной рациональности конечный результат зависит от характера алгоритма, используемого для выработки решения, т.е. результат не однозначен. Ввод термина *процедурная рациональность* подчеркивает зависимость результата от избранной процедуры принятия решения. Важность этих процедур требует усложнения математического аппарата моделирования экономических взаимодействий.

Во-вторых, существование множества процедур принятия решения приводит к идеи множества «рациональностей», наиболее ярко выраженной в подходе экономики соглашений.

Таким образом, в теории неполной рациональности принцип «оптимальности» заменен - *принцип «удовлетворительности».* Вследствие реальных ограничений ищется не «оптимальное» решение, а решение, дающее *удовлетворительное решение*, в том смысле, в котором это может быть сформулировано в рамках обеспечения достижения поставленных целей (в рамках постановки задачи исследования).

Поведение лиц, принимающих решение, зависит от двух переменных: степени жесткости когнитивных ограничений и степени полноты информации (величиной издержек на поиск информации). Рациональность достигается, в частности, если когнитивные ограничения и издержки на информацию взаимно соответствуют.

Изложенные в настоящем разделе понятия, характеризующие систему, ее структуру определяют основные положения, обуславливающие разработку эффективного управления системой.

При *эффективном управлении* предполагается:

1) рассмотрение объекта как некоторой целостной системы, функционирующей в определенной среде;

2) наличие определенной информации о состояннии окружающей среды и прогноза относительно динамики ее изменения;

3) наличие определенной информации об основных характеристиках системы, прежде всего о закономерностях поведения системы в различных условиях, связях между элементами системы, реакции системы на управляющие воздействия;

4) определение стратегии развития системы, исходя из целей ее существования и функционирования;

5) обоснование эффективности достижения поставленной цели, т.е. выбор критерия для оценки качества развития системы;

6) обеспечение реализации решения по управлению системой, в том числе нличие обратных связей, обеспечивающих эффетивный контроль а функционирования системы.

Перечисленные положения связаны с использованием моделей для исследования систем, в том числе для обоснования принимаемых управленческих решений на основе «модельных экспериментов» с учетом технических, технологических, социальных и пр. факторов.

3.2.2. Принцип системности.

Принцип системности можно воспринимать в качестве философского принципа, выполняющего как мировоззренческие, так и методологические функции. Принцип системности предполагает представление об объекте любой природы как о совокупности элементов, находящихся в определенном взаимодействии между собой и с окружающим миром, а также понимание системной природы знаний. Системные представления о природе, ее объектах и знаниях о них имели место еще в античной философии (Платон, Аристотель).

Вытекающий из принципа системности ***системный подход*** является общей методологией системных исследований, которая может быть, в свою очередь, представлена в виде набора методологических подходов (принципов) к исследованию системы.

В самом общем виде *системный подход* - это рассмотрение системы любой степени сложности, как состоящей из *отдельных связанных между собой определенными отношениями частей,* находящейся *во взаимодействии с окружающей средой* и находящейся *в непрерывном развитии.*

Общие положения системного подхода представляются (конкретизируются) в виде перечня принципов (подходов), применяемых при исследовании систем. Перечислим некоторые из этих принципов.

Непосредственно из определения системного подхода вытекают три основных принципа.

1) *Принцип единства*: совместное рассмотрение системы как единого целого и как совокупности частей (элементов).

Целое в системе (процессе) обладает свойством, которого нет ни у одной из частей. Целое отражает свойства частей, но и части отражают свойства целого. Неверно утверждение, что целое сумма частей, или что целое сложней частей — оно просто другое.

При объединении частей в целое появляются новые законы, перестраиваются (частично или полностью) отношения между частями. Новые законы могут прекратить действие части законов, действующих ранее до объединения, и взаимодействовать с другой частью «старых» законов. Целостность - специфическое свойство зрелой системы.

2) *Принцип связности*: рассмотрение любого элемента системы совместно с его связями с другими элементами и с окружающей средой. Успешное функционирования системы зависит от адекватного взаимодействия ее элементов. Особое внимание полезно уделять *по парному взаимодействию,* научиться оценивать это взаимодействие и эффективно им управлять. Предлагается[23] ввести понятие *«контактирующая (стыкующаяся) пара», и,* соответственно, выделить *«контактику»,* как науку, изучающую взаимодействее пар элементов системы.

Понятие, близкое по содержанию «стыкующимся парам», распространено в биологии, физики, химии и ряде других науках. Необходимо более последовательное использование этого понятия и в экономике.

Способность одних элементов контактировать с другими не одинакова. Анализировать следует как совместимость отдельных элементов системы между собой, так и возможность внутрисистемных элементов «принять» условия внешней среды. Попытки конструировать системы без предварительного анализа проблем взаимной совместимости элементов системы и совместимости системы с внешней средой приводят к появлению неэффективных или даже нежизнеспособных систем. Изначальная внутренняя несовместимость отдельных элементов структуры является зачастую первопричиной неудачи при создании системы или причиной неудовлетворительного функционирования существующей системы.

3) *Принцип развития*: учёт изменяемости системы, её способности к развитию, замене частей, накапливанию информации. При этом учитывается и динамика внешней среды, изменение взаимодействия системы с внешней средой. Неучет динамики изменения внешней среды и динамики возможного развития элементов, составляющих систему, неизбежно приводит к созданию систем, не имеющих перспектив (будущего).

Следующие принципы системного подхода определяют рациональный, целенаправленный подход к рассмотрению структуры и функционирования

---

[23] А.С.Астахов. «О преодолении разрыва между теорией и практикой моделирования инвестиционных решений». Экономика и математические методы, 2005, том 41, №3, с. 122-127

системы. Некоторые из приведенных далее принципов в первую очередь относяися к организацтонным системам.

4) *Принцип конечной (глобальной) цели*: - это особая ответственность за выбор глобальной цели. Вся деятельность системы должна быть, в конечном счете, подчинена достижению ее глобальной цели, которая, в свою очередь, должна быть подчинена глобальной цели системы более высокого уровня.

Цель смстемы (организации) - определяется как состояние системы, которое необходимо, желательно достичь к определенному моменту времени, затратив на это определенные, ограниченные в общем случае ресурсы. Без ясного понимания цели любое решение может оказаться просто бессмысленным.

Норма и цели. Цель не будет понята и успешно достигнута, если она не соответствует *институтам общества*, т.е. формальным и неформальным *нормам*, существующим в обществе

Неопределенность выбора. Неопределенность выбора цели связана с наличием в сложных системах множества целей и множества критериев, а также возможно в первую очередь с неопределенностью динамики внешней среды. Неопределенность в предсказании состояния внешней среды следует обязательно учитывать при формировании совокупности целей и разработке способов их достижения. Неопределенность выбора способствует следованию индивидов *принципу достаточной рациональности* Саймона.

Цель и ресурсы. Выбор целей зависит от материальных, финансовых и кадровых ресурсов организации. Сравнение ресурсов, необходимых для выполнения целей, с имеющимися ресурсами приводит к выделению множества достижимых, обеспеченных ресурсами целей, из которого затем и выбирается в соответствии с принятыми критерияи цель фнкционирования системы.

Цели и критерии. Выбор каждой цели непосредственно определяет содержательную сущность критерия ее достижения.

Цель и средство достижения цели. Выбор целей производится одновременно с выбором средств достижения целей.

Цели системы порой заменятся средством достижения цели. Превращение средств в цели - болезнь века. Иногда подобная замена проводится ради достижения отдельными лицами или группировками своих целей..

Цели и ценности. На формирование целей влияют субъективные представления о ценностях целей. Каждый индивид имеет свою систему ценностей, которая может не совпадать с системой ценности организации или общества. Система ценностей общества выражается через общественное мнение и отражает выработанное обществом на определенном историческом этапе представление о глобальных целях развития человека. Система ценностей формируется опытом человека и историческим опытом общества.

Системы ценностей базируются на этику и мораль человеческого общества на каждом историческом этапе его развития.

Известны следующие этические системы:

Стоицизм, согласно которому в практической деятельности следует при достижении желаемого исходить из возможностей и реальных ограничений внешней среды.

В *казуистической теории* основанием для выбора решений является ссылка на авторитет, на подход к выбору целей в аналогичных задачах в прошлом.

В основе *утилитаризма* - оценка всех явлений с точки зрения их возможности служить средством для достижения какой-либо цели. Наибольший интерес уделяется проблеме измерения индивидуальных предпочтений и их объединению в единую меру.

Анализ целей. При выборе совокупности целей необходимо предусмотреть ряд оценок, в том числе:

(a) проверку целей на реализуемость, выявление препятствий на пути достижения целей: экономических, технических, социальных, юридических и др.;

(b) оценку связей целей нижнего уровня иерархии с целями более высокого уровня;

(c) оценку непротиворечивости (в общем случае характера и степени противоречивости) целей на каждом уровне;

(d) оценку семантической точности формулировок целей, понятных всем индивидам, имеющим отношение к цели; использование принятых определений и обозначений.

5) *Принцип функциональности*: совместное рассмотрение структуры системы и функций с приоритетом функций над структурой - изменение функций влечет изменение структуры.

Цели определяют задачи, решение которых необходимо для достижения цели. Задачи определяют функции, обеспечивающие решение задач. В оргсистемах структура создается после установления набора функций и реализуется в виде совокупности персонала, методов, алгоритмов и технических устройств различного назначения. При появлении новых задач и, соответственно, функций может оказаться необходимой корректировка структуры. После создания системы возможно, при наличии квалифицированного персонала, уточнение структуры системы и отдельных функций в рамках существующих целей и задач, т.е. возможно обратное влияние структуры на функции.

Зачастую структура организации создается до выяснения целей и задач системы. В результате возникает параллелизм в работе органов управления, систематические попытки улучшить работу организации путем изменения ее структуры.

6) *Принцип децентрализации*: сочетание децентрализации и централизации.

Сложные системы с полной централизацией медленнее приспосабливаются к изменениям окружающей среды. Информационные каналы в таких системах оказываются перегруженными, что приводит к запаздыванию в обработке информации, появлению ошибок и, в конечном счете, к снижению качества управления. Высокая степень централизации также приводит к отсутствию инициативы и появлению безответственности на нижних уровнях управленческой иерархии - снижение "внутренней активности" системы.

При высокой степени децентрализации затрудняется согласование решений, их направленности на достижении глобальной цели. Для обеспечения целенаправленной деятельности сильно децентрализованной системы необходимо наличие в системе специальных механизмов регуляции, не позволяющих отдельным элементам системы уклоняться в своем поведении от основной цели системы. Все это в значительной мере зависит от вида и задач системы и, особенно, от условий ее функционирования.

Оптимальное сочетание централизации и децентрализации обусловлено выполнением следующих положений:

- на нижние уровни иерархии следует передавать все задачи, решение которых на этих уровнях возможно, освободив высшие уровни иерархии для решения стратегических задач;

- должна быть разработана и принята система делегирования полномочий для всех уровней иерархии управления;

- должны существовать механизмы контроля, исключающие принятие на нижних уровнях иерархии решений, противоречащих достижению системой глобальных целей.

Реализация оптимального уровня децентрализации зачастую затруднено из-за отсутствия квалифицированного персонала. Возможно, это утверждение находится вне формальной постановки вопроса. Однако в реальных ситуациях низкая квалифицированность персонала явление не редкое, и не учитывать это в прикладных исследованиях не допустимо.

Если принятое на верхнем уровне решение затем конкретизируется (распараллеливается) на нижних уровнях- это не является децентрализацией управления.

7) *Принцип модульного построения:* выделение модулей и рассмотрение системы как совокупности модулей.

Модулем называется группа элементов системы, описываемая только своим входом и выходом. Разбиение системы на взаимодействующие модули (подсистемы) зависит от цели исследования и может иметь различную основу, в том числе может иметь материальную (вещественную), функциональную, алгоритмическую, информационную и др. основу. Примером систем, у которых при разбиение на подсистемы вещественная, функциональная и информационные основы слиты, являются системы управления оргсистемами. Разбитие системы на модули способствует более эффективной организации анализа и синтеза систем, так как оказывается возможным, абстрагируясь от второстепенных деталей, уяснить суть основных соотношений, существующих в системе и определяющих исходы системы.

Вместо термина модуль зачастую используются термины "блок", "подсистема" и др.

8) *Принцип иерархии*: полезно введение иерархии частей и (или) их ранжирование. Иерархия свойственна всем сложным системам. Иерархия в структурах оргсистем (в оргструктурах) неоднозначно связана с характером управления в системе, степенью децентрализации управления. В линейных (древовидных иерархических) оргструктурах реализуется идея полной централизации управления. В то же время, в сложных иерархически построенных системах может быть реализована любая степень децентрализации.

9) *Принцип свертки информации*: информация свертывается, укрупняется при движении по ступеням иерархии снизу вверх.

Информационные средства управленческих структур на каждом уровне иерархии должны обеспечить решение всего комплекса управленческих задач, определенных для соответствующего уровня: анализ ситуации, планирование и принятие решения, контроль исполнения решения, выявление и предупреждение конфликтных ситуаций. Качество информации определяется тем, насколько она способствует наилучшему, в каком либо смысле, решению задач управления. Для того, чтобы на верхнем уровне иерархии успешно решались стратегические задачи, необходима информация, достаточно полно описывающая те параметры ситуации, которые определяют результаты решения, и "не замусоренная" второстепенными подробностями, существенно не влияющими на решение.

В рамках каждой сложной системы, в том числе в масштабе страны, формируется информационная среда, которая включает функционирующие во взаимодействии технические средства, технологии, квалифицированный персонал, систему документирования, культуру управления. В России в 90-х годах существенным недостатком, снижающим качество управления на всех уровнях, являлось медленное и беспорядочное формирование единого информационного пространства, и прежде всего информационной сети органов власти.

Управленческая информация характеризуется *объемом, достоверностью, ценностью, степенью открытости.*

По объему информация может быть достаточной или недостаточной для принятия решения с необходимой степенью обоснованности. Информация также может быть избыточной, содержащей сведения ненужные для выработки решения, а, порой, даже мешающие принятию решения.

Достоверность можно определить процентом содержащейся в информации достоверных данных - в общем случае это - вероятностная характеристика..

По степени открытости информация делится на секретную, конфиденциальную (для служебного пользования) и публичную (полностью открытую).

В качестве показателя качества информации в управленческих структурах можно принять $k_{ии} = \delta P / \delta H$, где δP - повышение качества (эффективности) управления при получении некоторого объема информации; δH - затраты на приобретение этого объема информации.

Из приведенного показателя непосредственно не следуют известные показатели оценки качества информационных систем.

10) *Принцип неопределенности*. Принцип неопределённости является одним из основных принципов системного подхода. Достаточно типичны случаи, когда задачу приходится решать при неполных или нечётких знаниях относительно исследуемой системы. Это имеет место вследствие как ограниченных возможностей науки на данном уровне ее развития, так и принципиальной ограниченности человеческого познания, а, зачастую, просто оказывается невозможным получить достоверную информацию о будущем, предвидеть все возможные варианты изменения окружающей обстановки. В лучшем случае, могут быть получены вероятностные оценки прогнозируемых ситуаций, если эти оценки объективно существуют.

Учёт неопределенностей и случайностей возможен методом гарантийного результата, с помощью статистических оценок (если условия для этого существуют), а также путем совершенствования структур системы, например, вводом дублирования, использованием промежуточных оценок, расширением совокупности целей и проч. Во всех случаях неполноты знаний о предмете исследования, нечёткой или стохастической входной информации будут и результаты исследований носить нечёткий или вероятностный характер, а принятые на основании этих исследований решения приведут к неоднозначным последствиям. В случае нечёткой (по своей природе) или неполной (при ограниченных возможностях исследователя) информации как раз очень важно учитывать законы кибернетики об устойчивых состояниях и устойчивых траекториях системы. Необходимо стремиться выявить и оценить все возможные, в том числе кажущиеся маловероятными, последствия принимаемых решений, хотя бы на интуитивном уровне, а также предусмотреть обратные связи, которые обеспечат своевременное вскрытие и локализацию нежелательного развития событий. В технических науках эти положения очевидны. При содании и исследовании социально-экономических процессов эти положения зачастую игнорируются, что порой приводит к невосполнимым потерям.

Как следствие необходимости принятия решений в условиях неопределенности является использование в системном анализе так называемых рациональных рассуждений, особенности которых рассмотрены далее в п. 3.3.8.

В зависимости от цели исследования рассматриваются также другие принципы, имеющие более узкую область применения. Приведем еще два принципа, имеющих отношение непосредственно к организации исследований.

11) *Принцип полномочности*: исследователь должен иметь способность, возможность и право исследовать проблему. Принцип полномочности очень важен при исследовании сложных, в том числе социально-экономических систем .

12) *Принцип организованности*: решения, выводы, действия должны соответствовать степени детализации системы, ее определенности, организованности. Результаты управления системой, в которой команды не исполняются, не предсказуемы.

Перечисленные принципы справедливы равным образом для задач анализа и синтеза. В моделях систем они должны быть конкретизированы в зависимости от существа системы и решаемой задачи. Представление о том, *"что этот принцип означает здесь, в чем его конкретное содержание"* приведет к более четкому осмысливанию постановки задачи, сути проводимого исследования.

Системный подход способствует развитию системного мышления, более полному и всестороннему учету всех факторов, определяющих поведение системы. Пренебрежение принципами системного подхода приводит к принятию безграмотных решений порой с непоправимыми последствиями, всё более губительными по мере того, как у лиц, принимающих решение, появляются большие возможности.

Примеров подобных решений и соответствующих последствий предостаточно.

3.2.3. Основные закономерности организации материального мира[24]

При моделировании систем, являющихся фрагментами реального мира, необходимо опираться на законы функционирования этого мира..

Необходимо учить – и учить на самом современном уровне, верному *пониманию* тех явлений природы или человеческого общества, которые будущий работник собирается исследовать или использовать в рамках своей профессии. Фундаментальная подготовка специалистов, должна быть активной, способствующей выработки навыков применения общих законов для анализа иследуемых процессов.

. «Математики, не затрудняющие себя изучением законов реального мира, попадают в на редкость комфортабельные условия полнейшей безответственности, ибо ни одну из их абстрактных моделей - даже если она нарушает законы природы – отвергнуть нельзя. И это позволяет безбедно существовать тем, кто не в состоянии дать никакого полезного конечного продукта, а отделывается «электронными» полуфабрикатами, суррогатами и просто обещаниями решить поставленную задачу в будущем – когда появятся еще более крупные компьютеры»[25].

---

[24] Настоящий раздел написан на основе работ Н.Н.Моисеева

[25] И.Радкевич. «О компьютере - без дифирамбов» // ЛГ. 17 сентября 1986 г.

Проблема описания (моделирования) материального мира сводится, прежде всего, к описанию *механизмов отбора*, лежащих в основе причинности всех реальных движений материи, сужению множества виртуальных (мыслимых, согласуемых со связями) движений, отбору реальных движений из числа виртуальных.

Различают три уровня развития материи: уровень неживой природы; биологический уровень; общественный уровень. Переход от одного уровня развития материи к другому, более высокому, сопровождается появлением новых отношений, качественным усложнением структуры систем.

А. Уровень неживой природы

Общим для материального мира является *законы сохранения энергии***.** Если какое либо движение не подчиняется этим законам, его следует из рассмотрения исключить. Первый из законов сохранения энергии - *закон сохранения количества движения* - второй закон Ньютона.

Законы сохранения энергии дают определенные правила выбора реального движения из числа виртуальных и поэтому эквивалентны вариационным принципам и могут рассматриваться как следствие последних. Вариационные принципы уточняются по мере развития человеческих знаний.

Для создания моделей реальных систем кроме законов сохранения необходимы дополнительные эмпирические соотношения, связывающие отдельные параметры. Эти дополнительные ограничения не противоречат законам сохранения, но сужают область допустимых траекторий движения материи.

К числу таких дополнительных ограничений относится *второй закон термодинамики,* согласно которому следует, что на любой реальной траектории замкнутой системы производная от функционала, называемого *энтропией***,** не может быть отрицательной: $\mathbf{dH/dt \geq 0}$. Принцип неубывания энтропии имеет также глубокий философский смысл.

Еще два механизма отбора (принципа) вместе с законами сохранения и принципом неубывания энтропии составляют основу организации неживой природы. *Принцип минимума диссипации энергии***,** который гласит, что среди виртуальных движений, удовлетворяющих законам сохранения, реализуются лишь те, для которых диссипация энергии минимальна. Согласно *принципу устойчивости* реализуются лишь устойчивые формы движения/

Взаимодействие двух последних принципов происходит на основе закон единства и борьбы противоположностей. Реализуемое движение в определенных условиях является компромиссом этих принципов. Так, например, при больших скоростях ламинарное течение жидкости в трубке сменяется турбулентным, не устойчивым, но минимизирующим потери энергии.

Б. Биологический уровень организации материи

Для биологического уровня развития материи справедливы закономерности неживой материи, хотя в их проявлении имеются определенные особенности, в то же время появляются новые свойственные только живым организмам законы и тенденции развития. Первое, что нужно при изучении процессов, протекающих в живой материи, это ввести понятия: *цель, информация, обратная связь, гомеостатиз***.**

Всем живым организмам свойственны *целенаправленные действия* различной сложности и природы. То есть *общей закономерностью у сознательного целеполагания и несознательного функционирования биологической самоуправляемой системы любой природы является направленность к достижению определенного результата.* Здесь не предполагается тождественность разумных, основанных на прогнозе, последствий действий человека и рефлексивных действий живых организмов, обладающих генетической памятью. Хотя границу порой провести трудно.

Когда появляется цель, тогда для отбора движения возникают *управление* и *отрицательная обратная связь***.**

Управление определяется целью. Отрицательная обратная связь предполагает получение управляющим органом по цепи обратной связи информации о положении системы и о выполнении системой указаний органа управления. Эта информация используется для выработки (корректировки) команд управления. При наличии отрицательной обратной связи реализуется управление по "ошибке" - разности между требуемыми и реализованными (достигнутыми) значениями параметров системы. *Обратная* связь не выводится из законов сохранения, она порождается *целенаправленностью действий. Принцип обратной связи* лежит в *основе всех эволюционных процессов*, так как в результате действия обратной связи выделяются те индивиды, поведение которых наилучшим образом обеспечивает их стабильное существование при изменении внешних условий - это и есть механизм отбора. В неживой природе отрицательная обратная связь является созданием человека - живая материя порождает саму себя и целенаправленно использует неживую материю.

Из обратной связи непосредственно следует *принцип гомеостатиза (гомеостаза).* Согласно принципу гомеостатиза живой организм существует внутри *гомеостаза (области гомеостаза)* **-** области пространства параметров внешней среды, в пределах которой обеспечивается (возможна) жизнедеятельность организма. Границы области гомеостатиза - это множество критических значений параметров внешней среды, выделяющих область, за пределами которой существование организма не возможно. Механизмы обратной связи приводят к таким реакциям организма, которые отдаляют организм от границ области гомеостатиза, либо способствуют перестройки организма, расширяющей эту область, либо воздействуют на внешнюю среду, изменяя ее в своих интересах. Принцип гомеостаза может быть сформулирован и так. *Положение организма относительно границы гомеостаза оказывает решающее влияние на состояние организма.*

В живой природе понятие "устойчивость" заменяется *законом адаптации.* Живые организмы адаптируются к условиям внешней среды и адаптируют внешнюю среду, обеспечивая гомеостаз биологических макросистем.

Обратные связи определяют *функции поведения организма***.** Чтобы организм определил свое положение относительно границ гомеостатиза и выбрал требуемые действия, необходима информация о близости организма к границам. Для этой цели организм должен обладать *датчиками (рецепторами) информации и механизмами передачи и обработки информации.* Переработать информацию может только живой организм или механизм, построенный человеком.

Первоначально управляющие воздействия носили *рефлексивный* характер. По мере эволюции живых организмов связь между внешними воздействиями и решениями усложнялась, и нервная система перестала быть только системой рефлексного типа. Появилась способность прогноза, способность угадывания. Нервная система стала важным элементом самоорганизации. Когда появились смертные организмы - эукариты, возник *генетический код* как обеспечение индивидуальной жизни путем реализации принципа наследственности. Возникновение *генетической памяти* стимулировало эволюционный процесс. По-видимому, здесь также имел место отбор - живые существа с другими средствами передачи наследственности не выжили.

Живой организм всегда открытая система - ему свойственен *метаболизм* - обмен с внешней средой энергией и веществом. Одно из определяющих черт живого организма, выведенное эмпирически, - так направлять эволюционный процесс, чтобы максимально использовать результаты этого обмена. Это реализуется положительными обратными связями, которые, в сущности, противоречат принципу гомеостатиза. Необходим компромисс - разрешение противоречия между *стремлением к стабильности (сохранению гомеостатиза) и тенденцией поиска новых более рациональных способов освоения внешних энергии и вещества.* Разрешение этого противоречия - важная особенность эволюционных процессов живой материи.

Итак, информация в цепях обратных связей о положении организма относительно границ гомеостаза и о новых более рациональных путях освоения энергии и вещества после соответствующей обработки служит основанием для принятия решения.

Таким образом*, задача биосистемы - целенаправленная эволюция с целью сохранения собственной стабильности, удаления от границ гомеостаза*. В то же время совершенствование биосистемы заключается *в расширении области гомеостаза и в улучшении качества информации о границах этой области. Биосистема воздействует на окружающую среду, изменяя ее в своих интересах***.**

.Самостоятельная весьма важная линия эволюции живой природы, самоорганизация, а также способность к кооперации. Кооперативность совместно с внутривидовой борьбой (снова единство противоположностей) - это две стороны единого процесса самоорганизации. Вначале кооперация - это объединение, чтобы совместно выжить. Далее возникли объединения организмов - своеобразный организм. Появились биогеоценозы**.**

Биогеоценоз - это такая самостоятельная экосистема, к которой внутренние связи значительно сильнее внешних. Комбинация биогеоценозов - тоже биогеоценоз. Для биогеоценоза характерна иерархия, на нижних уровнях которой располагаются элементарные биогеоценозы. Различные организмы и популяции, входящие в биогеоценоз, имеют свои цели, свои области гомеостаза, причем цели и функции систем более высокого уровня (например, цели популяций) не выводятся из целей отдельных организмов, а порой просто противоречат им. В моделях популяций следует учитывать *верхнюю петлю обратной связи,* отражающую коллективное поведение и определяющую реакцию популяции в целом на ее положение относительно границы гомеостаза. Биогеоценоз - это противоречивое единство различных организмов. Спектр противоречий весьма широк и во многом определяет механизмы отбора. Не исключено, что обеспечение гомеостатиза одних элементов биогеоценоза приводит к разрушению гомеостатиза других элементов. Существует верхняя петля обратной связи всего биогеоценоза, понять которую обычно трудно.

В. Особенности эволюции общественных систем (особенности антропогенеза)

Новое качественное усложнение объекта исследования естественно приводит к расширению принципов, изменению действия общих закономерностей. Сложность процессов, протекающих в общественной природе, неизбежно ведет к необходимости при изучении этих процессов сочетания формальных математических методов и неформального мышления. Описание этих процессов предполагает введение представлений о переплетающихся между собой целей, обратных связей и потоках информации.

Естественный отбор в живой природе определил два результата эволюции организмов.

Первое направление эволюции привело к слиянию отдельных организмов в общий организм так, что самостоятельное существование отдельного организма стало бессмысленным (например, муравейник). Этот путь эволюции оказался тупиковым.

Второе направление эволюции - развитие индивида, его способности к выбору лучшего движения, к повышению гомеостатической стабильности. Индивидуальное развитие привело к возникновению все более интеллектуальных форм живой материи, в которых развитие сообщества предполагает развитие индивидуальностей у каждого индивида.

Эволюция живого организма создавала все новые и новые элементы самопознания. Переход к нерефлексивным формам организации явил собою некоторый скачок эволюционного развития. Это было началом периода антропогенеза, занявшего всего несколько миллионов лет.

Трудовые навыки ускорили процесс совершенствования головного мозга. По мере того как трудовые навыки, способности к целенаправленной деятельности стали передаваться от индивида к индивиду, от одного поколения к другому, все большее значение приобретали *коллективная память* и *учителя общества*. Для эффективного использования орудий и средств труда мало генетической памяти. Опыт прежних поколений может в полной мере передаваться через отдельных субъектов - учителей. Память и наследственность не одно и то же. Память - это конкретный механизм кодирования, хранения и передачи информации.

Целенаправленные действия наших предков со временем начали управляться *интеллектом.* Появились большие возможности реализации общих целей, появилось понятие моральных основ функционирования общества. Стадо человекообразных (неантропов), которое могло лучше сохранить носителей памяти и, следовательно, совершенствовать накопленные знания и навыки, создать систему запретов, ограничивающих внутривидовую борьбу, и брать под защиту всех членов общества, приобрела преимущества, которые полностью компенсировали замедление биологического совершенствования индивидов.

Действительно, *эволюция человека* как биологического вида, в основном, прекратилась. На смену пришла *эволюция общественных отношений*, общественных групп, состоящих из индивидов, имеющих свой гомеостатиз и входящих в группу с общим гомеостатизом. Успеху в отборе способствовало появление *коллективного разума*. Это последний этап антропогенеза - появление *социальных систем*.

Особенностью моделей общественных процессов проявляется в том, что в обществе осуществлен *переход от эволюции индивида к эволюции общественных групп,* состоящих из индивидов, имеющих свой гомеостазис и входящих в группу с общим гомеостазисом.

Для социального уровня организации материи ранжирование функционалов, формирование их свертки является прерогативой интеллекта. Участие интеллекта убыстряют поиск оптимума. Новое, проявившееся в общественных системах - это прогноз состояния внешней среды. Качество этих прогнозов определяет эффективность управления.

В общественных отношениях закон сохранения энергии и материи проявляется в *производственной деятельности*. В экономике этот закон проявляется в балансных соотношениях. Функции поведения, как реакция на внешние воздействия, обеспечивает замыкание модели. Для общественных процессов характерны многокритериальность и неоднозначность реакций (функций поведения) в цепях обратных связей. В функциях поведения учитываются гипотезы относительно прогнозов последствий решений. Те системы, где функции поведения определены однозначно, называются рефлексными.

Особенностью является также то, что имеет место *разная информированность* и *разные интеллекты*, что необходимо изучать не только цели, но и логические цепочки, объясняющие, как эти цели достигаются. Изменчивость определяется различием в целях, оценке обстановки, путях достижения цели. Стохастичность реализуется через субъективный подход. В результате столкновения интересов возникают неопределенности, условия проявления бифуркационных механизмов, скачкообразное ускорение эволюции.

По мере развития общества усиливаются его внутренние противоречия и рассогласования, увеличиваются численно и усложняются контура обратных связей. Невозможно создать модель общества без понимания процессов, возникающих при сталкивании интересов различных общественных групп. В то же время общество берет под защиту женщин, детей, физически слабых.

Таким образом, общество - это совокупность иерархически организованных цепочек гомеостатических общностей, каждая из которых имеет свои цели и средства их достижения. Каждое звено этой совокупности должно осознать влияние на свою стабильность реализацию целей верхнего уровня. В конечном счете, развитие общественных отношений должно привести к превращению человечества в единую гомеостатическую общность, то есть такую общность, где приоритет всегда принадлежит общим целям. В противном случае человечество погибнет.

3.3. Некоторые особенности методологии и логики прикладных математических исследований.

Особенности логики и методологии прикладной математики определяются, как уже отмечалось выше, тем, что предметом прикладной математики являются реальные объекты, а результатами исследований являются рекомендации к определённым действиям в реальных ситуациях. В основе методологии и логика прикладных исследований лежат *принципы системного подхода*, на основе которых и конкретизируются *методологические принципы прикладных исследований.*

3.3.1. Необходимость участия математика на всех этапах решения прикладной задачи.

Успешный результат прикладного исследования во многом зависит от активного участия математика (0системного аналитика) на всех этапах исследования.

Классическое исследование в теоретической математике строится по такой схеме: берётся чёткая постановка проблемы, формулируются допущения и затем поставленная задача решается с помощью точных формальных преобразований. Если в этих преобразованиях не допущено ошибки, результат считается верным. Математика выступает как бы в роли "неизвестного заказчика", исходящего именно из такой, а не из другой постановки задачи. Решение затем как бы складывается "впрок" на полку и ждёт, когда кому то оно понадобиться.

Для прикладных исследований характерно следующее: математическая модель строится не "вообще ", а применительно к *конкретной практической задаче,* которую требуется решить. Для неё типично *"личная уния"* заказчика и исполнителя. Заказчик не может оставаться в стороне от вопроса о выборе критерия оптимизации, о возможных допущениях, а математик, привлечённый к решению практической проблемы, непременно должен участвовать во всех этапах решения задачи. Словом, прикладной математик не должен быть «белоручкой» в таком качестве он попросту не нужен"[26]

Академик Н.Н.Моисеев на вопрос: "почему же сейчас потребовалось "щупать руками" ту реальность, которую надо моделировать?", ответил: "...нельзя правильно построить эксперимент, понять, что в деятельности описываемой твоими моделями важно, а отчего при формальном описании можно абстрагироваться, если знаешь описываемые отношения только понаслышке, с чужих слов, или, что то же самое, по массивам данных". И далее "..чтобы понять, что нужно учитывать при моделировании кооперативных механизмов, - и понять, так сказать, на интуитивном уровне, чтобы потом свободно располагать этим пониманием, - нужно достаточно наглядно представлять себе реальное поведение объекта, реальные реакции определённых групп лиц на те или иные ситуации".

Перечень авторов, придерживающихся аналогичной точки зрения на участие математика в прикладных исследованиях, может быть продолжен. Эта точка зрения базируется на системный принцип полномочности. В то же время существует и другое мнение, которое нашло отражение, в частности, в некоторых работах по исследованию операций. Например, в работе Ю.Б.Гермейера[27] взаимодействие руководителя и исследователя трактуется следующим образом. Оперирующая сторона определяется, как совокупность лиц, организующих операцию и участвующих в её проведении. При широкой трактовке в оперирующую сторону входят и те участники, которые определяют цель операции (смотри принцип полномочности). Руководитель операции несёт полную ответственность за результаты её проведения. Исследователь операции - лицо, владеющее математическими методами и опытом применения их в различных операциях, занимает в оперирующей стороне особое место, "исследуя операцию в целом, но будучи зачастую *лишённым всей полноты информации* и не принимая окончательных решений". Степень информированности исследователя в операции устанавливает руководитель. Выделены четыре основные направления исследования. К первому направлению отнесено "создание и описание способов действий, которые могут вести к достижению цели: среди них-то и необходимо производить выбор "наилучших" способов". Утверждается, что

---

[26] И.Грекова. «Методологические особенности прикладной математики на современном этапе ее развития». // «Вопросы философии» №6.1976.

[27] Ю.Б.Гермейер. «Введение в теорию исследования операций». М.,1971

"первое направление является областью конкретных исследований, учитывающих специфику конкретных операций и опирающихся на соответствующие разделы науки; математикам здесь делать почти нечего".

Если исследователь операций будет последовательно придерживается приведенному выше статусу, то его положение будет соответствовать положению водовоза в кинокартине "Волга-Волга", готового кричать сколько угодно, если отвечать будет другой.

Можно предположить, что рекомендуемая таким образом организация исследований была характерна для времени написания учебника. Но ведь подобные рекомендации изучались и изучаются студентами, а также служат теоретическим обоснованием их позиций при решении прикладных задач. Положение, когда только руководитель отвечает за постановку задачи, а математик, разрабатывая модель на основе выданной ему, зачастую неполной, информации, приводит, в конечном счёте, к *обоснованию ранее уже принятого* руководством решения, что порой и является истинной целью исследования.

И впредь, пока руководитель операции будет считать себя свободным от понимания математической модели, а математик полагать нормой работу без детального осмысливания существа задачи, считать нормальным, что какая то часть информации, имеющее отношение к проводимому исследования может оставаться для него неизвестной, будут появляться модели, отражающие действительность неадекватно, и вырабатываться рекомендации, которым опасно (или невозможно) следовать или которые обеспечивают поддержку ведомственных, в самом плохом смысле этого слова, решений. Моделирование превращается в *абстрактное математизирование или инструмент обмана.*

Сокрытие важной информации является одной из часто встречающих причин краха проводимых исследований. Один из способов борьбы с этим явленим – демократизация исследований: привлечение к исследованию всех желающих, внимательный анализ всех точек зрения.

Обязанности и взаимодействие основных лиц, организующих исследования, должны быть установлены иначе, чем это определено выше.

Возможны два варианта организации исследования.

Первый вариант. В одном лице объединяются руководитель (заказчик) и исследователь операции, т.е. лицо, отвечающее за операцию, руководит и исследованиями, в том числе созданием и использованием необходимых математических моделей. Естественно, что он, не являясь компетентным во всех областях знаний, будет привлекать различных специалистов. При этом он должен быть достаточно подготовлен, чтобы держать в руках все нити исследования, квалифицированно оценивать полученные рекомендации, и, при необходимости, уточнить постановку задачи, состав релевантных факторов, структуру допущений. Время руководителей, некомпетентных в научных методах исследования, прошло.

Второй вариант. Поиск решения заказчик поручает группе исследователей с предоставлением всей имеющейся информации. Тогда эта группа отвечает полностью за все этапы работы, начиная с постановки задачи и кончая выработкой рекомендаций, а также, если заказчик следует полученным рекомендациям, за результаты внедрения этих рекомендаций. При работе по этому варианту исследователю для чёткого представления действительной сущности задачи потребуются неоднократные обсуждения с заказчиком существа задачи и условий проведения операций.

Для успешного проведения исследования необходимо, чтобы на всех этапах исследования присутствовали *лица*, которым *затем предстоит реализовать рекомендации, полученные при исследовании.*

3.3.2. Различие целей исследования в чистой и прикладной математиках.

Цель, направленность исследований в теоретической и прикладной математиках существенно отличны. В чистой математике основное внимание обращается на математический аппарат, максимальное обобщение условий задачи безотносительно к физическому смыслу. Постановка задачи может быть изменена, чтобы получить строгое дедуктивное решение. Часто обращается внимание на изучение второстепенных деталей при потере связи с исходной задачей. Метод решения, его совершенствование оказывается более привлекательным, чем сама исходная задача.

В прикладной математике главное получить *решение поставленной задачи.* Решение должно быть получено к определенному сроку при минимальной затрате ресурсов - в обеспечении этого заключается «красота» прикладного исследования. В первую очередь обращается внимание на формулировку задачи.

Н.Винер в свое книге «Я - математик» неоднократно обращает внимание на то, что знание физической сути исследуемых фрагментов реального мира является существенным подспорьем в теоретических исследованиях. Винер приводит примеры, когда это знание позволяло ему чувствовать себя уверенно при совместной работе с математиками, более продвинутыми, чем он, в теоретической области.

Непонимание необходимости понимания физической сути исследуемой им системы весьма характерно для математиков с хорошей теоретической университетской подготовкой, в том числе окончивших факультеты прикладной математики университетов. Владея математической теорией и компьютерными технологиями, они просто не задумываются о том, поставлена ли задачи правильно, а при анализе полученных на компьютере результатов просто не в состоянии привлечь знания о физической сущности процессов, протекающих в системе, образом которой является данная модель

Действительно, ситуация, когда непонимание физической сущности прообраза модели приводит к ошибочным выводам, встречается достаточно часто. Приведем пример из работы одного прикладного НИИ.

В процессе исследования проблемы потребовалось найти экстремальное значение некоторой функции, определенной как сумма двух функций: **y(x) =**

$\mathbf{y_1(x) + y_2(x)}$. Научный сотрудник, которому было поручено решение задачи, нашел выражение для $\mathbf{y_1(x)}$ и $\mathbf{y_2(x)}$, затем сложил их и получил экстремальное значение $\mathbf{y(x)}$. Результат был представлен графически. Научный руководитель работы заметил, что, полученный результат с точки зрения физической сущности исследуемого процесса не возможен. При анализе методов вычисления зависимостей $\mathbf{y_1(x)}$ и $\mathbf{y_2(x)}$ было обнаружено, что вычисления проводилось для различных условий и аргумент $\mathbf{x}$ в этих зависимостях был по сути «разный». Соответственно, изображать на графике полученные зависимости как функцию одного и того же аргумента было недопустимо, равным образом нельзя эти функции складывать. Результаты исследования были отклонены. Интересно, что научный сотрудник, проводивший исследования, не понимая физической сути исследуемой системы, так и не понял существа допущенной ошибки.

Еще два примера почти юмористического плана. При проведении теоретического исследования сотрудник НИИ обозначил одной и той же буквой различные величины, «появившиеся» на различных этапах исследования. На заключительном этапе исследования эти буквы одинаковые по написанию и различные по сути «встретились», и «участвовали» в различных преобразованиях, например, могли быть сокращены. Полученный в конечном итоге результат ни в коей степени не соответствовал физической сути исследуемого процесса. Вернувшись к начальным этапам исследования, научный сотрудник нашел ошибку и устранил недоразумение.

Другой пример, молодому научному сотруднику было поручено рассчитать траектории баллистических ракет для определенного диапазона начальных условий. Алгоритм, описывающий траекторию БР, был программно реализован, расчеты проведены и сотрудник представил результаты в виде аккуратно выполненных таблиц и графиков. Его не в коей мере не смущало, что в представленных результатах баллистическая ракета при входе в атмосферу ускорялась.

3.3.3. Повторное обращение к модели. «Спор» моделей

Стремление к "простому" решению поставленной задачи приводит к необходимости применения характерных для прикладных исследований методологических подходов, обеспечивающих контроль на всех этапах моделирования и, при необходимости, уточнение модели и полученных результатов. К таким подходам следует отнести *повторное обращение* к модели, *иерархию моделей*, *спор моделей* и др.

После проведения на модели серии расчётов может оказаться, что, вследствие какой-то причины: не обоснованных допущений, игнорирования существенных факторов, влияющих на конечный результат, неудачной структуры разработанной модели, недостаточного объема вычислений и пр., полученные результаты не удовлетворительны. Выявленные недостатки устраняются при *повторном обращении к модели*, в том числе может потребоваться и уточнение структуры модели

В ходе обсуждения результатов экспериментов можно также прийти к выводу, что существующая модель не обеспечивает решения поставленной задачи, что необходимо перейти к другой модели, в том числе, возможно, построенной на других принципах. Иногда требуется уточнять допущения так, чтобы сделать модель в большей степени адекватной моделируемой системе. В последнем случае создаются цепочки последовательно усложняемых моделей - *иерархия моделей*. По мере появления в этой цепочке иерархий новых моделей происходит более детальное описание моделируемой системы.

Зачастую весьма плодотворным оказывается *"спор моделей",* когда для решения задачи с самого начала создаются разные типы моделей. Совпадение (степень совпадения) результатов, полученных на различных моделях, является подтверждением правильности решения. В противном случае необходимо выяснить причины расхождения. Подобный подход улучшает понимание сути исследуемой системы. Тезис "в споре рождается истина", ранее совершенно чуждый математике, вступает в свои права в её прикладной ветви. При решении одной задачи по двум и более разным методикам (параллельно на разных моделях) во-первых, уменьшается возможность ошибок исполнителей при создании моделей, во-вторых, расхождение полученных результатов может рассматриваться как меру достигаемой точности. Правда, для этого необходимо вести счет до квазисходимости, то есть повторять расчет на сетке вдвое тли вчетверо более мелкой, чем основной результат.

На первых этапах развития вычислительной техники, когда трудоемкость задач превосходила возможности техники, большое значение имело создание многомашинных комплексов. Задача организации параллельных вычислений упростилась при появлении многопроцессорных ЭВМ. В трудоемких задачах кроме расщепления задачи по направлениям, применяется и расщепление по физическим процессам, когда каждый раз решается не вся система уравнений, а только ее часть.

3.3.4. Существование в чистой и прикладной математиках

Согласно Д.Гильберту в рамках чистой математики понятие существования тождественно логической непротиворечивости. Математический объект существует как идея, не противоречащая принятой системе аксиом. В прикладной математике понятие существования математического объекта связано с каким либо образом реального объекта, т.е. математический объект существует как математическая модель реального объекта и может быть принципиально идентифицирован и конструирован. Доказательство существования некоторого объекта естественно назвать конструктивным в прикладном отношении, если из него вытекает приближенная конструкция этого объекта, свойственная некоторому разумному классу реальных объектов.

В теоретической математике постулируется: если удастся доказать теорему существования, единственность решения и корректность самой постановки задачи, то, как правило, создается объективная уверенность в том, что исследование проводится в правильном направлении.

В прикладных исследованиях чистые теоремы существования не гарантируют адекватность модели объекту, а отсутствие доказательств этих теорем не означает, что модель не обеспечит решение задачи с требуемой достоверностью. Однако доказательства существования и единственности могут послужить дополнительным подтверждением правильности модели. Кроме того, с помощью этих теорем иногда возможно получить формулы для вычислений.

3.3.5. Проблемы адекватности и равнопрочность этапов исследования

При использовании моделей необходимо обеспечить адекватность модели исследуемой системе и «равнопрочность» этапов исследования.

Поскольку модель ориентирована на решение конкретной задачи, в ней должны быть учтены все те свойства, которые, безусловно, влияют на результаты решения этой задачи. Излишние подробности, не влияющие или слабо влияющие на результаты, должны быть исключены. Подобные подробности могут заметно усложнить эксперимент и ухудшить точность решения. В то же время, не должны быть искажены отношения между элементами системы, т.е. модель должна всегда быть изоморфным образом некоторой фактор-действительности[28]. Соответственно, справедливо следующее определение. *Адекватность - это совпадение модели с объектом в той мере, в которой это достаточно для достижения цели.*

При построении модели, адекватной решаемой задаче, различают внешнее и внутреннее правдоподобие, при этом возникает проблема равнопрочности этапов исследования. Обратимся к рис. 3.1.

При *внешнем правдоподобии* предполагается, что математическая модель изоморфна выделенной фактор-действительности, и существует уверенность, что математическая модель обеспечит результат, который мог бы быть получен при экспериментировании на реальном объекте. *Внутреннее правдоподобие* - это соответствие реакции на внешнее возмущение реально реализованной математической модели и реакции на это же возмущение полученной формализации фактор-действительности. Т.е. здесь различается математическая модель, как формализованное описание выделенной фактор-действительности и ее реализация, зависящая от принятых вычислительных методов и техники, используемой при реализации модели. Заманчиво сохранить физическое соответствие модели объекту, но физическая наглядность и вычислительная эффективность зачастую не совпадают. Например, метод Рунге-Кута не отражает физику процесса интегрирования, но вычислительно эффективен.

---

[28] Теоретические основы понятия адекватности в логико-алгебраических терминах и определение «фактор-действительности» изложены далее в главе 5.

Определяют также адекватность *качественную* - адекватность функционального описания и *количественную* - совпадение исходов модели и объекта при одинаковых входах.

Трудности возникают как при выделении фактор-действительности и формализации задачи, так и при реализации модели. Известны две крайние точки зрения. Первая - это стремление во всех случаях обеспечить максимальное внешнее правдоподобие. После чего не исключено, что формализация модели окажется настолько сложной, что для ее реализации потребуется вводить существенные упрощения. Другая крайность - при формализации модель упрощается (отбрасываются все детали реального объекта, которые не могут, по мнению исследователя, сколь-нибудь существенным образом повлиять на результат исследования), так, что можно используя известные вычислительные методы, сохранить внутреннее правдоподобие близким к единице. Модели, в которых при небольшом внешнем правдоподобии используются весьма точные математические методы, весьма распространены.

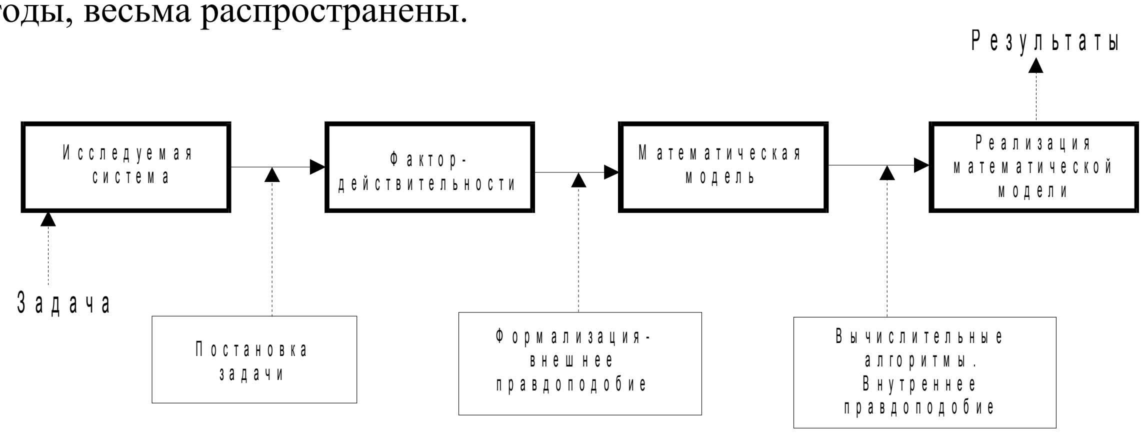

Рис.1.

Может оказаться оправданным стремление к некоторому компромиссу между внешним и внутренним правдоподобием - к "*равнопрочности*" этих двух этапов создания модели. Разумная степень равнопрочности должна быть выбрана в каждом конкретном случае. Иногда возникают при реализации модели и чисто «модельные» трудности, являющейся следствием не сложности системы, а неудачно выбранной структуры математической модели.

Своеобразный уровень равнопрочности должен быть также установлен между *качеством входной информации и внутренним правдоподобием.* Нет смысла применять сложные вычислительные методы, если необходимые для расчета исходные данные отсутствуют, или они известны с большими погрешностями. Если для расчетов на разработанной модели необходимо знание параметров и переменных, которые в ближайшем будущем не будут получены, надо отказаться от этой модели и заменить её другой, пусть менее точной, но опирающейся на доступную информацию. Во многих исследованиях, претендующих на роль прикладных, исследование начинается с перечисления параметров, которые полагаются известными.

Как, с какой точностью они будут получены - такой вопрос даже не ставится. Модели, созданные без учета имеющейся информации, следует называть *"информационно-уродливыми"*, а соответствующие "прикладные исследования" - *бессмысленными абстрактными упражнениями*.

Пренебрежение к источникам информации - ошибка типичная. В связи с этим полезно помнить фразу, принадлежащую известному естествоиспытателю Гексли: "Математика подобна мясорубке, она может переработать любое мясо, но для того, чтобы получить хорошие котлеты, нужно хорошее мясо".

3.3.6. Трансформация математики при освоении новых областей знаний.

"Сегодня трудно указать науку, которая не пользовалась бы математикой, а если такая есть, её вероятнее всего постигнет общая участь. Математика начинает заниматься такими вопросами, которые от века изучались лишь на гуманитарном уровне - конфликтные ситуации, иерархические отношения, дружба, согласие, авторитет и т.д. Уже сравнительно давно математические методы применяются при изучении литературных стилей, в теории стиха. Одним словом, математика со своим аппаратом, терминологией и методологией проникает повсюду. В связи с этим размывается и становится почти неуловимой грань между так называемыми точными и гуманитарными науками".[29]

Явления, составляющие предмет гуманитарных наук, неизмеримо сложнее тех, которыми занимаются точные. Они гораздо труднее поддаются формализации. Для каждого из них гораздо шире спектр причин, от которых они зависят, круг связей, в которых они участвуют. Словесный способописани системы может, как это ни парадоксально, оказаться здесь точнее формально-логического. Поэтому следует полагать ошибочными заявления, что некоторая проблема только потому не решена, что до нее не добрались математики. Зачастую дело в том, что в данной области знаний еще не накопилось некоторого минимума фактического материала, достаточного, чтобы обратиться к обобщениям, или математика просто еще не выработала язык, способный адекватно описать процессы, протекающие в данной области.

Однако порой ожидание "достаточной" информации не оправданно затягивается. Теоретические обобщения, математические модели могут быть созданы и при некотором минимуме экспериментальном материале. Порой не хватает *интеллектуального,* а не экспериментального материала, не достает определенного *видения изучаемой реальности*, которое и дает экспериментальному материалу содержательный смысл. Будучи созданной, модель дает новый импульс для поиска дополнительного экспериментального материала, выявляет новые направления исследований.

[29] И.Грекова. «Методологические особенности прикладной математики на современном этапе ее развития». // «Вопросы философии» 6.1976.

Согласно Эйнштейну теория подтверждается внешним оправданием (экспериментальными данными), естественностью и логической простотой предпосылок - внутренним совершенством.

Применение математики в новых областях может быть не эффективным и даже вредным, когда исследователь не разбирается или не хочет разбираться в новой для себя области, не хочет считаться с её спецификой, произвольно трактует имеющийся экспериментальный материал. В подобных случаях возможно лишь дискредитация математического подхода. "Насильственная математизация чего бы то ни было, никогда пользы не приносила; она хороша лишь, когда вытекает из самого развития данной науки, которая для решения своих задач сама готова обратиться к математике”. При этом происходит не одностороннее, а взаимное проникновение двух групп наук, двух методологий.

Для того чтобы математические методы стали *полноценным орудием* исследования в нетрадиционных областях, им самим *потребовалось трансформироваться.* Прикладная математика, вступая в новые для себя области приложений, неизбежно становится менее формальной, как бы "очеловечивается" В какой то мере приближаясь по своему духу к наукам гуманитарным, она обогащается новыми понятиями, приобретает более *гибкую тактику, новую идеологию, новые понятия*.

Всё это в полной мере относится к использованию математических моделей социально-экономических, биологических и других систем, которые называют "мягкими", вследствие характерных для этих систем слабой конструктивности, расплывчатости причинно-следственных связей, неоднозначности реакции на внешние возмущения. Для подобных систем справедлив принцип конструктивного поведения Дж.Форстера, согласно которому дать удовлетворительный прогноз о поведении сложной системы, используя только собственный опыт и интуицию, как правило, невозможно - сложная система реагирует на внешнее воздействие зачастую совсем иначе, чем это ожидает наша интуиция, основанная на общении с достаточно простыми системами. Для изучения сложных систем развиваются новые методологические подходы, при этом система исследуется не как часть реального мира, а как системно-организованный процесс её изучения, предполагающий возможность различных интерпретаций исследуемой системы. В таких случаях конструируется сразу несколько моделей, отвечающих различным картинам мира участников исследования и создается некоторая структура для сравнения результатов, полученных на различных моделях. То есть модель мягкой системы на обеспечение необходимой адекватности в общем случае не претендует. Результаты исследования, полученные на моделях, сравниваются с реалиями мира. Для исследования больших сложных систем различной природы требуется дальнейшее развитие теории и методов использования имитационных моделей, работающих в диалоговом режиме.

В силу логики развития наук математика сегодня является методом научного исследования во многих других науках. В физике, благодаря использованию математических методов, уже не только обрабатываются результаты экспериментов, но и создаются такие математические модели, реальный физический смысл которых еще предстоит выяснить. Это происходит потому, что с помощью математических методов можно проникать в неисследованные области мира, еще не доступные для исследования физическими методами, открывать в них закономерности, создавать математические модели неизвестных физических процессов, и тем самым направлять мысль экспериментатора. С помощью вычислительного эксперимента сегодня рассчитываются такие процессы, которые даже недоступны к экспериментальной постановке, на моделях прогнозируются результаты поведения сложных систем, изучение которых другими способами затруднено или просто не возможно. Наглядный пример роли математического мышления для физических открытий – история квантовой математики, модель которой была первоначально построена чисто теоретическим путем. В дальнейшем она была подтверждена экспериментально и явилась источником и стимулом дальнейшего развития физики микромира

Математические расчеты в ядерной отрасли играют гораздо большую роль, чем в других отраслях промышленности. Лабораторное моделирование позволяет проверить правильность принятых конструктором решений до создания опытного образца. После запрещения ядерных испытаний – это единственный метод.

Область применения математики в различных науках расширяется и приобретает новые черты. Некоторые не тривиальные примеры. Теория меры используется в экономической географии и теоретической механике. Алгебраическая геометрия взаимодействует с физикой. Теория гомотопий оказывается полезной в математическом программировании, при изучении квантовых полей, изучении дефектов кристаллов.

Безусловным успехом является применение математики в биологии. Это потребовалось, в частности, вследствие проникновения биологии во внутриклеточные процессы и анализу их на молекулярном уровне. В качестве примера можно привести изучение проблем наследственности и расшифровки генетического кода

Весьма важным является внедрение математических методов в экономическую науку и в управление экономическими процессами. В России математике с внедрением в экономику «не повезло» и неоднократно. Так, например, рекомендации, полученные при изучении экономических процессов на моделе Леонтьева, не понравились ни Сталину, ни Хрущеву. Полученные Канторовичем результаты на основе линейного программирования не нашли должного применения при планировании экономики в СССР. Более того, уже в конце XX века при перестройки экономики в России реформаторы, считающие себя хорошо теоретически подготовленными экономистами, пренебрегли основными положениями институциональной экономики с последующими плачевными результатами. Так, при расчете возможной инфляции они ошиблись в сотни раз.

В дальнейшем является естественным усиление взаимодействия математики с другими науками, особенно с физикой, биологией, экономикой.

В частности, в физике важнейшей задачей, решение которой связано с необходимостью разработки новых математических подходов, является построение единой теории взаимодействия элементарных частиц.

В биологии насущной проблемой является создание комбинаторной библиотеки генов с помощью микрочиповой бионики. Центральная проблема молекулярной биологии, представляющей интерес для математиков,. связана с тем, что при передачи информации от гена происходит переход (сворачивание) белка от одномерной к трехмерной активной структуре, соответственно необходимо определение правил упаковки полипетдиных цепей.

В экономике математические проблемы связаны с адекватным описанием функционирования сложных экономических систем в условиях неопределенностей различного вида.

В процессе прикладных исследований, по мере проникновения в новую область знаний математика становится естественной частью этой области. Математика, «умирая» в приложениях как самостоятельная дисциплина, способствует созданию новых научных дисциплин или придаёт наукам новые качества.

3.3.7. Сочетание формальных и неформальных понятий и рассуждений

«Логика и интуиция имеют каждая свою необходимую роль. Логика, которая одна может дать достоверность, есть орудие доказательств, интуиция есть орудие изобретения» (Пуанкаре)

В чистой математике свойство любого изучаемого понятия должно строго логически вытекать из его формального определения. То есть свойства задачи полностью определяются её математической формулировкой.

В прикладных исследованиях, если даже используется математическое понятие, то за ним всегда стоит реальный объект и поэтому любое понятие всегда включает в себя больше, чем формальное определение.

В процессе исследования, по мере необходимости, привлекаются дополнительные сведения о рассматриваемых понятиях, проводятся уточняющие рассуждения о свойствах изучаемых объектов. И.Грекова пишет "Жизнь непрерывно требует от математика ответа на вопрос, как поступить в том или другом случае, при тех или других сложившихся обстоятельствах. И дело чести математика не уходить от этих требований в пучину абстракций, а по мере сил удовлетворять их. Однако, для этого нужна специальная тренировка, умение разобраться в неформально поставленной задаче, иногда отказаться от полной математической строгости, применить не до конца обоснованные, но оправдавшие себя на практике приемы».

В прикладных исследованиях сложных систем всегда справедлив принцип неопределенности. Понятия, не всегда строгие, категории не чисто качественного, но и не чисто количественного характера, проверка теории с помощью численного расчета - так называемого "машинного эксперимента" характерны для прикладных исследований Приемы, которыми пользуется современная математика - всякого рода "экспертные оценки", "эвристические методы" и т.п., настолько резко расходятся с привычными, классическими приемами, что у профессионального математика "строгой" школы могут вызвать нечто вроде душевной травмы. Конечно легко считать, что вся эта "ересь" находится за пределами математики (что нередко и делается), но объявить приемы недопустимыми и не предложить ничего взамен - не лучший выход из положения. Многие задачи просто "не решаются" на уровне должной строгости, а решать их нужно - жизнь не ждет. Волей - неволей приходится пользоваться всеми доступными на сегодняшний день средствами".

Здесь уместно привести фразу из научного фольклора: "Чистая математика делает то, что может, так, как нужно, прикладная - то, что нужно и как можно".

Из принципа неопределенности следует закономерность широкого применения в прикладной математике так называемых рациональных рассуждений. Рассуждения, не строгие и не приемлемые с точки зрения чистой математики, но обеспечивающие при разумном их применении правильные результаты, называются *рациональными.* Типичный пример рационального рассуждения: «Сегодня погода хорошая», «Автомобиль едет с недопустимой скоростью».

Используются и другие термины, близкие по смыслу к термину "рациональные": правдоподобные, эвристические, дискурсивные. Понятие "дискурсивные" относится к любому типу умозаключений: рассудочных, понятийных, в частности и таких, когда в цепи заключений имеются внелогические утверждения. Такое понимание дискурсивности близко к принятому понятию рациональность. Применение рациональных понятий, непосредственно связано с интуицией, здравым смыслом. Качество интуиции зависит от степени изучения данной области знания и личных качеств исследователя.

Для оценки рационального рассуждения вводится понятие степени достоверности рассуждения, которое может меняться от 0 до 1. Это некоторая субъективная, размытая в своей основе аналогия вероятностной оценке. Трудности в определении численных значений степени достоверности приводят к необходимости прибегать к дополнительным пояснениям. Например, к таким: "довольно правдоподобно", если вероятность $\mathbf{p \geq 0.9}$, практически не возможно при $\mathbf{p \leq 10^{-12}}$ Оценки могут также отличаться "степенью обоснованности», что яляется некоторым аналогам дисперсии.

Сложное рациональное рассуждение обычно включает физические соображения, ссылки на опыт, интуицию, целесообразные упрощения, а также дедуктивные рассуждения. Важной особенностью рациональных рассуждений является возможность включения в них "размытых понятий". Например, Р.Хэмминг указал несколько неопределённый общий принцип: "чем тоньше метод и чем лучше он кажется, тем хуже он может повести себя в случае осложнения с функцией". Дедуктивная формулировка этого принципа может только сузить область его применения.

Различные рассуждения совершенно не равноценны, как по трудности их проведения, так и по вкладу в успех решения задачи. По аналогии с теорией вероятностей можно положить, что если сложное рассуждение "А" является конъюнкцией **n** простых рассуждений "$\mathbf{a_i}$", то общая достоверность $\mathbf{P = \prod_{i=1}^{n} P(a_i)}$ Наличие среди $\mathbf{a_i}$ достоверного рассуждения не повысит существенно общую степень достоверности. Д.Пойа привёл ряд способов повышения правдоподобности рассуждений, некоторые из них: *повторный независимый вывод, использования различных моделей, независимое вычисление, сравнение результатов с физическим экспериментом.* Достоверность рационального рассуждения может быть также повышена, если прибегнуть к коллективному мнению.

В прикладных исследованиях следует стремиться к таким сочетаниям различных рассуждений, которые с необходимой точностью при минимуме затрат приведут к цели исследования. Зачастую только при применении здравого смысла и интуиции, т.е. рациональных рассуждений, удаётся получить искомый результат. Необходимо также отличать рациональные рассуждения, имеющие научный характер, от "наукообразных упражнений" и от действий, которые могут быть квалифицированы как «гадание на кофейной гуще».

3.3.8. Типовые, рациональные рассуждения

В предыдущем пункте отмечено, что одной из особенностей прикладной математики является широкое использование рациональных рассуждений..

Перечислим основные виды рациональных рассуждений .

а) Применение формулировок, включающих не точно определенные понятия.

б) Применение понятий вне рамок их первоначального определения. Например, интеграл, введенный для непрерывных функций, применяется и для разрывных функций.

в) Применение утверждений, справедливых в практических случаях, но допускающих построение искусственных противоречащих примеров.

Многие дедуктивные теоремы и рассуждения значительно проигрывают из-за того, что они ориентированы на справедливость во всех случаях, в том числе самых неблагоприятных. Это приводит к нежелательному смещению акцентов - патологические случаи приобретают большее значение, чем основные. Однако, как сказал Эйнштейн: " Господь бог изощрен, но не злонамерен". Природа, в отличие от людей, не строит противоречащие примеры с единственной целью - опровергнуть рациональное рассуждение.

г) Доводы, основанные на аналогии или эксперименте. Разумная аналогия служит в прикладных исследованиях доказательством. Результаты эксперимента часто служат подтверждением рабочих гипотез. Многие коэффициенты в теоретических зависимостях получаются из эксперимента.

д) Нелокальное применение результатов локального исследования. Например, некоторый процесс, включающий параметр **d>0**, сходится при малых значениях **d**. Но в случае, если значение **d** не мало, о сходимости судят по первым шагам.

е) Индукция. Доказательства, основанные на рассмотрении частных случаев. Применение индукции в прикладной математике обусловлено сложностью или недоступностью дедуктивных доказательств.

ж) Использование результатов приближенного решения при отсутствии строгого доказательства точности решения. Заключение о правильности решения опирается на его совпадение с ожидаемым результатом или на контрольные вычисления для частных случаев.

з) Применение численных методов, сходимость которых не доказана.

и) Изучение и решение задачи, когда соответствующие теоремы о разрешимости (о существовании и единственности решения) не доказаны.

3.3.9. Необходимость учета при принятии решения многовариантности возможных результатов.

Во всех случаях неполноты знаний о предмете исследования, нечёткой или стохастической входной информации, будут носить нечёткий или вероятностный характер и результаты исследований, а принятые на основании этих исследований решения могут привести к неоднозначным последствиям. В случае нечёткой (по своей природе) или неполной (при ограниченных возможностях исследователя) информации как раз очень важно учитывать законы кибернетики об устойчивых состояниях и устойчивых траекториях системы. Должны быть выявлены и оценены, хотя бы на интуитивном уровне, *все возможные,* в том числе *кажущиеся маловероятными, последствия принимаемых решений,* а также предусмотрены *обратные связи,* которые обеспечат своевременное вскрытие и локализацию нежелательного развития событий.

В технических науках эти положения очевидны. При исследовании социально-экономических процессов соответствующие положения часто игнорируются, что приводит к нежелательным, порой неожиданным последствиям. Примером последнего может служить решение 80-х годов правительства СССР о борьбе с пьянством. Возможные последствия принятых решений были не проанализированы. Когда уже было ясно, что процесс пошел в нежелательном направлении то, вследствие отсутствия эффективной обратной связи, необходимые коррективы решений не были проведены. Намерения были благими, но это те благие намерения, которыми дорога в ад вымощена.

В условиях неполных и нечётких знаний однозначные результаты могут быть получены только в некоторых случаях, например при изучении крайних, предельных состояний систем.

3.3.10. Прикладная математика и число

Величина – одно из основных математических понятий Широкое понимание величины включает различные числовые системы и математические объекты (матрицы, тензоры, спиноры) Теория чисел изучает свойства целых и рациональных чисел, а также любых других чисел, вытекающие из приближения их рациональными числами

Понятие числа в математики - это наука о количественных связях между отвлеченными объектами и средство решения практических задач.

Расширение понятия числа связано в основном с первым направлением. Процесс уточнения понятие «число» идет непрерывно в контексте общего развития постулатов математики с древнейших времен (с появлением представления о положительно целом числе) до настоящего времени. Появились понятия дробей, отрицательного числа, иррациональности, комплексного числа, бесконечности и др. Развитию понятия числа способствовали исследования выдающихся математиков древности и современности, в том числе математиков Индии, Китая, Древнего Востока, Древней Греции (Пифагора, Архимеда), Западной Европы (Галилея, Лейбница, Эйлера, Гаусса, Кантора) и др.

Развитие понятия числа способствовало успешному применению чисел для решения практических задач. В связи с этим важнейшее значение имело совершенствование систем счисления, появление десятичной и двоичной позиционных систем.

В чистой математике число это преимущественно *логический объект*, в прикладной - *порядковый индекс, мера дискретной совокупности или непрерывной протяженности.*

Чистая математика может оперировать со сколь угодно большими числами. Однако полученные при этом результаты с позиции прикладных исследований не конструктивны. В прикладной математике реальные большие числа размываются, теряют индивидуальность. Очень большое число вообще теряет смысл. При использовании в прикладных исследованиях оценок, полученных теоретически, необходимо помнить о диапазоне значений рассматриваемых величин.

Аналогичные, как в случае больших чисел, ограничения возникают в прикладной математике и при рассмотрении формально определенных чрезвычайно малых чисел. Искусственные трудности могут возникнуть при неправильном выборе основной единицы измерения. "Истинная малость", которая что-то еще значит, определяется осмысленной относительной точностью величин, т.е. параметрами измерительной техники. Сегодня наивысший уровень до $\mathbf{10}^{-12}$ имеют относительные точности измерений времени и длины.

3.3.11. Проблема бесконечности

Для теоретической математики все, что связано с бесконечностью – предмет последовательных уточнений, вследствие теоретических изысканий или практической необходимости. По мере развития основ математики уточняются аксиомы, связанные с понятием «бесконечность». В любой математической структуре обнаруживаются противоречия, как только начинаются уточнения ее «взаимосвязи» с бесконечностью. Так, были подвергнуты критике определенные положения теории множеств, ценность которой во многих практических применениях несомненна. Парадоксальными оказались выводы из аксиомы выбора и т.п. С этим процессом уточнений следует смириться, и иметь в виду понятие актуальной бесконечности, постулированное Фомой Аквинским.

До 1961 г. понятие *бесконечно малой постоянной величины бесконечно малого числа* критиковалось в лучшем случае как нестрогое, а в худшем – как бессмысленное. Робинсон впервые обнаружил, что этому понятию можно придать точный математический смысл. В 1961 г. в статье «Нестандартный анализ», опубликованной в трудах Нидерландской АН, он изложены основные положения нестандартного анализа и некоторые его приложения. Нестандартный анализ завоевывает в настоящее время все большое признание. С помощью нестандартного анализа было найдено решение некоторых ранее поставленных математических проблем. Интересно, что многие математические открытия были сделаны на основе нестандартных рассуждений, еще до кошианской реконструкции основ математики. Например, вопрос о разложении функции в степенные ряды.

В классическом математическом анализе считается, что пространство бесконечно делимо, так как бесконечно малая есть переменная величина, стремящаяся к нулю. В соответствии с физическими воззрениями XX века пространство квантовано и никакие размеры не могут быть меньше 10^{-33} см. Таким образом, возможно, что нестандартный анализ точнее отражает реальный мир.

В прикладных исследованиях реальные объекты конечны. Бесконечный математический объект может появится в результате упрощений, при которых "далекие" объекты теряют свою индивидуальность. Например, такие элементы появляются в бесконечно длинном стержне или в установившемся режиме вынужденных колебаний. Реальный размер пространственного или временного интервала, вне которого элементы теряют свою индивидуальность, строго определить невозможно. Интервал этот зависит от природы исследуемой системы, характера исследования (цели, требуемых точностей и пр.). При анализе переходных процессов в динамических системах различной природы бесконечность "наступает", когда отклонение процесса от устойчивого состояния будет меньше заданной из каких либо соображений величины (т.е. при завершении переходного процесса). Другой случай появления «бесконечности» в прикладных исследованиях связан с такими преобразованиями конечной системы, когда каждый элемент теряет свое индивидуальное значение: дискретность заменяется непрерывностью, сумма - интегралом и пр.

Имеются существенные различия чистой и прикладной математик в понятии бесконечно малого. Чистая математика сегодня отвергает концепцию актуальной бесконечно малой. Дифференциальные законы прикладных дисциплин выводятся и трактуются на уровне актуальных бесконечно малых. Пример - вычисление плотности $p = \lim_{v \to 0} m/v = dm/dv$.

В приведенной формуле фактически реальное вещество из частиц заменено математически сплошной средой. Эта операция называется *континиуализацией.*

3.3.12. О математической строгости

Строгость того или иного рассуждения есть средство избежать ошибочных выводов. Абсолютной строгости в математике не существует и, видимо, не может существовать. «Доказательство, абсолютная строгость и тому подобные понятия - блуждающие огоньки , химеры, не имеющие пристанища в математическом мире. Строгого определения строгости не существует, доказательство считается приемлемым, если оно получает одобрение ведущих специалистов своего времени или строится на принципах, которые модно использовать в данный момент. Никакого общепринятого критерия строгости не существует»[30]. Различные уровни строгости имеют место в математической логике, в основной части чистой математике и в прикладной математике.

В прикладной математике «уровни строгости» должны выбираться адекватно решаемой задаче. Легко убедиться, что в различных приложениях эти уровни различны, достаточно сравнить модели в различных областях физики и техники и в экономике. Проблема строгости в прикладных исследованиях связана с проблемой равнопрочности при моделировании.

В прикладных исследованиях используются как точные, так и приближенные вычисления. Рациональное их сочетание определяется в каждой конкретной задаче. Аналитические приближенные вычисления возникают при использовании различных допущений как относительно адекватности модели фрагменту реального мира, так и при «загрубении» входной информации. «Приближенность» в численных методах определяется критерием остановки вычислений.

Приближенные вычисления могут быть полезным при качественной оценке модельных результатов, особенно для предельных условий относительно входов модели или ее параметров.

Приведем примеры, имеющие место про проведении исследований в одном из НИИ.

Для принятия решения о создании некоторой системы потребовалось оценить зависимость выходной характеристики (**y**) системы от значения

[30] М.Клайн «Математика. Поиск истины». М.,1988.

входной переменной (**x**). Результаты должны были получены к определенному числу - такое дополнительное условие (фактор времени) типично для прикладных исследований. Задание было выдано двум НИИ (далее, условно, НИИ-1 и НИИ-2). При решении задачи в каждом НИИ был применен свой подход.

В НИИ-1 была программно реализована модель системы. Система была достаточно сложной и для программной реализации модели потребовалось значительное время. На модели проведены расчеты $\mathbf{y_i = f(x_i)}$. Если положить диапазон возможных значений от $\mathbf{x = 0}$ до $\mathbf{x_{max} = 1}$, то вычисления были проведены от $\mathbf{x = 0}$ до $\mathbf{x_i = 1/2}$.(при выбранном шаге получено около 20 значений $\mathbf{y_i}$). Функция на этом интервале изменялась линейно. Времени для дальнейших вычислений не было, и, поскольку из физических соображений было известно, что искомая функция непрерывна, исследователи нашли возможным продолжить полученную линейную зависимость на оставшуюся половину интервала до $\mathbf{x = 1}$. Результат вычислений показаны на рис.1

В НИИ-2 был разработан приближенный алгоритм вычисления $\mathbf{y_i = f(x_i)}$. Были вычислены значения $\mathbf{y_i}$ в следующей последовательности значений $\mathbf{x_i}$: $\mathbf{i = 0, 1, 1/2, 3/4, 7/8}$.

По значениям $\mathbf{y_i}$ была проведена (от руки) зависимость $\mathbf{y = f(x)}$., как это показано на рис..1. Из физических соображений было найдено объяснение полученной закономерности.

На совещании, на котором рассматривались результаты, полученные в НИИ-1 и в НИИ-2, представители институтов предъявили свои зависимости для $\mathbf{y = f(x)}$. На просьбу объяснить результаты расхождений и обосновать, какая же зависимость правильная, представитель НИИ-1 не смог сказать ничего вразумительного, а представитель НИИ-2 убедительно обосновал представленные институтом результаты.

В дальнейшем НИИ-1 был лишен на совещании права голоса, а результаты НИИ-2 были положены а основу выводов, сформулированных на совещании. Заметим, что от этих выводов зависели дальнейшее направление разработки системы и весьма значительные затраты.

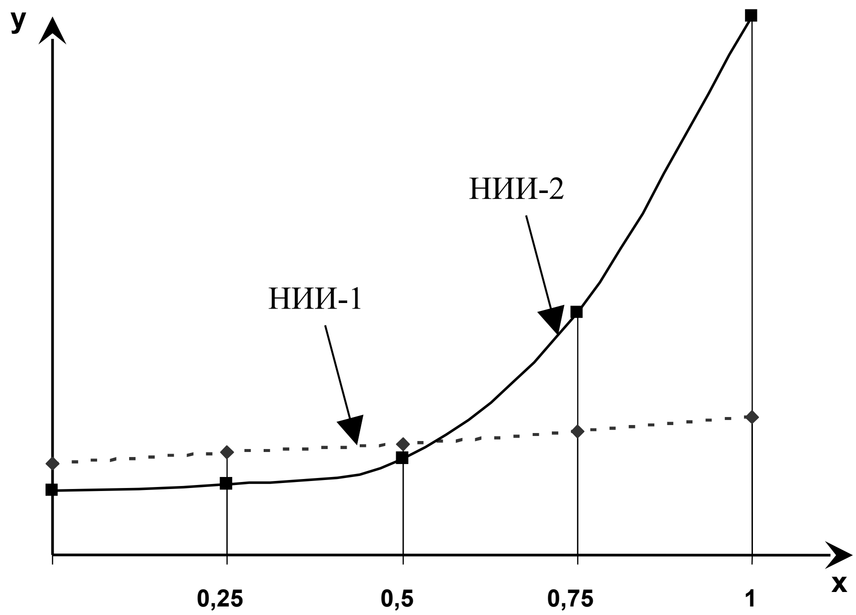

Рис. 1

На практике вычисление оптимальных значений часто не имеет смысла. Поиск оптимума связан с большими трансакционными издержками. Значительные затраты возникают при получении необходимой информации, а также при разработке алгоритмов. Причем, в сложных системах, как правило, на определенных этапах расчета оптимума требуется привлекать человека с соответствующей гарантией его компетентности. Более того, в социально-экономических системах искомая информация всегда носит статистический характер. На практике целесообразно следовать принципу неопределенности и вытекающему из него понятию *«достаточной рациональности»* То есть, достаточно найти не оптимальное, а рациональное решение, решение, которое удовлетворяет «заказчика»..

3.3.13. Функции в прикладной математике

Важнейшими понятиями математического анализа являются «функция» и «непрерывность»

Понятие «функция» формировалось не сразу. Длительное время была конкуренция двух определений функций Я.Бернулли и Эйлера. В настоящее время используется определение функции, данное Дирихле: переменная величина **у** называется функцией переменной величины **х**, если каждому значению величины **х**, принадлежащему некоторому множеству, соответствует единственное определенное значения величины **у**.

В прикладной математике индивидуальную значимость имеют только аналитические, кусочно-аналитические и простые обобщенные функции. Общим в настоящее время для теоретических и прикладных исследований является трактовка функции как элемента функционального пространства.

3.3.14. Устойчивость относительно изменения параметров

Метод, используемый при решении прикладной задачи, можно считать эффективным, если он сохраняет свою силу при изменении (хотя бы небольшом) параметров задачи. Это свойство метода называется устойчивостью. Аналогично, математическая модель является устойчивой, если изменение в определенных пределах её параметров не вызывает качественного изменения её свойств. Возможная неустойчивость методов и моделей относительно изменения параметров должна быть предметом особого внимания при прикладных исследованиях. Для адекватности модели необходимо, чтобы её устойчивость соответствовала устойчивости моделируемой системы. Результаты применения неустойчивого метода могут иметь значение, если модель устойчива.

В рамках некоторой ситуации, включающей произвольные параметры, различают разные степени вырожденности, равные количеству независимых числовых равенств, связывающих эти параметры.

3.3.15. Скорость сходимости вычислительных методов

В чистой математике понятие скорости сходимости отсутствует. В прикладных исследованиях скорость сходимости играет фундаментальную роль, понятие практической сходимости естественно включает в себя возможность достижения требуемой точности вычисления за практически реализуемое число шагов.

3.3.16. Необходимость учёта "нематематических" условий и ограничений.

При решении конкретной прикладной задачи обычно известно, когда должны быть получены результаты, т.е. время на исследование ограничено. Лучше найти приемлемое решение задачи в срок, чем оптимальное решение ко времени, когда оно станет бесполезным. Как это не странно, это тривиальное положение порой не учитывается – исследователи «затевают» исследования, результат которых может быть получен, когда он будет никому не нужен. Примеры тому известны.

Далее, возможны также существенные ограничения на средства, выделяемые на исследования, в т.ч. и на оборудование, которое может быть использовано. Не всегда оказывается возможным привлечь к работе необходимых специалистов. В конечном счёте, все эти ограничения в значительной мере влияют на структуру модели, объём проводимых исследований и, соответственно, могут привести к снижению точности и обоснованности результатов. В таких случаях исследователи при формировании выводов из исследований обязаны оценить уровень достоверности результатов

При отсутствии ограничения на время и на возможности использования ресурсов некоторые исследователи ставят своей задачей создать «красивую» и «полную» модель. Неограниченные затраты сами по себе не способствует хорошему решению поставленной задачи. Более того, неоправданно "красивые" модели способствуют расхищению интеллектуальных сил и материальных средств - научные исследования искусственно удорожаются. Но, кроме того, при этом, существо дела тонет в многочисленных подробностях, и волей-неволей, оказываются замаскированными принятые допущения. При видимой строгости и завершенности исследования оказывается трудным понять действительную ценность результата. Эйнштейн по этому поводу сказал: "Я твёрдо придерживаюсь рецепта гениального теоретика Л.Больцмана - оставить изящество портным и сапожникам".

4. Применение математических методов в прикладных исследованиях

4.1. Особенности применения математических методов

1. Выше было отмечено, что изучение математических методов, возможностей и особенностей их применения является обязательным для прикладного математика.

"Успех в прикладной науке требует широкой математической подготовки, поскольку только такая подготовка может обеспечить приспособляемость к непрерывно меняющимся типам задач, предъявляемых к решению. Одной из причин необходимости изучения на первый взгляд "бесполезных" для практики разделов математики является достижение более уверенного и более свободного владения "нужными" разделами математики"[31].

"При правильном применении математический подход существенно не отличается от подхода, основанного на здравом смысле. Математические методы просто более точны и в них используются более точные формулировки и более широкий набор понятий, но, в конечном счете, они должны быть совместимы с обычными словесными рассуждениями, хотя, вероятно, идут дальше их". Привлечение тех или иных математических методов зависит от физической природы исследуемой системы, характера решаемой задачи, имеющегося прикладного обеспечения и опыта исследователя. Применение "хорошего" математического метода само по себе не гарантирует успех исследования. Обычно основные трудности связаны не с использованием эффективных математических методов, а с грамотной формулировкой цели исследования, выбором критериев. Однако правильный выбор математического метода безуслоно существенным образом способствует получению кратчайшим путем необходимого результата.

В таблице 4.1. приведены статистические данные относительной полезности различных математических методов и моделей в повседневной работе действительных членов Американского общества исследования операций и результаты обследования 1000 крупнейших фирм США в части использования ими различных методов для внутрифирменного планирования. В таблице приведены не названия конкретных моделей, а области математики, где эти модели разработаны.

Приведенные в таблице данные характерны для задач исследования операций. В последнее время в этих задачах более широко применяются методы дискретного (целочисленного, частично-целочисленного) программирования, теории полезности и пр. Для других типов задач подобная таблица будет выглядеть иначе. Так, при исследовании линейных динамических систем успешно используются частотные подходы, базирующиеся на классических методах математического анализа. Эффективные аналитические модели на основе теории функции

[31] Н.С.Бахвалов. «Численные методы», М., 1976.

комплексного переменного и преобразования Лапласа разработаны для анализа и синтеза линейных систем, находящихся под воздействием случайных возмущений.

Таблица 4.1.

М Е Т О Д Ы	**Относительная полезность в научных исследованиях**	**Использованиев фирмах**	
		Частота исполь-зования	**Относи-тельная полезность**
1. Теория вероятностей и статистические оценки	0.182	-	-
2. Экономический анализ	0.150	-	-
3. Имитационное моделирование	0.143	60	0.29
4. Линейное программирование	0.120	43	0.21
5. Модели управления запасами	0.097	24	0.12
6. Модели массового обслуживания	0.085	7	0.03
7. Сетевые модели	0.072	28	0.14
8. Модели замены	0.042	-	-
9. Теория игр	0.040	-	-
10. Динамическое программирование	0.031	8	0.04
11. Методы поиска	0.020	-	-
12. Нелинейное програм-ние	0.018	16	
13. Целочисленное программирование	-	7	
14. Прочие	-	12	
	1.00	205	1.00

В таблице 4.2 иллюстрируетя применение математических методов в различных классах математических моделей[32].

Табл. 4.2.

[32] . *Л.Т.Кузин. Основы кибернетики. Т.2, М 1979*

	МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ												
	Теория вероятностей	Теория матриц	Функцион. анализ	Теория дифферен-циальных. уравнений	Теория множеств	Теория графов	Математич. логика	Математическая. лингвистика	Теория автоматов	Общая алгебра	Теория алгоритмов	Методы оптимизации	Численные методы
Массового обслуживания и надежности	⧖	⧖		⧖		⧖						⧖	
Игровые	⧖	⧖	⧖	⧖	⧖	⧖						⧖	⧖
Распознавания образов	⧖	⧖	⧖		⧖			⧖				⧖	
Графовые		⧖			⧖	⧖						⧖	
Алгебраи-ческие	⧖					⧖	⧖	⧖	⧖	⧖	⧖	⧖	⧖

2. Существует некоторая нечеткость в понимании содержания двух терминов: «прикладная» и «вычислительная». Будем придерживаться следующих положений: прикладная математика - одна из двух ветвей науки математики, целенаправленная на создание математических моделей реальных объектов с целью их анализа и синтеза, вычислительная математика – важная часть прикладной математики – это подходы, методы и алгоритмы, используемые для получения необходимых результатов при решении различных прикладных проблем. С позиции применения математического инструментария вычислительные методы можно разделить на *табличные, графические, аналитические* и *численные.*

3.начимость вычислительных методов в математике отчетливо прослеживается из рассмотрения истории математики. Математика возникла в Древние времена, как математика счета и измерений. В математике Древнего Востока вычислительные методы требовались для календарных расчетов, распределения урожая, организации общественных работ, учета налогов и пр. Хорошим стимулом для развития вычислений явились астрономические задачи. Вычислительная техника со временем становилась все более совершенной. Для арифметических вычислений широко использовались таблицы. Были получены хорошие приближения для $\sqrt{2}$, числа π и др.

По мере развития вычислительного искусства создавались совершенные системы счисления. Математические тексты Двуречья, относящиеся к 2100 г. до н.э., содержали таблицы умножения, в которых хорошо развитая шестидесятичная система счисления сочеталаь с десятичной системой. Значение математического символа зависело от его положения, т.е. появилась позиционная система, мало чем отличающаяся от современной. Китайская математика всегда использовала десятичную систему счисления, и уже во втором тысячелетии до н.э. числа записывались с помощью девяти символов в позиционной системе.

Вычислительная математика успешно развивалась в Древней Греции, где была выделено в отдельное направление. В эпоху Возрождения в Западной Европе математика развивалась главным образом в торговых городах, обслуживая нужды астрономии, навигации, торговли и землемерия. Горожан интересовал в первую очередь счет, вычисления. Появились мастера счета.

По мере развития теоретической математики разрабатывались новые вычислительные алгоритмы. Появились первые счетные машинки. С развитием ЭВМ изменился принципиально подход к организации вычислений. Широкое применение получили пакеты прикладных программ.

К «классическим» разделам вычислительной математики относятся вычислительные методы, создание и развитие которых связано с математикой континуума. Соответствующие методы (решение уравнений, задачи линейной алгебры, интерполирование, дифференцирование, интегрирование, приближение функций, численное решение дифференциальных уравнений) с историей их развития изложены в главе 4 учебного пособия В.Русанова и Г.Рослякова[33]. Поскольку содержание этой главы безусловно весьма полезно для ознакомления с историей и сутью «классических» вычислительных методов, далее в Приложении приведено сокращенное изложение этой главы с сохранением принятой в глав последовательности.

К классическим вычислительным методам следует отнести также методы оптимизации. Разработка этих методов является одним из основных направлений математики континуума. Выражение $dy = 0$ можно найти уже у Лагранжа. Задачам оптимизации занимались многие выдающиеся математики, весьма существенен вклад Гаусса. В XX веке развитие получили вычислительные методы дискретной математики, которые заметно отличаются от методов математики континуума. Алгоритмы методов оптимизации приведены в Приложении

В рамках одного пособия изложить хотя бы в общих чертах все основные вычислительные методы, используемые в прикладной математике затруднительно. Целый ряд методов прикладной математики, широко

---

[33] См. сноску на стр.

используемых в современных исследованиях, в пособии оказались не рассмотренными.

Начиная с конца XX века, развитие вычислительных методов идет в тесном контакте с развитием средств вычислительной техники. Реализация метода в программном обеспечении цифровой ЭВМ способствует его внедрению в практику прикладных исследований.

4.2. Из истории развития вычислительной техники в России

1. Вычисления в математических моделях обеспечиваются соответствующей техникой, сегодня это главным образом цифровые ЭВМ. Прогресс развитая ЭВМ и программного обеспечения в существенной степени определил успехи НТР второй половины XX века

Первые реально действующие ЭВМ были созданы в США в 1946 г., в Англии – в 1949. В Советском Союзе основоположником работ по созданию ЭВМ по праву считается *С.А.Лебедев* (1902-1974 гг.) Под его руководством в Киеве была создана первая отечественная ЭЦВМ, получившая название «МЭСМ». В дальнейшее Лебедев возглавил институт точной механики и вычислительной техники АН СССР (ИТМиВТ), где совместно со своими учениками продолжал работы над созданием современных ЭВМ. В этом институте была создана в 1950-е годы универсальная ЭВМ – «БЭСМ» и по заказу военного ведомства в 60-е годы специализированная ЭВМ– «М-50». К машинам первого поколения, кроме «БЭСМ» относятся ЭВМ «Стрела» и «Урал».

В 1950-х годах в СССР имела место дискуссия о том, какие ЭВМ имеют большую перспективы универсальные или специализированные Заказы (деньги) военно-промышленного комплекса привели к тому, что какой то период ИТМиВТ сосредоточил основные усилия только на создание специализированных ЭВМ для управления военными системами. Время показало ошибочность этого решения.

На смену универсальных ЭВМ первого поколения в 60-е годы пришла отечественная машина «БЭСМ-6». ЭВМ «БЭСМ-6» была выполнена на уровне самых передовых технических решений того времени. Разработанные проекты дальнейшего развития машин серии «БЭСМ» открывали хорошие перспективы самостоятельного развития отечественной вычислительной техники. Однако в 1970-е годы было принято решение о прекращение работ по «БЭСМ», снятии их с производства и переходе на Единую систему ЭВМ для стран СЭВ – серию «ЕС». Решение было принято в основном по совету американских консультантов, основной аргумент в пользу решения – возможность использования на машинах серии «ЕС» стандартного американского программного обеспечения и, соответственно, экономия средств при эксплуатации ЭВМ. Реальным результатом решения явился очередной этап отставания СССР в развитии отечественной вычислительной техники. На освоение элементной базы для серии «ЕС» и организацию производства машин этой серии ушли годы, а на передачу СССР многих программ был наложен в США запрет – некоторые программы «доставались» через Финляндию, Болгарию. За время освоения в СССР серии «ЕС» в США была разработана элементная база, программное обеспечение и налажено производство современных персональных компьютеров. К временем выпуска в СССР нескольких последних образцов ЭВМ серии «ЕС» («ЕС-1060») выяснилось отсутствия у этой серии какой либо перспективы в производстве и эксплуатации. Необходимо было переходить к их демонтажу («БЭСМ-6» продолжали еще некоторое время работать в ряде НИИ и после снятия с эксплуатации машин серии «ЕС») Окончательный результат до конца непродуманного решения от перехода на серию ЕС - полная зависимость СССР, а затем России от импорта компьютеров. Следствием отставания в вычислительной базе привели к серьезным проблемам (имеющим место и в начале XXI–го столетия) при создании систем управления техникой гражданского и военного назначения.

В начале XXI века вычислительный парк России укомплектован в основном компьютерами, разработанными в США.

2. Успешное применение вычислительной техники обеспечивается совершенным программным обеспечением. Прогресс в развитии программного обеспечения поразителен. Еще работают программисты, которым пришлось заниматься программированием в машинных кодах. Определенный период для отладки программ использовались перфокарты. Сегодня эти подходы кажутся древней историей.

Развитие программного продукта шло в направлении передачи компьютеру все большего числа функций от исследователя (пользователя компьютером). Вначале появились программных блоки, реализующие вычисление отдельных функций, совокупность функций, систем уравнений. Сегодня создание машинного алгоритма зачастую сводится к объединению готовых программных блоков в единую систему и организацию входного и выходного процесса, или просто записи в программу входной информации в установленной форме. Решающим шагом совершенствования взаимодействия человека и компьютера явилось разработка персональных компьютеров и появление «мышки».

Сегодня широкое распространение в экономике и технике получили специализированные (для решения задач управления производством и различными техническими устройствами, задач планирования и учета, задач проектирования и др.) пакеты программ. При этом задача пользователя пакетом заключается в адаптации готового программного обеспечения к реалиям конкретной системы.

Прикладные математические пакеты – интерактивные многофункциональные компьютерные системы высшего интеллектуального уровня являются эффективным инструментом научных исследований и инженерных прикладных расчетов. Они обеспечивают преемственность подхода к традиционным научным исследованиям, основанным на аналитических и численных расчетах.

Наиболее мощными пакетами,- называемым системами компьютерной алгебры являются Mathematica, Maple, Matlab и Mathcad. В частности, Maple обладает наиболее развитыми алгоритмами решения сложных математических задач.

Существует большое количество языков, с помощью которых происходит отход от форм традиционного программирования. Пример таких языков – функциональные языки. Программы, написанные на таких языках, строятся на математических функциях и операторах.

Программирование заданий в пакетах осуществляется на входных языках, являющихся одними из самых мощных языков функционального программирования.

Языками программирования, обеспечивающими диалоговый режим работы с пакетами, являются входные языки пакетов Maple и Mathematica – языки интерпретирующего типа. Такие языки обладают огромным числом операторов математических и графических функций и процедур и библиотекой дополнительных средств, благодаря чему успешно используются для решения математических задач любой сложности в интерактивном режиме.

В современных версиях прикладных пакетов огромное число математических операций являются общеупотребительными и не требуют от пользователя построемя сложных программных построений.

При решении современных задач во многих областях науки и технии, в частности в теоретической физики требуется разработка новых методов математического моделирования и программных комплексов. Здесь уже речь идет не о математических операциях, а о привлечении целых разделов математики: векторного анализа, тензорных алгебры и анализа, статистического анализа, интегральных преобразований и др. Прикладные математические пакеты адекватны задачам такого уровня.. Пакеты обладают высокой универсальностью, в их среде возможно проведение расчетов различных типов: прямых аналитических и численных с помощью встроенных операторов и функций, а также на основе созданных исследователем собственных алгоритмов.

Использование прикладных математических пакетов для решения прикладных задач представляет собою комплексную задачу, заключающуюся в сочетании математических возможностей пакетов с различными алгоритмами для учета дополнительных условий, обращения к данным других программ, введения информации и соотношений, недоступных в самих пакетах, разделения ресурсов для выполнения частей задач с последующей интеграцией для получения конечного результата.[34]

Можно выделить следующие направления развития программного продукта:

---

[34] ***Тихоненко А.В. Прикладные математические пакеты в курсах общей и теоретической физики «Физика в системе инженерно образования стран ЕврАзЭС»***
Тезисы докладов .Москва. Авиаиздат.

- программные системы «укрупненного» программирования, с помощью которого программирование сводится к набору и соединению типовых программных боков (пример - Excel);

- программные системы, ориентированные на аналитическое решение широкого набора математических задач, например, решение систем алгебраических уравнений, вычисление интеграла, решение дифференциального уравнения и др. (пример – Maple);

- программные системы, ориентированные на численное решение задач алгебры и матанализа (пример – Matlab);

- программные комплексы имитационного моделирования;

- программные пакеты (системы), обеспечивающие решение всего комплекса задач, относящихся к определенной области знания (пример - пакеты Статистика, Abacus),

- пакеты прикладных программ, языки, ориентированные на решении определенных проблем, (язык SQL и многие, другие)

- программные комплексы (системы), пакеты программ, разработанные для решения конкретных задач управления производством в различных отраслях экономики;

- порограммные средства, в том числе языки моделирования SIMULA, SIMSCRIPT, GPSS и др., а также диалоговые средства общения, испобзуемые реализации имитационной модели на ЭВМ.

3. В условиях усиливающейся конкуренции на мировой арене выигрывают именно те страны, которые обеспечивают благоприятные условия для инновационной деятельности. К производственно-технологический компонентам инновационной инфраструктуры в России относятся: наукограды, технопарки, инжиниринговые центры, инновационно-технологические центры, инновационно-промышленные комплексы, научно-технологические парки и бизнес-инкубаторы. Их успешная работа возможна лишь при создании центров, базирующихся на современные *вычислительные комплексы,* основной задачей которых является обеспечение управления инновационными процессами Основой информационной системы таких центров является региональный информационный банк данных и знаний инноватики, который содержит в себе многоплановую, комплексную информационную модель региона. Вычислительный комплекс обеспечивает непрерывный социально-экономический мониторинг региона, который включает наблюдение, анализ, оценку и прогноз экономической, социальной, экологической, а также научной и инновационной обстановки в регионе.

5. МОДЕЛИ

Математику самому приходиться искать то «жемчужное зерно», которое впоследствии он назовет моделью.

Н.Н.Моисеев «Математик ставит эксперимент».

5.1. Определение понятия "модель".

Модель - способ познания мира - основной и единственный инструмент решения всех задач, возникающих перед человеком, инструмент научных исследований: анализа и синтеза.

Процесс получения и использования знаний включает три этапа.

1. Наблюдение, опыт - изучение феномена, накопление данных. В результате собирается информация для последующего анализа или синтеза.

2. Построение и изучение модели - выделение существенного, обобщение и выводы.

3. Проверка и использование выводов на практике. Принятие решений.

Существует множество определений понятия "модель". Приведем некоторые из них.

(1). Любое абсолютное знание познается через бесконечную цепочку относительных истин, приближенно отражающих те или иные черты объективной реальности. Эти относительные истины и есть модели. Язык описания модели определяет её характер. На математическом языке получается математическая модель[35].

(2). Модель является намеренно упрощенной схемой некоторой части реальной жизни, с помощью которой мы надеемся получить рекомендации к решению реальных проблем[36].

(3). Объект **М** является моделью объекта **А** относительно некоторой системы **S** характеристик, если **М** имитирует **А** по этим характеристикам[37].

(4) Математическая модель - это логическая структура, у которой описан ряд отношений между её элементами[38].

Модели могут служить для достижения одной из двух целей: *описательной или предписывающей*. Описательные модели служат для лучшего понимания, объяснения объекта. Предписывающие позволяют предсказать и (или) воспроизвести характеристики объекта, определяющие его поведение. Предписывающие модели всегда и описательные. Естественно, с помощью моделирования изучаются и сами модели: закономерности их построения, методология применения, закономерности развития. Модель строится с учетом законов математики, но и сама модель может привести к открытию новых законов.

---

[35]. Тихонов А.Н.,Костомаров Д.П. Вводные лекции по прикладной математике. М.,

[36] . Квейд. Анализ сложных систем. М., 1969

[37]

4 Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и её изучении. М., 1977

[38].

Модель в прикладных исследованиях может применяться в одном из следующих качеств:

средства *познания мира*, изучения характеристик и поведения реальных объектов в различных условиях;

средства *синтеза объектов* с требуемыми характеристиками (требуемым управлением), заданным поведением;

средства *обучения и тренировки*;

средства *общения* (язык, письменность).

Модель, разработанная для прикладных исследований, должна отвечать общим положениям (принципам) методологии прикладных исследований. Приведенные выше определения моделей носят общий характер. Пожалуй, в наибольшей степени моделям прикладных исследований соответствует определение (2). В этом определении подчеркивается, что модель лишь приближенное описание реальности, но содержащая именно те свойства этой реальности, которые позволяют решить конкретную прикладную проблему, для чего собственно модель и создается.

Однако зачастую прикладная задача, для решения которой вроде бы создается модель, оказывается у "исследователя" на втором плане, или совсем исчезает. Модель становится не инструментом решения конкретной прикладной задачи, а самоцелью и в таком качестве выступает как средство самоутверждения создателя модели, а порой просто иллюстрирует его неграмотность. Процент подобных "моделей" весьма велик. Здесь плохую роль могут сыграть приведенные выше формально верные для любого типа моделей (не только прикладных) определения вида (3).

В дальнейшем вне зависимости от конкретного содержания моделируемого фрагмента реального Мира будем называть этот фрагмент "оригинал", "система", "объект", "прообраз", а результат моделирования - "модель", "образ".

5.2. Определение модели в логико-алгебраических терминах.

Определение модели в логико-алгебраических терминах связано с формально-логическим исследованием закономерностей, проявляющихся при моделировании. Исходное положение здесь заключается в том, что любой обозреваемый фрагмент Мира может быть представлен в качестве частичной алгебраической системы, т.е. множества объектов на подмножестве которых определены некоторые операции и отношения.

Алгебраической системой будем называть тройку

$$\mathbf{U = <A, W_f, W_p>},$$

где **A** - произвольное множество;

$\mathbf{W_f}$, $\mathbf{W_p}$ - наборы определенных на **A** операций и предикатов, соответственно.

Сигнатура алгебраической системы - это множество операций и предикатов, определенных на **A**. Поскольку каждую **n**-арную операцию, определенную на **A**, можно заменить **n+1**-арным предикатом, то дальше будем рассматривать алгебраическую систему в виде:

$$U = \langle A, W_p \rangle.$$

Пусть **A** и **B** - два произвольных равномощных множества и W_p, R_q - семейства предикатов, определенные, соответственно, на **A** и **B**. Пусть каждому **a** из **A** соответствует только одно **b** из **B** и **f(a) = b**, **t(b) = a**. Предположим также наличие однозначного соответствия между семействами предикатов, т.е. для любого набора **p**, **q**, **k**, **l** и любого набора индексов $(i_1, i_2, ..., i_p)$, $(j_1, j_2, ..., j_q)$ из $W_p/k(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ip})$ следует

$$R_q/l(b_{j1}, b_{j2}, ..., b_{jq}) = (f(W_p/k)) = (f(a_{i1}), f(a_{i2}), ..., f(a_{ip}))$$

и наоборот. (Здесь **l** и **k** - арность предикатов).

При таком взаимно однозначном соответствии каждое из множеств **A** и **B** является *изоморфным отображением другого. Изоморфизмом* является и каждая из функций **f** и **t**. $f : A \to B$, $t : B \to A$.

Если, не меняя остальных предположений, требование взаимной однозначности заменить требованием однозначности только в одну сторону от **A** к **B**, то **B** будет *гомоморфным* образом **A** относительно заданного семейства предикатов.

Если для изоморфизма характерно отношение *эквивалентности*, т.е. рефлективность, симметричность, транзитивность, то в случае гомоморфизма остается рефлективность и транзитивность, что и характерно для моделирования, поскольку при отображении реальности естественно отказаться от симметричности. То есть модель является гомоморфным отображением объекта, при котором определенные второстепенные детали опущены. Подход к процессу моделирования как к выделению существенных деталей и исключению несущественных в процессе гомоморфного преобразования исходного фрагмента Мира связан с алгебраической идеей *факторизации* исходного множества.

Фактор-множеством исходного множества по данному отношению эквивалентности называется множество различных типов (классов) эквивалентности. Каждый класс эквивалентности может быть представлен (порожден) любым своим членом.

Отношением *конгруэнтности* называется отношение эквивалентности, подстановочное для любой определенной на данном множестве операции, т.е. такое отношение **Z**, что для любой, определенной на множестве **n**-местной операции **w** и для любых двух наборов из **n** элементов $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ из того, что $a_i \, Z \, b_i$, для всех **i** от **1** до **n** следует

$$w(a_1, a_2, ..., a_n) \; Z \; w(b_1, b_2, ..., b_n).$$

При отношении конгруэнтности на фактор-множестве определены те же операции, что и на исходном множестве и между элементами фактор -множества (элементами классов эквивалентности) сохраняются те же самые отношения и свойства. Таким образом, оказываются определенными фактор-множество и его *фактор-алгебра*.

Фактор-множество по данной конгруэнтности **Z** можно представить как **[A] = A/Z**, оставив для фактор-множества все операции, определенные на исходном множестве, т.е. для каждой **n**-местной операции **w** из **A** на фактор - множестве **[A]** можно определить **n**-местную операцию

$$\mathbf{w([a_1], [a_2], ..., [a_n]) = w(a_1, a_2, ..., a_n)},$$

где в качестве $\mathbf{a_i}$, $\mathbf{i=1, 2, ..., n}$ может быть взят любой представитель $\mathbf{a_i}$ из $\mathbf{[a_i]}$.

Такая факторизация является *гомоморфизмом*.

Приведем также понятие *метаморфизма*, как обобщения гомоморфизма. Пусть $\mathbf{U = <A, W_a>}$ и $\mathbf{V = <B, W_b>}$ - алгебраические системы, где **A** и **B** - произвольные множества, $\mathbf{W_a}$, $\mathbf{W_b}$ - сигнатуры.

Однозначное, не обязательно взаимно, отображение

$$\mathbf{f : U \to V = (A \to B, W_a \to W_b)}$$

такое, что для любого предиката $\mathbf{P_a/n}$ из $\mathbf{W_a}$ его образ

$$\mathbf{f (P_a/n) = P_b/n}$$

имеет тот же ранг, а для произвольных $\mathbf{(a_1, a_2, ..., a_n)}$ из **A** и $\mathbf{P_a/n}$ из $\mathbf{W_a}$ имеет место

$$\mathbf{P_a/n (a_1, a_2, ..., a_n) = P_b/n (f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n))},$$

называется *метаморфозным отображением* относительно сигнатур $\mathbf{W_a}$ и $\mathbf{W_b}$ или просто *метаморфизмом*, а **V** - метаморфозным образом **U**.

Каждый гомоморфизм является метаморфизмом, но не наоборот. Отказ от взаимной однозначности отображения приводит к гомоморфизму, а отказ от взаимно однозначного соответствия между сигнатурами, при условии соблюдения рангов предикатов образа и прообраза, приводит к метаморфизму. Произвольный метаморфизм системы **U** на систему **V** индуцирует на **V** некоторое отношение между предикатами. Это отношение называется ядерной эквивалентностью или ядерной конгруэнтностью предикатов из **U**, имеющих общий образ в **V**. Дальнейшим расширением понятий морфизма является *параморфизм.* Определение параморфизма может быть получено при замене требования равенства рангов предикатов требованием невозрастания рангов при отображении и условием "согласованности" отдельных частей определения, т.е. их совместной корректности.

Изложенные выше формально-структурные закономерности моделирования в чисто алгебраических требованиях можно обобщить следующим образом.

1. Абсолютно изоморфная модель действительности есть только идеализация. *Создание модели, изоморфной моделируемой системе невозможно, так как реальный мир, реальная действительность имеет бесконечную размерность*

2**.** *В моделях достаточно потребовать не эквивалентности их оригиналам, т.е. изоморфизма, а лишь гомоморфизма модели оригиналу*. К тому же сам по себе акт выделения интересующей нас подсигнатуры из полного набора атрибутов является гомоморфным преобразованием.

Под *фактор-системой (фактор-действительностью, фактор-множеством)* будем понимать результат отождествления элементов системы друг с другом, т.е. объединения элементов системы в классы эквивалентности, причем каждый класс эквивалентности может быть представлен любым своим членом. Отождествление проводится таким образом, что несущественные для решаемой задачи второстепенные детали опускаются, но на фактор-системе сохраняются отношения между элементами системы, а также между системой и окружающей средой, влияющие на результаты исследования, для которых создается модель.

Между элементами реальной системы и фактор-системы существует неоднозначное соответствие. Фактор-система является гомоморфным отображением системы, соответственно множеству элементов системы, отнесенному к одному классу соответствует в фактор-системе один элемент-представитель этого класса. Модель, в свою очередь, является изоморфным отображением фактор-сиситемы и гомоморфным отображением реальной системы. Поскольку модель ориентирована на решение конкретной задачи, в ней должны быть учтены все те свойства, которые, безусловно, влияют на результаты решения этой задачи. Излишние подробности, не влияющие или слабо влияющие на результаты, должны быть исключены. Подобные подробности могут заметно усложнить эксперимент и ухудшить точность решения.

3. Справедлива следующая *теорема о гомоморфизмах*.

Для любого гомоморфизма универсальной алгебраической системы U в алгебраическую систему V можно указать такое отношение конгруэнтности Z на U, что V изоморфна фактор-алгебре U/Z.

Фундаментальная методологическая функция теоремы о гомоморфизмах заключается в следующем.

Если считать, что каждая научная теория представляет собой гомоморфный образ описываемого ею фрагмента действительности, то получается, что такая теория есть изоморфный образ некоторой "фактор - действительности", т.е. совокупности классов, отождествляемых в результате некоторой абстракции объектов, иначе говоря, совокупности абстрактных понятий, между которыми вводятся соотношения, индуцируемые отношениями, имеющими место между исходными объектами.

Другими словами,

сколь бы разнообразны ни были гомоморфные модели Мира, или, точнее фрагментов Мира, все они, так или иначе, в некотором смысле, не только предопределяемы объективными атрибутами этого Мира, но содержаться во множестве его подмножеств.

Теорему о гомоморфизмах можно выразить и следующим образом.

*Точность любого описания - это точность соглашения о неразличимости отождествляемого***.**

В теореме о гомоморфизмах содержится принцип адекватности модели объекту.

При использовании теорем о гомоморфизмах для оценки адекватности объекта разрабатываемой модели трудности заключаются в практическом использовании понятий "ядро гомоморфизма", "конгруэнция". Целесообразно также ввести критерий достаточной факторизации, т.е. такой факторизации, когда выделяется "достаточная" подсигнатура, относительно которой производится гомоморфное преобразование и сохраняется только та информация об объекте, которая необходима для достижения цели, поставленной при исследовании. Значение такого подхода к отбору существенной информацией при создании моделей отмечается в большинстве работ по методологии моделирования. Такой подход фактически положен в основу следующего определения модели: "*формальное описание таких особенностей системы, которые существенны для целей исследования принято называть моделью"*. Бесплодность многих моделей является следствием использования при отождествлении не конгруэнции, а произвольных отношений эквивалентности. Не в меньшей мере бесплодность моделей связано с невыполнением критерия достаточности, причём к неуспеху приведёт как потеря необходимой информации, так и переполнение модели несущественными деталями. Зачастую критерий достаточности и конгруэнтность сознательно игнорируются, чтобы получить при моделировании желаемый результат, требуемую рекомендацию.

Теоремы о гомоморфизмах справедливы и при синтезе новых систем, например, "методом проб и ошибок". При синтезе систем методом проб и ошибок могут появляться элементы моделей, которые не войдут в гомоморфный образ синтезируемой системы. В итоге после синтеза в модели может быть выделено "собственное ядро модели", определённое в / 14 / для другой ситуации. Это "собственное ядро модели" будет изоморфным образом некоторой фактор - системы, которая, в свою очередь, будет гомоморфным образом систем (теорий), существование которых не противоречит законом реального Мира. То есть, здесь имеет место доказательство существования системы, называемое конструктивным. Подобных систем может оказаться и несколько. Если ни одной такой системы не существует, т.е. не существует (не может быть создана) система, фактор - множество которой было бы изоморфно полученной при синтезе модели, то моделирование на данном этапе не привело к желаемому результату.

Изучение только гомоморфного образа объекта происходит и тогда, когда в состав модели включена изучаемая система или её часть. В этом случае всё равно имеет место фактор существенной и несущественной информации.

Известно, что в процессе самопознания приходится иметь дело также со своим гомоморфным образом.

Таким образом, несмотря на то, что при логико-алгебраическом подходе к процессу моделирования изучаются только элементарные акты познания, применение полученных выводов, в частности, обобщённых теорем о гомоморфизмах, приводит, в большинстве случаев, к обоснованному заключению об адекватности модели изучаемому прообразу и может служить достаточно эффективным ограждением от многочисленных спекуляций, выдаваемых за модели. Важность этого в прикладных исследованиях очевидна.

5.3. Классификация моделей.

Существуют различные классификации моделей, которые характеризуют их свойства, особенности применения, происхождение. Знание классификации моделей является одним из условий их грамотного применения. При этом оказываются полезными следующие вопросы.

Какого вида модель более всего подходит для решения поставленной задачи? К какому классу относится разрабатываемая модель и в чём особенности её использования?

Приведём некоторые основные классификации.

1) *В зависимости от особенностей возникновения* модели могут быть разделены на три группы.

а) *Феноменологические* модели, возникающие в результате прямого наблюдения объекта, явления. По мере получения экспериментальных данных модель корректируется, делаются попытки угадать связи между элементами системы. Выдвигаются гипотезы о функционировании системы. Гипотезы служат основой создания модели, основанной полностью на осмыслении экспериментальных данных. Такие модели называют *теоретическими*.

б) *Асимптотические* модели- их появление результат дедукции. Новая модель появляется как частный случай более общей модели. Переход от феноменологических моделей к асимптотическим характеризует определённую зрелость науки. Классический пример асимптотических моделей – математические описания движения различных объектов.

в) Модели *ансамблей* - возникли в результате процесса индукции. Новая модель является обобщением или синтезом отдельных моделей. В моделях ансамблей свойство отдельных объектов исследуются с учётом взаимодействия объектов. Модели ансамблей не могут быть получены путём механического объединения моделей отдельных объектов в модель системы. При объединении объектов в систему внутреннее свойство объектов могут изменяться, что особенно заметно при изучении социально-экономических систем. Появление новых свойств при объединении некоторых облетов в систему порой не вытекает непосредственно из свойств объектов и оказывается не предсказуемым.

2) *В зависимости от способа описания свойств объекта* различают модели вербальные, изобразительные, аналоговые, символические.

Вербальные – это словесные, описательные модели. В изобразительных моделях изучаемые свойства объекта представлены этими же свойствами, но, как правило, в другом масштабе. Например, модель самолёта для продувки в аэродинамической трубе, модель солнечной системы в планетарии, модель гидроузла в конструкторской организации.

В *аналоговых* моделях свойство объекта отображаются набором специфических свойств модели. Так, при аналоговом моделировании полёта самолёта параметры (координаты, скорость) самолёта отображаются в модели значениями напряжения, силы тока. Аналогом высоты поверхности над уровнем моря являются на карте соответствующие линии - горизонтали.

В *символических (знаковых)* моделях представление величин и отношений между ними осуществляется с помощью букв, чисел и других знаков. Это наиболее общий тип моделей. Их основное качество - "вариантность". Одним знаковым описанием кодируются физически различные системы. Бесконечное число конкретных значений параметров системы и, соответственно, бесконечное число вариантов её поведения могут быть изучены на одной и той же модели.

При исследовании объекта могут быть использованы все четыре типа моделей. Вербальные и изобразительные модели при этом могут рассматриваться в качестве инструмента первого приближения решения задачи. Возможны комбинации различных типов моделей. Так, в тренажёры включают и аналоговые и знаковые блоки.

1) *В зависимости от способа отображения* объекта различают модели аналитические и имитационные.

В *аналитических* моделях используются для описания поведения системы функциональные соотношения между входными переменными, компонентами модели и выходными переменными, в том числе, при необходимости, зависимости для вычисления критериальной функции. Для заданных входных возмущений обеспечивается вычисление исходов модели без имитации реальных процессов, протекающих в объекте. Как правило в алгоритмах аналитических моделей педусмотрено доведение решения задачи до численных значений Соответствнно интенсиное развитие получили численные методы. Для реализации решений на ЭВМ требуетс перевести численные модели в в программы и информационные массивы, т.е.создать инфрмационно-програмные модели, рализуемые на ЭВМ,

Явные зависимости, связывающие искомые величины с папаметрами системы и начальными условиями ее изучения, оказывается возможным получить только ля относительно простых систем. Для сложных систем приходится идти на упрощенное представление реальных процессов и структуры системы, дающие возможность описать поведение системы таким образом, чтобы изучить хотя бы общие свойства системы, наприер оценить устойчивость системы, сходимость реального входного процесса. Наличие математического аппарата и относительная быстрота получения результатов способсствуют успешному применению аналитических моделей.

Для аналитических моделей наиболее характерны вербальные и знаковые способы описания.

В случае сложных и многообразных явлений, протекающих в сложной системе, упрощенные аналитические модели становятся слишком грубыми для описания поведения сложной системы в реальных условиях ее существования. Оказывается необходимым перейти к имитационному моделированию.

Имитационная модель имитирует исследуемый объект, течение реального процесса.

Имитационное моделирование в широком смысле означает процесс создания логико-математической модели исследуемой системы, описывающей структуру и поведение системы, и проведение экспериментов на ЭВМ с целью получения данных о функционировании системы в течение определенных интервалов времени, а также при использовании специальных средств с целью анализа или синтеза системы. Для имитационных моделей используются все способы описания.

Поведение системы описывается в имитацтионной модели набором алгоритмов, позволяющим отобразить реальные процессы в системе и получить возможность оценить поведение системы в каждой конкрелной реальной ситуации. В сосав имитационной модели может войти и сама изучаемая система.

Термин "реальный процесс" здесь и далее используется в смысле процесс "существующий” или “способной принять форму существования". Это равным образом относится к аналитическим и имитационным моделям.

Выбор между аналитической и имитационной моделями определяется задачами исследования, уровнем знаний об объекте и квалификацией исследователя. Рекомендуется использование имитационной модели сложной системы в следующих случаях:

(1) Если не существует законченной постановки задачи и идет процесс изучения явления.

(2) Когда имитационное моделирование оказывается единственным способом исследования сложной системы из-за невозможности ее набдюдения в реальных условиях.

(3) Если аналитическая модель имеется, но ее использование очень трудоемко.

(4) Когда изучаются новые ситуации в сложной системе и имитация служит для предварительной проверки новых стратегии или правил перед проведением эксперимента на реальнойй системе

(5) Когда необходимо осуществлять наблюдение за поведеникем системы или контролировать протекание процесса, в том числе с целью уточнения параметров системы в задачах синтеза.

(6) При подготовке специалистов и освоении новой техники.

Для лучшего уяснения разницы между аналитическими и имитационными моделями рассмотрим примеры.

В аналитической модели преобразование стационарного случайного процесса линейной системой описывается в следующем виде:

$$\mathbf{M_{вых} = M_{вх} \cdot W(0)};$$

$$\mathbf{G_{вых}(w) = G_{вх}(w) \cdot |W(j\omega)|^2},$$

где $\mathbf{M_{вх}}$, $\mathbf{G_{вх}(w)}$, $\mathbf{M_{вых}}$, $\mathbf{G_{вых}(w)}$ – математические ожидания и спектральные плотности входного и выходного процессов, соответственно;

$\mathbf{W(j\omega)}$ - амплитудно-фазовая характеристика системы.

Если характеристики входного сигнала и передаточная функция системы известны, то характеристики выходного сигнала вычисляются по приведенным зависимостям.

При имитационном моделировании создается модель, в которой с определенной достоверностью (подробностью, необходимой для достижения цели исследования) реализуется структура исследуемой системы, (в простейшем случае реализуется система с передаточной функцией **W(s))**. При проведении эксперимента на вход модели подаются реализации входного сигнала. Если входной сигнал является случайным, то потребуется достаточно большое число его реализаций, обычно не менее **50**. Подобный подход используется и для "вскрытия" структуры объекта, в таком случае модель является "черным ящиком".

Другой пример. Случайное блуждание частицы по целочисленным точкам действительной прямой, при котором на каждом шаге частица с вероятностью $\mathbf{p}$ смещается на **1** и с вероятностью $\mathbf{q = 1 - p}$ на **-1**.

Пусть $\mathbf{i}$ - начальное положение частицы, $\mathbf{j}$ - положение частицы через $\mathbf{n}$ шагов, $\mathbf{n = 0, 1, 2, ...}$ и $\mathbf{P_{ij}(n)}$ – вероятность перехода частицы за $\mathbf{n}$ шагов из состояния $\mathbf{i}$ в состояние $\mathbf{j}$. При $\mathbf{n < |j - i|}$ переход из $\mathbf{i}$ в $\mathbf{j}$ не возможен. При $\mathbf{n > |j - i|}$ за $\mathbf{n}$ шагов частица может перейти лишь в те состояния, для которых разность $\mathbf{|j - i|}$ имеет ту же чётность, что и $\mathbf{n}$, т.е. число

$\mathbf{m = (n + |j - i|)/2}$ является целым.

Пусть $\mathbf{j > i}$, тогда попасть из состояния $\mathbf{i}$ в состояние $\mathbf{j}$ можно только, когда из всех $\mathbf{n}$ шагов ровно $\mathbf{m}$ совершается в положительном направлении. Вероятность этого

$$\mathbf{P_{ij}(n) = C_n^m p^m q^{n-m}}$$

Аналогично вычисляется вероятность $\mathbf{P_{ij}(n)}$ для случая $\mathbf{j < i}$.

В итоге построена аналитическая модель, с помощью которой можно получить вероятность перехода частицы за $\mathbf{n}$ шагов из **i-**го состояния в любое **j**-ое состояние.

При имитационном моделировании, чтобы получить искомую вероятность потребуется провести серию из **N** испытаний, каждое из которых включает **n** шагов. В каждой серии моделируется движение частицы, начиная с **i**-го начального состояния. При этом, для определения направления движения частицы на каждом шаге разыгрывается случайная величина, принимающая значение **+1** или **-1** с заданными вероятностями. При каждом испытании записывается, где оказалась частица после **n** шагов.

Пусть после **N** испытаний, каждое из которых состояло из **n** шагов, частица $\mathbf{K_j}$ раз оказалась в состоянии **j**. Тогда $\mathbf{P_{ij}(n) = K_j / N}$. Для данного простого случая преимущество аналитической модели очевидно. В более сложных случаях, например трёхмерного блуждания, или блуждания с поглощающими экранами и пр. преимущество аналитической модели будет не таким очевидным.

Таким образом, проведение экспериментов на имитационной модели означает проведение «прогонов» с целью сбора, накопления и последующей обработки статистики изменений выходных переменных модели. При этом изучается функционирование реальной системы при различных условиях ее функционирования.

При поиске лучшего решения (структуры и (или) алгоритмов управления) имитационное моделирование дает возможность проанализировать только относительно ограниченное число вариантов системы. Когда необходимо обеспечить оптимальное в определенном смысле решение, простым перебором ограниченного числа вариантов задачу не решить. Учет динамических и стохастических аспектов функционирования сложных систем на этапе анализа и синтеза их структур приводит к необходимости совместного использования имитационных и аналитических оптимизационных моделей.

Продолжим рассмотрение классификации моделей.

2) *По отношению к управлению* модели разделяются на *описательные* (не содержащие управление) и *конструктивные* (с управлением).

В конструктивных моделях может ставиться задача достижения одного из трёх видов оптимумов*: равномерного, статистического, минимаксного***.**

3) *В зависимости от цели исследования* можно выделить модели *функциональные,* созданные для изучения преобразования объектом входных сигналов, и *структурные****,*** предназначенные для изучения внутренней структуры объекта.

4) *По отношению к предметной области* (ПО) модели делятся на *независимые* от ПО, *настраиваемые* на ПО, *ориентированные* на ПО.

Модели перед их применением необходимо наполнить конкретной информацией.

Модель без наполнения конкретной информацией называется *общей****,*** *абстрактной***.** При этом возможны различные уровни абстракции.

Модели с высоким уровнем абстракции изучаются самостоятельно. Полученные при этом результаты имеют общую значимость для всех случаев их наполнения конкретной информацией.

Модель, наполненная информацией из конкретной предметной области, называется *конкретной***.** Задача наполнения общей модели информацией при существенном объеме последней привела к разработке *баз и банков данных*. Базы обеспечивают хранение данных, в банках кроме хранения информации, указания способа и форм её вызова предусматривается совокупность обслуживающих операций, в том числе первичная обработка информации.

*7****).*** *В зависимости от характеристик объекта, вида входной информации и цели исследования* различаются модели:
- детерминистические, стохастические и модели с неопределенностями;
- непрерывные и дискретные;
- статические и динамические;

- линейные и нелинейные.

В последней классификации используются отдельные свойства модели. В реальной модели будет иметь место “набор” свойств. Так, например, некоторая модель может быть дискретной, стохастической, линейной, динамической.

Существуют и многие другие, кроме рассмотренных выше, классификаций моделей. Например, в классификации, предложенной А.Н.Лебедевым[39] в основу классификации моделей положены их важнейшие признаки, к которым отнесены:

(1) «закон функционирования и характерные особенности выражения свойств и отношений оригинала;

(2) основания для преобразования свойств и отношений модели в свойства и отношения оригинала».

По *первому признаку* модели разделены на *логические* (образные, знаковые, образно-знаковые), функционирующие по законам логики в сознании человека, и *материальные* (функциональные, геометрические, функционально-геометрические), функционирующие по объективным законам природы.

Образные (иконические) модели выражают свойства оригинала с помощью наглядных образов, имеющих прообразы среди элементов оригинала. *Знаковые (символические*) модели выражают свойства оригинала с помощью условных знаков или символов (математические выражения, химические формулы и пр.), *образно-знаковые* модели обладают признаками образных и знаковых моделей (схемы, графы, чертежи).

Функциональные, геометрические и функционально-геометрические модели отражают соответственно только функциональные, только пространственные и одновременно функциональные и пространственные свойства оригинала. В зависимости от физической и разнородности с оригиналом функциональные и функционально-геометрические модели разделяются на *физические* и *формальные*.

По второму признаку различают условные, аналогичные и математические модели.

Условные модели выражают свойства и отношения оригинала на основе принятого условия или соглашения. Сходство с оригиналом может совсем отсутствовать. К ним относятся все *знаковые и образно-знаковые* модели.

Аналогичные *модели обладают сходством с оригиналом, достаточным для перехода к оригиналу на основании умозаключения по аналогии.*

Математические модели обеспечивают переход к оригиналу, фиксацию и исследование его свойств и отношений с помощью математических методов. Среди них выделяют расчетные и соответственные. *Расчетные* модели выражают свойства и отношения оригинала с помощью математических представлений – формул, уравнений, графиков, таблиц, операторов, алгоритмов и т.д. В *соответственных*

[39] А.Н,Лебедев «Моделирование в научно-технических исследованиях». М., 1989

моделях переменные величины связаны с соответствующими переменными величинами оригинала определенными математическими зависимостями.

Важнейшими разновидностями соответственных моделей являются *подобные,* переменные величины, пропорциональные соответствующим переменным оригинала. Они также могут быть логическими и материальными. Подобные материальные модели разделяются на *аналоговые* (непрерывные), *цифровые* (дискретные) и *аналого-цифровые* в зависимости от того какие величины связывает их математические описание непрерывные, дискретные и одновременно и те и другие.

По мнению автора, «приведенная классификация обеспечивает образование рациональных наименований моделей, четко указывающих на их важнейшие характерные, отличительные особенности».

В настоящем пособии эта классификация приведена, как предмет для размышления: действительно ли она позволяет хорошо систематизировать объекты или определенная усложненность делает классификацию не удобной для применения? В частности, первоначальное разделение моделей на функционирующие «по законам логики в сознании человека» и функционирующие «по объективным законам природы» представляется не правомерным.

5.4. Общие требования к моделям.

Общие требования к моделям при прикладных исследованиях непосредственно вытекают из особенностей методологии и логики прикладной математики и могут быть сформулированы следующим образом.

1) ***Требование «непротиворечивости»***

Математическая основа модели должна быть непротиворечивой и удовлетворять законам математической логики

2) *Требование адекватности модели моделируемой системе.*

Адекватность модели объекту определена выше теоремой о гомоморфизмах, как точность соглашения о неразличимости отождествляемого. Предполагается, что при этом будет выполнено и условие достаточной факторизации, то есть будет получена модель, изоморфная фактор-системе, содержащая всю информацию, действительно необходимую для решения поставленной задачи и принятия конкретного решения.

Таким образом, модель, адекватная моделируемой системе, - это модель, изоморфная фактор-системе, в которой обеспечивается совпадение модели с объектом в той мере и с такой степенью точности (степенью загрубения), с которой это достаточно для решения поставленной задачи.

Поскольку модель ориентирована на решение конкретной задачи, в ней должны быть учтены все те свойства, которые, безусловно, влияют на результаты решения этой задачи. Излишние подробности, не влияющие или слабо влияющие на результаты, должны быть исключены, поскольку. могут заметно усложнить эксперимент и ухудшить точность решения.

Проблема равнопрочности этапов исследования, возникающая при построении модели, рассматривалась в пункте 3.4

Требование адекватности в полной мере относится и к использованию математических моделей социально-экономических, биологических и других систем, которые называют "мягкими" вследствие характерных для этих систем слабой конструктивности, расплывчатости причинно-следственных связей, неоднозначности реакции на внешние возмущения. Для подобных систем справедлив принцип конструктивного поведения Дж. Форестера, согласно которому дать удовлетворительный прогноз о поведении сложной системы, используя только собственный опыт и интуицию, как правило, невозможно - сложная система реагирует на внешнее воздействие зачастую совсем иначе, чем это ожидает интуиция, основанная на общении с достаточно простыми системами. Ранее уже отмечалось, что в этом случае требуется перейти к интуиции более высокого порядка, и для изучения подобных систем развиваются новые методологические подходы, при этом система исследуется не как часть реального мира, а как системно-организованный процесс её изучения, предполагающий возможность различных интерпретаций исследуемой системы. В таких случаях конструируется сразу несколько моделей, отвечающих различным картинам мира участников исследования, и создается некоторая структура для сравнения результатов, полученных на различных моделях, отвечающих различным картинам мира. То есть модель мягкой системы на обеспечение необходимой адекватности в общем случае не претендует. Результаты исследования, полученные на моделях, сравниваются с реалиями мира, возможные последствия рекомендаций, полученных с помощью моделей, тщательно изучаются.

3) ***Требование достаточной простоты***.

Выполнение требований простоты и адекватности в общем случае взаимосвязаны, что иллюстрируется диаграммой, показанной на рис. 5.2 .

На диаграмме (рис.5.2) степени адекватности и простоты изменяются условно от **0** до **1**. Область возможных решений заштрихована. При наличии подобной диаграммы можно определить, какой степени адекватности будет соответствовать заданная степень простоты и наоборот. (На диаграмме это иллюстрируется точками **К** и **Л**)

Практически получить линии, характеризующие взаимную зависимость адекватности и простоты, не легко, но выяснить существуют ли условия для работы в "области возможных решений" можно и нужно. Кроме того, не исключаются случаи, когда более простая модель обеспечивает лучшую адекватность. Это, например, случается, когда модель перегружена второстепенными не нужными для решения задачи деталями.

.

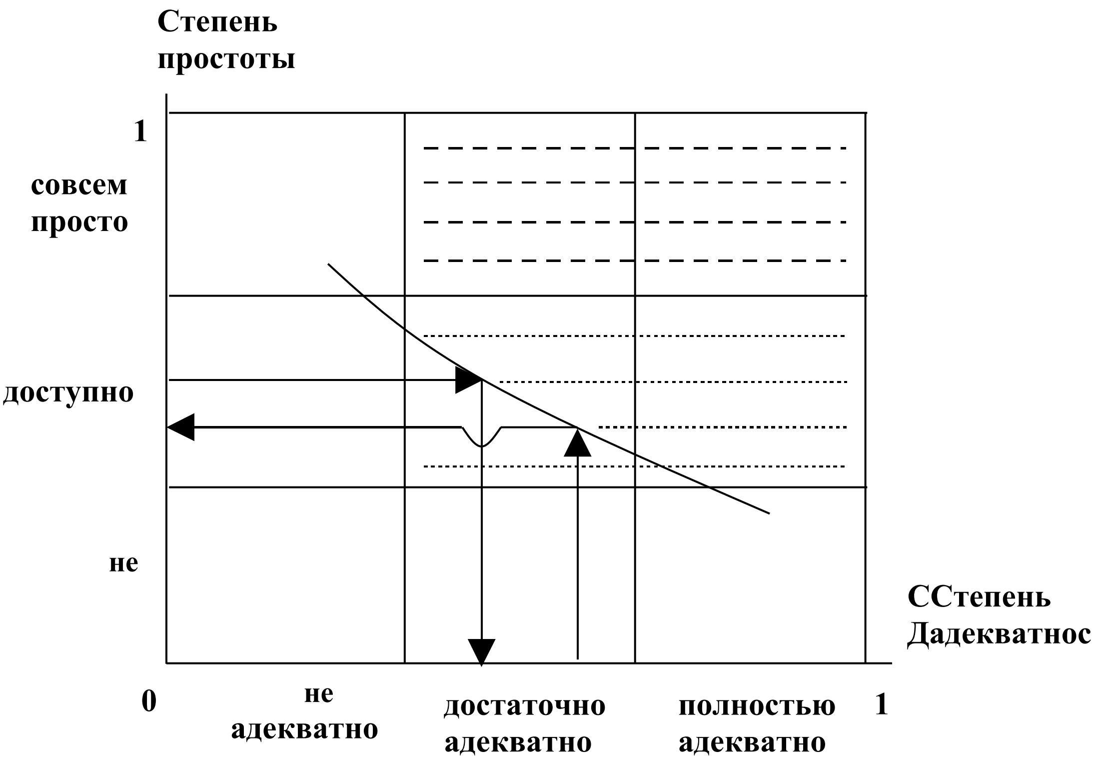

Рис. 5.2

4) Требование замкнутости модели. Если известно начальное состояние объекта и известны на некотором интервале внешние воздействия и управления, то модель объекта должна позволить определить на этом интервале все фазовые переменные, характеризующие состояние объекта.

5) ***Требование устойчивости***.

Модель должна быть устойчива (вычислительный процесс не должен расходится) для тех условий и возмущений, для которых устойчив моделируемый объект. Следует отметить, что существует много показателей устойчивости.

Устойчивость модели (сходимость метода) в каждом конкретном случае связана с определенными условиями. Например, иногда при включении в модель аналоговой ЭВМ неустойчивость возникает вследствие собственных "люфтов" ЭВМ. И при использовании в модели цифровой ЭВМ неустойчивость может появится там, где в моделируемом непрерывном процессе устойчивость гарантирована.

6*) Требование аддитивности и. удобства*

В модели должно быть предусмотрена возможность уточнения её структуры и обновления данных.

Вся используемая в модели информация, в том числе все промежуточные и конечные результаты должны представляться оперативно в удобной форме. Соответственно, в модель должны быть включены сервисные программы, обеспечивающие простоту и удобство её использования. Требование удобства в имитационных моделях сложных систем означает требование обеспечения эффективного интерактивного режима функционирования модели, в том числе, возможности: получения на любом этапе моделирования, необходимой для исследователя информации в требуемом виде, корректировки параметров модели и уточнения структуры вводимой информации, задать машине вопрос и получить на него ответ

К основным требованиям, предъявляемым к моделям, следует также перечисленных выше, отнести: *наглядность* (обязательно при имитационном моделировании); *однозначность* (недопустимость обозначения одним символом различных объектов); *определенность* (сопровождение четкими указаниями), *обеспечение согласования размерностей*

Требование «*согласование размерностей*» рассмотрим подробнее.

В Международной системе единиц (СИ) в качестве *основных* единиц приняты: метр (м), килограмм (кг), секунда (с), ампер (А), кельвин (К), кандела (кд), моль (моль). Единицы измерения остальных величин выражаются через основные и называются *производными.* Совокупность основных и производных единиц образуют *систему единиц измерения.*

Для установления производных единиц измерения пригодны только *«степенные комплексы»* с постоянными коэффициентами равными единице. Степенные комплексы, связанные в алгоритмах модели знаком алгебраической суммы *должны быть однородными, т.е. иметь одинаковые производные единицы.* Физический смысл сконструированной в модели производной единицы иногда трудно объясним, но такое объяснение всегда способствует лучшему пониманию модели

Обозначим физическую величину в виде:

$\mathbf{x = x_p\{x\}}$ $\mathbf{x_p}$ – числовое значение величины, $\{\mathbf{x}\}$ –ее размерность.

Пусть: $\mathbf{y = \frac{x_1^2 x_2}{x_3^2}}$, тогда размерность определится следующим степенным комплексом: $\mathbf{\{y\} = \frac{\{x_1\}^2\{x_2\}}{\{x_3\}^2}}$.

Коэффициенты в формулах могут быть размерными и безразмерными, т.е. уравнение в виде степенного комплекса может содержать коэффициент размерность которого необходимо определить. Необходимо также уяснять физический смысл коэффициента.

Пример: Закону всемирного тяготения соответствует формула $\mathbf{F = k m_1 m_2 l^{-2}}$. В системе СИ: $\mathbf{\{F\} = \frac{кг \cdot м}{c^2}}$, $\mathbf{\{m\} = кг}$, $\mathbf{\{l\} = м.}$

Соответственно**:** **k** = **G** – гравитационная постоянная, размерность которой $\mathbf{\{k\} = м^3 кг^{-1} c^{-2}}$.

5.5. Структура моделей.

В самом общем виде модель может быть представлена в виде схемы, показанной на рис. 5.1.

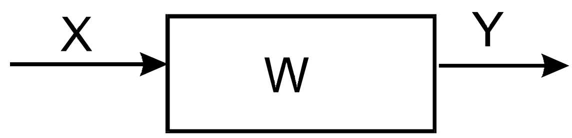

Рис.5.1.

На рис.5.1 обозначено :

X - вектор входных (экзогенных) переменных;

Y - вектор выходных переменных - исходы модели;

W - оператор модели, обеспечивающий преобразование входной информации в выходную в соответствие с задачей, решаемой на модели..

В общем случае в состав модели также входят: компоненты; параметры; переменные; функциональные зависимости; ограничения, целевая (критериальная) функция.

Под компонентами модели реальной системы (объекта) понимаются модели отдельных элементов (подсистем) моделируемой системы (объекта).

Параметры после их определения и ввода в модель являются постоянными величинами. Некоторые параметры могут быть переменными. Определение значений параметров модели может рассматриваться как самостоятельная задача.

Переменные величины модели делятся на экзогенные и эндогенные. Экзогенные переменные (внешние по отношению к модели, «входные») являются следствием воздействия на систему окружающей среды или управлений. Эндогенные переменные характеризуют процессы, протекающие в модели. В каждый момент времени они либо характеризуют состояние модели - такие переменные также называются фазовыми координатами, либо определяют исходы, генерируемые моделью, - такие эндогенные переменные называются выходными или исходами системы.

Следует также различать управляемые и неуправляемые переменные.

W - оператор системы, определяет функциональные соотношения между переменными модели.

Ограничения устанавливают пределы изменения переменных, а также и допустимые пределы расхода ресурсов и средств на решение задачи, в том числе на время, которое можно использовать на исследование, чтобы получить результат к требуемому моменту. Ограничения могут быть искусственными - устанавливаются разработчиком модели или естественными – являются следствием свойств, присущих системе и окружающей среде.

Целевые (критериальные) функции (функционалы, отношения предпочтения) отражают цели исследования и содержат правила вычисления соответствующих критериев.

Возможны следующие варианты задач, решаемых на модели.

(1) Прямая задача: известны X и W, необходимо найти Y.

(2) Обратная задача 1: известны Y и W, найти X.

(3)Обратная задача 2: известны X и Y, найти W.

В задаче (1) в состав модели может включаться реальная система или ее подсистемы. Для обратной задачи (3) возможны два варианта в зависимости от решаемых задач: (3.1) анализ структуры оператора системы, (3.2) поиск оператора, обеспечивающего требуемое преобразование входной информации. В обратной задаче (3.1) при умелом подборе входной информации по анализу реакции системы на входное возмущение вскрывается структура системы. Здесь возможны случаи "черного ящика" - оператор системы полностью не известен, и "серого ящика" - структура известна, не известны значения параметров. Обратная задача (3.2) может быть задачей синтеза. Поиск оператора для получения требуемого преобразования входного сигнала обеспечивается специальными оптимизирующими процедурами, реализуемыми в моделях.

Дискретная природа функционирования цифровой ВМ требует, как правило, приведение исходного математического описания функционирования динамического объекта к виду удобному для моделирования. Прежде всего нужна дискредитация непрерывных величин, что обеспечивается квантованием по времени и по уровню. Квантование связано с появлением ошибок, зависящих от временного интервала квантования и минимальным шагом квантования по уровню. Обычно, при должном выборе шагов квантования эти ошибки не имеют решающего влияния на точность получаемых результатов. Приведение исходного материала к виду удобному для моделирования является по существу алгоритмизацией математического описания оригинала – описанию правил выполнения расчетных операций над числами.

5.6. Этапы моделирования. Блок-схема этапов моделирования.

Этапы моделирования или, что одно и тоже, этапы прикладного исследования показаны на блок-схеме рис.5.3.

На схеме видны многочисленные обратные связи - возвращение к предыдущим этапам после анализа промежуточных и конечных результатов моделирования. Как отмечалось выше, это характерно для прикладных исследований. В процессе эксперимента уточняются постановка задачи, её формализация, допущения, совершенствуются вычислительные алгоритмы.

При моделировании сложной системы часто оказывается удобным, а порой и необходимым, ввести декомпозицию - деление системы на модули, после чего сложная система будет состоять из связанных между собой моделей этих модулей. Структура полученной таким образом сложной модели должна соответствовать структуре и иерархии исходной системы, точнее, полученная модель должна быть адекватной исходной модели в том смысле, как это определено выше для прикладных исследований.

Соответственно, создание модели сложной системы включает две дополнительные операции:

(1) декомпозицию системы, деление её на модули;

(2) согласование отдельных модулей, их входов и выходов.

Декомпозицию и согласование при создании модели сложной системы следует отнести к этапу 2 (рис.5.3.).

Для моделей сложных систем характерно, что:

- одна и та же информация оказывается необходимой для разных блоков моделей модулей системы; при совместной работе блоков сложной модели требуется видоизменение информации при передаче её от одного блока к другому (т.е. интерфейсная адоптация). В связи с этим при моделировании сложной системы особое внимание уделяется способам хранения информации и организации информационных потоков.

Достоинство математики - применение одинаковых моделей для изучения различных по физической природе и решаемым задачам систем. Это не противоречит утверждению, что для решения каждой конкретной проблемы нужна своя индивидуальная модель. Как бы ни была сложна и "индивидуальна" модель, всегда при её создании используются разработанные ранее для других целей блоки моделей и методы, а также накопленный методический опыт.

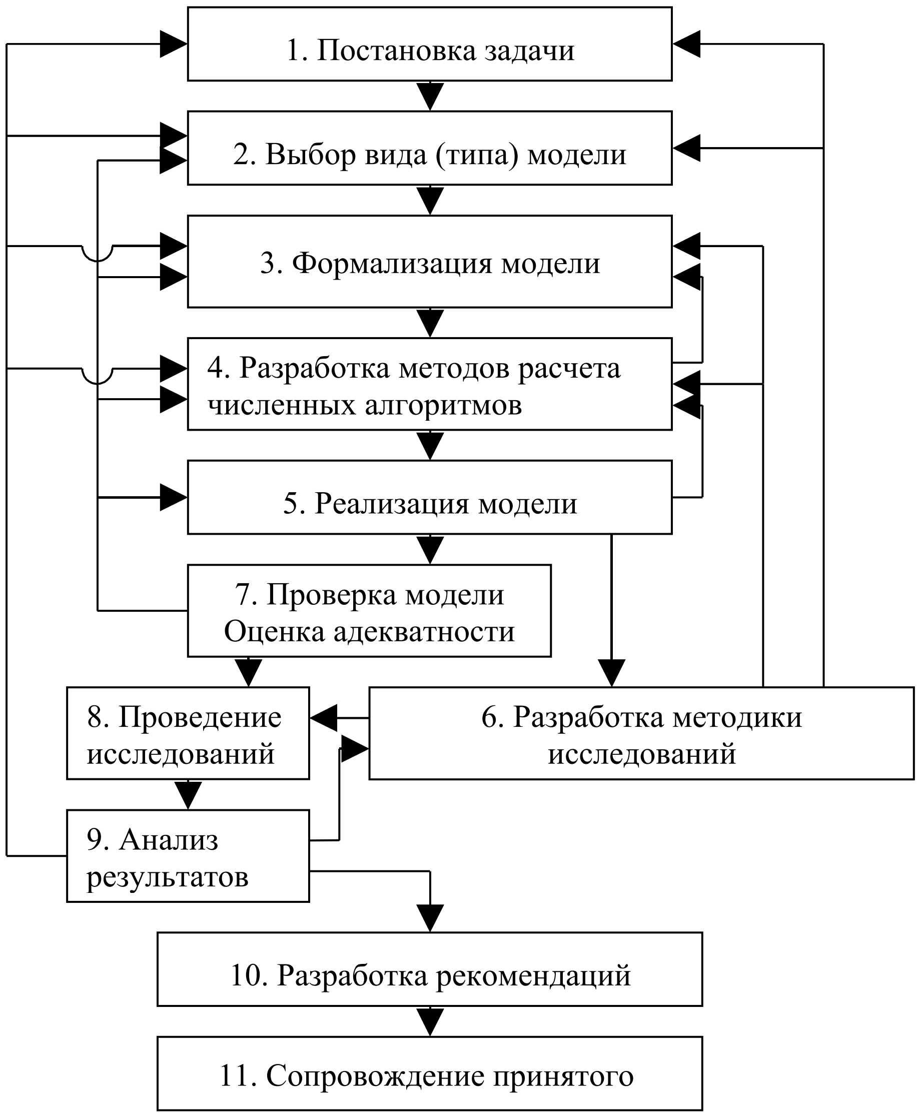

Рис.5.3.

6. Постановка задачи

6.1. Значение и содержание этапа “Постановка задачи”.

Постановка задачи является 1-м этапом моделирования. Решающее значение этого этапа для успеха исследования отмечается во всех работах, посвященных *методологии моделирования*.

«Сформулировать задачу на языке математики - это значит более, чем наполовину решить её.» /*Е.Вентцель*/.

«Правильное формулирование задачи - это научная проблема не менее сложная, чем решение задачи, и не нужно надеяться, что кто-то другой сделает это за вас.» / *Н.Бахвалов* /.

Процесс выделения «задачи», поддающейся математическому анализу, часто бывает продолжительным и требует владения многими навыками, не имеющими отношениями к математике (например, беседы с нематематиками, работающими в данной области, чтение всевозможной литературы, имеющей отношение к делу, поиск аналогий является важным элементом процесса прстановки задачи).

Ошибка в постановке задачи может однозначно определить неудачу дальнейших исследований. Вот как об этом образно написал Валерий Брюсов: «*Однажды ошибясь при выборе дороги,*
Шли вдаль ученые, глядя на свой компас.
И был их труд высок, шаги их были строги,
Но уводил их прочь от цели каждый час”.

Известна следующая оценка времени на отдельные этапы прикладного математического исследования:

- постановка задачи - 40-50 % ;
- разработка модели - 20-30 % ;
- эксперимент, анализ результатов - 20-30 % .

.При постановке задачи исследования требуется разобраться с целым рядом обстоятельств, связанных с необходимостью и возможностью решения задачи, в том числе:

1) Изучить объект моделирования (систему, процесс).

2) Изучить условия (внешнюю среду) функционирования, существования объекта.

3) Определить цель исследования (необходимость решения каких либо проблем, связанных с функционированием системы, создание новой системы и др.).

4) Провести анализ доступной информации.

5) Выявить релевантные факторы.

6) Сформировать систему альтернатив.

7) Выбрать критерий, систему критериев оценки качества решения задачи.

8) Определить ограничения и допущения.

9) Изучить условия проведения предстоящего эксперимента и установить его масштаб.

10) Формализовать (сформулировать в математических терминах) задачу.

Вследствие взаимосвязанности перечисленных этапов, строгой последовательности их проведения не существует. Так, уяснить цель исследования и на доматематическом уровне сформулировать эту цель возможно только после определенного ознакомления с объектом, условиями его функционирования и, в определенной степени, с другими перечисленными выше аспектами, определяющими вид модели. Изучение объекта продолжается в течение всего этапа постановки задачи. После анализа доступной информации может последовать определенная корректировка задачи исследования. Более того, уточнение постановки может потребоваться на любом этапе моделирования, в том числе по результатам моделирования (как это показано на схеме этапов моделирования).

Н.П. Федоренко, анализируя цели и стратегии социально-экономического развития России, отмечает, что «целеполагание (постановка задачи) закладывает характер, направленность и специфику» формирования структуры управления хозяйством. «Описание любой экономической системы начинается с декларирования целей, направлений и задач ее развития, причем зачастую эти декларации либо не совпадают с реальными целями (например, декларирование западноевропейскими державами XIX века целей колониальной политики), либо остаются благими пожеланиями (которые, например, формулировались в недавнем прошлом в СССР каждую пятилетку) Подлинные цели, выдвигаемые и достигаемые той или иной общественной или экономической системой, редко бывают четко определены и количественно описаны»[40].

Из приведенной цитаты следует важность обоснованной постановки задачи и то, что за *декларируемой* постановкой задачи может скрываться *совсем иные* цели.

Далее приводится краткое пояснение обстоятельств, связанных с этапом постановка задачи**.**

6.2. Изучение объекта (системы, процесса) исследования

Характер изучаемого объекта (системы) решающим образом зависит от двух обстоятельств: физической природы объекта и цели его функционирования. Дополнительные сложности возникают при изучении так называемых *организационных систем (оргсистем),* то есть таких систем, в состав которых входят как пассивные, так и активные элементы.

При изучении объекта (системы) требуется понять его значение, цели и перспективу существования и развития, границы и взаимодействие с окружающей средой. Необходимо изучить структуру системы: составить список элементов системы (подсистнм, факторов переменных),

---

[40] Н.П.Федоренко. «Цели и стратегии социально-экономического развития России». ЭиММ, 2003, т.39, № 2.

проанализировать взаимосвязи элементов системы. Все это необходимо для обоснованной постановки цели исследования и разработки в последующем модели, адекватной объекту и цели исследования, т.е. для выделения из изучаемой системы гомоморфной фактор-системы, необходимой для решения поставленной задачи

В общем случае *цель системы* заключается в достижении наиболее эффективным (оптимальным, рациональным) способом наилучшего, в каком-то смысле, состояния (достижения цели) с учетом реальных ограничений. Предполагается, что цель системы («желаемое» состояние системы) известна. Но, как раз, это зачастую либо совсем не известно, либо сформулировано в общем виде, без анализа существующих в системе проблем и причин, эти проблемы вызвавших.

Задача изучения объекта трудоемка, исследователи должны обладать необходимыми знаниями и привлекать к анализу объекта нужных «узких» специалистов. При изучении функционирования сложных систем порой возникает трудность и в определении границ системы. Возможно, окажется предпочтительным расширить границы системы, включить в ее состав при моделировании некоторые приграничные элементы

Академик Н.Н.Моисеев на вопрос: "почему же сейчас потребовалось "щупать руками" ту реальность, которую надо моделировать?", ответил: "...нельзя правильно построить эксперимент, понять, что в деятельности описываемой твоими моделями важно, а отчего при формальном описании можно абстрагироваться, если знаешь описываемые отношения только понаслышке, с чужих слов, или, что то же самое, по массивам данных". И далее "..чтобы понять, что нужно учитывать при моделировании кооперативных механизмов, - и понять, так сказать, на интуитивном уровне, чтобы потом свободно располагать этим пониманием, нужно достаточно наглядно представлять себе реальное поведение объекта, реальные реакции определённых групп лиц на те или иные ситуации"[41].

Н.Винер в свое книге «Я - математик» неоднократно обращает внимание на то, что знание физической сути исследуемых фрагментов реального мира является существенным подспорьем в теоретических исследованиях. И приводит примеры, когда это знание позволяло ему чувствовать себя уверенно при совместной работе с математиками, более продвинутыми, чем он, в теоретической области.

Непонимание физической сути системы, процесса весьма характерно для математиков с хорошей теоретической подготовкой, в том числе окончивших факультеты прикладной математики университетов. Владея теорией и, порой, в совершенстве компьютерными технологиями, они просто не задумываются о том поставлена ли задачи правильно, а при анализе полученных на компьютере результатов просто не в состоянии привлечь знания о физической сущности процессов, протекающих в системе, образом которой является данная модель.

---

[41] . Моисеев Н.Н. Эффективность, устойчивость, справедливость. "Знание - сила". 1984.3.

На практике ситуация, когда незнание физической сущности прообраза модели приводит к ошибочным выводам, встречается достаточно часто. Соответствующие примеры из работы одного прикладного НИИ приведены выше в главе 3.

6.3. Аналнз структуры управления

Структура управления во многом определяет характер функционирования системы. Поэтому как при анализе, так и при синтезе)системы должно быть особое внимание уделено ее структуре управления. О*птимальная, в определенном смысле,* структура управления обеспечивает достижение системных целей наилучшим с точки зрения принятых критериев способом. Уже на этапе постановки задачи основные требования к структуре управления, должны быть конкретизированы в соответствии с целями рассматриваемой системы и в соответствии с основными принципами системного подхода.

.В технических системах формирование структуры управления— это экзогенный фактор. В организационных системах следует иметь в виду гносеологическое противоречие между объективными законами, отражающих реальные интересы социальных организмов и субъективно формулируемыми целями. Реальные условия стабильности системы и представление субъекта о стабильности могут не совпадать. В результате в при создании управленческих структур зачастую превалируют личные интересы индивидов, входящих в состав этих структур

При программно-целевом подходе предполагается наличие методики научно обоснованной процедуры выбора структуры управления. Этот выбор можно трактовать как формирование петлей обратных связей: верхней (основной) петли, ответственной за функционирование организации в целом и частных петлей, обеспечивающих управление входящими в систему элементами. Это непосредственно связано с задачей структуризации управления

Все большая динамическая сложность и непредсказуемость внешней среды во многом стала определять особенности построения системы управления и, в первую очередь, особенности подхода к предвидению — исходному моменту любого управления. Многие долгосрочные планы, построенные на основе статистического прогнозирования — «*от прошлого к будущему»* оказались не эффективными. Случайные, маловероятные или непредвиденные обстоятельства могут изменить всю конъюнктуру. Это определило необходимость перехода к прогнозированию и, соответственно, к планированию «*от будущего к настоящему*», к системе, *ориентированной на завтрашний день*, то есть к *стратегическому планированию и управлению.*

Важными понятиями, определяющими вид структуры управления и эффективность ее функционирования являются *структуризация* целей управления и *иерархия* целей

Пренебрежение принципами системного подхода, предпочтительное обеспечение личных интересов руководящих сотрудников органов управления приводит к созданию структур управления неэффективных, искусственно усложненных с присущим им параллелизмом и безответственностью. Решения и реализация решений в таких органах управления принимаются медленно, за ошибки в управление и непринятие необходимого решения никто не отвечает. Структуры управления, созданные с пренебрежением к системному подходу являются «инкубаторами» коррупции

Пример 1. Анализ структуры управления в РФ. Из анализа существующей системы государственного управления в РФ можно сделать вывод относительно отсутствия научно-обоснованного подхода при создании этой системы. В результате полного пренебрежения постановкой задачи о создании эффективной ответственной системы государственного управления сложилась в России к 2006 году на удивление громоздкая бюрократическая структура управления с параллелизмом и характерной коллективной безответственностью. Очевидно, определенные московские круги сознательно лобировали создание такой структуры управления. То, что структура управления в РФ предельно громоздка и стоит дорого, не требует доказательств. Многочисленные реконструкции управления на всех уровнях к желаемому результату не привели, Параллелизм, отсутствие четкой ответственности за конкретное дело, ресурсная необеспеченность принимаемых решений – явление типичное. Одна из причин сложившегося положения – отсутствие обоснованной стуктуризации *иерархии целей*. Новые управленческие структуры создаются без определения их места в структуре управления, взаимосвязи их деятельности с существующими органами управления. Типичный порядок создания новых органов управления заключается в следующем: возникает требующая решения проблема, находятся чиновники, которые сочиняют структуру органов управления для решения проблемы и энергично «пробивают» решение о создании этой структуры и «теплых» мест для себя. После того, как решение о создании новых органов управления принято, начинается уточнение их задач и порядка их взаимодействия с другими управленческими структурами. В результате созданы условия для карьерного роста чиновников и очередная бюджетная кормушка для них обеспечены. Новая проблема зачастую могла быть решена существующими органами управления при определенной корректировке их задач – но это остается без внимания.

Примером возникшего таким образом параллелизма в управлении – может служить деятельность в регионах органов управления федерального подчинения. Создается впечатление, что основной результат деятельности федеральных органов управления занятостью – строительство для себя в областных и районных центрах новых, далеко не скромных зданий на щедрые бюджетные средства, выделяемые правительством для повышения занятости населения.

Пример 2. Структура управления взаимодействием силовых органов. Пример характеризует отсутствие обоснованной структуры управления, обеспечивающей взаимодействие силовых органов государства. При расследовании трагических событий в Беслане специальные комиссии мучительно выясняли, кто руководил операцией по освобождению заложников, кто и какие приказы отдавал. При этом не был поставлен вопрос, кто *должен был* руководить подобными операциями; кто, какая организация, какое должностное лицо *несет ответственность* за их проведение; какими документами определена эта ответственность. Необходимость подобной определенности уже была совершенно понятна хотя бы из опыта освобождения заложников «Нордоста». Не отличается согласованностью и деятельность силовых органов в Чечне.

6.4. Учет условий функционирования (динамики внешней среды)

Не может вызывать возражение то очевидное положение, что при проектировании системы или при решении проблем, возникших в существующих системах, необходимо учитывать условия (внешнюю среду) функционирования системы. Но эта «очевидность», порой, не замечается вследствие каких либо причин, например недостатка информации о динамике внешней среды или намеренно для получения необходимых (заданных извне) выводов по результатам исследования.

Примеров намеренного неучета влияния динамики внешней среды много. Приведем некоторые.

Пример 3. При разработке новой сложной системы обороны основные принципы создания системы были проверены на опытном образце. После чего было принято решение создавать боевую систему на основе элементов системы, функционирующих в составе экспериментального комплекса. При этом не было принято во внимание, что характеристики средств нападения существенно меняются и будут отличаться от характеристик, принятых для отработки экспериментальных средств, т.е. условия функционирования системы будут совершенно другими, чем те, которые имели место при отработке опытного образца. Можно предположить, не без основания, что игнорирование этого обстоятельств диктовалось желанием конструкторов по быстрее создать систему, получить соответствующие награды, а то, что система будет не способна решать боевые задачи в реальных условиях ее функционирования, оказалось где то на втором плане.

Этот пример рассмотрен далее более подробно.

Пример 4. В том примере также имеет место, случай, когда условия функционирования системы формулируются таким образом, чтобы получить необходимые выводы.

Целесообразность и возможность переброса воды из рек Сибири в европейскую часть России изучались длительный период. При учете внешних условий искусственно исключались из рассмотрения те обстоятельства, которые ставили под сомнения как раз целесообразность такого переброса Возникающие экологические проблемы, динамика Каспийского моря рассматривалась, мягко говоря, поверхностно.

Безусловная необходимость переброса рек была «обоснована» с помощью сложных имитационных моделей при искусственно выстроенных внешних условиях и обстоятельствах функционирования системы переброса. Не дожидаясь возражений, были начаты земляные работы. Возражения последовали позже. К стоимости дорогостоящих «исследований» и начатых работ по созданию системы, естественно никто не возвращался.

6.5. Уяснение цели исследования

Цели исследования определяются проблемами, имеющими место состояния исследуемой системы. Появление проблемы возникает, зачастую, в результате появления состояния неудовлетворенности. Ситуация становится проблемой, когда действие системы, течение какого либо процесса не приводят к желаемому результату в настоящем или, в оценках, в будущем. При создании новой системы первыми шагами всегда является выявление и разрешение ряда постановочных проблем. Причинами системных проблем, требующих исследования, могут быть внутрисистемные трудности на пути достижения цели или изменение внешних условий, следствием которых оказывается необходимость изменения целей или корректировки траектории движения к цели.

В общем случае для понимания сути проблемы, причин ее возникновения требуются значительные усилия. Проблема может быть выявлена руководителем или любым сотрудником организации. В сложных системах (организациях) целесообразно иметь специальную группу с задачей анализа появления отклонений реального состояния системы от желаемого. Важно выявлять *симптомы причин*, вызывающих или могущих вызвать проблему, своевременно реагировать на них, не дожидаясь, когда причины породят проблему. Если проблема возникла, необходимо не только разрешить проблему, но и устранить причины, которые ее вызвали.

Проблемы могут быть *простыми*, выяснение причин которых не требует специальных исследований, *сложными* - уяснение их причин связано со специальными исследованиями, и *очень сложными*, возможно потребующими изменения фундаментальных концепций системы или разработки принципиально нового методического аппарата для уяснения причин проблемы.

При возникновении проблем естественно возникает вопрос, была ли эта проблема *известна ранее*, и если "да", то *принимались ли* в связи с этим какие либо *решения*? Возможны следующие варианты ответа:

-проблема новая, ранее не известная;

-проблема была известна ранее, но решение не принималось;

-решение принималось, но было неверным;

- решение было верным, но было не выполнено.

В зависимости от варианта ответа предпринимаются действия по анализу проблемы, выработки рекомендаций по ее устранению.

При уяснении проблемы должны быть раскрыты все неопределенности, выявлены релевантные причины, исключены из рассмотрения причины второстепенные. При возможности должны быть собраны количественные данные относительно параметров рассогласования реального и желаемого состояний системы, а также параметров, характеризующих причины проблемы. Количественная оценка отношений в сложных системах трудоемка. Требуется привлечение экспертов, анкетирование с последующей статистической обработкой данных и пр. Однако нередко оказывается возможным получить содержательные выводы с помощью только качественных оценок, основанных на опыте и интуиции исследователя.

С другой стороны зачастую исследователи чрезмерно упрощают ситуацию из-за трудностей учета большого числа факторов, их сложного взаимодействия. Причиной необоснованных упрощений могут быть и недостаток опыта или знаний у исследователя.

Только немногие общественные явления зависят от одной причины. Обычно общественные явления включают много различных взаимодействующих событий. Причинность носит системный характер. Удобным инструментом для углубленного понимания проблемы, анализа причинно-следственных отношений, выявления возможных последствий изменения этих отношений является *когнитивная структуризация* – одно из направлений системного анализа. Цель когнитивной структуризации в формировании и уточнении структуры исследуемого объекта (оргсистемы), рассматриваемого как сложная система, состоящая из отдельных элементов - подсистем.

Для анализа сложной системы полезно построить структурную схему причинно-следственных связей, называемую *когнитивной картой* и являющуюся знаковым ориентированным графом.

Два элемента **А** и **В,** изображаются в виде вершин графа, соединенных ориентированной дугой: **А** $\rightarrow$ **В.** Здесь **А -** причина, **В -** следствие. Причинно-следственные связи (отношения) разделены на два типа:

положительные, если увеличение (усиление) **А** ведет к увеличению (усилению) **В**, а уменьшение **А** ведет к уменьшению **В;**

*отрицательные***,** если увеличение **А** ведет к уменьшению В, а уменьшение **А** - к увеличению **В**.

Положительная связь помечается на схеме знаком "плюс" над дугой, отрицательная - знаком "минус".

Приобретение опыта построения и анализа когнитивных карт избавит исследователя от ошибок свойственных несистемному мышлению, научит пониманию, что событие может иметь множество причин. Это, в свою очередь, позволит более полно разбираться в сложных проблемах, принимать обоснованные решения. В сложных системах для анализа нескольких тысяч причинно-следственных связей потребуется для построения когнитивных карт использовать специально разработанного для этого программного обеспечения.

Цель исследования (анализ проблем, имеющих место в системе, и методов их разрешения, создание новой системы с требуемыми характеристиками и др.) может быть сформулирована неверно. Причиной ошибки может быть недостаточная квалификация лиц, ответственных за определение цели, отсутствие необходимой информации, но иногда ,как это упоминалось выше, такая ошибка допускается сознательно из каких либо коньюктурных соображений.

Ошибочно сформулированная цель однозначно приведет к результату, описанному в стихотворении Брюсова, с соответствующими негативными выводами. К сожалению, часто «ошибка» имеет место как раз из-за коньюктурных соображений. За поставленной ошибочной целью следуют соответствующим образом организованные исследования для получения «необходимого» вывода. Имеет место и такое положение, когда по истечению некоторого времени исследований, задача снимается, ввиду появления «новых» обстоятельств, хотя часто с самого начала было понятно, что задача поставлена неверно и исследования бессмысленны.

Здесь вновь вернемся к роли исследователя – прикладного математика. Приведенные выше рассуждения о коньюктурных исследованиях, безусловно, находятся вне математики. Но математик, занимающийся исследованиями в прикладной области, должен участвовать в постановке задачи и обязан использовать свои знания, чтобы не допускать трат на бессмысленные исследования. Это положение в первую очередь необходимо помнить при исследованиях в социально-экономической области, но не только. Приведем примеры.

Пример 5. Проектирование АСУ области. Пример, когда полномасштабные исследования проводились без должного анализа существа проблемы и возможности ее решения и, соответственно, требуемые результаты не были получены.

В 80-х годах XX века коллектив вузов города Томска получил (принял к исполнению) задачу – создать автоматизированную систему управления хозяйством Томской области. Работа была щедро профинансирована на федеральном и региональном уровнях. Взявшись за эту работу, коллектив преподавателей и научных работников Томска не до конца понимал, что должна представлять собой автоматизированная система управления хозяйством области, в том числе какие конкретные задачи она должна решать, какой объем информации потребуется для ее успешного функционирования. Поэтому работа началась с организации мозгового штурма - другого пути, по-видимому, не было. В результате оказалось возможным сформулировать «общее» направления работы и некоторые частные задачи. Однако четкого понимания о возможности создания разрабатываемой системы так и не было получено.

В дальнейшем были разработаны и успешно внедрены ряд автоматизированных систем: АСУ поиска автомобилей по неполным данным об их характеристиках, АСУ животноводческим комплексом, АСУ проверки своевременности выполнения решений, принятых облисполкомом.

Что касается, АСУ хозяйством области, то в этой части были разработаны анкеты, которые по заполнению должны были, по мнению исполнителей, содержать всю информацию, необходимую для успешного функционирования АСУ области Анкеты должны были заполнять с определенной периодичностью все управленческие и хозяйствующие организации области. При разработке анкет была не ясно, в чем проектируемое управление областью должно заключаться, какая информация для этого потребуется и какими алгоритмами она будет обрабатываться. Анкеты получились весьма объемными - информация запрашивалась по «максимуму». Запрашивалось много информации, не нужной для АСУ и, в то же время, не было гарантии, не упущена ли какая либо информация, которая потребуется для функционирования АСУ. Далее, не учитывалось что, во-первых, за время, требуемое для сбора запрашиваемой столь обширной информации, она будет устаревать; во-вторых, характер запрашиваемых сведений таков, что наверняка определенная часть данных в анкетах будет ложной и потребуется какая-то система проверки достоверности сведений. Чем окончилась попытка внедрения анкеты не ясно, во всяком случае, АСУ хозяйством области не была создана, а в результате перестройки экономики страны требования к подобной системе полностью изменились. Таким образом, разработчики системы допустили ту ошибку, что, не разобравшись до конца с тем, какие задачи *должна и может* решать АСУ хозяйством области, начали эту систему проектировать Причем начали со сбора информации, которая неизвестно как будет использоваться

Пример 6. Проект железной дороги – пример выдвижения и «протаскивания» необоснованной (реально не существующей) цели. В 90-х годах прошлого столетия появились организации и соответствующие группы лоббистов, которые буквально «навязывали» обществу строительство скоростной железной дороги «Москва - Санкт-Петербург». Очевидной явно видимой целью руководства рекламируемого строительства было решение личных финансовых задач.

Обоснованных доказательств необходимости такой скоростной дороги не было. Ожидаемые экологические последствия были негативны. Из элементарных расчетов следовало, что затраты на строительство дороги в обозримое время не окупятся. Однако нашлись исследовательские и конструкторские организации, активно включившиеся в обоснование необходимости дороги и начавшие ее проектирование. В качестве основного аргумента «за дорогу» выдвигалось появление на территориях, где должна пройти дорога новых рабочих мест, а также то (главный аргумент!), что для строительства дороги будут получены внешние кредиты и бюджетные средства не потребуются. При этом «забывали» сообщить детали - кредиты брались под гарантию государства. В результате, несмотря на то, что необходимость строительства дороги не была доказана, т.е. цель не обоснована, кредиты были получены, строительство началось. В какой-то момент правительству все же стало ясно, что по ряду весьма серьезных соображений проект дороги следует отклонить. Стройка была закрыта. В Санкт-Петербурге на месте снесенных домов оказался обширный котлован для вокзала проектируемой дороги. Государство (т.е. налогоплательщики) должно расплачиваться за взятые кредиты. Сколько денег осело в карманах руководителей проекта – тайна.

6.6. Анализ доступной информации

Информация нужна не любая, а только та, которая действительно обеспечит цель исследования. Излишние подробности могут помешать решению задачи. "Информацию нужно профильтровать, отделить важное от неважного, нужное от ненужного, а отсеянное нужно представить в наиболее выразительной легко усвояемой форме. И это тоже задача прикладной математики, которой на этот раз приходится работать на грани психологии и социологии". Необходимо также получить надежные оценки точностных характеристик исходной информации. "Для успеха исследования настолько важно иметь беспристрастные, независимые от субъективных оценок фактические данные, что все они должны быть проверены и перепроверены независимо от того, из какого источника они получены".

Типичной ошибкой прикладных исследований является начало работы со сбора информации, до того, как уяснена постановка задачи, намечена, хотя бы в первом приближении, методика исследования. Если информация собиралась до выяснения перечисленных обстоятельств, то велика вероятность, что будет собрано много ненужной информации, а что-нибудь очень необходимое отсутствует. Важно также учитывать фактор старения информации. Из приведенного выше примера разработки АСУ области следует, в частности, что все приведенные положения об условиях сбора информации не учитывались.

Характеристики доступной информации (полнота, достоверность, точность) влияют на структуру модели, методику проведения эксперимента. Недооценка этого обстоятельства приводит к появлению моделей, с максимально мыслимой подробностью описывающих какой либо процесс (систему), использующих точные критерии оценки, но абсолютно бесполезных, поскольку базировались на недостоверную, неточную информацию. Подобные модели следует называть, по мнению Е.С.Вентцель, *«информационно уродливыми»*.

В приведенных выше примерах неудачу исследования в значительной степени предопределяла недооценка доступной исходной информации. Приведем еще один пример влияния недооценки значения информации при постановке задачи исследования.

Пример 7. Конкурс вариантов построения системы. В одном прикладном НИИ МО потребовалось сравнить три выдвинутых на конкурс варианта построения системы, предназначенной для решения важной стратегической задачи. Оценку вариантов была поручена трем независимым научным коллективам.. При обсуждении результатов исследования выяснилось, что каждый коллектив заложил при анализе варианта системы «свою» стоимостную оценку элементов, составляющих систему, а именно, в одном случае это была текущая стоимость элементов, в другом - их стоимость с учетом возможности их удешевления ко времени создания системы, в третьем случае были рассмотрены некоторые перспективные элементы, стоимость которых была взята «с потолка». Стоимость системы была важнейшей частью конечного критерия эффективности системы, получить какие либо рекомендации на основании проведенных исследований не представилось возможным. Работа научных коллективов оказалась бесполезной.

Учитывая важность информационного обеспечения задачи, приведем еще один пример.

Примр10. Отсутствие анализа источников получения информации. Заведующий одной из кафедр факультета прикладной математики университета изложил на заседании совета факультета постановку НИР, которую предполагалось выполнить силами сотрудников кафедры. При обсуждении работы на Совете было обращено внимание, что у соисполнителя работы исходной информации, необходимой в предложенной постановке исследований, просто не существует. В ответ, «обиженный» как часто водится в научно-учебных кругах, заведующий кафедрой заявил, что совет недостаточно квалифицирован в предмете, рассматриваемом в работе. Научно-исследовательской работе была дана «зеленая» улица. При завершении сроков работы заведующем кафедрой была представлена докладная о невыполнении работы по причине непредставления соисполнителем темы необходимой исходной информации.

Неудачный опыт не был учтен. Через год на той же кафедре произошла аналогичная история. На этот раз исходную информацию для планируемого исследования должен был, по замыслу постановки задачи, выдать заказчик темы. На замечание, что заказчик темы, по-видимому, не понял характера требуемой информации и обещал предоставить информацию, которая у него явно отсутствует, последовал ответ, что совет факультета не может судить о возможностях заказчика. Тема была утверждена, ее завершением вновь была докладная о невыполнении исследований, так как заказчик не предоставил исходную информацию.

Интересно, что хотя в обоих приведенных примерах заведующий кафедрой проявил явную неграмотность при постановке задачи и усилия коллектива кафедры какой то период тратились впустую, никаких обсуждений явного «конфуза», и, тем более, выводов не последовало. А события эти происходили на факультете *прикладной* математики, на котором студенты обучаются (или должны обучаться?) *исследовать прикладные проблемы*, в том числе такому важному этапу исследования как постановка задачи.

6.7 Выявление релевантных факторов

Релевантными называются факторы, существенным (решающим) образом влияющие на результаты исследования.

После определения релевантных факторов производится выбор тех из них, которые могут быть описаны количественно, уточнение списка этих факторов путем объединения по общим признакам и исключения существенно коррелированных факторов. После уточнения списка релевантных факторов потребуется убедиться, не приведет ли отказ от некоторых факторов к недопустимому снижению точности решения задачи или, что существует такая вероятность. При внимательном рассмотрении может выясниться, что некоторые факторы, отнесенные вначале к неизмеримым, могут быть оценены косвенно.

После того как как список существенных факторов определен, следующий шаг состоит в переводе этих факторов на язык математических понятий и величин и постулировании соотношений между величинами. Как правило, это один из самых трудных этапов процесса моделирования, причем здесь невозможно дать общих рекомендаций. Важен опыт исследоватля и насколько хорошо он смог разобраться со структурой моделируемой системы, особенностями ее функционирования.

Понятие релевантности фактора в конкретных прикладных исследованиях существенно зависит от имеющейся исходной информации и цели исследования. Часто более достоверный результат может быть получен на более простой модели, а усложнение модели – учет дополнительных факторов приводит вследствие недостоверности информации к дополнительной нечеткости в результатах моделирования.

6.8. Формирование системы (набора) альтернатив.

На начальном этапе необходимо сохранить все возможные, в том числе кажущиеся нелепыми альтернативы решения задачи. Пренебрежение "нелепыми" альтернативами, поспешность в их отбрасывании, уступка соблазну поскорее начать вычисления, "развернуть работу" и ухватиться за первую показавшуюся хорошей альтернативу, может обернуться потерей действительно хорошего решения. В простейшем случае вместо выбора альтернатив требуется определить диапазоны изменения переменных и параметров модели.

Пожалуй, классическим примером, показывающим, насколько постановка цели исследования и полный учет всех возможных альтернатив влияет на последующие результаты решения проблемы, можно считать приведенный далее в следующем разделе пример планирования военной операции, связанной с перебазированием бомбардировочной авиации США с территории Америки в Европу. При решении проблемы на результаты исследования решающим образом повлияла дополнительно включенная альтернатива.

Существует несколько организационных форм генерирования альтернатив.

а) *Мозговой штурм*. Формируется группа специалистов, состав которой зависит от характера проблемы и вида системы. Члены группы высказывают различные альтернативы решения проблемы, которые фиксируются, причем на этом этапе критика выдвигаемых альтернатив запрещена. Обращается внимание на взаимосвязь альтернатив, возникновение новых идей как развитие ранее выдвинутых предложений.

б) *Синектика* - генерирование идей путем ассоциативного мышления. Среди задач, решение которых известно находятся аналоги исследуемой проблеме. Например, в /21/ задача столкновения двух вражеских группировок решена на основе аналога - процесса взаимного проникновения молекул двух соприкасающихся химических веществ.

в) *Разработка сценариев*. Проводится описание будущего течения процесса при различных альтернативах, но при одинаковых начальных условиях. При этом важно учесть все релевантные факторы, влияющие на процесс.

г) *Морфологический анализ*. Определяются все возможные значения основных переменных и рассматриваются все возможные комбинации значений этих переменных. Например, при выборе вида проектируемого телевизора переменными являются цвет (черно-белый, двухцветный,..., семицветный), размер изображения, градации яркости, и пр. Всего возможно более 300 комбинаций переменных. Безусловно, при рассмотрении комбинаций некоторые варианты могут быть отброшены, как не удовлетворяющие очевидным требованиям.

д) *Деловые игры*. Создаются имитационные человеко-машинные системы для анализа течения процессов при различных решениях участников игры - лиц, которым надлежит принимать решения в реальной ситуации.

6.9. Выбор критерия (системы критериев) качества решения задачи.

Если цель исследования сформулирована верно необходимо построить критерий достижения цели. Результат признается достигнутым при достижении определенного уровня критерия, отражающего цель исследования.[42]

При использовании оптимизационных моделей важно понять, что реально означает термин «*критерий достижения цели*», в какой степени его применении способствует получение такого результата, который оказывается возможным реализовать на практике.

Формальный вид критерия, при сохранении единой принципиальной основы, должен учитывать особенности конкретной задачи, в том числе характер доступной информации.

[42] Подходы к выбору критерия исследования совпадают, в основном, с подходами к выбору критерия оценки функционирования системы

На практике получение информации, необходимой для построения модели, зачастую связано с большими трансакционными издержками. Кроме того, доступная информация часто является не точной или содержит случайные составляющие, требующие специальной оценки. В этом случае необходимо вычисление для критерия доверительных интервалов.

Все это очень часто приводит в прикладных исследованиях к отказу от поиска оптимального решения и формулировки критерия, обеспечивающего получение *удовлетворительного* решения, т.е. такого рационального решения, принятие которого гарантирует на практике результат, удовлетворяющий постановщика задачи. То есть, зачастую оказывается разумным отказаться от *принципа оптимальности* в пользу *принципа рациональности,* т.е. искать не *оптимальное*, а *рациональное* решение.

Критериальная (целевая) функция - это отражение целей исследования и правило оценки этой цели. Критерии должны обеспечить наилучшее, в определенном смысле решение. В общем случае проблема выбора критерия - это установление признака, по которому определяется предпочтительность. В явном виде критерий может быть и не сформулирован, но характер, вид предпочтительности определены. Критерии должны быть, по возможности, не чувствительны к входной информации, т.е. изменение значений входных переменных относительно незначительно меняют значения критерия.

Задача упрощается, если удается ограничиться одним критерием, но для реальных задач более свойственна многокритериальность - т.е. *векторный критерий*.

Примеры задач, в которых используется векторный критерий.

(а). Задачи оптимизации (поиска рационального решения) на множестве целей, каждая из которых должна быть учтена при выборе лучшего решения (альтернативы).

(б). Задачи оптимизации (поиска рационального решения) на множестве объектов (подсистем). Качество функционирования каждой подсистемы оценивается своим, частным критерием, а системы в целом - некоторым общим, векторным критерием, составленным из частных критериев.

(в). Задачи оптимизации (поиска рационального решения) на множестве условий (или временных этапов). Качество функционирования для каждого условия (этапа) оценивается частным критерием, а для всех условий (этапов) - векторным критерием, составленным из частных.

(г). Многоуровневые векторные задачи оптимизации (поиска рационального решения), в которых компоненты векторного критерия являются не скалярами, а более сложными образованьями.

К векторным критериям предъявляются следующие дополнительные требования:

полнота, ввод дополнительных критериев не должен повлиять на результаты решения;

минимальность, набор частных критериев должен быть наименьшим из всех возможных наборов, обеспечивающих оптимальный выбор.

Частный критерий $k_j(\mathbf{x})$, ($\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{X}$ - множество альтернатив) выбирается так, чтобы по мере улучшения решения (приближения к заданной цели) значение критерия монотонно улучшалось (в зависимости от характера цели увеличивалось или уменьшалось). Будем полагать предпочтительным необходимость увеличения значения критерия. В противном случае у критерия достаточно изменить знак на обратный.

В простейшем случае для многокритериальных задач правило достижения лучшего решения - принцип оптимальности можно сформулировать по аналогии с однокритериальными задачами следующим образом. Оптимальное решение с векторным критерием $\mathbf{K} = \{\mathbf{k_j}(\mathbf{x})\}$ $\mathbf{i} \in (\mathbf{1,2,...,n})$.,достигается, если все частные критерии $\mathbf{k_j}(\mathbf{x})$ достигают максимума одновременно, т.е. существует такая альтернатива $\mathbf{x}^*$ что $\mathbf{k_j}(\mathbf{x}^*) \geq \mathbf{k_i}(\mathbf{x})$ для всех i и всех $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, причем хотя бы для одного частного критерия имеет место строгое неравенство.

Однако подобная ситуация для реальных задач не типична. Обычно увеличение одних критериев сопровождается уменьшением других. В подобных случаях оказывается необходимым прибегнуть к некоторому компромиссу и сформулировать принцип оптимальности в следующем виде:

Лучшей альтернативой (оптимальным, рациональным решением) считается такая альтернатива, на которой, хотя и не обеспечивается максимальное значение каждого критерия, но при привлечении дополнительных соображений (в том числе об относительной приоритетности частных критериев) обеспечивается в каком-то смысле лучшее значение векторного критерия.

Таким образом, задачу с векторным критерием можно сформулировать следующим образом:

требуется найти альтернативу $\mathbf{x}^*$ *удовлетворяющее двум условиям:*

(1). $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$, *где* $\mathbf{X}$ - *множество всех возможных альтернатив;*

(2). $\mathbf{x}^*$ *- наилучшее решение согласно принципу оптимальности (принципу рациональности) и, учитывающее принятую схему компромисса между частными целями.*

Задачи поиска лучшего решения для трех распространенных схем компромисса можно сформулировать следующим образом.

Схема 1. Ищется альтернатива, доставляющая максимум одному, наиболее предпочтительному критерию при условии, что значения остальных критериев будут не менее некоторых заданных заранее величин - $\mathbf{c_j}$.

$\mathbf{k_i}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{max}$; $x \in X$;

$\mathbf{k_j}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{c_j}$; $\mathbf{j} = (1, ..., i\text{-}1, i+1, \ldots n)$,

здесь $\mathbf{k_i}(\mathbf{x})$ -наиболее предпочтительный критерий,

$\mathbf{c_j}$- заданное минимально допустимое значение $\mathbf{j}$-го критерия.

Схема 2. Ищется альтернатива $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, на которой достигается максимум минимального значения («наихудшего» в этом смысле) частного критерия.

$$\min_{\mathbf{j}} \mathbf{f_j}(\mathbf{k_j}(\mathbf{x})) \rightarrow \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}}$$

$\mathbf{f_i}$ - функции, нормализующие критерии, т.е. приводящие их к единой размерности и масштабу. Нормализация необходима, если частные критерии имеют различный физический смысл и измеряются в различных единицах.

Схема 3. Строится обобщенная функция частных критериев

$$\mathbf{L(x) = F(k_1(x), k_2(x), ..., k_m(x))}$$

и ищется альтернатива, доставляющая максимум этой функции. Распространенной, но не обязательно лучшей в конкретной задаче, является функция свертки вида:

$$\mathbf{L(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(k_j(x)),\ \ \alpha_j > 0, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1.}$$

где: α_j - коэффициенты, учитывающие приоритетность частных критериев.

Здесь приведены схемы поиска решений. Алгоритм реализации этих схем должен учитывать особенности конкретной задачи и определенные условия возможности применения схемы. Так, например, необходимо вначале построить множество Парето, свертка может быть использована в специально оговоренных условиях. Критерии должны быть, по возможности, не чувствительны к небольшим ошибкам во входной информации

Часто в критерий закладывается оценка качества решения и цена, какой это качество достигается (критерии вида эффективность-стоимость).

Вследствие сложности реальных задач иногда приходится прибегать к приближенным критериям, которые часто дают хороший результат.

Очевидно, что от вида критерия может существенно зависеть оценка относительной ценности альтернатив. Полезно сравнение результатов, полученных при различных критериях.

При получении численных оценок весьма важным и просто необходимым является получение доверительных интервалов, характеризующих точность этих оценок. Вследствие того, что провести подобные оценки обычно достаточно сложно, их избегают. Однако в прикладных исследованиях всегда приходится иметь дело с неточной в той или иной степени исходной информацией, отсутствие доверительных интервалов полученных оценок существенно снижает значимость проведенных исследований.

6.10. Анализ ограничений, допущений

Отказ от факторов, отнесенных к нерелевантным, сознательное упрощение ряда зависимостей, ограничение области изменения некоторых переменных и пр. способствуют упрощению модели, удешевлению эксперимента. При упрощении модели может быть потеряна адекватность модели. Поэтому требуется проанализировать, насколько принятые допущения могут повлиять на окончательные результаты исследования. Подобный вопрос должен быть вновь задан при анализе результатов.. Соответственно при постановке задачи необходимо составить список принятых допущений с тем, чтобы вернуться к нему при анализе результатов моделирования. Не исключено, что на полученные результаты сильное влияние оказали неоправданные допущения. В таком случае потребуется вернуться к постановке задачи и уточнить допущения.

6.11. Анализ внематематических ограничений

На организацию прикладных исследований, структуру разрабатываемых моделей могут существенно повлиять следующие внематематические факторы: *время, отведенное для исследование*, т.е. когда потребуются результаты исследования, а также имеющиеся в распоряжение исследователей *ресурсы всех видов*..

Пример11. Экспертиза проекта системы. В научно-исследовательский институт поступил на экспертизу проект системы. Необходимо было определить – продолжать или не продолжать разработку системы. Время для проведения экспертизы было ограниченным. Начальник научного отдела, которому было получено проведение экспертизы, принял решение разработать для решения задачи аналого-цифровую модель. Оказалась безуспешной попытка убедить начальника отдела, что с помощью задуманной модели необходимый результат к определенному моменту времени не может быть получен. Пришлось дополнительно поручить экспертизу небольшой группе сотрудников, которая и справились с задачей в заданное время. При использовании достаточно простой модели был получен убедительно обоснованный результат – система перспективы не имеет. Что же касается результатов исследования проблемы на аналого-цифровой модели, то они были получены намного позже принятого решения о прекращении разработки системы, подтвердили полученный ранее отрицательный результат, но эти результаты уже никому не были нужны Относительно затрат на бесполезные исследования никаких выводов сделано не было –один из пример низкой эффективности функционирования прикладных НИИ. Пример характеризует важность учета времени, отведенного на исследование поставленной задачи…

6.12. Установление масштаба предстоящего эксперимента

Окончательное определение масштаба эксперимента производится при разработке методики исследования), включающей разработку плана эксперимента (объем, время) и обеспечение эксперимента необходимыми ресурсами. Однако уже при постановке задачи необходимо оценить предполагаемый масштаб эксперимента и, в том числе, ограничения, которые могут возникнуть в связи с недостатком ресурсов и времени, отводимого на получение требуемого при прикладном исследовании результата. Последние ограничения, как уже отмечалось, достаточно типичны для большинства прикладных исследований и, соответственно, влияют на вид создаваемой модели. Содержание методики планирования приведен далее.

При разработке модели учитывается и предполагаемый характер использования модели - будет ли модель использоваться неоднократно..

6.13. Математическая постановка (формализация) задачи

Математическая постановка (формализация) задачи – создание математической модели завершает постановку задачи. Формализация задачи начинается с момента, когда формулируется система аксиом, описывающая не только сам объект, но некоторую алгебру, т.е. совокупность правил, определяющих допустимые операции над объектом. При формализации задачи должны быть определены функциональные зависимости, связывающие переменные и параметры модели.

Общего метода подбора зависимостей (отношений, функций) не существует. Чем больше функциональных зависимостей известно исследователю, чем больше он может привлечь и критически осмыслить аналогий, тем успешнее будет его деятельность по разработке модели. Полезным может также оказаться, благодаря наглядности, графические представления.

Относительно просто устанавливается структура асимптотических моделей. Задача сводится к уточнению структуры модели, определению значений ее параметров и входных переменных.

В моделях ансамблей обязательным является выявление изменений в свойствах подсистем при объединении их в систему.

Наибольшие трудности возникают при разработке феноменологических моделей.

Предлагаются следующие основные варианты (принципы) подхода к разработке моделей при различной сложности системы, доступности к информации относительно структуры системы и протекающих в ней процессов.

Вариант 1. Система достаточно проста и прозрачна, так что ее можно обследовать и понять, например, путем наблюдения или расспросов людей, работающих с системой. Непосредственно по результатам изучения системы можно сконструировать ее модель**.**

Вариант 2. Если структура системы очевидна, но методы описания не ясны, можно воспользоваться сходством исследуемой системы с другой, в том числе, возможно, более простой, описание которой известно.

*Вариант 3***.** Структура системы неизвестна, но ее можно определить путем анализа данных о функционировании системы (анализе задач, которые должны решаться во вновь создаваемой системе). Фактически будет получена гипотеза о структуре, которую затем необходимо проверить экспериментально.

Вариант 4. Анализ данных о работе системы не позволяет определить влияние отдельных переменных на показатели работы системы, возникает необходимость в проведении эксперимента с целью выявления релевантных факторов, их влияния на работу системы. При этом предполагается возможность проведения соответствующего эксперимента на системе.

Вариант 5. Достаточные описательные данные о системе отсутствуют, проведение эксперимента на системе не допустимо. В этом случае может быть построена достаточно подробная модель искусственной действительности, используемая для накопления статистики о возможном функционировании системы путем статистических испытаний гипотез о реальном мире. Пример подобного подхода: анализ влияния на состояние атмосферы одновременного подрыва нескольких атомных заряд; анализ изменения состояния океана и процессов, протекающих при загрязнении океана в результате человеческой деятельности.

Пи создании математической модели рекомендуется:

- подыскать аналогии;

- подобрать и рассмотреть специальные примеры, характерные для решаемой задачи;

- принять решение о выборе класса (типа) модели, в том числе решить, будет ли модель аналитической, имитационной или комбинированной;

-записать соображения, характеризующие закономерности, имеющие место в системе, при необходимости провести дополнительные исследования;

-если модель не поддается описанию, найти способы упрощения проблемы.

При определении отношений между элементами системы, а так же между системой и окружающей средой необходимо точно установить причинно-следственные связи.

Различают связи*:* *реактивные*: система (элементы системы) реагирует на событие (при повороте выключателя - зажглась лампа); *ответные***:** одно событие влечет за собой другое (стемнело - включаем освещение); *автономные:* появление события, ничем непосредственно не обусловлено (часто это поведение человека).

Причинно-следственные связи могут быть *детерминированными и вероятностными*. При выявлении этих связей иногда возможно возникновение грубых (иногда преднамеренных) ошибок.

В общем случае, некоторые модельные соотношения выводятся непосредственно при анализе системы, но часть соотношений принимаются без вывода и являются постулатами модели, от их качества в значительной мере зависит адекватность модели.

Постулаты имеют различное происхождение.

(1) Некоторые постулаты вытекают из *универсальных физических законов*, в том числе законов с ограниченной областью действия.

(2) *Феноменологические законы* - хорошо эмпирически обоснованные, но имеющие ограниченную область действия. Применение такого закона должно быть обусловлено попаданием исследуемого явления в зону действия закона.

(3) *Полуэмпирические законы*, действенность которых зависит от условий применения. Чаще всего эти законы базируются на "слепой" обработке экспериментальных данных. Применение подобных законов следует контролировать рациональными рассуждениями.

На этапе формализации важно правильно ограничить число степеней свободы, не "заложить" вычислительную неразрешимость задачи. *Проблема размерности* существенно ограничивает возможности эффективного применения многих математических методов.

При анализе (синтезе) сложных систем целесообразно начать формализацию с создания простейшей "грубой" модели, в которой учитывается по возможности наименьшее число "основных" переменных и параметров. Переменные и параметры можно выстроить в некоторую иерархическую последовательность, подлежащую уточнению по мере уяснения подробностей относительно функционирования системы.

Классический пример подобной иерархии - небесная механика. 1-ая, грубая модель - планеты - материальные точки, подчиняющиеся законам Ньютона; определены законы Кеплера. 2-ой шаг - учитываются размер планет и движение солнца; уточнены траектории движения всех тел. 3-ий шаг - учет релятивистских эффектов.

Иногда удобно иерархию переменных связывать с масштабами переменных, например, различать переменные быстро, нормально и медленно меняющиеся. Последние на некотором временном интервале при моделировании можно *"заморозить"*.

После получения первого варианта формализации необходимо проанализировать все допущения и уточнить математическую постановку.

Особенности следующего вида возникают при моделировании социально-экономических процессов. При анализе действующих экономических моделей выясняется существенная «неравнопрочность» отдельных блоков этих моделей. Конечная эффективность таких моделей может приобрести иллюзорный характер. При более тщательной проработки узких мест может дать результат, полностью компенсирующий затраты средств на подобную проработку.

Основные неточности возникают при обеспечении взаимодействия элементов модели, в частности в тех случаях, когда на практике «интересы» взаимодействующих объектов не совпадают. Из основных положений кибернетики следует, что жизнеспособное поведение системы любой природы определяется характером взаимодействия между элементами системы. В экономических системах характер этого взаимодействия существенно зависит от человеческого фактора.

Таким образом, как в моделях анализа, так и в моделях синтеза необходимо особое внимание уделять взаимодействию элементов модели. Важно научиться оценивать это взаимодействие и эффективно управлять ею, а на этапе постанови задачи предусмотреть анализ взаимодействий. Необходима *методология контактных взаимодействий*. Соответственно, необходимо выделить понятие *«контактирующая (стыкующаяся) пара»*, что позволит проанализировать контакты пар, управлять этими контактами, и получить основу для активного управления системными процессами. (В ()

предлагается выделить *«контактику»,* как науку, изучающую взаимодействующих па элементов системы).

Способность одних элементов контактировать с другими не одинакова. Анализировать следует как совместимость отдельных элементов системы, так и возможность внутрисистемных элементов «принять» условия внешней среды. Попытки конструировать модель без предварительного анализа проблем взаимной совместимости элементов системы и совместимости системы с внешней средой приводят к появлению неэффективных или даже нежизнеспособныхмоделей. Изначальная внутренняя несовместимость отдельных элементов структуры является зачастую первопричиной неудачи при создании системы или причиной неудовлетворительного функционирования существующей системы.

В ряде случаев прикладных исследований возникает ситуация, когда в результате решения заинтересованы несколько независимых участников исследования. Такое положение имеет место, например, при оценке инвестиционных проектов - каждый участник проекта руководствуется, как правило, собственными интересами. Попытки «примирить» эти интересы с помощью единого «интегрального» критерия не правильны по существу. *«Соизмерение»* значимости интересов разных участников – *операция бессодержательная* по сути. Единственный возможный способ согласования таких интересов – конфликтная борьба, результатом которой может (должен) быть консенсус.

Многокритериальная оценка инвестиционных проектов возможна в двух вариантах:

1) исследование с помощью аналитических и имитационных моделей крайне сложного механизма взаимосвязи отдельных факторов,

2) отказ от попыток раскрыть такой механизм в пользу «черного ящика», в качестве которого выступает метод групповой экспертизы.

Часто выбирается второй вариант. Метод групповых экспертиз – это попытка имитировать упрощенно рыночный механизм. Эти методы способны давать лишь грубые и неустойчивые оценки. Вероятность неустойчивых оценок усугубляется отсутствием строгих правил формирования экспертных групп.

Иная ситуация возникает при наличии множественности интересов у любого отдельного участника. Центральная задача в этом случае – соизмерение важности (весомости) отдельных оценочных параметров (частных критериев). Наиболее сопоставимый вид эти параметры приобретают при денежной оценки, однако многие параметры полностью или частично к такой оценке не сводятся.

7. Задачи, возникающие на различных этапах моделирования

7.1. Выбор типа (вида) модели

Выбор вида модели связан с задачей формализации и непосредственно определяется необходимостью обеспечения адекватности модели решаемой задаче исследования. На выбор модели влияет опыт исследователя, имеющаяся аппаратура, а также, если создается цифровая модель, доступное программное обеспечение.

При выборе типа модели имеет место ряд альтернатив. Обратимся к ним.

7.1.1. Линейность и нелинейность.

Приведем некоторые высказывания, предостерегающие от необоснованного пренебрежения нелинейностями.

"Мир, в котором мы живем, удивительно нелинеен. Конечно, это делает нашу жизнь сложнее, но зато интереснее, перспективнее, освобождает нас от чувства монотонности, вселяет в нас оптимизм". "Ловушкой при математическом моделировании является пристрастие человека к линейности. Это особенно проявляется в тех случаях, когда соответствующие гипотезы и допущения сформулированы заранее. Каким-то образом люди пришли к убеждению, что в окружающий нас мир линеен, или, по крайней мере, может быть исследован, как линейный. Нет ничего более ошибочного. Однако это ложное мнение до такой степени предопределило методику исследования, что большинство аналитических методов, которым отдавалось предпочтение в прошлом, основано на использовании линейных систем уравнений. Ошибки и искажения возникают часто исключительно по этой причине". Необходимость учета нелинейностей хорошо показана Форрестером в работах по исследованию динамики сложных систем.

Учитывая предостережения о возможных ошибках, возникающих при неучете нелинейностей, следует в то же время иметь в виду, что методы исследования линейных систем очень развиты и обоснованное применение линейной модели для нелинейной системы часто оказывается весьма эффективным. Линейная модель полезна в начале цепочки моделей, последовательно приближающихся к модели с требуемой адекватностью. Линейная модель часто позволяет сразу получить оценку порядка значений выходных переменных. Иногда нелинейную задачу удается просто свести к последовательности линейных моделей. Линеаризацией нелинейной задачи (например, методом "замораживания коэффициентов") можно получить линейную модель для достаточно корректной оценки воздействия на систему малых возмущений. Вопрос о возможности и целесообразности переход от нелинейности к линейности решается в каждой задаче конкретно на рациональном уровне.

7.1.2. Дискретность и непрерывность. Вне зависимости от характера исследуемой системы может оказаться более предпочтительной дискретная или непрерывная (аналоговая) модель. Для исследования сложных систем зачастую требуется создание аналого-цифровой модели. Решение о дискретности или непрерывности модели принимается на этапе постановки задачи также на рациональном уровне.

Дискретная природа функционирования цифровой ВМ требует, как правило, приведение исходного математического описания функционирования динамического объекта к виду удобному для моделирования. Прежде всего, нужна дискредитация непрерывных величин, что обеспечивается квантованием по времени и по уровню. Квантование связано с появлением ошибок, зависящих от временного интервала квантования и минимальным шагом квантования по уровню. Обычно, при должном выборе шагов квантования эти ошибки не имеют решающего влияния на точность получаемых результатов. Приведение исходного материала к виду удобному для моделирования является по существу алгоритмизацией математического описания оригинала – описанию правил выполнения расчетных операций над числами.

*71.3 Детерминированность, случайность и неопределенность***.** Все реальные процессы в той или иной степени носят стохастический характер. При решении одних задач случайные составляющие практически не влияют на результат и в модели не учитываются. В других задачах решение может быть получено только при учете случайных составляющих или различных неопределенностей, и соответствующие математические методы закладываются в модель. Достаточность детерминированной модели или необходимость создание стохастической модели иногда очевидна, иногда переход к стохастической модели происходит вследствие неудовлетворенности результатами, полученными на детерминированной модели.

Классический пример влияния учета стохастичности процесса на адекватность модели поставленной задаче привел Б.Гнеденко. Решалась задача о выборе числа портовых причалов для обработки приходящих в порт судов. Необходимо было найти решение, минимизирующее суммарные потери от простоя причалов торгового порта и простоя судов. Вначале была разработана детерминированная модель, в которой предполагалась, что все суда приходят в порт строго по расписанию. Полученные при анализе модели рекомендации оказались не эффективными. Тогда были проанализированы и введены в модель случайные величины, характеризующие разброс времен прихода судов. Результаты анализа стохастической модели позволили найти решение, минимизирующее суммарные потери, которые были реализованы руководством порта.

7.1.4. Аналитическая и имитационная модели.

Аналитическая модель, адекватно отражающая объект, и может обеспечить обстоятельные ответы на поставленные вопросы. Во всех случаях, когда это оказывается возможным, необходимо разрабатывать аналитическую модель. Часто переход к имитационной модели происходит лишь вследствие недостаточной математической подготовки исследователя, а также при отсутствии каких либо ресурсных и временных ограничений на проведение вычислительного эксперимента.

Когда в сложных системах получить аналитические выражения, описывающие функционирование системы с необходимой для решения задачи подробностью, оказывается не возможным, приходиться прибегать к имитационным моделям, обеспечивающим необходимое гомоморфное отображение объекта. Но и в подобном случаях аналитическая модель может быть хорошим подспорьем для предварительного качественного анализа ожидаемого результата.

Имитационное моделирование используется, когда в модель включается реальная аппаратура, в частности, когда основой модели является сама изучаемая система. В последнем случае в состав модели включаются блоки, имитирующие процесс на входе системы, блоки для обработки выходной информации и блоки, обеспечивающие изучение функционирования системы при изменении значений отдельных параметров системы или поиск их значений, оптимальных в заданном смысле.

Вычислительный эксперимент на имитационной моделе осуществляется путем многократных «прогонов» процесса функционирования системы для различных условий, а в задачах синтеза и для различных значений параметров системы. Поскольку на число таких прогонов обычно накладывается ограничение, при моделировании оказывается возможным рассмотреть только небольшое число значений параметров системы, что может оказаться недостаточным для выбора них наилучших в определенном смысле значений. Поэтому в задачах синтеза рекомендуется создавать оптимизационно-имитационные модели, т.е. включать в состав имитационной модели дополнительные аналитические модели, блоки, процедуры, с помощью которых можно оптимизировать функционирование отдельных подсистем имитационной модели и модели в целом. Процесс оптимизации обеспечивается наиболее успешно в интерактивном режиме работы модели

При моделировании сложных систем при анализе и синтезе их структур возникает необходимость совместного использования имитационных и аналитических моделей. В частности с помощью аналитической модели представляется возможным изучить поведение системы при определенных предельных условиях ее функционирования

7.2. Прогнозирование

Прогнозирование состояния системы в будущем – типовая задача, возникающая при анализе динамических систем

Некоторые определения.

"Предсказание" - описание возможных или желательных перспектив, состояний, проблем будущего. Это логически обоснованное суждение о состоянии какой либо системы в будущем. Различают следующие формы предсказания: предчувствие, предвосхищение, предугадывание, прогнозирование.

"Прогнозирование" - специальное исследование, предметом которого является перспектива развития системы. Методы прогнозирования разделяются на статистические, причинно-следственные и комбинированные.

"Прогноз" - научно- обоснованное (в общем случае вероятностное или содержащее неопределенности) суждение о возможном состоянии системы в будущем. Прогноз может быть краткосрочным и долгосрочным. Понятие срочности конкретизируется для каждой системы и связано с достижимым уровнем достоверности прогноза.

«Классический» метод прогнозирования заключается в изучении (измерении) изменяющихся во времени параметров системы на некотором интервале наблюдения, вывод закономерностей изменения параметров (функциональных зависимостей параметров от времени) и продолжение полученных зависимостей на время прогнозирования. Таким образом, решается задачи построения траектории системы на интервалах наблюдения и прогноза (интерполирование, экстраполирование, приближение функций). Прогнозирование путем переноса на интервал экстраполяции зависимостей, построенных на интервале наблюдений, называется методом прогноза *«от прошедшего к будущему»* Такой подход может дать приемлемые результаты, если исследуемые процессы на интервалах наблюдения и пролонгации стационарны. То есть, если оказывается справедливой гипотеза о стационарности релевантных факторов, воздействующих на систему на этих интервалах, то могут быть найдены устойчивые (неизменные для этих интервалов) зависимости - "тренды".

В общем случае при быстро изменяющихся (не однозначно предсказуемых) внешних условиях функционирования системы необходимы другие подходы к прогнозированию. Темпы изменения внешних условий (например, производительных сил в экономике) настолько высоки, что гипотеза о неизменности релевантных факторов, определяющих поведение системы, оказывается чаще неверной, как для интервала наблюдения, так и интервала прогноза. Вместе с тем взаимосвязь систем в мире стала столь тесной, что состояние и развитие конкретной системы невозможно рассматривать вне реальных связей между экзогенными и индогенными параметрами. В этих условиях потребовалось, как уже констатировалось выше, перейти к так называемому прогнозированию *"от настоящего к будущему"*. При таком подходе отправными для прогноза принимаются значения параметров системы в конце интервала наблюдения (в текущей точке) - текущие значения. Для получения фазовых координат системы в «текущей» точке могут также потребоваться процедуры сглаживания. Для прогноза поведения системы необходимо выдвижение гипотезы относительно изменения на интервале прогноза внешних условий и, соответственно, изменения входных экзогенных переменных. Прогноз имеет вариантный характер, то есть результатом прогноза является семейство траекторий («зонтик») в пространстве параметров системы. Каждая траектория определяет функционирование системы на интервале прогнозирования в зависимости от определенных внешних условий. При последующих наблюдениях уточняется, по какой траектории «движется» система, и при необходимости прогноз уточняется.

Таким образом, построение траекторий в методе «от настоящего к будущему» не является классической задачей экстраполяции – для каждой траектории семейства определяются дополнительные условия, учитывающие варианты изменения внешней среды.

Задача прогноза усложняется и тем обстоятельством, что сигналы на входе системы содержат помехи в виде случайных процессов различного спектрального состава. Задача прогноза решается удовлетворительно (ошибки вычислений удается минимизировать), если случайные процессы являются стационарными с известными спектральными плотностями. В случае нестационарных сигналов и неизвестных спектров входных возмущений необходимые оценки могут быть получены с помощью имитационного моделирования.

Таим образом, прогнозирование можно рассматривать как расширение понятия экстраполяции на общий случай существования системы в будущем, в том числе, когда условия существования системы - характер экзогенных переменных на интервале экстраполяции изменяется, что может привести и к изменению целей системы.

Заметим, что систематическое использование методов экстраполяции считается признаком зрелости той или иной области знаний как науки.

7.3. Планирование эксперимента.

При планировании экспериментов ставится задача обеспечить достижение цели исследования при минимальных затратах ресурсов всех видов. Трудность получения необходимой достоверности результатов связаны с наличием помех различного рода, в том числе ошибок измерения входной информации.

При планировании вычислительного эксперимента уже на этапе постановки необходимо, как минимум, определить область существования параметров и переменных, оценить хотя бы качественно или грубо количественно влияние изменения всех параметров и переменных на исходы модели и выбранные критерии качества решения задачи, подобрать примеры для анализа зависимостей исходов модели от параметров модели и входных переменных. Если модель статистическая, необходимо принять решение о том, как будет задаваться входная информация и порядок обработки исходов. С учетом этих соображений разрабатывается методика проведения эксперимента, включающая порядок проведения частных экспериментов и количество испытаний в каждом частном эксперименте, порядок обработки результатов, способы контроля течения эксперимента и порядок его корректировки в зависимости от промежуточных и конечных результатов.

При проведении эксперимента его масштаб уточняется по мере анализа получаемых результатов. Наиболее рациональным способом планирования эксперимента – разработка своеобразного сетевого графика. На этом графике предусматривается разбиение эксперимента на этапы. В конце каждого этапа предусматривается проверка полученных результатов и продолжение эксперимента по одной из ветвей, выбранной по результатам проверки.

Различают стратегическое и тактическое планирование.

Стратегическое планирование имеет целью создание общего плана эксперимента, экономного с точки зрения потребных ресурсов и, соответственно, предусматривающего разумную последовательность частных экспериментов и промежуточных проверок, а также создание структурной основы для обучения самого исследователя.

Тактическое планирование связано с решением задач двух типов:

1) определение начальных условий в той мере, в какой они влияют на достижение установившегося режима, минимизация потерь на переходной режим;

2) минимизация дисперсии исходов при одновременном уменьшении, по возможности, объема выборок.

В теории планирования эксперимента модельные переменные разделяются на "факторы" и "отклики". Термин "фактор" эквивалентен терминам “входная”, “экзогенная переменная". Термин "отклик" - терминам "зависимая”, “выходная”, “эндогенная переменная". Планирование экспериментов получило вначале распространение в биологии, сельском хозяйстве, где термины «отклик», «фактор» были понятны практикам.

Несмотря на развитую теорию планирования экспериментов, наиболее полное достижение целей планирования в значительной степени зависит от наличия соответствующего опыта у исследователя, так как планирование эксперимента в какой то мере является искусством.

7. 4. Проверка модели.

После построения модели ее следует подвергнуть проверке. В действительности адекватность модели до некоторой степени проверяется обычно в ходе постановки задачи. Уравнения или другие математические соотношения, сформулированные в модели, постоянно сопоставляются с исходной ситуацией.

Существует несколько аспектов проверки адекватности. Во-первых, сама математическая основа модели (которая и составляет ее существо) должна быть не противоречивой и подчиняться всем обычным законам математической логики. Во-вторых, справедливость модели зависит от ее способности адекватно описывать исходную ситуацию *(масло должно быть масляным?)* В процессе испытаний необходимо убедиться, в том, что результаты, полученные на основе модели, достаточно хорошо *для целей рассматриваемой задачи* отражают положение дел. Однако ответ на вопрос о том, успешно ли проходит предложенная модель такую проверку, в значительной степени субъективен.

Такким образом, модель необходимо проверять (испытывать) постоянно с момента ее создания до получения требуемого результата. До начала эксперимента модель необходимо испытать *в целом,* что является *последним этапом разработки* модели.

Испытание проводится с целью:

1) Выявления правдоподобия модели в 1-ом приближении, "качественно", чтобы убедиться, что модель ведет себя, как и предполагалось, т.е. существует качественное соответствие между поведением моделируемой системы и модели, в том числе совпадают порядок их исходов, а так же поведение и результаты в "крайних" ситуациях.

2) Проверки количественной адекватности - точности преобразования информации, что достигается калибровкой модели.

Калибровкой модели называется определение (уточнение) коэффициентов модели - коэффициентов отношений, связывающих экзогенные и эндогенные переменные модели. Калибровка осуществляется путем сравнения результатов, полученных на моделях с результатами, получаемыми при испытаниях реальной системы или с результатами аналитических расчетов, для чего используются эталонные примеры и задачи. Модель системы в целом проверяется так называемыми эталонными задачами, охватывающими все свойства модели. В общем случае, если неизвестно **"n"** коэффициентов, необходимо сконструировать и решить задачу с **"n"** независимыми уравнениями. Однако целесообразно структурировать задачу - построить такую совокупность примеров, чтобы с помощью одного примера охватить определенную часть модельных зависимостей и определить часть коэффициентов.

Одной из задач испытания является проверка модели на чувствительность, т.е. нисколько исходы модели чувствительны к изменению входных переменных.

В общем случае испытание и калибровка модели - задача статистическая, т.е. задача проблемного анализа - формирования статистически значимых выводов на основе данных, полученных на модели. При испытаниях широко применяются такие статистические методы, как регрессионный, корреляционный и дисперсионный анализы. Важно помнить, что статистические методы могут привести к неверным результатам, если исследователь не имеет ясного представления о моделируемой системе.

Для обеспечения адекватности модели предусматриваются при ее разработке и эксплуатации следующие виды контроля.

1)Контроль размерностей: сравниваться и складываться могут только величины одинаковой размерности.

2) Контроль порядков: выделение основных и уточняющих слагаемых.

3) Контроль характера зависимостей между переменными: выявление качественного совпадения вида модельных зависимостей с видом аналогичных зависимостей в реальной системе.

4) Контроль экстремальных ситуаций: в подобных ситуациях поведение модели должно совпадать с поведением системы в аналогичных ситуациях (поведение системы в экстремальных ситуациях часто легко оценивается).

5) Контроль граничных условий: на границе функции должны принимать определенные значения.

6) Контроль математической замкнутости: выяснение имеет ли решение задача, в том виде, как она записана в модели.

7) Контроль устойчивости модели.

8) Контроль соответствия значений переменных их физическому смыслу: знаки и величины переменных модели не должны противоречить возможным значениям моделируемых физических величин.

Поскольку испытания моделей связаны с существенными затратами, необходимо к планированию испытаний относиться столь же строго (экономно) как и к планированию вычислительных экспериментов.

Результаты испытаний, в конечном счете, должны обеспечить необходимый уровень адекватности модели на всех этапах ее использования. При обоснованном выборе тестовых примеров и эталонных задач эта задача решается при минимальных затратах средств и ресурсов.

7.5. Анализ результатов и внедрение рекомендаций

При анализе результатов вычислительного эксперимента необходимо.

1) Убедиться, что результаты эксперимента полностью понятны, как качественно, т.е. не противоречат здравому смыслу, так и количественно. Если здравый смысл не согласуется с исходами эксперимента, необходимо его "поправить", т.е. попытаться объяснить полученные исходы. Если это не удастся, следует запланировать дополнительные исследования для уяснения и подтверждения результатов.

2) Вернуться к сделанным допущениям. Уточнить возможные влияния допущения на результат. При необходимости также провести дополнительные эксперименты.

3) Оценить точность полученных результатов. Если подобные оценки заранее не были запланированы, следует их сделать. Убедиться, что точность результатов достаточна для выработки рекомендаций, принятия определенных решений.

При трактовке результатов опираться в возможно максимальной степени на идею "соревнования моделей" (использование моделей различного типа и сравнение исходов этих моделей), в том числе на сравнение исходов "точных" моделей с результатами "грубых" аналитических расчетов.

Анализ результатов моделирования может завершиться выработкой рекомендаций по существу решаемой задачи, однако возможна неудовлетворенность результатами и подготовка предложений по проведению дополнительных испытаний или уточнению модели. Не исключается и вывод о непригодности модели вследствие ее неадекватности исследуемой системе или невозможности проведения на модели необходимого для получения обоснованных выводов объема испытаний. Все результаты анализа должны представляться в удобном для использования виде. Главное, о чем необходимо помнить, что при моделировании исследуется реальная система, т.е. модель не самоцель.

Внедрение результатов является одной из наиболее сложных и трудно формализованных этапов исследований. Важное значение на этом этапе является наличие доверительных отношений заказчика и системных аналитиков – лиц, участвующих в разработке модели и ее испытании. Внедрение принятых рекомендаций, полученных на модели, должно происходить при участии лиц, проводивших модельный эксперимент. В общем случае, потребуется перевод результатов, полученных на модели, с математического языка на язык в большей степени понятный лицам, которым предстоит внедрять модельные рекомендации. Необходимо, чтобы полученные рекомендации и возможные результаты их принятия были отчетливо осознаны на языке реального мира.

Только в процессе реализации рекомендаций становиться до конца ясным, насколько адекватной была модель, насколько корректно был поведен вычислительный эксперимент и обоснованы рекомендации. И только при участии математиков-прикладников проводивших модельные исследования, возможно наиболее грамотно реализовать полученные рекомендации, убедиться в их справедливости, а в противном случае своевременно выявить недостаточность или ошибочность рекомендаций и ввести необходимые коррективы. Процесс реализации рекомендаций должен быть управляемым, для чего необходимо предусмотреть оперативную обратную связь. Запланированное участие исследователей в реализации полученных рекомендаций обеспечит более ответственное отношение всех лиц, участвующих в исследовании, к организации исследований, что соответствует основным положениям методологии моделирования.

8. Примеры моделей прикладных задач.

В приведенных примерах моделей прикладных задач основное внимание уделяется постановке задачи исследования (задачи проектирования системы), в том числе формулировке постановки на вербальном, доматематическом уровне. Постановка задачи на вербальном уровне в сложных многосвязных системах, взаимодействующих с окружающей средой, сама по себе является задачей сложнейшей и во многом определяющей успех исследования. При постановке задачи необходимо следовать всем положениям системного анализа. Одинаково важно изучить в полной мере взаимосвязь элементов системы, взаимодействие системы с окружающей средой и динамику внешней среды и элементов системы. Динамика возможного изменения элементов системы и внешней среды должно базироваться на научно-обоснованных прогнозах.

Примеры **1-5** хорошо известны в литературе. В пример **6** использован подход к рассмотрению задачи, изложенный в монографии академика Н.Н.Моисеева; в примерах **7, 8, 9** учтен опыт участия автора в разработке соответствующих моделей

Пример 8.1. Задача о назначениях

В примере иллюстрируется некоторый общий подход к формализации, дающий в определенных случаях хороший результат. В сельхозпредприятии планируется строительство $\mathbf{n}$ объектов $\mathbf{i \in (1,n)}$ - номер объекта, или номер работы). Для участия в строительстве прибыло $\mathbf{m}$ бригад ($\mathbf{j \in (1,m)}$ - номер бригады.), $\mathbf{m \geq n}$. Каждая бригада за каждую работу назначает свою цену – $\mathbf{c_{i,j}}$. То есть, исходная информация может быть представлена в виде матрицы $\mathbf{\{c_{i,j}\}}$ размером $\mathbf{m \times n}$. Если какая либо дополнительная информация о бригадах отсутствует, то задача, которую должен решить руководитель предприятия, может быть сформулирована следующим образом

Так распределить бригады по работам, чтобы общая стоимость всех работ была минимальной.,

В такой постановке задача может быть представлена (формализована) в виде модели дискретного математического программирования.

Для моделей математического программирования естественно придерживаться следующего порядка формализации.

1). Определить одну точку области допустимых планов. В общем случае эта точка описывается как вектор или матрица, размерность которых (размерность пространства существования задачи) определяется числом параметров, определяющих область допустимых планов.

2). Представить область допустимых планов в виде системы равенств и неравенств, однозначно определяющих принадлежность точки пространства этой области.

3). Записать целевую функцию для определения наилучшего решения. Такому решению (такой точке из области допустимых планов) будет соответствовать минимум в задачах на минимум значения целевой функции (максимум целевой функции - в задачах на максимум).

В рассматриваемой задаче:

Для определения точки допустимого плана введем переменную

$$x_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{1,\ если\ на\ } i-\mathbf{ую\ работу(объект)\ назначена\ } j-\mathbf{ая\ бригада,} \\ \mathbf{0,\ \ в\ противном\ случае.} \end{cases}$$

Тогда одна точка допустимого плана запишется как матрица размером, $\mathbf{m\times n}$**,** в каждой строчке и в каждом столбце которой содержится по одной единице, а остальные элементы матрицы равны нулю, что соответственно означает: на каждую $\mathbf{i}$-ую работу может быть назначена одна бригада $\sum\limits_{j=1}^{m} x_{i,j} = 1,\ i = \overline{1,n}$, каждая $\mathbf{j}$ ая бригада может быть назначена на одну работу $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1,\ j = \overline{1,m}$,.а суммарные затраты $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} c_{i,j} x_{i,j}$ необходимо минимизировать.

Таким образом математическая формулировка задачи:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{v} c_{i,j} x_{i,j} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = 1,\ i = \overline{1,n}\ ,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = 1,\ i = \overline{1,n}\ ,$$

$$x_{i,j} \in (0,1).$$

К модели о назначении сводится много задач из самых различных областей, например: распределение зенитных комплексов по целям, распределение станков в производственном процессе и др. Для решения задач, которые сводятся к такой моделе разработан ряд эффективных алгоритмов: алгоритм метода ветвей и границ, венгерский алгоритм и др**.**

При формализации многокритериальных задач математического программирования появляются дополнительные трудности, но общий порядок остается одинаковым.

Пример 8.2. Планирование производства. Продажа ресурсов.

Номенклатура выпускаемой предприятием продукции включает несколько наименований. Известно количество ресурсов, необходимое для выпуска единицы каждого продукта, а также объемы имеющихся ресурсов и прибыль, которая может быть получена при продаже единицы каждого продукта. Из условий, связанных со сбытом продуктов, известны верхняя и нижняя границы по объему выпуска каждого продукта. Требуется составить такой план выпуска продуктов, который удовлетворял бы существующим ограничениям и в то же время приносил наибольшую прибыль предприятию. Подобного вида задачи возникают при составлении предприятием планов на определенный календарный период

Для формализации задачи введем обозначения.

j - условный номер вида продукта, **j = (1, 2,…,n),**

i - условный номер вида ресурса, **i = (1, 2,…, m)**

$\mathbf{a_{i,j}}$ - затраты **i** - го вида ресурса на производство единицы **j** - го вида продукта,.

$\mathbf{b_i}$ -имеющийся объем ресурса **i** –го вида, **i = (1, 2,…, m)**

$\mathbf{c_j}$ - прибыль предприятия при реализации единицы **j -** го вида продукта,

$\mathbf{x_j}$ -.планируемый объем выпуска **j** - го вида продукта.

Точкой (планом) решения является вектор $\mathbf{x = (x_1, x_2,\ldots, x_j,\ldots, x_n)}$, удовлетворяющий заданным ограничениям, определяющим область допустимых планов.

Тогда $\mathbf{a_{i,j}x_j}$ –количество **i**-го ресурса**,** затрачиваемого на выпуск $\mathbf{x_j}$ единиц **j**-го продукта и математическая постановка задачи имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad (1)$$

при условии:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \le b_i,\ i = (1,2,\ldots n), \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0,\ j = (1,2,\ldots,n), \qquad (3)$$

Это задача линейного программирования, для нахождения оптимального решения которой существует несколько хороших алгоритмов, в том числе широко распространенный симплекс-алгоритм.

В приведенной постановке задачи не рассматриваются возможные ограничения на сбыт. При необходимости их можно учесть, добавив, например, еще систему неравенств вида $\mathbf{x_j \le A_j,\ j = (1,2,\ldots,n),}$ где $\mathbf{A_j}$ –«рыночные» ограничения на производство **j**-го продукта.

Далее введем линейную задачу, двойственную к исходной. Для иллюстрации физического смысла двойственной задачи рассмотрим следующую ситуацию. Кроме производителя некоторой совокупности продуктов, на рынке появляется некоторый экономический агент, предлагающее производителю не тратить усилий на производство, а продать ему все ресурсы. Возникает конфликтная ситуация: производитель продуктов готов продать ресурсы, но подороже, по крайней мере не потерять прибыль, плакируемую при производстве Покупатель стремится купить ресурсы подешевле.

Конфликт может быть формализован следующим образом. Положим справедливым, если производитель получит за проданные ресурсы не менее суммарной прибыли, которая может быть получена при продаже всех продуктов, плановое производство количества которых определено решением задачи (1–3). Соответственно, покупатель ресурсов назначит такую цену за единицу каждого ресурса, чтобы суммарная цена всех ресурсов была не более, чем суммарная прибыль при продаже продуктов.

Подобная постановка возникшего конфликта формализуется моделью задачи линейного программирования, двойственной к задаче (1-3). В этой задаче $\mathbf{y_i}$ является ценой единицы **i**–го ресурса.

$$\sum_{i=1}^{m} y_i b_i \to \min, \qquad (4)$$

при условии $$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \geq c_j,\ j = 1,2,\dots,n, \qquad (5)$$

$$y_i \geq 0,\ \ i = (1, 2, \dots, m). \qquad (6)$$

Целевая функция задачи (4-6) реализует стремление покупателя минимизировать свои затраты при закупке всех ресурсов, но при условии выполнения ограничений (5), что и обеспечивает получение производителем суммы, не меньше суммарной прибыли при производстве и продажи продуктов. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим одно из неравенств, например, для **j =1**.

$\mathbf{a_{1,1}y_1}$ определяет стоимость ресурса **1**, используемого для производства единицы **1**-го продукта, $\mathbf{a_{2,1}y_2}$ - стоимость ресурса **2**, используемого для производства единицы **1**-го продукта, $\mathbf{a_{m,1}y_m}$ - стоимость ресурса **m**, используемого для производства единицы **1**-го продукта, соответственно сумма всех произведений $\mathbf{a_{i,1}y_i}$ по **i** от **1** до **m** определяет стоимость всех ресурсов, идущих на производство единицы **1**-го продукта, и эта величина должна быть не менее, чем – $\mathbf{c_1}$ - прибыль от продажи единицы продукта **1.**

Аналогичные рассуждения справедливы для всех **j** от **1** до **n**.

При нахождении оптимума в задачах (1-3) и (4-6) имеет место равенство целевых функций («торжество справедливости»).

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i\,. \qquad (7)$$

Выполняются также так называемые отношения *дополнительной нежесткости ,*которые для приведенной формы записи задачи линейного программирования имеют вид:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j - b_i\right) \cdot y_i = 0,\ \ i = (1,2,\dots n), \qquad (8)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i - c_j\right) \cdot x_j = 0,\ \ j = (1,2,\dots,n). \qquad (9)$$

Из приведенного примера можно сделать и такой вывод. *Прежде, чем продавать полезные ископаемые, необходимо научиться вычислять их реальную рыночную стоимость.* Конечно, рассмотренная элементарная модель не достаточна для анализа реальной сложной ситуации, но необходимый для этого математический аппарат существует.

Далее, чтобы несколько пояснить смысл отношений дополняющей нежесткости в двойственных задачах рассмотрим простой пример

Пример 8.3. Рациональная диета

Аптекарь решил создать таблетки витаминов, чтобы покупателям было выгодно заменить ими часть натуральных продуктов. Причем не желательно, чтобы за витамины пришлось платить больше, чем за натуральные продукты. Возник конфликт между бакалейщиком и аптекарем.

Постановка задачи: Создать модель, с помощью которой можно будет оценить ситуацию, в которой сталкиваются интересы двух сторон для возможного последующего разрешения возникшей конфликтной ситуации.

Подобная модель всегда конкретна**.** Формализация задачи рассмотрена на простом примере – задаче с двумя продуктами и двумя витаминами**.** На модели выясняется возможная цена таблеток витаминов, заменяющих определенные продукты.

Табл. 1

	Содержание в единице продукта		**Стоимость ед-цы продукта**
	витамина a	**витамина b**	
Продукт 1	**2** ед-цы	**5** ед-цы	**1 дол.**
Продукт 2	**1** ед-цы	**3** ед-цы	**4 дол.**

Исходная информация.

Норма потребления: витамина **a** не менее **6** единиц;

витамина **b** не мене **7** единиц.

Содержание витаминов в двух потребляемых продуктах и стоимость продуктов приведено в таблице. 1.

Здесь, продукт **1 -** это касторовое масло, продукт 2 - бифштекс. Вкусовые качества оставляем без внимания, главное в принятой постановке – возможная экономия времени или следование диете (например, в бифштексе кроме витаминов содержатся какие-то неприемлемые градиенты) без потери денежных средств. Для определения оптимального (минимального по цене) набора продуктов, содержащего витаминов не менее, чем это требуется, необходимо решить следующую задачу ЛП. (задача бакалейщика).

$$\mathbf{f(x) = x_1 + 4x_2 \to min,}$$

при условии**:**

$$\mathbf{2x_1 + x_2 \geq 6,}$$
$$\mathbf{5x_1 + 3x_2 \geq 7,}$$
$$\mathbf{x_1, x_2 \geq 0.}$$

Здесь**:** $\mathbf{x_1}$ количество единиц товара **1**, $\mathbf{x_2}$ – товара **2,**

$\mathbf{x} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})$ - допустимое решение.

Оптимальное решение задачи: $\mathbf{x_1^* = 3, x_2^* = 0, f(x^*) = 3.}$

Задача аптекаря - найти оптимальную цену для таблеток витамина так, чтобы потребитель мог получить требуемое количество витамина по цене, не превышающей цену продуктов, содержащих аналогичное количество витамина. Естественно он хочет получить максимальную возможную цену. С этой целью решается двойственная задача ЛП – задача аптекаря.

$$g(y) = 6y + 7y \to \max,$$

при условии: $2y_1 + 5y_2 \le 1$,

$$y_1 + 3y_2 \le 4,$$

$$y_1, y_2 \ge 0.$$

$\mathbf{y_1, y_2}$ имеют в задаче смысл стоимости единицы витамина **a** и витамина **b,** соответственно

Оптимальное решение задачи: $y_1^* = 1/2,\ y_2^* = o,\ g(y^*) = 3.$

Отношения дополнительной нежесткости имеют вид

$(2x_1 + x_2 - 6)y_1 = 0$ $\quad$ $(2y_1 + 5y_2 - 1)x_1 = 0$

$(5x_1 + 3x_2 - 7)y_2 = 0$ $\quad$ $(y_1 + 3y_2 - 4)x_2 = 0$

Таким образом, необходимое количество витаминов может быть получено либо покупкой единицы продукта **1** по цене **3** дол, либо аптечного блока, содержащего шесть единиц витамина **a** и семь единиц витамина **b** . Причем каждая единица витамина **a** стоит ½ дол., а витамин **b** добавляется бесплатно. В обоих случаях общая цена одинакова.

Получен достаточно очевидный результат.

Из условий, определяющих область допустимых решений задачи бакалейщика, видно, что основная трудность существует по витамину **a.** Соответственно, в оптимальном решении во втором условии имеет место знак «равно», в первом условии – «больше». Отсюда, согласно уравнений дополнительной нежесткости, автоматически следует, что в двойственной задаче должно быть $\mathbf{y_1=0}$, что и подтвердилось при решении двойственной задачи.

Из условий, определяющих область допустимых решений задачи аптекаря, основным является первое условие – в оптимальном решении этой задачи в первом условии знак «равно», во втором - «меньше», что в уравнении дополнительной нежесткости подтверждает равенство нулю значения $\mathbf{x_2}$ в задаче бакалейщика.

Таким образом, из рассмотренной задачи следует, что, если экономный потребитель не любит касторового масла, ему придется покупать таблетки у аптекаря

.

Пример 8.4. Планирование военной операции

Данный пример приведен для подтверждения следующего важного положения: *на начальном этапе исследования цель исследования должна быть сформулирована адекватно существующей проблеме и выдвинуты для дальнейшего анализа все возможные альтернативы решения задачи, даже кажущиеся явно нелепыми*. Пример в этой части весьма поучителен.

В период холодной войны в США планировались перелеты бомбардирвщиов с полной бомбовой нагрузкой с территории США в Западную Европу. Для обеспечения таких полетов требовалась дозаправка самолетов топливом. Одному из научных учреждений США была поставлена задача *обосновать выбор расположения аэродрома для посадки самолетов с целью дозаправки*. Для решения этой задачи была предоставлена вся необходимая информация, включая данные о экономико-политической ситуации и климатических условиях в районах возможного расположения аэродромов дозаправки, и пр. Руководство научного учреждения начало исследование с анализа постановки задачи и пришло к выводу, что задача поставлена не верно. Постановка задачи была сформулирована заново примерно следующим образом*: Обеспечить перелет бомбардировочной авиации с полно бомбовой нагрузкой с территории США в Западную Европу.*

После уточнения вербальной постановки задачи были выдвинуты альтернативы в числе которых, кроме различных вариантов расположения аэродромов для перезаправки самолетов, была выдвинута альтернатива дозаправки самолетов в воздухе, которая казалась вначале, в какой то мере, вздорной. Однако после формализации задачи и соответствующих оценок именно дозаправка в воздухе оказалось лучшим решением.

При формализации задачи потребовалась для всех выдвинутых альтернатив системы оценить стоимости создания сооружений и новой техники, необходимых для решения задачи дозаправки.

Пожалуй, одним из наиболее весомых аргументов за дозаправку в воздухе явилась универсальность решения – созданные для воздушной дозаправки средства могут быть использованы при любых дальних перелетах самолетов.

Пример 8.5. Планирование работы киоскера

Киоскер заказывает в издательстве на каждый день недели определенное число газет. За каждую проданную газету он получает определенную прибыль, за не проданные и возвращенные издательству газеты выплачивает «неустойку». Число покупателей газеты является случайной величиной, относительно которой в результате обработки наблюдений может быть получено распределение вероятностей.

Задачей является *определить количество заказываемых газет, обеспечивающее максимум прибыли киоскера*.

Обозначим:

n - число заказываемых газет, параметр управления;

r - число купленных газет, $r \leq n$;

P(r) – вероятность того, что будет куплено ровно **r** газет;

a – прибыль при продаже одной газеты;

b – убыток при возвращении одной газеты;

Q - суммарная прибыль за день;

В качестве критерия качества решения задачи примем математическое ожидание прибыли – **MQ.**

$$MQ = \sum_{r=0}^{n} \left[ar - b(n - r)\right] P(r) \to \max \text{ (по } \mathbf{n}\text{)}.$$

Очевидно, любой киоскер, так или иначе, вычисляет значение ожидаемой суммарной прибыли при заказе числа газет. Использование приведенной зависимости может обеспечить максимум прибыли, для этого необходимо иметь качественную статистику относительно спроса на газеты.

В данном примере вся необходимая для постановки задачи информация получается из анализа функционирования системы, т.е. работы киоскера.

Пример 8.6 .Обоснование решения о строительстве нового предприятия

В регионе планируется развитие нового предприятия для производства перспективных продуктов. Регион заинтересован в этом: появляются новые рабочие места, существенно увеличивается налоговая база, заметно повышается общий экономический потенциал региона. Однако вредные отходы производства могут загрязнять реку. Из анализа планируемых очистительных сооружений следует, что они недостаточно эффективны, а стоимость сооружений, необходимых для полной очистки, настолько дорого, что возможен отказ от создания нового предприятия.

Возникает конфликтная ситуация. Перед руководством региона возникают альтернативы.

(1) Отказаться от развития производства из экологических соображений.

(2) Поддержать внедрение производства. Учитывая перспективность производства, экологические моменты считать второстепенными, принять предложение предприятия относительно уровня штрафов за выброс вредных отходов.

(3) Найти компромиссное решение.

Для оценки третьей альтернативы необходима более детальная постановка задачи.. Необходимо проанализировать

возможности максимально уменьшить ожидаемое при функционировании нового производства загрязнение реки путем назначения соответствующих штрафов за выброс вредных отходов, но, в то же время не «удушить» штрафами перспективное производство.

Для решения этой задачи потребуется дополнительная информация относительно возможной реакции предприятия на уровень штрафных санкций за выброс отходов, структуры этих отходов, а также данные о состоянии реки и изменении параметров речной воды в зависимости от количества отходов.

Обозначим

Ф – фонды предприятия;

F – производственная функция;

P – объем (количество) продукции, выпускаемой в единицу времени в денежном выражении;

Y – инвестиции;

$\mathbf{k_a}$ – коэффициент амортизации;

$\boldsymbol{\pi}$ - количество загрязняющих веществ (вредных выбросов);

V – затраты предприятия на очистку выбросов.

Тогда:

$$d\Phi/dt = Y - k_a\Phi; \qquad (1)$$

$$P = F(\Phi) \qquad (2)$$

$$\pi = f(P,V); \qquad (3)$$

Обозначим:

W – штраф, налагаемый на предприятие администрацией региона за загрязнение реки:

$$W = c\pi = c\ f(P,V); \qquad (4)$$

c - коэффициент, определяемый администрацией региона, от его значения и зависит выполнение поставленной задачи

Пусть (для простоты, чтобы не загромождать формулы не имеющими принципиального значения коэффициентами) все средства, вырученные от продажи продуктов предприятия, идут на инвестиции, очистку воды и штрафы.

Тогда:

$$F(\Phi) = Y + V + W. \qquad (5)$$

Дальнейшую формализацию проводит администрация региона, полагая, что реакции предприятия на решения администрации известны.

1). .Известно, что предприятие стремится минимизировать суммарные затраты на штрафы и очистку -**I**:

$$I = V + W \qquad (6)$$

2). После получения от администрации региона значения **c** предприятие минимизирует эту функцию.

$$I = V + W = V + c\ f(P,V) + V + c\ f\{F(\Phi),V\}, \qquad (7)$$

при условии: $V \geq 0;\ V + c\ f\{F(\Phi),V\} < F(\Phi),$ **(8).**

3). Из условия $dI/dV = 0$, с учетом (8) может быть получена зависимость

$$V = \psi\ (c,\Phi). \qquad (9)$$

Пусть средства, полученные в результате штрафных санкций, используются централизовано для очистки воды. Обозначив через **x** показатель, характеризующий загрязнение воды, получим:

$$dx/dt = \pi - f_v(x) - \mu W \qquad (10)$$

или, учитывая (4) ($W = c\pi$):

$$dx/dt = \pi\ (1 - \mu\ c) - f_v(x) \qquad (11),$$

здесь $f_v(x)$ –естественная очистка.

С учетом (9) выражение для π запишем в виде:

$$\pi = f(P,V) = f\{F(\Phi), \psi(c,\Phi)\} = f^{*}(\Phi,c) \qquad (12)$$

С учетом (12) выражение для $dx/dt =$ запишем в виде

$$dx/dt = f^{*}(\Phi,c)(1-\mu c) - f_v(x) \qquad (13)$$

Поставленная цель может теперь формализована следующим образом

Критерий 1 . $dx/dt \le 0$ **(14)**

или хотя бы $dx/dt \to \min$ **(15)**,

т.е. качество воды должно улучшатся или по меньшей мере ухудшаться не значительно.

Критерий 2. $\frac{d}{dt}\Phi(t) > 0$ **(16)**

или хотя бы $\Phi(t) \to \max$, **(16′)**

т.е. желательно увеличение производственных возможностей предприятия.

Критерий 1 перепишем в виде:

$$I_1(c) = f^{*}(\Phi,c)(1-\mu c) - f_v(x) \to \min \text{ (по } c). \qquad (17)$$

Критерий 2 преобразуем следующим образом:

Учитывая, что $d\Phi/dt = Y - k_a\Phi$ (1), $W = c\, f(P,V)$ (4), $V = \psi(c,\Phi)$

$F(\Phi) = Y + V + W$ (5), получим:

$$I_2(c) = d/dt\,\Phi(t) = Y - k_a\Phi = F(\Phi) - V - W - k_a\Phi =$$

$$= F(\Phi) - \psi(c,\Phi) - c\, f(P,V) - k_a\Phi \to \max \text{ (по } c). \qquad (18)$$

Формализация завершена. Из условий $I_1(c) = 0$, $I_2(c) = 0$ определяются два значения с: c_1 и c_2 . Между этими коэффициентами могут в зависимости от объемов сброса отходов производства в реку, эффективности самоочистки воды и других обстоятельств т существовать различные отношения. Если $c_1 > c_2$, то придется либо согласиться на загрязнение реки, либо пойти на сокращение фондов предприятия. И то и другое не желательно. Для этого случая возможно предусмотреть различные компромиссные стратегии.

Решение задачи для частного вида функций $P = F(\Phi)$ и $\pi = f(P,V)$ приведено в (Л)

Пример 8.7. Обоснование создания новой системы обороны

Данный пример служит хорошей иллюстрацией недопустимости волюнтаризма при постановке задачи. *Отказ от необходимого анализа условий функционирования системы привел к ненужным исследованиям, неоправданным затратам.*

8.7.1. Создание полигонного образца

В начале 50-х годов в условиях холодной войны в СССР была начата разработка противоракетной системы ПРО, как средства защиты территории и отдельных объектов страны от нападения баллистических ракет, запущенных с ракетных баз США. Насколько можно судить по дальнейшим работам, на начальном этапе ставилась задача.

На полигонном образце системы ПРО показать возможность перехвата БР наземными средствами обороны, отработать на полигонном образце состав и структуру системы ПРО Москвы.

Полигонной образец системы ПРО (система «А») был разработан и развернут на полигоне. Конструкторы системы проделали колоссальную работу, «собрали» разбросанные на местности объекты системы в автоматически управляемую систему.

4 марта 1961 г. на полигоне впервые в мире боеголовка БР была сбита противоракетой (ПР) с осколочной боевой частью (БЧ). Несмотря на ряд упрощений условий функционирования системы, возможность перехвата боеголовки БР средствами ПРО была доказана экспериментально. В США аналогичный результат был получен только спустя 2 -3 года. В 1961 г. были также проведены на полигоне испытания ПР с ядерной БЧ без делящегося вещества.

Стрельбовые средства полигонного образца размещались по окружности, радиус которой примерно соответствовал радиусу окружной автострады Москвы. Это по мнению разработчиков было достаточным, чтобы на основе отработанной на полигоне структуре системы противоракетной обороны перейти к созданию системы ПРО Москвы. Как последовало из дальнейшего, значимость полученных результатов для создания системы ПРО Москвы было переоценено. Необходимы был дальнейшие исследования относительно возможной структуры системы ПРО Москвы. Вместо этого было принято волюнтаристское решение – создавать боевую систему подобную (структурно, и по составу используемых средств) полигонному образцу.

8.7.2. Создание системы ПРО Москвы. 1-ый этап

Еще до завершения испытания полигонных средств Постановлением ЦК КПСС и СМ СССР была поставлена задача:

Создать систему ПРО Москвы от атаки с баз территории США ограниченного числа БР, состоящих из боеголовки и корпуса. (Количество одновременно поражаемых боеголовок не было обосновано, а заданное их количество –8 – очевидно определялось техническими ограничениями, связанными со структурой полигонного образца). Заданный вначале Постановлением срок завершения развертывания системы в дальнейшем неоднократно уточнялся

С позиции системного анализа при постановке задачи была допущена *грубая*, можно сказать *роковая, ошибка.* А именно, было принято, что решение задачи доказательства *принципиальной возможности перехвата наземными средствами обороны головной части баллистической ракеты (ГЧ БР или, иначе, боеголовки),* автоматически означает, что решена и вторая задача – *обоснования структуры и состава системы обороны наземного объекта (или определенной территории) от ракетно-ядерного удара нескольких БР.*

Трудность перехвата боеголовки заключается в том, что общее время полета БР от старта до точки падения находится в пределах, в зависимости от типа БР, 7-30 минут. Баланс времени наземных средств перехвата еще более ограничен, так как БР может быть обнаружена наземными средствами только после ее появления из-за горизонта, а перехват боеголовки следует осуществить на некотором удалении от ее точки падения. Скорость полета БР доходит до 7,5 км. в секунду. Таким образом, в системе ПРО в крайне сжатое время необходимо решить комплекс задач: обнаружить БР, выделить (отселектировать) боеголовку, построить ее траекторию, рассчитать точку падения, момент и точку перехвата боеголовки, определить момент пуска и траекторию полета противоракеты (ПР), а затем после пуска ПР осуществить корректировку ее полета до точки перехвата, рассчитать момент подрыва боезаряда ПР и выдать команду на подрыв. Все задачи должны быть решены с высокой точностью. Так, например, ошибка в моменте подрыва в 0,1 сек. приведет при скорости встречи боеголовки и ПР, равной 10 км. в сек., к промаху в 1 км. Весь комплекс задач в условиях реального времени и с необходимой точностью можно решить только при создании полностью автоматизированной системы, включающей средства обнаружения и сопровождения баллистической ракеты, средства поражения (ПР с боезарядом), средства управления (вычислительную технику и систему передачи данных). На полигонном образце системы была показана принципиальная возможность решения этого комплекса задачи (кроме задачи селекции).

Вторая задача - отражение ракетно-ядерного удара группы БР неизмеримо сложнее. Необходимо обеспечить поражение не одиночной боеголовки, а некоторого количества боеголовок в составе налета. При налете на обороняемый объект нескольких БР очень трудно получить достоверную информацию о составе налета, выделить боеголовки и обеспечить требуемую эффективность их поражения. Уже на начальных этапах развертывания системы появились сведения о трансформации баллистических средств нападения. Вместо парной БР (боеголовка и корпус) стали создаваться БР с несколькими боеголовками, большим количеством (до нескольких десятков) тяжелых и легких ложных целей и передатчиками активных помех радиолокационным средствам системы обороны. Такая баллистическая ракета получила название сложной баллистической цели (СБЦ).

Таким образом, появились весьма не простая задача выделения боеголовок на фоне тяжелых и легких ложных целей и передатчиков активных помех, обеспечения работы информационных средств ПРО в условиях возможного периодического их ослепления превентивными взрывами ядерных зарядов боеголовок БР, а также зарядов ПР, если на вооружение системы вводятся ПР с ядерными зарядами.

Информация о составе налета всегда будет содержать элементы неопределенности. Если удастся добиться выделения боеголовки в составе налета с вероятностью близкой к единице, то и вероятность принятия различных ложных целей за боеголовку также достигнет значимой величины. Количество целей многократно возрастет.

Алгоритм организации одновременного перехвата нескольких боеголовок сложен и вероятность перехвата боеголовки противоракетой всегда будет заметно менее единицы.

Далее, для поражения боеголовок осколочным зарядом ПРО требуется высокая точность наведения ПР на цель, которая в условиях налета группы БР может оказаться не достижимой. Нельзя так же исключить, что в конструкции боеголовки будет предусмотрен подрыв ядерного боезаряда при механическом повреждении корпуса боеголовки, что усложнит работу системы ПРО. В случае перехода к ПР с ядерными зарядами требование к точности наведения ПР снижается, но в алгоритме управления системы потребуется предусмотреть такое назначение точек перехвата боеголовок, чтобы минимизировать потери информации, вследствие взрывов боезарядов ПР.

Существуют также важные обстоятельства, которые необходимо учитывать при обосновании критерия эффективности системы ПРО. При обороне административно-промышленного объекта в качестве такого критерия можно принять вероятность сохранения объекта или допустимый уровень ожидаемого ущерба объекту. При индивидуальном перехвате каждой боеголовки обеспечить приемлемое значение этих критериев затруднительно. Так, например, при вероятности поражения боеголовки, равной 0,9, вероятность прорыва к объекту хотя бы одной боеголовки из 10 составит 0,63. По-видимому, взрыва ядерных зарядов 2-3-х боеголовок будет достаточно, чтобы нанести непоправимый ущерб даже такому крупному объекту, как Москва. К тому же оборона объекта легко преодолевается, если количество боеголовок в составе ракетно-ядерного удара превышает число каналов перехвата, что может быть легко реализовано нападающей стороной.. Следует полагать, что структура созданной системы ПРО будет вероятному противнику известна, и это так же следует учитывать при разработке системы противоракетной обороны.

Кроме того, при постановке задачи создания системы ПРО была, по-видимому, сознательно, допущена еще одна принципиальная ошибка. Предполагалось, что образцы системы, отработанные на полигоне, достаточно совершенны и пригодны для использования в боевой системе. На самом деле полигонные образцы (радиолокаторы, противоракета), обладали конструктивными ограничениями, определяющими их фактическую непригодность для применения в боевой системе. Более того, ко времени постановки задачи были известны (находились в разной стадии создания) новые образцы вооружения, в большой степени пригодные для решения задачи перехвата баллистических целей.

Все это, в конечном счете, привело к значительной потере времени и средств на создание системы, а созданная в последующем система оказалась не способной решать реальные боевые задачи

Идея создания системы ПРО на основе индивидуального перехвата боеголовок сама по себе ущербна, кажется Монтгомери сказал, что это подобно попытке перегородить кольями океан. Успешный перехват группы БР мыслим лишь путем создания сплошных полей защиты, способных не пропускать (разрушать, поглощать, отталкивать) все предметы, направляющиеся к обороняемому объекту**.** *Как создать подобное поле, сегодня не известно.*

Таким образом, при постановке задачи не учитывалась динамика средств нападения и средств защиты, т.е. не учитывались реальные условия предстоящего функционирования задачи.

Разобравшись во всех трудностях создания системы ПРО Москвы, ее разработчики должны были сделать выбор из трех альтернатив:

1). Блефовать, завышая реальные боевые возможности системы, объявить о готовности создать систему ПРО Москвы на основе отработанных на полигоне технических средств, причем «придумать» ракетный удар по Москве, посильный для системы.

2). Заявить о невозможности построения эффективной обороны Москвы на базе имеющихся технических решений.и необходимости сосредоточения усилий на научно-исследовательских и опытно-конструкторских работах, с целью отработки новых средств ПРО, способных решить задачу перехвата боеголовок в составе сложной баллистической цели (СБЦ), содержащей несколько боеголовок и различные помехи средствам ПРО

3). Отказаться на какой то период от создания системы ПРО, сосредоточить все усилия на научные исследования, имеющие целью поиск принципиально новых решений по перехвату СБЦ, а также возможности политического решения (или снижения остроты) проблемы.

Вторая и третья альтернативы противоречили принципам функционирования ведомств военно-промышленного комплекса (ВПК), их принятие привело бы к немедленному сокращению ассигнований на исследовательские и конструкторские работы по проблемам ПРО. Приоритет был за программами, в которых давалось обещание обеспечить ПРО Москвы, причем к установленному сроку.

Поскольку противоракета, использованная в составе полигонного образца, для перехвата боеголовок на заданной высоте не предназначалась, на базе информационных средств полигона были организованы испытания новой противоракеты и отработан уточненный алгоритм функционирования системы.

В сущности, с самого начала было стремление представить полигонный образец как некоторую модель системы ПРО Москвы.. При этом «не замечалось», что средства полигонного образца явно устарели, а перехват одиночной боеголовки на полигоне осуществлялся в «идеальных» условиях - время пуска БР и ее траектория были известны заранее, корпус БР «не мешал» обнаружению боеголовки. Полигонный образец, нельзя было рассматривать как *адекватную модель* будущей боевой системы противоракетной обороны объекта.

Таким образом, при принятие решения о создании новой системы обороны, связанного с колоссальными затратами, никакой сколь нибудь серьезной постановки задачи не было.

Заданное в Постановление количество (восемь) одновременно перехватываемых целей было связано с принятым (произвольно, из экономических соображений) количеством так называемых стрельбовых комплексов (СК), которые планировалось ввести в состав системы. Каждый стрельбовый комплекс состоял из четырех стрельбовых узлов (СУ), расположенных в вершинах квадрата, вписанного в окружность (с центром в центре Москвы) радиуса 90 км. Каждый СУ в свою очередь включал радиолокатор канала цели (РКЦ), два радиолокатора канала изделия (РКИ) с четырьмя противоракетами. (территориально СУ, входящие в состав двух СК, были спарены). При такой структуре стрельбовых узлов предполагалось реализовать отработанный на полигоне дальномерный способ определения координат боеголовки и противоракеты (изделия). Обнаружение БР должно было осуществляться радиолокаторами дальнего обнаружения, расположенными на кольце радиуса 60 км. Эти РЛС должны были после обнаружения боеголовке выдавать целеуказание по одной боеголовки четырем РКЦ одного стрельбового комплекса.

Все элементы системы с помощью весьма сложной системы передачи данных были связаны (по аналогии с полигонным образцом) с главным командно-вычислительным центром (ГКВЦ), реализующим все алгоритмы системы.

Двухэшелонная радиолокационная система, «дальномерный» способ получения информации радиолокаторами с вращающимися антеннами и «узким» лучом наведения (РКЦ и РКИ), искусственно усложненная система передачи и обработки информации – все это предопределило бесперспективность проектируемой структуры системы, в частности, ее беспомощность в части селекции боеголовок из состава сложных БЦ. Учитывая эти обстоятельства, было решено завершить строительство системы ограниченным (по сравнению с первоначально определенным в Постановлении) составом (две РЛС дальнего обнаружения, два СК, размещенных в четырех спаренных узлах, ГКВЦ и СПД полного состава) Чтобы придать системе возможность работы по СБЦ на последнем этапе создания системы было решено оказаться от радиодальномерного способа получения информации, а так как при этом уменьшалась точность наведения ПР на цель, ввести в систему противоракеты с ядерными зарядами. После чего все радиолокационные средства системы были алгоритмически увязаны в единую информационную систему, что оказалось возможным благодаря весьма высокой пропускной способности СПД. Система получила весьма условную возможность отражать атаку одной СВЦ с территории США (последнее определялось направленностью секторов РЛС ДО). В таком виде система была формально принята на вооружение.

Для отработки отдельных элементов системы и алгоритмов взаимодействия системы в целом была создана на месте размещения системы модель, которую по сути являлась имитационной моделью. Элементы модели были разбросаны на площади более 10 тысяч квадратных километров. В модель входили объекты строящейся системы (стрельбовые узлы с радиолокаторами канала цели, радиолокаторами канала изделия и пусковыми установками с весовыми эквивалентами противоракет; РЛС дальнего обнаружения; главный командно-вычислительный пункт с комплексом ЭВМ «М-50; система передачи данных); и комплекс аппаратуры обеспечения моделирования. Последний комплекс включал датчики входной информации о траекториях баллистических ракет, датчики помех входной информации, аппаратуру для записи процессов, протекающих в моделируемой системе, аппаратуру для обработки и анализа всей информации о функционировании моделируемой системы.

Задачи, для решения которых была создана модель, были выполнены. Модель была также использована для получения необходимых оценок на этапе заводских, а затем совместных испытаний. По завершении испытаний конструкторы внедрили комплекс аппаратуры обеспечения моделирования в систему для организации регулярных проверок состояния системы. Создание имитационной модели, включающей реальную системы, ее использование для отработки системы является существенным вкладом в методологию (теорию и практику) моделирования сложных динамических систем.

Далее, Генеральный конструктор предложил модернизацию системы путем ввода в узлы системы РКЦ и РКИ с вращающимися ФАР, имеющими ограниченный сектор обзора. Постановка задачи на модернизацию системы была своевременно проанализирована и обоснованно отклонена.

Таким образом, в 1979 г., примерно через 15 лет после первого перехвата боеголовки на полигоне было завершено строительство системы ПРО, боевых возможностей фактически не имеющей. При этом были потрачены колоссальные средства, был задействован огромный экономический потенциал; развертывание системы обеспечивалось войсковой частью в составе более тысячи квалифицированных командиров и инженеров. Конструированием, отработкой и испытанием системы и ее элементов занимались не один десяток НИИ и КБ министерства обороны и ряда гражданских министерств.

Сосредоточение усилий на создание системы ПРО на основе устаревших технических средств и не удачных структурных системных решений явилось одной из основных причин отставания СССР от США в разработке новых перспективных информационных средств, в частности радиолокаторов с фазированной антенной решеткой, способных решать одновременно задачи обнаружения БР и наведения ПР на боеголовки.

Все это явилось следствием неверно сформулированной (в данном случае, сознательно) цели системы и, неучете при постановке задачи перспектив развития, как баллистических средств нападения, так и элементов системы ПРО. То есть, имело место пренебрежение осиновыми принципами системного подхода.

Рассмотренный пример иллюстрирует то положение, что постановка задачи является весьма трудоемким и предельно важным этапом исследования и необходима тщательная проработка всех этапов постановки задачи, чтобы избежать в дальнейшем бессмысленной траты средств.

В проектировании рассмотренной сложной системы принимали участие десятки НИИ, ОКБ, КБ заводов. В принятии решений участвовали «главки» различных министерств, комиссия по военно-промышленным вопросам при Совете министров, отделы ЦК КПСС. Лицам, ответственным за проект, потребовалось учитывать различные, порой противоречивые мнения, престижные соображения, сталкиваться с откровенной коньюктурой, подменой целей. Это те внематематические обстоятельства, с которыми приходиться реально иметь дело в прикладных исследованиях. В конечном счете, престиж и коньюктура оказались теми факторами, которые способствовали принятию необоснованного решения по развертыванию первого этапа ПРО Москвы.

8.7.3. Постановка задачи относительно возможного направления дальнейших работ по созданию противоракетной обороны.

Для того, чтобы осмыслить задачу создания противоракетной обороны и попытаться все же сформулировать обоснованную постановку задачи, обратимся к рассмотрению всех обстоятельств, с которыми связана эта задача.

За время, в течение которого в СССР на основе полигонного образца осуществлялось развертывание системы ПРО Москвы, были проведены и в СССР и в США исследования возможности построения системы ПРО от массированного ракетно-ядерного удара на основе имеющихся и известных перспективных технических решений, а также возможных последствий различных вариантов «обмена» ядерными ударами. На основании этих исследований независимо сделаны аналогичные выводы о бессмысленности обмена ракетно-ядерными ударами в связи с крайней опасностью для *всего человечества* последствий этих ударов, и, соответственно, о нецелесообразности продолжения работ по созданию обороны от массированного налета баллистических ракет. Между СССР и США был заключен договор об ограничении систем ПРО. (Договор имел целью прекратить дальнейшие работы по развертыванию территориальных систем ПРО и оправдать по существу не нужные затраты на создание в СССР первой очереди системы ПРО Москвы, а в США первой очереди системы ПРО «Сейфгард» - ПРО одного из районов размещения стратегических БР. Развертывание этих систем по договору разрешалось)

В то же время ракетно-ядерное оружие стало расползаться по миру, возникла угроза появления небольших арсеналов ракетно-ядерных средств нападения у потенциальных агрессоров и, следовательно, не исключена возможность ядерного шантажа, или нанесения провокационного удара одиночными БР.. Появилась и опасность несанкционированных пусков БР, как следствия недостаточной надежности техники или низкой квалификации персонала.

В связи с этим реальной представляется задача противоракетной обороны территории и объектов страны от атаки одиночных БР с любого возможного направления. Естественным партнером СССР в решении этой задачи являются США и страны Западной Европы. Учитывая успехи в создании новых информационных спутниковых и наземных средств, развитие системы должно начаться в рамках системы слежения за космосом, способной, в том числе, обнаруживать старты и отслеживать траектории баллистических ракет. Радиолокаторы с фазированными антенными решетками имеют возможность одновременно сопровождать десятки объектов, в том числе боеголовки БР и противоракеты.

Средства системы ПРО чрезвычайно дороги, затраты могут быть в какой-то мере оправданы, если предусмотреть возможность использования значительной части этих средств (информационных средств, вычислительных центров, средств передачи данных) для решения задач мирного времени

Система противоракетной обороны состоит из трех основных систем:

- информационной системы, включающей в основном спутниковые системы и наземные радиолокационные станции;

- система передачи данных;

- система активных средств поражения целей: перехватчики с ядерным или осколочным боевыми зарядами, лазерное и возможно другое лучевое оружие.

Развитие двух первых систем должно базироваться на системы мирного назначения, например на систему контроля космического пространства, на глобальные и локальные системы связи, вычислительные центры, решающие задачи управления страной в мирный период. Более того, созданные при необходимости в интересах ПРО дополнительные средства получения и передачи информации, должны включаться в системы, решающие задачи мирного времени. Однако, безусловными для выполнения требованиями являются:

- обеспечение «стыковки» входной и выходной информации систем мирного назначения и командных пунктов системы обороны:

- наличие «системы приоритета», обеспечивающей при появлении объектов, атакующих траекторию страны, немедленное автоматическое переключение всех систем мирного времени на решение задач поражения атакующих объектов.

Создание сложных систем, решающих задачи мирного времени и способных при необходимости оперативно переключиться на военные проблемы, является генеральной линией развития техники Например, система ПРО от одиночных ракет может быть основой системы перехвата космических объектов, падающих на Землю. Автономное создание территориальной системы ПРО даже от одиночных целей – задача безумно дорогая, способная разорить страну. К тому же по ряду обстоятельств такая автономная система просто не нужна..

Таким образом, может быть поставлена *задача обороны объектов территории страны от атаки одиночных СБЦ при условии возможности использования средств системы для решения задач мирного времени.* Целесообразно объединение усилий России, США и Западной Европы по созданию системы противоракетной обороны от нападения потенциальных агрессоров, провокационных и случайных запусков БР.

Объединение усилий прогрессивных стран по созданию совместной системы ПРО против потенциальных агрессоров и террористических группировок безусловно выгодно как в экономическом так и в техническом плане. Более того, такая система будет обладать большей эффективностью, чем разрозненные системы. Однако условиями создания и последующей эксплуатации совместной системы ПРО является взаимное доверие стран-создателей системы, неукоснительное выполнение ими взятых обязательств. В начале XXI века подобные условия отсутствуют. Здесь вновь налицо наличие нематематических условий, которые следует учитывать при постановке задачи. Необходимо определение той области совместных работ в области ПРО, которые полезны и возможны в реальной политической ситуации.

Продолжим постановку задачи на проектирование территориальной системы ПРО., имея в виду оборону от баллистических ракет возможного агрессора или провокатора, а также нейтрализацию несанкционированных пусков. В состав системы ПРО от одиночных БР могут войти спутниковая система поражения БР на начальном участке их траектории; территориальные и зональные системы ПРО для поражения БР на нисходящем участке траектории; система. Целесообразно предусмотреть совместное использовании территориальных и спутниковых средств. Отдельно требуется рассмотреть варианты противоракетной обороны приграничных районов страны от БР малой дальности.

Исходной информацией для проектирования систем ПРО является характеристики средств нападения и характеристики объектов обороны.

Характеристики средств нападения включают типы объектов, подлежащих поражению, их прочностные и аэродинамические свойства. Относительно СБЦ должен быть указан ее возможный состав, количество боеголовок, характеристики боеголовок и других элементов, входящих в состав СБЦ.

Объекты обороны в первом приближении могут быть заданы некоторыми характеризующими их военно-экономический потенциал числами, зависящими от численности населения объектов и потенциала расположенных на объекте промышленных и военных средств. Территориальная оборона в общем случае может быть зональной (площадной), объектовой (точечной) или двух эшелонной, т.е. включающий как противоракеты большой дальности (обеспечивающие зоны обороны), так и ракеты, перехватывающие цели на относительно небольших высотах, обороняя один объект. Кроме того, в состав системы ПРО могут войти спутниковые комплексы для поражения БР на начальном участке ее траектории.

Зона обороны системы – это множество всех точек падения баллистических ракет, перехватываемых противоракетами, размещенными на стартовых позициях системы, т.е. зона обороны связана с расположением стартовых позиций. Площадь зон обороны зависит от зон перехвата (дальности и диапазоны высот), обеспечиваемых противоракетами, и от вида траекторий БР. Если возможно нападение БР с любого направления, зона обороны может быть аппроксимирована кругом определенного радиуса.

Основным ограничением на развертывание системы ПРО является объем средств, выделенных для ее проектирования и строительства.

Предположим, что для отражения атаки одиночных БР будет развернута система, включающая и зональную и объектовую обороны. Введем следующие обозначения.

n – общее количество значимых объектов на территории страны**;**

k - условный номер объекта;

$\mathbf{q_k}$ – потенциал **k**-го объекта;

m – общее количество зон, перекрывающих территорию страны, подлежащую обороне;

i – условный номер зоны;

$\mathbf{X = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m)}$ – зональный вектор;

$$x_i = \begin{cases} \text{1, если i – ая зона обороняется системой обороны,} \\ \text{0, в противном случае.} \end{cases}$$

$\{y_{k,i}\}$ – матрица принадлежности;

$$y_{k,i} = \begin{cases} \text{1, если объект k находиться в пределах зоны i,} \\ \text{0, в противном случае.} \end{cases}$$

$\mathbf{Y = (y1, y2, \ldots, yk, \ldots, ym)}$ – объектовый вектор;

$$y_k = \begin{cases} \text{1, если объект имеет объектовую оборону,} \\ \text{0, в противном случае.} \end{cases}$$

N – общий объем средств, выделяемых на развертывание обороны;

Тогда $\mathbf{Q_i = \sum_{k=1}^{n} q_k y_{k,i}}$ потенциал **i** – ой зоны.

Формализация задачи.

$$\max Q = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} q_k y_{k,i}\right) x_i + \sum_{\forall k: x_i = 0} q_{k,i} y_k,$$

при условии: $C(X,Y)+\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{k\in R} c_k q_k$,

где: **c_i** – затраты на развертывание обороны одной зоны:

c_k – затраты на развертывание обороны одного объекта:

C(X,Y) – общесистемные затраты:

R – множество **k** таких, что **$y_{k,i}$ =1, x_i = 0.**

В результате решения оптимизационной задачи будут определены вектора **X** и **Y.**

В приведенной постановке задачи требуется еще много уточнений. В частности, не определены требования к покрытию территории страны зонами обороны. Требуется детализация общесистемных затрат. Поскольку реально зоны обороны всегда пересекаются, и некоторые объекты могут входить в 2-3 зоны, необходимо уточнить первое слагаемое целевой функции (исключить или учитывать «пересечения»). Можно рассмотреть вариант, когда некоторые наиболее важные объекты находятся в обороняемой зоне и дополнительно имеют объектовую оборону. Наконец, совсем не конкретизирована постановка задачи совместного проектирования средств, входящих в системы, решающие, задачи мирного времени, или задействованные в других системах обороны и переключающиеся в определенных условиях на решение задач ПРО.

Пример 8.8. Взаимодействие двух систем производства сельхозродуктов

С первых дней перехода страны на новые экономические отношения началась перестройка сельского хозяйства России без сколь нибудь серьезного изучения существа проблемы и возможных вариантов ее решения. Было ясно, что существующие в СССР колхозы и совхозы не эффективны, труженики большинства хозяйств не заинтересованы в результатах своего труда, населении деревень катастрофически стареет, местами буквально спаивается. Наряду с этим были и отдельные успешно функционирующие колхозные и совхозные хозяйства.

Для реформирования сельского хозяйства необходимо было четко и однозначно определить конечную цель реформирования аграрного сектора, рассмотреть возможные варианты реформирования с позиции долговременных последствий, оценить ресурсы, потребные для реформирования по каждому варианту и реальное наличие этих ресурсов, ментальность сельского населения,. То есть, следовало весьма и весьма всесторонне осмыслить проблему, прежде чем приступать к каким либо решительным действиям.

Вместо определения цели, оценки вариантов ее достижения, обоснованного выбора лучшей альтернативы сельскому хозяйству была поставлен задача либерализации, в том виде, как это понимали экономисты - последователи Гайдая, Чубайса и т.п. Соответственно, на сельское хозяйство распространили «шоковую терапию». Обоснованием разумности такого подхода занялись журналисты, воспевающие преимущества частного владения землей, не затрудняя себя осмыслением, к чему это приведет в конкретных текущих условиях России. Основная идея перестройки сельского хозяйства трактовалась, как создание класса фермеров - «фермеры накормят страну». В конечном итоге все это привело к резкому падению производства продуктов сельского хозяйства. Кооперативы разваливались, их фонды систематически расхищались. Вновь созданные фермерские хозяйства не получили и, по-видимому, не могли получить необходимой материальной поддержки.

В результате сельское хозяйство оказалось в глубоком кризисе. Появились различные институциональной ловушкой (ИЛ), т.е. устойчивые, но неэффективные нормы, выход из которых весьма не прост. Возникла реальная угроза продовольственной безопасности страны. Спад производства сельхозпродуктов в начале XXI столетия все еще продолжался. Ожидаемого после дефолта 1998 г. оживления производства не произошло. Очевидно, что только относительно крупные сельские хозяйства способны внедрять эффективные передовые технологии. Такими предприятиями могут быть крупные фермерские хозяйства с наемным трудом, или АО, управляемые ответственными менеджерами.

При отсутствии средств, необходимых для кардинального подъема сельского хозяйства, было необходимо использовать имеющиеся положительные тенденции в развитии сельского хозяйства. Вместо общих концепций и революционных планов перестройки сельского хозяйства следовало изучать процессы, протекающие в сельском хозяйстве, поддерживать те хозяйства, где наблюдаются перспективы успешного развития

В рассмотренном далее примере показано, что *сравнительно простая задача организации взаимодействия двух производственных систем связана с всесторонним анализом условий возникновения этой задачи и условиями функционирования систем (внешней средой).*

Структура системы производства сельхозпродуктов к началу XXI века сложилась в виде четырех подсистем:

- сельхозпредприятий (СП) с различной формой собственности,
- личных подсобных хозяйств населения (ЛПХ),
- фермерских хозяйств,
- подсобных хозяйств предприятий.

Производство сельхозпродуктов сосредоточено в основном в двух первых подсистемах: в сельхозпредприятиях и в личных подсобных хозяйствах. Например, в Тверской области в ЛПХ производится в начале XXI века до 90% картофеля и до 45% молока. Вклад в товарное производство фермерских хозяйств незначителен - 0,5 -3,5 процента от областного производства. Также несущественен вклад подсобных хозяйств предприятий.

Сложившееся взаимодействие СП и ЛПХ по своей сути является институциональной ловушкой (ИЛ). Являясь как бы подсобным хозяйством сельскохозяйственных предприятий, ЛПХ не связаны с ними формальными договорными отношениями. К числу факторов, способствующих появление рассматриваемой ИЛ, относится тяжелое положение СП, большая часть которых не была готова к функционированию в условиях экономической независимости и при резком открытии границ страны оказалась не способной к конкуренции с импортерами. К организационным факторам, приведшим к ИЛ, следует также отнести действующее законодательство. Крестьяне не спешили покидать совхозы и колхозы. Во-первых, это единственное место, где они могли рассчитывать на помощь своим подсобным хозяйствам, как основному средству обеспечения семьи. Возможная помощь ЛПХ со стороны СП заключается в обеспечении ЛПХ машинной техникой для обработки земельных участков, удобрениями по льготным ценам, в организации продажи продуктов, содержания на выпасах личного скота совместно с общественным и пр. Во-вторых, работники СП могли рассчитывать на обычные социальные гарантии - стаж, пенсии и пр. К важным социетальным факторам можно также отнести совковое (в самом плохом понимании этого слова) отношение к труду в СП, в том числе, безответственность, недоверие к начальству и пр. В ЛПХ, в частности, более высокое качество ручного труда и лучше условия хранения продуктов. Между двумя основными подсистемами стихийно сложилось определенное разделение труда - неформальная норма. Работникам приходилось «разрываться» между СП и личными хозяйствами

Эффект координации ускорил формирование этой нормы. С течением времени трансакционные издержки в ЛПХ в результате эффекта обучения падали, механизм получения помощи от СП совершенствовался, усилилась устойчивость сформировавшейся нормы поведения.

Помощь от СП может поступать только тогда, когда СП относительно успешно функционирует. При длительном неконтролируемом использовании СП в качестве доноров предприятия разорятся, после чего ЛПХ окажутся без поддержки и, что, в конечном счете, может привести к обвальному падению производства сельхозпродуктов. Труженики СП не всегда это понимают. Рассматриваемая норма не сопряжена с другими институтами, но трансформировать ее нужно было очень осторожно, так как можно лишиться основных производителей сельхозпродукции. Выход из сложившейся ситуации в создании эффективной формальной нормативной базы, способствующей повышению заинтересованности работников в успешном функционировании сельскохозяйственных предприятий. Однако для этого потребуются и определенные усилия.

Таим образом сложилась конфликтная ситуация. Перспектива сельского хозяйства – крупные кооперативы. Однако, перекрытие «кислорода» подсобным хозяйствам привела бы реально к спаду сельскохозяйственного производства. Безконтрольное расхищение средств СП приведет к их банкротству Разумная формализация взаимоотношений между СП и ЛПХ будет способствовать эволюционному выходу из ИЛ.

Таким образом, сформулирована следующая задача.

Формализовать взаимодействия между сельхозпредприятиями и личными подсобными хозяйствами тружеников предприятий таким образом, чтобы обеспечить их совместное эффективное экономическое развитие. При этом порядок взаимодействия не должен привести к упадку производства в ЛПХ и, в то же время, должен способствовать развитию крупного сельскохозяйственного производства.

Одной из альтернатив является определение некоторого оптимального объема помощи личным хозяйствам со стороны сельхозпредприятий, таким образом, чтобы максимизировать объем прибыли предприятия и, одновременно способствовать заинтересованности тружеников сельхозпредприятия в работе на предприятии. Далее развивается именно этот подход.

В основу положена модель Леонтьева. Совместное функционирование сельхозпредприятия и совокупности личных хозяйств работников этого предприятия представлено в виде структуры двух взаимодействующих систем – рис. 1

Исходными являются следующие посылки.

(1) Экономическая помощь личным хозяйствам со стороны сельхозпредприятий должна быть функцией вклада работников ЛПХ в производство сельхозпредприятий.

(2) Размер этой помощи не должен привести ни к упадку экономики сельхозпредприятия, ни к разорению ЛПХ.

(3) Личные хозяйства максимизируют свою прибыль за счет перераспределения доли труда, вложенного в предприятия и в личные хозяйства и эта доля зависит от коэффициента k, характеризующий поощрение личных хозяйств за труд, вложенный в сельхозпредприятие.

(4) Руководитель предприятия, зная подход личных хозяйств к распределению труда оптимизирует прибыль сельхозпредприятия за счет выбора значения коэффициента поощрения.

Введены обозначения: **L** – труд**; П** – природные ресурсы; **Ф –** основные производственные фонды (ОПФ); **ΔФ -** приращения ОПФ; **X** – валовой продукт; **Y –** конечный продукт; **W** – производственное потребление**; С –** непроизводственное потребление; **I –** валовые капитальные вложения; **R –** чистые капитальные вложения; **A** – амортизационные исчисления; μ **-** коэффициент амортизации;

«**1**» **-** индекс, относящийся к личным хозяйствам; «**2**» **-** индекс, относящийся к сельхозпредприятию;

Положим, что весь совокупный труд работников ЛПХ равен **L .**

Пусть $\mathbf{L_2 = \gamma L}$, $\mathbf{L_1 = (1-\gamma) L}$, где (1)

$\mathbf{L_2}$, $\mathbf{L_1}$ **-** части совокупного труда, вкладываемого в производство сельхозпредприятий и ЛПХ, соответственно. $\mathbf{0 < \gamma < 1}$.

Рассмотрим двухфакторную производственную функцию сельхозпредприятий **-**$\mathbf{F_2}$**.**

$$\mathbf{X_2 = F_2(W, \gamma L)}, \text{ где} \qquad (2)$$

$\mathbf{X_2}$ **-** валовой продукт сельхозпредприятия,

$$\mathbf{W = W_n + W_k + \overline{W}_2 - \nabla W_1} \;; \quad \mathbf{\overline{W}_2 = W_2 + \nabla W_1},$$

$\mathbf{W_n}$ **-** природные ресурсы**,**

$\mathbf{W_k}$ - основные производственные фонды сельхозпредприятия,

$\mathbf{W_2}$ **-** часть валового продукта, выделяемая на производственное потребление предприятия,

$\mathbf{\nabla W_1}$ **-** часть валового продукта предприятия, выделяемая на помощь ЛПХ, $\mathbf{\nabla W_1 < \overline{W}_2}$.

Согласно сделанному предположению

$$\mathbf{\nabla W_1 = \xi(L_2)} \qquad (3)$$

Естественно допустить, что эта зависимость является линейной, т.е.

$$\mathbf{\nabla W_1 = kL_2 = k\gamma L} \qquad (4)$$

Здесь **k -** количество продукта предприятия, выделенного для помощи ЛПХ, отнесенное к единице труда, вложенного тружениками ЛПХ в работу на предприятии. Размерность зависит от того в каких единицах измеряется валовой продукт и труд.

Далее принято допущение, что $\mathbf{W_n}$ и $\mathbf{W_k}$ постоянны и значение X_2 изменяется только при изменении $\mathbf{\nabla W_1}$ **.** Тогда с учетом (4) можно записать

$$\mathbf{X_2 = F_2(\overline{W}_2 - k\gamma L, \gamma L)} \qquad (5)$$

И конечный продукт сельхозпредприятия запишется в виде

$$\mathbf{Y_2 = F_2(\overline{W}_2 - k\gamma L\;, \gamma L\;) - (W_2 + k\gamma L)} \qquad (6)$$

Коэффициент **k** может изменяться в определенных пределах от **0** - нет никакой помощи- до $\mathbf{k_{max}}$ - предельно допустимая помощь.

Для определения $\mathbf{k_{max}}$ можно воспользоваться, его значением, полученным в (Л.) из условия обеспечения расширенного воспроизводства сельхозпредприятия, или из условия

$$\mathbf{\overline{W}_2 = W_2 + \nabla W_1 = X_2 - A_2 - s\gamma L}\;, \qquad (7)$$

$$\mathbf{\nabla W_1 = k_{max}\gamma L = X_2 - W_2 - A_2 - s\gamma L}\;, \qquad (8)$$

где $\mathbf{A_2}$ - амортизационные отчисления;

s -коэффициент оплаты труда

$$\mathbf{k_{max} = \frac{X_2 - W_2 - A_2}{\gamma L} - s} \qquad (9)$$

Производственная функция подсистемы ЛПХ имеет вид

$$\mathbf{X_1 = F_1(W_1, (1-\gamma)L)} \qquad (10)$$

Тогда $\mathbf{Y_1 = F_1(W_1, (1-\gamma)L) - W_1 + k\gamma L + s\gamma L}$ (11)

Здесь также принято допущение, что основные производственные фонды ЛПХ постоянны и не влияют на зависимость объема валового продукта от изменения объема помощи.

В результате получаем следующую формализацию поставленной задачи

$$\begin{cases} \mathbf{Y_2 = F_2(\tilde{W}_2 - k\cdot\gamma\cdot L, \gamma\cdot L) - (k\cdot\gamma\cdot L + W_2) \to \max\limits_{k}} \\ \mathbf{Y_1 = F_1(W_1, (1-\gamma)\cdot L) - W_1 + k\cdot\gamma\cdot L + s\cdot\gamma\cdot L \to \max\limits_{\gamma}} \\ \mathbf{k \in K} \\ \mathbf{0 < \gamma < 1} \end{cases} \qquad (12)$$

Для достижения максимума $\mathbf{Y_1}$ необходимо, чтобы
$\dfrac{\mathbf{dY_1(\gamma,k)}}{\mathbf{d\gamma}}=\mathbf{0}$, отсюда получим значение:

$\boldsymbol{\gamma=\Psi(k)}$, доставляющее максимум функции $\mathbf{Y_1}$ (13) .

Подставляя (13) в (12), получим:

Для получения максимума $\mathbf{Y_2}$ необходимо, чтобы $\dfrac{\mathbf{dY_2(k)}}{\mathbf{dk}}=\mathbf{0}$. (14)

В результате решения (14) находим значение $\mathbf{k=k^*}$, обеспечивающее максимума функции $\mathbf{Y_2}$. Параметр $\boldsymbol{\gamma=\gamma^*}$ вычисляется по формуле (13). Полученное решение $\boldsymbol{(k^*,\gamma^*)}$ отражает состояние равновесия между подсистемами.

$$\mathbf{Y_2=F_2(\tilde{W}_2-k\cdot\Psi(k)\cdot L,\Psi(k)\cdot L)-(k\cdot\Psi(k)\cdot L+W_2)\to\max_{k}}.$$

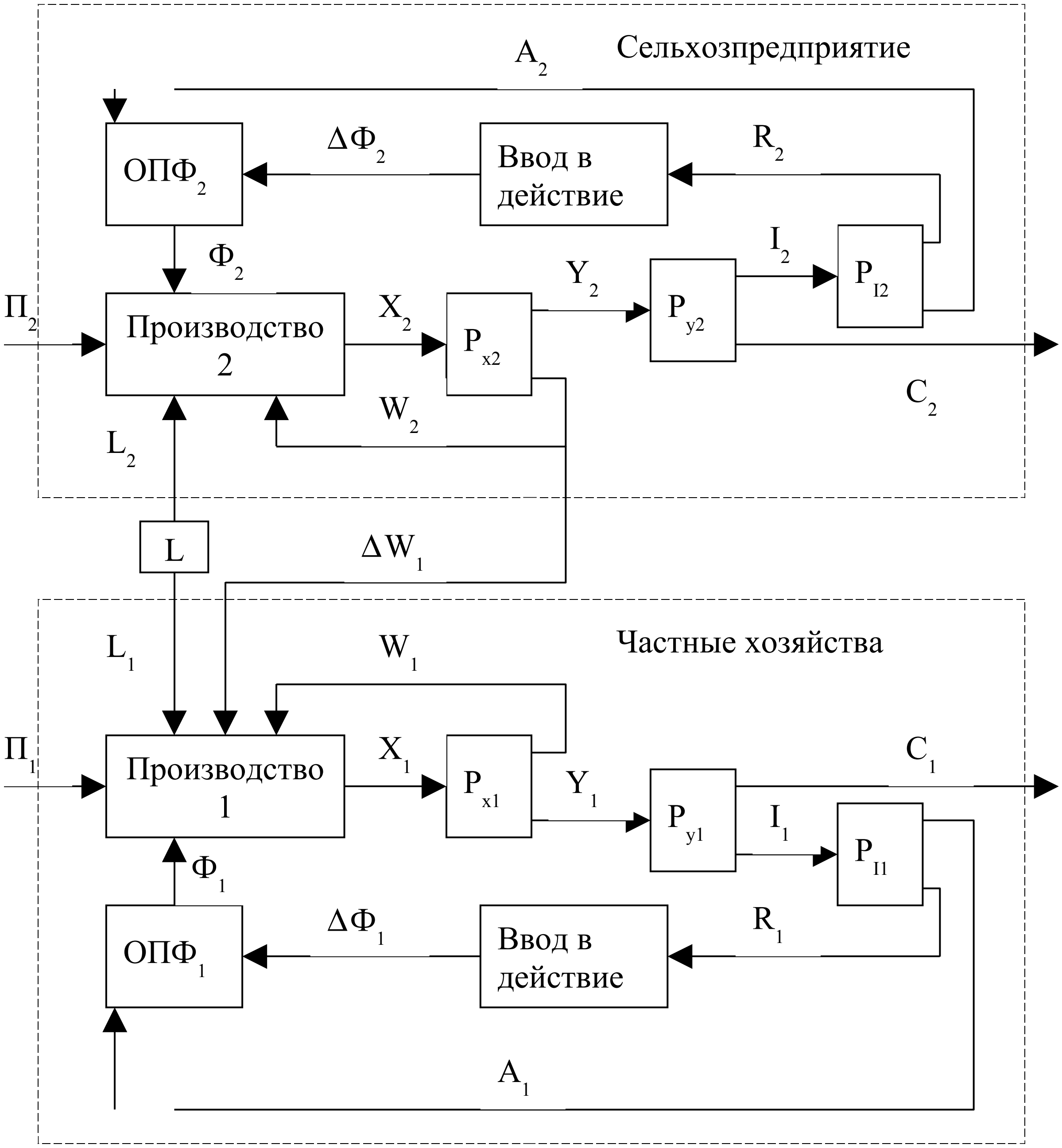

Рис..1.

Также представляет интерес трансформация задачи (12) в следующий вид: $$\Theta(k,\gamma) = \nu \cdot Y_1(k,\gamma) + (1-\nu)Y_2(k,\gamma) \to \max_{k,\gamma}. \qquad (15)$$

Смысл этого выражения заключается в том, что руководитель предприятия становится ответственным за состояние сельского хозяйства в целом и преследует цель увеличения прибыли как коллективного, так и частных хозяйств. Коэффициент ν показывает степень "важности" той или иной составляющей системы проиизводства сельхозпродуктов.

$$0 \le \nu \le 1.$$

Решение рассмотренной задачи приведено в Л

Пример 8.9. Взаимодействие производителя сельхозпродуктов и переработчика этих продуктов

Объединение производителей и переработчиков продуктов сельского хозяйства является одним из перспективных направлений развития агропромышленных комплексов.

Возможных вариантов объединения много - от различного рода договорных отношений до создания совместного предприятия, при различных вариантах привлечения банковского капитала. Постановка задачи всегда весьма конкретна, существенно зависит от состояния объединяемых предприятий, их индивидуальных возможностей и перспектив. В любом случае после объединения прибыль каждого предприятия, вошедшего в объединение, должна возрасти. Далее рассмотрен простой пример постановки задачи объединения завода по производству сыра и сельхозпредприятия – производителя молока. Причем предполагается, что для успешного функционирования сельхозпредприятия нуждается в принципиальной реорганизации: капитальная реконструкция ферм, закупка породистых коров. Положим также, что кредиты сельхозпредприятию представляет завод.

Таким образом поставлена задача,

Оценить возможные выгоды завода и фермы при их взаимодействии при условии, что завод вкладывает определенные средства для реконструкции фермы.

1). Передаточная функция предприятий

Для оценки взаимодействия сельхозпредприятия – производителя молочной продукции (именуемого далее «ферма»)и завода по переработки молока целесообразно рассмотреть простую модель, блок-схема которой показана на рис. 1

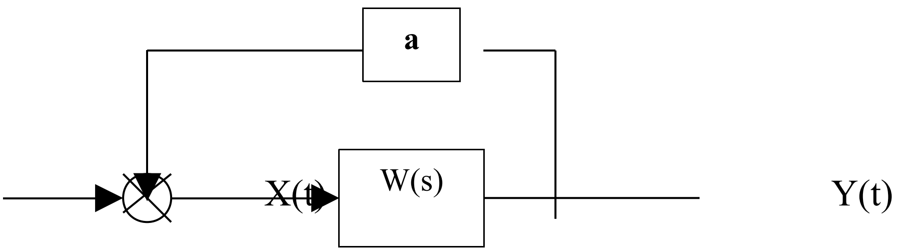

Рис. 2

Обозначения

f– текущее значение ОПФ;

x – интенсивность потока инвестиций, экзогенная переменная;

y – интенсивность потока конечного продукта; **l** – интенсивность потока амортизации; μ - фондоотдача в единицах остаточной стоимости,

a – норматив отчисления в фонд производства; **n** – коэффициент амортизации.

$\mathbf{y = \mu f; \quad l(t) = nf(t); \quad f'(t) = x(t) - l(t)}$

Переходя к изображениям, получим:

$\mathbf{S \cdot F(S) - f_0 = X(S) - L(S) \Rightarrow F(S) = 1/S(X(S) - L(S) + f_0) \Rightarrow}$

$\mathbf{F(S) = 1/S(X(S) - n\,F(S) + f_0).}$

$$\mathbf{F(S) = \frac{1}{s+n}(X(S) + f_0)}; \qquad \mathbf{Y(S) = \mu F(S) = \frac{\mu}{s+n}(X(S) + f_0).}$$

Отсюда передаточная функция производственного звена **W(s)**: $\mathbf{W(S) = \frac{\mu}{s+n}}$.

С учетом норматива отчисления в фонд производства передаточная функция системы, структура которой имеет вид, показанный на рис. 2 запишется в виде:

$$\mathbf{\Phi(S) = \frac{W(S)}{1 - aW(S)} = \frac{\mu}{s - (\mu a - n)}}. \qquad (1)$$

Таким образом: $\mathbf{Y(S) = \frac{\mu}{s - (\mu a - n)} X(S) + \frac{y_0}{s - (\mu a - n)}}$. **(2)**

Зависимости (1) и (2) справедливы и для завода и для фермы. Кроме того, предполагаем, что завод имеет свободный капитал, который может быть использован для кредитования фермы или положен в банк.

2) Анализ функционирования и взаимодействия предприятий

Для анализа взаимодействия завода и фермы целесообразно использовать модель Леонтьева, конкретизированной для рассматриваемого взаимодействия. Структура взаимодействия показана на рис. 3

На рисунке: L – трудовые ресурсы; Z – валовой продукт; U – производственное потребление;Y – конечный продукт; A – валовые капитальные вложения, включающие чистые капитальные вложения и амортизационные отчисления; C – непроизводственное потребление; I_2 - инвестиции завода в производство фермы; M – поставка ресурсов

Используя изложенный выше подход, запишем:

$$\mathbf{Y(S) = \frac{\mu}{s - (\mu a - n)} X(S) + \frac{y_0}{s - (\mu a - n)}} \qquad \mathbf{(3)}$$

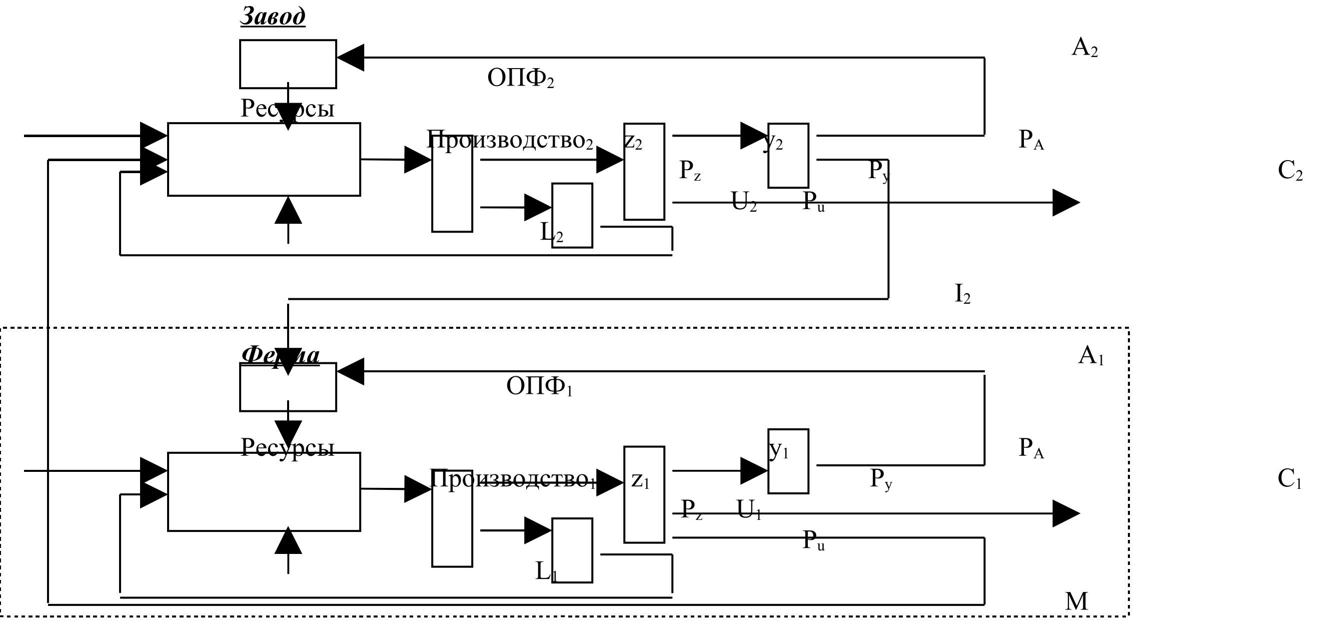

Рис. 3

Задавясь любым значением **x(t),** можно рассчитать **y(t).**

Частные случаи

1). $x_1(t) = 0$

Тогда $y_1(t) = \mu_1 f_{01} e^{(\mu_1 a_1 - n_1)t}$. Очевидно, при $(\mu_1 a_1 - n_1) < 0$ конечный продукт будет сокращаться. При $(\mu_1 a_1 - n_1) \geq 0$ будет иметь место соответственно простое или расширенное воспроизводство.

Так как $\mu_1 = y_1 / f_1$, **то** $\mu_1 a_1 > n$ будет иметь место при $ya > nf$, то есть часть дохода, выделяемое на развитие ОПФ, больше потерь от амортизации.

2) $x(t) = \text{const} = I$

$$Y(S) = \frac{I \cdot \mu}{s - (\mu a - n)} \cdot \frac{1}{s} + \frac{y_0}{s - (\mu a - n)} = \frac{A}{s - (\mu a - n)} + \frac{B}{s} + \frac{y_0}{s - (\mu a - n)}$$

$$A = -B = \frac{I\mu}{\mu a - n}. \tag{4}$$

Соответственно**:**

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mu_1 I_1 e^{(\mu_1 a_1 - n_1)t} - \mu_1 I_1 + \mu_1 f_{10} e^{(\mu_1 a_1 - n_1)t} \\ y_2(t) &= \mu_2 I_2 e^{(\mu_2 a_2 - n_2)t} - \mu_2 I_2 + \mu_2 f_{20} e^{(\mu_2 a_2 - n_2)t} \end{aligned} \tag{5}$$

(Здесь и далее индекс 1 относится к ферме, индекс 2 к заводу).,

Частный случай $x_1(t) = I_1 \cdot \delta(t)$ (одноразовая инвестиция).

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mu_1 I_1 \cdot e^{(\mu_1 a_1 - n_1)t} + \mu_1 f_{01} \cdot e^{(\mu_1 a_1 - n_1)t} \\ &= \mu_1 e^{(\mu_1 a_1 - n_1)t} (I_1 + f_{0_1}). \end{aligned} \tag{6}$$

При отсутствии взаимодействия фермы и завода:

Ферма не имеет инвесторов $\mathbf{x_1(t) = 0}$.

В условия переходной экономики вследствие ценовой дискриминации и устаревшей материальной части на ферме затраты **(З)** непрерывно растут, оплата труда (Т) низкая и не стабильная, прибыль (П) отсутствует, себестоимость **(С = З + Т)** выше цены **С > Ц**, т.е. ферма нуждается в ежегодных дотациях. Финансовое неблагополучие фермы определяется высокими закупочными ценами (на продукцию ТЭК, корма), низким значением коэффициента фондоотдачи μ, высоким трансфертными нагрузками в том числе при продаже на рынке своей продукции. Если к тому же $\boldsymbol{\mu_1 a_1 - n_1 < 0}$, т.е. $\mathbf{a_1 y_1 < n_1 f_1}$, то ферма ежегодно снижает выпуск продукции. Кроме того, вследствие неустроенности рынка (отсутствие прогнозируемого спроса) фирма несет большие трансфертные нагрузки.

Таким образом, ферма (производители сельхозпродуктов) нуждаются в инвестициях в первую очередь для обновления ОПФ (оборудование, технологии). Завод заинтересован в прямых связях с фермой для получения качественного сырья при гарантированном объеме поставок.

Вследствие ограниченных возможностей фермы, завод вынужден закупать молоко у различных поставщиков, при этом вследствие несовершенства рынка имеет значительные трансфертные нагрузки.

Завод имеет свободный капитал, который может быть использован для кредитования фермы или положен в банк. Завод заинтересован в прямых связях с фермой для получения качественного сырья при гарантированном объеме поставок.

Рассмотрим следующую схему взаимодействия завода и фермы.

(1) Завод инвестирует в ферму единовременно некоторый капитал **I**, необходимый для закупки высокоудойных коров и технического переоборудования фермы. Величина инвестиций такова, что после их освоения ферма полностью обеспечивает завод поставками молока в необходимом объеме.

(2) Осуществляется прямая поставка молока с фермы на завод, минуя посредников.

(3) Определяется взаимовыгодные условия погашения инвестиционного кредита путем прямых расчетов ферма – завод.

«Выгоды» фермы:

1). Существенно повышается конечный продукт $\boldsymbol{y_1=\mu_1 \cdot f_1}$, как за счет увеличения как $\mathbf{f_1}$, так и $\boldsymbol{\mu_1}$, таким образом, что оказывается возможным воспроизводство ОПФ, $\boldsymbol{\mu_1 a_1 \geq n_1}$.

2). Снижаются трансфертные потери.

«Выгоды» завода - снижение трансфертных потерь, гарантированное обеспечение качественных поставок молока.

В результате организации взаимодействия завод и ферма получат дополнительную прибыль

Дополнительная прибыль фермы $\Delta\Pi_1 = (\delta\mu_1 \cdot f_{0,1} + \mu_1 \cdot I)q_1 - \delta y_1 + \delta З_1$,

где согласно (4) для случая простого воспроизводств $(\mu_1 a_1 = n_1)$ справедливо $y_1 = \mu_1(I + f_{0,1})$,

$\delta\mu_1$ – приращение фондоотдачи вследствие реконструкции фермы, проведенной за счет полученного кредита I ($\delta\mu_1 = \mu_1 - \mu_{1,0}$, здесь $\mu_{1,0}$ – значение коэффициента фондоотдачи до проведения реорганизации фермы),

q_1 – цена единицы продукции фермы,

δy_1 – стоимость части конечного продукта фермы, используемая для ежегодного погашения инвестиционного кредита с учетом договорной процентной ставки,

$\delta З_1$ - уменьшение затрат вследствие снижения трансфертных потерь как результат взаимодействия завода и фермы.

μ_1 ($\delta\mu_1$), δy_1, зависят от I ; $\delta З_1$ зависит от I и от y_1

Дополнительная прибыль завода

$\Delta\Pi_2 = \delta З_2 + \gamma I + \delta q_2 \cdot y_2$, **где**

$\delta З_2$ - уменьшение затрат вследствие снижения трансфертных потерь завода, как результат его взаимодействия с фермой, $\delta З_2$ зависит от y_1,

γ - договорная процентная ставка,

δq_2 – повышение цены единицы продукции завода, как следствие повышения качества поставляемого молока,

y_2 – объем конечного продукта завода.

Должно быть выполнено следующее условие: $\Delta\Pi_2 > \rho I$,

где ρ -банковская процентная ставка.

Используя приведенные формулы, можно проанализировать зависимость конечного продукта фермы от времени для различных значений капитальных вложений и валовых инвестиций.

Приведенная формализация совместного функционирования завода и фермы носит сугубо предварительный характер. Необходимо далее уточнить алгоритмы с учетом конкретных характеристик взаимодействующих субъектов и окружающей среды. В данном случае не исключено участие банковского капитала и, соответственно, усложнения структуры взаимодействия.

9. Теория вероятностей и мтематиесая статитика в математичесих моделях

9.1. Теория вероятностей. История. Область применения

Теория вероятностей – математическая дисциплина, в которой отчетливо проявляется плодотворное взаимодействие теоретической и прикладной ветви математики. Потребности демографии, страхового дела, азартные игры, рассеяние при артиллерийской стрельбе, оценки точности технических решений – все это явилось источником задач, при решении которых были найдены математические обобщения – основы теории вероятностей, как самостоятельной области математики. Лаплас писал: «Теория вероятностей есть, в сущности, не что иное, как здравый смысл, сведенный к исчислению: она заставляет оценить с точностью то, что справедливые умы чувствуют как бы инстинктом, часто не умея отдать себе в этом отчета».

Азартные игры были известны еще в Древней Греции. Согласно легенде игру в кости придумал Паламадей, чтобы спасти от скуки солдат при ожидании битвы при Трое. Игра в кости была популярна и в Западной Европе. Карточные игры появились в Европе в XIV веке. Самая первая книга по теория вероятностей «Книга об игре в кости» была написана 1663 г. Поскольку она была опубликована только через 100 лет, Галилей написал тракт на ту же тему «Об открытиях, совершенных при игре в кости» (1613-1624), который затем в 1718 г была напечатан в собрании сочинений Галилея под названием «О выходе очков при игре в кости».

В 1654 г. Паскаль и Ферма дали (по переписке) правильное решение двух задач, связанных с азартными играми. Этот год принято считать годом рождения теории вероятностей. Гюйгенс, узнав результат, полученный Паскалем и Ферма, начал писать книгу по теории вероятностей.

Лейбниц в 1666 г. написал рассуждения о комбинаторном искусстве.

Якоб Бернулли – один из основоположников теории вероятностей в книге «Искусство предположений», опубликованной в 1713 г. (после смерти Бернулли) перепечатал трактат Гюйгенса об азартных играх и рассмотрел элементы комбинаторики. Важным результатом является теорема Бернулли о биноминальных распределениях– простейшая форма закона больших чисел. В книге также появляются числа Бернулли.

В XYIII веке сфера применения теории вероятностей расширились. Важные результаты получены Муавром (в том числе открытие нормального распределения). В 1733 г французский естествоиспытатель Жорж Бюффон ввел понятие геометрической вероятности.

В 1812 г Лаплас, используя новый математический аппарат, включая разработанную им теорию производящих функций, опубликовал «Аналитическую теорию вероятностей» Доказательства всех теорем проведены в книге ясно и изящно. В книге изложены геометрическая вероятность, теорема Бернулли и ее связь с интегралом нормального распределения, метод наименьших квадратов, разработанный Лежандром и Гауссом Книга с дополнениями пересдавалась в 1814 и в 1820 гг. В «Опыте философии теории вероятностей», написанным в качестве предисловия ко второму изданию книги, Лаплас изложил свои соображения о применении теории вероятностей к явлением социального характера.

Распределение Пуассона впервые появилось в книге Пуассона «Исследования о вероятности судебных приговоров по уголовным и гражданским делам» в 1837 г. Несмотря на большую практическую значимость, распределение Пуассона долго не находила практического применения. В 1898 г. при исследовании статистики убийств солдат германской армии копытами лошадей была получена практически полная сходимость опытных результатов с теоретическими результатами распределения Пуассона. После этого распределение стало широко применяться.

На раннем этапе развития капитализма потребности страховых компаний привели к математическим исследованиям смертности населения. Начало математической теории страхования жизни положила статья Галилея о таблицах смертности, опубликованная в 1693 г.

Д.Бернулли опубликовал результаты ряда исследований на основе теории вероятностей. В том числе о средней продолжительности браков; анализ смертности, вызванной оспой, и преимуществе предотвращающей ее инокуляции; соотношении рождаемости мальчиков и девочек.

Мматематическая теория смертности может быть использована для анализа амортизации изделий, изучения распада атомов и т.п. Понятие полураспада стало фундаментальным в некоторых областях науки. Продолжительность существования радиоактивных частиц описывается показательным распределением. Ф.Либби использовал понятие полураспада в области археологической хронологии (Нобелевская премия 1960 г.), М.Свадеш - для определения даты разделения родственных языков (метод лексикостатистики).

Французские математики XVIII и XIX вв. успешно использовали вероятностные подходы в артиллерийском деле. Это направление применеия вероятностных подходов получило дальнейшее развите в России.

П.Л.Чебышов в 1866 г. дал строгое доказательство *неравенства Чебышева* (в мене общей форме оно было получено Ж.Бьенэме в 1853 г.). В 1867 г. Чебышев в статье «О двух теоремах относительно теории вероятностей» распространил на суммы случайных величин предельную теорему Муавра-Лапласа. Большая заслуга Чебышева в том, что он всюду стремился получить точные оценки отклонений от предельных закономерностей. Предельные теоремы Чебышева были затем распространены на более широкие классы случайных величин А.А.Марковым, А.М.Ляпуновым, С.Н.Бернштейном, А.Я.Хинчиным, А.Н.Колмогоровым и другими.

В 1933 г. Колмогоров на основе достижений предыдущих математиков (в особенности Э.Бореля и А.Ломнитского).опираясь на теорию множеств и теорию меры построил *строгую математическую теорию вероятностей*. *Аксиоматика Колмогорова*, его сигма-алгебра стали в XX в. общепризнанными, способствовали дальнейшему развитию теории вероятностей, а также успешному применению теории вероятностей во многих приложениях.

Случайность» и «*вероятность*» - признанные понятия в физике. Однако, физические концепции вероятности не являются простым применением математической вероятности. В результате работ выдающихся физиков (де Бойля, Шредингера, Гейзенберга, Борна и др.) в 1926-1929 гг. была создана квантовая теория вероятностей. Спустя 20 лет была разработана (фон Нейман, Г.Макки) общая единая теория вероятностей, включающая в себя и классическую, и квантовую теории вероятностей

Идея метода Монте-Карло численного метода, основанного на случайной выборке, впервые появилась в 1777 г. в работе Бюффона. Широкое применение метода началось лишь с появлением компьютеров, когда метод был использован для приближенного решения задач, связанных с ядерными реакциями. На основе метода Монте-Карло после несложных преобразований на ЭВМ можно получить последовательности случайных чисел, соответствующие заданному распределению вероятностей, что и используется при решении на ЭВМ физических, химических, биологических, экономических, технических задач.

Характеристическая функция случайной величины ξ, определяется как математическое ожидание комплексной случайной величины $\mathbf{e^{it\xi}}$. Благодаря своим свойствам характеристическая функция успешно используются в теории вероятностей при решении задач, связанных с композицией и факторизацией сумм случайных величин. Характеристические функции использовали еще в 1853 г. Коши, а в начале XX в. А.Ляпунов. С 1920-х.гг. характеристические. функции получили широкое распространение благодаря работам Д.Пойа и А.Леви. Теория декомпозиции возникает в 1930 г. на основе теорем Крамера, Хинчина, Райкова

Модели на основе или с применением теории вероятностей разработаны для решения задач практически во всех отраслях науки и техники.

Если ввести понятие иерархии моделей, то на верхнюю ступень иерархии моделей теории вероятностей следует поставить аксиоматику Колмогорова. Далее следуют математические модели с высоким уровнем абстракции и, соответственно, используемые для изучения - анализа и синтеза самых разнообразных фрагментов реального мира. К таким моделям следует, например, отнести модели массового обслуживания. Теория массового обслуживания как раздел теории вероятностей возникла в связи с потребностями практики, в частности широким развитием телефонных сетей. В настоящее время модели массового обслуживания успешно используются при решении проблем надежности, анализе функционирования сложных систем и во многих других технических, экономических и социальных областях: системы связи, системы снабжения, транспорт, организации производства, медицинское обслуживание и др.

К абстрактным моделям теории вероятностей следует также отнести модели статистической теории распознавания, стохастические модели обучаемости, модели стохастического программирования, статистические модели в многокритериальных задачах принятия решения, модели стохастического математического программирования и многие другие

Все более широкое применение теория вероятностей находят в моделях экономики, биологии, социологии.

Вероятностные подходы, соответствующие алгоритмы и оценки являются одной из основ имитационных моделей.

В теории вероятностей широко применяется комбинаторика при исчислении вероятностей событий, том числе вероятностей событий, которые могут осуществляться на решетках. Простой пример такой задачи - случайное блуждание по одномерной решетке.

9.2. Вычислительные методы комбинаторной математики.

Комбинаторные методы явяются существенно частью многгих алгоритмов теории вероятностей. В комбинаторной математике рассматриваются обычно задачи на существование, эффективное построение, перечисление и оптимизацию объектов, зависящих от сравнительно большого числа дискретных переменных. Комбинаторный анализ – это часть математики, сформировавшаяся к середине XX столетия, объединяющая и сближающая многие ее разделы: классическую перечислительную комбинаторику, производящие функции, теорию графов и гиперграфов и другие специальные таблицы, конечные геометрии, коды и др. Общие подходы производятся на языке дискретных множеств, чаще конечных.

Некоторые объекты реального мира по самой своей природе требуют комбинаторных исследований. Кроме теории вероятностей комбинаторные методы применяются также в теории кодирования, кристаллографии, биологии, генетике, квантовой механике, статистической физике, микрофизике, планировании эксперимента, экономике, теории автоматического управления и.т.д. В современных ЭВМ осуществляется на практике подход к математике как к объекту комбинаторной структуры

Лейбниц был первым автором, который использовал термин «комбинаторный» в том смысле, в каком это употребляется сегодня в комбинаторной математике. В «Диссертации о комбинаторном искусстве», написанной им в 1666 г., решались простейшие комбинаторные задачи, приводящие к биноминальным коэффициентам и к факториалу. В дальнейшем он планировал все новые применения «комбинаторики»: к кодированию и декодированию, к играм, к статистике смертности, к комбинации наблюдений, все больше расширяя сферу возможного применения «комбинаторики», Его планы будущего применения «комбинаторики» казались фантастическими, но он предвидел громадное разнообразие приложений «комбинаторики», многие из которых оказались реализованными при применении современных ЭВМ.

Современное развитие комбинаторного анализа тесно связано с использование производящих функций

Производящей (обычной) функцией последовательности чисел a_0, a_1, …, a_n …называется формальный ряд

$A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots$, где t – формальная переменная

Для обычных производящих функций вводится алгебра степенных рядов, или алгебра Коши.

Экспоненциальной производящей функцией последовательности чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$ называется ряд $E(t) = a_0 + a_1 \frac{t}{1!} + \ldots + a_n \frac{t^n}{n!} + \ldots$

.Алгебра экспоненциальных производящих функций отличается от алгебры Коши.

Использование производящих функций сокращает объем необходимых преобразований, позволяет унифицировать многие результаты

Кроме метода производящих функций в комбинаторном анализе используются комбинаторные схемы, логические методы, комбинаторные таблицы и схемы, геометрические методы, системы множеств (в т. ч. экстремальные задачи на графах и гиперграфах, упорядоченные множества).

Важными понятиями в комбинаторике являются группы и эквивалентность отображений. Число классов эквивалентности определено в теореме Пойа.

9.3. Математическая статистика.

Статистические методы использовались с древних времен. Согласно Библии Моисей вел учет всех мужчин своего народа старше 20 лет. В Китае учет населения проводился уже более 4000 лет назад. Правители стран Древнего Востока получали информацию о величине ожидаемого налога, о числе потенциальных солдат. Статистика стала наукой только в XVII в. Ее основоположниками с читаются Джон Граунт и Уильям Петти. Граунт исследовал вопросы народонаселения (результаты опубликованы в 1662 г в книге «Естественные и политические наблюдения, сделанные над бюллетенями смертности»). Петти принадлежат «Трактат о налогах (1662),»Наблюдения над дублинскими записями смертности» (1681). В работе «Политическая арифметика»(опубликована в 1869 г.) Петти провел сравнение трех стран: Англии, Франции, и Голландии по населению, торговле и судоходству.

В 1669 г. Гюйгнес на основе данных Граунта опубликовал таблицы смертности.

С развитием капитализма статистику стали использовать не только государство, но и капиталисты. Особый интерес представляло использование статистики в страховом деле.

В начале XIX в. Лежандр, Гаусс и Лаплас предложили новый эффективный метод, позволяющий уменьшить влияние ошибок измерения на определение характеристик наблюдаемой функциональной зависимости, названный методом наименьших квадратов. Метод развился в самостоятельное направление теории вероятностей. Возможности метода порой переоцениваются при некритической оценке условий его применения. По существу метод наименьших квадратов является частным случаем метода максимума правдоподобия, который является одним из наиболее эффективных методов оценки неизвестных параметров функции. Он получил распространение в 20-е годы XX в. результате работ статистика и генетика Р.Фишера.

При использовании вероятностных походов в генетике Френсис Гальтон и его ученик Карл Пирсон ввели понятие «корреляция» и «регрессия». Корреляция характеризует стохастическую связь между случайными величинами. Регрессия выражает эту связь в виде функции. Понятие регрессии Гальтон ввел при сравнении роста родителей с ростом их детей. Эти понятия нашли самое широкое применение во многих науках. Регрессионный анализ вначале применялся в биологии. Соответствующие вопросы освещались в журнале «Биометрика», который выпускался с октября 1901 г. Использование регрессионного анализа в экономике привело в 1920-1930-х годах к развитию новой отрасли науки – эконометрии (Термин принадлежит Фишеру (1926), которому позже была присуждена Нобелевская премия). Постепенно был развит регрессионный анализ структур. Исследования этой проблемы проводились рядом ученых, в том числе Д.Кейнсом, Я Тинбергеном, Л. Клейном. (Последнему в 1959 г. была присуждена Нобелевская премия). Журнал «Технометрика» выходит с 1959 г. и посвящен в основном техническим приложениям регрессионного анализа.

Разделами статистики являются статистические распределения, теория выборочного метода, статистические оценки, интервальное оценивание, проверка статистических гипотез. Та или иная статистическпя модель применяется в зависимости от поставлнний задачи и вида доступглй информации.

Доверительный интервал Неймана содержит неизвестный неслучайный параметр, а выборка экспериментальных данных случайна. Другой подход к интервальным оценкам применил Фишер..

Проблема проверки гипотез фактически возникла, когда английский математик, врач и писатель Джон Арбунтот первый замети в 1710 г., что гипотеза о равном соотношении родившихся мальчиков и девочек должна быть отвергнута, как не соответствующая демографическим данным. Проверка гипотез была использована Д.Бернулли (1734) и Лапласом (1812) в астрономических исследованиях.

Основоположнии современной теории проверки гипотез являются К.Пирсон, Э.Пирсон, Р.Фишер, Е.Нейман. Различные критерии проверки предлагали К.Пирсон, Г.Крамер, Р.Мизес, А.Колмогоров, Н.Смирнов. Распрделение Стьюдета, используемое при оценках гипотез, ввел в рассмотрение У.Госсет в 1908.г. Основной при проверке гипотез стала теория, разработанная Нейманом и Пирсоном.

В одном из важнейших направлений современной статистики лежит положение, что объем выборки следует определять в зависимости от ранее проведенных наблюдений. Разработанный Абрахамом Вальда на этой основе метод последовательного анализа и его последовательный критерий отношения правдоподобия (!943) позволяют в типичных условиях на 50% уменьшит среднее число наблюдений. Открытие Вальда было секретным до 1947.г.

В XX в методы математической статистики используются практически во всех естественных науках. Значительное место эти методы занимают при исследовании проблем физики, биологии, экономики. В ряде случаев подобные методы являются единственным инструментом получения необходимых результатов. В конце XX века новый импульс получило применение методов статистики для решения задач, связанных с развитием страхования. Получены определенные обобщающие результаты

Статистическая обработка резкльтатов экспериментов все в большей степени используются в гуманитарных областях: в медицине, языкознании и других направлениях. Так, в 60-х годах два ленинградских математика, используя статистический подход, смогли установить дату (ранее не известную) создания Моцартом одного из своих произведений.

9.4. Случные процессы

Случайные процессы имеют место в физике, химии, технике и в других областях науки. Так, например, случайным процессом моделируется цепная реакция в ядерной физике. Понятие ветвящиеся процессы введено в 1947 г. А.Н.Колмогоровым и Н.А.Дмитриевым В первой половине XIX в. ветвящиеся цепочки фамилий были получены при изучении динамики исчезновения некоторых аристократических фамилий.

Понятие марковской цепи принадлежат А.А.Маркову. Его статьи по этому вопросу появились при изучении закономерностей, имеющих место в лингвистике (1906-1908 гг.). Впоследствии цепи Маркова и их обобщения нашли применение везде, где будущее состояние системы полностью определяется ее текущим состоянием.

Н.Винер показал, что броуновское движение можно определить, как движение с непрерывной траекторией, нигде не дифференцируемой с вероятностью равной единице. Это означает, что мгновенную скорость нельзя определить ни в одной точке. Модель броуновского движения получила название винеровского процесса Непрерывные нигде не дифференцируемые функции были известны задолго до Винера. В 1875 г. Пауль Дюбуа–Реймон опубликовал пример такой функции, открытой Вейерштрассом в 1972 г. Еще ранее такая функция была описана Больцано.

Многие математики в том числе Пуанкаре, Эрмит восприняли такие функции как досадное недоразумение. Эрмит писал; «С чувством непреодолимого отвращения я отшатываюсь от достойного всякого сожаления зла – непрерывных функций, не имеющих производных». Таким образом, имеет место еще один пример, когда в теоретической математике была получена математическая модель процесса ранее, чем он был изучен как физическая реальность.

В технических приложениях в задачах анализа и синтеза систем автоматического управления и регулирования используется спектральная теория стационарных случайных процессов. Основы совремнной теории этих процессов созданы А.Н.Колмогоровым и Н.Винером.

9.5. Теория игр и статистических решений

Теория решений при рассмотрении статистических задач исходит из принципа, что любое статистическое правило необходимо оценивать по результатам, которые имеют место при применении этого правила в различных условиях. Этот принцип, сформулированный Нейманом и Пирсоном в теории проверке гипотез, в 1939 г А.Вальд предложил распространить на все статистические задачи.

Математическая модель в теории решения является частным случаем модели теории игр, предложенной Борелем в 1921 г. и в более общей форме Дж.Нейманом в 1928 г. Полное развитие эта теория получила в книге Неймана «Теория игр и экономическое поведение», 1944 г.

Теоия игр является по существу не чем ины, как математической теорией конфликтных ситуаций в любой практической области. Целью теории является выработка рекомендаций по рациональному образу действий каждого из участников конфликта. Модели теории игр нашли применение во многих задачах экономики - ряд ситуаций в рыночной экономике относится к конфликтным ситуациям. В роли кокурирующих сторон выступают государства, промышленные и торгове фирмы, отдельные индивиды. В институциональной экономике модели теории игр определены в качестве основного математического аппарата.

К конфликтным принадлежат и ситуации, возникающие при выборе системы вооружения, способов его применения, при планировании военных операций. Порой модели теория игр используются в военом деле без должного критического анализа. Например, когда при однократном военном столкновении ищется смешанная стратегия, а нужно найти такую стратегию, которая для противоборствующей стороне окажется неожиданной и с высокой степенью вероятности приведет к успеху.

9.6. Математические модели в статистической теории линейных систем автоматического управления и регулирования

Одним из плодотворных приложений вероятностных подходов является статистическая теория систем автоматического управления и регулирования (САУиР).

Одной из первых работ, положивших начало статистической теории САУиР, является статья Колмогорова по интерполяции, экстраполяции и сглаживанию временных последовательностей. Безусловны заслуги Винера по созданию теории следящих систем, находящихся под воздействием случайных возмущений. В теории САУиР использованы целый ряд разделов математического анализа: теория функции комплексного переменного, вариационное исчисление, ряды Фурье, интегралы Фурье и Лапласа, а также теория случайных процессов.

Методология анализа и синтеза линейных САУиР базируется на системный подход, согласно которому, во-первых, структура системы любой сложности может быть представлена в виде соединения конечного числа элементарных звеньев; во–вторых, в основу классификации звеньев положены их динамические свойства – элементы различной природы описываются одинаковой функцией в зависимости от характера переработки ими входного сигнала; в-третьих, каждое звено передает информацию в одном направлении от входа звена к выходу. Основными характеристиками систем и звеньев являются: передаточная функция, импульсная переходная (весовая) функция, частотные характеристики.

Передаточной функцией системы (звена) называется отношение преобразования Лапласа выхода системы к преобразованию входа при нулевых начальных условиях. $\Phi(s) = Y(s) / X(s)$.

Функция веса является оригиналом по отношению к передаточной функции $\psi(t) = L^{-1}\Phi(s)$ и представляет собой реакцию системы (звена системы) на входной сигнал в виде дельта-функции - $\delta(t)$.

Амплитудно-фазовая характеристика может быть получена путем подстановки в выражение для передаточной функции $i\omega$ вместо s. Непосредственно из амплитудно-фазовой характеристики могут быть получены частотные характеристики: амплитудная $A(\omega)$, фазовая $\varphi(\omega)$, действительная $U(\omega)$, мнимая $V(\omega)$,

$\Phi(i\omega) = U(\omega),+ i\,V(\omega)$, $\Phi(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$.

При рассмотрении воздействия на систему стационарного случайного процесса $\xi(t)$ вводится понятие «спектральная плотность» (разложение процесса по частотам), являющейся преобразованием Лапласа корреляционной функции случайного процесса. $S_\xi(\omega) = L\{K_\xi(\tau)\}$

Пусть на вход системы с передаточной функцией $W(s)$ поступает входной сигнал $x(t)$:

$x(t) = m(t) + \xi^{ц}(t)$, где $m(t)$ не случайный сигнал, включающий и математическое ожидание случайной составляющей входного процесса, $\xi^{ц}(t)$ – центрированный стационарный случайный процесс с корреляционной функцией $K_\xi(\tau)$ и спектральной плотностью $S_\xi(\omega)$.

Выходной сигнал системы рассчитывается в виде:

$y(t) = n(t) + \eta^{ц}(t)$, где $n(t)$ – неслучайная функция, $\eta^{ц}(t)$ – стационарный случайный процесс.

При этом: характеристики выходного сигнала могут быть вычислены как в пространстве частот, так и в пространстве времен.

$$n(t) = \int_0^t m(t-\tau)\psi(\tau)d\tau, \quad N(s) = M(s)W(s),$$

при $m(t) = const = m_0$, $n = m_0 W(0)$.

$$K_\eta(t_1t_2)=\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2}K_\xi(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)\psi(\tau_1)\psi(\tau_2)d\tau_1d\tau_2\,,$$

$$S_\eta(\omega)=S_\xi(\omega)\cdot\|W(i\omega)\|^2\,.$$

На практике все функции, входящие в приведенные выше аналитические зависимости, часто оказываются достаточно сложными и использование аналитических выражений затруднительно. В таком случае приходится прибегать к статистическим методам имитационного моделирования.

Задача синтеза решается в следующей постановке. Предполагается, что сигнал, поступающей на вход системы, содержит полезную составляющую и помеху. Необходимо полезную составляющую преобразовать по заданному алгоритму, а помеху «убрать». То есть необходимо минимизировать «ошибку», равную разности между результатом преобразования полезной составляющей сигнала системой, реализующей заданный алгоритм преобразования, и результатом преобразования реального входного сигнала системой, характеристики которой и должны быть найдены в процессе минимизации. Обычно ищутся характеристики системы, минимизирующей квадрат ошибки. Для решения задачи используются приведенные выше зависимости между характеристиками системы, входными и выходными сигналами.

Для достаточно общего случая передаточная функция системы, минимизирующей ошибку и значения этой ошибки были получены Н.Винером в середине XX столетия

В постановке Винера заданы:

(1) $\mathbf{x(t) = m(t) + n(t)}$, $\mathbf{M\{m(t)\} = M\{n(t)\} = 0}$**,** здесь:

$\mathbf{m(t)}$ – полезный сигнал, $\mathbf{n(t)}$ – помеха, **M** – оператор математического ожидания,

(2) $\mathbf{K_m t)}$, $\mathbf{K_n(t)}$, $\mathbf{R_{mn}(t)}$, $\mathbf{R_{nm}(t)}$ – корреляционные и взаимокорреляционные функции полезного сигнала и помехи (т.е. и полезный сигнал и помеха являются стационарными случайными процессами, причем взаимосвязанными)

(3) $\mathbf{H(s)}$ – оператор заданного преобразования полезного сигнала, $\mathbf{h(t) = H\{m(t)\}}$.

Необходимо найти $\psi(t)$ (весовую функцию) из условия минимума среднеквадратичной ошибки.

$$\varepsilon^2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{+T}\{h(t)-y(t)\}^2dt,\ \ y(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau)\psi(\tau)d\tau.$$

Существуют теоретические разработки и предложены модели для более сложных случаев: систем автоматического управления с различными видами нелинейностей, в том числе дискретных систем автоматического управления и регулирования.

10. Особенности моделирования социально-экономических систем

1.Королева Англии попросила Ньютона определить, сколько нужно дополнительных помещений на монетном дворе, чтобы выпускать в 1,5 раза больше монет. Ознакомившись с работой Монетного двора и проведя определенные расчеты, Ньютон пришел к выводу, что, не добавляя ни одного помещения, только за счет изменений в производственном процессе, можно увеличить выпуск монет в 2 раза. Казалось бы, что при ознакомлении с таким результатом, экономисты будут впредь широко использовать математические подходы. Однако это не произошло.

Первая в мире модель народного хозяйства была создана французским ученым Ф.Кенэ (1694-1774). В 1758 г. оп опубликовал первый вариант своей «Экономической таблицы», получивший название «зигзаг», второй вариант - «Арифметическая формула» – опубликован в 1776 г.». «Экономическая таблица Кенэ» это схема (графико-аналитическая модель) процесса общественного воспроизводства, раскрывающая содержание основных стадий воспроизводства.

К.Маркс, придавая большое значение применению математики в экономике, свои планы в этой части не реализовал. Примеров успешного использования математического подхода у К.Маркса много, но математические методы все же не играли ведущей рои в его исследованиях.

В экономической науке XIX века известна так называемая математическая школа. Ее родоначальником считается французский учены О.Курно (1801-1877), выпустивший в 1838 г. книгу «Исследование математических принципов теории богатства». Представителями математической школы были Г.Госсен (1810-1858), Л.Вальрас (1834-1910), У.Джевонс (1835-1882), Ф.Эджворт (1845-1926), В.Парето (1848-1923), В.Дмитриев(1868-1913). Представители школы выдвинули ряд важных подходов и принципов: понятие экономического оптимума, применение показателей предельных затрат и эффектов в рациональном хозяйствовании, взаимосвязанность ценообразования и общая пропорциональность народного хозяйства и др..

К началу XX века возникло статистическое направление в экономике, которое ставило своей главной задачей изучение экономических циклов и прогнозирование хозяйственной коньюктуры на основе математической статистики. Изучение реального статистического материала было явлением прогрессивным, однако некоторые исследователи впадали в крайность, пренебрегая теоретическим анализом, утверждая «наука – есть измерение». В рамках статистического направления было разработано ряд «математико-статистических моделей» в основном для краткосрочного прогнозирования. Типичным примером может служить «Гарвардский барометр» - модель прогнозирования хозяйственной коньюктуры, разработанная Гарвардским университетом.

Норвежский ученый Р.Фирш (1895-1973) ввел термин «эконометрия» как синтез теории, математики и синтеза. Сегодня «эконометрика» занимается приложением статистических методов в экономических исследованиях, построением математико-статистических моделей экономических явлений

В России оригинальные экономико-математические исследования появились в конце XIX века. Интересные работы по корреляционному анализу экономических явлений были проведены под руководством А.А.Чупрова (1874-1926) Крупным экономистом- математиком России был В.К.Дмитриев. Его основной научный труд - «Экономические очерки» вышел в 1904 г. В своих исследованиях В.К.Дмитриев хотел примерить теорию трудовой стоимости и теорию полезности

Е.Е.Слуцкий (1880-1948) известен своими работами по теории вероятностей и математической статистике. В 1915 г он опубликовал в итальянском журнале статью «К теории сбалансированности бюджета потребителя», получившей спустя 20 лет мировое признание. Статья не потеряла своей актуальности до настоящего времени.[43]

Г.А. Фельдман (!884-1958) – один из авторов плана ГОЭРЛО разработал математические модели экономического роста, базируясь на марксовые схемы расширенного воспроизводства.

Выдающаяся роль в создании моделей экономических процессов принадлежит Н.Д.Кондратьеву (1892–1938). В то время как во всем мире продолжалось изучение циклов Кондратьева, в СССР его работы замалчивались, сам Н.Д.Кондратьев был дважды репрессирован.

В 1938-1939 гг. Л.В.Канторович сформулировал новый класс экстремальных задач, положивший начало «линейному программированию».

В 1930-40-хгодах экономико-математические исследования велись также В.В.Новожилов (по оптимальному планированию народного хозяйства), А.Л.Лурье, В.Н.Толстой (по рациональным транспортным перевозкам). С.Г.Струмилин разработал числовые модели эффективности живого труда и баланса народного хозяйства. В эти годы достижения в области экономико-математических методов были мало знакомы экономистам и слабо использовались в практике.

Интерес к применению математики в экономике в СССР возрос во второй половине 50-х годов. Значительная роль в пропаганде и развитии экономико-математических исследований в СССР принадлежит В.С.Немчинову (1894-1964), ему принадлежит работа «Экономико-математические методы и модели», (1962). К середине 60-х годов в СССР была развита система организации экономико-математических исследований: образованы ЦЭМИ АН СССР, отделение ЦЭМИ в Ленинграде, Институт экономики иорганизации промышленного производства в Новосибирске, Инстиут кибернетике в Киеве, экономико-математические исследования занили важное место в ряде НИИ, в том числе

[43] Статья издана на русском языке в сборнике «Экономико-математические методы», вып. 1, 1963 г.

в ВЦ АН СССР, с 1965 г. стал выходить журнал «Экономика и математические методы».

2. Социально-экономические системы относятся к классу организационных систем, в их состав входят активные элементы, т.е. такие элементы, которые имеют свои цели функционирования, отличные от целей системы в целом, и которые способны принимать самостоятельное решение относительно своего состояния. Явления, процессы, характерные для этих систем, намного сложнее тех, которые имеют место в физических системах. Причины, влияющие на такие системы, отношения между элементами системы и между системой и окружающей средой многообразны и плохо поддаются формализации.

Социально-экономические системы могут адаптироваться к условиям внешней среды. Подвергаясь долговременным воздействиям, они способны сохранять свою сущность и стремление к эволюции. Такие системы относятся к так называемым *«мягким»* или *слабо структурированным* системам.

Жесткий системный подход при изучении подобных систем может оказаться не вполне адекватным, Развитие методологии мягких систем, предполагающей выявление различных точек зрения и постепенное достижении взаимопонимания, явилось новым этапом системных представлений. Системный подход оказывается, в частности, полезным, как практический способ решить, что именно следует сделать в конкретной ситуации.

Английский ученый П.Чеклэнд так пишет о двух возможных альтернативных подходах к изучению мягких систем: «Одно направление рассматривает действительность как системную - система сотворена природой или человеком. Во втором случае мир рассматривается как проблематичный, возможно системный, но слабо структурированный, допускающий много интерпретаций. Реальность такого мира изучается также систематически. Таким образом, во втором случае мягкая система рассматривается ни как часть реального мира, а как системно-организованный процесс ее изучения».

В настоящее время для исследования социально-экономических систем успешно разрабатываются и используются как мягкие модели в которых используются формальные и неформальные подходы, так и модели, базирующиеся на точные математические методы. При этом в любом случае системные концепции, методология системного анализа являются основополагающими.

Применение математических методов при изучении социально-экономических систем может быть эффективным, если в соответствующей области накоплен фактический материал (есть чего обобщать) и если исследователь детально разобрался в изучаемой системе, понимает ее специфику.

2. Объектом экономического моделирования является вся экономическая сфера, включающая взаимосвязанную *триаду*:

экономическую *теорию*, экономическую *политику* и *хозяйственную практику.* Элементы этой триады относительно самостоятельны и одновременно тесно взаимосвязаны, причем связь между ними носит двусторонний характер. Экономико-математическое моделирование является связующим звеном триады.

3. В /Л/[44] рассматривается направление исследований, названное "*системное управление развивающейся экономикой*". Задачи исследований в этом направлении формулируются следующим образом: *"...понять природу механизмов самоорганизации экономики, которые обеспечивают все-таки целостность экономической системы, несмотря на действия миллионов независимых экономических агентов, интерес большинства которых вовсе не в том, чтобы поддержать стабильность. Найти принципы, дающие адекватное математическое выражение явлению самоорганизации".* При этом обращается внимание на развитие теории на основе строгих математических методов. "По-видимому, не удастся построить математическую теорию экономических явлений столь же точную по прогностическим возможностям, как некоторые физические теории. Но ведь в теории элементарных частиц уже возникает принципиальная неопределенность. Не все точно можно описать и в экономике. Тем не менее, понимание фундаментальных принципов организации и существования экономики позволит исключить невозможные варианты и определить естественные границы неопределенности. В этом смысле экономическая теория может быть столь же строгой, что и физическая".

Декларируются следующие положения.

(1). Экономическая система подобна целостному организму. Поэтому выделение фрагмента системы для изучения требует особого внимания и должно осуществляться на основе модели системы в целом. Эта модель состоит из описания процессов производства, обменов и потребления, в совокупности представляющих единый процесс общественного воспроизводства, и описаний экономических механизмов регулирования, отображающих производственные отношения. Модель экономической системы замыкается при фиксации параметров государственного управления экономикой.

(2). Процессы общественного воспроизводства складываются из элементарных процессов в многочисленных взаимодействующих производственных ячейках. Совокупные результаты элементарных процессов выражаются в агрегированных показателях (макропоказателях) экономического развития. Надо стремиться выводить макро показатели и соотношения между ними (макромодели) из исходных микро описаний элементарных процессов, разрабатывая методы агрегирования.

(3). Результаты анализа моделей необходимо постоянно сравнивать с качественными особенностями эволюции моделируемой системы. Хорошей

---

[44]Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М. 1996.

можно считать модель, из анализа которой получаются или уточняются фундаментальные законы экономической теории.

В приведенном подходе изучению экономики неформальными методами, с помощью мягких моделей отводится вспомогательная роль. Предполагается, что экономические категории следует выводить из точных математических моделей, а в мягкую модель эти категории закладываются априори. Соответственно утверждается, что мягкая модель не углубляет знания о сущности экономической системы, хотя ее применение дает многие выгоды, в том числе:

- системный анализ обеспечивается профессиональным опытом, накопленным в экономической области, при этом часто возникают противоречия и новые задачи, решение которых, в свою очередь, обогащает опыт;

- использование ЭВМ в планово-экономической деятельности повышает ее эффективность и, соответственно, качество решения задачи.

Применение точных математических методов необходимо и при обработке статистических материалов. А.К.Гастев заметил: В социальной области должна наступить эпоха точных измерений, формул, чертежей, контрольных калибров, социальных нормалей. Пусть не смущает нас сентиментальные философы о неуловимости эмоций и человеческой души, мы, ученые, должны поставить проблему полной математизации психофизиологии и экономики, чтобы можно было оперировать определенными «коэффициентами» возбуждения, настроения, усталости, прямыми и кривыми экономических стимулов».

.Приведенные положения нуждаются в уточнении. Полезность применения точных моделей для изучения экономических процессов несомненна. Вместе с тем достаточно полное представление об эволюции экономических систем, получение надежных прикладных результатов возможно все же лишь на мягких моделях, допускающих применение рациональных рассуждений различного вида. К тому же экономические и социальные процессы в обществе всегда взаимосвязаны и результаты рекомендаций, полученных на «чисто» экономических моделях, существенно зависят от социальной ориентации общества. «Полная математизация» не должна исключать применение в моделях рациональных рассуждений. С помощью мягких имитационных моделей сложных экономических систем можно выявить те области функционирования систем, где применение точных математических моделей полезно и эффективно.

Справедливо следующее утверждение: “Экономическая теория исследует только часть большого комплекса социальных проблем, и многие ее элементы переплетаются с другими элементами этого комплекса. Если исходить из такого понимания, то следует отвергнуть точку зрения, согласно которой основными мотивами экономического поведения является рациональность и эгоизм”.

4. Наиболее широкое развитие методология мягких систем (ММС) нашла при исследовании процессов, протекающих в социльных системах. Развитие методологии мягких систем, предполагающей выявление различных точек зрения и постепенное достижении взаимопонимания, является очередным этапом системных представлений. Системный подход оказывается, в частности, полезным, как практический способ решить, что именно следует сделать в конкретной ситуации.

Основы методология исследования «мягких» систем заложены в работах У.Черчмена (четыре базовых тезиса подхода к изучению социальных систем, деловая игра с представителями заинтересрванных сторон); Р.Акоффа (центральное место в социосистемной идеологии Акоффа занимает методология интерактивного планирования, состоящая из пяти этапов); П.Чекленда (рассмотрение ММС как системно-ориенированного руководства, помогающего справиться со сложностью окружающего человека реального мира, трактовка ММС как процесса обучения, состоящего из семи этапов). Дальнейшее развитие ММС нашло в методологии критических систем В.Ульриха, в которой проблема принуждения является центральной. Не менее важную роль играет концепция «критических» систем, где критичность означает требование к тем, кто проектирует систему, осознание ими своих всестороних нормативных ценностей. Для методоогии Ульриха характерен отказ от статического анализа социальных явлений, концентрация внимания на динамике процесса изменения состояния системы.

Каждое социологическое исследование в явном или в неявном виде содержит когнитивные факторы. Методология, базирующаяся на синтез системного и когнитивного подходов, является эффективным инструментом для изучения поведения сложных социальных систем. Когнитивная структуризация системы заключается в формировании гипотезы о функционмровании системы, о причинно-следственных связях между элементами системы. Структурная схема причинно- следственных связей прелставляет собой знаковый ориентированный граф, называемый когнитивной картой. Анализ когнитивных карт позволяет получить качественное представление о функционировании системы и определить направление разработки моделей для количественного анализа.

Рассмотрим основные направления математического моделирования социальных процессов[45].

5 Достаточно эффективные «жесткие» математические модели разработаны для ряда социальных систем. На основе теории разностных уравнений разработана модель мобилизации. Теория дифференциальных уравнений положена в основу модели гонки вооружений Ричардсона, модели развития науки В.Налимиова, модели Лотки-Вольтера,

[45]1. Ю.М.Плотинский. «Математическое моделировании динамики социальных процессов». М., 1992,
2. Ю.М.Плотинский. «Теоретические и экспериментальные модели оциальных процессов». М., 1998

используемой биологами для анализа взаимодействмя популяций, модели взаимодействия в социальной сфере Г.Иваницкого.

Например, Иваницкий считает, что область науки или искусства, состоящая из большого числа различных направлений, характеризуется пульсирующим характером развития. В простейшем случае уравнения развития науки или искусства имеют следующий вид:

$$\frac{dN_1}{dt} = k_1 N_1 N_2 - k_2 N_1,$$

$$\frac{dN_2}{dt} = k_3 N_1 N_2 - k_{4,} N_2,$$

где: N_1 N_2 – число специалистов в обдастях 1 и 2,

dN_1/dt, dN_2/dt - скорости изменения числа специалистов,

k – коэфициенты, зависящие от начальных условий.

Численные эксперименты показали, что кривые, являющиеся решением приведенной системы, циклически колеблются около экспоненциального тренда. По мнению Иваницкого такие функции могут претендовать в первом приближении на качественное описание творческого процесса.

6. Большое число теорий разработано для анализа развития социокультурных систем. Эти теории можно разбить на две группы:

(1) Теории «прогресса», опирающиеся на линейные, экспериментальные, логарифмические модели роста.

(2) Циклические теории, в основе которых лежат гипотезы о периодических колебаниях, кризисах, являющихся необходимым условием развития

Если связать системное время с календарным, то, откладывая по оси ординат какой-либо показатель, характеризующий функционирование системы, можно, отсеивая случайные колебания, найти достаточно регулярно повторяющуюся составляющую изменения этого показателя – *цикл*. Таким образом, получена циклическая модель социально-экономического процесса. Модели такого типа называют моделями *волновой динамики*.

Циклические теории разрабатывались многими философами и историками древности, их исследования продолжаются до сего времени.

Циклические модели жизненного цикла обычно являются качественными и содержат список фаз, этапов развития системы. Обычно анализируются качественные характеристики каждой фазы и чередование фаз.

Известно большое число подобных моделей. В том числе модели волн экономической динамики, волновых процессоа в политической сфере, волн в социокультурной динамике (цивилизация, этнос, общественное движение, организация, семья, индивид и др.) и в подсистемах социокультурных систем (хозяйственный уклад, научная специальность, новые товары, инновации во всех сферах жизни общества и др.).

Выдающийся русский экономист Н.Д.Кондратьев, изучая с помощью методов математической статистики динамические ряды большего числа экономических показателей, выявил наличие так называемых длинных волн коньюктуры в мировой капиталистической экономике и пришел к выводу, что циклические движения представляют процесс отклонения от состояния равновесия, а фазы больших циклов обусловлены внедрением технических изобретений, развитием новых отраслей промышленности.. В ряде разработанных теорий цикличности приводятся и другие факторы, влияющие на цикличность социально-экономических процессов: космические явления, смена поколений, смена типов познания и др. Циклы Кондратьева. имеют длительность 40-65 лет (длинные волны) и включают четыре фазы. С 1785 г. прослежены четыре цикла Кондратьева. В последнем по времени цикле Кондратьева отмечено следующее следование фаз: «процветание» — 1948–70 гг., «спад» — 1970–90 гг., «депрессия» — 1991–2000 гг., предполагается, что последняя фаза цикла «восстановление» начался в 2001 г.

Известен ряд теорий, объясняющих причины циклических процессов.

Р. Батра объясняет (1990 г.) наличие 30-ти летнего цикла ростом денежной массы, развязывающей силы финансовой спекуляции. Когда нарастает социальное неравенство и расслоение населения достигает максимума, возникает кризисная ситуация. Батра усматривает связь денежных циклов с социальными волнами, в результате которых происходит смена двух фаз: фазы господства стяжательских классов и фазы революций и анархии.

Г. Макклоски и Дж. Заллер (1984 г.) выдвинули концепцию циклической борьбы между капиталистическими ценностями: неприкосновенностью частной собственности, максимизации прибыли, культом рынка — и демократическими ценностями: равенством, свободой, социальной ответственностью, общим благосостоянием, регулированием экономики.

Согласно Э. Скрепанти (1986 г.), квазирегулярность и периодичность циклов Кондратьева является результатом соединения различных феноменов: «бэби-бума», циклов смены элит, циклов смены поколений, механизмом влияния временных лагов во взаимодействии поколений, приведенных в одновременное действие войнами. Скрепанти также обнаружил связь между долговременными колебаниями экономики и классовой борьбой.

Де Грин считает (1988 г.), что феномен Кондратьева отражает системный процесс эволюции, нестабильности и структурных изменений в социотехнической системе, характерной для эпохи индустриализации. Этот феномен является следствием коллективного поведения наций. Жизненный цикл многих созданий человека — концепций, институтов, технологий, продуктов тесно связан с циклами Кондратьева

Одним из наиболее распространенных схем объяснения циклических колебаний социально-экономических и культурных процессов, которой придерживается ряд социологов, базируется на концепции смены поколений. Согласно Карлу Манхейму (1893–1947 гг.) движение социума порождается волнами поколений, каждое из которых ищет линии размежевания от предыдущего поколения и, параллельно, ищет идеи консолидации, формирующие облик нового поколения. Согласно Ортеги и Гасета (1883–1955 гг.) противодействие двух основных элементов поколения — элиты и массы соответствует полемическим эпохам, или «времени молодых», а их сплочение — кумулятивным эпохам, или «времени стариков».

В. Парето (1848–1923 гг.) для объяснения социальной динамики выдвинул концепцию циркуляции основных типов элит: коммерческой, военной, религиозной. Колебания социума относительно динамического равновесия образует социальные циклы, течение которых определяется характером циркуляции элит. Выделены два главных типа элит, сменяющих друг друга мирным или революционным путем: элиты «львов», преобладающих в стабильной политической системе (консерватизм, силовые методы управления), и элиты «лис», главенствующей при неустойчивой политической ситуации (прагматизм, новаторство).

Артур Шлезингер показал (1986 г.) закономерность смены друг друга (со средним периодом в ~ 33 года) волн либерализма и волн консерватизма. Периодичность объясняется сменой поколений: 15 лет поколение борется за власть и 15 лет ее удерживает.

В последние годы развивается теория цикличности, использующая объяснительные схемы когнитивных наук и теории информации. С.Ю.Маслов выдвинул (1983, 1986 гг.) гипотезу о влиянии на периодическое изменение в социокультурной сфере типов сознания, что связано с различием между функциями левого и правого полушария человеческого мозга.

Представляется правильным утверждение, что на появление циклов Кондратьева влияет множество причин в их взаимосвязи, совпадениях и противоречиях. Безусловно, важнейшей причиной является обострение экономической обстановки, борьба за сырье и рынки сбыта. В период натиска новых хозяйственных сил возникают и социальные потрясения. Все факторы, вызывающие длинные волны находятся в сложных причинно-следственных связях. Для выяснения спорных вопросов теории цикличности необходимы междисциплинарные исследования на стыке всех наук, изучающих общественную жизнь

Упрощенная математическая модель длинных волн имеет вид:

$$\frac{dY}{dt} = -\alpha(Y - bK);$$

$$\frac{dK}{dt} = -\beta(K - gP);$$

$$P = Y - K;$$

где: **Y** - темп прироста производительности труда,

K - темп прироста капиталовооруженности,

P - темп прироста нормы прибыли,

α, β, b, g - структурные коэффициенты.

.

Пример модели *жизненного цикла цивилизации* - модель.Тойнби (1889-1975). Концепция всемирной истории Тойнби включает 13 относительно замкнутых цивилизаций, жизненный цикл которых содержит четыре фазы: возникновение (генезис), рост, надлом, распад. Генезис и рост обусловлен ответом на вызов истории. В качестве «вызовов» рассматриваются неблагоприятные погодные условия, нападение иноземцев и гниение цивилизаций. Цивилизации развиваются благодаря прорыву, который влечет их от вызова через ответ дальнейшему вызову. Развитие цивилизации (прогресс) представляет собой кумулятивное поступательное движение, связанное с территориальной экспансией – от географического центра к периферии. Стремление к территориальной экспансии вызывает к жизни милитаризм.

В фазе надлома нарастают социальные, политические и экономические конфликты. За надломом следует окончательный распад.

В своей циклической моделе Тойнби пытался вывести эмпирические законы повторяемости общественного развития. Согласно Тойнби, развитие общества идет через подражание: старикам – в примитивных обществах, творческим личностям – в цивилизациях.

Другой пример циклической модели – модель *жизненного цикла этноса,* разработанная Л.Н.Гумилевым на основе обобщения сорока индивидуальных историй этногенеза. Согласно Гумилеву, фактор, определяющий развитие этноса – *пассионарность* – характеристика повеления и психики, проявляющаяся в стремлении индивида к цели.

Возникнув в момент пассионарного толчка, этнос должен немедленно сложиться в систему, иначе будет уничтожен соседями. Для самосохранения этнос вырабатывает социальные институты. Потребность в самоутверждении обуславливает быстрый рост системы, ее территориальную экспансию и усложнение внутри этнических связей. Силы для развития этноса черпаются в пассионарности популяции как таковой. Рост системы создан инерцию развития, медленно теряющуюся от сопротивления среды, вследствие чего у кривой изменения пассионарного напряжения этнической системы нисходящая ветвь значительно длиннее восходящей.

7. Нововведения играют все большую ролю в развитии общества. В новом научном направлении *инноватике* наиболее важным направлением является изучение процессов распространения нововведений. Процесс распространения инноваций внутри канной социальной систры, а также от одной социальной системы к другой называется *диффузия.*

Проблемы исследования диффузии инноваций являются весьма актуальными для современных экономии и социологии. Передача новшества происходит по коммуникационным каналам между членами социальной группы. Форма и скорость диффузии зависит от мощности и особенностей каналов передачи, от того, насколько общество готово к восприятию новации и от особенности восприятия инновации отдельными субъектами. Если в былые времена распространение инноваций занимала порой годы, то одним из результатов научно-технической революции явилось резкое сокращение этого времени. Так, например, изобретения Жореса Алферова внедряются в информационную систему практически сразу после их появления.

Процессы диффузии отличаются значительным разнообразием. Д.Шон предложил следующую типизацию этих процессов.

(1). *Модель «центр - периферия».* Распространение инноваций осуществляется и контролируется из одного центра.

Варианты модели: *модель магнита* (на родине нововведения распространяют люди, изучившие их в других странах) и *модель «средневекового барда»*

(2). *Модель размножения центров.* В этой модели главную роль в распространении инноваций играет центр, но процесс децентрализуется. Локальные центры самостоятельно распространяют новшества, учитывая местную специфику. Эта модель описывает процесс распространения социализма. Модель используют транснациональные компании (Coca-Cola и др.).

В ряде моделей процесс диффузии инноваций рассматривается как *процесс обучения* данной социальной системы (общества, фирмы, индивида), включающий в себя инновационное восприятие, оценку и принятие решений.

Важная практическая часть инноватики – модели *распространения товара – модели маркетинга*. Возможные стратегии предприятий, в этих моделях: стратегия *пионера* (формирование нового товара, рискуя, чтобы добиться его лидерства): стратегия *«идущего поезда»* (имитация популярного продукта, успех возможен при согласованном действии конкурентов); стратегия *«и я тоже»* (модификация товаров, пользующихся популярностью).

8.Динамика многих природных, технико-экономических и социально-культурных процессов подчиняется логистическому закону.

Модель *логистического роста* имеет вид следующего разностного уравнения: $\mathbf{y_t - y_{t-1} = a y_{t-1} (M - y_{t-1})}$

Возможный вариант содержательной трактовки модели. Если обозначить число людей, принявших инновацию в момент $\mathbf{t}$ через $\mathbf{y_t}$, а емкость рынка (максимальное число лиц, способных к инновации) через $\mathbf{M}$, то множество лиц, которых можно еще сагитировать $\mathbf{(M - y_t)}$,
$\mathbf{a}$ – коэффициент пропорциональности.

Биологическая трактовка уравнения заключается в следующем.

Преобразуем уравнение к виду $\mathbf{y_t - y_{t-1} = a\, M\, y_{t-1} - a y^2_{t-1}}$.

Пусть $\mathbf{y}$ - численность популяции. Тогда, слагаемые правой части означают, что прирост численности популяции пропорционален достигнутой численности и обратно пропорционален квадрату численности.

Решением логистического уравнения является логистическаая функция –S-образная кривая. Эта функция хорошо описывает процессы сферы технологий, эволюционные процессы в экономике, биологии, социокультурной сферах, динамику антисоциального поведения и др.

9.В моделях *теории катастроф* изучаются скачкообразные изменения, возникающие в процессе плавного изменения параметров. При определенных условиях небольшие постепенные изменения параметров ведут к неожиданному обвальному изменению поведения (или структуры) системы. Одно из важных понятий теории катастроф - *бифуркация*. Именно в точке бифуркации происходит переход постепенных количественных изменений в качественное изменение состояния системы. Причем в этой точке система как бы делает *выбор направления* своего дальнейшего эволюционного развития.

Модели катастроф используются в экономике, социологии, психологии, лингвистике. В ряде ситуаций модели катастроф хорошо подтверждаются экспериментом. Модель катастроф была применена при исследовании динамики нарушений режима в тюрьмах. Оказалось, что динамика системы соответствует популярной модели катастрофы «сборка», которая описывается дифференциальным уравнением:

$$dx/dt = -x^3 + bx + a.$$

10. В научном направлении, названным *синергетикой* рассматриваются модели динамических процессов нелинейных системах, приводящие к хаотизации движения, или, наоборот, к его упорядочению и появлению пространственно-временных структур. Синергетика рассматривается как междисциплинарная наука, объединяющая теорию катастроф, системную динамику, теорию диссипативных структур

Основное внимание в синергетике уделяется *самоорганизации*. Самоорганизацией называется возникновение упорядоченных структур и форм движения из первоначально неупорядоченных, нерегулируемых форм движения без специальных, упорядоченных внешних воздействий.

Множество точек, к которым притягиваются траектории динамических систем, называется *аттрактом.* При качественном анализе динамических систем рекомендуется сосредоточить внимание не на переходных процессах, а на установившихся режимах, математическим образом которых и являются аттракты. Если система находится в неустойчивом состоянии, ее траектории могут притягиваться к *странному аттрактору,* в некоторых случаях похожему на клубок траекторий. Переход системы в режим странного аттрактора означает, что в ней наблюдаются сложные непериодические колебания, очень чувствительные к незначительным изменениям начальных условий. Такой режим может быть назван *хаотическим*. Странные аттракты были получены в моделях задач прогноза погоды. Исследование экологических моделей привело к открытию каскадов удвоения периода.

Условия перехода систем на более высокий уровень упорядоченности, называемой *диссипативной структурой,* изучается в моделях теории диссипативных структур И.Пригожина.

11. Так называемое *иконологическое моделирование* предназначено для исследования многофакторных, нелинейных систем, поведение которых может быть весьма сложным даже хаотическим. Центр тяжести переносится с аналитических методов исследования на методы визуализации поведения сложных систем с использованием компьютерных технологий. Подобный подход является для социолога эффективным инструментом исследования систем, дает возможность как бы убрать границы между построением модели и ее изучением.

12. *Методология системной динамики*, разработанная Дж. Форрестером и го учениками, ориентирована на компьютерное моделирование динамических процессов в сложных нелинейных системах. Основой конструкции системной динамики является представление исследуемого процесса в виде диаграммы, состоящей из петель положительных и отрицательных обратной связи. Целью системной динамики является расширение возможностей когнитивных моделей, что оказывается необходимым, поскольку другие подходы к решению социальных проблем становятся не приемлемыми в условиях растущей сложности функционирования социальных систем в реальных условиях внешней среды. Модели системной динамики – это имитационные модели, применение которых позволят существенно углубить понимание поведения этих систем и спрогнозировать появление непредвиденных последствий, в том числе катастрофических. В частности, получено, что широкое использование нелинейностей обеспечивает устойчивость модели к вариациям значений параметров.

Под руководством Форрестера создана национальная модель американской экономики. В модели наблюдались и получили объяснения циклы с различным периодом: циклы Кузнеца, волны Кондратьева и др.

Наиболее известной моделью системной динамики является модель мирового развития (МИР-3), разработанной группой исследователей под руководством Д.Медоуза. Расчеты, проведенные на моделе, показали неизбежность кризиса, вызванного истощением не возобновляемых ресурсов. Единственной возможностью избежать глобальной катастрофы является принятие всеми странами совместного решения относительно стабилизации численности населения и объемов промышленного производства. В условиях сложившихся в мире к началуXXI возможность принятия подобного решения весьма сомнительна.

13. Развитие *клеточного моделирования*, базирующегося на новое направление математики – изучение абстрактной конструкции – *клеточного автомата.* В процессе исследований, проведенных на модели игры «Жизнь», выяснилось, что модели клеточных автоматов позволяют не только изучать процессы эволюции, но и моделировать функционирование компонентов современных ЭВМ, исследовать параллельную работу ЭВМ, решать задачи распознавания образов. Наибольший интерес представляет изучение на подобных моделях проблем самоорганизации в биологических системах, формализованных на языке динамических систем.

Клеточное моделирование нашло применение для изучения электорального процесса, диффузии инноваций Клеточно-автоматные модели хорошо описывают многие физические и информационные процессы, в том числе для описания процессов, протекающих в живой клетке, процессов конкуренции и кооперации и др.

В процессе своего развития социальная система проходит определенные преобразования. Эволюция системы приводит к изменению отдельных ее параметров, а также характера взаимодействия входящих в систему элементов и подсистем. Изменяется и внешняя среда, с которой данная система взаимодействует. Когда в результате накапливания медленных изменений медленных изменений параметры системы принимают пороговые критические значения наступает кризис системы

Различают следующие варианты решения кризиса.

(1) распад или гибель системы,

(2) реформа – постепенная перестройка ядра системы, генотипа системы , ведущая к появлению качественно новой системы,

(3) революция образное изменение ядра системы, катастрофический переход из одного состояния в другое.

По-видимому, следует различать два типа революций.

Революция 1 В процессе эволюции системы в ее рамках создаются новые качественно более совершенные элементы, подсистемы, новые отношения между этими подсистемами. Переход в новое состояние системы в целом тормозится определенными консервативными элементами, обычно на верхнем уровне управления. Революция заключается в насильственном свержении этих консервативных элементов. Структура системы, появившаяся в результате такой революции, оказывается на более высокой ступени развития, чем система предшествующая

Революция 2. В результате возникновения определенных тенденций, идеологий на определенном этапе эволюции системы, когда критического значения достигли только некоторые параметры системы, происходит ломка существующей системы. Новая структура создается как бы на голом месте. Возникшая таким образом новая структура оказывается на более низком уровне организации, чем система предшествующая. Именно к революции 2 следует отнести октябрьскую революцию 1917 г. в России и реформы в России в конце XX века, имеющие целью переход от социализма к капитализму.

Существует много моделей анализа разрешения кризиса в социальных системах. Например в 1959 г. С.Липсет предложил линейной взаимосвязи между экономическим развитием и политической демократией. Несостоятельность модели при анализе процессов модернизации третьего мира вынудили Липсета существенно уточнить модель. В.И.Арнольд предложил модель для исследования нелинейных систем, для которых характерно «контринтуитивное» поведение. В.Ф Венда сформулировал закон трансформационного спада, лежащий в основе возникновения волн развитая сложных систем. Разработано несколько моделей революции

(Дж.Девиса, Коульмана), в том числе на базе марксистского подхода (Дж.Тернера).

При реформировании социальной системы В России формально конкуировали две модели:

(1) шоковой терапии,

(2) градуалисткого подхода, стремящегося уменьшить социальную цену перемен, облегчить адаптацию для более уязвимых групп населения.

Градуализм связан с выбором промежуточных институтов на траектории институционального развитмя системы. В определенной степени - это задача оптимального управления с закрепленными концами..

Российские реформаторы выбрали модель шоковой терапии, причем в ее крайней интерпретации перехода к либеральной экономики в «Вашингтонской интерпретации».

В пользу *шоковой* терапии приводились следующие аргументы:

1) Если реформы нужны, их надо проводить быстро, промедление приведет к дополнительным издержкам;

2) Постепенное изменение не всегда реализуемо, например, приватизация возможна, если количество приватизируемых предприятий превзойдет некоторый порог;

3) Реформирование должно быть комплексным;

4) При быстром реформировании противники реформ не успеют объединиться и помешать реформе.

Практически эти аргументы оказываются несостоятельными. Во-первых, при быстрой замене одних правил другими возникает длительный переходной процесс, а сходимость к равновесному состоянию не гарантирована, более того сложившееся равновесие может быть не эффективным; во-вторых, порог не обязательно необходим, более важно выбрать исходное институциональное пространство (например, государство может постепенно увеличивать область приватизации); в-третьих, при быстрых и комплексных изменениях агенты не успевают адаптироваться, а реформаторы исправлять ошибки, в результате – значительные издержки и массовое недовольство; в-четвертых, группы населения, проигрывающие в результате реформ, нередко имеют возможность их блокировать, а реформаторы, стремясь достичь результатов любой ценой, усугубляют ошибки.

Примеры успешной шоковой терапии практически отсутствуют. Примеры неудачного применения известны. Венгрия и Польша в 1992 г. испытывали трудности из-за большого числа просроченных кредитов. В Венгрии была применена шоковая терапия, принят очень жесткий закон о банкротстве. В результате суды были переполнены делами о банкротстве. Население потеряло доверие к банкам. В Польше от шоковой терапии отазались, в течение года закон о банкротстве был приостановлен, проведена реструктуризация долгов. В результате положение банков улучшились, стали расти кредиты реальному сектору.

Реформа экономикм в России оказалась крайне неудачной. В определенной степени неудача реформ явилась также следствием поспешного (как это требуется при шоковой терапии) заимствования (трансплантации) институтов из развитых институциональных систем прежде, чем сформируются условия для их нормального функционирования в стране-реципиенте. Соответственно, имела место дисфункции трансплантированных институтов: атрофия, отторжение, перерождение, и конфликт. Более того, *фактически отсутствовали механизмы обратной связи.*

Таким образом при реформировании социально-экономических процессов в России в конце XX века – начале XXI века были допущены (по-видимому сознательно) серьезные просчеты, при реализации ошибочных (мягко говоря) теоретических положений относительно моделей реформирования экономии страны Идеология рынка переходного периода развития экономики была искажена в угоду так называемых либеральных основ экономики. Реформы отбросили Россию далеко назад.

Инициаторы и руководители («теоретики» и практики) реформ сознательно провели реформы в интересах обогащения узкого круга лиц (названных затем олигархами) и связанного с ним крупного чиновничества и с этой целью ограбили большую часть населения. Узловыми моментами грабежа населения и присвоения богатства страны узким кругом лиц были последовательно проведенные шоковая терапия, в основе которой либерализация (отпуск) цен и ваучерная приватизация (1992 г.), залоговые аукционы (1995 г), дефолт (1998 г.). Каждый этот этап означал очередное обнищание большинства населения страны.

В результате общество распалось на две непересекающиеся касты. Первая — это те, для которых создан институт беззакония — законы для них не писаны, и они вольны делать все, что угодно, — воровать, убивать людей, организовывать гражданские войны. Вторая каста — это остальные 97% населения, несущего на плечах все тяготы жизни, которые создала для них первая каста.

11. Модели исследования операций.

Систему моделей рассмотрим в настоящем разделе на примере науки «Исследование операций». Предметом этой науки являются рациональные способы организации целенаправленной человеческой деятельности.

В исследовании операций следует выделить два аспекта:

собственно операцию, заключающуюся в принятии и реализации решения, направленного на достижение управляемой системой определенной цели;

разработка и применение моделей нахождения оптимального (рационального) решения - это тоже своего рода операция.

Таким образом, основной задачей науки об исследовании операций - теории исследования операций является выбор и обоснование решений. Соответственно, это и определяет (в узком смысле) исследование операций *как научный метод, дающий в распоряжение лица принимающего решение (ЛПР) количественные обоснования для принятия конкретного решения.*

Далее приведем самые общие положения относительно системы моделей исследования операций, используя в основном подходы, изложенные в работе Карманова и Федорова[46].

Процесс выработки и обоснования решения базируется на совокупности частных математических моделей, составляющих общую модель операции выработки решения. Эта совокупность включает следующие тесно связанные модели:

модель обстановки проведения операции;

модель управляемой системы;

модель принятия решения.

При создании *моделей сложных управляемых систем* целесообразно выделить две задачи и, соответственно, две взаимосвязанные модели:

структурно-параметрическую модель системы;

модель функционирования системы.

При подобном разделении моделей оказывается возможным, в частности, наиболее полно (продуктивно) использовать различных специалистов.

Структурно-параметрическая модель системы должна выявить разбиение системы на подсистемы, расположение подсистем, их параметры и связь между ними. Такая модель необходима, в частности, в задачах проектирования, когда требуется выбрать структуру системы. Структурно параметрическое описание системы может помочь созданию модели функционирования системы Модели функционирования подсистем объединяются в общую систему. При этом необходимо помнить об эмерджентности, как об одном из основных свойств сложных систем.

Модели функционирования систем определяют поведение системы в пространстве и во времени под влиянием тех или иных воздействий. Определенный, весьма распространенный класс моделей функционирования реальных систем представляют динамические системы. Динамические системы описывают динамику системы по схеме «вход - состояние - выход». Множество значений входных воздействий является подмножествами из $\mathbf{X \times Y}$ **, где X -** контролируемые и Y неконтролируемые воздействия. Для описания множества входных воздействий требуется *моделирование внешней среды (моделирование обстановки проведения операции).* Здесь же должна решаться задача описания *множества стратегий*, как одной из компонент множества входных воздействий.

Классификация моделей управляемых систем представляется наиболее полной на основе особенностей моделей их функционирования. В первую очередь здесь следует выделить динамические системы с непрерывным и дискретным временем.

---

[46]Имание концентрируется на динамике процесса изменения состояния системы Карманов В.Г., Федоров В.В. Моделирование в исследовании операций. М. 1996.

В теории исследования операций наибольшее внимание уделяется *моделям принятия решения.* Создание модели принятия решения называют также *постановкой задачи* исследования операций. Изучение моделей принятия решения в «чистом виде», при исключении из рассмотрения модели управляемой системы, является удобным для построения математической теории принятия решения.

Модель принятия решения взаимодействует с моделью обстановки проведения операции, в которой определяется доступная информация о неконтролируемых параметрах, что и позволяет описать множество стратегий. *стратегия, критерий, принцип оптимальности.*

Собственно модель принятия решения включает следующие взаимосвязанные блоки:

Стратегии понимаются как способы использования активных средств - ресурсов с учетом информации о неконтролируемых параметрах и являются управлениями, поступающими на вход управляемой системы и определяющие состояние системы и ее выходы. В иерархических системах, обязательно необходимо учитывать несовпадение интересов членов иерархии, что накладывает существенные требования на стратегии управления

На множестве состояний и выходов системы задается *критерий эффективности (оптимальности),* отражающий степень (полноту) достижения цели операции. Критерий - это по существу механизм, позволяющий сравнивать между собой результаты применения стратегий. Если управляемая система является детерминированной, то критерий задается непосредственно на множестве стратегий и неконтролируемых факторов. Выбор критерия отражает цель операции. Поскольку цель операции на вербальном уровне зачастую формулируется недостаточно четко, то определение критерия является одним из центральных моментов в создании модели операции.

В сложных случаях исследования операций требуется использовать векторный критерий. При выборе лучшей (оптимальной) стратегии может потребоваться участие ЛПР. Задача математических моделей в этом случае заключается в том, чтобы оставить лицу принимающему решение сравнительно небольшое число вариантов стратегий для последующего анализа и выбора, убрать лишние, не претендующие на оптимальное решение.

Особая ситуация возникает, в условиях неопределенности, когда операция зависит не только от стратегий оперирующей стороны, но и от значения неконтролируемого фактора $\mathbf{y \in Y}$, относительно которого неизвестно его распределение вероятностей, да и, возможно, такого распределения и не существует. В качестве критерия в этом случае может быть выбран критерий Вальда:

$$\mathbf{W(x) = \inf_{y \in Y} F(x, y)}$$

Здесь, **F(x,y) -**функция, которой оценивается исход операции,

W(X) - оценка стратегии ***x.***

Следующий этап в построении математической модели принятия решения заключается в задании *принципа оптимальности*, т.е. в формальном выражении представления об оптимальном. В простейшем случае - это нахождение экстремума некоторой числовой целевой функции. Иногда принцип оптимальности задается аксиоматически.

В случае, когда при наличии неопределенности выбран критерий Вальда, оптимальной можно считать стратегию $\mathbf{x^* \in X}$, для которой

$$\mathbf{W(x^*) = \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x,y).}$$

Здесь приведен принцип оптимальности, называемый принципом *максмина* или принципом *гарантированного результата*. Принцип гарантированного результата иногда связывают с определенной перестраховкой в принятии решения. Реальные способы улучшения операции (снижение степени перестраховки) в этом случае сводятся содержательно к проблеме получения дополнительной информации о неопределенных факторах, что связано с определенными дополнительными затратами. При исследовании операции незначительное, по Шенону, количество информации может иметь существенное значение. Соответственно, в исследовании операции принята *прагматическая* оценка информации, т.е. с позиции ее полезности для достижения цели операции. Для этого употребляются термины «данные» или «сообщение».

После выбора принципа оптимальности устанавливается его реализуемость, т.е. существование решения. После этого наступает этап *отыскания решения* - оптимальной стратегии и этап ***реализации*** найденной стратегии.

Если принцип оптимальности не реализуем, потребуется уточнение (изменение) моделей, возможно, поиск новых стратегий.

В традиционных курсах по исследованию операций принцип оптимальности трактуется в изложенном выше виде. Предполагается, как отмечено выше, что применение этого принципа в условиях неопределенности приводит к решению «гарантированного результата», а улучшение этого решения возможно при получении дополнительной информации. На практике при поиске решения в экономических задачах, да и не в экономических, лицо принимающее решение, не имея всей информации, необходимой для поиска оптимального решения, отказывается по объективным причинам от сбора этой информации. Это связано с необходимостью экономии издержек при сборе и обработке информации, в том числе времени. Подобная ситуация возникает не только в условиях наличия неопределенных факторов.

В *теории неполной рациональности* Саймона постулируется необходимость учета не только издержек, связанных со сбором информации, но и когнитивных ограничений. Если даже не ставить под сомнение потенциальные возможности индивида в части грамотной обработки информации для поиска оптимального решения, то остаются ограничения в части наличия времени для такой обработки.

Теория неполной рациональности приводит к необходимости замены принципа оптимальности *принципом удовлетворительности*. При использовании этого принципа потребуется уточнение и критерия достижения цели. Возможно, это будет установление некоторых нижних границ значений критериев, при достижении которых результат операции следует считать *приемлемым (удовлетворительным)*.

Обычно в публикациях, посвященным исследованию операций (в том числе в учебных пособиях), этапу реализации принятого решения, т.е. проведению операции уделяется мало внимания, хотя задача реализации решения не менее, а, возможно, и более сложная, чем выработка решения.

На этом этапе должна быть сохранена вся совокупность моделей, разработанная для принятия решения, и добавлены модели оценки окружающей среды, а также оценки значений основных параметров управляемой системы, характеризующих ее состояние и достигнутых в процессе проведения операции. При построении моделей, обеспечивающих реализацию принятого решения, должен быть определен перечень основных параметров управляемой системы, достаточно полно характеризующих ее состояние, и перечень релевантных факторов внешней среды, определяющим образом влияющих на состояние системы.

Основной задачей математического моделирования на этом этапе является своевременное выявление в пространстве нежелательного отклонения параметров системы от целенаправленной траектории, которая должна быть реализована согласно выбранной стратегии, и выработка рекомендаций для корректировки, при необходимости, стратегии управления. На этом этапе решающее значение имеют механизмы обратных связей. В ряде случаев время реализации принятой стратегии управления настолько мало, что необходимые корректировки траектории движения управляемой системы должны быть «заложены» в управление до начала проведения операций. Такая ситуация, например, имеет место при проведении операции перехвата боеголовки баллистической ракеты. В других системах, функционирующих длительное время, например, социально-экономических, некоторое время для анализа имеется. Но в любом случае чрезвычайно полезно провести заблаговременно до начала операции моделирование всех возможных при принятой стратегии управления траекторий системы и подготовить необходимые «корректирующие» решения.

Таким образом, математическая модель принятия и реализации решения представляет собой, в общем случае, *согласованную* между собой *иерархию моделей*. Причем в сложных ситуациях процесс принятия решения далеко не всегда может быть полностью формализован. Необходимо опираться на интуицию, и на не вполне обоснованные гипотезы. Т.е. при исследовании и реализации операции потребуется в сложных системах прибегать к теории неформальных процедур и имитационному моделированию.

12. Субъективные проблемы исследований.

Далее перечислены некоторые субъективные проблемы, возникающие при исследовании системы, в том числе при формировании выводов по результатам исследований.

1) **Инерционность мышления и психологические барьеры**.

Инерционность мышления является одной из основных причин возникновения психологического барьера, когда некоторый логический шаг не совершается, хотя для него имеются и все необходимые условия и аппарат, а позже после свершения этого шага, он представляется совершенно естественным. Проявляется инерционность мышления в бесконтрольном применении к изучаемой задаче математической модели или методов ее исследования, апробированных или традиционных в данной области, или просто внушающих априорное доверие исследователю. Некоторая инерционность мышления необходима по очевидным причинам, но оценить разумную степень инерционности бывает в начале исследования весьма трудно, а в ряде случаев - невозможно. В результате разумное использование традиций может перерасти в слепое следование им.

Отчетливо видя ошибки предыдущих поколений и причины ошибок, исследователи вновь повторяют ошибки, связанные с инерционностью мышления. Причины могут быть различными. Это объективная ограниченность человеческого мышления, привязанность к неадекватным, но красивым математическим структурам, непонимание особенностей методологии прикладных исследований. Консерватизм мышления особенно опасен на этапе постановки задачи.

2)**Ошибки в определении цели.**

Имеет место опасность:

подмены цели средствами (например, строительство больницы не самоцель, а один из способов (средств) улучшения медицинского. обслуживания);

смешения целей (например, создана красивая реклама, но увеличению сбыта продукта она не способствует).

По мнению Эйнштейна, проблема 20-го века - это совершенствование средств и смешение целей.

3)**Пренебрежение аналитическими (дедуктивными) построениями**.

Успехи применения ЭВМ в моделях привели к своеобразной болезни - пренебрежению дедуктивными построениями, если они даже дают более точный ответ на поставленную задачу, чем математическое моделирование. Но дело не только в получении конечных результатов. Дедуктивные построения способствуют формированию математического мышления, развитию способности правильно понять ситуацию, сделать обоснованные выводы. Строгие методы помогают выявить особые точки, оценить вырожденные случаи. Конечно, здесь также опасны крайности.

4) **Ошибки в выборе модели**.

Субъективные ошибки при выборе модели могут возникнуть по следующим причинам.

а) Непонимание системы, ее отношений с окружающей средой, искажение причинно-следственных связей.

б) Чрезмерная любовь к отработанной "красивой" модели. Модель, хорошо зарекомендовавшая себя в одной ситуации, может оказаться непригодной в другой. Применение не вполне адекватной модели допустимо, если исследователь контролирует ситуацию. Поведение исследователей при применении неадекватной модели можно сравнить с поведением человека, который хочет перейти канаву по доске с трещиной. Возможны три случая: (1) видя трещину, человек следит за результатом и готов принять меры; (2) не видит трещины, но готов оценить ситуацию при появлении каких либо симптомов; (3) догматик не видит трещины и отрицает возможность ее существования, а треск доски принимает за птичье пение.

в) Непонимание области применения модели.

г) Фетишизация гипотез. Ценность гипотез очевидна. Однако они становятся опасными, когда превращаются в догмы, и вредными, когда освобождают исследователя от непрерывной проверки результатов фактами.

д) Ошибки в выборе метода исследования, возникающие по многим причинам, в том числе из-за непонимания вредности излишней информации (для изучения дождя не нужно строить траекторию каждой капли), вследствие неумения оценить исходную информацию, а так же при попытке устранить нечеткость информации за счет точных математических методов.

е) Математические ошибки вследствие плохого знания теоретических основ математики, ошибок в вычислительной схеме.

5)**Произвольная трактовка статистических данных**

Статистические выводы могут иметь высокую надежность, но не могут считаться абсолютно достоверными. Ошибки в статистических выводах могут быть следствием невысокой достоверности или недостаточности исходной информации, а так же неграмотного применения процедур обработки информации. Возможна также неверная содержательная интерпретация правильных статистических результатов.

6)**Пренебрежение научным подходом к процессу принятия решения**

Достаточно распространенными являются не только естественные проблемы и ошибки, возникающие при различных исследованиях, но и проблемы другого вида и содержания, а именно - волюнтаризм, пренебрежение научными исследованиями при принятии решения или , что возможно еще опасней, "заданность" результатов исследований, т.е. организация "научных исследований" для обоснования рекомендаций, служащих удовлетворению интересов каких-либо лиц или группировок. В частности, многочисленны примеры, когда при полном игнорировании системного подхода были выработаны решения, последствия которых оказались, мягко говоря, печальными.

Обратимся к некоторым показательным примерам.

(1).Принятые в СССР в 80-ые годы постановления по борьбе с пьянством привели к негативным последствиям, в том числе и к появлению импульса инфляции. Система (общество) перешла в новое состояние, для авторов постановлений неожиданное. При подготовке постановлений не было должного изучения ни структуры реальной системы (возможных вариантов реакции населения на постановления), ни опыта других государств. Более того, не были предусмотрены и обратные связи, позволяющие своевременно увидеть негативные последствия постановлений и скорректировать (отменить) их. Были только благие намерения, которыми, как известно, дорога в ад вымощена.

(2) Вследствие непонимания высшим руководством СССР состояния страны, реального характера связей между республиками, процессов, протекающих в социально-экономической сфере, не были своевременно найдены решения, обеспечивающие дальнейшее развитие страны в благоприятном для ее населения направлении. Ряд решений привели к непредвиденным руководством последствиям. Создание ГКЧП привело к ускорению неуправляемого процесса распада СССР. В результате решений о создании СНГ возник не тот союз, который декларировался в Беловежской пуще. Реальные отношения, возникшие между государствами, вошедшими в союз, оказались далекими от декларируемых в соглашении. Соответствующими предварительными оценками возможных результатов своих решений руководство себя просто не затрудняло. Результаты референдума были проигнорированы.

(3). Наглядные примеры пренебрежения положением системного подхода о необходимости рассмотрения системы и внешней среды в динамике, в развитии можно привести из области военного строительства. Так, в 1959 г. в СССР было принято решение о строительстве системы противоракетной обороны Москвы на основе технических решений, обеспечивающих перехват парной баллистической ракеты (БР), состоящей из корпуса и боеголовки. Однако развитие средств баллистического нападения привело к созданию многоэлементных БР, включающих корпус, несколько боеголовок, тяжелые и легкие ложные боеголовки, передатчики активных помех. Предпринятые попытки модернизировать систему противоракетной обороны (ПРО) в процессе ее строительства, чтобы придать ей способность перехватывать многоэлементные БР, были изначально безнадежны. Принятая в 1977 г. на вооружение система такими возможностями не обладала и, фактически, оказалась весьма дорогостоящей игрушкой, обслуживаемой многотысячной войсковой частью. При этом во время строительства системы были в значительной мере заторможены разработки новых, более перспективных средств ПРО.

(4). Научно-исследовательские институты Минводхоза СССР "обосновали" необходимость переброса в Волгу части стока рек Сибири, в том числе для предотвращения обмеления Каспийского моря. Обоснования носили четкую заданность. Привлекались в 1-ую очередь те аспекты взаимодействия "системы переброса" с окружающей средой, которые подтверждали необходимость заданных выводов. Выяснилось, что серьезные научные исследования территориального водообмена не проводились. В 80-е годы начался процесс подъема уровня Каспийского моря и затопления прибрежных сооружений.

Значительное число решений, принятых и принимаемых в России в 90-х годах во всех сферах (экономической, социальной, политической и пр.) по-прежнему не базировались на системные исследования

(5) В плане «заданности» в России в 90-ые годы организуется заинтересованными лицами строительство скоростной дороги «Москва - Санкт-Петербург». Возможность негативных последствий строительства и последующей эксплуатации скоростной дороги, а так же нецелесообразность этого строительства в конкретной экономической ситуации, существующей в стране, отметаются с использованием и откровенной лжи. Например, утверждается, что кредиты на строительство дороги представляют иностранные банки, но умалчивается, что под государственную гарантию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.Акоф, М.Сасиени. Основы исследования операций. М., 1971.

2. Р.Акофф. Искусство решения проблем. М., 1982.

3. Бахвалов Н.С. Численные методы. М., 1975.

4. С.Бир. Мы и сложность современного мира. Кибернетика сегодня: проблемы и суждения. М., 11.1976.

5. Блехман И.И., Мышкис А.Д.,Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложения математики. Киев, 1990.

6. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М., 1980.

7. Визгин В.П. Между математикой и физикой: продолжающаяся дискуссия./ / Историко-математические исследования. Вторая серия, выпуск 5 (40), 2000.

8. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М., 1971.

9. Грекова И. Методологические осбенности прикладной математики на современном этапе её развития. "Вопросы философии". 1976.6.

10. Грекова И. Всем ли ездить на ярмарку в Дублин? "Знание - сила" 8.1979.

11. Грекова И. Математика и постижение реальности. "Наука и жизнь" 1985. 3.

12. Губанов В.А., Захаров В.В., Коваленко А.Н. Введение в системный анализ. Ленинград, 1988.

13. Демидов С.С., Есаков В.Д. «Дело академика Н.Н.Лузина» в свете сталинской реформы советской науки. // Историко-математические исследования. Вторая серия, выпуск 4 (39), 1999.

14. Дроздов Н.Д. Основы системного анализа. Тверь , 1997.

15. Дроздов Н.Д. Введение в теорию организационных систем.
Тверь , 2001.

16. Дроздов Н.Д. Некоторые вопросы организации прикладных исследований. "Системы: Математичиские методы описания, САПР и управление". Калинин. 1989.

17. Дроздов Н.Д. , Климок В.И. Математика и естествознание. Тверь, 2001.

18. Ермолаева Н.С. Мотивы обращения петербургских математиков к задачам картографии. // Историко-математические исследования. Вторая серия, выпуск 7 (42), 2002.

1.9. Ермолаева Н.С. Изотечественной истории математической биологии.// Историко-математические исследования. Вторая серия, выпуск 8 (43), 2002.

20. Исследование операций. под ред. Дж.Моудера, С.Элмаграби. М.,1981.

21. Карманов В.Г., Федоров В.В. Моделирование в исследовании операций. М. 1996.

22. Квейд. Анализ сложных систем. М., 1969.

23. Клейнер Г.Б. Экономико-математическое моделирование и экономическая теория. Экономика и математические методы. 2001, т.37. №3.

24. Клиланд Д. , Кинг В. Системный анализ и управление. М. 1974.

25. Кравченко А.И. Прикладная социология и менеджмент. М. 1975.

26. Краснощеков П.С. Математические модели в исследовании операций. М., 1987.

27. Краснощеков П.С. , Петров В.В. Принципы построения моделей. М. 2000.

28. Кузин. Л.Т. Основы кибернетики. М., 1079

29. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математики и её изучении. М., 1977.

30. Лебедев А.Н. Моделирование в научно-технических исследованиях. М., 1986

31. Монастырский В.С. Избранные главы истории математики. Калининград, 2002. // Историко-математические исследования. Вторая серия, выпуск 5 (40), 2000.

32. Моисеев Н.Н. Математик задает вопросы. М., 1974.

33. Моисеев Н.Н. Математик ставит эксперимент. М., 1979.

34. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М., 1981.

35. Моисеев Н.Н. Эффективность, устойчивость, справедливость. "Знание - сила". 1984.3.

36. Моисеев Н.Н. Слово о научно-технической революции. М., 1985.

Монастырский М.И. Математика на рубеже двух столетия.

37. Э. Мушик, П. Мюллер Методы принятия технических решений. М. 1990.

38. Новиков С.П. Вторая половина XX века и ее итог кризис физико-математического сообщества в России и на Западе. // Историко-математические исследования. Вторая серия, выпуск 7 (42), 2002.

39. Панов В.Ф . Математика древняя и юная.М., 2006

40. Перегудов Ф.И.,Тарасенко Ф.П. Введение в системный анализ. М.,1989.

41. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М. 1996.

42. Плотинский Ю.М. Теоретические и эмпирические модели социальных процессов. М.1998.

43. П. Райветт, Р.Л., Акофф. Исследование операций. М. 1986.

44. Софронов И.Д. Математическое моделирование во ВННИЭФ// Историко-математические исследования. Вторая серия, выпуск 9 (45) 2005.

45. Тихомиров В.М. «Рождение Московской математической школы и Франция». // Историко-математические исследования. Вторая серия, выпуск 9 (45) 2005.

46. Тихонов А.Н.,Костомаров Д.П. Вводные лекции по прикладной математике. М.,1984.

47.Тихомиров В.М. О некоторых особенностях математики XX века. //Историко-математические исследования. Вторая серия, выпуск 3(38).1999

48.Тихомиров В.М. Математика в первой половине XX века //Квант №1, 1999.

49. Тихомиров В.М. Математика во второй половине XX века //Квант №1, 2, 2001.

50. Трухачев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределенностей. М.,1981.

51. Успенский Я.В. Соображения о возможно целесообразном преподавании математики в проектируемом институте инженеров земельных улучшений. // Историко-математические исследования. Вторая серия, выпуск 4 (39), 1999.

52. Филонова 0.Е. Математика в истории мировой культуры. М 2006

53. Шелобаев С.И. Математические методы и модели. М., 2001

54. Р.Шенон. Имитационное моделирование систем -Искусство и наука. М., 1978.

55. Эконометрическое моделирование. Ответственный редактор Иванилов Ю.П., М. 1992.

Приложение. Математические методы

1.Вычислительная математика. Классические разделы[47]

1.1. Решение уравнений

Одна из древнейших задач прикладной математики решение линейных уравнений с одним неизвестны: $f(x)=0.$ (1) Прямых методов решения алгебраических уравнений выше четвертой степени и трансцендентных уравнений не существует. Методы последовательных приближений для решения таких задач появились еще в древности. Таковыми, по существу, были все методы, применяемые многими математиками, начина с Архимеда, для вычисления числа π .

В методе *простой итерации* уравнение (1) заменяется эквивалентным уравнением $x = \varphi(x).$ (2) После чего, задавшись начальным приближением x_0, итерации выполняются по формуле

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0,1,2\ldots$$

При выполнение определенного условия эта последовательность сходится к корню уравнения со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q ($|\varphi'(\alpha)| \le q < 1$, α–корень уравнения).

Метод простой итерации был в XV веке применен арабским математиком аль-Каши для вычисления корня кубического уравнения.

Если выбрать $\varphi(x)$.так, что существуют производные высших порядков и $\varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=\varphi^{(m-1)}(\alpha)=0, \varphi^{m}(\alpha)\neq 0,$ то итерационный процесс имеет порядок m.

Если в функцию $\varphi(x)$. представить в виде $\varphi(x) = x\ \psi(x)f(x),$ и принять $\psi(x) = 1/f'(x)$, то будет иметь место *метод Ньютона* - итерационный метод второго порядка, называемый также *методом касательных*. Соответствующая итерационная формула:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n), \quad n = 0,1,\ldots,\ x_0\text{–задано.}$$

Ньютон продемонстрировал свой метод при решении ряда уравнений, причем он фактически вычислял производную $f'(x)$, не используя этого понятия.

[47]Данный раздел Приложения содержит сокращенное изложение главы 4 учебного пособия В.В.Русанов, Г.С.Рослякова. «История и методология прикладной математики», М.,2004

При $\varphi(x) = \frac{x - x*}{f(x) - f^*(x)}$, $x^* \in [a,b]$, $f'(x)f''(x) > 0.$ имеет место метод, называемый *методом хорд иди методом секущих*. Соответствующий итерационный процесс имеет вид:

$$x = \frac{x^* f(x_n) - x_n f(x^*)}{f(x_n) - f(x^*)}$$

При выполнении ряда условий процесс сходится к искомому корню.

Методы простой итерации и метод Ньютона применяются при решении систем нелинейных уравнений. Метод Ньютона получил широкое применение при решении задач естествознания на ЭВМ. Быстрая сходимость достигается при выборе хорошего начального приближения При затруднении с выбором начального приближения вначале могут быть использованы более грубые методы, например метод хорд..

Существуют и методы более высокого порядка, а также приемы, обеспечивающие ускорение сходимости.

Для отыскания корней алгебраических уравнений с действительными коэффициентами созданы специфические методы, не требующие, в частности, знания начальных приближений. К таким методам относятся метод *Лобачевского-Греффе*, метод *Бернулли*, метод *Лагранжа*, метод *спуска*, метод *парабол*. Метод Лобачевского-Греффе сходится быстро при наличии действительных корней, или не более двух пар комплексных корней. При большем числе пар комплексных корней рекомендуется использовать алгоритм *Энке*. Метод Бернулли улучшен и доработан рядом авторов для использования на ЭВМ. Методы спуска и парабол обеспечивают отыскание и действительных и комплексных корней по единому алгоритму.

Развитие новых методов решения уравнений и переоценка старых относится в основном ко второй половине двадцатого столетия, что связано с появлением новой вычислительной базы и необходимостью решать новые прикладные задачи.

Выбор метода для вычисления корней уравнения $f(x) = 0,$ зависит от вида функции, от ее дифференциальных свойств, от наличия хорошего начального приближения. Когда $f(x)$ - трансцендентная функция, ее анализ может быть затруднен и для вычисления корней применяется медленно сходящийся, но надежный метод *половинного деления*.

Некоторые методы, разработанные для одного уравнения, приспособлены для решения системы уравнений.

$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$

В методе наискорейшего спуска задача определения корней системы уравнений сводится к задаче определения точек минимума некоторой функции, например

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} f_i^2(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

которая принимает минимальное значение F = 0 во всех точках, удовлетворяющих исходной системе уравнений. $\mathbf{f(x)=0}$,

Запишем исходную систему в векторной форме

$\mathbf{f(x)=0}$, где $\mathbf{x} = (\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_m})^T$, $\mathbf{f} = (\mathbf{f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_m)})$

Простейшим методом решения этой системы является метод простой итерации.

Метод Ньютона для решения этой системы имеет вид

$\mathbf{x^{n+1} = x^n - f_x^{-1}(x^n)f(x^n)}$, $\mathbf{x^0}$ **– задано.**

Сходимость метода квадратичная. Основное время идет на обращение матриц.

1.2. Задачи линейной алгебры

1. Линейная алгебра находит применение в задачах, связанных с анализом линейных систем. Далее рассматриваются два типа задач: решение системы линейных уравнений и вычисление собственных значений матриц.

Немного из истории. Необходимость решения уравнений с числом неизвестных более одного привело к появлению методов подстановки и исключения задолго до возникновения алгебраической символики. Метод исключения использовался в работах в работах математиков Древнего Китая, Древней Греции, арабских и европейских математиков Средневековья. Законченный вид методы получили после развития алгебраической символики и введения в математику отрицательных чисел.

Понятие *определителя* было введено в 1693 г. Лейбницем. Позже независимо Крамером и развито Варндермондом (1772 г.). Крамер сформулировал правило для вычисления решения системы линейных уравнений. Исследованием определителей и линейных систем занимались многие математики. Основные результаты получены в XIX веке Гауссом, Кронекером, Сильвестром и другими.

2. Система линейных уравнений имеет вид $\mathbf{Ax = b}$.

Решение системы с $\mathbf{n}$ неизвестными с использованием правила Крамера при $\mathbf{n>4}$ практически нецелесообразно из-за большого числа вычислений и потери точности. В основе современных методов лежит метод *исключения* в его модификации, предложенной Гауссом. Модификация метода предложена также Жорданом. Для матриц специального вида были разработаны более эффективные алгоритмы. Все методы исключения сводятся к разложению матрицы системы на произведение двух треугольных (верхней и нижней) матриц. Методы дают решение системы после заранее фиксированного и зависящего только от $\mathbf{n}$ числа шагов. Такие методы обычно называют *прямыми.* Параллельно с прямыми развивались и *итерационные* методы решения линейных систем. Решение системы получается в результате последовательных итераций, начиная с некоторого заданного значения вектора переменных. В существующих прикладных пакетах используются обычно прямые методы.

3. Матрицы вначале возникли из чисто математических соображений. В дальнейшем оказалось, что существуют объекты и соотношения между

величинами, которые в полной мере могут быть описаны и изучены с помощью матриц. Алгебра матриц включает сложение, умножение и обращение матриц.

Важным понятием теории матриц, связанным с ее прикладными применениями является понятие *собственного вектора* **x** и *собственного значения* λ, удовлетворяющих системе .$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Соответственно, λ является корнем характеристического уравнения $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E},) = \chi(\lambda,) = 0$,

Совокупность собственных значений матрицы образует ее спектр. Задача численного исследования спектральных свойств матрицы, вычисления собственных значений и собственных векторов составляют *проблему собственных значений.* Трудность заключается в том, что при повышении порядка матрицы быстро растут погрешности результатов. В тех многих случаях, когда требуется получить только один или несколько максимальных (или минимальных) собственных значений, оказывается эффективным применении итерационных методов. Однако в общем случае итерационные методы не решают проблемы собственных значений. Трудности связаны с ошибками округления.

Задача получения устойчивых алгоритмов для численного решения задач линейной алгебры – предмет исследования многих математиков. Устойчивые методы получены для *симметрических* матриц. Этими методами можно надежно вычислять сразу все собственные значения.

Уилкинсоном разработаны итерационные методы приведения исходной матрицы к матрице, собственные значения которой легко вычисляются. Развитие этого алгоритма приведет к решению проблемы собственных значений для произвольных матриц.

1.3. Интерполирование. Численное дифференцирование и интегрирование.

Многочлен $\mathbf{L_n(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n}$, удовлетворяющий условию $\mathbf{L_n(x)_i = f(x_i)}$, $\mathbf{i = 0 \div n}$, называется интерполирующим полиномом для функции $\mathbf{f(x)}$. Здесь $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ – узлы, где заданы значения $\mathbf{f(x)}$. Впервые формулу для нахождения коэффициентов интерполирующего полинома была получена Грегори и Ньютоном. В 1795 г. Лагранж предложил другой вид интерполяционной формулы. Известны формулы Гаусса, Стирлинга, Бесселя, Эверетта. Все формулы приводят к единому интерполяционному полиному степени **n.** Обобщенная задача интерполирования функции $\mathbf{f(x)}$ сформулирована Эрмитом в 1978 г.

Интерполяционные многочлены получены без каких либо требований гладкости $\mathbf{f(x)}$. Соответственно возникает вопрос о величине отклонения $\mathbf{f(x)}$ от $\mathbf{L_n(x)}$ в произвольной точке отрезка [a,b]. Для функций, имеющей непрерывную **(n+1)-**ю производную, известна формула для оценки остаточного члена $\mathbf{R_n(x) = f(x) - L_n(x)}$. Если узлы интерполирования можно выбирать, то погрешность можно уменьшить, используя результаты, полученные П.Л.Чебышевым. Достаточно подробно проблему сходимости (**$R_n(x) \to 0$** при **$n \to \infty$**) изучали и другие математики (Беренштейн, Фабер).

Приближение интерполяционным многочленом высокой степени на достаточно большом отрезке [a,b] обычно связано с большими погрешностями. В таком случае целесообразно использовать кусочно-полиномиальную интерполяцию, когда отрезок разбивается на отдельные отрезки и на каждом из них функция заменяется многочленом невысокой степени. Важным применением кусочно-полиномиальной интерполяции является аппроксимация дифференциальных выражений на равномерной сетке.

Если при кусочно-полиномиальной интерполяции на отрезке [a,b] при фиксированном шаге сетки **h** требуется гладкое сопряжение в точках сопряжения отрезков, то будет иметь место интерполяция сплайнами. Например, **$S(x)$** кубический сплайн, построенный для интерполяции функции **$f(x)$,** удовлетворяет следующим условиям:

а) на каждом сегменте **$[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \div n$**, **$S(x)$** есть полином 3-ей степени;

б) функции **$S(x)$, $S'(x)$, $S''(x)$** непрерывны на [a,b], где

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

в) $$S(x_i) = (f(x_i), \quad i = 0 \div n.$$

Более просто строится локальный сплайн с непрерывной только первой производной.

Интерполяционные многочлены используются для численного дифференцирования и интегрирования.

$f(x) = L_n(x) + R_n(x)$, где **$L_n(x)$** – полином Лагранжа, построенный по узлам **$a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$.**

Производная **$f^{(k)}(x)$** заменяется на **$L_n(x)$:**

$$f_n^{(k)}(x) = L_n^{(k)}(x) + R_n^{(k)}(x).$$

При больших **k** могут сильно нарастать погрешности.

Общая формула для интегрирования имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + \overline{R}_n.$$

В случае равноотстоящих узлов **$x_i = a + i \cdot h$, $h = (b-a)/n$, $i = 0 \div n$** имеет место квадратурная формула

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + \overline{R}_n, \quad A = \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x)} dx.$$

При **$n = 1$**, будет иметь место формула трапеций, обычно формулу применяют к каждому отрезку. При **$n = 2$** и $h = \frac{b-a}{2n}$ применение к каждому отрезку даст формулу Симпсона.

Гаусс показал, что степень полинома, для которого квадратурная формула точна, можно повысить с помощью выбора узлов интерполирования. Решается задача определения в квадратурной формуле

$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i)$ коэффициентов C_i и узлы x_i так, чтобы формула была точна для многочленов степени 2n – 1 тогда и только тогда, когда выполняются определенные условия. Для отрезка [-1, 1] для двух частных случаев $\rho(x)$ известны формула Эрмита и формула Гаусса-Лежандра.

1.4. Равномерные и среднеквадратические приближения функций

Задача приближения непрерывной на резке [a,b] функции $f(x)$ с помощью алгебраических многочленов заключается в определении такого многочлена $P_n(x)$, для которого выполняется условие:

$|f(x) - P_n(x)| \le \varepsilon$ для всех $x \in$ [a,b] при заданном ε

Если H_n – множество всех многочленов степени не больше n,

величину $\Delta(f, P_n) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)|, \quad P_n \notin H_n$ называют отклонением $f(x)$ от $P_n(x)$, а величину $E_n(f) = \lim_{P_n \in H_n} \Delta(f, P_n)$ - наилучшим приближением.

Многочлен $Q_n \in P_n$, для которого эта грань достигается, называется многочленом наилучшего приближения.

Задача о наилучшем равномерном приближении имеет единственное решение. Условия наилучшего приближения были получены Чебышевым в1854 г.

Ряды Фурье являются очень удобным математическим аппаратом и широко применяются в различных теоретических и прикладных исследованиях. Развитая в XIX веке теория наилучшего среднеквадратического приближения связана с обобщенными рядами Фурье.

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x),$ где $\{\varphi_k(x)\}$ – ортонормированная система функций на отрезке [a,b] , а

$c_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx$ -коэффициенты Фурье.

Среди обобщенных многочленов

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$$

для функции $f(x)$, интегрируемой с квадратом на отрезке [a,b], наилучшим в смысле среднеквадратического приближения, т.е. многочленом, обращающем в минимум величину $\delta_n = \int_a^b |f(x) - P_n(x)|^2 dx,$

является тот, коэффициенты которого $a_k = c_k$ является коэффициентами Фурье, вычисляемыми по приведенной формуле. При этом

$$\delta_n = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 .$$

При $n \to \infty$ выполняется неравенство Бесселя.

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^2 \le \int_a^b f^2(x)dx$$

Знак равенства для любой функции означает, что система $\{\varphi_k\}$ - полная.

При этом $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x) \right|^2 dx$ и ряд Фурье сходится в среднем.

При приближении функций, заданных на дискретном множестве

x_i, $i = 0 \div m$, аппроксимирующими функциями обычно, как и в континуальном случае, являются многочлены или системы многочленов.

Для оценки близости двух дискретных функций используются различные нормы, например

$$\|f\|_C = \max_i |f_i|, \quad \|f\|_p = \left\{ \sum_{i=0}^{m} \sigma_i |f_i|^p \right\}^{1/p}.$$

Весовые коэффициенты выбираются в зависимости от задачи. Часто: $\sum\limits_{0}^{m} \sigma_i = 1.$

Отклонение $P_n(x)$ - аппроксимирующего многочлена для $\{f_i\}$ от $\{f_i\}$ определяется величиной нормы в дискретном пространстве:

$$\Delta_n = \|f - P_n\|_p = \left\{ \sum_{i=0}^{m} |f_i - P_{ni}|^p \right\}^{1/p}, \quad P_{ni} = P_n(x_i).$$

Многочленом наилучшего приближения называется такой, который доставляет минимум Δ_n.

Если табличные значения $\ddot{f}_k$ функции $\{f_k\}$ имеют погрешности ε_k, возникает задача такого приближения, чтобы максимально уменьшить $|\varepsilon_k|$, не изменяя при этом f_k. Задача имеет решение при дополнительной информации относительно ε_k и f_k. В общем случае это задача о наложении оптимальных значений так называемых весовых коэффициентов. При аппроксимации функции многочленами задача может быть сведена к задаче о среднеквадратическом приближении.

1.5. Численное интегрирование дифференциальных уравнений.

Первый алгоритм численного решения обыкновенного дифференциального уравнения был дан Эйлером для решения уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. . Метод принято называть методом ломанных или методом Эйлера. В близкой к x_0 точке $x = x_1$ полагают

$$y_1 = y_0 + h\, f(x_0,y_0), \quad h = x_1 - x_0\ ,$$

$$y_2 = y_1 + h\, f(x_1,y_1) \qquad \text{и.т.д.}$$

.Формула получена удержанием первых двух членов ряда Тейлора для $y(x)$ и имеет локальную погрешность $O(h^2)$.

Идея метода Рунге-Кутта для построения приближенного решения дифференциального уравнения заключается в следующем.

Значение решения y в точке x представляется в виде ряда Тейлора по степеням h:

$$\Delta y = y_1 - y_0 = hy'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + \frac{h^3}{6} y'''_0 + \ldots \qquad (1)$$

С другой стороны:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{r} p_i k_i\ , \qquad (2)$$

где $p = const, \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1$,

$$k = hf(x_0,y_0),$$
$$k = hf(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21} k_1\ ),$$
$$k = hf(x_0 + \alpha_3 h, y_0 + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$k = hf(x_0 + \alpha_r h, y_0 + \beta_{r1} k_1 + \beta_{r2} k_2 + \ldots + \beta_{r,r-1}\, k_{r-1}).$$

Коэффициенты $p_1, \ldots, p_r$, $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$, $\beta_{n,m}$, $n = 2,\ldots,\quad m = 1,\ldots, r-1$

Выбираются так, чтобы разложение (2) совпало с (3) до возможно более высоких степеней h.

При $r = 1$ – это метод Эйлера.

Наиболее употребительно $r = 4$. В этом случае формула Рунге-Кутта имеет вид (для точки $x_1 = x_0 + h$):

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = O(h^5), \text{ где}$$

$k_1 = hf_0$,, $\quad k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1),\ k_3 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2),$

$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$

К другому классу формул численного интегрирования уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ относится метод Адамса.

Рассмотренные методы распространяются и на системы уравнений. Дополнительные трудности возникают при интегрировании так называемых жестких систем, решение которых содержит как быстро убывающие, так и медленно убывающие составляющие.

2 Дальнейшее развитие класических вычислительных методов.

Усрешное развитие методов оптимизации связано с появлениеи новых разделов математического анализа, в частности выпуклого анализа и функционального анализа и связанных с ними вычислительных методов. В настоящем приложении рассмотренм алгоритмы сьтветствующих разделов анализа.

2.1. Дифференцирование в нормированных пространствах

В заадачах многомерной оптимикрная возникет задача дифференцирования в нормированных пространствах.

Для вещественных функций одного вещественного переменного два определения характеризуют одно и то же понятие дифференцируемости функции f(x) в точке x: существование конечного предела

$$\mathbf{\lim(f(x+h) - f(x))/h}$$

и возможность асимптотического разложения

$$\mathbf{f(x+h)=f(x)+f'(x)h +0(h),\ h \to 0.}$$

Для функций двух и более переменных, а также отображений, действующих из одного нормированного пространства в другое, эти определения характеризуют разные понятия.

Пусть **X** и **Y** два нормированных пространства (для нас наибольший интерес представляют случаи $\mathbf{X = R^n,\ n \geq\ 2, Y = R^m,\ m \geq\ 1)}$, u $\mathbf{U(x)\subset\ X}$ - некоторая окрестность точки $\mathbf{x\in X.)}$

Отображение ***f****, действующее из* ***X*** *в* ***Y****, называется сильно дифференцируемым (дифференцируемым по Фреше) в точке* $\boldsymbol{x\in X}$*, если существует такой ограниченный линейный оператор* $\boldsymbol{L_x \in L(X,Y)}$*, что для любого* $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ *можно найти* $\boldsymbol{\delta > 0}$*, при котором из неравенства* $\mathbf{||\ h\ || < \delta}$ *следуют неравенства:*

$\mathbf{||\ f(x+h) - f(x) - L_x\, h\, ||\ \leq\ \varepsilon\, ||\ h\, ||}$ или же

$$\mathbf{f(x+h) = f(x) + L_x\, h + 0(h)}.$$

Выражение $\mathbf{L_x\ h}$, представляющее собой при каждом $\mathbf{h \in\ X}$, элемент пространства **Y**, называется *сильным дифференциалом (дифференциалом Фреше)* отображения **f** в точке **x**. Линейный оператор $\mathbf{L_x}$ называется *сильной производной (производной Фреше)* отображения **f** в точке **x** и обозначается **f'(x)**.

Если $\mathbf{X = R^n}$, $\mathbf{Y = R^m}$ и $\mathbf{f{:}R^n \to R^m}$ дифференцируема по Фреше, то $\mathbf{L_x}$ состоит из частных производных $\mathbf{\{\partial f_i/\partial x_j\},\ i=1,2,..,m;\ j=1,2,..,n,}$ т.е.

$$L_x = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \dots & \partial f_1/\partial x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial f_m/\partial x_1 & \dots & \partial f_m/\partial x_n \end{pmatrix}$$ и называется *Якобианом*.

В частном случае, когда **m=1**, т.е. $\mathbf{f{:}\ R^n \to R^1}$,

$f(x) = (\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, .., \partial f/\partial x_n)$ называется *градиентом функции* **f(x)** в точке **x** и обозначается **f(x,grad f′(x).**

Для вычисления сильных производных можно воспользоваться, во-первых, определением, во-вторых, правилом дифференцирования сложной функции, и, в-третьих, координатной записью.

*Отображение **f**, действующее из **X** в **Y** имеет в точке $x \in X$ вариацию по Лагранжу в направлении **h** (производную по направлению **h**, слабый дифференциал или дифференциал Гато при приращении **h**), если существует*

$$df(x,h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{t},$$

*где сходимость понимается как сходимость по норме в пространстве **Y**.*

Выражение **df(x,h)**, называемое *вариацией по Лагранжу (производной по направлению, слабым дифференциалом, дифференциалом Гато),* может и не быть линееным по **h**. Если же такая линейность имеет место, т.е. если

$$df(x,h) = f'_c(x) \cdot h, \forall h.$$

где $f'_c(x)$ - ограниченный линейный оператор, то говорят, что **f(x)** слабо дифференцируема или дифференцируема по Гато в точке **x**, а оператор $f'_c(x)$ называется слабой производной (производной Гато).

Справедливо следующее:

1. Производная по направлению может существовать и для негладких функций (см. $f(x)=\| x \|$, $df(0,h)=\| h \|$).

2. Отображение, дифференцируемое по Гато в точке **x**, необязательно непрерывно в этой точке.

Например, $f:R^n \to R^1$, $n \geq 2$;

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } \|x - a\| = \|a\|,\ x \neq 0, \\ 0, \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где $a \in R^n$, $a \neq 0$,

В этом примере отображение **f** дифференцируемо в точке **0** по любому направлению и **df(0,h) = 0** для всех **h**, т.е. оно дифференцируемо по Гато в нуле, однако не непрерывно в этой точке.

3. Если **f** сильно дифференцируема, то она и слабо дифференцируема, причем сильная и слабая производные совпадают

$$f'(x) = f'_c(x), \ df(x,h) = f'(x) \cdot h$$

Обратное, вообще говоря, неверно (см. предыдущий пример).

4. Если слабая производная $f'_c(x)$ отображения существует в некоторой окрестности **U** точки **x** и представляет в этой окрестности (операторную) функцию от **x**, непрерывную в x^0, то в точке x^0 сильная производная существует и совпадает со слабой.

5. Для слабых производных теорема о дифференцируемости сложной функции неверна.

6.(Анализ формулы конечных приращений). Пусть **U** - открытое множество в **X,** отрезок **[a,b]** целиком содержится в **U** и **f -** отображение **X в Y**, имеющее слабые производные $\mathbf{f'_c(x)}$ в каждой точке отрезка **[a,b].** Тогда

$$\| f(b) - f(a) \| \le \sup_{0\le\theta\le 1} \| f'_c(a+\theta\cdot\Delta x)\| \cdot \|\Delta x\| ,$$

$$\| f(b)-f(a)-f'_c(a)\cdot\Delta x\| \le \sup_{0\le\theta\le 1} \| f'_c(a+\theta\cdot\Delta x)-f'_c(a)\| \cdot \|\Delta x\| .$$

Производные высших порядков определяются слдующим образом

*Пусть **f** - дифференцируемое отображение из **X** в **Y**. Его производная **f′(x)** при каждом **x∈X** есть элемент из **L(X,Y),** т.е**.** **f** есть отображение пространства **X** в протранство линейных операторов **L(X,Y).** Если отображение **f′** дифференцируемо (см. Опр.4.1), то его производная называется второй производной отображения **f** и обозначается **f′′(x).** Таким образом, **f′′(x)** есть элемент постранства **L(X,L(X,Y))** линейных операторов, действующих из **X** в **L(X,Y)***

.Аналогично можно ввести понятие третьей и, вообще, **n**-ой производной отображения **f**, действующего из **X** в **Y**, определив **n-**ую производную как производную отображеня $\mathbf{f^{(n-1)}}$.

При этом **n**-ая производная будет элементом пространства

L(X,L(X,…,L (X,Y))).

В частном случае, когда $\mathbf{X = R^n}$, $\mathbf{Y = R^m}$, $\mathbf{f:R^n \to R^m}$, вторая производная **f′′(x)** определяется матрицей, называемой матрцей Гессе:

$$\Delta^2 f(x) = f''(x) = \begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial x_1^2 & \partial^2 f/\partial x_1,\partial x_2 & .... & \partial^2 f/\partial x_1\partial x_n \\ \partial^2 f/\partial x_2\partial x_1 & \partial^2 f/\partial x_2^2 & .... & \partial^2 f/\partial x_1^2 \\ .... & .... & .... & .... \\ \partial^2 f/\partial x_n\partial x_1 & \partial^2 f/\partial x_n\partial x_2 & .... & \partial^2 f/\partial x_n^2 \end{pmatrix},$$

При $\mathbf{Y = R^m}$, $\mathbf{m \ge 1}$, когда отображение **y = f(x)** можно записать в виде

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$......................$$
$$y_m = f_m(x_1, x_2, ..., x_n),$$

вторая производная **f′′(x)** определяется совокупностью $\mathbf{m\times n\times n}$ величин:

$\mathbf{a_{k,i,j} = \partial^2 f_k(x)/\partial x_i\partial x_j;\ k = 1,\dots,m;\ i,j = 1,\dots,n}$, т.е. трехмерной матрицей.

2.2. Алгоритмы выпуклого анализа

Выпуклый анализ – раздел математиеского анализа. Теретические положения выпуклого анализа составляют основу методов решения экстремальных задач

2.2.1.Примеры выпуклых множеств

Непустое множество $X \subset R^n$ *называется выпуклым, если вместе с любыми своими двумя точками содержит соединяющий их отрезок, т.е.*

$$x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X,\ \forall x^1, x^2 \in X,\quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Пространство (R^n), пустое множество ($\varnothing$) и любое одноточечное множество - выпуклы по определению.

. *Примеры выпуклых множеств*.

1. *Гиперплоскость* $H = \{x \in R^n : (p,x) = p^T x = a,\ p \in R^n,\ a \in R^1\}$.
2. Порождаемые гиперплоскостью *полустранства*;

- верхнее замкнутое полупространство

$$H^+_{pa} = \{x \in R^n : (p,x) \geq a,\ p \in R^n,\ a \in R^1\};$$

- нижнее замкнутое полупространство

$$H^-_{pa} = \{x \in R : (p,x) \leq a,\ p \in R,\ a \in R^1\}.$$

При замене "$\geq$ " на ">", "$\leq$ " на "<" определяется, соответственно, верхнее и нижнее открытые полупространства, которые тоже выпуклы.

3. *Полиэдр (линейное многообразие*)

$$X = \{x \in R^n : Ax \leq b\} = \{x \in R^n : \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_, \leq b_i,$$

$i = 1,2,..,m\}$, где **A** - матрица с размерами $m \times n$;

$$b = (b_1, b_2, ..., b_m) \in R^m.$$

4. *Параллелепипед*

$$X = \{x \in R^n : a_i < x_i < b_i,\ i = 1,2,...,m\}.$$

5. *Прямая*, проходящая через точки x^1 и x^2,

$$M_1 = \{x \in R^n : x = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2,\ \alpha \in R^1\}.$$

6. *Луч из точки* x^0 *в направлении* h

$$M_2 = \{x \in R^n : x = x^0 + th,\ t \in R^1_+\},$$

где $R^1_+ = \{t \in R^1,\ t > 0\}$.

7. *Выпуклый конус*

$$K_2 = \{x \in R^n : \forall x^1, x^2 \in K_2 \text{ и } \forall \lambda_1, \lambda_2 \in R^1 \Rightarrow$$
$$x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 \in K_2\}.$$

8. *Конус, натянутый на конечное число векторов (точек)*

$$K_3 = \{x \in R^n : x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i,\ \lambda_i \in R^+_1,\ i = 1,2,..,m\}$$

9. *Шар*

$$X(x^0, x) = \{x \in R^n : \|x - x^0\| \leq r,\ r \in R^1\}.$$

10. *Афинное множество* - множество, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит прямую, проходящую через эти точки.

$$X_A = \{x \in R^n : x = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2,\ \forall x^1, x^2 \in X_A,\ \alpha \in R^1\}.$$

Пусть $x^1,x^2,..,x^m$ - точки из R^m. Их линейнаякомбинация $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x^i$ называется:

а) *выпуклой*, если $\lambda_i \geq 0, i = 1,2,..,m,\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1;$

б) *неотрицательной*, если $\lambda_i \geq 0, i = 1,2,..,m;$

b) *афинной*, если $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1.$

Выпуклые множества (выпуклый конус, афинное множество) содержат всевозможные выпуклые (неотрицательные, афинные) комбинации своих точек.

2.2.2. Проекция точек на множество. Теоремы отделимости

Проекцией точки $y \in R^n$ на множество $X \subset R^n$ называется точка x_y такая, что расстояние от нее до y не более расстояния до y любой другой точки

$$x \in X : \| x_y - x \| \leq \| x - y \|,\ \forall x \in X \Rightarrow$$

$$\| x_y - x \| = \min_{x \in X} \| x_y - x \|$$

Очевидно, что $x_y = y$, если $y \in X$; если же $y \notin X$ и X открыто, то x_y не существует; если X замкнуто, но не выпукло, то у точки y могут быть несколько проекций на X.

Нахождение проекции точки на множество является весьма сложной задачей. Наиболее просто она решается для таких множеств как: параллелепипед, ортант, гиперплоскость, сфера, шар.

Формулы для вычисления проекций точки x^0 на некоторые множества X.

1. $X = \{x \in R^n: \| x - x^0 \| = r\}$ - сфера, $x_y = x^0 + \frac{(y - x^0)r}{\| y - x^0 \|}$

2. $X = \{x \in R^n: \| x - x^0 \| \leq r\}$ - шар,

$$x_y = \begin{cases} y, & \text{если } y \in X. \\ x^0 + \frac{(y - x^0)r}{\| y - x^0 \|}, & \text{если } y \notin X. \end{cases}$$

3. $X = \{x \in R^n: a \leq x \leq b, i = \overline{1,m}\}$ - параллелепипед,

$$(x_y)_i = \begin{cases} y_i, & \text{если } a_i \leq x \leq b_i, \\ a_i, & \text{если } y_i \leq a_i, \\ b_i, & \text{если } y_i > b_i. \end{cases}$$

4. $X = R = \{ x \in R^n: x \geq 0, i = \overline{1,m}\}$ - положительный ортант,

$$(x_y)_i = \begin{cases} y_i, & \text{если } y_i \geq 0, \\ 0, & \text{если } y_i < 0. \end{cases}$$

5. $H_{pa} = \{x \in R^n: (p,x) = a, p \in R^n, a \in R^1\}$ - гиперплоскость,

$$x_y = y + \frac{p[a - (p,y)]}{(p,p)}.$$

2.2.3. Отделимость множеств

Непустые множества $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$ из $\mathbf{R^n}$

а) *отделимы*, если существует ненулевой вектор $\mathbf{p} \in \mathbf{R^n}$ и число $\mathbf{a}$ такое, что $\mathbf{p^T x^1 \geq a}$, $\mathbf{p^T x^2 \leq a}, \forall \mathbf{x^1} \in \mathbf{X_1}$ и $\forall \mathbf{x^2} \in \mathbf{X_2}$; кроме того, если $\mathbf{X_1} \cup \mathbf{X_2} \not\subset \mathbf{H_{pa}}$, то $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$ называются *собственно отделимыми*;

б) *строго отделимыми*, если существуют $\mathbf{p}$ и $\mathbf{a}$ такие, что $\mathbf{p^T x^1 > a}, \mathbf{p^T x^2 \leq a}, \quad \forall \mathbf{x^1} \in \mathbf{X_1}$ **и** $\forall \mathbf{x^2} \in \mathbf{X_2}$.

в) *сильно отделимыми*, если существуют $\mathbf{p}$ и $\mathbf{a}$ такие, что

$$\inf_{x^1 \in X_1} \mathbf{p^T x^1 > a >} \sup_{x^2 \in X_2} \mathbf{p^T x^2}, \forall \mathbf{x^1} \in \mathbf{X_1}, \forall \mathbf{x^2} \in \mathbf{X_2}.$$

Гиперплоскость $\mathbf{H = \{x \in R^n : p^T x = a\}}$ называется, *разделяющей (собственно разделяющей, строго разделяющей, сильно разделяющей)***.**

Если $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$ -непустые выпуклые множества в $\mathbf{R^n}$ такие, что $\mathbf{X_1 \cap X_2 = \varnothing}$, тогда существует гиперплоскость $\mathbf{H_{pa}}$,строго разделяющая $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$, т.е. существует такой ненулевой вектор $\mathbf{p} \in \mathbf{R^n}$, что

$$\mathbf{\inf \{ p^T x : x \in X_1 \} \leq \sup \{ p^T x : x \in X_2 \}.}$$

Расстоянием между двумя множествами $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$ называется

$$\rho(\mathbf{X_1, X_2}) = \mathbf{\inf \| x^1 - x^2 \|}, \mathbf{x^1 \in X_1, x^2 \in X_2}.$$

Выпуклые множества сильно отделимы, если расстояния между ними положительно.

Отделимость множеств $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$ означает, что их можно поместить в разные полупространства, порождаемые гиперплоскостью $\mathbf{H_{pa}}$ (рис.3а-д). Причем $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$ могут касаться друг друга и гиперплоскости $\mathbf{H_{pa}}$.

Ясно, что непересекающиеся или имеющую одну точку касания выпуклые множества всегда отделимы. Для произвольных множеств подобное утверждение несправедливо (рис.3е).

Выпуклые множества $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$ собственно отделимы тогда и только тогда, когда их внутренности не пересекаются (рис.3а-г).

При собственной отделимости исключается вырожденный случай, когда оба множества лежат на разделяющей их гиперплоскости (рис.3д).

Строгая отделимость означает, что $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$ лежат в разных полупространствах ($\mathbf{H^+_{pa}}, \mathbf{H^-_{pa}}$) и не могут пересекаться (рис.3в), а сильная отделимость - нахождение $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$ на положительном расстоянии от разделяющей их гиперплоскости и, как следствие, друг от друга (рис.3а).

2.2.4. Разделение выпуклого множества и точки.

. Пусть $\mathbf{X}$ - непустое замкнутое выпуклое множество из $\mathbf{R^n}$ и $\mathbf{y} \notin \mathbf{X}$. Тогда $\mathbf{X}$ и $\mathbf{y}$

сильно отделимы, т.е. существуют такой ненулевой вектор $\mathbf{p}$ и скаляр $\mathbf{a}$, что $\inf_{x \in X} \mathbf{p^T x > a > p^T y}$.

Отсюда следует, что существуют:

- гиперплоскость, строго разделяющая $\mathbf{y}$ и $\mathbf{X}$;

- гиперплоскость, сильно разделяющая **y** и **X**;
- вектор $\mathbf{p_2}$ такой, что $\mathbf{p_2^T y > sup\{p_2^T x\}, x \in X;}$
- вектор $\mathbf{p_3}$ такой, что $\mathbf{p_3^T y < inf\{p_3^T x\}, x \in X.}$

Если $\mathbf{X \subset R}$ - непустое выпуклое множество и $\mathbf{\bar{x} \in \partial X}$, где $\partial\mathbf{X} = \mathbf{\bar{X} \backslash intX}$ - граница множества **X**. Гиперплоскость $\mathbf{H_{Q\beta} = \{x \in R^n\text{: } p^T x = \beta\}}$ называется *опорной* к **X** в точке $\mathbf{\bar{x}}$, если $\mathbf{\bar{x}}$ лежит в $\mathbf{H_{Q\beta}}$, а **X** либо в $\mathbf{H_{Q\beta}}^+$, т.е. $\mathbf{p^T(x - \bar{x}) \geq 0}$, либо в $\mathbf{H_{Q\beta}}^-$, т.е.

$\mathbf{p^T(x - \bar{x}) \leq 0}$ (рис.4а,б,в). Если к тому же $\mathbf{X \not\subset H_{Q\beta}}$, то гиперплоскость называется *собственно опорной* (рис.4а,б).

В любой граничной точке выпуклого множества существует опорная гиперплоскость.

Теорема Фаркаша. Пусть **A** - матрица размера **m x n,**
$\mathbf{c \in R^b}$, тогда имеет место решение только одной из систем

$$\mathbf{Ax \leq 0,\ c^T x > 0,\ x \in R^n; \quad (1)}$$

$$\mathbf{A^T y \geq c,\ y \geq 0,\ y \in R^m. \quad (2)}$$

2.2.5. Выпуклые функции.

Пусть $\mathbf{f\text{: } X \to R^1}$, где **X** - непустое,выпуклое множество в $\mathbf{R^n}$.
Функция **f(x)** называется

1) *выпуклой,* если

$$f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1- \lambda)f(x^2),$$
$$\forall x^1,x^2 \in X.\ \forall\lambda \in [0,1];$$

2) *строго выпуклой*, если

$$\mathbf{f(\lambda x^1 +(1- \lambda)x^2) < \lambda f(x^1)+(1- \lambda)f(x^2),}$$
$$\mathbf{\forall x^1,x^2 \in X;\ x^1 \neq x^2 ,\ \forall\lambda \in [0,1].}$$

3) *сильно выпуклой с константой*, если

$$\mathbf{f(\lambda x^1 +(1- \lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1)+(1- \lambda)f(x^2) - \theta\lambda(1- \lambda)\| x^1 - x^2 \|^2,}$$
$$\mathbf{\forall x^1,x^2 \in X,\ \forall\lambda \in [0,1].}$$

Вогнутость (строгая вогнутость, сильная вогнутость) **f(x)** определяется аналогично. Для этого в приведенных выше соотношениях знаки > (≥) меняются на < (≤). Или же, другими словами, функция **f(x),** определенная на выпуклом множестве **X** называется строго (сильно) вогнутой, если функция **-f(x)** строго, (сильно) выпукла на **X**.

Очевидно, что сильно выпуклая функция является строго выпуклой и выпуклой. Обратное неверно.

Свойства выпуклых функций.

1. Выпуклая функция **f(x),** заданная на $\mathbf{R^n}$, непрерывна в каждой точке и имеет производную по всем направлениям **h**, т.е. существует предел

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda}$$

2. Выпуклая функция **f(x),** заданная на выпуклом множестве $X \subset R^n$ непрерывна в любой точке $x^* \in riX$.

Если $x^* \in riX$ **и** $h \in LinX$, то

а) функция $\varphi(\lambda) = \frac{f(x^* + \lambda h) - f(x^*)}{\lambda}$

монотонно не убывает и ограничена снизу на множестве

$A = \{\lambda > 0: x^* + \lambda h \in X);$

б) производная по направлению $f'_c(x,h) = \lim_{\lambda \to 0_+} \varphi(\lambda)$ существует, конечна и $f'_c(x,h) \le \varphi(\lambda)$

Здесь

riX - относительная внутренность множества **X**, т.е. совокупность всех относительно внутренних точек.

Точка $x \in X \subset R^n$ называется относительно внутренней точкой, если $U_\varepsilon(x) \cap aff\,X \subset X$ при некотором $\varepsilon > 0$. Очевидно, что, если $intX \neq 0$, то $riX = intX$, где $intX = \{x \in R^n: U_\varepsilon(x) \subset X$ *при некотором* $\varepsilon > 0\}$ - внутренность множества **X;**

LinX - линейное подпространство, параллельное афинной оболочке множества X, называется **параллельным X**,

$LinX - x = affX - x^0$, где x^0 -любая точка из **X**.

3. Если **X** - выпуклое множество, а **f(x)-** выпуклая функция, то в задаче $f(x) \to \min_{x \in X}$ любое локальное решение (если оно существует), является *глобальным***.**

4. Пусть функция **f(x)** выпукла на R^n и дифференцируема в точке $x^* \in R^n$ **и** $f'(x^*) = 0$. Тогда x^*-точка минимума **f(x)**на R^n (т.е. необходимые условия минимума являются и достаточными).

5. Пусть **X** - выпуклое множество, а **f(x)**- выпуклая функция на **X** и задача $f(x) \to \min_{x \in X}$ имеет решение.

Тогда $X^* = Arg\min_{x \in X} f(x)$ выпукло. Если, при этом, **f(x)** строго выпукла, то X^* состоит из одной точки.

6. Пусть **f(x)** - выпуклая функция на выпуклом множестве **X**. Тогда справедливо неравенство Йенсена

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i\right) \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x^i)$$

при всех $\mathbf{m = 1,2,...;\ x^i \in X,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1}$, $\lambda_i \geq 0$, $\mathbf{i = 1,2, .., m}$.

2.2.6. Дифференциальные критерии выпуклости функций.

. Если $\mathbf{f(x)}$-дифференцируемая функция на выпуклом множестве $\mathbf{X \subseteq R}$. Тогда $\mathbf{f(x)}$:

1) выпукла в том и только в том случае, если

$\mathbf{f(x) - f(x^*) \geq (f'(x^*, x - x^*), \forall x, x^* \in X;}$

2) строго выпукла в том и только в том случае, если $\mathbf{f(x) - f(x^*) > (f'(x\ ), x - x^*), \forall x, x^* \in X, x \neq x;}$

3) сильно выпукла с константой $\boldsymbol{\theta > 0}$ в том и только в том случае, если

$$\mathbf{f(x) - f(x^*) \geq (f'(x', x - x^*) + \theta \| x^1 - x^2 \|^2, \forall x, x^* \in X.}$$

Следствие. Если $\mathbf{f(x)}$ выпуклая функция на выпуклом множестве $\mathbf{X \subseteq R^n}$ и дифференцируема в точке $\mathbf{x^* \in X}$.

Тогда $\mathbf{f(x) - f(x^*) \geq (f'(x^*), x - x^*), \forall x \in X.}$

Заметим, что линейная функция

$$\mathbf{l(x) = f(x^*) + (f'(x^*), x - x^*)}$$

образует касательную гиперплоскость к функции $\mathbf{f(x)}$ в точке $\mathbf{(x^*, f(x^*)}$. Поэтому выпуклость $\mathbf{f(x)}$ означает, что $\mathbf{f(x)}$ лежит не ниже касательной гиперплоскости.

Если $\mathbf{f(x)}$ непрерывно-дифференцируемая функция на выпукло множестве $\mathbf{X \subseteq R}$. Тогда $\mathbf{f(x)}$:

1) выпукла в том и только в том случае, если

$$\mathbf{(f'(x) - f'(x^*), x - x^*) \geq 0, \forall x, x^* \in X;}$$

2) строго выпукла в том и только в том случае, если

$$\mathbf{(f'(x) - f'(x^*), x - x^*) > 0, \forall x, x^* \in X, x \neq x^*;}$$

3) сильно выпукла с константой $\boldsymbol{\theta > 0}$ в том и только в том случае, если

$$\mathbf{(f'(x) - f'(x^*), x - x^*) \geq 2\theta \| x^1 - x^2 \|^2, \forall x, x^* \in X.}$$

Если $\mathbf{f(x)}$ дважды дифференцируемая функция на выпуклом множестве $\mathbf{X \subseteq \forall\ R^n}$, причем $\mathbf{intX \neq 0}$. Тогда $\mathbf{f(x)}$:

1) выпукла в том и только в том случае, если

$$\mathbf{(f''(x)h, h) \geq 0, \forall x \in X, \forall h \in R^n;}$$

2) строго выпукла, если

$$\mathbf{(f''(x)h, h) > 0,\ \forall x \in X, \forall h \in R^n; h \neq 0.}$$

3) сильно выпукла с константой $\boldsymbol{\theta > 0}$ в том и только в том случае, если

$$\mathbf{(f''(x)h, h) \geq 2\theta (h, h),\ \forall x \in X,\ h \in R^n.}$$

Заметим, что для строго выпуклых функций в теореме 3.13 сформулировано лишь достаточное условие, т.к. необходимое условие не выполняется (см. $\mathbf{f(x) = x^4, x \in R^1}$).

2.2.7. Субградиент и субдифференциал выпуклой функции.

Выпуклые функции являются непрерывными и имеют производные по всем направлениям во внутренних точках области определения. В то же время частные производные, а значит и градиент выпуклой функции, могут не существовать.

В выпуклом анализе введены понятия субградиента и субдифференциала (множества субградиентов), заменяющие в широком круге вопросов понятие градиента и сводящиеся к нему, если функция дифференцируема. Эти обобщения градиента используются в теории оптимизации негладких выпуклых задач, а также при построении численных алгоритмов их решения.

. Пусть функция $\mathbf{f(x)}$ задана на множестве $\mathbf{X \subset R^n}$. Вектор $\mathbf{a \in R^n}$ называется субградиентом в точке $\mathbf{x^* \in X}$, если $\mathbf{f(x) - f(x^*) > (a,x-x^*)}$, $\mathbf{\forall x \in X.}$ **(3)**

Множество всех субградиентов функции в точке $\mathbf{x^* \in X}$ называется субдифференциалом $\mathbf{\partial f(x^*)}$.

Соотношение (3) означает, что график

$\mathbf{G_f = \{(x,\beta) \in X \in R^1: f(x) = \beta\}}$ функции $\mathbf{f(x)}$ лежит не ниже графика $\mathbf{H = \{(x,\beta) \in R^n \times R^1: l(x) = \beta\}}$ линейной функции $\mathbf{l(x)=f(x^*)+(a,x-x^*)}$, где $\mathbf{H}$ - опорная гиперплоскость к графику $\mathbf{f(x)}$в точке$\mathbf{(x^*,f(x^*))}$.

Ясно, что $\mathbf{\partial f(x^*) \in [f'_-(x), f'_+(x)]}$, где $\mathbf{f'_-(x)}$ **и** $\mathbf{f'_+(x)}$ –левая и правая производные в точке $\mathbf{x^* \in intX}$.

Свойства субдифференциала выпуклой функции.

1). Если $\mathbf{f(x)}$ выпукла на выпуклом множестве $\mathbf{X \subset R^n}$.

Тогда ее субградиент в любой относительной внутренней точке

$\mathbf{x^* \in riX}$ существует, т.е. $\mathbf{\partial f(x^*) \neq 0}$, при этом $\mathbf{\partial f(x^*)}$ - замкнутое выпуклое множество.

2). Если $\mathbf{f(x)}$ - функция на выпуклом множестве $\mathbf{X \subset R^n}$, и если

$\mathbf{\partial f(x^*) \neq \varnothing}$ при всех $\mathbf{x^* \in X}$, то $\mathbf{f(x)}$ выпукла на $\mathbf{X}$.

3). Если $\mathbf{f(x)}$ - выпуклая функция на выпуклом множестве

$\mathbf{X \subset R^n}$ и $\mathbf{x^* \in riX}$.

Тогда $\mathbf{\partial f(x^*) = \{a \in R^n: f'_c(x^*,h) \geq (a,h), \ \forall h \in LinX\}}$,

$$\mathbf{f'_c(x^*,h) = \max_{a \in \partial(x)} (a,h), \ \forall h \in LinX.}$$

4). Еcди $\mathbf{f(X)}$ - выпуклая функция на выпуклом множестве

$\mathbf{X \subset R^n}$ и $\mathbf{x \in intX}$. Тогда:

а) если $\mathbf{f(x)}$ дифференцируема в точке $\mathbf{x^*}$, то $\mathbf{\partial f(x^*)=f'(x^*)}$,

т.е. $\mathbf{f'(x^*)}$ - единственный элемент $\partial\mathbf{f(x^*)}$;
б) если $\partial\mathbf{f(x^*)} = \mathbf{a}$, т.е. состоит только из одного субградиента, то $\mathbf{f(x^*)}$ дифференцируема в точке $\mathbf{x^*}$ и $\mathbf{f'(x^*)=a}$.

3. Методы оптимизации

3.1. Постановка задач оптимизации

Экстремальные (оптимизационные) задачи - задачи поиска максимального или минимального значения некоторой функции привлекали математиков с давних пор и играли важную роль в истории математики. В их решении принимали крупнейшие ученые прошлых лет - Евклид, Архимед. Аполлоний, Герон, Торичелли, Иоганн и Якоб Бернулли, Ньютон, Гаусс и многие другие.

Древнейшей (IV в. до н.э.) из известных экстремальных задач является, по-видимому, классическая изопериметрическая задача, которую можно сформулировать в виде следующей экстремальной задачи: среди плоских замкнутых кривых, имеющих заданную длину, найти кривую, охватывающую наибольшую площадь и среди пространственных замкнутых поверхностей, имеющих заданную площадь, найти поверхность, охватывающую наибольший объем. Использование идей этой задачи содержится и легенде о Дидоне.

Одна из .задач на максимум содержится в «Началах» Евклида.

До XVII столетия не было выработано общих принципов решения экстремальных задач, и каждая из них решалась специально для нее разработанным приемом. В 1615 г в книге «Новая стереометрия винных бочек» И.Кеплер дал первые общие правила решения экстремальных задач В дальнейшем экстремальные задачи являлись предметом внимания многих выдающихся математиков. Исследования Ферма, Ньютона, Лейбница способствовали появлению единого способа отыскания экстремума

Примерно 300 лет назад выяснилось, что некоторые оптимизационные задачи играют очень важную роль в естествознании, а именно, что многие законы природы допускают их вывод из вариационных принципов, что способствовало интенсивному развитию вариационного исчисления. Формулировка первого вариационного принципа для физической проблемы (1638 г.) связана с именем Ферма.

Постановка оптимизационных задач Х.Гюйгнеса, И.Ньютона, И.Бернулли, идеи и методы Ж.Лагранжа, Л.Эйлера, К.Вейерштрасса, К.Гаусса были развиты в работах математиков XVIII – XX столетий Новые задачи особенно в области экономики и техники последовательно выдвигали новые проблемы, для решения которых требовалось дальнейшее развитие математики. Получили развитие новые разделы математики, в том числе *выпуклый анализ, математическое программирования, теория оптимального управления*.)

Существенный вклад в развитие теории и методов решения задач на экстремум внесли советские математики ,Л.Канторович – (математическое программирование) и Л.Понтрягин (принцип максимума, 1950-1960).

Формализации экстремальной задачи может быть представлена в следующем виде

Задачами на экстремум или задачами оптимизации называются задачи отыскания минимума **(**или максимума) функции **f(x***)* (целевой функции)***,*** определенной на множестве **X** (допустимом множестве), лежащем в ***n***– мерном Евклидовом пространстве

$\mathbf{min\ f(x);\quad x \in X,\ X \subseteq R^n.}$ Причем $\mathbf{max\ f(x) = -\min(-f(x)).}$

В зависимости от вида целевой функции и допустимого множества задачи оптимизации делятся на: *1). Задачи безусловной оптимизации:* $\mathbf{f(x)} \to \min$, $\mathbf{x \in R^n}$; *2). Задачи условной оптимизации*: $\mathbf{f(x)} \to \min$, $\mathbf{x \in X, X \subset R^n}$, т.е. **X** — *подмножество пространства* $\mathbf{R^n}$

В свою очередь имеет место следующая классификация задач условной оптимизации.

а) ***Классическая задача на условный экстремум***. Допустимое множество **X** — задано системой конечного числа равенств:

$$X = \{x \in R^n : g_i(x) = 0, i = \overline{1,m}\}.$$

Задача математического программирования. **X** — задано системой конечного числа равенств и неравенств:
$\mathbf{X = \{x \in R^n : g_i(x) \le 0, i = \overline{1,k}, g_i(x) = 0, i = \overline{k+1,m}\}}$

Среди задач математического программирования выделяют:

а₁). *Задачи выпуклого программирования:* **f(x***)* — выпуклая функция на **X**; **X** — выпуклое множество, заданное ограничениями–неравенствами (выпуклыми функциями) и ограничениями–равенствами (линейными функциями).

а₂) *Задачи линейного программирования**:*** **f(x***)* — линейная функция; **X** — множество, заданное линейными ограничениями (равенствами и неравенствами).

а₃). *Задачи дискретного программирования*. Допустимое множество **X** дискретно (не связно) или некоторые из координат $\mathbf{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ принимают дискретные значения на числовой оси. Если все координаты принимают только целые значения, имеет место задача целочисленного программирования. Если все координаты принимают только два значения **0** и **1**, $\mathbf{x_j \in (0;1)}$, $\forall j$, то имеет место задача *с булевыми переменными.*

В этих задачах могут быть и прямые ограничения вида $\mathbf{x_j \ge 0}$.

Математическое программирование является один из наиболее активно развивающихся разделов прикладной математики. Причиной этому является многообразие его приложений в различных областях науки и техники:

численном анализе, исследовании операций, системах автоматического и автоматизированного управления, оптимальном планировании и управлении сложными техническими и экономическими системами и др.

В развитие математического программирования большой вклад внесли Данцинг (ввел термин «линейное программирование» - 1949 г., ему принадлежит фундаментальный труд по линейному программированию - 1963 г.) Л.Кантарович (линейное программирование в экономических задачах), Кун и Таккер (изучение нелинейных систем оптимизации без и с ограничениями –1954 г.), Гомори (целочисленное программирование – 1958 г.), Беллман (динамическое программирование 1957 г.), Зангвилл (общая теория сходимости 1969 г.), Ласдон (теория двойственности и не дифференцируемой оптимизации в методах разложения – 1970 г.), Лавлер (комбинаторная оптимизация –1976 г.).

б) Задачи оптимального управления.

Это задачи оптимизации управления некоторой динамической системой, что связано с минимизацией определенного функционала, заданного на возможных допустимых траекториях движения системы. Обычно имеют место ограничения на вид дифференциальных уравнений, описывающих динамику системы, фазовые ограничения (ограничения на значения фазовых координат системы), ограничения на вид управлений, а также задаются начальные и конечные значения фазовых координат системы. При минимизации значения функционала определяется наилучшая (оптимальная) в определенном смысле траектория движения системы.

3.2. Экстремум в задачах безусловной оптимизации

Необходимые и достаточные условия экстремума функции определяются следующими теоремами.

Теорема 1. Для того, чтобы дифференцируемая функция ***n*** переменных $\mathbf{f(x)}$ имела в точке $\mathbf{x^* = (x_1^*, x_2^* ..., x_n^*)}$ безусловный локальный экстремум, необходимо, чтобы все ее частные производные в этой точке обращались в нуль, т.е. $\mathbf{x^*}$ должна быть *стационарной точкой*.

$$\mathbf{\partial f / \partial x_i (x) = 0, \forall i \in (1,n), x = x^*; i = 1,2,...,n}$$

Условие *стационарности* записывается и в виде: $\mathbf{grad f(x^*) = \nabla f(x^*) = f'(x^*) = 0}$

Теорема 2. Для того чтобы дважды дифференцируемая функция ***n*** переменных $\mathbf{f(x)}$ имела в стационарной точке $\mathbf{x^* = (x_1^*, x_2^* ..., x_n^*)}$ безусловный локальный минимум (максимум) необходимо, чтобы матрица вторых производных функции — матрица Гессе была в точке $\mathbf{x^*}$ неотрицательно определенной (неположительно - для случая максимума), и необходимо и достаточно, чтобы эта матрица была положительно определенной (отрицательно - для случая максимума). Матрица Гессе положительно определена, если в эквивалентной верхней треугольной матрице все диагональные члены больше нуля, и отрицательно определена, если все диагональные члены меньше нуля, (существуют и другие критерии).

С вычислительной точки зрения задача безусловной оптимизации действительной функции многих переменных, определенной на Евклидовом пространстве, сводится к решению системы линейных уравнений и анализу матрицы Гессе.

3.3. Численные методы безусловной оптимизации

Численный метод (алгоритм решения задачи оптимизации основан на точном или приближенном вычислении характеристик задачи (значения целевой функции, функций, задающих допустимое множество, и производных этих функций). На основании полученной информации строится последовательное приближение к решению искомой задачи – точке минимума $\mathbf{x}^*$(к множеству точек минимума, если минимум не единственный). Иногда строится приближение к минимальному значению целевой функции $\mathbf{f}^* = \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Конкретный выбор метода решения зависит от свойств минимизируемой функции.

В численных методах решения задач минимизации используются положения вычислительной математики, изложенные выше в п. 4.2.

Алгоритмы, использующие только информацию о значении минимизируемой функции называются алгоритмами *нулевого порядка*; алгоритмы, использующие также информацию о значениях первых производных, - алгоритмами *первого порядка*, Соответственно, определяются алгоритмы ***k**-го порядка*

Алгоритм включает два этапа: на первом этапе вычисляются, предусмотренные алгоритмом характеристики задачи, на втором этапе строится приближение задачи, т.е. в соответствии с выбранным алгоритмом определяется способ выбора точек вычисления. В алгоритмах минимизации, называемых *пассивными*, точки вычисления выбираются до начала вычислений Для решения большинства задач выбираются *активные* алгоритмы с поочередным выбором (на каждом **k**-ом шаге решения задачи) точек вычисления с учетом значений ранее выбранных (на предыдущем шаге) точек $\mathbf{x}_i$ и найденных результатов вычислений – $\mathbf{y}^k$: $\mathbf{x}^{k+1} = \xi^{k+1}(\mathbf{x}^1,\ldots, \mathbf{x}^k, \mathbf{y}^1,\ldots, \mathbf{y}^k)$

Формула для очередной точки вычисления $\mathbf{x}^{k+1}$ в методах минимизации обычно записывается в виде: $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{h}^k$, $\alpha_k \in R$, $\mathbf{k} = 0, 1, 2, \ldots$

Вектор $\mathbf{h}^k$ определяет направление (k+1)-го шага минимизации, а коэффициент α_k– длину шага.

Среди методов минимизации выделяют *конечно-шаговые* и *бесконечно-шаговые.* Для последних решение достигается лишь в пределе, их важной характеристикой является *сходимость*. Эффективность сходящегося метода характеризуется с помощью понятия *скорости сходимости*

Конкретный алгоритм определяется зданием точки $\boldsymbol{x^0}$*, правилом выбора на основе полученной в результате вычислений информации вектора* $\boldsymbol{h^k}$ *и числа* $\boldsymbol{\alpha_k}$*, а также указанием относительно условий остановки (критерия окончания счета).*

А. Градиентный метод.

В градиентном методе h^k берется равным антиградиенту функции $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x^k}$, т.е. $\mathbf{x^{k+1} = x^k - \alpha_k f' (x^k)}$. Если длина шага выбирается из условия минимизации функции вдоль вектора антиградиента, будет имеет место метод *наискорейшего спуска*. В другом варианте градиентного метода выбор длины шага осуществляется с помощью так называемого метода дробления.

В случае, когда минимизируемся функция $\mathbf{f}$ не является выпуклой, градиентный метод может лишь обеспечить сходимость к множеству стационарных точек функции. Если уровни функции $\mathbf{f}$ имеют овражную структуру сходимость метода замедляется. Чтобы избежать этого приходится прибегать к различным эвристическим методам, изменять масштабы переменных, переходить к овражному методу. Другой недостаток градиентного метода – чувствительность к погрешностям вычисления, особенно в окрестностях точки минимума.

Б. Метод Ньютона

В методе Ньютона $\mathbf{x^{k+1} = x^k + h^k}$, $\mathbf{h^k = -(f''(x^k))^{-1} \cdot f'(x^k)}$

Данное соотношение совпадает с методом Ньютона решения системы уравнений $\mathbf{f'(x) = 0}$.

Метод Ньютона сходится к точке минимума с квадратичной скоростью, но лишь при хорошем начальном приближении. Разработаны многочисленные модификации метода Ньютона, направленные на то, чтобы, сохраняя основное достоинства метода – его быструю сходимость, уменьшить трудоемкость и ослабить требования к выбору начальной точки. Такими модификациями являются *метод Ньютона с регулировкой длины шага* и *квазиньютоновские методы*.

В. Метод сопряженных градиентов

Векторы направлений $\mathbf{h^0, h^1, \ldots, h^k}$ называются взаимно сопряженными (относительно матрицы $\mathbf{A}$),

если все они отличны от нуля и $(\mathbf{Ah^i}, \mathbf{h^j}) = 0,\ i \neq j,$ $\mathbf{i, j \le k}$.

В *методе сопряженных градиентов* взаимно сопряженные направления строятся по правилу:

$$\mathbf{x^{k+1} = x^k + \alpha_k h^k,\ f(x^k + \alpha_k h^k) = \min_{\alpha \ge 0} f(x^k + \alpha h^k),\ k = 0,1,\ldots}$$

$$\mathbf{h_0 = --f'(x^0),\ h^k = --f'(x^k) + \beta_{k-1} h^{k-1},\ \ k \ge 1,}$$

$$\beta_{k-1} = \begin{cases} \dfrac{\left\langle f'(x^k), f'(x^k) - f'(x^{k-1}) \right\rangle}{\left\| f'(x^k) \right\|^2}, & k \notin \{n, 2n, 3n, \ldots\}, \\ 0, & k \notin \{n, 2n, 3n, \ldots\}. \end{cases}$$

В настоящее время построено много различных вариантов метода сопряженных градиентов. Приведен вариант метода с процедурой «обновления», позволяющей уменьшить погрешности одномерных задач при вычислении $\mathbf{x}^{k+1}$.

Метод сопряженных градиентов относится к числу наиболее эффективных методов первого порядка. Он обладает высокой скоростью сходимости при сравнительно небольшой трудоемкости. Метод незначительно уступает квазиньютоновским методам, но предъявляет меньше требований к объему памяти ЭВМ.

3.4. Численные методы одномерной минимизаци

Рассмотрение численных методов поиска экстремума функций одной переменной необходимо ввиду следующих обстоятельств.

1) эти методы используются в алгоритмах поиска экстремума функций, зависящих от многих переменных.

2) Классы функций одной переменной – удобный инструмент для теоретического исследования методов оптимизации.

3) С помощью алгоритмов одномерной минимизации можно иногда получить решение для многомерных задач.

Универсальных методов для анализа минимумов произвольной функции не существует. Для унимодальных функций разработаны следующие алгоритмы одномерной минимизации, отличающиеся правилами деления отрезков и выбором точек для вычисления: алгоритм пассивного поиска минимума, метод дихотомии, метод Фибоначчи, метод золотого сечения.

Метод Фибоначчи в определенном смысле оптимален. Однако при большом числе вычислений длина отрезка локализации минимума в методе золотого сечения лишь примерно на 17 % больше, чем в методе Фибоначчи В то же время существенным преимуществом метода золотого сечения является возможность прекращения в любой момент процесса вычислений .

3.5. Экстремум в задачах условной оптимизации

Поиск экстремума функции в задачах условной оптимизации значительно сложнее, поскольку искомый экстремум может быть как внутри, так и на границе области определения функции. Важный результат относительно возможности получения решения содержится в *теореме Вейерштрасса*: Пусть $\mathbf{X}$ компакт в $\mathbf{R}^n$, т.е. замкнутое ограниченное множество, $\mathbf{f}$ — непрерывная функция, определенная на $\mathbf{X}$. Тогда точка глобального минимума функции $\mathbf{f}$ на $\mathbf{X}$ существует.

Эффективные алгоритмы поиска экстремума разработаны для специальных классов задач, к которым относятся задачи линейного, квадратичного и выпуклого программирования. Однако существующие алгоритмы не гарантирует от трудностей при решении конкретных задач, сводящихся к моделям выпуклого программирования.

Особое место занимают алгоритмы дискретного программирования, где требования, предъявляемые к целевой функции и области допустимых решений не столь ограничены.

Рассмотрим два простых примера моделей выпуклого программирования.

Пример 1.

$$f(x) = x_1^2 + 6x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 13 \to \min;$$

$$(x_1^2 + x_2^2) \le 4.$$

Здесь областью определения функции — допустимой областью X являются все точки круга радиуса **R = 2** (рис. 4.3а). **Т**очка глобального экстремума **x = (-3, 1),** найденная при снятии ограничения, не является в задаче настоящего примера допустимой. Используя алгоритмы выпуклого программирования, можно найти точку минимума функции. Это будет точка $x^2 = \left(-\frac{3}{5}\sqrt{10}, \frac{1}{5}\sqrt{10}\right)^T$.

Пример 2.

Дополнительно в задаче примера 1 введем еще одно ограничение.

$$f(x) = x_1^2 + 6x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 13 \to \min;$$

$$(x_1^2 + x_2^2) \le 4.$$

$$x_2 - x_1 = 0.$$

Тогда допустимой областью задачи будет отрезок прямой, границами которого будут точки $x^3 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})^T$, $x^4 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})^T$, (рис. 4.3б)

Точкой минимума функции в этом случае будет точка x^4.

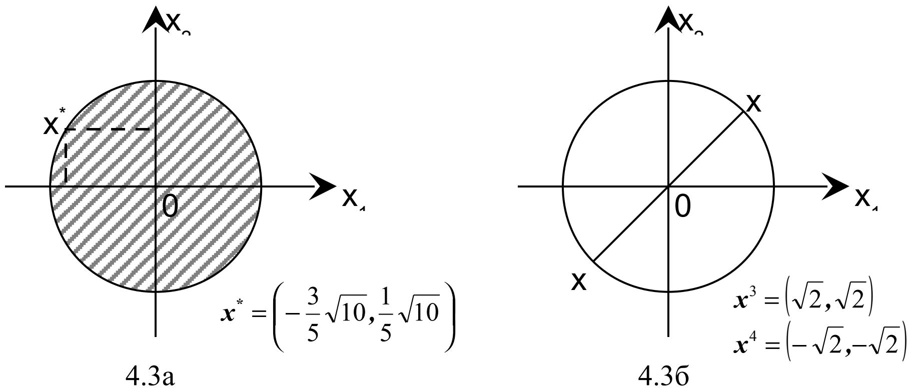

Рис. 4.3

3.6. Классическая задача на условный экстремум

Рассматривается задача:

$$f(x) \to \min, \ \ g_i(x) = 0, \ \ i = 1, \ldots, m.$$

Функция Лагранжа задачи: $L(x, y_0, y) = y_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x),$
$x \in R_n, y_0 \in R, y = (y_1, \ldots, y_m) \in R^m.$

Частные производные этой функции по координатам вектора **x** имеют вид:

$$L'_x(x, y_0, y) = y_0 f'(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g'_i(x), \ \ j = 1, \ldots, n.$$

Решением задачи является стационарная точка- x^* , удовлетворяющая следующим условиям: $L'_x(x^*, y_0^*, y^*) = 0,$
$g_i(x^*) = 0, \ i = 1, \ldots, m.$

Градиенты $g'_1(x^*), \ldots, g'_m(x^*)$ должны быть линейно не зависимы (условие регулярности).

6.1. Общий вид задачи условной оптимизации. Принцип оптимальности Лагранжа

Рассматривается задача математического программирования вида

$$f(x) \to \min,$$
$$g_i(x) \le 0, \ \ i = 1, \ldots, k, \qquad (1)$$
$$g_i(x) = 0, \ \ i = k+1, \ldots, m, \qquad x \in P \subset R^n.$$

Соответственно, допустимое множество задачи можно записать в виде

$$X = \{x \in P \mid g_i(x) \le 0, \ i = 1, \ldots, k; \ g_i(x) = 0, \ i = k+1, \ldots, m\}.$$

Дополнительно введем множество

$$Q = \{y = (y_1, \ldots, y_m) \in R^m \mid y_i \ge 0, \ i = 1, \ldots, k\}$$

Принцип оптимальности Лагранжа. Пусть в задаче (1) множество **P** выпукло, функции $f, g_1, \ldots, g_k$ дифференцируемы в точке $x^* \in X$, функции $g_k, \ldots, g_m$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности x^*. Если x^*. – локальное решение задачи (1), то существуют числа $y_0^* \ge 0$ и вектор $y_* = (y_1^*, \ldots, y_m^*) \in Q$, не равные нулю одновременно и такие, что

$$\langle L'_x(x^*, y_0^*, y^*), x - x* \rangle \ge 0, \forall x \in P, \qquad (2)$$

$$y_i^* g_i(x^*) = 0, \ i = 1, \ldots, k. \qquad (3)$$

Любая точка $x^* \in X$, удовлетворяющая условиям (2), (3) при некотором $y_0^* \ge 0, y^* \in Q, (y_0^*, y^*) \ne 0$ называется *стационарной точкой* задачи (1). Принцип Лагранжа утверждает, что при указанных предположениях любое локально решение задачи (1) является стационарной точкой. Для гарантии обратного необходимо выполнение дополнительных предположений о задаче. Доказывается, что строго локальное решение задачи (1) имеет место, если $\langle L''_{xx}(x^*, y_0^*, y^*)h, h \rangle > 0.$

Любое предположение о задаче (1), обеспечивающее случай $y_0^* = 1$, называют *условием регулярности*, а саму задачу называют *регулярной*. В такой задаче достаточно рассмотреть функцию Лагранжа вида $L(x,\ y) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x)$

Вектором Куна-Таккера называется вектор $y^* \in Q$, задачи (1), если

$$f^* \le f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i^* g_i(x) = L(x, y^*)\ \ \forall x \in P.$$

Здесь $Q = \left\{ y \notin R^m \middle| y_i \ge 0,\ i = 1, \dots, k. \right\}$

Важное значение в теории методов оптимизации играет понятие двойственности. Двойственной к (прямой) задаче (1) называется задача

$\varphi(y) \to \max, \quad y \in Y,$ где 6)

$$\varphi(y) = \inf_{x \in P} L(x, y) = \inf_{x \in P}\left(f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x) \right),$$

$$Y = \left\{ y \in Q \middle| \varphi(y) > -\infty \right\}$$

Полагая $Y \neq \acute{\varnothing}$, обозначим $\varphi^* = \sup_{y \in Y} \varphi(y)$ *-значения* задачи (6).

Прямая и двойственная задача определяется симметрично относительно функции Лагранжа.

$$f^* = \inf_{x \in P} \sup_{y \in Q} L(x, y), \quad \varphi^* = \sup_{y \in Q} \inf_{x \in P} L(x, y).$$

Если значение прямой задачи (1) конечно , в частности , если она имеет решение, то множество двойственной задачи (6) непусто и совпадает с множеством векторов Куна-Таккера задачи (1): $f^*(x) = \varphi^*(y)$.

Вектору Куна_Таккера можно придать различные экономические интерпретации в зависимости от вида исходной задачи и ее трактовки.

3.7 . Численные методы условной оптимизации

а) Методы спуска

Методом проекции градиента решается задача $\mathbf{f(x) \to min,\ \ x \in X}$, где $\mathbf{X}$ – замкнутое выпуклое множество в $\mathbf{R^n}$, $\mathbf{f(x)}$ – дифференцируемая функция.

В методе в качестве очередной точки выбирается проекция на множество $\mathbf{X}$ той точки, которая получается по градиентному методу

$$\mathbf{x^{k+1} = \pi_x(x_k - \alpha_k f'(x^k)),\quad k = 0, 1, 2, \dots}$$

На каждой k-ой итерации метода производится операция проектирования точки на множество $\mathbf{X}$. $\mathbf{\pi_x(a)}$ - проекция точки $\mathbf{a}$ является решением задачи проектирования $\varphi(x) = \|x - a\|^2 \to \min,\ x \in X.$

Проекция легко находится в случае простых выпуклых множеств (например, шар). При задании $\mathbf{X}$ более или менее сложной системы неравенств и равенств метод практически не применим. Если $\mathbf{X}$ – полиэдр, то это задача квадратичного программирования, для решения которой разработаны эффективные численные методы.

Используя идею проектирования, можно модифицировать применительно к задачам условной оптимизации и другие методы безусловной оптимизации, в тои числе метод Ньютона и метод сопряженных направлений.

В общую схему методов спуска вписывается и метод *условного градиента.* Приближения строятся по формуле $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{h}^k$. Выбор α_k и $\mathbf{h}^k$ осуществляется в процессе решения специальных задач. Если $\mathbf{X}$ имеет сложную структуру, то решение оказывается трудным. Метод представляет определенный интерес, поскольку в наиболее простом виде выражает идею линейной аппроксимации функции, играющая важную роль в численных методах оптимизации.

Метод линеаризации базируется на идее линейной аппроксимации целевой функции и ограничений задачи в окрестностях очередной точки В этой части он представляет собой как развитие метода условного градиента, но здесь к линейной аппроксимации целевой функции добавляется квадратичный член, поэтому в качестве вспомогательных выступают задачи квадратичного программирования.

Метод штрафных функций

Возможный подход к решению задач, имеющих сложный вид множества **X,** основанный на учете ограничений путем изменения целевой функции исходной задачи оптимизации, дает так называемый метод *штрафных функций* или *методом штрафов.* Распространенный вариант метода основан на введении *штрафа*, зависящих от *штрафного параметра* и обладающих следующими свойствами: на большей части допустимого множества задачи математического программирования эти функции близки к нулю; каждая из них достаточно быстро возрастает либо при приближении изнутри к границе допустимого множества (*внутренние* или *барьерные* штрафные функции), либо при выходе за его пределы (внешние *штрафные* функции); степень близости штрафа к нулю и скорость его возрастания зависят от значения штрафного параметра и увеличиваются с ростом параметра.

Основная идея метода штрафов заключается в следующем. Функция штрафа добавляется к целевой функции, после чего решается параметрическое семейство получившихся задач без функциональных ограничений. В рамках соответствующих предположений последовательность решения этих задач при неограниченном возрастании штрафного параметра сходится к решению исходной задачи.

3.8. Линейное программирование (ЛП)

В моделях ЛП целевая функция и все ограничения линейны.

Существуют различные эквивалентные формы записи задач ЛП. Возможен переход от одной формы записи задачи ЛП к другой.

Симметричная (стандартная) форма записи задачи ЛП на минимум имеет вид.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min; \ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \ge b_i, \forall i = \overline{1,m}; \ \ x_j \ge 0, \forall j = \overline{1,n}.$$

Та же задача в *матричном* виде: $(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \to \min;$

$\mathbf{Ax \geq b;\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,n}.}$ где:

$\mathbf{x = (x, \dots x_j, \dots, x_n)^T}$ — вектор переменных порядка $\mathbf{n \times 1}$;

$\mathbf{c = (c_1, \dots c_j, \dots, c_n)^T}$ — вектор коэффициентов целевой функции порядка $\mathbf{n \times 1}$;

$\mathbf{b = (b_1, \dots b_i, \dots, b_m)^T}$ — вектор свободных членов порядка $\mathbf{m \times 1}$;

$\mathbf{A = \{ a_{ij} \}}$ — матрица ограничений порядка $\mathbf{m \times n}$.

Областью определения целевой функции в задаче ЛП (допустимой областью, множеством) является полиэдр, грани, ребра и вершины которого определяются в результате пересечения полупространств и гиперплоскостей, заданных ограничениями неравенствами и равенствами.

Целевая функция задачи ЛП является скалярным произведением двух векторов **c** и **x.** Следовательно, равные значения целевая функция будет иметь в точках гиперплоскости, ортогональной вектору коэффициентов целевой функции — **c.**

Необходимым условием наличия экстремума целевой функции в некоторой точке $\mathbf{x}^*$ области допустимых значений является равенство нулю в этой точке всех частных производных функции, т.е. точка $\mathbf{x}^*$ должна быть стационарной. Но целевая функция задачи ЛП стационарных точек не имеет. Поэтому экстремум функции, если он существует, может быть получен только на границе области допустимых решений и задача ЛП может иметь решение только на границе допустимой области: одно - вершину полиэдра или бесчисленное множество - ребро или грань полиэдра. Точка $\boldsymbol{x}$ в вершине полиэдра называется опорным решением задачи ЛП.

Существует насколько алгоритмов решения задачи ЛП. Наиболее распространенным является «симплекс-алгоритм», заключающийся в следующем. По определенному правилу находится одна из вершин полиэдра, затем осуществляется последовательный переход от вершины к вершине до достижении вершины, где выполняется условие экстремума. Возможны три случая. 1) Система ограничений не совместна — область допустимых решений пуста и задача не имеет решения. 2) Область допустимых решений замкнута - задача имеет решение. 3) Область допустимых решений не замкнута - решение существует, если целевая функция ограничена на множестве допустимых решений снизу в задаче на минимум и сверху в задаче на максимум.

4. Алгоритмы дискретного программирования

Задачей дискретного программирования (ДП) называется задача отыскания экстремума (max, min) скалярной функции, заданной на дискретном (несвязном) множестве, т.е. такую задачу математического программирования (МП), у которой на все или на часть переменных, определяющих область допустимых решений, наложено требование дискретности.

Существуют различные классификации математических моделей задач дискретного программирования. Обычно выделяют модели задач с неделимостями; экстремальные комбинаторные задачи; задачи, имеющие определенные особенности целевой функции или области допустимых решений; задачи, сводящиеся к задачам ДП. Эффективность методов повышается, если при разработке алгоритма, реализующего метод, учитывать особенности структуры и функционирования системы.

Запишем задачу МП в виде:

$$\mathbf{extr}\{\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbf{\Omega}\},$$ где:

$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_j,\ldots, \mathbf{x}_n)$ **- n -** мерный вектор;

$\mathbf{f(x)}$ - скалярная функция;

$\mathbf{\Omega}$ - некоторое множество в $\mathbf{R}^n$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$.

Если $\mathbf{\Omega}_k$ - конечное (или счетное) множество или декартово произведение конечного (счетного) множества на множество мощности континуума, то будет иметь место задача ДП. В этом случае условие принадлежности **x** некоторому множеству может быть записано в виде:

$$\mathbf{x}_j \in \mathbf{\Omega}_k, \forall j = \overline{1, n_1};$$

$$\mathbf{x}_j \in \mathbf{\Omega}, \forall j = \overline{1, n}; \quad \Omega \subset \mathbf{R}^n; \qquad \mathbf{n}_1 \le \mathbf{n}. \qquad (2)$$

При $\mathbf{n}_1 < \mathbf{n}$ - имеет место задача частично дискретного программирования.

Если $\mathbf{\Omega}_k$ - множество всех целочисленных векторов, то имеет место: при $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$ задача целочисленного программирования (ЦП); при $\mathbf{n}_1 < \mathbf{n}$ - задача частично целочисленного программирования (ЧЦП).

В наибольшей степени изучены методы решения задач целочисленного и частично-целочисленного линейного программирования (ЦЛП, ЧЦЛП):

$$\mathbf{extrm}\{(\mathbf{c}, \mathbf{x}) : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{x}_j \in \mathbf{\Omega}_1\};$$

Здесь: $\mathbf{\Omega}_1$ - множество всех неотрицательных целых чисел, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_j,\ldots,\mathbf{x}_n)$

Частный случай задач ЦЛП - задачи с булевыми переменными, где в (3) $\mathbf{x}_j \in (\mathbf{0},\mathbf{1}), \forall j = \overline{1, n}$

В ряде задач ЦП требование целочисленности накладывается и на целевую функцию.

При дискретном программировании количество допустимых планов задачи конечно. Простейший алгоритм заключается в последовательном сравнении значения целевой функции для двух допустимых планов, отбрасывании плана с худшим решением, и.т.д. до полного перебора всех допустимых планов. Алгоритм полного перебора оказывается практически непригодным при большом числе допустимых планов, что в реальных задачах обычно имеет место.

Теория дискретного программирования - это в первую очередь теория методов численного решения задач дискретного программирования. Для задач дискретного программирования разработаны эффективные алгоритмы, использующие идею направленного перебора. Доминирующее место в ДП занимают комбинаторные методы. Общая схема комбинаторных методов универсальна, может быть применена непосредственно к исходной естественной формулировке задачи. Вычислительные процессы в комбинаторных методах являются конечными по построению.

В рассматриваемых комбинаторных алгоритмах используются два основных подхода.

1). Производится разбиение множеств допустимых планов на подмножества с одновременным вычислением некоторых числовых функций - оценок каждого подмножеств, обеспечивающих исключение из дальнейшего рассмотрения неперспективных подмножеств, т.е. подмножеств допустимых планов заведомо не содержащих оптимального решения. Исключение не перспективных подмножеств осуществляется с помощью элиминирующего теста путем сравнения оценок множеств с рекордом – найденным значением целевой функции задачи для одного из допустимых планов Процесс разбиения и элиминаций заканчивается после того, как список непроверенных множеств окажется пустым. По мере разбиения множества на подмножества происходит уточнение рекорда. «Последний» рекорд и является оптимальным решением задачи. Этот подход составляет основу метода ветвей и границ (мтода В и Г) и реализован для задач ЦЛП и ЧЦЛП в алгоритме Ленд и Дойг.

2). С целью извлечения оптимального плана из множеств допустимых планов задачи:

- с помощью специально построенной вспомогательной (оценочной) задачи организуется процедура построения планов оценочной задачи по неубыванию (в задаче на минимум) целевой функции этой задачи;

- производится просмотр и оценка каждого элемента последовательности, отсеиваются неперспективные планы, уточняется рекорд:

- процесс просмотра элементов последовательности заканчивается, когда оценка очередного элемента последовательности оказывается больше очередного рекорда, который и является оптимальным решением задачи;

Такой подход реализуется в частности в методе построения последовательности планов.

Несколько общих замечаний. Комбинаторные алгоритмы определяют общую структуру задачи. Конкретный вид алгоритма, его эффективность в значительной мере зависит от вида задачи, ее особенностей и от того, насколько составитель алгоритма сумеет использовать эти особенности в алгоритме. За счет дополнительных условий, умело выбранных вспомогательных функций можно существенно убыстрить процесс решения. Это тем более требуется иметь в виду потому, что при определенных характеристиках исходной информации процесс решения в ряде алгоритмах может свестись к полному перебору. Чтобы избежать подобной ситуации следует ввести в алгоритм дополнительные условия, например, перейти к, так называемому, **ε**-эффективнмому алгоритму. Хорошим примером сказанному является алгоритм метода ветвей и границ в задаче о коммивояжере. При построении алгоритма максимальной степени были использованы особенности задачи. В то же время при определенных характеристиках исходной матрицы затрат этот алгоритм может привести к полному перебору, что можно парировать как раз вводом некоторой величины **ε** в элиминирующий тест.

4.1. Методы отсечения (методы Гомори)

Известны три алгоритма Гомори.

1). 1-ый алгоритм Гомори решения целочисленной задачи ЛП.

2). 2-ой алгоритм Гомори решения частично целочисленной задачи ЛП.

3). Алгоритм Дальтона-Ллевилина решения дискретной задачи ЛП.

. Общая схема методов отсечения заключается в переходе от решения задачи целочисленного (дискретного) линейного программирования (ЦЛП) (“$\mathbf{\Omega^{ц}F}$ – задачи”) к решению последовательности задач линейного программирования (ЛП) – “$\mathbf{\Omega_kF}$ – задач”, **k=0,1,2,…**

$\mathbf{\Omega_0F}$ - задача получается из $\mathbf{\Omega^{ц}F}$ - задачи снятием требования целочисленности (дискретности).

- Каждая последующая **k-**ая задача получается из предыдущей (**k-1)-**ой путем добавления к условиям, определяющим область допустимых решений (**k-1)-**ой задачи, еще одного ограничения, сформированным как *правильные отсечения,* удовлетворяющие условиям линейности, правильности и отсечения

После решения каждой **k-**ой задачи ЛП (**k = 0,1,2, . . .**) проверятся, удовлетворяет ли полученное оптимальное решение условиям исходной $\mathbf{\Omega^{ц}F}$ - задачи. При положительном ответе итерационный процесс решения $\mathbf{\Omega_kF}$ - задач прекращается - полученное оптимальное решение задачи ЛП является и *решением исходной задачи*.

Решение каждой **k-**ой задачи ЛП называется **k-**ой большой итерацией. Доказывается, что при выполнении определенных условий решение исходной задачи будет получено через конечное число итераций. Если задачи ЛП не имеют решения, не имеет решения и исходная задача.

Алгоритмы Гомори можно отнести к алгоритмам, реализующим второй подход к решению задач ДП. Вспомогательной задачейС увеличением размерности задач эффективность методов существенно снижается. В некоторых случаях для практических задач даже небольшой размерности имеет место плохая сходимость алгоритма. В зависимости от точности вычислений может оказаться, что полученное оптимальное решение будет отнесено к не допустимым, т.е. оптимальное решение не будет узнано, что является следствием накопления ошибок округления, принятии целого числа за дробное. После разработкой алгоритмов метода В и Г практическая значимость алгоритмов Гомори упала.

4.2. Венгерский алгоритм

Венгерский алгоритм - один из первых алгоритмов ДП , используемй для решения задач с булевыми переменными (задачи о назначении, транспортные задачи и др.)

В венгерском алгоритме осуществляется переход от поставленной задачи с матрицей **C** к задаче с эквивалентной матрицей **D,** к которой предъявляются следующие требования:

- эта матрица должна быть матрицей задачи на минимум;

- матрица должна содержать только неотрицательные элементы и в каждой строке и столбце хотя бы один нуль.

В этом случае исходная задача сведется к выбору в матрице **n**-нулевых элементов, по одному в каждой строке и столбце, т.е. полного правильного (по одному в каждой строчке-столбце) набора нулей.

Использовать венгерский алгоритм в задачах большой размерности не рекомендуется.

4.3. Методы ветвей и границ

В основу алгоритмов метода ветвей и границ (*метод В и Г*) положено разбиение множеств на подмножества (ветвление множеств), анализ подмножеств (определение границ) и исключение из дальнейшего рассмотрения тех подмножеств, в которых заведомо не содержится оптимальное решение.

Метод является нерегулярным, т.е. при решении конкретной задачи (класса задач) существенное значение имеет изобретательность автора алгоритма, умение использовать особенности этой задачи. Алгоритм метода В и Г, разработанный для решения определенного класса задач, может в отдельных задачах свестись к полному перебору. В то же время большим достоинством метода В и Г является универсальность, простота реализации на ЭВМ. Общим для алгоритмов метода В и Г являются понятия ветвление и вычисление границ.

Методом ветвей и границ для решения задачи дискретного программирования назовем алгоритм ветвления множеств $\mathbf{\Omega_i}$ и связанную с ним систему оценок множеств $\boldsymbol{\gamma}$**,** удовлетворяющую в задачах минимизации следующим условиям.

1. Оценка любого подмножества, полученного при ветвлении, не больше минимального значения целевой функции **f** на этом подмножестве

$$\boldsymbol{\gamma(\Omega_i) \le f(\bar{x}), \forall x \in \Omega_i}.$$

2. Для любого множества $\mathbf{\Omega_l}$**,** полученного при ветвлении, его оценка не меньше оценки того множества $\mathbf{\Omega_i}$ **,** разбиением которого оно получено, т.е.

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{\Omega_i}) \le \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{\Omega_l}) \text{ для всех } \mathbf{\Omega_l} \in \boldsymbol{\beta}\ \mathbf{\Omega_i}).$$

3. Оценка множества, состоящего из одной точки, равна значению функции в этой точке**:** $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{\Omega_i}) = \mathbf{f(x_i)}$ **,** если $|\mathbf{\Omega_i}| = \mathbf{1}$, т.е. $\mathbf{\Omega_i = x_i}$ **.**

Оценки $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{\Omega_i})$ в задачах минимизации являются ***нижними границами*** для значений функции **f(x)** на оцениваемом множестве $\mathbf{\Omega_i}$ **.**

В задачах максимизации для функции $\boldsymbol{\gamma}$ необходимо заменить в условии (1) "не больше" на "не меньше" и в (2) - "не меньше" на "не больше". Соответственно, получаемые оценки будут ***верхними границами.***

При выборе способа вычисления $\gamma(\Omega_i)$ желательно, чтобы он был прост, а с другой стороны, чтобы $\gamma(\Omega_i)$ была по возможности ближе к оптимальному значению $f(x)$, $x \in \Omega$. В большинстве случаев эти желания взаимоисключающие.

Для вычисления $\gamma(\Omega_i)$, как правило, строится и решается некоторая оптимизационная задача простой структуры, являющаяся оценочной для задачи $\min\{f(x): x \in \Omega$ и удовлетворяющая заданным требованиям для γ. Оценочная задача может быть получена исключением некоторых условий, задающих Ω, например, условий целочисленности переменных или заменой "плохой" целевой функции на "хорошую".

Кроме нижней границы (оценки) в задаче минимизации вычисляется рекорд для оптимального значения функции $f(x)$ на Ω. Рекордом называется функция $f^*(H_k)$, определенная для любой совокупности (списка) H_k подмножеств Ω_i и удовлетворяющая таким соотношениям:

а) $f^*(H_k) \geq \min\{f(x): x \in \Omega\}$; б) $f^*(H_k) \leq f(x_i)$, **если** $\Omega_i = x_i \subset H_k$.

Условие б) гарантирует, что $f^*(H_k)$ не больше значений целевой функции при наилучшем допустимом решении, отвечающем висящей вершине x_i на H_k.

Допустимое решение x^*, обладающее этими свойствами $f(x^*) = f^*(H_k)$ называется *рекордным решением*.

В задачах на максимум при определении рекорда необходимо в а) и б) заменить знаки неравенства на обратные и "min" на "max".

Рекорд характеризует приближение к оптимальному решению. Очень важно удачно выбрать начальное рекордное решение x, что можно сделать с помощью приближенных методов решения исходной задачи.

В *методе В и Г* в процессе последовательного ветвления множества Ω *исключаются* те подмножества $\Omega_i \in H_k$, о которых стало известно, что они не содержат допустимых решений, лучше рекордного. Исключение осуществляется с помощью элиминирующего теста, основанного на вычислении оценок.

Основной элиминирующий тест. Если для некоторого множества $\Omega_i \in H_k$ справедливо (в задаче на минимум) $\gamma(\Omega_i) > f^*(H_k)$, то множество Ω_i исключается из списка H_k (в задачах на максимум тест имеет вид

$$\gamma(\Omega_i) < f(H_k)\ ).$$

Для конкретных задач строятся и другие элиминирующие тесты. Во многих модификациях *метода В и Г* используют несколько способов вычисления оценок. Если не сработал приведенный выше критерий, ищут более точную нижнюю границу.

Замечание. Если $f(H_k) \leq \min\{f(x): x \in \Omega\}$;, но $f(H_k) > \gamma(\Omega_i)$, то на основе приведенного теста нельзя исключить множество Ω_i. Отсюда и следует желательность приближения нижней границы к оптимальному значению $f(x)$ на Ω_i.

4.4. Алгоритм Ленд и Дойг

Метод В и Г реализуется в алгоритме Ленд и Дойг для решения задач ЦЛП и ЧЦЛП. Для вычисления оценок используется релаксированная задача, получаемая из исходной задачи отбрасыванием требований целочисленности. Эта задача линейного программирования, решаемая на каждом узле дерева вариантов, обходом которых и осуществляется отсеивание не перспективных множеств, уточнение рекорда и на заключительном этапе определение оптимального решения. При переходе из узла в смежный узел вдоль ветви дерева вариантов оптимальное решение очередной релаксированной задачи производится весьма экономно с использованием результатов решения на предыдущем узле, что является безусловным преимуществом алгоритма. Положительным свойством алгоритма является его универсальность - без каких либо изменений алгоритм применяется для решения как задач ЦЛП, так и задач ЧЦЛП. Если реалльная задача сведена к модели ЦЛП или ЧЦЛП, то при применении алгоритма к физической сущности задачи можно уже не обращаться.

Вычислительная схема алгоритма проста. Его программная реализация просто включается в пакет программ линейного программирования. Простая вычислительная реализация алгоритма, в том числе экономное вычисление последовательности релаксированных задач определили успешное применение алгоритма. Однако его возможности могут быть ограничены размерностью задач. Так при целочисленных (булевых) переменных порядка 150-200 переменных отмечалось резкое увеличение числа перебираемых вариантов. Учитывая возможности современных вычислительных машин, это ограничение может быть игнорировано.

4.5. Метод построения последовательности планов (метод ППП)

Метод ППП объединяет, по мнению авторов метода, такие различные методы как метод В и Г и методы отсечения (алгоритмы Гомори). На основе метода удалось разработать эффективные алгоритмы решения ряда прикладных задач, в том числе задачи размещения новых производственных мощностей.

Условия применимости метода (возможность построения расширения исходной задачи и алгоритма построения последовательности псевдопланов) сужают возможности применения метода. В первую очередь это ограничение связано с алгоритмами построения последовательности псевдопланов. Предлагаемые процедуры построения этой последовательности относительно сложны. Процедура упрощается, если целевая функция является сепарабельной, т.е. имеет вид $\mathbf{F(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)}$. Причем, даже в этом случае для организации процедуры требуется воспользоваться динамическим программированием для получения вспомогательных таблиц.. То есть метод не является универсальным во введенном выше смысле.

*Общая схема метода***.** Рассматривается задача **A** вида:

$\mathbf{f(x^*)=\min\{f(x): x\in\Omega\}}$, где $\mathbf{\Omega}$ -конечное множество.

Метод ППП применим к решению задачи , если выполнены условия:

1). Можно построить расширение **R** множества $\mathbf{\Omega}$ $\mathbf{(\Omega\subseteq R)}$ и функцию **g(x)-**миноранту, определенную на **R** , такую, что

$$\mathbf{g(x)\le f(x)},\ \text{для всех } \mathbf{x\in\Omega}$$

2). Можно построить алгоритм **φ,** который на **k**-м шаге находит элемент $\mathbf{r_k\in R}$, обладающий свойством

$$\mathbf{g(r_k)=\min_{x\in R_k}\{g(x)\}, k\ge 1,}\ \text{где } \mathbf{R_k=R_{k-1}\setminus r_{k-1}, k\ge 1, R_1=R}$$

т.е. должен существовать алгоритм φ построения последовательности планов элементов из **R** в порядке неубывания миноранты **g(x)** .

Минимизацию **g(x)** на множестве **R** назовем задачей $\overline{\mathbf{A}}$**.**

Критерий оптимальности. Если существует такое натуральное число k*, что*

$$\mathbf{\Omega_k=\{r_1,r_2,\ldots,r_k\}\cap\Omega\neq\varnothing,}$$
$$\mathbf{g(r_k)\ge\min_{x\in\Omega_k}f(x)=f(\omega_k),}$$

то ω_k *- оптимальный план задачи* A.

Алгоритм, построенный по методу ППП, включает следующие этапы.

1). Конструируется расширение **R** исходного множества **Ω**.

2). На множестве **R** задается **g(x)** - миноранта **f(x)** на **Ω**.

3). Формируется конечный итеративный алгоритм **φ**, формирующий последовательность $\mathbf{r_1,r_2,\ldots,r_{k-1}}$ оптимумов $\mathbf{\min_{x\in R_k} g(x)}$ на последовательности вложенных друг в друга множеств $\mathbf{R=R_1\supset R_2\supset R_3\ldots}$

4). На каждом **k**-м шаге проверяется выполнение критерия оптимальности. Если критерий выполнен, то $\boldsymbol{\omega_k}$ - оптимальный план задачи A, в противном случае осуществляется переход к **k+1**-му шагу.

Метод ППП может быть применен при соответствующем уточнении и для решения задачи максимизации **f(x)** на конечном множестве Ω.

Эффективность метода зависит от выбора расширения **R** и миноранты **g(x).**

Из сравнения методов решения задач дискретного программирования следует, что наиболее универсальным и простым с вычислительной точки зрения является метод ветвей и границ. Интерпретация этого метода для задач ЦЛП и ЧЦЛП – алгоритм Лэнд и Дойг- программно достаточно просто реализуется в составе пакета программ линейного программирования.

Методы, основанные на процедуре последовательного извлечения из множества допустимых планов кандидата на оптимальный план, либо уступают в вычислительном плане алгоритму Лэнд и Дойг, либо содержат достаточно сложную вычислительные процедуры и накладывают дополнительные требования на структуру исходной задачи. Однако возможности метода далеко не исчерпаны. Поиск «хороших» алгоритмов для решения практически важных задач, сводящихся к моделям задач ЦП и

ЧЦП з анализа алгоритмов, разработанных для решения задач дискретного программирования, можно сделать выводпродолжается

5. Динамическое программирование

Динамическое программирование (метод Беллмана) — метод оптимизации в задачах (процессах, операциях), решение которых может быть разбито на несколько этапов, а целевая функция является, соответственно, аддитивной (или мультипликативной).

Пусть задача (процесс) разбита на **n** этапов, $i=\overline{1,n}$.

Целевая функция — суммарный выигрыш в задаче на максимум (суммарные потери в задаче на минимум) запишется в виде:

$\mathbf{W}=\sum\limits_{i=1}^{n}\nabla\mathbf{W_i}$, где $\nabla\mathbf{W_i}$ — выигрыш (потери) на **i -м** этапе.

На каждом **i-м** этапе система (процесс) может находиться в одном возможном для этого этапа состояний. В каждом состоянии системы может быть принято одно из возможных (согласно условиям задачи) на этом этапе решений (управлений).

В результате принятия решения система (процесс) переходит в определенное состояние на последующем этапе, при этом имеет место выигрыш (потери), равный $\nabla\mathbf{W_{k,i}(j)}$.Здесь **i** — индекс этапа, **k** — индекс состояния системы на этапе **i**, **j** — индекс принятого решения.

Существо метода заключается в том, что, начиная с последнего этапа, на каждом **i-м** этапе для каждого **k-го** состояния, ищется так называемый условный оптимум $\mathbf{W^+_{k,i}}$, являющийся суммой текущего приращения целевой функции и условного оптимума уже известного для состояния **i +1** этапа, в которое система переводится в результате решения, принятого на **i** этапе.

Основное рекуррентное соотношение метода запишется в виде:

$$\mathbf{W^+_{k,i}=\max_j\{\nabla W_{k,i}(j)+W^+_{l,i+1}(\varphi_j(s_k\rightarrow s_l))\}},$$

где $\varphi_j(s_k\rightarrow s_l)$ — функция, определяющая в какое состояние перейдет система (процесс) из состояния **k** на этапе **i.**

После последовательного вычисления всех условных оптимумов от последнего **n-го** этапа до **1-го** будет получен абсолютный оптимум и определен вектор управлений, обеспечивающий этот оптимум.

Область возможного использования метода динамического программирования весьма обширна. Недостаток метода – рост необходимых вычислений в зависимости от количества этапов и возможных состояний системы на каждом этапе.