*К. А. Рыбников*

# ВОЗНИКНОВЕНИЕ И РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКИ

КНИГА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1987

ББК 22.1
Р93

Рецензенты: чл.-кор. АПН СССР, доктор физико-математических наук, профессор В. Д. Белоусов;
доктор физико-математических наук, профессор В. И. Соболев;
кандидат физико-математических наук, доцент А. В. Дорофеева



**Рыбников К. А.**

Р93 Возникновение и развитие математической науки: Кн. для учителя.— М.: Просвещение, 1987.— 159 с.: ил.

Книга содержит описание путей формирования первичных знаний теоретической математики, очерки истории математических дисциплин, преподаваемых в школе. В ходе изложения историко-научный материал связан с проблемами преподавания математики в школе. Книга может быть использована учителями средней школы и студентами педвузов и университетов.

Р $\frac{4306010000-474}{103(03)-87}$ 136—87 ББК 22.1

*Учение есть труд и должно оставаться трудом, но трудом, полным мысли, так чтобы самый интерес учения зависел от серьезной мысли, а не от каких-либо не идущих к делу прикрас.*

*К. Д. Ушинский*

# ВВЕДЕНИЕ

Настоящая книга обращена в первую очередь к учителям математики. Она обращена также к студентам математических специальностей университетов и педагогических институтов, готовящимся к работе в школе. Цель книги — дать представление этому кругу читателей об опыте развития математических знаний и убедительно показать, что знание этого опыта будет содействовать выполнению ими своих профессиональных обязанностей — обучению детей математике и привитию им навыков логически строгих элементов научного мышления.

Ежегодно в школы приходят миллионы детей. Долгие годы затем они изучают основы математических наук. Сложен их путь и велики встающие перед ними трудности. Ученики не просто воспринимают (впитывают) концентрат приемов вычислений и логических суждений, который должен составить основу их математических знаний и посильных приложений. Нет! Они **учатся** и в своем личном обучении отражают в той или иной степени общий исторический путь, следуя которому человечество добывало математические знания. Вглядитесь в то, **как** дети учатся, произведите необходимые сравнения, и вы увидите, что это так.

Успехи учителя в преподавании математики решающим образом зависят от того, какие ответы получает от него ученик на вопросы о том, когда, в силу каких причин и при каких обстоятельствах возникла необходимость в знании преподаваемого в данный момент материала, как этот материал (теоремы, вычислительные приемы и пр.) нашли (открыли), какие задачи с его помощью решались раньше и решаются сейчас, с какими другими частями математики он связан и т. п. Нет нужды доказывать, что неумение отвечать на подобные вопросы, разнообразные формы уклонения от ответов равносильны запрету мыслить: они развивают пассивность и воспитывают отвращение к математике.

Не приносят желаемого успеха и те случаи, когда учитель, по существу незнакомый с историей развития своей науки, включает время от времени в свои уроки разрозненные исторические справки, забавные случаи, анекдоты и пр. Это, конечно, может несколько оживить тоскливое течение урока, но — не больше того и не всегда. Разрозненный набор фактов, как принято говорить, «не работает». А «работают» факты лишь тогда, когда они регулярны и подчинены общим концепциям, опирающимся на историко-научную и общекультурную эрудицию учителя.

В соответствии с целью книги в ней рассматривается история только тех математических дисциплин, которые изучают в школе. Ее главной особенностью является то, что в каждой главе внимание читателя оказывается привлеченным к описанию **процесса** развития соответствующей части математики и проявляющихся при этом закономерностей. Говоря проще, речь идет о том, в силу каких причин и при каких обстоятельствах математические дисциплины, преподаваемые в школе, приобрели именно такое содержание и такую форму, в каких учителя преподают, а ученики их ныне изучают.

По очевидным причинам в книге приведен лишь тщательно отобранный минимум историко-научных фактов. Существует много книг, позволяющих быстро пополнить фактический материал; их краткий список приведен нами в конце.

В тех случаях, когда оказывается возможным и уместным, в книге рассматриваются конкретные связи историко-научных, методологических и методических вопросов. В заключении разъяснено, каким путем читатель сможет **продолжить** повышение квалификации в области историко-методологических проблем своей науки, добиваясь того, чтобы профессиональные занятия учителя-математика (воспитательно-педагогические, прикладные и теоретические) производились в соответствии с общими идеями и положениями марксизма-ленинизма.

Задачу написать эту книгу поставили перед автором члены редколлегии журнала «Математика в школе», в особенности главный редактор проф. Черкасов Р. С. Они же предоставили автору возможность опубликовать на страницах журнала ряд статей, имеющих целью выработку такого содержания и стиля изложения, которые лучше соответствовали бы насущным нуждам и интересам учителей математики. Без творческого и регулярного содействия педагогической общественности книга, по всей вероятности, не могла бы быть написана.

Автор благодарит проф. Белоусова В. Д., проф. Гусака А. А., проф. Дорофеева Г. В., доц. Дорофееву А. В., проф. Мищенко А. С., проф. Соболева В. И., прочитавших рукопись книги и оказавших ему помощь советами и рекомендациями.

С благодарностью автор примет замечания и предложения читателей.

## Глава 1

# О НАЧАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ

Вопросы о том, как складывались первичные математические представления, какой вид они принимали, как проходили первые этапы их совершенствования, никогда не теряли своей актуальности и не потеряют ее в будущем. В том, чтобы правильно освещать эти вопросы, заинтересованы весьма широкие слои человеческого общества: и те, кто только **начинает** свое математическое образование; и те, кто **учит** детей математике, так как это способствует отысканию и использованию наиболее эффективных методических приемов. Сведениями о ранней истории своей науки интересуются также ученые-математики, исследующие ее логический строй как с теоретическими, так и с практическими целями.

Своеобразие проблемы состоит в том, что поиски действительного начала математических знаний человечества уводят нас в седую, еще дописьменную древность. По мере продвижения в глубь истории резко убывает фактическая основа, на которую можно опираться в своих суждениях. Время и обстоятельства неумолимо уносят в небытие (или препятствуют извлечению из небытия) материальные свидетельства развития интеллектуальной жизни древних народов. Особенно большой вред нанесли (и продолжают наносить) различные завоеватели и колонизаторы, расисты, проповедники якобы богом избранной, «исключительной» расы, народности, религии.

Давно уже нет на земле племен или иных устойчивых общностей людей, которые являлись бы носителями отзвуков далекого прошлого. Очень мало осталось памятников культуры и других источников информации о знаниях людей в ранние периоды истории. Все, что известно, подвергалось и подвергается изучению археологами, этнографами, специалистами по сравнительному языкознанию, историками науки. Их усилия по восстановлению, описанию и сохранению этого незаменимого и невосполнимого материала, будучи объединенными, приносят, разумеется, свои плоды. Однако фактов все-таки не очень много и мало надежды на существенное обогащение фактической основы подобных исследований в будущем.

В настоящей главе мы предлагаем читателю сжатый обзор того, что оказалось возможным извлечь из имеющихся в наличии фактов, относящихся к ранним периодам развития математических познаний людей. Естественно, что прежде всего речь пойдет о характеристике процессов формирования начальных математических абстракций (числа, фигуры), составляющих основу количественных и пространственных характеристик материального мира.

Начнем с описания того, как складывалось *понятие о числе* (на первых порах натуральном, т. е. целом положительном). Очевидным представляется высказывание, что это понятие возникло и сформировалось в результате многократно применяемой (в силу практической необходимости) операции счета, перечисления предметов. Однако, несмотря на кажущуюся простоту, естественность, свою «изначальность», операция счета не является на самом деле первичной, простейшей. Она возникает и применяется на уже сравнительно высоком уровне развития математических элементов мышления. Ей предшествовало, как выясняется, несколько ступеней усовершенствования логических суждений.

Проблема воссоздания исторических ситуаций, приведших к появлению абстракции натурального числа, очень сложна. Хотя мотивы экономического развития разных народов в основном сходны, но пути интеллектуального развития весьма разнообразны. Затрудняет, естественно, решение проблемы также недостаточность и разрозненность имеющихся в наличии фактов.

Все-таки, как бы ни была пестра и фрагментарна картина развития математических знаний в ранние периоды истории человеческой культуры, в ней можно проследить главные (как мы думаем) этапы интересующего нас сейчас процесса. На них в интересах основного замысла настоящего описания и постараемся сосредоточить внимание читателя.

1. История человечества со всею очевидностью показывает, что даже самые, казалось бы, изначальные понятия людей не являются врожденными (и уж тем более не ниспосланы «свыше»). Они суть отражения свойств и отношений реальных предметов объективно существующего мира. Приобретаются они в ходе активной деятельности людей. Именно благодаря труду и сопровождающей его членораздельной речи мозг и органы чувств человека достигли значительного совершенства. В результате, после длительной эволюции, мозг человека выработал среди прочих способность создавать абстракции, необходимые для счета и измерения.

2. Начальная ступень числовых, количественных, представлений состояла, по-видимому, в восприятии человеком свойства численности, количественности, конкретных совокупностей предметов. Вначале множество предметов характеризуется со стороны его целостности (т. е. все ли предметы находятся налицо). Это позволяет сравнить рассматриваемое множество с другими, более или менее многочисленными, нежели данное. Такой счет называют чувственным. Его зачатками владеют даже животные. Процесс выделения свойства количественности из совокупности свойств конкретных множеств, осознания его особенностей и

функциональной роли занял, по всем данным, весьма длинный исторический период.

3. По мере перехода людей на более высокий уровень интеллектуального развития чувственный счет оказывается недостаточным. Появляется необходимость сравнивать множества, например поэлементно сопоставляя их численность. Появлялась она преимущественно в процессе общения людей и выполнения ими операций обмена. Неравночисленность множеств предметов заставляет вырабатывать понятия «больше», «меньше», «равно».

4. Числовая характеристика множеств выделяется и преобразуется в объект самостоятельного рассмотрения, что находит свое выражение в поисках множеств, играющих роль эталона при сопоставлениях: пальцы рук и ног, наборы камешков, раковин, счетных палочек и других предметов.

5. Вводятся названия чисел, поначалу небольших. Постепенно число названий растет; складывается общее представление о числе (имеется в виду натуральное число).

6. Натуральные числа сравниваются по величине, абстрагируясь постепенно при этом от всех других свойств. Формируется начальный отрезок ряда натуральных чисел, вначале короткий, но постепенно удлиняющийся.

7. Появляются записи, где фигурируют символические обозначения чисел и действий над ними, развивается символический аппарат, совершенствующийся в последующем в соответствии с основным требованием: быть удобным для выражения и производства вычислительных операций.

8. Складываются разнообразные системы счисления (5-, 10-, 12-, 20-, 60-...ричные), для применения которых унифицируется символика.

Таков или примерно таков был путь формирования понятия целого положительного числа. Более общие классы чисел сложились, естественно, позднее, и их историю можно проследить по письменным источникам, о чем будет идти речь далее.

Перейдем к вопросу о формировании *начальных геометрических представлений.* Этот процесс имел, разумеется, свои особенности. Однако этапы развития, отмеченные выше, в основном имели место и в этом случае. Из оперирования с индивидуально воспринимаемыми пространственными телами вырастали геометрические абстракции тела, фигуры, позволяющие идентифицировать их по сходству геометрических характеристик. Следующим этапом было сравнение множеств тел и выделение абстрагированного эталона — идеального тела. На таком пути формировались геометрические понятия со своими специфическими символическими (графическими, наглядными) изображениями. Последние и являлись символами, отображающими геометрическую определенность объекта, его пространственную особенность, отвлекаемую для изучения от всех других свойств материальных тел.

В самом деле, данные истории материальной культуры убедительно доказывают, что еще в эпоху, когда люди пользовались кремневыми орудиями для труда и охоты, они придавали им преднамеренно геометризированную форму: треугольников, ромбов, трапеций. Конечно, эти формы образовывались постепенно и не вследствие стремлений к «геометризации», а потому, что оказывались наиболее приспособленными к определенному виду труда, к тому, чтобы резать, рубить, скрести и т. п.

Дальнейший толчок развитию геометрических представлений дали ремесла: гончарное, строительное и др. Особенно сильное влияние оказало в этом направлении земледелие, когда задачи проведения границ участков, определения площадей, длин и т. п. сделались жизненно насущными. Появление орнаментов на изделиях знаменовало уже закрепление представлений о равенстве, подобии, симметрии фигур.

Минул огромный по длительности период человеческой истории, прежде чем смутные представления людей о количественности и о формах, присущих конкретным вещам, преобразовались в понятия числа, геометрической фигуры и т. п. И когда это произошло, то появился новый вид знаний — математическое. Счет и измерение сделались важным средством развития *математических знаний* и *вычислительно-измерительной практики* людей.

«Число» и «фигура», исторически первые понятия математики, в наше время лежат в основе всех математических знаний. Сходство логического строя оснований математики и исторического процесса становления ее начальных понятий сделалось особенно наглядным в последние 100 лет. За это время работа по обоснованию математики в силу известных исторических причин и в условиях возрастающих требований к логической (математической) строгости была в особенности активной. Она привела к тому, что в основания математики вслед за теориями действительного числа вошла теория множеств и сопредельные с нею логические средства доказательств. И вот тогда упомянутое сходство проявилось вполне отчетливо.

В самом деле, возвратимся к тем восьми пунктам в нашем тексте, которыми мы описывали этапы формирования первичных математических представлений. Очевидно, что в п. 2 речь идет об идентификации элементов множеств, о самом *задании множеств.* В п. 3 говорится об *операции отображения множеств,* а если посмотреть поглубже, повнимательнее, то и о ранних попытках выражения причинной зависимости. Последняя разовьется затем в *понятие отображения множеств* (п. 4) и *функциональной зависимости.* Вводится *упорядоченность множеств* (пп. 5 и 6), а количественные характеристики начнут получать *символическое выражение* (пп. 7 и 8).

Подобное соответствие между логической структурой оснований современной математики и историческим процессом формирования первичных математических понятий отнюдь не случайно. Оно является примером проявления на математическом материале общефилософской закономерности, известной под названием принципа единства исторического и логического.

Существо этой закономерности, кратко говоря, состоит в следующем: *логическое и историческое — это философские понятия, связанные с двумя способами рассмотрения исторически протекающего процесса.* При *историческом* способе исследования факты и события рассматривают и объясняют с учетом различных случайностей и зигзагов, сквозь которые прокладывают себе дорогу объективные закономерности. При *логическом* же способе рассмотрения исторические факты и события излагают в необходимой закономерной последовательности и связях, т. е. за исключением всего несущественного, случайного, нетипичного. В основном, в главном логическое совпадает с историческим.

Ф. Энгельс указывал, что логический способ рассмотрения в сущности является «тем же историческим методом, только освобожденным от исторической формы и от мешающих случайностей. С чего начинает история, с того же должен начинаться и ход мыслей, а его дальнейшее движение будет представлять собой не что иное, как отражение исторического процесса в абстрактной и теоретически последовательной форме; отражение исправленное, но исправленное соответственно законам, которые дает сам действительный исторический процесс, причем каждый момент может рассматриваться в той точке его развития, где процесс достигает полной зрелости, своей классической формы»[1].

Работа и размышления над проблемой единства исторического и логического могут принести немалую пользу в преподавательской деятельности. Тот уровень знаний и требований к воспринимаемости математических сведений, с которого начинается обучение математике в школах, не изначален. Он может и не быть еще достигнутым новичком-школьником. В таких случаях понимание учителем путей формирования математических представлений людей может послужить источником плодотворных методических приемов. Речь здесь идет о таких приемах, которые могут помочь преодолеть, по возможности безболезненно, кажущиеся внезапными и необъяснимыми случаи непонимания, тупиковые ситуации, столь нередкие у школьников младших, да и не только младших, классов. Увидеть в преподаваемом математическом материале его исторически обусловленное место в логически последовательной структуре математического знания, передать ученикам это понимание — значит увлечь их, сделать математические занятия доступными и интересными.

Продолжим наш рассказ о том, как люди накапливали математические знания. Перейдем к описанию математики тех времен, от которых дошли до нас первые письменные свидетельства или достаточно достоверные сведения о них. Это позволит нам вести изложение несколько более конкретно, чем мы могли

[1] Маркс К., Энгельс Ф. Соч.— 2-е изд.— Т. 13.— С. 497.

себе это позволить до сих пор. Упомянутые свидетельства (или, как мы их будем иногда называть, *источники*) являются частью истории стран, обладавших древними цивилизациями.

Когда мы говорим о странах древних цивилизаций, исторический опыт которых донес до нас достоверные сведения о ранних этапах истории математики, то мы имеем в виду совершенно конкретный материал. На обширных пространствах, где в наше время располагаются Китай, Индия, страны Среднего и Ближнего Востока, а также прибрежные государства средиземноморского бассейна, т. е. в полосе, где природные условия особо благоприятны для жизни людей, издавна существовали государственные формирования общественно-экономической жизни человеческих обществ. Уровень их экономического развития и административного устройства повышался раньше и быстрее, чем у других народов, живших в более суровых условиях. Развитие экономики сопровождалось относительно более быстрым ростом культуры и образованности. Об этом можно судить не только по дошедшим до нас прекрасным архитектурным, техническим памятникам, произведениям искусства, но и письменным памятникам. Среди последних сохранились (чаще всего в пересказах) такие, что были посвящены целиком или в значительной степени трактовке математических задач или даже теоретических проблем математики. Хотя они были далеки друг от друга по времени написания, по целям и обстоятельствам, разобщены территориально, из них можно почерпнуть важную информацию историко-научного характера.

Примем следующий порядок описания этого материала:

— источники, их датировка и место появления;

— социально-экономическая обстановка, относящаяся к источникам;

— сжатый обзор содержания источников;

— общие выводы и заключения.

Такой порядок должен позволить на ограниченном числе страниц ввести читателя (в большинстве случаев человека занятого) в суть проблемы, не разбрасываясь на описание многих фактов. Материал будем группировать по месту происхождения, называя эти части условно: Египет, Вавилон (государства, располагавшиеся на территории современного Ирака, и соседние территории), Китай и Индия.

Начнем с *описания источников*. То, что нам известно о математике Древнего Египта, почерпнуто из рукописей, написанных черной и красной красками на *папирусе* — бумаге, выделанной из нильского тростника. Таких рукописей дошло до нас только две, если не считать еще нескольких коротких отрывков. Одну из рукописей, самую большую (размерами $5{,}5 \times 0{,}35$ м) называют папирусом Райнда, по имени английского египтолога, приобретшего ее в Египте. Находится эта рукопись в Лондоне, в Британском музее. Другой папирус, примерно такой же длины, но более узкий (около 0,03 м), находится в Москве, в Музее изобразительных искусств. Оба папируса датируются эпохой Среднего царства (около 2000 лет до н. э.). Вообще-то папирусов сохранилось довольно много, но других математических — нет.

Документальной основой, позволяющей изучать математическое наследие Древнего Вавилона, являются глиняные таблички, на которых палочками выдавливался текст. Значки (буквы, цифры) были похожи на клинья, отчего вавилонское письмо называется *клинописным.* После нанесения текста таблички обжигали на огне, что придавало им прочность и долговечность. Всего сохранилось около 100 тысяч табличек. Однако табличек с текстами математического содержания известно лишь около 50, а математических таблиц, не содержащих словесных пояснений,— около 200. Временной интервал, к которому можно отнести клинописи, очень широк: от XX до II в. до н. э.

Все суждения о математике Древнего Китая опираются на единственный источник: сборник сочинений, в большинстве анонимных, с общим заголовком «Десять классических трактатов по математике», или «Десятикнижие». Издан этот сборник был в VI—VII вв. н. э. В нем указано, что трактаты составлены были в основном во II в. до н. э. и что они в свою очередь являются обработкой более древних текстов.

Самыми ранними памятниками математических достижений народов Индии являются научно-религиозные сочинения: *сутры* и *веды.* В них математические сведения переплетены с астрономическими, изложение имеет религиозный оттенок и своеобразную стихотворно-легендарную форму. Написаны эти сочинения на давно уже умершем языке — *санскрите.* Традиция их написания восходит к VIII—VII вв. до н. э., а может быть, и к более раннему периоду времени.

Много различий можно увидеть в этих источниках: различные системы счисления, символика, манера преподнесения. Описанию этого посвящены многочисленные сочинения, часть из которых указана в нашем списке литературы. Но, несмотря на все различия, есть во всех источниках общее: их *практическая направленность.* Например, унифицированный древнекитайский источник составлен так, что части, его составляющие, или книги, оформлялись в виде отдельных свитков. Их содержание было специализировано по роду предстоящих читателю занятий: сборщиков налогов, землемеров, руководителей землекопных и строительных работ, астрономов-наблюдателей. Позднейшие дополнения вносились в сборник, располагаясь по принципу единства тематики задач, а не логики математических доказательств.

В двух египетских математических папирусах содержится более 100 задач, посвященных вычислениям площадей фигур и объемов тел, а также операциям с дробями. Подбор задач и форма их преподнесения свидетельствуют о том, что, по всей вероятности, папирусы служили своеобразным *учебно-справочным пособием.* Ярко выражена вычислительная и измерительная проблематика в табличках Древнего Вавилона. Поскольку в математике Вавилона преобладала 60-ричная система счисления, то для облегчения вычислений и для справок существовали вспомогательные, не сопровождающиеся пояснениями таблицы умножения, а также таблицы значений типичных выражений, к которым приводили решения задач, например значения чисел вида $n^2+n$ при $n=1, 2, 3, \ldots$ и др. Математические сведения в индийских сутрах и ведах были сгруппированы вокруг архитектурных проблем и астрономических сведений. Ни в одном из источников нет теорем, доказательств, есть только указания рецептурного типа, а в индийских источниках нередко нет даже пояснений или рецептов, просто чертеж и слово «смотри».

Все изложенное дает нам основание утверждать, что в различных странах, обладающих древними цивилизациями, происходил по существу общий процесс накопления конкретного математического материала: освоение вычислительной техники, способов определения размеров геометрических площадей и тел, отработка удобной символики. Процесс этот явным образом подчинялся внематематическим определяющим мотивам, непосредственным образом служил целям, вызываемым нуждами экономики и государственного устройства общества.

Малочисленность и отрывочность источников, оставшихся от стран древних цивилизаций, разъединенность их по времени и по месту нахождения друг от друга делает затруднительным, а чаще невозможным конкретное, детальное воссоздание путей последовательного совершенствования математических знаний в такие далекие времена. В более позднее время, в пору колонизации, т. е. грабежей и порабощения, были уничтожены почти все памятники культурной жизни коренных обитателей континентов Америки, Африки, Австралии, многих других стран. Сильно пострадала от нашествий захватчиков и наша Родина.

Впрочем, и сейчас приходится постоянно сталкиваться с тем, что ученые слуги уходящего с исторической арены капиталистического строя прилагают немалые усилия для фальсификации истории (в том числе истории науки), для превознесения заслуг капиталистических «цивилизаторов» и «просветителей», несущих якобы свет «темным» народам. В более завуалированной форме эти тенденции находят свое выражение в «теориях» о едином научном источнике, о распространении по всему миру знаний одного «избранного» народа и др.

История учит, что развитие всех форм деятельности человеческого общества происходит под воздействием единых мотивов *экономического развития.* Это влияние сказывается в области математики, во множественности источников ее возникновения. Математика возникла и формировалась как наука во многих странах, нередко весьма удаленных друг от друга и между собою, казалось бы, не связанных.

При этом всегда действовали и проявлялись общие закономерности: происхождение математики из практической деятельности людей, выделение числовых и геометрических абстракций в качестве отдельной области человеческих знаний, образование логически последовательной системы абстракций, применение последних к практическим задачам и т. п. Однако форма осуществления общих закономерностей, характер математической науки, соотношение ее элементов имели много различий и особенностей, которые необходимо принимать во внимание, чтобы составить адекватное представление о путях и перспективах развития математических наук.

В применении к рассматриваемому периоду развития математики отметим, что накопление конкретных сведений как численного, так и геометрического характера создало следующие предпосылки для формирования математических теорий:

а) возможность предварять непосредственное оперирование с вещами оперированием с их упрощенными, схематическими изображениями и наименованиями (символами). На более поздней ступени это привело к развитию числовых систем и геометрических построений;

б) умение заменять конкретную задачу канонической задачей более общего вида, решаемой по определенным правилам, охватывающим большую совокупность частных случаев. Так появляются первичные формы общих алгоритмов и связанных с ними математических исчислений.

Когда упомянутые предпосылки оказываются действующими в заметных масштабах, а в обществе образуется прослойка людей, умеющих пользоваться определенной совокупностью математических приемов, тогда появляются основания говорить о начале существования математики как науки, о наличии ее элементов.

Для учителя математики сведения о ранних периодах истории своей науки представляют не только общекультурный интерес. Они ему необходимы в его повседневном преподавательском труде. Этапы формирования понятия числа, фигуры и других основных понятий с удивительным, «железным» постоянством повторяются в индивидуальном росте математической образованности дошкольников и младших школьников. А в дальнейшем математическом образовании сведения историко-научного характера оказываются необходимыми для понимания и усвоения логических средств доказательств и структуры курсов математических дисциплин, для прочного усвоения школьниками математического материала.

## Глава 2

# КАКОВЫ БЫЛИ ПУТИ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКИ

Время в школе течет быстро. Его всегда недостаточно. Трудности же в усвоении математики учащимися возрастают еще быстрее. Происходит это потому, что уже на ранних этапах обучения характер математического материала резко меняется. На первый план выступают абстрактные элементы математического знания. Вскоре они приобретают главное, почти самодовлеющее значение. Школьник тратит все (или почти все) время на то, чтобы заучивать аксиомы, повторять доказательства теорем, составлять и решать уравнения, иметь дело с усложняющейся символикой и т. п. Математика же резко разрастается и распадается на отдельные учебные предметы: алгебру, геометрию, начала анализа. Геометрия в свою очередь делится на два курса: планиметрию и стереометрию. Алгебра изучает отдельные темы, в частности тригонометрию, логарифмы и т. д. Ставшие в известной мере привычными и необходимыми непосредственные связи приобретаемых знаний с наглядно представимыми объектами отступают на задний план и заменяются заверениями, что именно то, что изучается ныне, очень важно и найдет свое применение в будущем.

В этот период, когда ученики переходят от приобретения первичных математических навыков к изучению научных основ математики, перед учителем встает много трудных проблем: как выработать у учеников прочные навыки абстрактных математических рассуждений? Как обучить их символическому языку математики? Как не утерять при этом связей с материальными объектами и практической деятельностью большинства людей? Наконец, приходится решать самую, может быть, трудную задачу: убедить своих учеников в целесообразности, обоснованности, жизненной необходимости затрачиваемого ими труда.

Настоящая глава написана с целью помочь читателям приобрести (или обновить) необходимый минимум сведений о том, как формировалась *математическая наука.* Это необходимо сделать сейчас, до рассмотрения вопросов, связанных с историей отдельных математических дисциплин и изложенных в последующих главах. Тем самым мы последуем одному из замечательных высказываний В. И. Ленина: «Кто берется за частные вопросы без предварительного решения общих, тот неминуемо будет на каждом шагу бессознательно для себя «натыкаться» на эти общие вопросы»[1].

Когда же и в каком виде возникали элементы математической науки? Уточним постановку вопроса и тот смысл, который мы будем вкладывать в употребляемые нами термины. Элементами математической науки мы будем считать утверждения или последовательность утверждений математического характера, обладающие следующими признаками:

а) объектами высказываний в них являются математические абстракции, как численные, так и геометрические, упорядоченные или сгруппированные в отдельные классы;

б) относительно этих абстракций высказываются утверждения (теоремы, леммы и т. п.), подчиненные определенным (задаваемым) условиям (требованиям);

в) системы абстракций и системы высказываний о них обогащаются новыми элементами того же рода, развиваясь тем самым как бы самостоятельно, независимо от типа конкретных задач или вида объектов, относительно которых они поставлены.

Наличие таких признаков означает, что завершился или завершается переход от утилитарного использования начальных математических навыков к научному *математическому мышлению*. Переход этот, разумеется, сложен, имеет диалектический характер, нередко труден для осуществления как в общеисторическом, так и в индивидуальном плане.

Ту же мысль выражают по-иному, говоря, что математика как наука появляется тогда, когда начинает свое существование некая достаточно богатая совокупность *математических теорий*. Термин «теория» происходит от греческого слова θεωρία, что означает рассмотрение, исследование, научное познание. Общепринятый смысл этого термина таков, что под ним понимают систему основных идей в рассматриваемой области знания. Эти идеи отражают практику, опыт (например, опыт наблюдений, экспериментов), обобщают результаты и находят в них объективное обоснование. Обобщения эти таковы, что они представляют собою более глубокое знание, полученное с помощью абстрактного мышления. Их содержание и применение ведут к более глубокому проникновению в сущность явлений.

Формирование математической науки происходило, как убеждает нас история, в научном творчестве ученых *Древней Греции*. Так принято называть группу государств, сложившихся начиная с VIII—VI вв. до н. э. на территории современной Греции, близлежащего побережья Малой Азии и юга Италии. Эти государства со временем приобрели вид отдельных самоуправляющихся городов (полисов). Расположенные на самых оживленных в ту пору торговых путях, они приобрели большое экономическое могущество, превратившись к V в. до н. э. в поли-

---

[1] Ленин В. И. Полн. собр. соч.— Т. 15.— С. 368.

тический, экономический и культурный центр античного мира.

Древняя Греция оставила человечеству прекрасные образцы строительства, технических приспособлений, памятники искусства, известные всякому культурному человеку. От тех далеких времен дошли до нас также сведения о научных достижениях, в том числе о первых элементах математической науки. Последние и определили лицо математики, ее положение в системе научных знаний на многие последующие столетия.

Трудно, если вообще возможно, воссоздать конкретно, как складывалась система математических знаний в Древней Греции. Процесс этот был длительным. Дошедшие до нас исторические источники неполны. Однако их достаточно, чтобы увидеть, какие события были определяющими и по каким направлениям шло развитие древнегреческой математики. Можно также заметить, какое влияние оказали сочинения математиков Древней Греции на преподавание математики, на развитие науки последующих столетий, вплоть до XX в.

Постараемся рассказать об этом, хотя и сжато, но с привлечением достаточно большого фактического материала. Более детальная информация содержится в книге автора (см. [3], гл. 2 и др.) и в другой литературе по истории математики.

Прежде всего заслуживает внимания то, что в ряде ранних источников содержатся высказывания, говорящие о преемственности математических и вообще научных знаний. Так, в них упоминается о поездках купцов и образованных граждан древнегреческих полисов в другие страны. Чаще других речь идет о Египте и иных странах Ближнего Востока, о развитии в них науки и о технических достижениях. Практический характер математики и успехи ее в этих странах были оценены высоко и восприняты полностью.

В течение долгого времени математические сведения не были выделены в отдельную область науки. Важные и интересные астрономические, технические и другие открытия, наблюдения за явлениями природы, новые методы вычислений и решения новых классов задач стекались в Грецию со всех сторон, распространялись в кругах образованных людей, сливаясь в единую, хотя и слабо поначалу объединенную, область всеобщего научного знания. Называли эту область *ма́тема* (μάτημα — знание, наука). Факты этой науки приобретали название научных, математических.

Но время шло, и постепенное накопление научных сведений объективно вынуждало к тому, чтобы их упорядочить, классифицировать. То же стремление к разделению, дифференциации знаний вырастало из практики школьного обучения. Известно, что все дети свободных граждан рабовладельческих Афин и других полисов с семилетнего возраста учились в школах. Там их обучали как дисциплинам практического назначения, так и начаткам теоретического научного знания, в том числе основам теоретической арифметики и геометрии. Став взрослыми, они вследствие привилегированного положения в обществе передавали подневольным людям не только физический труд, но и решение практических задач, связанных с необходимостью счета и измерений. Такое разделение математических занятий, возникшее в силу социального неравноправия людей, ускоряло объективное течение исторического процесса дифференциации научных знаний и выделения слоя людей, занимающихся теоретическими проблемами математики. Этому же способствовала деятельность учебно-научных объединений натурфилософского направления (научных школ). Самыми ранними из них были: *ионийская* (VII—VI вв. до н. э., в островной части Греции) и *пифагорейская* (VI—V вв. до н. э., в южной части Апеннинского полуострова). В IV в. до н. э. в материковой части Греции функционировали школы, среди которых выделялись Академия Платона (428 или 427 до н. э.— 348 или 347) и Ликей Аристотеля (384—322 до н. э.), учителя Александра Македонского (356—323 до н. э.). Это были по преимуществу небольшие группы молодых людей, собиравшихся вокруг известных ученых; преподавание велось главным образом устно.

Архимед

Когда после смерти Александра Македонского распалась завоеванная им громадная империя, один из его полководцев, Птолемей, в столице своего государства Александрии (основана в 331 г. до н. э.) основал Музейон (что означает: прибежище муз) с громадной библиотекой (достигавшей, по свидетельству современников, до 700 000 рукописей). Там на полном государственном обеспечении работали многочисленные ученые, среди которых были самые по тем временам выдающиеся. В г. Сиракузы на острове Сицилия жил и работал Архимед (ок. 287—212 до н. э.), на побережье Малой Азии — Аполлоний (ок. 260—170 до н. э.) и др.

Научная, в том числе математическая, деятельность в странах Средиземноморья была многообразной, в ряде мест активной и длительной. Из тех сведений, что сохранила для нас история, выберем те, которые позволят нам дать общую характеристику процесса формирования математической науки в ставшем для нас привычным понимании этого термина.

Одним из самых первых шагов в направлении дифференциации содержания математики явилось отделение области практических навыков и сведений. Эта область математики получила особое название: *логистика*. Можно утверждать, что в логистику входили: счет (арифметические действия над натуральными числами с применением счетной доски — *абака*); действия с дробями; вычисления корней, по преимуществу квадратных; решение разнородных типов задач приемами, известными из учебников арифметики. Конечно, содержание логистики также пополнялось постепенно. К сожалению, ни одного сочинения по логистике не сохранилось.

Разделение математических знаний не по виду изучаемых объектов, а по социальным функциям их обладателей в условиях тесной связанности с общефилософскими постановками проблем нередко приводило не только к противопоставлению теоретических и прикладных математических знаний, но и к стимулированию заблуждений идеалистического толка (пифагореизм, орфические учения, т. е. учения о бессмертии души, и др.). Впрочем, в настоящей работе мы эту группу вопросов освещать не намерены. Будем обсуждать историю развития только математических знаний, преимущественно теоретических.

Уже в школе Пифагора (ок. 570— ок. 500 до н. э.) заметен процесс накопления абстрактных математических фактов и соединения их в теоретические системы. Так, например, из арифметики была выделена в отдельную область исследований теория операций с натуральными числами. Были найдены (или специально отмечены) способы суммирования простейших арифметических прогрессий и результатов типа $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$. Рассматривались вопросы делимости чисел, введены пропорции: арифметическая, геометрическая и гармоническая (т. е. пропорция вида $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}$), а также различные средние: арифметическое $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$, геометрическое $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}$; гармоническое $\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}$. Наряду с геометрическим доказательством теоремы Пифагора был найден способ отыскания неограниченного ряда троек «пифагоровых» чисел, т. е. троек чисел, удовлетворяющих соотношению $a^2+b^2=c^2$ и имеющих вид $n$, $\frac{1}{2}(n^2-1)$, $\frac{1}{2}(n^2+1)$, где $n$ — нечетное. Другое правило, по которому получаются числа вида $n$, $\left(\frac{n}{2}\right)^2-1$, $\left(\frac{n}{2}\right)^2+1$, где $n$ — четное, находим у Платона, т. е. в более позднее время. Было также открыто много соотношений, относящихся к теории деления музыкальных интервалов.

Столь же рано, если не раньше, начались абстрагирование и систематизация геометрических сведений. В геометрических сочинениях вводились и совершенствовались приемы геометрических доказательств. Рассматривались, в частности, теорема Пифагора, задачи о квадратуре круга, трисекции угла, удвоении куба, квадрировании ряда площадей сложной конфигурации.

Неравносильность логических средств, применяемых для решения геометрических задач, вынуждала к систематизации геометрии. Самым ранним из известных нам сочинением такого рода называли «Начала» Гиппократа (V в. до н. э.) с острова Хиос. К сожалению, это сочинение, как и многие другие, до нас не дошло.

Одной из конкретных причин появления математических теорий явилось открытие *иррациональностей.* Вначале это произошло в пределах геометрических изысканий в виде установления факта несоизмеримости двух отрезков прямой. Значение этого открытия в математике трудно переоценить. В математику, едва ли не впервые, вошла сложная теоретическая абстракция, не имеющая аналога в донаучном общечеловеческом опыте. Вероятно, самой первой иррациональностью, открытой древнегреческими математиками, было число $\sqrt{2}$. Можно с определенной уверенностью считать, что исходным пунктом этого открытия были попытки найти общую меру с помощью алгоритма попеременного вычитания, известного сейчас как алгоритм Евклида. Возможно также, что некоторую роль сыграла задача математической теории музыки: деление октавы, приводящее к пропорции $1:n=n:2$. Не последнюю роль играл и характерный для пифагорейской школы общий интерес к теоретико-числовым проблемам.

Древние математики нашли довольно быстро логически строгое доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$ путем сведе́ния этого доказательства к формальному противоречию. Пусть $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, где $m$ и $n$ — взаимно простые числа. Тогда $m^2=2n^2$, откуда следует, что $m^2$ четное и, следовательно, $m$ четное. В таком случае $n$ должно быть нечетным. Однако если $m$ четное, то $m^2$ делится на 4 и, следовательно, $n^2$ четное. Четно, следовательно, и $n$. Получающееся противоречие ($n$ не может быть одновременно и четным, и нечетным) указывает на неверность посылки, что число $\sqrt{2}$ рационально.

Для исследования вновь открываемых квадратичных иррациональностей сразу же оказалось необходимым разрабатывать теорию делимости чисел. В самом деле, пусть $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$, где $p$ и $q$ — взаимно просты, а $n$ является произведением только первых степеней сомножителей. Отсюда $p^2=nq^2$. Если $t$ — простой делитель $n$, то $p^2$ (а значит, и $p$) делится на $t$. Следовательно, $p^2$ делится на $t^2$. Но в $n$ содержится только первая степень $t$. Значит, $q^2$ (ра́вно как и $q$) делится на $t$. Но этот результат формально противоречит предположению, что $p$ и $q$ взаимно просты.

Вслед за иррациональностью числа $\sqrt{2}$ были открыты многие другие иррациональности. Так, Архит (ок. 428—365 до н. э.) доказал иррациональность чисел вида $\sqrt{n(n+1)}$. Теодор из

Кирены (V в. до н. э.) установил иррациональность квадратного корня из чисел 3, 5, 6, ..., 17, которые не являются полным квадратом. Т е э т е т (410—369 до н. э.) дал одну из первых классификаций иррациональностей.

С появлением иррациональностей в древнегреческой математике возникли серьезные трудности как в теоретико-числовом, так и в геометрическом плане. Были фактически поставлены под сомнение вся теория подобия и метрическая часть геометрии. Необходимость научного осмысления сущности открытого явления и его связи со сложившимися представлениями вызвала дальнейшее развитие математических теорий.

Этот следующий этап ознаменован попыткой создать для нужд научного исследования общую математическую теорию, охватывающую как рациональные числа, так и иррациональные величины. Коль скоро после открытия иррациональности оказалось, что множество геометрических величин (например, отрезков прямой) более полно, нежели множество рациональных чисел, то оказалось целесообразным это более общее исчисление строить в геометрической форме. И исчисление было создано; мы его знаем под названием *геометрической алгебры.*

Первичными элементами геометрической алгебры являлись отрезки прямой. Были определены все операции исчисления с ними. Сложение трактовалось как приставление отрезков друг к другу, вычитание — как отбрасывание от отрезка (уменьшаемого) части, равной другому отрезку (вычитаемому). Умножение отрезков $a$ и $b$ приводило к построению прямоугольника со сторонами $a$ и $b$. Произведение трех отрезков давало параллелепипед, а произведение большего числа сомножителей в геометрической алгебре рассматриваться не могло. Деление оказывалось возможным лишь при условии, что размерность делимого больше размерности делителя. Оно интерпретировалось эквивалентной задачей приложения площадей (рис. 1) приложить к отрезку $c$ прямоугольник, равновеликий данному ($ab$). Решение задачи, как видно из рисунка 1, состоит в прикладывании друг к другу прямоугольников ($ab$) и ($bc$) и в построении нового прямоугольника, диагональю которого является диагональ прямоугольника ($bc$), продолженная до пересечения с продолжением сторо-

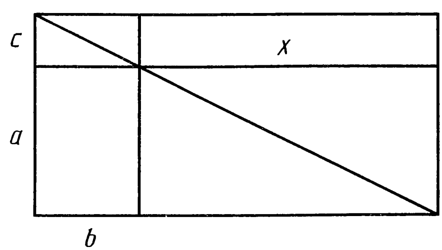


Рис. 1

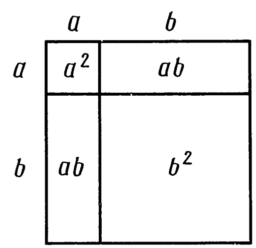


Рис. 2

ны $b$. Тогда прямоугольники $(ab)$ и $(cx)$ оказываются равновеликими.

Метод приложения площадей, описанный здесь, позволял решать задачи, сводящиеся к линейным уравнениям, и носил название *параболического*, что в переводе с греческого означает приложение.

В геометрическую алгебру входила и совокупность геометрических предложений, интерпретирующих алгебраические тождества. Например, рисунок 2 дает геометрическую интерпретацию алгебраического тождества

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Метод приложения площадей был распространен и на случаи решения задач более сложных, сводящихся к квадратным уравнениям. В качестве примеров таких задач упомянем следующие: определение сторон правильных вписанных в окружность многоугольников; так называемое «золотое сечение» отрезка, т. е. деление отрезка $a$ на две части: $x$ и $a-x$, удовлетворяющие соотношению $\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$; выражение ребер правильных многогранников через диаметр описанного шара и др. Решение этого класса задач проводилось посредством единообразного (*канонического*) метода, имеющего следующие разновидности в зависимости от вида квадратного уравнения.

**1.** Построить квадрат, равновеликий заданному прямоугольнику $(ab)$. Существо метода заключается в замене прямоугольника $(ab)$ разностью квадратов

$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

и в последующем применении теоремы Пифагора (рис. 3):

$$AD\cdot DG=S_{CLGD_1B_1B}=CB^2-LG^2,$$

или

$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Построение стороны $x$ искомого квадрата ясно из рисунка 4. Этот

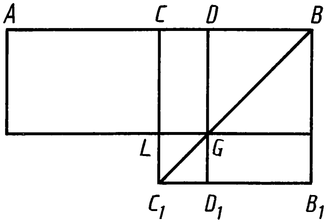


Рис. 3

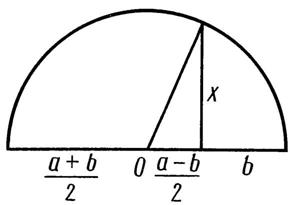


Рис. 4

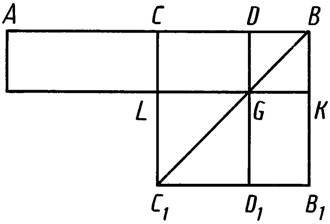


Рис. 5

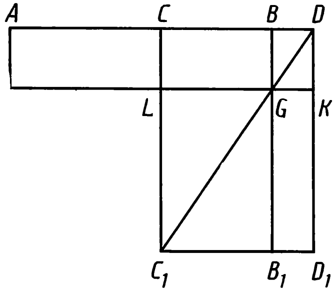


Рис. 6

способ также был положен в основу построения среднего геометрического

$$a:x=x:b.$$

**2.** Приложить к данному отрезку $AB=a$ прямоугольник (с диагональю $AG$) заданной площади $S=b^2$ так, чтобы часть площади, недостающей до полного прямоугольника (с диагональю $AK$), была квадратом (с диагональю $DK$) (рис. 5).

Пусть $x$ — сторона квадрата.

По условию задачи $b^2=(a-x)x$.

Из рисунка 5 следует, что

$$(a-x)x=S_{CLGD_1B_1B}=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2.$$

С помощью теоремы Пифагора отыскивается отрезок $\frac{a}{2}-x$, а затем $x$. Этот случай приложения площадей называется *эллиптическим* (в переводе с греческого — *недостаток*).

**3.** Приложить к заданному отрезку $AB=a$ (рис. 6) прямоугольник (с диагональю $AK$), имеющий заданную площадь $S=b^2$, так, чтобы избыток над прямоугольником с диагональю $AG$ был квадратом (с диагональю $BK$). Пусть сторона квадрата равна $x$, тогда

$$b^2=(a+x)x.$$

Из рисунка 6 следует, что

$$(a+x)x=S_{CLGB_1D_1D}=\left(\frac{a}{2}+x\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

следовательно, $b^2=\left(\frac{a}{2}+x\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$, откуда с помощью теоремы Пифагора находят отрезок $\frac{a}{2}+x$, а затем и $x$. Этот тип приложения площадей называют *гиперболическим* (в переводе с греческого — *превышение, избыток*).

Очевидно, что подобный метод давал только один положительный корень квадратного уравнения. Древние математики понимали необходимость так формулировать условия задач геометрической алгебры, чтобы они заведомо имели положительное решение. Поэтому на условия задачи они в необходимых случаях накладывали ограничения, *диоризмы*.

Это обстоятельство выявляло ограниченность области применения методов геометрической алгебры. Еще больше возможности геометрической алгебры ограничивались из-за того, что ее объектами оказывались образы размерности не выше второй, так как средствами построения были только циркуль и линейка. Можно, разумеется, представить себе в рамках геометрической алгебры операции с трехмерными образами. Этого, однако, не делалось, причем не только из общих соображений. Оказалось, что существует целый класс задач, не поддающихся решению с помощью циркуля и линейки. Среди них наиболее известны проблемы удвоения куба, трисекции угла и квадратуры круга. Этим была особенно подчеркнута недостаточность геометрической алгебры для того, чтобы играть роль общей математической теории.

Задача об *удвоении куба*, т. е. о построении куба с неизвестным ребром $x$, имеющего объем вдвое больше заданного, сводится к решению кубического уравнения $x^3=2a^3$. Равносильной задачей является задача построения отрезка длины $\sqrt[3]{2}$. Задача была чрезвычайно популярной, о чем говорит дошедшая до нас легенда о требовании оракула на острове Делос увеличить вдвое объем стоящего перед ним кубического жертвенника. Многочисленные попытки решить эту задачу с помощью вычислений в поле рациональных чисел или средствами геометрической алгебры оказались, разумеется, неудачными.

Первого успеха в решении этой задачи добился Гиппократ Хиосский. Он свел ее (точнее говоря, несколько более общую задачу преобразования параллелепипеда в куб) к задаче о нахождении двух средних пропорциональных. В самом деле, пусть параллелепипед, имеющий объем $V=a_1b_1c_1$, преобразован в другой с квадратным основанием, т. е. имеющий объем $V=a^2b$, что осуществимо средствами геометрической алгебры. Этот параллелепипед нужно преобразовать в куб с ребром $x$, т. е. $x^3=a^2b$. Ребро искомого куба определяется, по Гиппократу, из пропорций $a:x=x:y=y:b$. Возможно, что проблема удвоения куба воспринималась как пространственный аналог задачи квадрирования плоских фигур. В таком случае постановка задачи Гиппократом является обобщением соответствующей плоской задачи о вставке одной средней пропорциональной: $a:x=x:b$.

Для решения задачи Гиппократа о вставке двух средних пропорциональных были разработаны новые методы. В большинстве они сводились к исследованию геометрических мест, т. е. кривых, выражаемых уравнениями $x^2=ay$; $xy=ab$; $y^2=bx$. Две средние пропорциональные между $a$ и $b$ определялись как координаты точки пересечения двух из этих геометрических мест.

Последние, в свою очередь, получили стереометрическую интерпретацию как сечения конусов вращения.

История задачи об удвоении куба является одним из примеров того, как происходит обогащение математических методов. Воздействие этой задачи было одной из причин того, что конические сечения вошли в математику, что они стали в античной математике средством решения таких задач, которые невозможно решить с помощью циркуля и линейки. Впрочем, для решения задачи удвоения куба применялись и другие способы. Эратосфен (ок. 276—194 до н. э.), например, построил прибор (мезолабий), удобный для приближенного удвоения куба. Однако ни один из методов не влиял так сильно на развитие античной математики, как метод конических сечений.

Дальнейшая судьба рассматриваемой задачи связана с проблемой, возможно ли принципиально решить ее построениями с помощью циркуля и линейки. Вместе с развитием алгебры постановка задачи приобрела алгебраическую форму: может ли операция извлечения кубического корня из рационального числа быть сведена к конечному числу извлечений квадратного корня? Сомнение в возможности такого решения задачи высказал впервые в 1637 г. Декарт. Но только через 200 лет задача удвоения куба получила окончательное разрешение. В 1837 г. Ванцель доказал, что кубические иррациональности не принадлежат ни полю рациональных чисел, ни его расширениям посредством присоединения квадратичных иррациональностей.

Второй знаменитой задачей античной древности, не поддававшейся решению средствами геометрической алгебры, была задача о *трисекции угла*, т. е. о разделении произвольного угла на три равные части. Эта задача, как и предыдущая, сводится к решению кубического уравнения, что очевидно из следующего тригонометрического соотношения: $\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}$, или $a = 4x^3 - 3x$. Многочисленные попытки произвести трисекцию угла с помощью только циркуля и линейки не могли быть успешными и приводили в лучшем случае к сознанию необходимости введения новых методов.

Уже в V в. до н. э. Гиппий из Элиды применил для решения задачи о трисекции угла трансцендентную кривую — *квадратрису,* определенную следующим образом. Пусть в прямоугольнике $ABCD$ (см. рис. 7) сторона $BC$ равномерно смещается параллельно самой себе до совпадения с $AD$. За это же время сторона $AB$ вращается вокруг $A$ по часовой стрелке до совпадения с прямой $AD$. Геометрическое место пересечений этих двух сторон образует кривую — квадратрису, наличие которой позволяет свести задачу деления угла на любое число равных частей к задаче деления отрезка $AB$ (или $CD$) на равные части. Точка $G\left(AG = \frac{2r}{\pi}\right)$ пересечения квадратрисы со стороной $AD$ доопределялась по непрерывности умозаключениями, которые могут

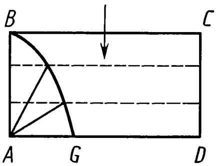


Рис. 7

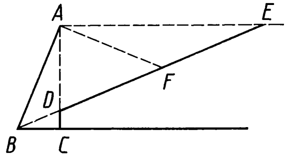


Рис. 8

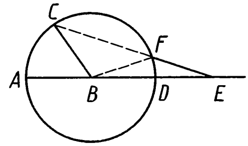


Рис. 9

быть примером одной из первоначальных форм метода пределов. Другим методом решения задачи о трисекции угла был *метод вставок*. Под вставкой понимается построение отрезка прямой, концы которого находятся на заданных линиях и который (или его продолжение) проходит через данную точку. Приведем примеры вставок, применявшихся для трисекции угла

Вставка $DE=2AB$ (рис. 8).

$DF=FE=AB$;

$\angle ABF=\angle AFB=2\angle AEF=$
$=2\angle CBD$;

$\angle CBD=\frac{1}{3}\angle ABC.$

Вставка $FE=AB$ (рис. 9).

$\angle DEF=\frac{1}{2}\angle BFC=$
$=\frac{1}{2}\angle FCB=\frac{1}{3}\angle ABC.$

Вставки осуществлялись механически с помощью скользящей линейки, на которой заранее намечен размер вставки. Линейку вращали, заботясь о том, чтобы одна метка двигалась по одной из заданных линий до тех пор, пока другая метка не попадала на другую линию.

Трисекция угла имеет столь же долгую историю, как и удвоение куба. Сведéние ее к кубическому уравнению было осознано только к IX—X вв. н. э. Строгое же доказательство невозможности точной трисекции угла циркулем и линейкой есть простое следствие из упомянутого выше результата Ванцеля.

Третьей знаменитой задачей древности является *квадратура круга*, т. е. задача об отыскании квадрата, равновеликого данному кругу. Эту задачу в античной Греции рассматривали в двух аспектах: точном и приближенном. Последний аспект задачи привел к введению приближения площади круга вписанными или описанными многоугольниками и к приближенным вычислениям числа $\pi$. Огромное же количество попыток точно квадрировать круг не могло привести к успеху вследствие трансцендентной природы этой задачи.

В самом деле, пусть отрезок $r_0$ — радиус данного круга, тогда сторона $x$ равновеликого квадрата находится по формуле $x=$ $=r_0\sqrt{\pi}$. Задача сведена к графическому умножению отрезка $r_0$ на число $\sqrt{\pi}$. Такое умножение можно выполнить лишь в случае, если это число является корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, разрешимого в квадратных радикалах. Следовательно, строгую и полную трактовку задача квадратуры круга

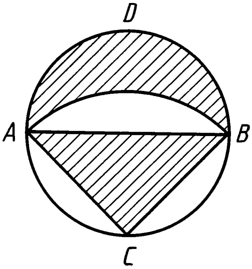


Рис. 10

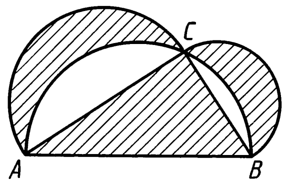


Рис. 11

может получить только в результате выяснения арифметической природы числа $\pi$. Решение же этой проблемы растянулось на много веков.

Только в конце XVIII в. И. Ламберт и А. Лежандр сумели доказать, что $\pi$ не является рациональным числом. Трансцендентность же этого числа, т. е. тот факт, что оно не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, была доказана в 1882 г. Ф. Линдеманом (1852—1939).

Античные математики, стремившиеся теоретически точно решить задачу о квадратуре круга, этого, разумеется, не знали. Но их усилия принесли развитию математики большую пользу, обогатив ее новыми фактами и методами. Так, был разработан метод исчерпывания, являющийся предшественником метода пределов. Были введены различные трансцендентные кривые, в первую очередь квадратриса. Наконец, впервые в истории математики были найдены квадрируемые фигуры, ограниченные кривыми линиями. Мы имеем здесь в виду луночки (мениски) Гиппократа Хиосского, образованные дугами окружностей.

Исследования Гиппократа опираются на теорему о том, что в кругах площади подобных сегментов пропорциональны квадратам диаметров.

Первая из квадрируемых луночек вырезана из полукруга дугой радиуса $r\sqrt{2}$, опирающейся на диаметр. Площадь луночки оказывается равной площади равнобедренного прямоугольного треугольника, гипотенузой которого служит диаметр круга (рис. 10). Разновидностью этого результата является теорема о том, что если на сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах построить окружность, то сумма площадей луночек, опирающихся на катеты, будет равна площади треугольника (рис. 11).

Другой вид луночек получается, когда вокруг трапеции со сторонами 1, 1, 1, $\sqrt{3}$ описывают окружность, а на хорде $\sqrt{3}$ строят сегмент, подобный сегментам, отсекаемым остальными хордами. Площадь полученной луночки равна площади исходной трапеции. Наконец, внешняя дуга третьей луночки меньше полуокружности.

Появление квадрируемых луночек[1] вызвало естественные вопросы: как велик класс квадрируемых луночек? Все ли их виды найдены? Существуют ли другие луночки, площади которых тоже выражаются с помощью квадратичных иррациональностей через входящие в их построение линейные элементы? Однако ответ на эти вопросы тоже был получен спустя много веков. Только в 1840 г. немецкий математик Клаузен нашел еще две квадрируемые луночки. Вопрос о луночках был полностью исследован только в XX в., когда советские математики Н. Г. Чеботарев и А. В. Дороднов, пользуясь методами теории Галуа, показали, что если угловые меры внешней и внутренней дуг луночек соизмеримы, то других квадрируемых луночек, кроме найденных, не существует. К слову сказать, отношения угловых мер найденных упомянутых выше луночек таковы: $\frac{2}{1}$; $\frac{3}{1}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{1}$; $\frac{5}{3}$.

Открытие несоизмеримостей, как мы уже указывали, поставило в тяжелое положение всю метрическую часть геометрии, теорию подобия и те разделы математики, где приходилось пользоваться начальными формами понятий непрерывности, предельного перехода и т. п. Теория рациональных чисел уже не могла служить основой этих разделов математики. Так, появление иррациональностей обусловило необходимость создания общей теории отношений, способной дать определения и ввести операции, применимые как для рациональных, так и для иррациональных величин.

Первоначальной основой теории отношений античной древности являлся алгоритм попеременного вычитания, известный под названием *алгоритма Евклида.*

Пусть даны два отношения $a:b$ и $c:d$. Поиски общей меры величин, участвующих в отношениях, приводят к следующей цепочке соотношений:

$$
\begin{array}{ll}
\boldsymbol{a:b}; & \boldsymbol{c:d}; \\
a-n_0b\ \ =b_1; & c-m_0d\ \ =d_1; \\
b-n_1b_1\ =b_2; & d-m_1d_1\ =d_2; \\
b_1-n_2b_2=b_3; & d_1-m_2d_2=d_3; \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
$$

В случае, если члены отношения соизмеримы, эта цепочка обрывается; несоизмеримость же не дает конечного алгоритма.

Алгоритм попеременного вычитания эквивалентен представлениям с помощью непрерывных дробей. Например:

$$\frac{a}{b}=n_0+\frac{b_1}{b}=n_0+\frac{1}{\frac{b}{b_1}}=n_0+\frac{1}{n_1+\frac{1}{n_2+}}.$$

---

[1] См.: Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века.— М.; Л.: ГТТИ, 1938.— С. 60—61.

Сравнение последовательностей $n_0$, $n_1$, $n_2$, ..., и $m_0$, $m_1$, $m_2$, ... позволяет установить между отношениями понятия равенства и неравенства, а также сравнивать их по величине. Пусть $k-1$ элементов обеих последовательностей совпадают. Тогда из условия $n_k > m_k$ следует, что $a:b < c:d$, если $k$ нечетно, и $a:b > c:d$, если $k$ четно; из условия $n_k < m_k$ следует, что $a:b < c:d$ в случае четности $k$ и $a:b > c:d$ в случае его нечетности.

Однако попытка ввести операции над отношениями, определенными таким образом, сразу натолкнулась на серьезные математические трудности. Например, чтобы ввести умножение отношений, надо было найти способ определения неполных частных дроби-произведения через неполные частные дробей-сомножителей. Для этого и сейчас не существует никакой сколько-нибудь элементарной формулы. Наконец, в то время не существовало еще общего понятия величины. В силу этих обстоятельств алгоритм Евклида не сделался основой теории отношений.

Следующая концепция античной общей теории отношений связана с именем Евдокса (ок. 406 — ок. 355 до н. э.). Ему же приписывается создание теории пропорций. Что же относится к теории отношений, то построена она была, по всей видимости, следующим образом.

Во-первых, произведено обобщение понятия величины посредством подчинения его системе пяти аксиом.

**1.** Если $a=b$ и $c=b$, то $a=c$.

**2.** Если $a=c$, то $a+b=c+b$.

**3.** Если $a=c$, то $a-b=c-b$.

**4.** Совмещающиеся равны.

**5.** Целое больше части.

Во-вторых, введена аксиома однородности: $a$ и $b$ могут иметь отношение, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга, т. е. для любых конечных $a$ и $b$ существуют натуральные числа $m$ и $n$ такие, что $na > b$ и $mb > a$. Эта аксиома была введена для того, чтобы исключить так называемые неархимедовы величины, например роговидные углы.

Отношения введены в теорию Евдокса через определение их равенства. Именно равенство двух отношений $a:b=c:d$ считается установленным, если из трех условий $ma > nb$, $ma < nb$, $ma=nb$ соответственно вытекают три следствия $mc > nd$, $mc < nd$, $mc=nd$ для любой пары натуральных чисел $m$ и $n$. Существует предположение, что подобное определение возникло как абстракция процедуры измерения и сравнения отрезков посредством их рациональных приближений. Это подтверждается в отношениях порядка между отношениями в теории Евдокса. Именно $a:b > c:d$, если существует пара натуральных чисел $m$ и $n$ такая, что $ma > nb$ и $mc \leqslant nd$. Отсюда следует, что $c:d \leqslant \frac{m}{n} < a:b$, т. е. что между двумя неравными отношениями можно вставить рациональное число. Можно полагать, что современная идея рациональных приближений действительных чисел произошла из теории отношений Евдокса.

В этой теории введена только одна операция составления отношений, соответствующая операции умножения действительных чисел. Если существуют два отношения $a:b$ и $b:c$, то из них можно составить отношение $a:c$. Это отношение называется двойным.

Возможно составление и более сложных отношений, например тройного. В случае, если надо составить отношения $a:b$ и $c:d$, необходимо преобразовать одно из них, например второе, предварительно отыскав четвертую пропорциональную: $c:d=b:x$.

Введение только одной операции объясняется тем, что теория Евдокса применялась лишь в учении о подобии, где служила основой теории пропорций, а также при определении площадей и объемов.

Мы уже упоминали о некоторых аналогах между античной теорией отношений и современными теориями действительного числа. Наибольшее основание для подобных аналогий дает теория сечений Дедекинда. В самом деле, каждая пара архимедовых величин $a$ и $b$, участвующих в отношении $a:b$, по теории Евдокса, производит разбиение пар целых чисел $m$, $n$ на классы. Те пары, для которых справедливо соотношение $ma>nb$, могут быть включены в один класс, те же, для которых справедливо соотношение $ma<nb$,— в другой класс. Пару $m_0$, $n_0$, осуществляющую равенство $m_0a=n_0b$, можно отнести в один из предыдущих классов. Сам Дедекинд не отрицал возможности подобной аналогии, указывая лишь на то, что в теории Евдокса не учтен фактор непрерывности.

Однако различия между теорией отношений Евдокса и теорией сечений Дедекинда этим замечанием не исчерпываются. Дело в том, что первая из них осуществляет разбиение пар целых чисел на классы, но не доказывает обратного. Именно не доказывается, что любому такому разбиению соответствует некоторая пара архимедовых величин, определяющих это разбиение. Кроме того, не определяются условия, которым должны удовлетворять множества пар целых чисел, чтобы быть классами разбиения, т. е. не быть пустыми, не пересекаться и обладать свойством односторонности любого элемента одного множества по отношению к любому элементу другого множества.

Наконец, у Дедекинда предварительно определены все четыре действия арифметики, тогда как у Евдокса введена только одна операция, а множество пар целых чисел осталось неупорядоченным. Иначе говоря, вещественные числа Дедекинда образуют поле, тогда как отношения Евдокса образуют группу.

Дальнейшее развитие античной теории отношений пошло по пути трактования отношений как обобщенных чисел и отождествления их с дробями. Так поступали Архит, Архимед, Герон и многие другие ученые. В этом сказалось влияние практики, требовавшей развития вычислительно-алгоритмических методов и распространения их на все более широкие классы чисел.

Математика Древней Греции содержала первые аксиоматические системы, столь характерные для современной математики. Рассмотрим вопрос о том, как происходило их формирование.

Евклид

Первые математические теории, абстрагированные из конкретных задач или из совокупностей однотипных задач, создали необходимые и достаточные предпосылки для осознания самостоятельности и своеобразия математики. Это в свою очередь возбудило у античных математиков стремление систематизировать факты математики и логически последовательно изложить ее основы. Подобная работа — необходимый закономерный акт любой науки, служащий отправным пунктом для ее дальнейшего развития. В античной математике процесс систематизации и обобщения дал значительные результаты к IV в. до н. э. Этот процесс по существу являлся частью аналогичного процесса, происходившего во всей системе естественнонаучных знаний и нашедшего яркое выражение в философских взглядах Аристотеля. Огромное влияние на математику того времени оказали и успехи логики. Сложившиеся основные формы мышления уже были систематизированы и исследованы, были выдвинуты принципы построения дедуктивной науки. Последняя стала рассматриваться как логическая усложняющаяся система, основанная на первых началах — аксиомах.

Абстрактность предмета математики и установившиеся приемы математического доказательства были основными причинами того, что математика стала излагаться как дедуктивная наука, представляющая логическую последовательность теорем и задач на построение и использующая минимум исходных положений. Геометрическая форма, преобладавшая в математике античной Греции, как мы уже указывали, ведет свое происхождение в основном от установления факта большей полноты множества отрезков по сравнению с множеством рациональных чисел. Сочинения, где в то время излагались аксиоматические системы математики, назывались «Началами».

Первые «Начала», о которых дошли до нас сведения, были написаны Гиппократом Хиосским. Встречаются упоминания и о «Началах», принадлежащих другим авторам. Однако все эти сочинения были забыты и утеряны с тех пор, как появились «Начала» Евклида.

Евклид жил в III в. до н. э. в Александрии. Его сочинение получило всеобщее признание как система математических знаний, логическая строгость которой оставалась непревзойденной в течение свыше двадцати веков. Все это время люди изучали геометрию по Евклиду. Его «Начала» до сих пор лежат в основе систематических школьных курсов геометрии. Научные исследования по математике, в особенности элементарной, в очень большой степени опираются на систему Евклида, иногда подражая даже форме его изложения.

«Начала» содержат тринадцать книг, каждая из которых состоит из последовательности теорем. Иногда к этим книгам добавляют книги 14 и 15, принадлежащие другим авторам и близкие по содержанию к последним книгам Евклида. Первой книге предпосланы определения, аксиомы и постулаты. Определения имеются и в некоторых других книгах (2—7, 10, 11). Аксиом и постулатов в остальных книгах «Начал» нет.

*Определения* — это предложения, с помощью которых автор вводит математические понятия, поясняя их. Например, «точка есть то, что не имеет частей», «куб есть телесная фигура, заключающаяся между шестью равными квадратами» и т. п. Эти предложения Евклида в ходе истории много раз подвергались критике с точки зрения их полноты и логической определенности. Однако равноценной или более совершенной системы определений предложено не было. Дело свелось к тому, что в наше время при аксиоматическом построении математической теории единственным способом описания объектов этой теории и их свойств является сама система аксиом, а объекты вводятся как первичные неразъясняемые сущности. Что же касается определений Евклида, то их следует рассматривать как исторически сложившиеся к его времени абстракции реальных вещей, введение которых в математику освящено традицией. Это не такой уж редкий, если не сказать, наиболее часто встречающийся в истории способ введения математических определений.

*Аксиомы*, или общие понятия, у Евклида — это предложения, вводящие отношения равенства или неравенства величин. Аксиом в «Началах» пять. Перечислим их.

**1.** Равные одному и тому же, равны и между собой.

**2.** Если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.

**3.** Если от равных отнять равные, то и остатки будут равны.

**4.** Совмещающиеся друг с другом равны между собой.

**5.** Целое больше части.

В число исходных положений «Начал» входят *постулаты*, т. е. утверждения о возможности построений. С их помощью Евклид обосновывает все геометрические построения и алгоритмические операции. Постулатов тоже пять.

**1.** Через две точки можно провести прямую.

**2.** Отрезок прямой можно продолжить неограниченно.

**3.** Из всякого центра любым расстоянием можно описать окружность.

**4.** Все прямые углы равны между собой.

5. Если две прямые, лежащие в одной плоскости, пересечены третьей и если сумма внутренних односторонних углов меньше двух прямых, то прямые пересекутся с той стороны, где это имеет место.

Д. Гильберт

В различных изданиях «Начал», а ранее того переписчиками и комментаторами система аксиом и постулатов Евклида видоизменялась и дополнялась, причем чаще всего неудачно. Разумеется, критика постепенно вскрывала логические пробелы системы исходных положений Евклида: логическую перегруженность определений, необеспеченность возможности наложения фигур, отсутствие критериев пересечений окружностей и прямых (теорем существования) и другие более мелкие недостатки.

Однако первые реальные успехи в создании системы аксиом геометрии, более соответствующей возрастающим требованиям математической строгости, были достигнуты только к концу XIX в. в работах Паша (1882), Пеано (1889) и Пиери (1899). Наиболее распространенная в настоящее время и общепризнанная система аксиом Д. Гильберта в первой редакции появилась в 1899 г. в сочинении «Основания геометрии».

Перейдем к обзору содержания евклидовых «Начал». Первые шесть книг *планиметрические*, из них книги 1—4 содержат ту часть планиметрии, которая не требует применения теории пропорций. *Первая* книга вводит основные построения, действия над отрезками и углами, свойства треугольников, прямоугольников и параллелограммов, сравнение площадей этих фигур. Завершают первую книгу теорема Пифагора и обратная ей.

Некоторые характерные особенности метода математического суждения и формы изложения Евклида видны уже из первой книги.

а) Метод рассуждений Евклида всегда синтетический. Для доказательства какой-либо теоремы он исходит из заведомо справедливого утверждения, в конечном счете опирающегося на систему основных положений. Из этого последнего он развивает последовательность следствий, приводящих к искомому утверждению. Обратный путь рассуждений (приняв искомую теорему за доказанную, вывести из нее последовательность следствий, вплоть до того, как будет получено заведомо верное утверждение) в «Началах» в качестве доказательств не употребляется. В противоположность синтезу древние называли этот метод анализом.

б) Доказательства строятся по единой схеме, состоящей из следующих частей:

— формулировка задачи или теоремы;
— введение чертежа для формулировки данных задачи;
— формулировка по чертежу искомого;
— введение вспомогательных линий;
— доказательство в собственном смысле;
— объявление того, что́ доказано и что доказанное решает задачу или адекватно поставленной теореме.

В несколько упрощенной форме эта схема стала традиционной и дошла до наших дней как классический образец математического рассуждения, в известном смысле обязательный для математиков.

в) Средства геометрического построения — циркуль и линейка — принципиально не употребляются как средства измерения. Линейка не имеет мерных делений. Поэтому в «Началах» идет речь не об измерении длин отрезков, площадей фигур и объемов тел, а лишь об их отношениях.

Во *второй* книге рассматриваются отношения между площадями прямоугольников и квадратов, подобранные таким образом, что они образуют геометрический аппарат для интерпретации алгебраических тождеств и для решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям, т. е. геометрическая алгебра. *Третья* книга трактует о свойствах круга и окружности, хорд и касательных, центральных и вписанных углов. *Четвертая* книга посвящена свойствам правильных многоугольников: вписанных и описанных, а также построению правильных 3-, 4-, 5-, 6- и 15-угольников.

В *пятой* книге «Начал» развивается общая теория отношений величин, являющаяся прообразом теории действительного числа в форме, соответствующей дедекиндовым сечениям. Мы уже упоминали об этой теории как о теории Евдокса, введенной в античную математику в качестве общей теории, равно пригодной как для чисел, так и для отрезков прямой. В пятой книге «Начал» после введения отношений, их равенств и неравенств доказываются другие элементарные свойства, например: если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$, а также $\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}$ и т. д. В последующих предложениях развивается теория пропорций, в том числе производных (т. е. образованных допустимыми перестановками и другими преобразованиями членов пропорции) и сложных (т. е. образованных из нескольких данных пропорций, например: если $\frac{a}{b}=\frac{d}{e}$ и $\frac{b}{c}=\frac{e}{i}$, то $\frac{a}{c}=\frac{d}{i}$ и т. п.).

Геометрические приложения теории отношений включены в *шестую* книгу. В ней, например, доказаны теоремы об отношении площадей прямоугольников и параллелограммов, имеющих общую высоту, о пропорциональности отрезков, отсекаемых на сторонах угла парой параллельных прямых, о подобии фигур и отношении площадей подобных фигур и т. п. Здесь же находится группа теорем об эллиптическом и гиперболическом приложении площадей, обобщенном на параллелограммы. Она дает метод геометрического решения задач, сводящихся к решению уравнений вида $ax \pm \frac{b}{c}x^2 = S$ (где $a$, $b$, $c$ — данные отрезки, $S$ — данная площадь, $x$ — неизвестный отрезок), и представляет собой известное обобщение результатов геометрической алгебры.

Следующая группа книг (книги 7—9) содержит некоторый эквивалент теории рациональных чисел. Казалось бы, в этих книгах следовало излагать систему пространственных представлений — стереометрию. Однако непоследовательность только кажущаяся. Дело в том, что в конце «Начал» Евклид исследует правильные многогранники и определяет отношения их ребер к диаметру описанного шара. Эти отношения выражаются, как известно, квадратичными и биквадратичными иррациональностями. Поэтому Евклиду пришлось предварительно рассмотреть построение и классификацию подобных иррациональностей. Чтобы выполнить эту задачу, он опирался на ряд предложений из теории рациональных чисел (соизмеримых отрезков). Рациональные числа в свою очередь Евклид представляет как отношения целых чисел; последние он понимает как собрание единиц. Поэтому так называемые *арифметические* книги «Начал» (книги 7—9) содержат учение о целых числах и их отношениях, взятое в основном из пифагорейской математики. Сохранение принципиально различного смысла понятий числа и общей величины послужило причиной повторения в арифметических книгах многих фактов теории чисел, уже полученных в пятой книге «Начал».

Первая из арифметических книг — *седьмая* — начинается с изложения алгоритма попеременного вычитания. Затем следует ряд предложений теории делимости. Наконец, книга содержит теорию пропорций для рациональных чисел, продолженную в *восьмой* книге, где рассматриваются непрерывные числовые пропорции (т. е. пропорции вида $\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \ldots = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$), и заканчивающуюся в девятой книге. В этой теории по существу вводятся геометрические целочисленные прогрессии, показывается, что отношение членов непрерывной пропорции является древней формой степеней чисел, находится среднее пропорциональное, дается способ отыскания суммы геометрической прогрессии.

Значительную часть *девятой* книги составляет учение о простых числах, причем доказывается, что простых чисел бесконечно много. Доказательство проводится тем же способом, что и сейчас: предположение конечности числа простых чисел опровергается построением еще одного числа, на единицу превышающего произведение всех простых чисел. В ряде теорем рассматриваются свойства четности и нечетности чисел. Книга заканчивается теоремой, утверждающей, что если число $S$ вида $\sum_{k=0}^{n} 2^k$ является простым, то число $S_1 = S \cdot 2^n$ совершенное, т. е.

равно сумме своих делителей, включая единицу и исключая само себя. Вопрос о том, исчерпывают ли числа данного вида все множество совершенных чисел, остается нерешенным и в наше время.

*Десятая* книга «Начал» примечательна в первую очередь громоздкой и сложной классификацией всех 25 возможных видов биквадратичных иррациональностей (т. е. выражений вида $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, где $a$ и $b$ — соизмеримые отрезки), воспроизводить которую здесь мы не считаем целесообразным. В десятой книге в качестве лемм выведены различные, сами по себе важные, предложения. Прежде всего это основная лемма метода исчерпывания о том, что если от данной величины отнять часть, бо́льшую ее половины, с остатком повторить то же и т. д., то при достаточно большом числе шагов можно получить величину, меньшую любой заданной. Кроме того, в десятой книге даны: способ нахождения неограниченного числа «пифагоровых троек» целых чисел, критерий соизмеримости двух величин, основанный на алгоритме попеременного вычитания, отыскание общей наибольшей меры двух и трех рациональных чисел (соизмеримых величин) и др.

Последние три книги (11—13) «Начал» *стереометрические. Одиннадцатая* книга открывается большим числом определений, что вполне естественно, так как в предыдущих книгах вопросы стереометрии не рассматривались. Затем следует ряд теорем о взаимных расположениях прямых и плоскостей в пространстве и теоремы о многогранных углах. Последнюю треть книги составляет рассмотрение отношений объемов параллелепипедов и призм.

Исследование объемов других элементарных тел (пирамид, цилиндров, конусов и шаров) требует обязательного выполнения по существу предельного перехода. В *двенадцатой* книге «Начал» отношения объемов всех этих тел найдены с помощью метода, получившего впоследствии (в XVII в.) название *метода исчерпывания.* Идея этого метода, представляющего своеобразную античную форму метода пределов, состоит в следующем. Евклид утверждает, что подобные правильные многоугольники, вписанные в круги, относятся как квадраты диаметров. Затем круги «исчерпываются» последовательностями правильных вписанных $2n$-угольников ($n=2, 3, 4, \ldots$). Отношения последних при увеличении числа сторон остаются неизменными. После неявного перехода к пределу доказывается (методом от противного), что и площади кругов относятся как квадраты их диаметров. Аналогичные суждения предельного характера проводятся во всех случаях отыскания отношений объемов упомянутых выше тел. Более подробно этот метод будет охарактеризован ниже.

Последняя, *тринадцатая* книга «Начал» содержит построение пяти правильных многогранников: тетраэдра (4-гранника), гексаэдра (6-гранника), октаэдра (8-гранника), додекаэдра (12-гранника), икосаэдра (20-гранника); там же находятся отношения объемов шаров. В заключение доказывается, что других правильных многогранников не существует.

Обзор содержания «Начал» показывает, что это сочинение

Н. И. Лобачевский

представляет собой систему основ античной математики. В нее входят: элементарная геометрия, основы теории рациональных чисел, общая теория отношений величин и опирающиеся на нее теория пропорций и теория квадратичных и биквадратичных иррациональностей, элементы алгебры в геометрической форме и метод исчерпывания. Самое характерное в «Началах» то, что дана система, позволяющая видеть в этом сочинении Евклида античного предшественника современного аксиоматического построения математических теорий. В то же время логическая структура «Начал» отражает исторический путь формирования математических теорий от простейших, типа геометрической алгебры, до более сложных: теории отношений, метода исчерпывания, классификации иррациональностей.

Мы уже упоминали, что «Начала» Евклида оставили неизгладимый след в истории математики и в течение многих веков служили классическим образцом математической строгости и логической последовательности. Однако некоторые особенности «Начал» отражают ряд неблагоприятных для дальнейшего развития математики условий, сложившихся ко времени их написания. Изложение теории чисто геометрическое, даже числа представлены как отрезки, совершенно отсутствуют вычислительные методы. Геометрические средства также ограничены: в «Началах» нет теории конических сечений, алгебраических и трансцендентных кривых.

Все эти недостатки «Начал» можно было бы до известной степени оправдать специфическими целями составителя. Однако в условиях античности этот первый опыт аксиоматического изложения математики мог иметь столь резко выраженные ограничительные тенденции только под влиянием общих ограничительных тенденций идеалистической философии. Поэтому можно сказать, что «Начала» Евклида отражают как высокий уровень теоретического развития математики, так и неблагоприятную для ее дальнейшего развития общественно-экономическую и идеологическую обстановку конца греческой античности.

В течение всей многовековой истории математики «Начала» являются фундаментом всех геометрических изысканий. Даже решающее изменение всей системы геометрии, вызванное введением в начале XIX в. в работах Н. И. Лобачевского (1792—1856) неевклидовой геометрии, в значительной степени связано с попытками усовершенствования «Начал».

«Начала» Евклида до нашего времени составляют основу школьных учебников геометрии, число их изданий огромно. Неоднократно они были изданы в России и в СССР. Первое издание «Начал» на русском языке появилось в 1739 г. Последнее по времени издание «Начал» вышло в трех томах в течение 1948—1950 гг. Оно обстоятельно комментировано. Знакомство с «Началами» Евклида весьма полезно всякому математику в наши дни.

При построении математических теорий в античной Греции рано выделился специфический класс проблем, для решения которых оказалось необходимым исследовать предельные переходы, бесконечные процессы, непрерывность и другие понятия, которые мы привыкли связывать с математическим анализом. Уже одно из первых открытий теоретического характера — обнаружение несоизмеримости величин — поставило задачу рационального объяснения подобных проблем. В данном случае они связаны: а) с неограниченной продолжаемостью процесса нахождения общей меры; б) с бесконечной малостью последней и в) с тем, что она должна содержаться бесконечное множество раз в сравниваемых величинах. С этой группой проблем вскоре были сближены геометрические, решение которых приводило к аналогичным затруднениям (определение длин, площадей и объемов).

Некоторые группы античных ученых искали выход из этих затруднений в применении к математике атомистических философских воззрений. Примером наиболее яркого выражения подобного подхода является натурфилософская школа Демокрита. Демокрит (ок. 460—370 до н. э.) считал, что все тела состоят из малых атомов — первовеличин. Тела различаются между собой по форме, положению и способу соединения составляющих их атомов. Некоторые его высказывания о бесконечно малых и о применении их к определению некоторых геометрических величин отражают его атомистические взгляды.

Однако о математической стороне подобных высказываний и исследований известно слишком мало. Гораздо больше известно о возражениях их научных противников. Мы имеем здесь в виду *апории* Зенона (ок. 490—430 до н. э.), т. е. логические парадоксы, к которым приводят попытки получать непрерывные величины из бесконечного множества бесконечно малых частиц.

Среди апорий наиболее известны: а) дихотомия, т. е. невозможность осуществить движение, так как путь может быть дели́м до бесконечности (пополам, еще раз пополам и т. д.) и поэтому надо последовательно преодолевать бесконечное множество участков пути (математически это сводится к отрицанию того факта, что $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$); б) безрезультатные попытки Ахилеса догнать черепаху, так как ему надо последовательно достигать тех мест, где только что находилась черепаха, т. е. исчерпывать бесконечную последовательность отрезков пути (математически это оказалось возражением против уже известного того факта,

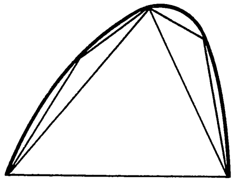

Рис. 12

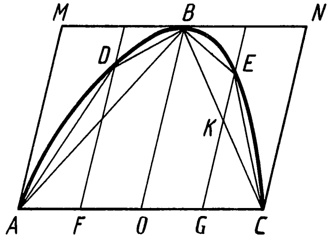


Рис. 13

что $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^k}=\frac{n}{n-1}$); в) невозможность полета стрелы, если время считать суммой дискретных точек.

Апории Зенона убедительно показали, что если искать точные доказательства и логически исчерпывающие решения задач, нельзя пользоваться бесконечностью, опираясь на наивные атомистические соображения. Для подобных целей необходимо разрабатывать и привлекать методы, содержащие наряду с разновидностями суждений о бесконечно малых элементы предельного (по существу) перехода.

Одним из самых ранних методов такого рода является *метод исчерпывания.* Изобретение его приписывают Евдоксу. Примеры применения метода приведены в двенадцатой книге «Начал» Евклида и в ряде сочинений Архимеда. Метод исчерпывания применялся при вычислении площадей фигур, объемов тел, длин кривых линий, нахождении *подкасательных*[1] к кривым и т. п. Математическая сущность метода (разумеется, в форме, несколько отличной от формы изложения древних греков) состоит в следующем.

1. Если нужно, например, квадрировать фигуру $B$ (рис. 12), то в качестве первого шага в эту фигуру вписывается последовательность других фигур: $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., $A_n$, ..., площади которых монотонно возрастают и для каждой фигуры из этой последовательности они могут быть определены (фигура $A_1$ на рис. 12 — треугольник, $A_2$ — пятиугольник и т. д.).

2. Фигуры $A_n (k=1, 2, 3, ...)$ выбираются таким образом, чтобы положительная разность $S_B - S_{A_k}$ могла быть сделана сколь угодно малой.

3. Из факта существования и построения описанных фигур делается вывод об ограниченности сверху последовательности площадей «исчерпывающих» вписанных фигур.

4. Неявно, обычно с помощью других теоретических и практических соображений, отыскивается $S_A$ — предел последовательности площадей вписанных фигур.

---

[1] Если отрезок касательной от точки касания до точки пересечения касательной с одной из осей координат (чаще с осью абсцисс) спроектировать на эту ось, то проекцию отрезка называют подкасательной.

5. Доказывается для всякой задачи отдельно, что $S_A = S_B$, т. е. что предел последовательности площадей вписанных фигур равен площади фигуры $B$. Доказательство ведется, как правило, от противного. Пусть $S_A \neq S_B$. Тогда $S_B > S_A$ или $S_B < S_A$. Допустив, что $S_B > S_A$, выберем такой элемент последовательности $S_{A_n}$, чтобы $S_B - S_{A_n} < S_B - S_A$. Это возможно для любой фиксированной разности $S_B - S_A$. Но тогда должно выполняться неравенство $S_{A_n} > S_A$, что невозможно ввиду того, что в действительности $S_A > S_{A_n}$ для любого конечного $n$. Противоположное допущение $S_B < S_A$ тоже приводит к противоречию, потому что можно подобрать такое $A_n$, чтобы $S_A - S_{A_n} < S_A - S_B$. Но тогда должно получиться, что $S_{A_n} > S_B$, а это невозможно.

Методом исчерпывания доказывается, таким образом, единственность предела. В сочетании с другими методами он полезен для нахождения предела. Однако решения вопроса о существовании предела этот метод дать не может.

В качестве примера метода исчерпывания приведем рассуждения Архимеда о *квадратуре параболы.* Требуется найти площадь косого параболического сегмента $ABC$, отсекаемого хордой $AC$. Касательная к параболе в точке $B$ диаметра $BO$, сопряженного с данной хордой $AC$, параллельна последней, т. е. $MN \parallel AC$ (рис. 13).

Первой фигурой $A_1$ последовательности «исчерпывающих» фигур является $\triangle ABC$. Вторая фигура $A_2$ получается добавлением к $\triangle ABC$ двух треугольников $ADB$ и $BCE$. Для построения последних делят $AC$ на 4 равные части и проводят $FD \parallel OB$ и $GE \parallel OB$. Аналогично строятся фигуры $A_3$, $A_4$, ..., $A_n$. Из свойств параболы получается:

$$S_{\triangle ABC} = 4(S_{\triangle ADB} + S_{\triangle BEC}).$$

В самом деле, примем $OB$ и $MN$ соответственно за оси $x$ и $y$ косоугольной системы координат[1]. Координаты точки $E\left(\xi;\ \frac{y}{2}\right)$ удовлетворяют условию $\left(\frac{y}{2}\right)^2 = m\xi$, откуда $\xi = \frac{y^2}{4m}$.

$$GE = x - \xi = \frac{y^2}{m} - \frac{y^2}{4m} = \frac{3}{4}\cdot\frac{y^2}{m} = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}OB.$$

$$GK = \frac{1}{2}OB, \text{ поэтому } KE = \frac{1}{4}OB \text{ и } GK = 2\,KE.$$

Теперь уже можно сравнивать площади треугольников:

$$S_{\triangle CKG} = 2\,S_{\triangle KCE} = S_{\triangle BCE};$$
$$S_{\triangle OBC} = 4S_{\triangle GKC} = 4S_{\triangle BCE}.$$

Аналогичные рассуждения приводят к равенству $S_{\triangle AOB} = 4\,S_{\triangle ABD}$, и упомянутое свойство параболы доказано.

---

[1] Мы применили здесь метод координат, чтобы сделать изложение более компактным.

Итак, если $S_{A_1}=S_{\triangle}$, то $S_{A_2}=S_{\triangle}+\frac{S_{\triangle}}{4}$, $S_{A_3}=S_{\triangle}+\frac{S_{\triangle}}{4}+$ $+\frac{S_{\triangle}}{4^2}$, ..., $S_{A_n}=S_{\triangle}+\frac{S_{\triangle}}{4}+\ldots+\frac{S_{\triangle}}{4^{n-1}}$. Теперь требуется доказать, что указанная последовательность фигур действительно «исчерпывает» параболический сегмент, т. е. что $S-S_{A_n}<\varepsilon$, где $n=n(\varepsilon)$.

Для этого описывается параллелограмм $AMNC$, у которого $AM \parallel NC \parallel BO$, $S_{A_1}=\frac{1}{2}S_{AMNC}$, но $S<S_{AMNC}$, значит, $S_{A_1}>\frac{1}{2}S$ и $S-S_{A_1}<\frac{1}{2}S$. Фигура $A_1$ «исчерпала» больше половины площади $S$, а последующие фигуры будут «исчерпывать» больше половины соответствующих остатков площади $S$. Удовлетворена основная лемма метода исчерпывания: если от данной величины отнять часть, большую ее половины, затем отнимать снова и снова, то остаток может быть сделан сколь угодно малым.

Следующим шагом должно быть нахождение предела последовательности вписываемых фигур. В сочинениях древних авторов обычно этот шаг не разъясняется. Однако данный случай составляет исключение. Архимед доказывает, что $S_{A_n}=S_{\triangle}+$ $+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{S_{\triangle}}{4^k}=\frac{4}{3}S_{\triangle}-\frac{1}{3}\cdot\frac{S_{\triangle}}{4^{n-1}}$, а раз вычитаемое может быть сделано сколь угодно малым, то он утверждает, что $S=\frac{4}{3}S_{\triangle}$. При этом Архимед опирается на следующую любопытную теорему.

Пусть $S=A+B+C+D+E$, причем $A:B=B:C=C:D=$ $=D:E=4:1$. Тогда $S=\frac{4}{3}A-\frac{1}{3}E$. В самом деле,

$$\frac{4}{3}S=\frac{4}{3}(A+B+C+D+E)=\frac{4}{3}A+$$
$$+\frac{1}{3}(A+B+C+D+E)-\frac{1}{3}E;$$
$$\frac{4}{3}S=\frac{4}{3}A+\frac{1}{3}S-\frac{1}{3}E,$$

или $S=\frac{4}{3}A-\frac{1}{3}E$. Теорему можно распространить на любое число слагаемых.

Решение задачи завершается доказательством единственности результата $S=\frac{4}{3}S_{\triangle}$ методом от противного.

Логическая строгость метода исчерпывания оставалась непревзойденной в течение многих веков. По существу только в XIX в. были поставлены и начали получать разрешение проблемы, непосредственно вытекающие из сущности античного метода исчерпывания. Однако форма последнего была еще весьма несовершенной. Метод развивался только в связи с конкретными задачами; он не стал абстрактным методом с развитой системой исходных понятий и с единообразными алгоритмами. Единственность предела доказывалась для всякой задачи заново. Этот недостаток не был случайным, частным. Дело в том, что всякая попытка ввести это доказательство раз навсегда для определенного достаточно широкого класса задач неизбежно влекла за собой необходимость объяснить ряд понятий *инфинитезимальной* (инфинитезималь — бесконечно малая) природы. Потребовалось бы дать рациональное объяснение понятий бесконечно близкого приближения, бесконечно малой величины и т. п. Трудностей, связанных с этим, древние математики не могли преодолеть.

Тем не менее метод исчерпывания лежал в основе многих инфинитезимальных методов и выдающихся конкретных достижений античных математиков, в первую очередь Архимеда. Этот замечательный ученый был уроженцем Сиракуз (в южной части Сицилии), сыном астронома и математика Фидия. Для усовершенствования своих знаний он некоторое время работал в Александрии в сотрудничестве с другими крупнейшими математиками. Возвратившись в Сиракузы, Архимед продолжал усиленные научные занятия. В последний период жизни он участвовал в обороне родного города от римских завоевателей, руководя постройкой сложных технических сооружений и изобретая военные орудия. Во время штурма и взятия Сиракуз Архимед был убит, а его библиотека и инструменты разграблены.

Сочинения Архимеда написаны преимущественно в виде писем. До нас дошли десять крупных и несколько более мелких сочинений математического характера. Основной особенностью математических сочинений Архимеда является применение строгих математических методов в механике и физике.

Такая особенность делает труды Архимеда едва ли не наиболее ярким образцом развития прикладных математических знаний, техники вычислений и новых математических методов, в особенности инфинитезимальных, в эпоху поздней античности.

Мы не ставим здесь задачу дать полную характеристику сочинений Архимеда. Рассмотрим только вопросы о взаимопроникновении методов математики и механики в трудах Архимеда, о разработке им метода интегральных сумм (являющегося прообразом определенного интегрирования) и о его так называемых дифференциальных методах.

Многочисленные механические изобретения и открытия Архимеда широко известны. Ему принадлежат: архимедов винт, системы рычагов, блоков и винтов для поднятия и передвижения больших тяжестей, определение состава сплавов взвешиванием их в воде, планетарий, метательные машины и т. д. Известны и теоретические работы Архимеда по механике: «О равновесии плоских фигур» (где изложен закон рычага), «О плавающих телах», «Книга опор» и т. д.

В творчестве Архимеда работы по механике занимали настолько большое место, что механические приемы и аналогии проникли даже в математические методы. До недавнего времени

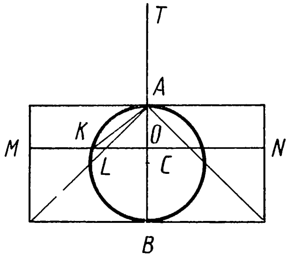


Рис. 14

о таком проникновении нельзя было судить достоверно. Вопрос окончательно прояснился после того, как в 1906 г. было найдено сочинение Архимеда «Послание к Эратосфену (Эфод)» о механическом методе решения геометрических задач. Метод состоял в следующем.

Пусть необходимо, например, вычислить объем шара. Одновременно с шаром строятся конус и цилиндр, радиус основания и высота каждого из которых равны диаметру шара. Затем через все эти тела проводится сечение, параллельное основаниям, на некотором произвольном фиксированном расстоянии от них (рис. 14):

$$AK^2 = OK^2 + OA^2 = OK^2 + OL^2.$$

В то же время $AK^2 = AB \cdot OA$. Следовательно, $OK^2 + OL^2 = AB \cdot OA$, откуда следует равенство $(\pi AB^2) \cdot OA = (\pi OK^2) \cdot AB + (\pi OL^2) \cdot AB$, которое представляет собой соотношение между площадями горизонтальных сечений шара, цилиндра и конуса.

Архимед дает этому соотношению механическую интерпретацию, основанную на правиле рычага, или, что то же самое, двуплечных весов. Именно если принять точку $A$ за точку опоры рычага, то элемент цилиндра, закрепленный в $O$, уравновесит элементы шара и конуса, закрепленные в $T (AT = AB)$. Переходя к объемам тел как к суммам площадей всех произвольных сечений, параллельных друг другу, он получает:

$$V_{\text{ц}} \cdot AC = (V_{\text{ш}} + V_{\text{к}}) \cdot AT = (V_{\text{ш}} + V_{\text{к}}) \cdot 2AC;$$

отсюда

$$V_{\text{ш}} = \frac{1}{2} V_{\text{ц}} - V_{\text{к}}.$$

Но так как

$$V_{\text{к}} = \frac{1}{3} V_{\text{ц}}, \text{ то } V_{\text{ш}} = \frac{1}{6} V_{\text{ц}}, \text{ откуда}$$

$$V_{\text{ш}} = \frac{1}{6} \pi (2r)^2 \cdot 2 = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Тот же способ механической аналогии Архимед применил в сочинении «О квадратуре параболы». Параболическая пластинка представляется подвешенной к одному плечу неравноплечного рычага и разделенной на элементы, каждый из которых уравновешен соответственной нагрузкой на другом плече.

В соответствии с научной традицией своего времени Архимед переводил доказательства, полученные методом механической аналогии, на общепринятый язык метода исчерпывания с обязательным завершением последнего в каждом отдельном случае доказательством от противного.

Следующей разновидностью инфинитезимальных методов античной древности является метод, который можно охарактеризовать как *метод интегральных сумм.* Наиболее яркие примеры применения этого метода находятся в сочинениях Архимеда «О шаре и цилиндре», «О спиралях», «О коноидах и сфероидах». Существо этого метода в применении, например, к вычислению объемов тел вращения состоит в следующем. Тело вращения разбивается на части, и каждая часть аппроксимируется (приближается) описанными и вписанными телами, объемы которых можно вычислить. Сумма объемов описанных тел будет больше, а сумма вписанных тел — меньше объема тела вращения. Теперь остается выбрать аппроксимирующие сверху и снизу тела таким образом, чтобы разность их объемов могла быть сделана сколь угодно малой. Это достигается выбором в качестве указанных тел соответствующих цилиндров (рис. 15).

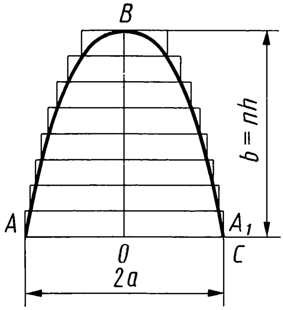

Рис. 15

В качестве примера применения метода интегральных сумм приведем решение задачи вычисления объема эллипсоида вращения в сочинениях Архимеда «О коноидах и сфероидах» (так Архимед называет тела, образованные вращением конических сечений вокруг большой оси: *коноиды* — это параболоиды и гиперболоиды вращения, *сфероиды* — эллипсоиды вращения). Конкретному решению задачи предпослана лемма: если дан сегмент коноида, отсеченный плоскостью, перпендикулярной оси, или сегмент сфероида, отсеченный тем же способом, то можно вписать в него и описать около него фигуры, состоящие из цилиндров равной высоты, таким образом, чтобы описанная фигура превосходила вписанную меньше, чем на любую телесную (объемную) величину.

Итак, даны тело вращения $ABC$ и телесная (объемная) величина $\varepsilon > 0$. Архимед делит диаметр $BO$ на $n$ равных частей и строит описанные и вписанные цилиндры, суммы объемов которых соответственно обозначает $V_{\text{оп}}$ и $V_{\text{вп}}$. Их разность равна объему цилиндра $AA_1$, т. е. $\pi a^2 \cdot \frac{b}{n}$, который подбором достаточно большого $n$ может быть сделан сколь угодно малым.

Теперь можно предположить, что на данном чертеже изображен сегмент эллипсоида вращения и поставлена задача вычислить его объем. В таком случае

$$V_{\text{оп}} = \pi h a^2 + \pi h x_1^2 + \pi h x_2^2 + \ldots + \pi h x_{n-1}^2 = \pi h \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2, \text{ причем } x_0 = a.$$

Задача сведена к суммированию квадратов чисел. Далее

Архимед производит геометрические преобразования, эквивалентные следующим аналитическим преобразованиям: $\frac{x^2}{a^2}+$ $+\frac{y^2}{b^2}=1$, поэтому $x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)$ и для каждого сечения выполняются соотношения

$$x_1^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-h^2);$$
$$x_2^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-(2h)^2);$$
$$x_{n-1}^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-((n-1)h)^2),$$

откуда

$$V_{\text{оп}}=\sum_{k=0}^{n-1}\pi h x_k^2=\frac{\pi a^2 h}{b^2}\left(nb^2-h^2\sum_{v=1}^{n-1}v^2\right),$$

где $v$ — последовательные натуральные числа. Для нахождения сумм квадратов последних Архимед применил геометрические оценки вида

$$\frac{n^3h^2}{3}<\sum_{v=1}^{n-1}(vh)^2<\frac{(n+1)^3h^2}{3},$$

данные им в сочинении «О спиралях». Фактически он производит геометрическую оценку вида

$$\frac{n^3h^3}{3}<\sum_{v=1}^{n}(vh)^2h<\frac{(n+1)^3h^3}{3},$$

откуда (так как $nh=b$)

$$\frac{b^3}{3}<\sum_{v=1}^{n}(vh)^2h<\frac{b^3}{3}+\frac{b^3}{n}+\frac{b^3}{n^2}+\frac{b^3}{3n^3},$$

что до известной степени эквивалентно оценке для $\int_a^b x^2dx$.

Из этих оценок он получает:

$$V_{\text{оп}}>\pi\frac{a^2}{b^2}\cdot h\left(nb^2-\frac{n^3}{3}h^2\right)=\pi a^2 b\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi a^2 b.$$

Аналогично $V_{\text{вп}}<\frac{2}{3}\pi a^2 b$. Но так как согласно лемме $V_{\text{оп}}-$ $-V_{\text{вп}}<\varepsilon$, то искомый объем сегмента

$$V=\frac{2}{3}\pi a^2 b,$$

т. е. равен удвоенному объему конуса с теми же основанием и высотой, что и сегмент. Единственность предела Архимед до-

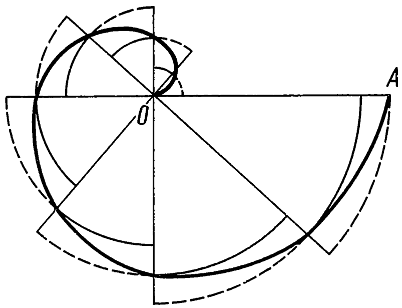


Рис. 16

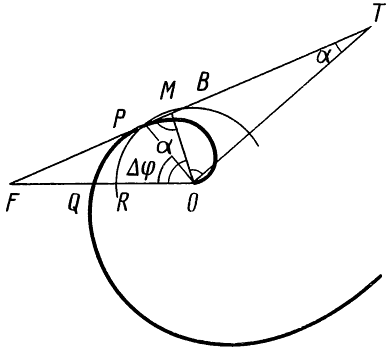


Рис. 17

казывает, как и во всех других случаях, сведением к противоречию.

Приведенный пример показывает, что в античной математике сложился ряд элементов определенного интегрирования, в первую очередь построение верхних и нижних интегральных сумм, аналогичных до известной степени суммам Дарбу.

Другим примером метода интегральных сумм может служить определение первого витка архимедовой спирали $\rho=\varphi$. Спираль вводится кинематически как траектория точки, подвергнутой двум равномерным движениям: вращению луча вокруг точки и движению точки по лучу от центра (рис. 16). Для определения площади первого витка окружность $(r=a)$ делится на $n$ (равных) частей. Вслед за тем строятся две последовательности вписанных и описанных круговых секторов, радиусы которых $\frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \frac{3a}{n}, \ldots, \frac{na}{n}=a$. Их площади $S_k=\frac{\pi r_k^2}{n}$, где $k=1, 2, \ldots, n$.

Последовательности эти образуют вписанную и описанную фигуры, площади которых соответственно больше или меньше площади витка спирали:

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{ka}{n}\right)^2<S<\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{ka}{n}\right)^2, \text{ или}$$

$$\frac{\pi a^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2<S<\frac{\pi a^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2.$$

На основании оценок, приведенных в предыдущем примере, $V_{\text{вп}}<\frac{\pi a^2}{n^3}\cdot\frac{n^3}{3}=\frac{\pi a^2}{3}$, а также $V_{\text{оп}}>\frac{\pi a^2}{3}$. Но разность между аппроксимирующими суммами может быть сколь угодно малой. Следовательно, $S=\frac{\pi a^2}{3}$.

Казалось бы, сходство метода интегральных сумм древних и определенного интегрирования полное. Такое впечатление усиливается и тем, что мы несколько модернизировали форму изложения. Поэтому необходимо отметить и их различие. Дело в том, что метод интегральных сумм древних опирается на интуитивное, строго не определенное понятие площади и не использует арифметико-алгебраический аппарат. В нем не введены и не определены необходимые общие понятия: предела, интеграла, бесконечной суммы и т. д.— и не изучены условия применимости высказываемых теорем. Метод применяется для каждой конкретной задачи без выделения и оформления его общетеоретических основ.

Наряду с методом интегральных сумм в античной математике были разработаны методы, которые ретроспективно могут быть оценены как *дифференциальные*. Примером подобных методов может служить метод нахождения касательной к спирали в сочинении Архимеда «О спиралях».

Задача найти касательную к любой точке $P$ спирали решается обычным способом определения величины соответствующей подкасательной $OT$ (рис. 17). Предварительно доказывается лемма, что $\angle\ OPT<\frac{\pi}{2}$($\angle\ POT=\frac{\pi}{2}$ по построению). Затем рассматривается дифференциальный по существу треугольник $\triangle\ FPR$, образованный радиусом-вектором, близким к данному, дугой $PR$ окружности радиуса $OP$ и продолжением касательной $FP$. Этот треугольник прямоугольный ($\angle PRF=\frac{\pi}{2}$) и приблизительно подобен треугольнику $OPT$, ибо $\angle PTO=\angle FPR$.

Отсюда $\frac{FR}{PR}=\frac{PO}{OT}$, или, если перевести на более удобную для нас символику ($OP=\rho$, $PR=\rho\triangle\varphi$, $FR=\triangle\rho$), $\frac{\triangle\rho}{\rho\triangle\varphi}=\frac{\rho}{OT}$, откуда $OT=\rho^2\frac{\triangle\varphi}{\triangle\rho}$ . Это общее соотношение в случае архимедовой спирали $\rho=\varphi$ примет вид $OT=\rho^2$, или $OT=\rho\varphi$.

Таким образом, метод Архимеда заключается во введении практически достаточно малого треугольника, образованного приращением полярного радиуса-вектора касательной, соответствующей малой дуги окружности и отрезком касательной. Он играет роль дифференциального треугольника, что дает основание квалифицировать метод как инфинитезимальный. К такого рода методам могут быть отнесены и многие другие приемы и методы математиков Древней Греции.

Группа инфинитезимальных методов составляла ту часть античной математики, которая формировалась под влиянием научно-практических запросов и не входила в рамки образуемых в те времена аксиоматических систем. В них вырабатывались элементы новых математических средств, приведших позднее к созданию анализа бесконечно малых. Лейбниц, один из основателей дифференциального и интегрального исчисления, писал, что, когда изучаешь сочинения древних, в особенности Архимеда, перестаешь удивляться достижениям современных математиков.

Тот фактический материал, который мы включили в настоящую главу, предназначается для того, чтобы показать, какими путями начальные, узкопрактические, вычислительные и измерительные знания могли быть преобразованы в систему научных знаний, как математика сделалась наукой. В частности, здесь рассмотрен процесс формирования первых дедуктивных математических теорий (как числовых, так и геометрических) в математике Древней Греции в VI—IV вв. до н. э. Далее показано, как открытие явления несоизмеримости направило математиков по пути, приведшему к обобщениям представлений о выражении величин числами.

Геометрическая алгебра древних показывает, как произошла перекрестная взаимная интерпретация числовых и геометрических понятий математики. В главе рассказано о начальных формах общей теории действительного числа. Сочинение Евклида «Начала» представляет собой образец аксиоматически-дедуктивной системы, математическая строгость которой оставалась непревзойденной в течение многих столетий. Наконец, инфинитезимальные методы своим появлением создали необходимые предпосылки для появления анализа бесконечно малых. Весь этот материал, собранный вместе, позволяет, как мы думаем, получить начальное представление о сложном процессе формирования математической науки.

Наш обзор античной математики является, разумеется, неполным. В данной книге вряд ли возможно выделить для него больше места. Дальнейшее изучение математики античности может дать вдумчивому читателю — математику и педагогу — много нового и важного. Например, он поймет, что высокоразвитая теория конических сечений, в особенности изложенная в сочинениях Аполлония, содержит все необходимое для создания в будущем аналитической геометрии. В сочинениях Зенодора (III—II вв. до н. э.) он найдет начала вариационного исчисления. В сочинениях Диофанта, жившего в III в., перед ним откроется неопределенный анализ, где рассматриваются системы уравнений, где число неизвестных больше, нежели число уравнений. В итоге ему станет понятен и близок общий вывод, что история античной математики богата и поучительна и что ее наследие не только может, но и должно стать неотъемлемой частью математического образования и научной культуры.

Однако, даже когда убеждаешься в том, что математические теории древних имеют много общего с математическими теориями современности, надо быть осторожным с выводами. Иначе можно впасть в одну из (к сожалению, распространенных) ошибок: либо отождествления прошлого с настоящим, либо нигилистического отрыва настоящего от прошлого. Надо всегда уметь выделить специфику исторического развития; в противном случае ошибки упомянутых видов обеднят научное мышление ученого и преподавателя, сузят возможности творческого мышления и действия, сделают их слепыми перед вырисовывающимися контурами будущего.

Уделим несколько слов вопросу о судьбах античной математики, в особенности ее теоретической части. Вслед за временем жизни и деятельности Евклида, Архимеда и Аполлония наступило время быстрого и коренного изменения в математике как по форме, так и по содержанию. Эти изменения в основном были вызваны и обусловлены происходившими грандиозными переменами в экономической, общественно-политической и культурной жизни народов. В экономике главным процессом был распад рабовладельческого способа производства и переход к установлению феодального строя.

Коренные изменения экономической структуры общества сопровождались преобразованиями общественными. Последние происходили, как правило, в обстановке разрушительных войн, губительно воздействующих на науку и культуру. Мировая империя римлян в ходе завоевательных войн разрушила все научные центры и не создала условий для их восстановления и развития. Последующее крушение Рима тоже протекало в обстановке войн и разрушений. Феодальные государства Европы; появившиеся после всех этих событий, были сначала мелкими, хозяйство их — натуральным, образование и просвещение, а также научный и культурный обмен — ничтожными.

Значение Александрии как главного научного центра в это время также падает. Некоторое время там еще ведутся научные исследования. Однако ряд неблагоприятных событий сводил эту работу на нет. Пожары Музейона наносили непоправимый ущерб библиотеке. В начале нашей эры ученые были лишены государственной материальной поддержки. Под давлением реакционного духовенства закрывались нехристианские храмы и находящиеся при них школы. В 412 г. н. э. последняя группа александрийских ученых была разогнана, а впоследствии их руководитель, первая известная в истории женщина-математик Гипатия (370—415), растерзана по наущению христианских священников. Библиотека была уничтожена. Оставшиеся в живых ученые собрались в Афинах. Примерно через 100 лет их объединение было запрещено.

О тех изменениях, которые произошли в математике за этот период времени, мы можем судить по дошедшим до нас сочинениям. Прежде всего резко уменьшился, а затем иссяк поток теоретических сочинений. Результаты, подчас очень важные по существу и изящные по выполнению, делаются редкими, частными, специальными. Все большее место занимают практические задачи. В связи с этим наблюдается некоторое развитие арифметических и алгебраических элементов математики. Появляются и множатся сочинения, являющиеся комментариями других сочинений. Такое обилие комментариев является, несомненно, признаком упадка математического творчества. Однако сочинения комментаторов принесли большую пользу истории науки, сохранив в отрывках или в пересказе многие классические и вообще важные работы. Иногда комментарии оказываются единственным источником сведений об утерянных сочинениях или о забытых достижениях древних математиков. Деятельность комментаторов прекратилась в VI в., после закрытия афинской школы. В странах бассейна Средиземноморья после более чем тысячелетнего плодотворного развития математики наступил длительный перерыв.

Итак, математика Древней Греции представляет собой один из самых ранних примеров становления математики как науки и образования в ней ее главных составных частей. Одной из самых важных особенностей античной математики является возникновение, бурный рост и приостановка развития многих математических теорий.

В рамках упомянутых теорий возникали и совершенствовались элементы более поздних математических наук: алгебры, анализа бесконечно малых, аналитической геометрии, теоретической механики, аксиоматического построения математики. Однако оторванность результатов математических теорий от практики, узость их геометрической формы предопределили ограниченность области и времени их развития. Ограничительные тенденции в выборе объектов и методов математических исследований, привнесенные в математику под влиянием господствующего идеалистического мировоззрения, только усугубляли эти трудности теоретического развития.

Усиление внутренних противоречий развития математики совпало с неблагоприятными общественно-политическими условиями эпохи распада рабовладельческого строя, сложившимися в силу изменения способа производства. Так, экономические факторы конца рабовладельческой формации оказались в конечном счете определяющей причиной временной приостановки теоретического и практического развития математики.

Для нового подъема математической науки был нужен новый подъем производительных сил человеческого общества. В Европе и в районе Средиземноморья этот принципиально новый подъем наступил только спустя много веков — начиная с так называемой эпохи Возрождения, эпохи конца феодализма и начала развития капиталистического способа производства. При этом одним из главных источников новых математических идей было освоение классического наследия математиков Древней Греции: Евклида, Архимеда и др.

## Глава 3

# ИЗ ИСТОРИИ АРИФМЕТИКИ

Люди начинают свое математическое образование с арифметики. Арифметическими знаниями они широко и повседневно пользуются в течение всей своей жизни. Во многом это пользование арифметикой доведено до такого же автоматизма, как и усвоенный в школе навык правильного грамматического написания слов в письменной речи. Вероятно, поэтому у многих людей складывается и на долгие годы, если не на всю жизнь, сохраняется впечатление об элементарности арифметики вообще, о ее подсобной роли, «азбучности» и «донаучности» ее содержания.

Для отдельных лиц, быть может, в подобном заблуждении не было бы большой беды. Но такая приниженная оценка арифметики, к сожалению, распространилась довольно широко и даже проникает в школу. Появилась тенденция к уменьшению места арифметики в математическом образовании, к снижению уровня ее преподавания. В оправдание приводятся различные соображения, вплоть до апелляции к успехам вычислительной техники. Существует мнение, что распространение компьютеров, в особенности компактных, якобы делает излишним внимание к обучению детей арифметике.

Мы не будем комментировать здесь столь странный ход мыслей и неизбежно следующий из него вывод, согласно которому развитие вычислительной техники делает ненужным математическое образование, а общий прогресс техники фатально убивает возможности самостоятельного мышления и действий людей. Мы намерены в настоящей главе разъяснить, что же называют в математике арифметикой, как исторически сложилось определенное понимание ее целей, из чего складывается содержание арифметики и какие существуют связи, как внутри самой арифметики, так и с другими разделами математики и ее приложениями.

В системе математических наук к арифметике относят большую группу задач и теоретических проблем, связанных с характеристиками числовых множеств и с выполнением над их элементами операций, называемых арифметическими. Весь этот материал можно разделить на две части.

Первая включает в себя способы вычислений над элементами числовых множеств, производимых с целью решения задач. Она называется *практической* или *вычислительной*.

Вторая часть содержит возникающие из этих вычислений теоретические проблемы, например: свойства чисел заданных множеств, свойства операций, анализ структуры числовых множеств. Эту группу проблем называют *теоретической* арифметикой.

Арифметические трактовки иногда распространяют на нечисловые множества, получая при этом арифметику матриц, арифметику квадратичных форм и т. п. Арифметика, в особенности теоретическая, тесно, вплоть до взаимопроникновения, связана со многими другими областями математики. Далее мы расскажем об этом конкретно.

То, что наличие практической арифметики можно проследить до самой седой древности, общеизвестно и в доказательствах не нуждается. Интереснее, хотя также логически объяснимо, другое: то, что даже самые ранние письменные источники рассматривают числовые множества, сложные и неоднородные по своему содержанию. Например, в них решают задачи, применяя не только целые числа, но и дроби.

Дело в том, что практика выполнения арифметических операций над числами рано и непреодолимо влечет за собой осознание необходимости расширять понятие числа, обогащать содержание наших представлений о нем. Даже простой пересчет дискретно располагаемых, но поддающихся упорядочению в целях подсчета предметов приводит к понятию *натуральных*, т. е. целых положительных чисел, образующих неограниченно продолжаемую последовательность. Вычитание как операция, обратная сложению, обязательно (рано или поздно) приведет к понятиям отрицательного числа и нуля. Деление по аналогичной причине должно порождать дроби. Будучи присоединенными к натуральным, эти числа образуют более широкий класс рациональных чисел. Возведение в степень и извлечение корня заставляют вводить иррациональности, а в частном случае корни четных степеней из отрицательных чисел — мнимые и комплексные числа.

Таков логический ход мысли о расширении понятия числа. Он отражает многовековой опыт исторического развития, является его итогом. Но исторический ход действий, хотя в главном и совпадает с логическим, имеет свои особенности. Первым, самым ранним, расширением оказалось присоединение к натуральным числам дробей. Вызвано было это расширение потребностями измерений, так как весьма нечасто избранная единица измерения входила в измеряемую величину целое число раз. Естественно, что вначале появились «удобные» дроби: половина, четверть и вообще дроби вида $\frac{1}{n}$, так называемые *аликвотные*. Лишь позже и весьма постепенно созревают представления о более сложных видах дробей, вплоть до частного от деления двух натуральных чисел друг на друга в случаях, когда делимое не делится нацело на делитель.

Что касается отрицательных чисел, то необходимость в них возникает уже при решении простых задач, сводящихся к решению линейных уравнений с одним неизвестным. По мере усложнения задач эта необходимость делается все более острой. Однако выработка в математике абстрактного понятия отрицательного числа оказалась делом трудным и длительным. Сказывалось общее для всех математических абстракций затруднение. Люди издавна оперировали с отрицательными по существу величинами в неразрывном их единстве с величинами положительными: наличие — недостача, уход — приход, противоположные направления усилий и т. п. Тем не менее попытки общей трактовки отрицательных чисел (как это появлялось, например, у индийских математиков начиная с VI в. н. э.) оказывались спорадическими (эпизодическими), не удерживались в вычислительной практике людей, не вводились в ранние теоретические сочинения и терялись.

По существу происходил процесс «привыкания» в ходе вычислительной практики к формирующейся абстракции отрицательного числа. Он достиг стадии регулярного и равноправного их употребления лишь к XVII в. Только с появлением аналитической геометрии Декарта и Ферма принципиальное различие в понимании положительных и отрицательных величин (и соответственно чисел) исчезло окончательно.

Целые числа и дроби образовали новую, более широкую числовую область — *рациональные* числа. Для вычислений это оказалось удобным. Все четыре арифметических действия, проводимые над рациональными числами (исключая деление на нуль), дают всегда рациональное число. Иными словами, множество рациональных чисел оказалось замкнутым по отношению к арифметическим действиям. Оно также обладает отношением упорядоченности; об его элементах можно всегда сказать, какой из них больше, а какой меньше. Наконец, оно плотно; между двумя неравными рациональными числами можно поместить (или, если угодно, обнаружить) неограниченно много рациональных чисел. Последнее свойство удобно и относительно измерений, так как оно позволяет обосновать возможность производить измерения с любой степенью точности. Тут все, казалось бы, ясно. Однако как медленно люди иногда приходят к осознанию простых и ясных идей. Например, даже выбор наиболее удобного в то время класса дробей — десятичных — и соответствующей символики начинает проявляться лишь с XV—XVI вв. под давлением усложняющейся вычислительной практики. В Европе впервые десятичные дроби регулярно употреблял С. Стевин (1548—1620) в 1585 г. в сочинении «Одна десятая» (La Disme).

Логично было бы теперь перейти к описанию дальнейшего расширения числовых множеств, происходящего вследствие включения иррациональностей в общую концепцию понятия числа. В самом деле, операция, обратная возведению рациональных чисел в степень с натуральным показателем, т. е. извлечение корней из них, в большинстве случаев не приводит к рациональным числам. Однако здесь необходимо сделать оговорку.

То, что такие величины (*иррациональные*) существуют, было установлено еще математиками Древней Греции (об этом мы говорили в гл. 2 настоящей книги). Речь идет об открытии ими того факта, что операция измерения отрезков не всегда может быть выполнена за конечное число действий. Это эквивалентно установлению невозможности выражать длину любого отрезка рациональным числом. Классическим примером этого является доказательство несоизмеримости стороны и диагонали единичного квадрата.

Множество отрезков оказалось богаче, нежели множество рациональных чисел. Поэтому математики античности, когда требовалось достигать наивысшей общности, высказывали утверждения не в численной, а в геометрической форме. Для обоснования этого была построена общая теория отношений отрезков. В ней было обеспечено сравнение отрезков по их длине, были определены операции над отрезками, эквивалентные операциям арифметики чисел. Числовая же их трактовка, введение общего понятия действительного числа появились в математике гораздо позже, через пару тысячелетий.

Срок этот оказался таким длинным потому, что оперативной основой, вызывающей и оправдывающей включение в числовые множества чисел иррациональных, была не элементарная вычислительная практика, а совсем непростая практика решения алгебраических уравнений. По этой причине настоящий вопрос лучше может быть освещен в контексте истории алгебраических проблем. Так мы и поступим, отнеся соответствующий материал в следующую главу. Такое же решение и по тем же причинам мы примем в отношении проблемы расширения числовых множеств за счет чисел мнимых и комплексных.

Сейчас мы в состоянии сформулировать **первый тезис** настоящей главы: *арифметика — это та часть математики, где изучают числовые множества и операции над их элементами.* Исторически развивающаяся практика арифметических вычислений приводила к расширениям числовых множеств, обогащала содержание понятия числа.

Шли годы, и совершенствовалась практика арифметических вычислений. Однако это совершенствование происходило не само по себе. Приемы вычислений создавались с целью решить задачи. Они группировались в соответствии с тематикой задач и вычислительными трудностями, которые предстояло преодолеть. Образовались типичные правила — комплексы регулярно применяемых приемов, первичные формы алгоритмов. Таким образом складывались и входили в состав арифметики пропорции, тройное правило, правила решения задач о смешиваниях, задач на пропорциональное деление, метод ложных положений, методы вычислений с именованными числами и др. Для облегчения тяжелого вычислительного арифметического труда и в целях запоминания канонических правил задачи нередко формулировались в занимательной форме, в виде «арифметических забав».

Миллионы и миллионы раз повторяемые арифметические действия не только способствовали усовершенствованию вычислительной техники. Они неизменно приводили к постановке теоретических проблем арифметики. По всей видимости, наиболее ранними были проблемы, где речь шла о свойствах элементов множеств. Таковы были проблемы четности и нечетности чисел, простых и составных чисел, а также чисел совершенных, фигурных и др. Во всяком случае, в сведениях о научных занятиях в школе Пифагора говорится именно о проблемах такого типа.

Получающиеся при этом выделения подмножеств числовых множеств, исходящие из общности свойств выделяемых элементов, порождали в свою очередь новые теоретические задачи. Таковы были, например, задачи о том, как выявить, что число простое, о распределении простых чисел в последовательности натуральных чисел и др. Иной тип задач составляли такие, где речь шла об операциях над выделенными классами чисел, о суммировании чисел натурального ряда, их степеней, четных или нечетных чисел и др.

Задачи о разложениях целых чисел на множители или же о представлениях их в виде сумм целых же чисел заданного вида (их иногда называют задачами мультипликативной и аддитивной арифметик) повлекли постановку ряда проблем, среди которых находятся известные проблема Варинга и проблема Гольдбаха. Трудны эти проблемы по существу, многие из них актуальны и сейчас. На этом пути арифметика породила многие важные задачи современной теории чисел, комбинаторного анализа, математической кибернетики.

В ходе рассмотрения этой стороны истории арифметики мы уже в состоянии сформулировать **второй тезис** настоящей главы: *исторически длительная вычислительная арифметическая практика регулярно приводила к постановкам и попыткам решения теоретических проблем, многие из которых актуальны и в наши дни.* На этом пути арифметика оказалась тесно связанной с рядом современных математических теорий, преимущественно из числа тех, в которых исследуют множества дискретно расположенных элементов.

История арифметики имеет еще один важный аспект. В ней отмечены случаи, когда отдельные классы вычислительных приемов арифметики развивались до уровня значительных и в известной степени самостоятельных частей математики, раскрывая тем самым новые связи между математическими дисциплинами. Примером такой линии развития являются логарифмы. Напомним кратко основные этапы истории логарифмов[1].

---

[1] Литература по истории логарифмов достаточно богата. Мы ниже будем следовать в основном тому подбору фактов и их освещению, который мы приняли в нашей книге (см. [3] в списке литературы).

Логарифмы чисел были придуманы для того, чтобы облегчить вычисления. Исходной была идея сравнения двух прогрессий: геометрической, составленной из степеней одного и того же основания, и арифметической, состоящей из показателей степеней этой геометрической прогрессии. Идея эта привлекала внимание ученых давно. Еще у Архимеда в сочинении «*Псаммит*» (что означает: «исчисление песчинок») встречается запись последовательных степеней одного и того же числа (основания): $a^0$, $a^1$, $a^2$, $a^3$, ..., по поводу которой им было высказано утверждение, эквивалентное $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Аналогичные мысли высказывал Диофант.

И в более поздние времена математики не переставали размышлять над этой идеей. Орезм (1323—1382), например, исходил из сравнения арифметической и геометрической прогрессий, когда вставлял в первую из них дробные числа между натуральными, обобщая тем самым понятие показателя степени на дробные величины. Штифель (ок. 1486—1567) систематически сравнивал действия над членами обеих сопоставляемых прогрессий и вводил дробные и отрицательные показатели степени.

Чтобы воспользоваться этими идеями, нужно было только составить таблицы, где сопоставлялись бы последовательности степеней чисел с последовательностями их показателей.

Возможности, заложенные в упомянутых идеях, стали получать свою реализацию тогда, когда в этом появилась острая необходимость. Математики XVI и начала XVII в. испытывали огромные трудности при выполнении вычислений. Прежде всего эти трудности концентрировались вокруг задачи составления таблиц тригонометрических функций и связанной с этим задачи определения значения числа $\pi$. Другой задачей было вычисление сложных процентов, столь важное в финансовом, кредитном и страховом деле. Можно упомянуть и другие задачи. В то же время вычислительные средства были ограничены: использовались лишь операции с целыми числами и с простыми дробями. Десятичные дроби только входили в практику.

Для облегчения вычислений математики придумывали различные специфические приемы. Во многих из них они стремились избежать непосредственного умножения и деления многозначных чисел, сводя их к сложениям и вычитаниям. Например, при составлении тригонометрических таблиц применялись преобразования типа

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y));$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)).$$

Подобные методы столь часто применялись, что получили специальное название *«простаферетических»* (от соединения двух греческих слов: *простезис* — прибавление и *афайрезис* —

вычитание). Ими пользовались математики стран Ближнего Востока в средние века, затем в Европе: Виет, Тихо-Браге, Бюрги и многие другие. Эти методы находили применение в течение некоторого времени и после того, как были придуманы логарифмы и вошел в употребление обратный им путь приведения тригонометрических выражений к виду, удобному для логарифмирования.

Первые таблицы типа логарифмических составил С. Стевин к началу XVII в. Это были таблицы сложных процентов, т. е. значений чисел вида $(1+r)^n$ при различной процентной таксе $r$ (при $r=0{,}05$; $r=0{,}04$ и т. д.). Чем меньше $r$, тем ближе друг к другу получаемые в таблице значения. Аналогичная таблица была положена в основу одной из первых таблиц собственно логарифмов, составленной И. Бюрги.

Родился Бюрги (1552—1632) в Швейцарии. Работал он в Касселе, а затем в Праге в астрономической обсерватории вместе с И. Кеплером (1571—1630), помогая последнему в наблюдениях, вычислениях и в уходе за инструментами. Для облегчения вычислений он в течение восьми лет (с 1603 по 1611) составлял свои таблицы логарифмов, исходя из таблиц Стевина.

Чтобы получить достаточно малый шаг в таблице, Бюрги положил $r=\frac{1}{10^4}$. Стремление возможно дольше не встречаться с дробями (и избежать тем самым дополнительных вычислительных трудностей) заставило его ввести дополнительный множитель $a=10^8$. Значениям получаемой геометрической прогрессии $b_k=10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^k$, $k=0, 1, 2, 3, \ldots$, Бюрги ставил в соответствие члены арифметической прогрессии 0, 10, 20, 30, ... . Получилось два ряда значений:

$$\begin{array}{llll} 10^8; & 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right); & 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^2; & \ldots; \\ 0; & 10; & 20; & \ldots . \end{array}$$

Числа нижнего ряда были напечатаны красной краской и назывались красными; числа верхнего ряда — черной краской и назывались черными. Таким образом, в таблице Бюрги красные числа представляют собой логарифмы черных, разделенные на $10^8$ при основании $\sqrt[10]{1{,}0001}$. Так как Бюрги ориентирует свою таблицу на красные числа, то она по существу является таблицей «антилогарифмов», что не меняет принципиальной сущности дела. Вычисления черных чисел доводились до девятого знака (благодаря наличию множителя $10^8$), т. е. до так называемого полного черного числа, равного $10^9$. Соответствующее ему полное красное число было найдено с применением интерполяции и оказалось равным 230 270 022, т. е. $(1{,}0001)^{230270022}\approx 10^9$. Это дает некоторое представление о том гигантском количестве вычислений, которое пришлось проделать Бюрги при составлении своей таблицы, на что он потратил, как было сказано выше, около восьми лет.

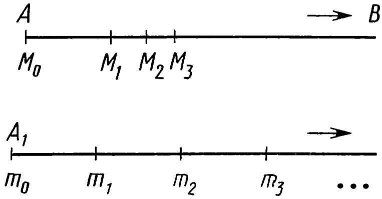

Рис. 18

Долгое время Бюрги не решался публиковать таблицы, несмотря на очевидную их полезность для вычислений. Только в 1620 г., уступая настояниям Кеплера, он издал книгу «Таблицы арифметической и геометрической прогрессии с обстоятельным наставлением, как пользоваться ими при всякого рода вычислениях». Оригинал этих таблиц вместе с другими материалами архива Кеплера хранится в СССР, в Пулковской обсерватории. Что же касается «Обстоятельного наставления», то оно не было опубликовано вместе с таблицами, а было обнаружено позднее и увидело свет только в 1856 г.

Медлительность Бюрги стоила ему приоритета. В 1614 г., т. е. на 6 лет ранее его книги, в Англии появилось «Описание удивительных таблиц логарифмов». Автором этого сочинения был Джон Непер (1550—1617), знатный шотландский землевладелец, занимающийся многими науками, в особенности астрономией и математикой. Его таблицы были восьмизначными таблицами логарифмов тригонометрических функций для значений аргументов в первой четверти и с частотой в одну минуту.

Принцип составления этих таблиц, которым Непер владел, по-видимому (как это можно заключить из его переписки), с 1594 г., были для своего времени новым. Выше было рассказано, что метод сравнения прогрессий дает последовательность дискретных значений. Их можно, не испытывая принципиальных трудностей, сгущать, но от этого дискретный характер последовательности не изменится. Неотъемлемой частью этого метода является интерполяция. Непер, напротив, исходил из идеи логарифмической функциональной зависимости, выразив ее в виде двух непрерывных шкал. Эта идея состояла в следующем (см. рис. 18).

Пусть из точек $A$ и $A_1$ одновременно в направлении, указанном стрелками, начинают двигаться две точки $M$ и $m$, проходя последовательно положения $M_0, M_1, M_2, M_3, \ldots$ и $m_0, m_1, m_2, m_3, \ldots$ . Начальная скорость обеих точек одинакова (для простоты пока положим $v_0 = 1$). Точка $m$ движется с постоянной скоростью $V_m = \mathrm{const}$, а точка $M$ движется замедленно; ее скорости пропорциональны остающимся расстояниям до точки $B$ (для простоты пока положим $AB = 1$). Такое определение (если ввести обозначения $A_1m_k = x$; $M_kB = y$) в переводе на современную терминологию эквивалентно дифференциальному уравнению $\frac{dy}{dx} = -y$, откуда $x = -\ln y$, или $x = \log_{\frac{1}{e}} y$. Неперова система логарифмов оказалась системой с основанием $\frac{1}{e}$.

Введение логарифмической функции объективно хранило в себе большие возможности для применения ее в будущем в системе математического анализа. Но для Непера в 1614 г. эта кинематическая идея задания функции играла только иллюстративную роль. А нужны ему были в то время таблицы. Поэтому он разделил $AB$ на $10^7$ этапов ее прохождения, преодолеваемых за $10^7$ моментов времени. Так как в первый момент времени скорость мы приняли за единичную, то последовательно получим:

$$BM_1 = 1 - \frac{1}{10^7};$$

$$M_1M_2 = \frac{1}{10^7}\left(1 - \frac{1}{10^7}\right);$$

$$M_2B = M_1B - M_1M_2 = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right) - \frac{1}{10^7}\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2;$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Образуются две последовательности значений:

$$M_kB: \quad 1; \quad 1 - \frac{1}{10^7}; \quad \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2; \quad \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^3; \quad \ldots;$$

$$A_1m_k: \quad 0; \quad \frac{1}{10^7}; \quad \frac{2}{10^7}; \quad \frac{3}{10^7}; \quad \ldots.$$

На самом деле последовательности были не совсем такими. Непер принимал $AB = 10^7$, а не $AB = 1$, как это сделано здесь. Таким способом он избегал вычислений с дробями. Начальная скорость тоже не была единичной. Впрочем, некоторые различия не меняют принципиальной сущности дела.

Числа нижней последовательности Непер назвал *логарифмами* верхних, что буквально означало: «числа (их) отношений» (от соединения двух греческих слов: *логос* — отношение и *аритмос* — число). По всей вероятности, такое название он выбрал, чтобы подчеркнуть, что логарифмы являются вспомогательными числами, измеряющими (характеризующими) отношения соответствующих чисел, так что логарифмы Непера, несмотря на плодотворную общую идею, иллюстрированную с помощью двух непрерывных шкал, на практике все еще играли роль таблиц сравнения двух прогрессий: арифметической и геометрической.

Как уже было сказано, таблица Непера содержала логарифмы тригонометрических функций. Таблица выглядела так: в отдельную колонку были помещены значения синусов углов первой четверти, с частотой через одну минуту. Другую колонку занимали значения их логарифмов. Во избежание вычислений с дробями было принято условие. $\sin 90^\circ = 10^8$, так что числа, составлявшие таблицу, были целыми восьмизначными. Логарифмы косинусов определялись как логарифмы синусов дополнительных углов. В третью колонку были помещены разности логарифмов синусов дополнительных углов, т. е. логарифмы тангенсов. Эта колонка так и называлась: «Разности». Технические подробности вычисления этих таблиц мы приводить не будем ввиду громоздкости, их можно найти, например, в книге «История математики с древнейших времен до начала XIX столетия» (М.: Наука, 1970.— Т. 2.— С. 56—61).

Правила логарифмирования по Неперу отличаются от привычных нам правил. Они более громоздки, так как в них участвует $\log 1 \neq 0$ (поскольку было принято, что $\log 10^8 = 1$). Рассмотрим, например, правило логарифмирования произведения $y = a \cdot b$. Перепишем равенство в виде $\frac{y}{a} = \frac{b}{1}$. Равенство отношений влечет равенство разностей «чисел отношений» (логарифмов):

$$\log y - \log a = \log b - \log 1;$$
$$\log y = \log a + \log b - \log 1.$$

Кроме того, что во всех правилах Непера участвует $\log 1 = x$, определяемый из равенства $1 = V_0 \left(1 - \frac{1}{r_0}\right)^x$, существенное осложнение вносит то, что $\log 10 \neq 1$. Поэтому приходилось заново вычислять и мантиссу, и характеристику логарифмов чисел, хотя бы они и отличались друг от друга только множителем вида $10^{\pm k}$ (где $k$ — натуральное число). Подобные затруднения, по-видимому, привели Непера к идее десятичных логарифмов, т. е. к тому, чтобы с самого начала полагать $\log 1 = 0$; $\log 10^{10} = 10$.

Та же идея построить десятичную систему логарифмов возникла у лондонского профессора математики Генри Бригса (1561—1630). В 1615 г. он поехал в Шотландию, встретился с Непером, и они в совместных занятиях разработали новую, практически более приемлемую, десятичную систему, основанную на сравнении двух прогрессий:

$$\ldots;\ 0{,}01;\ 0{,}1;\ 1;\ 10;\ 100;\ \ldots;$$
$$\ldots;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ \ldots.$$

Не теряя времени, Бригс принялся за разработку большой таблицы десятичных логарифмов. Уже в 1617 г. он опубликовал восьмизначные таблицы логарифмов чисел от 1 до 1 000. Через семь лет, в 1624 г., Бригс сумел издать «Логарифмическую арифметику», содержащую 14-значные таблицы логарифмов целых чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000. Для пропаганды нового вычислительного средства он опубликовал несколько статей, разъясняющих методы вычисления таблиц и употребления логарифмов. Один из методов Бригса особенно, по нашему мнению, интересен.

Бригс исходит из того, что если из любого целого числа, например из 10, последовательно извлекать квадратный корень, то после достаточно большого числа извлечений ($m = 2^n$) получится результат, сколь угодно близкий к единице. В таком случае результат следующего извлечения квадратного корня может быть записан в виде $\sqrt[2^{n+1}]{10} = 1 + \alpha$, где $\alpha$ мало. Возведем обе части этого равенства в квадрат $\sqrt[2^n]{10}=1+2\alpha+\alpha^2$. Для $n$ достаточно большого $\alpha^2$ делается настолько малым, что его можно отбросить и это не скажется на принятой точности вычислений, тогда

$$\sqrt[2^{n+1}]{10}-1\approx\frac{\sqrt[2^n]{10}-1}{2}.$$

Умножим обе части на $2^{n+1}$ и получим:

$$2^{n+1}(\sqrt[2^{n+1}]{10}-1)\approx 2^n(\sqrt[2^n]{10}-1),$$

т. е. выражение, практически не меняющееся при дальнейшем возрастании $n$. Если обозначить $\sqrt[2^n]{10}=x$, то $\log_{10}x=\frac{1}{2^n}$, откуда $2^n(\sqrt[2^n]{10}-1)=\frac{x-1}{\log_{10}x}$. (A)

То же значение $x$ можно получить, подставляя вместо числа 10 любое другое конечное число $\sqrt[2^m]{a}\approx x$, тогда

$$\log_{10}x\approx\frac{\log_{10}a}{2^m}.$$

Подстановка в (A) даст

$$2^n(\sqrt[2^n]{10}-1)\approx\frac{2^m(\sqrt[2^m]{a}-1)}{\log_{10}a},$$

откуда

$$\log_{10}a\approx\frac{2^m(\sqrt[2^m]{a}-1)}{2^n(\sqrt[2^n]{10}-1)}.$$

Вычисление десятичного логарифма любого натурального числа сведено таким образом к последовательному извлечению квадратного корня. Предварительно табулируются значения степеней числа 2 и последовательных извлечений квадратных корней из 10. Чтобы избежать накопления ошибок, Бригс произвел 54-кратное извлечение квадратного корня с точностью до 32 десятичных знаков:

1,000 000 000 000 000 127 819 149 320 032 35.

Работами Непера и Бюрги вычислительные трудности были в основном преодолены. Логарифмы вошли в вычислительную практику и быстро распространились по всему миру. В 1628 г. голландец А. Влакк, по роду занятий книготорговец, закончил труд Бригса, составил и издал 10-значные таблицы десятичных логарифмов чисел от 1 до 100 000. Он же довел до конца составление 10-значных таблиц десятичных логарифмов тригонометрических функций с частотой через каждые 10 секунд. Английский преподаватель математики Джон Спейдель составил к 1620 г.

таблицы натуральных логарифмов чисел от 1 до 1000 и синусов первой четверти, почти сразу завоевавшие громадную популярность. Сам термин «натуральные логарифмы» появился позже (начиная с 1659 г. у Менголи и с 1668 г. у Меркатора). Также к 1620 г. лондонский профессор Э. Гюнтер изобрел логарифмическую шкалу, явившуюся первым вариантом современной логарифмической линейки.

Менее чем за одно столетие таблицы логарифмов распространились по всему миру и сделались незаменимым вспомогательным вычислительным средством. В 1650 г. их завезли в Китай. В России таблицы логарифмов вошли в употребление с начала XVIII в., когда стала развертываться сеть специальных учебных заведений для подготовки военно-морских и инженерных специалистов.

Раньше других, в 1701—1702 гг., начала действовать школа математических и навигацких наук. Она размещалась в Москве, в ныне не существующей Сухаревой башне, находившейся на месте нынешней Колхозной площади. В школе преподавали арифметику, геометрию, тригонометрию, вычисления с применением таблиц логарифмов и счетной логарифмической линейки.

Через год, в 1703 г., преподаватели школы Л. Ф. Магницкий (1669—1739) и А. Фархварсон (1675—1739) издали «Таблицы логарифмов и синусов, тангенсов и секансов». Это были несколько перестроенные таблицы А. Влакка, содержащие семизначные десятичные логарифмы натуральных чисел до 10 000, а затем — значения указанных в заголовке тригонометрических функций и их логарифмов. Издание было повторено в 1716 г.

Логарифмическая шкала, которую ввел в употребление Э. Гюнтер, на русском языке впервые появилась в 1739 г. в «Книжице о сочинении и описании сектора, шкал плоской и гунтерской со употреблением оных инструментов в решении разных математических проблем», написанной упомянутым выше А. Д. Фархварсоном. Сектором названа пара вращающихся вокруг общего центра и подходящим образом разграфленных линеек, т. е. пропорциональный циркуль, а «гунтерская» шкала — это логарифмическая шкала Гюнтера, в которой содержатся логарифмические шкалы как для чисел, так и для тригонометрических функций.

Мы уже отмечали, что в ходе решения чисто вычислительной задачи составления таблиц логарифмов возникали элементы суждений, характерных для анализа переменных величин. Главными из них были следующие.

1. Отбрасывание несущественно малых величин, например, в сочинениях Бригса. Можно с уверенностью установить созвучность этого приема с работами И. Кеплера, где он использует операции с актуальными бесконечно малыми величинами. Граница между рассуждениями, в которых этот прием используется для достижения необходимой точности вычислений, и такими,

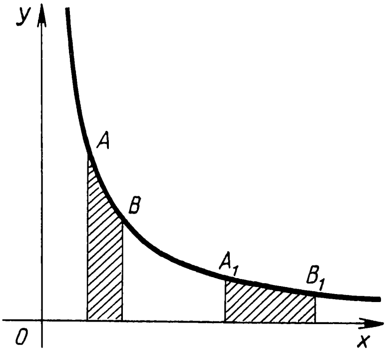

Рис. 19

в которых отбрасывание трактуется с общетеоретических позиций как средство доказательства, еще неясна, зыбка.

2. Идея логарифмической функции, появившаяся в сочинениях Непера, ее кинематическая трактовка, сведение решения задачи к дифференциальному по существу уравнению.

К сказанному следует добавить, что вскоре после того, как изобретение логарифмов и первые таблицы стали более или менее известны, в сочинениях ряда ученых (среди них Ферма, Броункер, Менголи) были установлены связи между логарифмами и квадратурами (именно квадратурой гиперболы). Логарифмическая функция приобретала тем самым еще одну интерпретацию и входила в круг интеграционных методов формирующего анализа бесконечно малых.

Среди полученных на этом пути результатов отметим здесь новый способ вычисления значений логарифмов и вообще представление логарифмов в виде степенного ряда. Его разработал к 1667 г. Кауфман, более известный в литературе как Н. Меркатор (1620—1687).

Исходным пунктом в этом способе было замечательное соотношение, доказанное в 1647 г. Сен Висентом: если абсциссы точек $A$ и $B$ на гиперболе $y=\frac{1}{x}$ (см. рис. 19) соответственно пропорциональны абсциссам точек $A_1$ и $B_1$ на той же кривой, то площади криволинейных четырехугольников, расположенных под отрезками гиперболы $AB$ и $A_1B_1$, равны.

Другое предложение, эквивалентное упомянутому, формулируется так: площадь $S$ под гиперболой $y=\frac{1}{x}$ над отрезком $[1;\ x]$ оси абсцисс равна $\ln x$ в системе, основанием которой является число $e$, такое, что $S(1;\ e)=1$.

Н. Меркатор перенес ось ординат вправо на единицу. Уравнение гиперболы от этого приобрело вид $y=\frac{1}{1+x}$. Заштрихованная площадь $S(0;\ x)$ равна $\ln(1+x)$. Разложив $y=\frac{1}{1+x}$ в ряд, он получил $y=1-x+x^2-x^3+\dots$. Остаток при $|x|<1$ может быть сделан при достаточном продолжении ряда сколь угодно малым.

Далее Меркатор использует метод квадрирования площадей, ограниченных кривой вида $y=x^n$, отрезком, параллельным оси абсцисс, и двумя отрезками, параллельными оси ординат. Эти ранние методы интегрирования были к тому времени уже хорошо разработаны Кавальери, Паскалем, Ферма и др.[1].

Это интегрирование привело к равенству

$$S(0;\ x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots,$$

чем была показана возможность вычислять значения функции $\ln(1+x)$ с помощью степенного ряда.

С течением времени понятие логарифмической функции все более обогащалось. Осваивались ее возможные интерпретации в зависимости от задач, в которых ее применяли, отрабатывалась техника ее представления степенным рядом в целях лучшего с нею оперирования. Логарифмическая функция оказывалась все теснее связанной с другими классами функций. Ее как бы втянуло постепенно в поток открытий, в ходе которых складывался анализ бесконечно малых.

Л. Эйлер

Теория логарифмических функций приобрела целостный вид в сочинениях Л. Эйлера (1707—1783) (см.: Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных.— М.: Физматгиз, 1961.— Т. I). Именно Эйлеру принадлежит общее определение логарифмической и показательной функций как взаимнообратных, распространение понятия логарифма на случай комплексного аргумента, введение символа $e$ для обозначения основания натуральных логарифмов и многое другое. Дальнейшее развитие теории логарифмических функций происходило уже преимущественно в сфере математического анализа.

Сформулируем теперь **третий тезис** настоящей главы: *логарифмы возникли в арифметике в силу практической необходимости преодоления вычислительных трудностей.* Сравнение прогрессий двух видов, послужившее исходной идеей, привело к построению таблиц — важного вычислительного средства. Логарифмы, таким образом, возникли в арифметике и сделали ее важным инструментом. Однако таблицы логарифмов оказались также одним из способов задания логарифмической функции, важной части теории функций и математического анализа вообще. На этом пути арифметика оказалась дополнительно и тесно связанной с математическим анализом. Логарифмические же функции постепенно приобрели и другие интерпретации: кинематическую, геометрическую, аналитическую.

Подведем итоги. В этой главе мы рассказали, что такое арифметика, каковы ее состав, содержание, средства и значение. Это позволило нам сформулировать три тезиса, освещающие не-

[1] Эти методы известны как интеграционные. Описание их см. в гл. 7.

которые из главных особенностей арифметики. К ним следует добавить **четвертый тезис**: *именно из арифметики выросла алгебра.* «Все действия арифметики столь необходимы в алгебре, что они лишь совместно образуют полную науку вычислений, и поэтому я буду излагать их обе вместе»,— писал Ньютон (см.: Ньютон И. Всеобщая арифметика.— М.; Л.: Изд. АН СССР, 1948.— С. 7). В следующей главе мы рассмотрим этот вопрос подробно.

Справедливость сформулированных тезисов подкреплена всем обобщенным опытом исторического развития арифметики. Это дает нам основания сделать **общий вывод**: *арифметика является первоосновой и важной составной частью многих математических дисциплин.* В то же время она имеет собственный предмет исследования, свои средства и собственную проблематику. Она допускает различные уровни освоения арифметических знаний отдельными людьми. Об этом надо помнить, так как недопустимо судить обо всей арифметике на основе неполных, ограниченных представлений о ней. В математическом образовании и в практике математического труда многое зависит от владения техникой арифметических операций и от ясного осознания ее теоретических основ, т. е. от арифметической культуры.

В заключение главы коснемся вопроса об истории счетных устройств и их роли в современной арифметике. Во все времена, с тех пор как арифметические вычисления сделались непременным атрибутом практической деятельности людей, по мере их усложнения люди старались облегчить свой труд за счет введения вспомогательных вычислительных средств. К таким средствам на определенных этапах истории математической науки и ее приложений относились пальцы рук, различные предметы (счетные палочки), счетные доски (абак), конторские счеты и др.

В качестве вспомогательных вычислительных средств большую роль играли таблицы — от вавилонских таблиц до таблиц логарифмов и тригонометрических функций. С XVII в. начались изобретения механических устройств, основанных на принципе взаимодействия зубчатых колес: образцы таких устройств доставили нам Шиккард (1623), Б. Паскаль (1642), Беббедж, Лейбниц и многие другие. С 1874 г. начали свое существование до сих пор знакомые многим арифмометры Однера. Во второй четверти нашего века получили широкое распространение счетные полуавтоматы и автоматы.

С 50-х гг. нашего века начали свое существование быстродействующие электронные вычислительные машины (ЭВМ), чрезвычайно быстро доказавшие свою высокую эффективность. Они получили всеобщее признание и вошли во все виды вычислительной практики в большом разнообразии форм. О них много говорят и пишут. Задачу обучения школьников владению вычислительными средствами, к сожалению, иногда связывают с якобы падающей ценностью арифметического образования. По всей вероятности, вскоре возобладает уравновешенный взгляд на эту ситуацию: будет осуществляться обучение счету с помощью ЭВМ в самых широких масштабах; в то же время не будет нанесен ущерб арифметическим и вообще теоретическим основам математического образования.

Несмотря на короткую историю, область конструирования и использования ЭВМ сделалась огромной и важной. В ней работают высококвалифицированные специалисты различных профилей. Решение практических и теоретических проблем арифметики находит в их работе свое место.

Поясним это высказывание подробнее. В самом деле, применение математических методов для решения практических задач неизбежно связано с расчетами и доведением ответа «до числа». Математические модели, с которыми имеют дело ЭВМ, преимущественно числовые. Математик работает с числовыми множествами; он постоянно использует арифметические свойства множеств чисел (четных и нечетных, простых и составных, фигурных и др.). Для работы с ЭВМ он анализирует различные системы счисления, выбирает и применяет те, которые наилучшим образом соответствуют техническим возможностям машин или математическим особенностям задач.

Алгоритмы решения задач построены на числах. С числами же производятся все расчеты. Составление программ для ЭВМ буквально пронизано арифметическими действиями.

Разумеется, вычислительному устройству математик поручает рутинную, монотонную, утомительную работу. Такие поручения множатся и усложняются. Но для математика остаются более высокие функции: планирования, проверки, конструирования, определения перспектив — всего того, что делает человека мозгом, одушевлением работы машины. Мозг этот в значительной своей части арифметический. Ему необходимы виртуозное владение вычислениями и широкая арифметическая теоретическая эрудиция. И счастлив тот, в ком эти качества вырабатывали со школьной скамьи.

## Глава 4

# КАК АЛГЕБРА НАЧИНАЛА СВОЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ПУТЬ

Алгебра в ее современном состоянии представляет собой объединение большого числа математических теорий. Они богаты по содержанию, разнородны по форме. Им трудно дать общее (единое) определение. Трудности неизмеримо возрастут, если попытаться при этом учесть взаимопроникновение идей и методов алгебры и других частей математики, что неизбежно влечет неоднозначность трактовки понятий и смешанный характер употребления терминов. Первоначальное элементарное представление можно получить об этом, например, из «Математической энциклопедии» (Изд. СЭ, 1977.— Т. I.— С. 114—118). В одной из статей, где затрагиваются вопросы истории алгебры, последняя определена как *часть математики, посвященная изучению алгебраических операций.*

Естественно, что в настоящей главе невозможно осветить все линии развития алгебры или хотя бы большинство из них. Поэтому речь пойдет об истории лишь некоторых из направлений. Выбор этих направлений определяется в соответствии с основной целью всей книги: осветить развитие тех частей алгебры и в таком объеме, который в наибольшей степени соответствует интересам преподавания математики в школе.

Так уже исторически получилось, что школьный курс алгебры весьма неоднороден. Он составлен из разнообразного математического материала, в значительной мере не входившего никогда и не входящего теперь в состав общепринятого понимания предмета алгебры. См., например, перечень тем по курсу алгебры в журнале «Математика в школе» (1983.— № 4.— С. 31—32). Собственно алгебраическая часть школьного курса алгебры концентрируется вокруг следующих проблем: *тождественных преобразований алгебраических* (преимущественно рациональных) *выражений,* в особенности операции с полиномами; *решение и исследование алгебраических уравнений невысоких степеней* (методы отыскания решений, наличие корней, свойства корней); *ознакомление с простейшими классами функциональных зависимостей и со способами их исследования.*

Поэтому дальнейшее изложение будет касаться преимущественно этой тематики. Сведения об иных аспектах курса алгебры в школе можно также найти и в других главах книги.

Алгебра вырастала из арифметики, из вычислительной практики людей. Тенденции роста, которые можно отнести к алгебраическим, проявились очень рано. Они вначале представляли собой стремление группировать однотипные задачи и формулировать возможно более общие правила их решения. У них была общая особенность: неизвестное, которое требуется отыскать по условию задачи, получало свое особое название, а затем обозначалось специальным символом. Это имело место, например, даже в древнеегипетских папирусах, т. е. за две тысячи лет до н. э. (не говоря о более поздних источниках). В них неизвестное обозначалось словом, которое египтологи переводят как «куча» или «все вместе». В течение всей истории алгебры выделение и обозначение неизвестной было непременным признаком алгебраичности суждений.

Запись производимых с целью решения задач действий, содержащая символ неизвестной, представляет собой по существу уравнение. Именно поэтому историки науки сравнительно легко переписывают такие тексты в виде алгебраических уравнений с применением современной символической записи. Древние математические источники свидетельствуют, что в догреческой математике умели решать задачи, сводящиеся к уравнениям 1-й и 2-й степени.

В более поздней математике Древней Греции, как мы уже упоминали в главе 2, возобладали тенденции отделения геометрической части математических знаний, как обладающей наивысшей по тем временам общностью, от числовых ее компонентов. Соответственно источники математики Древней Греции донесли до нас элементы алгебраического характера в двух разновидностях: в виде геометрической алгебры, о наличии которой свидетельствуют «Начала» Евклида, и в буквенно-символическом виде, каким был неопределенный анализ Диофанта.

*Геометрическую алгебру* мы уже описывали в главе 2. Там она рассматривалась в контексте более общей проблемы формирования математической науки вообще. Элементами алгебраического характера в этой своеобразной теории (в геометрической алгебре) можно считать такие: введение операций; геометрические интерпретации алгебраических тождеств; регулярный метод решения задач, сводящихся к линейным и квадратным уравнениям.

Впрочем, существенного развития в рамках теории эти элементы не получили. С помощью отрезков интерпретировали только положительные числа (величины). Метод приложения площадей был не развит и мог давать только один положительный корень уравнения. Еще больше возможности геометрической алгебры сужались вследствие того, что ее объекты не могли иметь размерность выше второй. Средствами построения были только циркуль и линейка. Операции с трехмерными объектами (которые могли бы послужить интерпретациями кубических уравнений) не производились, хотя это можно было делать. Причиной этого было обнаружение задач, формулируемых просто, но не поддающихся решению с помощью циркуля и линейки. Это были знаменитые задачи древности: удвоение куба, трисекция угла и квадратура круга.

Что касается элементов алгебры, которые были бы выражены в привычной нам *символической форме*, то от математиков Древней Греции не дошло до нас почти ничего. Сохранились, однако, упоминания о логистике, которую, судя по немногим отрывочным замечаниям, можно считать вычислительной математикой античности. Сохранилась информация о немногих ученых, занимавшихся прикладными задачами, и о том, что они применяли численно-символическую запись, например Герон (I в. н. э.), при записи квадратных уравнений.

Можно предположить, что сочинения этого жанра все же существовали, но господствующее мнение «ведущих» ученых тех далеких времен, относивших к математической науке только геометрические теоремы, создавало для восприятия элементов алгебры настолько неблагоприятные условия, что эти сочинения не сохранялись. Такое предположение переходит в уверенность, когда знакомишься с «Арифметикой» Диофанта. Это сочинение, время написания которого относят к III в. н. э., резко отличается от дошедших до нас классических сочинений постановкой задач, методикой их решения, алгебраической трактовкой величин и действий над ними.

Диофант рассматривал задачи из неопределенного анализа. Он отыскивал рациональные решения таких систем алгебраических уравнений, в которых число неизвестных превышает число уравнений. Такая проблематика очень трудна, актуальна и в наше время, и нельзя сказать, что сильно продвинута, хотя ею занимались крупнейшие математики. В системе современной математической науки она расположена на стыке теории чисел и алгебраической геометрии; ее теперь чаще называют *диофантовым анализом*.

«Арифметика» Диофанта состояла из 13 книг (частей); сохранились только первые 6 книг. В начале сочинения введена развитая алгебраическая символика и определен способ подхода к решению задач, характерный для алгебры. В «Арифметике» величины обозначены порядковыми буквами греческого алфавита, введены специальные символы для неизвестной и для первых ее 6 степеней. Показатели степеней у Диофанта не только положительные, но и отрицательные. Имеются специальные обозначения для свободного члена, для знака вычитания и знака равенства. Для сложения специального знака еще нет, слагаемые просто пишутся рядом. Явно сформулированы правила алгебраических операций, в том числе правило умножения и деления степеней неизвестной, правило перенесения членов уравнения с одной стороны знака равенства на другую и др.

Без такого аппарата невозможно себе представить, как можно было справляться со столь трудными задачами, как задачи диофантова анализа.

История не оставила никаких сведений о предшественниках

Диофанта, почти ничего о самом Диофанте и о более ранних работах, где рассматривалась подобная тематика. Не нашлось у него и последователей, продолжавших его работу. Упоминания о нем появились не ранее X в., лет через семьсот. Возможности развития алгебры, логически столь очевидные при чтении Диофанта, оставались вне внимания математиков. Вероятно, трудности решения задач неопределенного анализа заслонили их собой.

Источники, из которых мы знаем о геометрической алгебре и о диофантовом анализе, разделяет большое время, не менее шести столетий. Они остались изолированными. Не сохранилось ничего, что говорило бы о связях между обоими направлениями. С этими оговорками, а также с учетом последующего развития алгебры мы все-таки можем утверждать, что элементы алгебры со времен древнегреческой математики, т. е. приблизительно с начала нашего летосчисления, начали свой исторический путь параллельно в двух формах (интерпретациях): *геометрической* и *буквенно-символической*. Эти две линии развития были восприняты в их обоюдной взаимосвязи и в последующие времена. В качестве одного из следствий в алгебре и вообще в математике установились и в силу традиций удержались до наших дней геометрически звучащие термины (квадраты, кубы, линейные уравнения и др.) для обозначения чисто алгебраических объектов.

Первые века нашей эры, как известно, не были благоприятными для развития наук, в том числе и для математики. Только гораздо позже, в государствах средневекового Востока, стали возникать научные центры, возрождались занятия математикой не только прикладной, но и теоретической. Научные сочинения в те времена были написаны на арабском языке, являвшемся официальным языком многих государств, расположенных на огромных пространствах — от Испании до Индии. Поэтому математику, о которой мы ведем здесь речь, называют нередко *арабской* или *математикой стран ислама.*

Для наших целей важно отметить, что в трудах арабских математиков элементы алгебры консолидировались, их общность была осознана и алгебра по существу выделилась в самостоятельную область математики. Рассмотрим подробнее сущность этого этапа истории алгебры.

Основополагающим сочинением по алгебре был трактат узбекского математика и астронома IX в. аль-Хорезми «Китаб аль-Джебр валь-Мукабала». Название в переводе означает: книга об операциях *джебр* (восстановления) и *кабала* (приведения). Первая из операций, из названия которой получилось название для всей *алгебры*, состоит в переносе членов уравнения с одной стороны знака равенства в другую. Вторая — является приведением подобных членов в уравнении. Решение уравнений рассматривается как самостоятельная наука. В книге содержатся систематические решения уравнений 1-й и 2-й степени вида

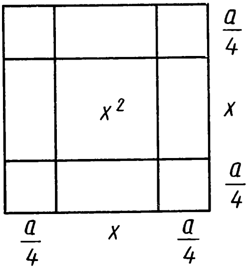


Рис. 20

$$ax=b; \qquad x^2+bx=a;$$
$$ax^2=b; \qquad x^2+a=bx;$$
$$ax^2=bx; \qquad bx+a=x^2.$$

Хорезми приводит как арифметические, так и геометрические решения приведенных уравнений.

Метод нахождения геометрических решений состоит в приравнивании площадей, специально подобранных для геометрической интерпретации уравнения. Например, дано уравнение $x^2+$ $+ax=b$. На рисунке 20 площадь можно найти по формуле

$$S=x^2+4\left(\frac{a}{4}\right)^2+4\left(\frac{a}{4}\right)x=(x^2+ax)+4\left(\frac{a}{4}\right)^2=b+\frac{a^2}{4}.$$

В то же время $S=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$, поэтому

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=b+\frac{a^2}{4},$$

откуда

$$x=-\frac{a}{2}+\sqrt{b+\frac{a^2}{4}}.$$

Книга Хорезми пользовалась большой известностью. Термин «алгебра» укоренился в математике. Осталось в этой науке и имя автора (аль-Хорезми) в латинизированном виде: *алгоритм*. Вначале это слово обозначало фамилию, затем нумерацию по позиционной системе, а теперь — всякую систему вычислений, производимых по строго определенным правилам и заведомо приводящих к решению поставленной задачи. Хорезми не высказывал мысли о своем приоритете в алгебре. Видимо, оба приема — джебр и кабала — были уже широко распространены в его время.

Алгебраические арабские трактаты IX—XV вв., помимо решения уравнений 1-й и 2-й степени, включали в себя и кубические уравнения. К последним приводили разнообразные задачи: а) рассечение шара плоскостью; б) трисекция угла; в) отыскание стороны правильного 9-угольника; г) отыскание стороны правильного 7-угольника и др. Одна из задач оптики (найти на данной окружности такую точку, чтобы луч, падающий из данной точки $A$, отразился в другую заданную точку $B$) приводила к уравнению 4-й степени.

В методах решения кубических уравнений отразилось многообразие средств, присущее математике арабских ученых. Ряд трактатов содержит попытки численного решения этих уравнений; другие трактаты отражают античное влияние. В них строится теория решения кубических уравнений с помощью пересечения конических сечений.

Численные решения этих уравнений развивались начиная от способа проб Бируни (973—1048) до изящного итерационного быстро сходящегося метода Каши (год рождения неизвестен — умер ок. 1436—1437). Рассмотрим последний метод подробнее. В самаркандской обсерватории Улугбека, оснащенной совершенными инструментами, была предпринята работа по составлению таблицы синусов с частотой через одну минуту и с точностью до девятого знака. Решающую роль в этой работе играла, как известно, точность вычисления синусов малых дуг, скажем $\sin 1^\circ$. Исходя из значений $\sin 72^\circ$ и $\sin 60^\circ$, Каши нашел $\sin 3^\circ$. Для нахождения отсюда значения $\sin 1^\circ$ он получил кубическое уравнение $x^3+0{,}785\,039\,343\,364\,400\,6=45x$ (так как $\cos\varphi=4\cos^3\frac{\varphi}{3}-3\cos\frac{\varphi}{3}$).

Запишем для удобства пояснения метода Каши уравнение в общем виде:

$$x^3+Q=Px, \text{ или } x=\frac{x^3+Q}{P}.$$

Первое приближение в силу малости $x$, а следовательно, и $x^3$ таково: $x_1=\frac{Q}{P}=a$. Результат вычисляется приближенный, с условием, чтобы остаток от деления $R$ был такого же порядка малости, что и $a^3$.

Далее положим $x=a+y$, откуда

$$a+y=\frac{(a+y)^3+Q}{P}, \text{ т. е. } y=\frac{(a+y)^3+R}{P}.$$

$R$ имеет порядок $a^3$; он велик по сравнению с $a^3y$. Новое приближение получается, если пренебречь в числителе членами, содержащими $y$:

$$y=\frac{a^3+R}{P}=b+\frac{S}{P}.$$

Следующий шаг состоит в том, что полагаем $y=b+z$ и операции повторяются в том же порядке, что и выше. По этому способу получаются следующие последовательные приближения:

$$x_1=a=\frac{Q}{P};$$

$$x_2=a+b=\frac{a^3+Q}{P};$$

$$x_3=a+b+c=\frac{(a+b)^3+Q}{P};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n=\frac{x_{n-1}^3+Q}{P}.$$

Процесс сходится при $3x^2 < h < 1$, что в данном случае имеет место ввиду малости $x$.

Этим способом было найдено 17 верных знаков $\sin 1°$ в десятичной системе (вначале был получен результат в 60-ричной системе). Принятая степень точности позволила вычислять таблицы тригонометрических функций с точностью до девятого знака. Такой уровень техники приближенных решений алгебраических уравнений в Европе был достигнут лишь к концу XVI в.

Другое направление в решении кубических уравнений основывалось на получении геометрического образа положительного корня путем пересечения подходящим образом подобранных конических сечений.

В трудах математиков средневекового Востока алгебраические элементы были впервые выделены и собраны в новый специальный отдел математики, был сформулирован предмет этого отдела науки и построена систематическая теория. В качестве примера такого подхода приведем высказывание среднеазиатского математика Омара Хайяма (ок. 1048 — после 1122):

«Алгебра есть научное искусство. Ее предмет — это абсолютное число и измеримые величины, являющиеся неизвестными, но отнесенные к какой-либо известной вещи так, что их можно определить; эта известная вещь есть количество или индивидуально определенное отношение, и к этой известной вещи приходят, анализируя условия задачи; в этом искусстве ищут соотношения, связывающие данные в задачах величины с неизвестной, которая вышеуказанным образом составляет предмет алгебры. Совершенство этого искусства состоит в знании математических методов, с помощью которых можно осуществить упомянутое определение как числовых, так и геометрических неизвестных... Алгебраические решения, как это хорошо известно, производятся лишь с помощью уравнения, т. е. приравниванием одних степеней другим»[1].

Дальнейшее формирование алгебры происходило в странах Европы, где сложилась благоприятная для этого обстановка. Там за тысячу лет (V—XV вв.) медленного прогресса постепенно сложилась система обучения, включавшая в себя математику и имевшая целью пополнять слой специалистов и других образованных людей, необходимых для укрепляющейся государственности. Ученые и преподаватели, интересовавшиеся математикой, студенты университетов усваивали достижения античной Греции, Византии, арабоязычных народов Средней Азии и Ближнего Востока. Широко распространилась практика перевода арабских рукописей научного содержания на латинский язык — универсальный язык науки в средние века.

---

[1] Математические трактаты О. Хайяма впервые были опубликованы на русском языке в 1953 г. в сборнике «Историко-математические исследования» (М.: Физматгиз, 1953.— Вып. 6.— С. 15—172) с примечаниями А. П. Юшкевича и Б. А. Розенфельда.

Математика испытывала воздействие практических запросов техники и мореплавания. Темп научной жизни к концу рассматриваемого периода времени, т. е. к XV в., заметно ускорился. В системе наук математика заняла центральное место как основа наук, как азбука естествознания, или (как последнее в то время называли) натуральная философия. Это упрочило ее положение и ускорило процесс создания теоретических частей, предпосылок новых успехов. Наибольшие успехи наметились в построении формального символического аппарата алгебры и в тригонометрии. В XV—XVI вв. было произведено обобщение понятия числа, понятия степени, введены радикалы и операции над ними и др. Необходим был лишь практический успех, хотя бы небольшой, чтобы вся масса накопившихся предпосылок пришла в движение. И вот такой успех пришел. Это было решение в радикалах уравнений 3-й и 4-й степени.

Ход событий, связанных с этим открытием, освещается в литературе разноречиво. В основном он был таков: профессор (с 1496 по 1526) университета в Болонье (Италия) Сципион Дель Ферро нашел формулу для отыскания положительного корня конкретных уравнений вида $x^3+px=q (p>0,\ q>0)$. Он держал ее втайне, приберегая как оружие против своих противников в научных диспутах. К концу своих дней он сообщил эту тайну своему родственнику и преемнику по должности Аннибалу делла Наве и своему ученику Фиоре.

В начале 1535 г. должен был состояться научный поединок Фиоре с Николо Тарталья (ок. 1499—1557), талантливым ученым, выходцем из бедной семьи, зарабатывавшим себе на жизнь преподаванием математики и механики в городах Северной Италии. Узнав, что Фиоре владеет формулой Ферро и готовит своему противнику задачи на решение кубических уравнений, Тарталья сумел заново открыть эту формулу, что обеспечило ему победу в диспуте, состоявшемся 12 февраля 1535 г.

Метод Тартальи, как, по-видимому, и метод Ферро, состоял в подборе подходящей формы алгебраической иррациональности для выражения корня уравнений указанного выше вида $x^3+px=q$ $(p>0,\ q>0)$. Предположив, что $x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$, подставив это выражение в уравнение и обозначив $p=3\sqrt[3]{uv}$, он получил систему

$$\begin{cases} u-v=p; \\ uv=\frac{p^3}{27}. \end{cases}$$

Полагая, что $u$ и $v$ являются корнями квадратного уравнения, Тарталья нашел:

$$u=\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}+\frac{q}{2};$$

$$v=\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}-\frac{q}{2}.$$

Вскоре Тарталья смог решать уравнения вида $x^3=px+$ $+q(p>0,\ q>0)$ подстановкой $x=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$. Наконец, он сообщил, что уравнения вида $x^3+q=px$ сводятся к предыдущему виду, но не дал способа сведения. Тарталья долго не публиковал своего результата по двум причинам: во-первых, по той же причине, что останавливала и Ферро; во-вторых, из-за невозможности справиться с неприводимым случаем. Последний состоит в том, что существует класс уравнений вида $x^3=px+q$, которые имеют действительный положительный корень независимо от того, выполняется ли неравенство $\left(\frac{q}{2}\right)^2 \geqslant \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Формула Тартальи не давала решения во втором случае, так как не было возможности правильно трактовать мнимые числа, получающиеся при этом. Неприводимый случай появлялся у Тартальи и в уравнениях вида $x^3+q=px$.

Однако труд Тартальи не пропал даром. Значительные результаты математики, когда созревают необходимые и достаточные условия для их появления, начинают буквально «носиться в воздухе» и служить предметом занятий многих ученых. С 1539 г. кубическими уравнениями начинает заниматься Кардано (1501—1576). Человек странной и бурной судьбы, наполненной противоречивыми и нередко трудно объяснимыми поступками, богатый, образованный и талантливый, он страстно любил научные занятия. Философия и математика, медицина и астрология являлись предметом необузданных увлечений Кардано. Услышав об открытии Тартальи, он приложил много усилий, чтобы выманить тайну у осторожного и недоверчивого Тартальи и украсить этим результатом задуманную книгу «Великое искусство, или о правилах алгебры». В конце концов это удалось. Кардано собственными усилиями устранил неполноту сообщенных сведений, и книга появилась в 1545 г.

Это большое сочинение (40 глав) содержит не только правила алгебраических операций и приемы нахождения корней уравнений первых трех степеней, но и элементы общей теории алгебраических уравнений. Так, Кардано ввел регулярный способ сведения полного кубического уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$ к виду, в котором отсутствует член с квадратом неизвестного, с помощью подстановки $x=x_1+h$ и распространил его на уравнения 4-й степени. Книга содержит множество теорем: о взаимозависимости корней и коэффициентов; о положительных и отрицательных (называемых «фиктивными») корнях, об их сумме и другие теоремы (например: если в уравнении все члены, стоящие в левой части, имеют степень бо́льшую, чем степени членов правой части, то уравнение имеет один и только один положительный корень) Наконец, Кардано показал делимость алгебраического полинома $P_n(x)$ на $x-x_1$, где $x_1$ — корень уравнения $P_n(x)=0$.

Кардано включил в свою книгу и метод решения уравнений

4-й степени путем сведения задачи к кубической *резольвенте,* открытый его учеником Л. Феррари (1522—1565). Поясним этот метод на примере задачи, которую решал Феррари. Она была задана Кардано итальянским математиком Д. Колла. Задача гласила: «Разделить число 10 на три части так, чтобы они составляли геометрическую прогрессию, а произведение первых двух частей равнялось 6». По условию

$$\frac{6}{x}:x=x:\frac{x^3}{6};\ \frac{6}{x}+x+\frac{x^3}{6}=10,$$

откуда получаем уравнение

$$x^4+6x^2+36=60x.$$

Дополним обе части, добиваясь, чтобы левая часть стала полным квадратом: $(x^2+6)^2=60x+6x^2$. Добавим к обеим частям по $2(x^2+6)t+t^2$, где $t$ еще предстоит найти. Получим:

$$(x^2+6+t)^2=60x+6x^2+2(x^2+6)t+t^2,$$

или

$$(x^2+6+t)^2=(2t+6)x^2+60x+(t^2+12t).$$

Условием того, что правая часть уравнения есть полный квадрат, является, как известно, равенство нулю дискриминанта. Это Феррари записывает так: $30^2=(2t+6)(t^2+12t)$, сводя задачу к решению кубической резольвенты. Прием, очевидно, является общим для уравнения 4-й степени. Кардано приводил к этому виду уравнение, не содержащее члена с неизвестным в 1-й степени, подстановкой $x=\frac{k}{y}$.

Мы не будем останавливаться на тягостном споре Тартальи и Кардано о приоритете открытия. Спор этот породил огромную литературу. Многие авторы до наших дней возвращаются к нему, вновь и вновь выдвигаются оценки личностей Тартальи и Кардано, обстоятельств открытия и их связей с широким кругом современных им исторических событий.

Столь быстрые и поразительные успехи в нахождении формулы решения уравнений 3-й и 4-й степени поставили перед математиками проблему отыскания решений уравнений любых степеней. Огромное число попыток, усилия виднейших ученых не приносили успеха. Задача с течением времени преобразовывалась и стала трактоваться как общая задача о возможности или невозможности решения алгебраических уравнений степени $n\geqslant 5$ в радикалах. Поиски решения этой проблемы заняли около 300 лет. Только в XIX в. Н.-Х. Абель (1802—1829) доказал, что уравнения степени $n>4$, вообще говоря, в радикалах не решаются. Э. Галуа (1811—1832) связал с каждым уравнением специальную группу подстановок его корней — группу Галуа и свел проблему к исследованию структуры этой группы, ее разрешимости, выделив тем самым класс разрешимых уравнений.

Здесь мы не имеем возможности подробно останавливаться на этом вопросе, так же как и на другой общей постановке задач теории Галуа: выразить рационально корни заданного уравнения через корни другого, более простого уравнения.

На пути создания общей теории алгебраических уравнений и способов их решения стояли еще два препятствия: сложность, неудобство получаемых формул, а также неразъясненность неприводимого случая и появляющихся при этом мнимых величин. Первое составляло чисто практическое неудобство. Кардано устраняет его, предлагая находить корни уравнений приближенно с помощью правила двух ложных положений, известного еще от египтян и по существу применяемого и в наши дни в виде простой, или линейной, *интерполяции.* Второе препятствие имеет более глубокие корни, а попытки его преодоления повели к весьма важным последствиям.

О мнимых корнях упоминали многие математики. Кардано называл их «софистическими». На примере совокупности равенств $x+y=10$, $xy=40$ он показывал, что эти корни встречаются в паре (т. е. $x_{1,2}=5\pm\sqrt{-15}$), но решить уравнения в этом случае в общем виде считал невозможным.

Итальянский математик и инженер Бомбелли (ок. 1530—1572) предпринял смелую попытку справиться с неприводимым случаем. В своем сочинении об алгебре (1572) он ввел формальные операции над мнимыми и комплексными числами. Он установил, что они производятся по правилам: $(\pm i)\cdot(\pm i)=-1$, $(\pm i)\cdot(\mp i)=1$, а также, что все выражения, содержащие «софистические минусы», приводятся к виду $a+bi$. Что касается неприводимого случая, то на конкретном примере $x^3=15x+4$ Бомбелли показал, что вещественный корень получается как сумма двух комплексных чисел $a+bi$ и $a-bi$.

Рассуждения Бомбелли идут следующим путем: пусть дано уравнение $x^3=ax+b$, причем $\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3\leqslant 0$; следовательно, формула

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(-\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

неприменима. Бомбелли исходит из того, что выражения вида $\sqrt[3]{\alpha\pm\sqrt{\beta}}$, входящие в эту формулу, тоже могут быть преобразованы к виду $p\pm\sqrt{q}$. Положив $\sqrt[3]{\alpha\pm\sqrt{\beta}}=p\pm iq$, он для определения $p$ и $q$ получил уравнения

$$p^3+3pq=\alpha;\ \ p^2-q=\sqrt[3]{\alpha^2-\beta}=\gamma.$$

Из этой системы при вычислении $p$ получается уравнение $4p^3=3\gamma p+\alpha$. В частности, если положить $\alpha=\frac{\beta}{2}$; $\beta=\left(\frac{b}{2}\right)^2-$ $-\left(\frac{a}{3}\right)^3$, то

$\gamma=\frac{a}{3}$ и $x=p+\sqrt{q}+p-\sqrt{q}=2p$.

Конечно, это рассуждение Бомбелли нуждается в строгом обосновании. Оно не облегчает решение неприводимого случая, так как уравнение $4p^3=3\gamma p+\alpha$ того же вида, что и искомое уравнение. Но введение, хотя и на частных примерах, общих операций с комплексными числами выдвигает алгебру Бомбелли в ряд основополагающих сочинений в истории математики мнимых и комплексных объектов.

К. Вейерштрасс

Математики с трудом свыкались с представлением о существовании *комплексных чисел*. Недоверие было стойким и длительным. Оно оставило след в самом названии: *мнимое число*. Только в XIX в. недоверие стало рассеиваться, после того как были найдены удобные и понятные интерпретации комплексных чисел как точек на плоскости и доказана их полезность для приложений.

О дальнейшей истории комплексных чисел уместно здесь добавить, что последние, как и действительные числа, замкнуты по отношению к арифметическим операциям. В отличие от действительных чисел они обладают свойством алгебраической замкнутости: каждое алгебраическое уравнение с комплексными коэффициентами имеет корни в области комплексных чисел. Около 100 лет тому назад К. Вейерштрасс (1815—1897) доказал, что совокупность всех комплексных чисел не может быть расширена за счет присоединения новых чисел, так, чтобы в расширенном множестве сохранились все законы действий над комплексными числами.

Комплексные числа $a+bi$ (где $a$, $b$ — действительные числа, а $i$ — мнимая единица, т. е. число, квадрат которого равен $-1$) в школьную программу не входят. Но поскольку введение этих чисел является определенным завершением развития понятия числа, то для учителя, вероятно, полезно об этом знать. Необходимо только учесть два обстоятельства: в сущности появление отрицательных чисел под знаком квадратного корня было замечено и до решения кубических уравнений. Поскольку в области действительных чисел такое извлечение невыполнимо, то считалось, что в этом случае уравнение не имеет действительных корней. Именно неприводимый случай в решении алгебраических уравнений оказал решающее влияние на развитие теории.

Что же касается появления в математике достаточно отчетливой абстракции действительного числа, то мы находим его в сочинении И. Ньютона (1643—1727) «Всеобщая арифметика» (впервые издана в 1707 г.; написана по лекциям, прочитанным автором в 1673—1683 гг.): «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное» (Ньютон И. Всеобщая арифметика.— Изд. АН СССР, 1948.— С. 8). Теория действительных чисел, соответствующая принятым ныне стандартам математической строгости, но в разных формах, была построена только в 70-х гг. XIX в. Р. Дедекиндом (1831—1916), Г. Кантором (1845—1918) и др.

Р. Дедекинд

Рост содержания математических знаний всегда тесно связан с развитием математической символики. Последняя, когда она хорошо отражает реальную сущность математических операций, активно воздействует на математику и сама приобретает оперативные свойства. Историю математических символов можно уподобить истории орудий труда, по которым можно многое восстановить и понять. Более того, именно развитая символика делает алгебру наукой об операциях над общими классами множеств: чисел, векторов, тензоров, матриц и др.

В рассматриваемое нами время происходил быстрый переход от словесной (риторической) алгебры к алгебре символической путем сокращения (синкопирования) слов, а затем введения символов. Уже у Кардано переход этот очень заметен. Например, корень уравнения «cubus p6 rebus aequalis 20» ($x^3+6x=20$) находится по формуле

$$R_x\ u\ cu\ R_x\ 108p\,10|mR_x\ u\ cu\ R_x\ 108m\,10,$$

что означает:

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}.$$

Читатель уже успел, наверное, догадаться о значении символов. Все же добавим, что $R_x$ (от слова radix) — знак корня, $R_x\,u\,cu$ — это radix universalis cubica, т. е. общий кубический корень из всего выражения, расположенного до вертикальной черты или до конца выражения. Символы пока еще очень разнообразны, не всегда составляют стройную систему даже внутри одной книги. Но потребности математики заставляли искать все более совершенную систему символов. Бомбелли, например, для последовательных степеней неизвестного $x$ употреблял символы 1, 2, 3, ... . С. Стевин, фламандский математик и инженер, известный, в частности, введением в европейскую математику аппарата десятичных дробей, использовал в тех же целях, что и Бомбелли, соответственно (1), (2), (3), ..., а в случае второго и третьего неизвестного:

$$\begin{array}{llll} \text{sec}\,(1), & \text{sec}\,(2), & \text{sec}\,(3), & \ldots; \\ \text{ter}\,(1), & \text{ter}\,(2), & \text{ter}\,(3), & \ldots. \end{array}$$

Единую, последовательно введенную систему алгебраических символов первым дал, по-видимому, Виет.

Появление буквенного алгебраического исчисления являлось одной из сторон более общего и глубокого явления в истории математики — возникновения алгебры как общей науки об алгебраических уравнениях. Сочинения и взгляды Виета хорошо передают этот переломный момент.

Ф. Виет

Франсуа Виет (1540—1603) — французский математик, юрист по образованю и роду деятельности. Во время педагогических занятий в одной влиятельной семье у него возник план новой астрономической системы, долженствующей заменить неточную, по его мнению, систему Коперника. В связи с этим замыслом Виет положил много сил на усовершенствование тригонометрии и достиг замечательных успехов. Блестяще образованный, Виет быстро продвигался по служебной лестнице и наконец сделался близким советником и придворным ученым французских королей Генрихов III и IV. С 1584 по 1589 г. он был отстранен от придворных дел вследствие происков политических противников и употребил свой досуг на написание главного труда своей жизни — «Введение в искусство анализа» — огромного и чрезвычайно обстоятельно написанного сочинения по новой алгебре. Полностью не завершенный, труд этот выходил с 1591 г. отдельными частями, в основном после смерти автора.

Замысел Виета определялся следующими соображениями: крупные успехи итальянских математиков в решении уравнений 3-й и 4-й степени опирались на высокую эффективность алгебраических приемов. Но число отдельных алгебраических уравнений угрожающе быстро росло, достигая, например, у Кардано 66; каждый из этих видов уравнений требовал особых приемов. Необходимо было найти общие методы подхода к решению алгебраических уравнений; последние тоже должны рассматриваться в возможно более общем виде с буквенными коэффициентами. Кроме того, необходимо было сочетать эффективность алгебраических приемов со строгостью античных геометрических построений, хорошо знакомых Виету и представлявших, по его мнению, образцы подлинно научного анализа.

Исчислению Виета предшествует арифметика, оперирующая с числами: logistica numeralis. Исчисление букв получает название logistica speciosa от слова species — члены математического выражения. Исчисление распадается на *зететику* — искусство решения уравнений; *пористику* — искусство доказательства правильности полученных решений; *экзегетику* — общую теорию уравнений. Все величины обозначены буквами: неизвестные — гласными, известные — согласными. Числа безразмерны, положительны, рациональны (в случаях иррациональностей Виет переходит на язык геометрии), величины же имеют размерность. Это геометрическое влияние на концепцию величины усиливается специальной терминологией: первая степень величины называется latis (сторона), вторая — planum (площадь), третья — solidum (тело). Далее следуют плоско-плоские, плоско-объемные, объемно-объемные и т. д. величины. Сложение и вычитание производятся над величинами одинаковой размерности. Последнюю, впрочем, допускается подравнивать путем умножения на единицу длины. Умножение и деление вызывают изменение размерности. Эти идеи Виета в его время отражали наличие не преодоленного еще разрыва между числами и величинами. Позднее выяснилось, что они явились предтечей ряда математических исчислений: векторного, тензорного, грассмановой алгебры.

Символика Виета еще отягощена грузом геометрических привнесений; она тяжела, не всегда понятна, перемежается сокращенными и даже несокращенными словами. Вот примеры:

а) $A$ cubus $+B$ planum 3 in $A$ aeq natur $D$ solido, или

$$A^3+3BA=D, \text{ т. е. } x^3+3Bx=D;$$

б) $B$ parabola in $A$ gradum — $A$ potestate aeqnatur $Z$ homogenae,

$$\text{т. е. } BA^n-A^{m+n}=Z.$$

Тем не менее благодаря этой символике стало впервые возможным выражение уравнений, их свойств общими формулами. Объектами математических операций стали не числовые задачи, а сами алгебраические выражения. Именно этот смысл вкладывал Виет в характеристику своего исчисления как «искусства, позволяющего хорошо делать математические открытия». Кстати, символы Виета были вскоре усовершенствованы его младшими современниками, особенно Гэрриотом (1560—1621).

В сочинениях Виета подводится своеобразный итог математики эпохи Возрождения. Особенно отчетливо эта особенность проявляется в его алгебраических трудах. В них подробно и обстоятельно изложены сведения об уравнениях с 1-й по 4-ю степень. Общий характер записи позволяет Виету строить все изложение не как собрание рецептов, а как общую теорию уравнений. Для этого он использует богатый арсенал алгебраических преобразований, опирающихся на подстановки $x=y+k$

(чтобы исключить член, имеющий неизвестное во второй по величине степени), $x=\frac{y}{k}$ (для исключения члена, содержащего $x$), $x=ky$ (с целью устранения дробных коэффициентов), $x=\frac{a}{b}y$ (чтобы придать коэффициенту при $x^{n-1}$ данное значение) и др. От радикалов он освобождался путем «отъединения» одного члена и возведения обеих сторон уравнения в степень.

Например, всякое кубическое уравнение он преобразует к виду $x^3+3ax=b$ и применяет затем подстановку $a=t^2+tx$, чтобы прийти к уравнению

$$x^3+3tx^2+3t^2x=b.$$

Из последних двух уравнений, преобразованных к виду

$$(x+t)^3-t^3=b,$$
$$t^3(t+x)^3=a^3;$$

он получает квадратное относительно $t^3$ уравнение $(t^3)^2+bt^3=a^3$. Можно и непосредственно подставить $x=\frac{a-t^2}{t}$ в уравнение, чтобы получить тот же результат.

Неприводимый случай кубического уравнения Виет свел к задаче о трисекции угла. Он показал, что всякое неприводимое уравнение может быть преобразовано к виду $x^3-3x=a$. Его он сопоставляет с тригонометрическим соотношением $(2\cos\varphi)^3-$ $-3(2\cos\varphi)=2\cos 3\varphi$. Задачу же о трисекции угла он решает известным ему из античных источников методом вставок.

При решении уравнений Виет разыскивает положительные корни. С помощью подстановки $x=-y$ он подходит к проблеме нахождения отрицательных корней. Развивая результаты Кардано, Виет высказывает ряд теорем о взаимозависимости корней уравнений и их коэффициентов, включающих частные случаи теоремы, известной ныне под его именем. В связи с этим он рассматривает в указанных выше границах образование уравнений произведением биномов

$$P_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k),\ n<5.$$

Полностью предложение о зависимости коэффициентов и корней уравнений было сформулировано Гэрриотом и А. Жираром (1595—1632) и опубликовано последним в 1629 г.

Сформулируем суммарную оценку трудов Виета по алгебре. *Алгебра Виета* была еще несовершенной и имела крупные недостатки. Ее очень утяжеляла видовая трактовка величин, обладающих размерностью. В ней нет общей трактовки степеней, все степени натуральные. Принципиальное разделение чисел и алгебраических величин позволяло ему употреблять радикалы лишь для чисел, а не для величин и т. п. Алгебру Виета скоро вытеснила *алгебра Декарта*. Однако известно, что Ферма, например, изучив алгебру Виета, придерживался ее формы, когда строил аналитическую геометрию. К тому же нам представляется оправданным предположение, что параллелизм между свойствами уравнений и геометрическими построениями, регулярно проводимый Виетом, сыграл свою роль в формировании идей аналитической геометрии в XVII в. То, что представляло геометрический рудимент (первооснову) в формирующейся алгебре Виета и других математиков XVI в., послужило исходным пунктом развития новой науки — *аналитической геометрии* — в руках ученых XVII в.

Сопоставление алгебраической и тригонометрической задач, отмеченное при решении кубического уравнения, не было для Виета случайной находкой, эпизодом. Виет, как было уже сказано, проявил интерес к алгебре именно в силу ее пригодности и даже необходимости для задач тригонометрии и астрономии. В дальнейшем тригонометрические и алгебраические труды и результаты следуют одновременно, нередко переплетаясь. Виет не ограничился определением всех элементов плоского или сферического треугольника по трем данным элементам. Ему принадлежат разложения тригонометрических функций кратных дуг посредством последовательного применения формул для синуса и косинуса сумм двух углов.

После смерти Виета стали известны многие его рекуррентные формулы, например:

$$\begin{aligned}
\cos m\alpha &= 2\cos\alpha\cdot\cos(m-1)\alpha-\cos(m-2)\alpha;\\
\sin m\alpha &= 2\cos\alpha\cdot\sin(m-1)\alpha-\sin(m-2)\alpha;\\
\sin m\alpha &= 2\sin\alpha\cdot\cos(m-1)\alpha+\sin(m-2)\alpha;\\
\cos m\alpha &= -2\sin\alpha\cdot\sin(m-1)\alpha+\cos(m-2)\alpha.
\end{aligned}$$

Несколько странное впечатление оставляет то, что подобные крупные результаты гониометрии достигнуты при недостаточно общем определении тригонометрических функций как отношений сторон прямоугольного треугольника без намека на введение производящей окружности. Однако так часто бывает в истории: результаты сначала появляются, а потом осмысливаются и получают удовлетворительную общую трактовку.

Значительным достижением Виета является введение им впервые в математику задачи о нахождении бесконечного произведения. Если около правильного $n$-угольника площади $S_n$ описать круг радиуса $r$ и вписать в него круг радиуса $\rho_n$, то после удвоения сторон $n$-угольника получим: $S_n : S_{2n} = \rho_n : r = \cos\frac{\pi}{n}$. Начнем с вписанного квадрата: $n=4$, $S_4 = 2r^2$. Последовательно полагая $n=4;\ 8;\ 16;\ \ldots$, получим:

$$S_4 : S_8 = \cos\frac{\pi}{4};$$

$$S_8 : S_{16} = \cos\frac{\pi}{8};$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Теперь Виет «переходит к пределу», перемножая все эти равенства. Учитывая, что $S_{2n}$ при $n\to\infty$ имеет пределом площадь круга, он получает:

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{90^\circ}{2}\cdot\cos\frac{90^\circ}{4}\cdot\cos\frac{90^\circ}{8}\cdot\ldots,$$

или

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\cdot\ldots.$$

Разумеется, Виет не доказывает сходимости полученного бесконечного произведения, будучи интуитивно уверенным в справедливости своего утверждения.

На примере работ Виета мы показали, что в европейской математике к концу XVI в. сформировалась алгебра как наука о решении уравнений. Алгебраисты завершили символическое оформление своей науки и начали ставить и решать проблемы общей теории алгебраических уравнений.

Алгебре предстоял еще долгий путь совершенствования. По некоторым оценкам в историко-научной литературе, она только начинала существовать. Здесь мы рассматриваем только первые шаги этой науки, для которых было характерно следующее:

а) тенденции алгебраического характера в составе раннего нерасчлененного математического знания;

б) появление элементов алгебры, причем сразу в двух равноправно существующих интерпретациях: геометрической и буквенно-символической;

в) систематизация алгебраических сведений и построение алгебры как особой части математики также в двух равносильных и равноправных интерпретациях;

г) постепенное усовершенствование алгебраической символики и приобретение ею оперативного значения;

д) практические успехи алгебры, главным образом решение уравнений 3-й и 4-й степени, вызванное этим многостороннее продвижение алгебры.

Это продвижение затронуло не только научную сторону дела, но и преподавание алгебры. Вехами этого педагогического процесса (наиболее принципиально важными) были: «Всеобщая арифметика» И. Ньютона (1707); примыкающий к ней «Трактат по алгебре в трех частях» К. Маклорена (1748); «Начала алгебры» А. Клеро (1746); «Универсальная арифметика» Л. Эйлера (т. 1—2, 1768—1769; первое издание появилось на русском языке).

Книга Эйлера оказала особенно длительное, сильное и устойчивое воздействие на структуру и содержание школьного курса арифметики и алгебры. Обратите внимание на перечень глав.

Целые числа.

Дроби (обыкновенные и десятичные).

Корни.

Логарифмы.

Алгебраические уравнения первых четырех степеней.

Прогрессии.

Комбинаторные задачи. Бином Ньютона.

Диофантовы уравнения.

Когда читаешь эту книгу, то как по структуре, так и по содержанию угадываешь в ней прообраз учебников алгебры и арифметики последующих веков.

Ф. Клейн

Заключительный раздел главы мы посвятим истории *понятия функции*. В школьном курсе алгебры это понятие занимает значительное место. Его вводят рано, обычно в VI классе. Иллюстрируют его поначалу сравнительно элементарным материалом. В него входят алгебраические уравнения (пока линейные), несложные алгебраические преобразования, первичные сведения о переменных величинах, простейших функциях. В дальнейшем, в старших классах, совокупность видов изучаемых функций расширяется за счет введения тригонометрических, логарифмических и показательных функций.

Тенденция широкого внедрения функционального подхода к различным разделам математики, изучаемым в школах, получает поддержку как в нашей стране, так и за рубежом. Она по существу вызывается и обосновывается необходимостью устранить чрезмерный формализм и разобщенность в преподавании отдельных математических дисциплин. Такая задача была актуальна во все времена, актуальна она и сейчас.

Идея введения понятия функции в школьные программы по математике была выдвинута около 100 лет тому назад. Ее развивали и пропагандировали не только отдельные ученые и педагоги, но и международные объединения. Одной из первых была «Международная комиссия по преподаванию математики», образованная Ф. Клейном (1849—1925). От России в комиссию входили Д. М. Синцов и К. А. Поссе. В наши дни разработка этой идеи находит место в рекомендациях ЮНЕСКО (Организация объединенных наций по вопросам образования, науки и культуры, созданная в ноябре 1945 г.), Международного бюро по образованию (работает в Женеве, основано в 1925 г.), математических съездов и других объединений.

Исторический опыт развития математики учит, что средства математического исследования реальных явлений взаимосвязаны, что они взаимодействуют. В этой главе показано, что алгебра на всех этапах своего исторического пути развивалась отнюдь не изолированно. Вырастала она из арифметики. Арифметические и геометрические элементы были всегда неотъемлемыми компонентами алгебры. Успехи алгебры на определенном уровне развития сыграли важную роль в появлении аналитической геометрии и математического анализа. Алгебраические составляющие этих наук в свою очередь являются их неотъемлемыми частями.

Взаимодействие различных математических дисциплин проявляется при решении конкретных математических задач. Математики — организаторы и участники такого взаимодействия — вдохновляются, как правило, общими идеями. Одной из таких идей является идея всеобщей зависимости. Ее математическим отражением является понятие функции.

Понятие функции существовало практически всегда в сознании тех, кто занимается математикой. На самых ранних этапах оно имело форму интуитивного восприятия причинной связи явлений. Из него вырастало и крепло понятие функции как соответствия все более и более общей природы. Это понятие также всегда было неотделимо от попыток выражения этих соответствий, зависимостей, отыскания их характеристик, по преимуществу математических. Именно эти конкретные подходы к описанию функциональных зависимостей наполняли общее понятие функции конкретным содержанием, обогащали их.

Вслед за чисто словесными, качественными описаниями функциональных зависимостей появились таблицы — самая ранняя, вероятно, форма задания функции математическими средствами. Из седой старины известны такие таблицы, в которых последовательность значений аргумента сопоставляется с последовательностью значений функции. *Табличное задание* функций с тех пор было всегда нужным и полезным. Применяется оно и сейчас в тех случаях, когда оказывается невозможным пока найти аналитическое выражение для зависимости, а значения функции получаются как результат эксперимента. Кстати, табличный способ заданий функциональных зависимостей, математически корректен, практически удобен и в экспериментальной деятельности приносит определенную пользу.

Не менее нужными и, по-видимому, столь же ранними были наглядные описания изменения значений функций с помощью кривых и других геометрических образов. В работах древнегреческих математиков геометрические трактовки функций приняли форму *геометрических мест*. Это линии, все точки которых обладают общим заданным или полученным в результате наблюдений свойством. Таковыми были конические сечения, другие специальные кривые алгебраической и даже трансцендентной природы. Тогда же было установлено, что геометрические выражения функций обладают наивысшей по тем временам общностью. С тех пор геометрические способы выражения функциональных зависимостей неизменно играли и играют важную роль в математике и в ее приложениях.

Запись функций в *аналитической форме* начала свою историю вместе с первыми символическими записями алгебраических выражений, преимущественно уравнений. К XVI в., когда был достаточно усовершенствован символический аппарат, в алгебраических знаниях математиков наступил определенный переворот в методах суждений, сами уравнения и другие символические выражения сделались самостоятельным объектом исследования. Одновременно в народившейся алгебре распространилось понимание, что буквами можно обозначать совокупности различных значений величин. Соответственно алгебраические выражения, в особенности полиномы, приобрели множества различных значений, т. е. сами становились по существу *переменными величинами.* Алгебра превращалась в учение об операциях над переменными величинами.

Введение в математику явным образом переменных величин со времен Декарта и Ферма придало определенное единство разнообразным формам выражения функциональных зависимостей. Это способствовало появлению аналитической геометрии, а вскоре и анализа бесконечно малых. В те же времена понятие функции обогатилось за счет оказавшихся плодотворными механических интерпретаций, появившихся в наиболее яркой и полной форме в сочинениях Ньютона. И вот в 1692 г. появился и термин «функция». Его ввел Лейбниц и обозначал им совокупность всех отрезков, длины которых зависят от положения точки на кривой (абсциссы, ординаты, отрезки касательных, нормалей и др.). Термин был признан и быстро приобрел более широкую трактовку.

Сказанное позволяет утверждать, что между алгеброй и математическим анализом не существует непреодолимых барьеров, что содержание алгебры можно обогащать, придавая ему теоретико-функциональную трактовку, что история тригонометрических, логарифмических и других функций связана с историей алгебры. Это, кстати, объясняет, почему исторически сложился и приобрел устойчивость школьный курс алгебры в виде комплекса разнообразных, иногда как будто к алгебре не относящихся частей математики.

Служебная роль и назначение школьного курса алгебры состоит в том, что в нем соединены исторически сложившиеся знания количественного характера в объеме, достаточном для исполнения работы по большинству массовых профессий, т. е. знания, которым должен обладать сколько-нибудь образованный человек. В то же время в курсе заложены элементы, позволяющие продолжать математическое образование в теоретическом плане, а также совершенствовать технику работы с быстродействующими вычислительными средствами.

По мнению автора, такая структура курса алгебры в школе в основном оправдана ходом исторического развития. Она не противоречит общим задачам, сформулированным в основных документах о реформе общеобразовательной и профессиональной школы. Усовершенствования в ходе реформы, в частности, будут состоять в обеспечении более тесных связей между теоретическим содержанием изучаемого материала и систематическим общественно полезным трудом школьников, предусмотренным в производимой реформе школьного образования.

На материале курса математики это скажется усилением внимания к практической стороне дела: использованию вычислительных средств, уверенному овладению математической символикой, т. е. оперированию с алгебраическими выражениями, решению алгебраических уравнений. При этом возникнут дополнительные трудности в работе преподавателей, так как нельзя упустить из виду двуединость своей педагогической задачи. Короче говоря, не ослабить работу над теми элементами курса, которые создают возможность дальнейшего повышения математического образования. Это необходимо сегодня и будет остро необходимо завтра.

Дело в том, что, если не говорить о вычислительной технике, весь изучаемый в школе математический материал был известен математикам издавна, еще до XVIII в. Практика применения математических методов развивается так быстро, что этого уже недостаточно. Положение будет усложняться, и это неизбежно будет оказывать давление на школьное математическое образование и требовать его пересмотра.

Задача повышения историко-научной квалификации преподавателей математики и соответственно подготовки студентов педагогических институтов и университетов также усложнится. Помимо опыта исторического развития математики до XVII в., ее изучение неизбежно должно будет охватывать и более поздние исторические периоды.

Общей целью в этой части делается задача изучения преподавателями формирования классических основ современной математики, т. е. того, что составляет содержание не только школьного, но и вузовского математического образования. Эта задача, во все времена срочная и настоятельная, делается особенно неотложной сейчас, в пору бурного развития математики, ее приложений и соответственно математического образования. И это будет относиться к преподаванию не только алгебры, но и всех других частей математики.

## Глава 5

# ГЕОМЕТРИЯ: НАУКА И УЧЕБНАЯ ДИСЦИПЛИНА

Когда учитель преподает в школе *геометрию*, он испытывает немалые, порой колоссальные трудности. Ему нужно добиться усвоения детьми *основ геометрической науки*, связать эти основы с возможными приложениями, показать (или хотя бы иметь в виду) необходимость и перспективы дальнейшего усовершенствования геометрического образования после окончания школы или во внеучебное время. А вопросы о том, какова она, геометрическая наука, в чем состоит ее основа, почему эта основа приняла именно такой вид, в каком ее представляют в учебниках,— такие вопросы, хотя они и жизненно необходимы, далеко не так просты.

Геометрия в современном ее состоянии имеет весьма сложную структуру. В ней объединено огромное (без преувеличения) число геометрий (аналитическая, проективная, аффинная, дифференциальная, начертательная, геометрия Лобачевского, элементарная и др.) и геометрических частей других математических наук (геометрия чисел, геометрическая теория функций как действительного, так и комплексного аргумента, дифференциальных уравнений, алгебраическая геометрия и др.). К этому можно добавить, что геометрические термины проникают за пределы геометрических представлений и применяются в таких ситуациях, где о геометрических объектах речь по существу не идет.

Охватить все многообразные связи и зависимости между частями геометрии, определить или хотя бы ощутить их единство, уточнить состав геометрии, разъяснить, какой смысл вкладывают в ее основные понятия,— задача весьма трудная и для многих математиков непосильная. Особенно трудно приходится тем, кто преподает геометрию в школе. Им-то уж никак невозможно ни отложить вопрос, ни подвергать его длительному обсуждению в классе. Трудности научные, методологические усиливают, а то и порождают трудности учебные, методические. Более того, опыт составления и обсуждения учебников геометрии убедительно показывает, что подобные трудности радикально не преодолеваются, если дискуссии замыкаются (как это нередко делается) в рамках сравнения формальных, аксиоматически-дедуктивных математических систем, которым следуют авторы школьных учебников.

В настоящей главе разъясняется вопрос о происхождении, об основных путях и этапах развития геометрии. Это может помочь при обучении геометрии принимать во внимание исторический опыт и задачи общематематического, и в частности геометрического, образования.

По существу мы уже начали рассматривать историю геометрии в первых главах настоящей книги. Так, в первой главе был воссоздан процесс формирования геометрических абстракций и соответствующих понятий. Было указано, что исторические источники убедительно свидетельствуют о наличии у человека геометрических познаний на всех этапах его разумного существования. В течение длительного периода истории человеческого общества, относящегося к доклассовым общественно-экономическим формациям, эти знания были примитивными. Точнее сказать, они были утилитарными. Они были обществу необходимы, чтобы в человеческом сознании правильно отражались формы и взаимные расположения окружающих человека материальных предметов, были необходимы людям для того, чтобы добывать пищу, охотиться, трудиться, словом, чтобы обеспечивать свое существование.

Именно поэтому в геометрические познания с самого начала входили измерения и схематические изображения, вначале, разумеется, несложные. Возникавшие при этом элементы математических абстракций (в том числе геометрических) находились в неразрывной связи с материальными источниками своего происхождения и исторически обусловливаемой областью применения.

В более поздние времена, когда начали образовываться государства с присущим им классовым расслоением общества, менялся и характер геометрических знаний. Под давлением экономических и других общественных потребностей, в этих новых условиях, геометрические сведения накапливались и образовывали системы элементарных геометрических знаний. Все более широкий круг лиц получал систематическое образование, в том числе математическое. В эту прослойку общества входили землемеры, строители, сборщики налогов, служащие государственных учреждений (писцы), члены культовых (религиозных) организаций, а также торговцы и ремесленники. Геометрия, которой их обучали, представляла собой по большей части набор правил для решения частных классов задач применительно к требованиям профессии (измерение участков земли, обмеры строений, определение объема работы по отсыпке плотин и др.).

Геометрические знания были органически слиты с практикой измерений и подсчетов. Учебные пособия были написаны как специализированные руководства, справочники, приспособленные к потребностям специалистов определенного профиля. Учебный и справочный материал (что особенно заметно в древнекитайских сочинениях) был распределен по отдельным сочинениям или частям сочинений и расположен по возможности систематично. Их содержание пополнялось и видоизменялось медленно.

Причиной такой медлительности и застоя был общий характер исторического развития. Хотя политических и государственных изменений в странах древних цивилизаций было предостаточно, в калейдоскопе исторических событий неизменной или почти неизменной оставалась экономическая основа общества: примитивное сельское хозяйство и рабский труд. Одним из последствий такого положения оказывалось и отсутствие стимулов для совершенствования научных знаний и для повышения уровня обучения в школах.

Во второй главе книги был охарактеризован процесс формирования теоретических частей геометрии. В силу определенных исторических обстоятельств на этом этапе происходило совершенно принудительное обособление теоретической математики от вычислительной и измерительной практики. Было бы грубой ошибкой следовать за немногими представителями древнегреческой науки и сосредоточиваться лишь на «Началах» Евклида и других теоретических сочинениях. Весь опыт развития науки говорит, что практические задачи в работах Архимеда, Герона и др. играли весьма значительную роль.

Та часть геометрии, в которой решались практические задачи, была всегда нужна большинству людей. Она существовала, развивалась и порождала как практически важные, так и теоретически значимые результаты. Например, из практики измерения углов постепенно выросла тригонометрия. Этому вопросу мы посвятим следующую главу книги. Вычисление площадей фигур и объемов тел все более сложной конфигурации было необходимо для дальнейшего развития геометрии. Из приемов проектирования и их технических применений вырастали методы проективной и начертательной геометрии. В последние годы из вычислительно-практической части геометрических идей математики выросли комбинаторные методы исследования систем, состоящих из дискретно расположенных элементов (графы, конечные и дискретные геометрии).

Таким образом, измерительно-конструктивная практика явилась источником весьма значительной составной части геометрии, имеющей большое практическое и теоретическое значение. В свете сказанного выглядит ничем не оправданным заблуждением стремление сводить представление о геометрии как о науке и как об учебном предмете к набору теорем, доказательство которых опирается на небольшое количество исходных высказываний (аксиом).

Вторым источником, порождающим не меньшую, если не бóльшую часть геометрии, является привлечение геометрии к комплексному исследованию материальных объектов математическими средствами. По существу уже первые шаги геометрии были отмечены ее неразрывным взаимодействием с арифметикой при измерениях и построениях, о чем мы только что говорили. Следующий пример участия геометрии в такого рода комплексных исследованиях относится к «слиянию» (слитному действию) геометрических и алгебраических методов. Произошло это сравнительно поздно, в XVII в. Привело оно к появлению в системе математики *аналитической геометрии.* Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Заслуга построения аналитической геометрии принадлежит Р. Декарту и П. Ферма. Сделали они это практически одновременно, в 30-е гг. XVII в. Рене Декарт (1596—1650) родился и большую часть жизни прожил во Франции, где получил первоклассное по тем временам образование. Всю жизнь он занимался наукой (физикой, физиологией, философией, математикой и др.) и достиг поистине энциклопедической образованности. Целью естественнонаучных знаний Декарта была разработка общего метода изучения всех вопросов естествознания. При этом, по справедливому замечанию К. Маркса, Декарт совершенно отделил этот род своих занятии от метафизических рассуждений идеалистического характера. В границах физики Декарта единственную субстанцию, единственное основание бытия и познания представляет материя.

Р. Декарт

Рационализм идей Декарта, признающего прежде всего разум, строгую дедукцию, был направлен против церковной схоластики. Поэтому возникали напряженные отношения с католической церковью, что заставило его в 1629 г. переехать в Нидерланды. Враждебное отношение протестантских богословов побудило Декарта в 1649 г. предпринять новый переезд, теперь в Швецию, где через год он скончался.

В нашу задачу не входит анализ философских воззрений Декарта. Мы будем их привлекать к рассмотрению лишь в той мере, в какой это может помочь понять его математические идеи и результаты. Речь пойдет прежде всего о месте математики в его естественнонаучных занятиях.

Природой материи, утверждал Декарт, является ее трехмерная объемность; важнейшими свойствами ее — делимость и подвижность. Эти же свойства материи должна отображать математика. Она не может быть либо численной, либо геометрической, а должна быть универсальной наукой, в которую входит все относящееся к порядку и мере. Все содержание математики должно рассматриваться с единых позиций, изучаться единым методом; само название науки должно отражать эту ее всеобщность. Декарт предложил назвать ее *универсальной математикой* (Mathesis universalis).

Эти общие идеи получили конкретное преломление к 1637 г., когда вышло в свет знаменитое декартово «Рассуждение о ме-

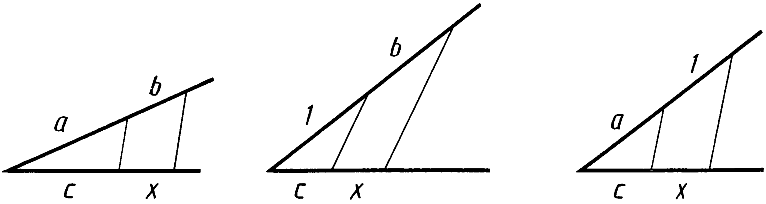


Рис. 21

тоде». В этом сочинении, помимо общей характеристики метода естественнонаучных исследований, выделены в отдельные части приложения этого метода к диоптрике, метеорам и к математике. Последняя часть, которую Декарт назвал *«Геометрия»*, представляет для нас наибольший интерес.

Связь буквенной алгебры с геометрией кривых, необходимая для универсальной математики Декарта, обнаружилась тотчас, как был установлен изоморфизм поля вещественных чисел и поля отрезков прямых. Потребовалось только определить операции над отрезками так, чтобы отрезки действительно образовали поле. Суммы и разности отрезков, очевидно, являются отрезками, т. е. элементами этого поля. Затруднения с умножением и делением отрезков (эти операции приводили к результатам иной размерности, к прямоугольникам, что заставляло Виета вводить видовую алгебру) были преодолены Декартом введением единичного отрезка и построением четвертого пропорционального отрезка. Последнее он осуществлял соответствующим откладыванием отрезков на сторонах произвольного угла (см. рис. 21) и проведением параллельных сечений.

Геометрическими образами алгебраических корней являются построения одного, двух и т. д. средних пропорциональных. Еще последовательнее, чем в «Геометрии», эта идея проведена в маленьком сочинении «Исчисление господина Декарта».

В основу всей «Геометрии» Декарта положены две идеи: введение переменной величины и использование прямолинейных *(декартовых)* координат. В согласии с его унифицирующей тенденцией переменная величина вводится в двоякой форме: в виде текущей координаты точки, движущейся по кривой, и в виде переменного элемента множества чисел, соответствующих точкам данного координатного отрезка.

«Геометрия» состоит из трех книг (частей). *Первая* книга *«О задачах, которые можно построить, пользуясь только кругами и прямыми линиями»* начинается с кратких разъяснений только что изложенных общих принципов. Затем следуют правила составления уравнений геометрических кривых.

Чтобы решить какую-либо задачу, нужно сначала считать ее как бы решенной и обозначить буквами все линии, как данные, так и искомые. Затем, не делая никакого различия между данными и искомыми линиями, установить зависимость между ними так, чтобы получить два выражения для одной и той же величины (т. е. можно приравнять одно выражение другому). Это и приводит к уравнению, с помощью которого решается задача. Доказано, что все геометрические задачи, решаемые с помощью циркуля и линейки, сводятся к решению уравнений не выше 2-й степени. Общие правила аналитической геометрии Декарт не излагает подробно в общем виде, а демонстрирует их при решении трудных задач. В качестве такой задачи он выбрал *задачу Паппа*: на плоскости даны несколько ($n$) прямых, например: $MN$, $NK$, $ML$, $DA$ (рис. 22). Найти геометрическое место точек, для которых произведение отрезков, проведенных из них под одинаковыми углами к $\frac{n}{2}$ прямым, находились бы в данном отношении к произведению отрезков, проведенных тем же способом к другой половине прямых. Например: $\frac{CB \cdot CD}{CF \cdot CH} = \frac{1}{2}$.

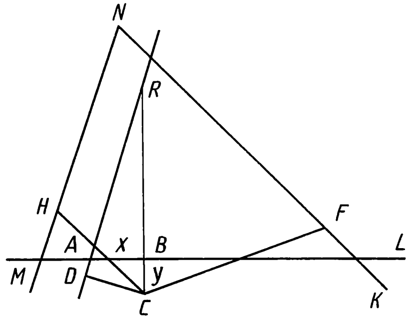

Рис. 22

Одна из данных линий $ML$ и одна из искомых $BC$ принимаются за главные. Обозначим $AB = x$ и $BC = y$. Так как углы $\triangle ABR$ известны, то известно и отношение сторон $\frac{BR}{x} = \frac{b}{n}$, откуда $CR = y + \frac{bx}{n}$. Рассуждая так же относительно $\triangle DRC$ и считая $CR : CD = n : c$ получим $CD = CR \cdot \frac{c}{n} = \frac{cy}{n} + \frac{bcx}{n^2}$. Таким же образом выразим через $x$ и $y$ отрезки $CF$, $CH$, подставим в условие $CF : CH = 2BC \cdot CD$ и получим уравнение искомого геометрического места: $F(x, y) = 0$.

Декарт скупо поясняет, что геометрическое место в случае трех и четырех прямых представляет собой коническое сечение. В случае, когда число прямых $n > 4$, Декарт устанавливает, что для $2n$ или $2n - 1$ прямых уравнение геометрического места имеет степень $n$ относительно двух переменных $x$ и $y$. Задача Паппа относительно пяти прямых оказывается разрешимой циркулем и линейкой, или, по терминологии Декарта, плоской задачей. Такой же задача оказывается и для шести прямых, но Декарт этого не отметил.

*Вторая* книга «Геометрии» названа *«О природе кривых линий»*. Она посвящена более подробному рассмотрению кривых различных порядков, их классификации и выявлению их свойств. Все кривые Декарт делит на два класса в зависимости от того, возможно ли провести их исследование средствами, которыми располагал автор, или нет. В соответствии с этим в математике оказалось возможным рассматривать лишь такие кривые, которые описываются непрерывным движением (циркулем или линейкой) или же несколькими такими последовательными движениями, из которых последующие вполне определяются им предшествующими. Остальные кривые получили название механических (позднее у Лейбница трансцендентных) и были исключены из класса допустимых кривых. Их свойства могут быть открыты лишь случайно благодаря специфическим приемам, не носящим систематического характера.

Все допустимые кривые, таким образом, могут быть построены с помощью некоторого шарнирного механизма. Относительно этих кривых (без доказательства) высказано утверждение, что их можно выразить алгебраическими уравнениями. Тем самым Декарт предвосхитил одну из главных теорем кинематики механизмов (доказанную Кемпе в 1876 г.), гласящую, что с помощью плоских шарнирных механизмов, в которых движение первых звеньев полностью определяет движение остальных, можно описывать дуги любых алгебраических кривых и нельзя описать ни одной трансцендентной.

Декарт мимоходом бросает замечание, что степень уравнения кривой инвариантна относительно выбора системы прямолинейных координат. Но гипноз принципа построения кривых только с помощью шарнирных механизмов слишком сильно владеет Декартом. Поэтому в основу классификации кривых он кладет не степень уравнения, а число звеньев шарнирного механизма. В силу этого принципа кривые оказываются разделенными по родам, причем к $n$-му роду относятся кривые порядка $2n-1$ и $2n$. Этот неудобный принцип был заменен только Ньютоном, который ввел классификацию кривых по степеням уравнений.

Декарт еще не в силах построить общую теорию кривых рода $n \geqslant 2$. Но для демонстрации силы и универсальности своего метода он вновь возвращается к задаче Паппа, исследуя частные ее случаи. Например, пусть задача Паппа поставлена для пяти прямых (см. рис. 23): четыре — $FG$, $DE$, $BA$, $HI$ — параллельны и эквидистантны (расстояние между соседними равно $a$), пятая, перпендикулярная к ним, $GA$. Найти точку $C$ такую, что $CF \cdot CD \cdot CH = CB \cdot CM \cdot AI$. Пусть $CM = x$, тогда $CF = 2a - y$; $CB = y$; $CD = a - y$; $AE = EG = AI = a$; $CH = a + y$.

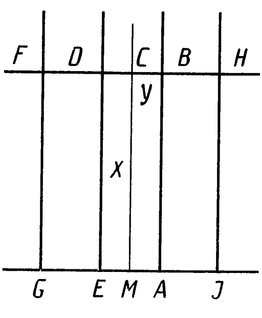

Рис. 23

Уравнение искомого геометрического места таково:

$$(2a-y)(a-y)(a+y) = axy,$$

или

$$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy.$$

Для фактического построения данной кривой Декарт применяет специальный прием, рассматривая точки пересечения движущихся параболы и прямой.

Значительную часть второй книги составляют теоремы о проведении *нормалей*[1] и *касательных* к алгебраическим кривым. Свой метод («метод нормалей») Декарт распространил на конические сечения и на так называемые декартовы овалы. Он подчеркивал значение высказанных теорем для оптики.

К. Гаусс

Книгу замыкает предложение о возможности распространения метода Декарта на трехмерный случай. Высказывается при этом идея представления пространственной кривой с помощью проектирования ее на две взаимно перпендикулярные плоскости, общая прямая которых является одной из осей координат. Однако эта идея оказалась у Декарта неразвитой; к тому же в его рассуждения вкралась ошибка. Он в этом единственном предложении аналитической геометрии в пространстве утверждает, что проекции нормали к пространственной кривой являются нормалями к проекции кривой, что неверно даже для плоской кривой, не говоря уже о наличии в общем случае целой нормальной плоскости. Нет у Декарта и речи о трех координатах точки в пространстве и об уравнениях поверхностей.

Задача *третьей* книги *«О построении телесных, или превосходящих телесные, задач»* состоит в построении общей теории решения уравнений и использовании для этого наряду с алгебраическими средствами геометрических мест. Алгебраическая символика Декарта уже несущественно отличается от современной. Всякое уравнение мыслится приведенным к виду $P_n(x)=0$, где $P_n(x)$ — полином с целыми коэффициентами, расположенный по убывающим степеням неизвестной $x$. Из рассмотрения проблемы делимости $P_n(x)$ на $x-a$, где $a$ — корень уравнения, Декарт делает глубокий вывод о том, что число корней уравнения равно наивысшему показателю степени $x$. Он при этом учитывает корни «действительные» (положительные), «ложные» (отрицательные) и те, которые можно «вообразить» (мнимые и комплексные). Доказательства этого вывода он дать еще не может. Его еще много лет не могли дать и другие ученые. Только в 1797 г. это смог сделать Гаусс (1777—1855).

Декарт показал, что уравнение имеет столько положительных корней, сколько имеется знакоперемен в ряду коэффициен-

[1] Нормалью называют прямую, восставленную из точки касания перпендикулярно касательной.

тов, и столько отрицательных, сколько повторений знака. Он ввел также приемы преобразования коэффициентов уравнения, чтобы добиться необходимого изменения его корней (увеличения, уменьшения или изменения знака).

Замечательной по глубине замысла является постановка проблемы приводимости, т. е. представления целой рациональной функции с рациональными коэффициентами в виде произведения таких же функций. Декарт показал, что уравнение 3-й степени решается в квадратных радикалах (с помощью циркуля и линейки), лишь если оно приводимо. Вопрос о приводимости уравнения 4-й степени он свел к вопросу о приводимости его кубической резольвенты. Если дано уравнение $x^4+px^2+$ $+qx+r=0$, то его можно записать в виде

$$\left(x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}p+\frac{q}{2y}\right)\left(x^2+xy-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}p+\frac{q}{2y}\right)=0,$$

где вспомогательное $y$ определяется из уравнения $y^6+2py^4+$ $+(p^2-4r)y^2-q^2=0$, кубического относительно $y^2$.

Декарт не дает этому утверждению доказательства. Из комментариев к «Геометрии», составленных Ф. Скоутеном (1615—1660), профессором математики в Лейдене, горячим приверженцем Декарта, можно сделать вывод, что при этом применяется метод неопределенных коэффициентов. Скоутен рассматривает уравнение $x^4-px^2-qx+r=0$ и записывает его в виде $(x^2+yx+z)(x^2-yx+v)=0$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, он получает уравнения

$$\begin{aligned}&z-y^2+v=-p;\\&-zy+vy=-q;\\&vz=r;\\&y^6-2py^4+(p^2-4r)y^2-q^2=0.\end{aligned}$$

Решение уравнений 3-й и 4-й степени геометрическими средствами у Декарта сводится к задачам о построении (вставке) двух средних пропорциональных и о трисекции угла. Подобно арабским математикам, но, по-видимому, совершенно самостоятельно Декарт практически решает эти уравнения с помощью пересечения двух конических сечений. Затем он распространил этот метод на уравнения третьего рода (5-й и 6-й степени), подбирая пересечения окружности и движущейся специальной кривой. Замечания Декарта о решении подобным методом уравнений степени $n>6$ не оказались достаточно ясными, чтобы о них говорить определенно.

Таково содержание «Геометрии» Декарта — первого сочинения по аналитической геометрии, сыгравшего огромную роль в дальнейшем развитии математики XVII в. Аналитическая геометрия Декарта имела еще много недостатков. Прежде всего область этой науки была еще чрезмерно сужена априорными требованиями, проистекающими скорее из философских источников, чем из потребностей метода, ограничена только алгебраическими кривыми. Неудачной оказалась классификация алгебраических кривых по жанрам (родам), а не по степеням уравнений, их выражающих. Декарт не довершил проникновения в геометрию алгебраического аппарата, не распространил свой метод на изучение свойств кривых, опираясь на свойства соответствующих уравнений. Координатные оси в «Геометрии» еще неравноправны; проводится только одна ось, а другая координата восстанавливается по мере необходимости. Поведение кривой изучается только в первом квадранте, остальные квадранты не учитываются. Однако «Геометрия» Декарта означала шаг принципиального значения в перестройке математики, что сделало это сочинение классическим.

П. Ферма

Переворот во взаимоотношениях алгебры и геометрии и взаимное проникновение их методов с помощью системы координат представляли в математике явление революционное. Подобные перевороты никогда в истории не делаются одним человеком. Так и появление аналитической геометрии не было заслугой одного Декарта. При этом речь идет не только о тех современниках, в работах которых в неразвитом виде содержались те или иные идеи, подхваченные и переработанные Декартом. Таких современников было много. Мы имеем в виду то, что одновременно с Декартом аналогичную систему взглядов развил в специальном сочинении французский математик П. Ферма (1601—1665).

Ферма родился и жил на юге Франции. Окончил университет в г. Тулузе по юридическому факультету. С 1631 г. до конца жизни занимался в Тулузе юридической деятельностью, будучи советником местных органов управления. Математикой занимался в свободное время. Был знатоком современной математики и классических сочинений древних. Получил выдающиеся результаты в теории чисел, геометрии, методах оперирования с бесконечно малыми, оптике. Ферма не печатал свои сочинения, а сообщал о своих достижениях в научной переписке и при личном общении и дискуссиях со многими выдающимися учеными. Поэтому подавляющее число работ Ферма было опубликовано лишь после его смерти, в 1679 г. и позднее.

Идеи аналитической геометрии, т. е. введение прямолинейных координат и приложение к геометрии алгебраических методов, сосредоточены в небольшом сочинении Ферма *«Введение в теорию плоских и пространственных мест»*, ставшем известным с 1636 г., но напечатанном вместе с другими сочинениями в 1679 г. Исходными пунктами этой работы явились сочинения древних, особенно Аполлония, по изучению геометрических мест. Те геометрические места, которые представлялись прямыми или окружностями, назывались плоскими, а представляемые коническими сечениями — пространственными. Задачей Ферма было показать, что уравнениям 1-й степени соответствуют прямые, а уравнениям 2-й степени — конические сечения.

Метод координат вводится так же, как у Декарта: задается одна ось — ось абсцисс, на ней откладываются от выбранного начала отрезки, соответствующие значениям одной переменной. Значения другой переменной, также изображаемые отрезками, восстанавливаются из конца отрезка под выбранным для данной задачи углом (чаще всего прямым). Затем Ферма выводит уравнения прямой, окружности, а также уравнения всех конических сечений.

Вначале он доказывает, что уравнение прямой, проходящей через начало координат, будет иметь вид $ax = by$. Затем последовательно выводятся уравнения: окружности в прямоугольных координатах с центром в начале координат; гиперболы, отнесенной к асимптотам; параболы, отнесенной к диаметру и касательной в конце его; эллипса в случае, когда осями будут сопряженные диаметры.

Замечательно, что Ферма рассматривает задачу и с другой стороны. Он исследует общие виды уравнений 1-й и 2-й степени, преобразованием координат (перенос начала и поворот оси) приводит их к каноническим формам, облегчая тем самым их геометрическое толкование. Например, пусть дано уравнение $2x^2 + 2xy + y^2 = a^2$. Перепишем его в виде $(x+y)^2 + x^2 = a^2$. Выберем новые оси: $x + y = 0$, $x = 0$. Новые координаты: $x_1 = x\sqrt{2}$; $y_1 = x + y$. Новое уравнение: $\frac{2a^2 - x_1^2}{y_1^2} = 2$. По Аполлонию, замечает Ферма, эта кривая — эллипс, отнесенный к сопряженным диаметрам.

Распространение аналитической геометрии на изучение пространственных геометрических мест Ферма проводит путем изучения пересечений поверхностей плоскостями. Однако пространственные координаты и у него еще отсутствуют, а аналитическая геометрия в пространстве остается незавершенной.

«Введение» Ферма показывает, что он, по-видимому, последовательнее Декарта внедрял координатный метод, особенно приемы преобразования координат, и не был стеснен априорными соображениями, ограничивающими возможности его методов. Однако это сочинение не оказало на математику столь значительного влияния, как декартова «Геометрия». Причин этому было две. Во-первых, «Введение» было напечатано очень поздно, а до этого времени было известно лишь узкому кругу корреспондентов Ферма. Во-вторых, оно было изложено тяжеловесным, затруднительным для понимания языком алгебры Виета.

Ферма понимал, что он находится только в самом начале исследований новой математической дисциплины. Но он добавлял: «И все же мы не раскаиваемся в написании этого преждевременного и не вполне зрелого сочинения. Действительно, для науки представляет некоторый интерес не утаивать от последующих поколений еще не оформившиеся плоды разума; и благодаря новым открытиям науки первоначально грубые и простые идеи как укрепляются, так и множатся. И в интересах самих изучающих составить себе полное представление как о сокращенных путях разума, так и о самопроизвольно развивающемся искусстве» (Ферма П. Введение в изучение плоских и телесных мест // Р. Декарт. Геометрия.— М.; Л.: ОНТИ — ГТТИ, 1938.— С. 147).

Дальнейший ход истории математической науки показал, что идея Декарта о едином методе, в котором сочетались бы методы двух наук: алгебры и геометрии, осуществилась. Однако это произошло не так, как казалось Декарту. Аналитическая геометрия ни алгебры, ни геометрии не поглотила, а заняла свое место в системе математических знаний; алгебра же (равно как и геометрия) продолжала в дальнейшем свое самостоятельное развитие.

Что же касается собственно аналитической геометрии, то, несмотря на кажущуюся очевидной пользу, она переживала в течение еще примерно семидесяти лет период медленного внедрения в общую систему математики. Вокруг нее велись дискуссии о правомерности, возможностях и достоинствах ее методов. Только в XVIII в. положение аналитической геометрии начало стабилизироваться, когда И. Ньютон стал систематически ее применять в сочинении «Перечисление кривых третьего порядка» (1704).

Привычную нам форму аналитическая геометрия приобрела начиная с работ Л. Эйлера «Введение в анализ бесконечных», т. 2 (1748). Свое название — аналитическая геометрия — она получила лишь в самые последние годы XVIII в. Ввел его французский математик С. Ф. Лакруа, автор многочисленных трактатов и учебников.

Позднее происходили только усовершенствования сложившейся системы: расширение области геометрических объектов, описываемых алгебраическими уравнениями; накопление геометрических интерпретаций алгебраических уравнений; векторная алгебра; усовершенствование координатных систем, в том числе за счет введения так называемых избыточных координат: тетраэдрических, пентасферических и др.

Появление аналитической геометрии существенно облегчило формирование анализа бесконечно малых, о чем ярко и убедительно писал Ф. Энгельс: «Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина.* Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено, Ньютоном и Лейбницем»[1].

Историю математического анализа в необходимом объеме мы рассмотрим в главе 7 настоящей книги. Что же касается интересующих нас здесь вопросов о путях развития геометрии, укажем лишь на то, что геометрический аспект анализа, т. е. *дифференциальная геометрия*, возник одновременно или даже раньше исчисления бесконечно малых, будучи, образно говоря, его старшей сестрой.

Наконец, аналитическая геометрия сделалась важным приемом построения механики в руках Л. Эйлера, И. Ньютона и Ж. Лагранжа, весьма эффективным для решения многих задач математического естествознания.

Так, в истории геометрии прослеживается второй путь развития, породивший многие важные области этой науки.

Источником третьего направления исторического пути геометрии, характеризующегося формированием аксиоматических систем, является сочинение Евклида «Начала». Во второй главе мы подробно рассмотрели его содержание, стиль и особенности. Делали мы это в контексте общей проблемы формирования математической науки. Мы также объяснили, что геометрический язык «Начал», применявшийся Евклидом, был им принят потому, что именно этим способом достигалась наивысшая по тому времени общность утверждений.

В течение многих веков «Начала» были единственной в математике аксиоматической системой. Геометрическая форма была ее непременным атрибутом. В школе геометрию изучали по Евклиду. Однако с течением времени критика «Начал» нарастала. В научной части критики сосредоточивались преимущественно на системе исходных высказываний (которые мы далее для краткости будем называть аксиомами) и на логических средствах доказательств. Педагоги же требовали большей ясности и жизненности изложения геометрического материала.

Научная проблематика, относящаяся к анализу аксиоматических систем математики, сложна и своеобразна. Она не ограничивается рамками геометрии. А вот непосредственного применения в повседневной работе школы она не имеет. Это очевидно. Поэтому мы ограничимся в этой части главы несколькими замечаниями, вводящими учителей в суть дела.

Лет 150—200 тому назад было подорвано представление о единственности аксиоматической системы. Н. И. Лобачевский и несколько позднее венгерский математик Я. Больяй (1802—1860) построили новые системы геометрии, аксиоматическая основа которых отличалась от евклидовой тем, что в ней была заменена аксиома о параллельных. Это открыло дорогу для построения других неевклидовых систем путем изменения их аксиоматического состава. История неевклидовых геометрий

---

[1] Маркс К., Энгельс Ф. Собр. соч.— Т. 20.— С. 573.

представляет собой существенную часть проблемы формирования современной геометрии.

К концу прошлого века Д. Гильберт (1862—1943) завершил в основном исследование проблемы построения логически строгой системы аксиом, которая отражала бы исходящее из ранних геометрических представлений свойство взаимного расположения. В качестве начальных объектов были избраны абстракции, получившие названия *точка, прямая, плоскость.* Их взаимоотношения были названы *принадлежит* (или лежит на), *лежит между, конгруэнтны.* Сочинение *«Основания геометрии»* Д. Гильберта впервые появилось в 1899 г. (русское издание 1948 г.). Позднее автор этого сочинения внес в него ряд усовершенствований, чтобы полнее удовлетворить требованиям математической строгости. Оказалось, что подобные системы задаются с помощью пяти групп аксиом:

а) восемь аксиом *соединения* или *принадлежности*;

б) четыре аксиомы *порядка* (упорядоченности);

в) пять аксиом *конгруэнтности* или *движения*;

г) аксиома *параллельности*;

д) две аксиомы *непрерывности* (Архимеда и линейной полноты).

В ходе подобных работ стала проясняться роль аксиоматических систем в математике. Их элементы — это абстракции, т. е. отвлечения объектов от всех их качественных особенностей. Они определяются как изоморфные. Затем в систему вводятся исходные высказывания, описывающие только те свойства или связи между элементами, которые в данном контексте представляется необходимым исследовать. На этом пути строятся математические модели. Служебная роль моделей: выделение объектов, их отграничение, исследование возможностей заданных логических средств. На этом пути прослеживается конкретный аспект общей мысли В. И. Ленина, выраженной в словах: «Мы не можем представить, выразить, смерить, изобразить движения, не прервав непрерывного, не упростив, угрубив, не разделив, не омертвив живого. Изображение движения мыслью есть всегда огрубление, омертвление,— и не только мыслью, но и ощущением, и не только движения, но и всякого понятия»[1].

В ходе подобных исследований также стали выясняться те требования, которым должны удовлетворять системы аксиом. Основными из них являются требование *полноты* и требование *совместности.* Совместность включила в себя требования *независимости* и *непротиворечивости.* Последняя проверяется построением интерпретаций и по существу эквивалентна этому построению. Независимость же какой-либо аксиомы устанавливается заменой ее отрицанием с последующим построением интерпретаций с целью доказать непротиворечивость получившейся но-

---

[1] Ленин В. И. Полн. собр. соч.— Т. 29.— С. 233.

вой системы. Имеет смысл строить только совместные аксиомы. Но доказывать наличие совместности трудно.

Полноту системы аксиом стали понимать как свойство определять систему объектов с точностью до изоморфизма. Когда аксиоматические исследования распространились за пределы геометрии, то оказалось, что требование полноты не всегда удовлетворяется. Аксиоматика теории групп, например, не может быть полной, так как существуют группы с неизоморфной структурой.

Аксиомы геометрии, как и вообще математические аксиомы, не являются вечными *априорными* (т. е. существующими до получения конкретного знания) истинами. Критерий их истинности лежит в практике. На каждом этапе исторического развития математики выявляется их относительность. Большая роль, которую играет в математике аксиоматический метод, не может заслонить, затушевать материальное происхождение всех применяемых в нем понятий и рассуждений. По этому вопросу Ф. Энгельс говорит: «Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствованы исключительно из внешнего мира, а не возникли в голове из чистого мышления. Должны были существовать вещи, имеющие определенную форму, и эти формы должны были подвергаться сравнению, прежде чем можно было прийти к понятию фигуры. Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное; таким путем мы получаем точки, лишенные измерений, линии, лишенные толщины и ширины, разные $a$ и $b$, $x$ и $y$, постоянные и переменные величины, и только в самом конце мы доходим до продуктов свободного творчества и воображения ... Точно так же выведение математических величин друг из друга, кажущееся априорным, доказывает не их априорное происхождение, а только их рациональную взаимную связь»[1].

Как мы и указывали выше, подобная научная проблематика может быть усвоена лишь преподавателями математики и характеризовать их уровень научной подготовленности, способствующий высокому качеству преподавания. В практике работы со школьниками она значительного применения найти не может, что почти очевидно. Зачем же преподавание геометрии в школе ведут на аксиоматической основе? Общепринято считать, что преподавание элементов эвклидовой аксиоматической системы геометрии имеет целью воспитывать у учеников и совершенствовать навыки логической строгости в математических рассуждениях.

Это очевидно и сильных возражений принципиального харак-

---

[1] Маркс К., Энгельс Ф. Собр. соч.— Т. 20.— С. 37.

тера вызывать не может. Однако также очевидно, что школьный курс геометрии не может быть подчинен только подобным целям. В курсах геометрии находили, находят, должны находить отражение все три составные части исторического пути геометрии. История преподавания геометрии в школе, о чем мы приведем сейчас необходимый минимум сведений, убедительно покажет это.

Насколько позволяют судить факты истории математических знаний, геометрические сведения в учебных заведениях древнего мира не выделяли в отдельную дисциплину при обучении математике. Для основной массы учащихся их содержание состояло из набора практически применяемых приемов измерений, построений, вычерчиваний. Лишь немногие ученики активно работающих ученых, участники научных школ, усваивали геометрические сведения теоретического характера.

В средние века и в начале эпохи Возрождения в преподавании и в науке господствовали совсем другие традиции. Как учащимся, так и ученым полагалось усваивать и обсуждать только те сведения, которые содержались в сочинениях признанных авторитетов (средневековых и античных). Верхом образованности у средневековых схоластов и даже у многих гуманистов эпохи Возрождения являлось умение цитировать (преимущественно на латинском языке) чужие тексты и комментировать их. В геометрии и вообще в математике тех времен это нашло отражение в требованиях изучать «Начала» Евклида как вершину математической учености. Однако в практике школьного преподавания геометрия занимала обычно скромное место вспомогательной дисциплины, необходимой для лучшего понимания астрономии. Ее изложение не выходило, как правило, за рамки первых книг «Начал», в ряде случаев не далее планиметрических книг.

С XVI в. развитие науки в Европе пошло по иному пути. Экономические, а затем общественные и культурные преобразования эпохи Возрождения повлекли существенные изменения во всех областях научного мировоззрения. Весь опыт развития математики стал рассматриваться с позиций возможности его применения к решению актуальных для того времени задач математического естествознания. Создавалась новая обстановка в математике, позволившая в XVII столетии создавать аналитическую геометрию, а затем и анализ бесконечно малых. Это сказалось и на содержании школьной математики, и на методах ее преподавания.

Уже в середине XVI в. стали публиковать книги по практической математике: арифметике и геометрии, и притом не на латинском, а на языках народов, населявших Европу: французском и др. Они играли роль учебников элементарной математики для купцов и для ремесленников. Что же касается сочинений теоретического характера, как учебных, так и научных, то произошло резкое увеличение числа изданий, где разъяснялось

Ж. Д'Аламбер

содержание «Начал» с целью сделать их более доступными для понимания.

Последующее бурное развитие математической науки, в том числе геометрии, требования прикладного характера, необходимость увеличивать число математически образованных людей делало все более заметным, а затем и недопустимым отставание в части ее преподавания. К середине XVIII в. это отставание стало сказываться настолько сильно, что привлекло внимание широких общественных слоев. Одним из главных предметов критических обсуждений сделался вопрос о пригодности «Начал» в качестве школьного курса геометрии.

В Англии и частично в германских государствах эти дискуссии привели к созданию учебников, сохраняющих дух и структуру «Начал» и лишь более или менее упрощающих изложение. В предреволюционной и революционной Франции, наоборот, преподавание математики подвергалось решительной реорганизации. В том, что относится к школьному курсу элементарной геометрии, исходные установки реформы определялись общими воззрениями французских энциклопедистов, в особенности Ж. Д'Аламбера (1717—1783). В концентрированном виде последний изложил свои взгляды в статье «Геометрия» в знаменитой энциклопедии, издаваемой им совместно с Д. Дидро.

По мнению Д'Аламбера, преподавание геометрии вообще не должно следовать за Евклидом. Оно должно быть различным как по содержанию, так и по методам преподавания, в зависимости от целей обучения: начального, практического, полного общеобразовательного или специального математического. Д'Аламбер выступает против «химерической» точности суждений и полагает, что совсем не обязательно начинать курс геометрии с перечня аксиом. Логически строгие истины он рекомендует заменять утверждениями, доступными для понимания, по возможности очевидными, не смущаясь тем, удалось ли свести число их к минимуму. Д'Аламбер считает необходимым заботиться прежде всего об измерениях геометрических объектов, что выдвигает на первое место метрические аспекты геометрии.

Корни «антиевклидова» движения в геометрии и в ее преподавании восходят к давним временам. С особенной силой они проявлялись, например, в творчестве Рамуса (1515—1572). Были у Д'Аламбера и активно действующие единомышленники. В 1741 г. вышли в свет, например, «Начала геометрии» А. Клеро (1713—1765), где частично были осуществлены идеи Д'Аламбера. Позднее появился ряд учебников самого Д'Аламбера, а также Безу, Лежандра, Лакруа для начальной, средней и для высшей школы. С большей или меньшей степенью решимости эти авторы отрывали преподавание геометрии от евклидовой схемы, от его стиля и от схоластических наслоений.

Влияние педагогической деятельности французских математиков XVIII в. было значительным. Они по существу создали тип современного нам школьного учебника геометрии. То, что теперь кажется нам привычным и очевидным в построении основ школьных учебников геометрии, является повторением или развитием того, чего достигли французские ученые и преподаватели к концу XVIII в.

Что же конкретно было ими сделано? Во-первых, в основы излагаемого геометрического материала были введены метрика и движение, которых столь тщательно избегал Евклид. Во-вторых, была произведена широкая арифметизация, в том числе арифметизация теории отношений и пропорций. В результате этого отпала необходимость в пятой книге «Начал». Введение алгебраической символики и элементов алгебраических суждений вообще сняло необходимость во второй книге. Употребление радикалов упразднило в курсе геометрии сложную классификацию иррациональностей, развитую в десятой книге «Начал» Евклида.

На таких путях «Начала» Евклида были переработаны в курс элементарной геометрии, более живое изложение которого сделало его доступным для широких контингентов учащейся молодежи и для решения практических задач.

До недавнего времени в нашей стране главным и, пожалуй, единственным учебником геометрии был учебник А. П. Киселева (1852—1940) «Элементарная геометрия». В первый раз он появился в 1892 г. и долгие годы с небольшими изменениями переиздавался. Его предшественником был учебник профессора Московского университета А. Ю. Давыдова (1823—1885) «Геометрия», вышедший впервые в 1864 г. и также выдержавший много изданий. Обе эти книги высоко ценили преподаватели математики за строгую систематичность и четкость в распределении материала, ясный и лаконичный язык.

А начиналось преподавание геометрии в России, как отдельной математической дисциплины, еще в начале XVIII в. вместе с организацией широкой сети школ, предпринятой Петром Первым. В первых учебниках (Л. Ф. Магницкий, 1703, и др.) преобладали практические сведения об измерениях геометрических величин, построениях с помощью циркуля и линейки, элементах землемерного дела. Позднее (С. Я. Румовский, 1760; Н. Г. Курганов, 1765) добавили в курс геометрии и тригонометрию, но сохранили практическую направленность изложения. Усиление теоретических элементов в учебниках геометрии стало заметным к середине прошлого века под влиянием академика П. Л. Чебышева (1821—1894).

Чтобы правильно оценивать то, что происходит и должно происходить в преподавании геометрии сейчас, обратимся еще раз к тому, как исторически складывались системы геометрических познаний людей, к их обобщенному историческому опыту.

Геометрические знания людей складывались в неразрывном переплетении с количественными характеристиками, возникающими при измерениях, сравнениях, построениях. Такая структура геометрического знания никогда не теряла значения как массовая, необходимая для жизни и труда людей.

Главные результаты, обогащавшие содержание геометрии, связывающие ее с практикой, порождающие новые области математической науки, получались за счет привлечения в ее состав понятий и методов, позаимствованных извне. Мы имеем здесь в виду привлечение элементов численного и аналитического характера: арифметики, алгебры, метода координат, векторного исчисления и др., включая те, что приходят в геометрию из математического анализа.

Дедуктивно-аксиоматические системы геометрии и вообще математики, единственным представителем которых столь долгое время была система Евклида, имеют своим назначением развитие средств логического доказательства. Они являются формой существования теоретической математики, в том числе геометрии. Начинают восприниматься они с достаточной степенью сознательности только в старших классах школы и на более высоких ступенях математического образования.

Современные учебники геометрии являются отражением описанного исторического опыта. И от того, насколько хорошо осознается, отражается и осуществляется в практике преподавания геометрии этот опыт и его суммарные оценки, производимые с марксистско-ленинских позиций, зависит успех в обучении школьников геометрии.

## Глава 6

# МНОГОЛИКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

Издавна установилась такая практика, что при систематическом обучении математике ученику приходится встречаться с тригонометрией трижды. Соответственно ее содержание представляется состоящим из трех частей. Эти части при обучении отделены друг от друга по времени и не похожи друг на друга как по смыслу, вкладываемому в объяснения основных понятий, так и по развиваемому аппарату и по служебным функциям (приложениям).

В самом деле, в школе тригонометрический материал впервые появляется в курсе планиметрии. С помощью тригонометрии решают плоские треугольники. Тригонометрические соотношения получают названия «синус», «тангенс» и т. д., а их значения предстают перед школьниками уже вычисленными и сведенными в таблицы. Остается лишь выработать навык пользования этими таблицами, что и оказывается основной целью на этом первом этапе занятий тригонометрией в рамках учебного предмета геометрии.

Однако проходит время и тригонометрия возвращается к школьникам. Но эта тригонометрия не похожа на ту, что изучали ранее. Ее соотношения определяются теперь с помощью окружности (ее обычно называют производящей окружностью), а не прямоугольного треугольника. Хотя они по-прежнему определяются как функции углов, но эти углы уже произвольно велики, их меры выражаются в радианах. Иначе выглядят и тригонометрические тождества, и постановка задач, и трактовка их решений. Вводятся графики тригонометрических функций. Наконец, появляются тригонометрические уравнения. И весь этот материал предстает перед учащимися уже как часть алгебры, а не геометрии, как прежде.

Третье обличие принимает тригонометрия, когда она появляется в системе начал математического анализа. Здесь речь идет о классе аналитических функций, называемых тригонометрическими, об их структуре, свойствах и приложениях. Их специфические свойства (периодичность, четность или нечетность и др.) позволяют с помощью формул приведения и иных формул тригонометрии существенно упрощать аналитический аппарат выражений, связанных с этими функциями, и значительно облегчают операции с ними.

Тригонометрические функции связаны со многими другими классами функций, например с показательными (в случае комплексного аргумента): $e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$, откуда

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Их оперативную значимость усиливает то обстоятельство, что они могут быть представлены в виде степенных рядов или бесконечных произведений.

Для решения многих важных задач, как теоретических, так и в особенности прикладных, тригонометрические функции являются важным инструментом. Значительную роль они играют, например, при изучении явлений, обладающих свойством периодичности (скажем, повторяемости во времени). Таково, в частности, движение, в котором путь $x$ изменяется в зависимости от времени $t$ по закону

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Подобное движение называется гармоническим колебанием, $A$ называют амплитудой, $\omega$ — частотой, а $\varphi$ — начальной фазой. Вследствие того что синусы и косинусы кратных аргументов образуют ортогональную систему, оказывается возможным представлять произвольные периодические колебания как суммы гармонических колебаний различных частот и выражать их с помощью аппарата тригонометрических рядов. Раздел математики, посвященный разложениям функций в тригонометрические ряды и тригонометрическим интегралам, входит в гармонический анализ, составляя важную его часть.

Что касается геометрических аспектов тригонометрии, то она является той математической дисциплиной, где вообще изучают соотношения между линейными и угловыми элементами геометрических фигур. В зависимости от того, где расположены фигуры — на плоскости или на сфере,— тригонометрия делится на *плоскую* и *сферическую*. Формулы сферической тригонометрии находят широкое применение в астрономии. При изучении физических явлений в областях, ограниченных сферическими поверхностями (например, в теории потенциала), используются специальные тригонометрические многочлены, образующие класс сферических функций. Тригонометрические функции допускают таким образом применение и за пределами породивших их ситуаций.

К настоящему времени структура тригонометрических частей математики сделалась весьма разветвленной, а связи их с другими частями математики — многообразными и взаимопроникающими. Поэтому все чаще отходят от первоначального смысла термина «тригонометрия» (который происходит от греческих слов: τρῖγωνον — треугольник и μετρέω — измеряю, что вместе означает *измерение треугольников*) и называют эту часть математики *гониометрией* (от греч.: γονῖα — угол и μετρέω — измеряю) или даже перестают использовать эти, очевидным образом, устаревшие, но сохраняющиеся в силу исторических традиций термины.

Такая ситуация заставляет заботиться как в научном, так и в особенности в педагогическом аспекте о том, чтобы на любом уровне математической квалификации не было утеряно понимание целостности тригонометрии и приобретено представление хотя бы об основных этапах ее содержательного развития. Именно с этой целью и написана настоящая глава. В ней кратко освещена история получения и усовершенствования тригонометрических знаний. Речь в ней идет главным образом об истории плоской тригонометрии, так как сферическую тригонометрию в школах не преподают. Однако полностью отделить историю плоской и сферической тригонометрии не удается, так как это существенно искажало бы реально происходивший исторический процесс.

Начнем с естественного «изначального» вопроса: откуда появились и как накапливались тригонометрические знания людей? Задачи, в которых требуется измерять углы, появились так же давно и столь же настойчиво требовали своего решения, как и задачи, сводящиеся к измерению расстояний. Более того, эти две измерительные операции сосуществуют неразделимо. Роль измерения углов оказывается особенно значительной в тех случаях, когда непосредственное измерение расстояний оказывается затрудненным или невозможным вследствие удаленности или недоступности предметов. В свою очередь измерение углов может быть охарактеризовано измерением специальных отрезков прямой — тригонометрических линий. Тригонометрия начала свой путь практического и теоретического развития и проходит его вместе с геометрией.

Все древние цивилизации вносили свой вклад в дело накопления тригонометрических знаний. История математической науки дает тому немало убедительных примеров. На одной из глиняных табличек Древнего Вавилона, возраст которой определяют вторым тысячелетием до нашей эры, решается задача: вычислить длину хорды ($s$) круга, исходя из величины ($d$) диаметра и высоты ($a$) сегмента, отсекаемого этой хордой. Описание задачи и правила ее решения таковы, что в них заметно использование подобия треугольников и теоремы Пифагора. В привычной нам символике этот способ может быть выражен формулами

$$s=\sqrt{d^2-(d-2a)^2};\ a=\frac{1}{2}(d-\sqrt{d^2-s^2}).$$

Руководитель одной из самых ранних научных школ Древней Греции Фалес из Милета (ок. 625—547 до н. э.) упоминал в числе научных достижений древних египтян метод определения высоты предмета по длине отбрасываемой им тени. Этот метод послужил основой *гномоники* — учения о солнечных часах. Как широко известно, *гномон* — это прямой шест, вертикально установленный на горизонтальной площадке. Его тень в течение солнечного дня перемещается, «заметая» некоторую площадь. Середина линии, окаймляющей эту площадь, будучи соединена с основанием гномона, образует полуденную линию: север — юг. Отношение длины тени к длине шеста (или обратное отношение) определяет высоту солнца над горизонтом. Деление линии дает части дня — часы. Регулярные замеры позволяют отыскать пункт солнцестояния, найти длину солнечного года и решить другие задачи.

Элементы тригонометрии содержались во многих сочинениях древнегреческих математиков. В трактате Архимеда «Измерение круга», например, приведена лемма: «Если вписанный в дугу окружности отрезок прямой сломан на две неравные части и если из середины дуги опустить на него перпендикуляр, то он разделит сломанную линию пополам». Это, очевидно, дает возможность вычислять хорды суммы и разности двух заданных дуг. В «Началах» Евклида, где автор избегает рассуждений метрического (измерительного) характера, содержится, конечно, меньше тригонометрических элементов, хотя их не столь уж трудно обнаружить и интерпретировать. Например, во второй книге этого сочинения теоремы 12 и 13 по существу эквивалентны теореме косинусов.

Наибольшее внимание ученых тех давних времен привлекали тригонометрические соотношения на сферических поверхностях. Это было продиктовано нуждами астрономии и географии. Дело в том, что преобладающей гипотезой о строении вселенной была геоцентристская. Согласно этой гипотезе земля есть шар, расположенный в центре небесной сферы, которая равномерно вращается вокруг своей оси. Светила расположены на этой сфере. Их движения и подвергаются изучению. При этом большое значение приобретают математические задачи о расположении точек и фигур на сферах и об их движениях (перемещениях).

Работы, в которых подобные задачи решаются, получили название *сферики*. В сферику включались теоремы об окружностях и сферах, графические приемы построения сферических треугольников, сферопея или объединение кинематических моделей, изображающих мир (армиллы), и др. В сферике, таким образом, сочетались элементы практической астрономии, географии (определение места наблюдения, направления пути по положению небесных светил) и геометрии на сферах.

Плоская тригонометрия при таких условиях отнюдь не играла лишь второстепенную роль по сравнению с тригонометрией сферической. У нее была своя область приложений. Кроме того, она являлась частью практической астрономии, так как в последней широко используются ортогональные проектирования. Фигуры, находящиеся или передвигающиеся на сфере, проектируются на плоскости, избранные для отсчетов: плоскости горизонта, меридиана или др. Тем самым многие задачи сводятся к плоским случаям. Измерительные операции при этом чаще всего прилагаются к хордам. Многократное применение подобных операций неизбежно порождало стремление табулировать значения хорд, составлять таблицы их значений.

Одно из самых первых значительных достижений в составлении тригонометрических таблиц относится ко II в. н. э. Оно находится в знаменитом сочинении К. Птолемея «Математическое собрание в 13 книгах». Сочинение это более известно под названием *«Алмагест»,* что является средневековой латинизацией арабского термина «Альмаджисти», который сам является переводом с греческого «Мегале», т. е. «Великая (книга)».

В этом сочинении Птолемея собраны, систематизированы и обобщены все известные к тому времени результаты, полученные в астрономии и в смежных с нею науках. Великим же оно было названо потому, что существовала «Малая астрономия» — сборник сочинений, знать содержание которых было необходимо для понимания того, что написано в «Алмагесте». В сборник входили прежде всего сочинения по сферике, а также те работы Архимеда, Евклида, Аристарха Самосского и других ученых, где рассматривались смежные математические задачи.

Как плоская, так и сферическая тригонометрии входят в первую из книг «Алмагеста». Метод составления тригонометрических таблиц состоял в следующем. В основе всех построений находится круг заданного диаметра. На нем рассматривается единственная тригонометрическая характеристика: длина хорды, стягивающей дугу, соответствующую данному центральному углу. Задача состояла в составлении (вычислении) таблицы значений этой функции с наибольшей по возможности точностью и высокой частотой в последовательности значений аргумента. По существу таблицы хорд являются первичной формой таблицы синусов.

При вычислениях Птолемей пользуется 60-ричной системой счисления. Для удобства и определенности в вычислениях он делит окружность на 360 равных частей, диаметр — на 120 частей (соответственно радиус делится на 60 частей) с последующим более дробным делением градусов на минуты, секунды, терции и т. д. Для начала вычисляются длины хорд, являющихся сторонами правильных вписанных в окружность многоугольников с 3, 4, 5, 6, 10 сторонами.

Чтобы из этих, «опорных» значений получать значения других (а в конечном счете любых) хорд, у Птолемея выведены соотношения, эквивалентные следующим:

а) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ — формула для вычисления длин хорд дополнительных углов,

б) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ — формула для вычисления синуса разности двух углов как частный случай теоремы Птолемея.

К этим соотношениям он прибавляет способ нахождения хорд для половины заданного угла и соотношение, эквивалентное известному:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

Этих результатов оказалось для Птолемея достаточно, чтобы составить таблицу значений хорд для углов от 0 до 180° с частотой полградуса, что соответствует таблице синусов углов первой четверти с частотой в четверть градуса. Последующие проверки, произведенные в десятичной системе, показали, что значения оказались точными до пятого десятичного знака включительно.

Таким образом, уже в самые первые века нашей эры (т. е. около двух тысяч лет тому назад) элементы плоской тригонометрии сложились в единую систему и заняли определенное место в совокупности математических знаний. Они вначале существовали в виде относительно элементарной части в системе неразделенных знаний, имевших своей главной целью решение задач практической астрономии. По своему значению они уступали основам сферической тригонометрии, так как теоремы последней непосредственно примыкали к астрономическим суждениям. Применения же плоской тригонометрии к измерениям недоступных расстояний и, следовательно, к решению треугольников и других фигур стимулировали составление таблиц тригонометрических функций и почти полностью от этого зависели.

Также рано и естественно определились направления развития плоской тригонометрии. Они состояли во введении других тригонометрических характеристик, кроме птолемеевских хорд; в отыскании формул, выражающих связи между этими характеристиками; в разработке вычислительных приемов, имеющих целью облегчить составление таблиц тригонометрических функций.

По этим направлениям и происходило накопление тригонометрических знаний в последующие века. Процесс накопления замедлялся или ускорялся в зависимости от общего хода развития математических и вообще научных знаний. Подъем и ускорение происходили в эти времена главным образом в Индии (начиная с IV—VI вв.) и в государствах Ближнего и Среднего Востока (начиная с VIII—IX вв.).

Математики и астрономы, работавшие на территории Индостанского полуострова, восприняли греческую тригонометрию хорд и широко ее применяли. В их руках она получила многочисленные усовершенствования, среди которых следующие:

а) замена хорды полухордой и введение таким образом линии синусов;

б) введение линии косинусов и синусов-версусов (т. е. обращенных синусов): $\operatorname{sinvers}\alpha=R-\cos\alpha$;

в) выражение величины тригонометрических линий в частях окружности и подготовка тем самым радианного измерения углов;

г) фактическое введение линий тангенсов и котангенсов при решении задач об определении недоступных расстояний и высот без явной их интерпретации как новых тригонометрических объектов;

д) составление таблиц значений тригонометрических функций.

В науке арабоязычных стран Ближнего и Среднего Востока накопление и совершенствование тригонометрических знаний происходило гораздо энергичнее. Оно достигало такого уровня, который фактически означал происходившее выделение тригонометрии в отдельную, обладающую возрастающей долей самостоятельности часть математики.

Общеизвестно, что становление науки, в том числе математики, в указанных государствах сопровождалось (а в ряде мест начиналось) систематическим изучением математических сочинений, написанных в Древней Греции и в других странах. Рукописи собирались во всех местностях, куда распространялось влияние арабских халифатов. Свозили эти сочинения в административные центры, где их изучали, переводили на арабский язык, устраняли ошибки, уточняли данные, снабжали тексты комментариями. Затем их дополняли результатами собственных исследований. Так в те времена складывались научные школы и научная литература, опирающаяся в интересующей нас области — тригонометрии — в основном на достижения индийской и древнегреческой математики и астрономии.

На этом пути рано, начиная, по-видимому, с VIII в., стали появляться арабские *зиджи*. Это были сборники астрономических и тригонометрических таблиц, сопровождаемых пояснениями и доказательствами соотношений между тригонометрическими функциями. Зиджи являлись как учебниками, так и справочниками при решении разнообразных задач: измерения времени, определения географических координат, расположение планет на небесной сфере, вычисления времени восхода и захода солнца, луны и их затмений. К нашему времени сохранилось свыше 100 зиджей, среди которых — знаменитый «Гургандский», составленный в Самарканде в научной школе Улугбека (1394—1449).

Зиджи более раннего времени были целиком ориентированы на составление возможно более точных тригонометрических таблиц. Из содержания зиджей видно, что не позднее IX в. были введены и табулированы вслед за синусом, косинусом и синусом-версусом новые тригонометрические функции: тангенс, котангенс, секанс и косеканс. Сравнительно быстро они приобрели самостоятельные трактовки.

С течением времени становилось все труднее включать быстро разрастающийся тригонометрический материал в рамки зиджа. Поэтому начиная с X—XI вв. стали появляться отдельные (самостоятельные) трактаты о плоской и сферической тригонометрии. В сочинениях такого рода тригонометрические линии начали получать свою трактовку уже без обращения к птолемеевской системе построения хорд (так делал, например, аль-Фараби). В ряде других сочинений постепенно вводились основные соотношения между тригонометрическими функциями, которые снабжались доказательствами и по мере возможности систематизировались. Так, в частности, поступал а л ь-Б а т т а н и (ок. 858—929) в работе «Усовершенствование Алмагеста». Сочинение это впоследствии оказало большое влияние и на развитие тригонометрии в Европе. Такой же характер имел и не меньшее влияние оказал «Канон Мас'уда» а л ь-Б и р у н и (973—1048). Вычислительные трудности арабскими математиками также были успешно преодолены. Об этом, например, говорит получение значения $\sin 1^\circ$ с точностью до 17-го знака (в десятичной записи) в таблицах Каши, работавшего в Самарканде в научном центре, основанном Улугбеком.

Сосредоточимся теперь на вопросе о том, как тригонометрия преобразовалась в самостоятельную часть математики.

Как было сказано ранее, происходило накопление тригонометрических знаний и этот процесс обогащения привел к тому, что начиная примерно с XIII в. накопленный материал стал подвергаться систематизации, составляя отдельную, во многом самостоятельную, область математики — тригонометрию.

Убедительным доказательством того, что такое качественное изменение происходило, можно считать появление специальных сочинений, посвященных систематическому изложению тригонометрии. Впервые подобные сочинения появились, как было выше указано, среди арабских рукописей. Приведем еще один, пожалуй, наиболее характерный пример: это «Трактат о полном четырехстороннике» Н а с и р э д д и н а  Т у с и (1201—1274). Трактат этот состоит из пяти частей (книг). Первые две книги содержат вспомогательный материал для построения тригонометрии: соответственно теорию составных отношений и доказательство теоремы Менелая для плоского четырехсторонника. В третьей книге введены понятия синуса и косинуса, правила решения плоских треугольников и доказательство теоремы синусов.

В четвертой и в пятой книгах излагаются основы сферической тригонометрии. В первой из них рассмотрены доказательства теоремы Менелая для полного сферического четырехсторонника. В другой собраны методы решения сферических треугольников, в том числе косоугольных. Для этого доказываются теоремы синусов и тангенсов. Такая структура тригонометрических сочинений сделалась в арабских сочинениях стандартной.

Более подробно эта часть истории тригонометрии освещена в очень хорошо написанной брошюре Г. П. Матвиевской «Становление плоской и сферической тригонометрии» (М.: Знание, 1982). В ней показано, как из вспомогательного раздела астрономии тригонометрия превращалась в самостоятельную математическую дисциплину.

В Европе первое сочинение, в котором тригонометрия рассматривалась как самостоятельная математическая дисциплина, было написано в 1462—1464 гг. Его автором был И о г а н н

Мюллер (1436—1476), более известный в истории науки как Региомонтан (по месту рождения). Называлось это сочинение «Пять книг о треугольниках всех видов». Основное содержание его, по всей видимости, позаимствовано из арабских источников, главным образом из упомянутого выше сочинения Насирэддина Туси. Однако оно в значительной степени переработано, систематизировано, дополнено собственными результатами автора и мастерски изложено. Хотя автор при жизни не успел его издать и его напечатали лишь в 1533 г., но сочинение это было известно и ранее, сыграв большую роль в дальнейшем развитии тригонометрии.

До сих пор тригонометрия формировалась и развивалась под определяющим влиянием астрономии. Положение в этом смысле мало изменилось даже тогда, когда самостоятельное существование тригонометрии стало общепризнанным фактом. Вслед за Региомонтаном, тригонометрией много занимался Коперник, посвятивший ей две главы своего знаменитого капитального труда «Об обращениях небесных тел» (1543). К таблице тангенсов Региомонтана Коперник добавил таблицу секансов, что позволило заменять деление на синус и косинус умножением в целях облегчения вычислений. Знаменитый астроном Тихо-Браге (1546—1601) разработал много вычислительных приемов, облегчающих задачу решения треугольников как плоских, так и сферических. Таблицы тригонометрических функций, по форме и по составу близкие к ныне употребляемым, составил в 1551 г. Ретик, ученик Коперника. К концу XVI в. устойчивый характер приобрели названия всех тригонометрических функций.

Техника оперирования с тригонометрическими функциями достигла к этому времени высокого уровня, и математики не встречали в этом вопросе принципиальных трудностей. В сочинениях И. Кеплера, Й. Бюрги, Ф. Виета и других математиков встречаются (и нередко) сложные преобразования с тригонометрическими функциями, выведены многие формулы. Особенно примечательными для тематики, рассматриваемой в настоящей главе, представляются работы Виета.

Исходя из известных уже формул для синуса и косинуса двух углов, Виет получил выражения для этих же функций в случае кратных аргументов, а также многие формулы, в том числе рекуррентные. Как уже было рассказано в главе 4 настоящей книги, среди результатов Виета появились и такие, в которых устанавливались связи между тригонометрией и алгеброй. Существо этого открытия состояло в том, что Виету удалось свести задачу решения кубических уравнений в неприводимом случае к задаче о трисекции угла. Аналогию эту он сумел расширить, установив связи между задачами о делении угла на равные части и задачами выделения классов алгебраически разрешимых уравнений. В последующем связи между алгебраическими и тригонометрическими результатами не прерывались.

Новое обогащение содержания тригонометрии происходило как часть истории математического анализа. И когда после первых ошеломляющих открытий понадобилось привести в систему математический анализ, пришлось сделать то же и с тригонометрическими функциями. Эта работа, ее результаты нашли свое отчетливое выражение в трудах Л. Эйлера. Теорию тригонометрических функций Эйлер изложил в 8-й главе 1-го тома своей книги «Введение в анализ бесконечных» (1748 г., на русском языке издана в 1961 г.). Тем самым он завершил более или менее успешные попытки своих ближайших предшественников.

Эйлер ввел близкую к привычной нам символику, полностью разъяснил вопрос о знаках всех тригонометрических функций любого аргумента. Эти функции он рассматривал как безразмерные числа, называя их общим термином «трансцендентные количества, получающиеся из круга».

Ход рассуждений Эйлера был примерно таков.

1. С помощью формул приведения для $\sin\left(k\frac{\pi}{2}+z\right)$ и $\cos\left(k\frac{\pi}{2}+z\right)$ при целых $k$ выясняется вопрос о знаках тригонометрических функций любых дуг.

2. На основе теорем о синусах и косинусах суммы и разности аргументов выводится формула Муавра для натурального показателя степени

$$(\cos z \pm i \sin z)^n = \cos nz \pm i \sin nz.$$

3. Из этой формулы выводятся следующие:

$$\cos nz = \frac{(\cos z + i \sin z)^n}{2};$$

$$\sin nz = \frac{1}{2i}((\cos z + i \sin z)^n - (\cos z - i \sin z)^n);$$

а далее формулы

$$\cos nz = \cos^n z - \frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2} z \sin^2 z + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4} z \times$$
$$\times \sin^4 z - \ldots;$$

$$\sin nz = \frac{n}{1}\cos^{n-1} z \sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3} z \sin^3 z +$$
$$+ \frac{n \ldots (n-4)}{5!}\cos^{n-5} z \cdot \sin^5 z - \ldots .$$

4. Полагая в полученных таким образом формулах $n$ бесконечно большим, $z$ бесконечно малым, налагая условие, что $nz = v$, т. е. конечное, а также что в этих предположениях $\cos z = 1$, $\sin z = z = \frac{v}{n}$, Эйлер получает разложения:

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!} - \ldots ,$$

$$\sin v = v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} - \ldots .$$

Тем самым был сделан важный шаг. Дело в том, что предшественники Эйлера неизменно связывали понимание тригонометрических функций с образами линий в круге некоторого радиуса, называя его «полным синусом» (sinus totus). Теперь же тригонометрические функции составили просто некоторый класс аналитических функций как действительных, так и комплексных аргументов, что было проделано с характерной для того времени смелостью и оправдывалось на первых порах только правильностью и полезностью достигаемых при этом результатов.

Вскоре, в 1770 г., появилось и удержавшееся до наших дней название *тригонометрические функции.* Его ввел Г. С. Клюгель в работе «Аналитическая тригонометрия».

В то же примерно время (т. е. во второй половине XVIII в.) построение общей системы тригонометрических и примыкающих к ним знаний развивалось и в несколько ином направлении. И. Г. Ламберт (1728—1777) в «Очерках об употреблении математики и ее приложений» (1770) провел обобщение тригонометрии на четырехугольники, создав таким образом *тетрагонометрию.* Еще через несколько лет, в 1774—1776 гг., в работах А. И. Лекселя (1741—1784) было произведено дальнейшее обобщение и построена *полигонометрия.* Рассматривая $n$-угольник со сторонам $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и углами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ между продолжениями сторон и предыдущими сторонами, Лексель получил соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sin \sum_{k=1}^{i} \varphi_k = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cos \sum_{k=1}^{i} \varphi_k = 0.$$

Суммы в левых частях приведенных равенств эквивалентны суммам векторов, направленных по сторонам многоугольников. Из этих формул, справедливых и для невыпуклых, и для самопересекающихся многоугольников, в работах Лекселя выведены основные формулы тригонометрии и тетрагонометрии. Затем он распространил теорию на 5, 6, 7-угольники и решил ряд задач на исследование $n$-угольников, исходя из заданных диагоналей и углов этих диагоналей со сторонами.

Результаты Лекселя были существенно дополнены С. Люилье (1750—1840) в книге «Полигонометрия, или об измерении прямолинейных фигур» (1789). Основную роль в исследованиях Люилье играло выражение для площади многоугольника, которую он вычислял так: откинув одну из $n$ сторон, он составил все парные произведения остальных $n-1$ сторон на синусы углов между этими сторонами и, складывая полученные $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ произведений, нашел удвоенную площадь многоугольника. Исходя из этой формулы, Люилье получил все формулы полигонометрии, в том числе и формулы Лекселя. Свои теоремы Люилье применил к решению $n$-угольника: по $n-1$ сторонам и $n-2$ углам; по всем углам и $n-2$ сторонам; по всем сторонам и $n-3$ углам.

Наконец, Люилье обобщил и эти результаты на пространственные случаи и, развивая работы Эйлера о многогранниках, создал (в 1799—1805) *полиэдрометрию* — учение об измерении многогранников (полиэдров), описав ее в работе «Теоремы полиэдрометрии». Основной теоремой полиэдрометрии является следующая: «Площадь каждой грани многогранника равна сумме произведений площадей остальных граней на косинусы углов, образуемых ими с этой гранью».

Подведем итоги. Как видно из содержания главы, тригонометрия прошла следующие стадии развития.

1. Тригонометрия была вызвана к жизни в раннюю пору разумной деятельности людей необходимостью производить измерения углов.

2. Первыми шагами тригонометрии было установление связей между величиной угла и отношением специально построенных отрезков прямых. Непосредственным результатом этого было то, что стало возможным решать плоские треугольники главным образом с целью определения расстояний до удаленных или недоступных объектов.

3. В интересах практической астрономии и географических исследований были получены аналогичные результаты для треугольников на сферических поверхностях. С тех пор плоская и сферическая тригонометрии развивались как неотъемлемые части единой науки.

4. Измерительный характер задач тригонометрии при массовом их повторении приводил к настоятельной необходимости табулировать значения вводимых тригонометрических функций.

5. По мере оформления представлений о тригонометрических функциях они превращались в самостоятельные объекты исследований, т. е. собственно в функции, объекты, обладающие самостоятельным значением и своими особыми свойствами.

6. В начале XVI в. были установлены взаимные интерпретации между решениями определенного класса неприводимых алгебраических уравнений и задачами о делении угла, тем самым положено начало установлению связей между алгеброй и тригонометрией.

7. В XVIII в. тригонометрические функции были включены в систему математического анализа в качестве одного из классов аналитических функций. Почти одновременно тригонометрия получила широкие обобщения в геометрическом плане.

Таким образом, к XIX в. тригонометрия приобрела разнообразные интерпретации, не теряя своей теоретической целостности, а наращивая ее. Эту «многоликость», характерную не только для тригонометрии, мы и подразумевали в названии настоящей главы.

# Глава 7

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: НАЧАЛЬНЫЕ ИДЕИ, ПЕРВЫЕ УСПЕХИ, ГЛАВНЫЕ ТРУДНОСТИ

Попытки ввести начальные сведения из математического анализа в практику школьного математического образования предпринимаются издавна и ведутся с возрастающей настойчивостью. Обосновывают эти попытки преимущественно ссылками на требования предстоящей выпускникам школ практической деятельности. В наши дни эти требования сделались особенно острыми, так как даже массовые профессии и виды работы (в особенности в области техники, экономики, обороны) требуют для своего исполнения от работников возрастающей образованности, в том числе знания *основ математического анализа.*

В настоящей главе читатель найдет общую характеристику математического анализа, описание обстоятельств его возникновения и первых шагов исторического развития, указание на те закономерности развития математической науки, которые при этом действовали и проявлялись.

Содержание главы поможет учителям в повышении собственной научно-педагогической квалификации, в подборе методических приемов при прохождении соответствующих разделов программы, а также в том, чтобы сделать усвоение материала учащимися более сознательным.

Начнем с постановки главного вопроса: **что же такое математический анализ?** Та часть математики, которую называют математическим анализом, появилась 300 лет тому назад. Его начало датируют 1684 г., когда в октябрьском номере журнала «Acta Eruditorum», выходившем в Лейпциге, появилась статья Г. В. Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления». Это была первая опубликованная работа в этой области; речь в ней шла, как можно видеть даже из заголовка, о дифференциальном исчислении. На русском языке эта статья была опубликована в журнале «Успехи математических наук» (1948.— Т. 3.— Вып. 1 (23).— С. 165—204) (в подборке: Лейбниц Г. В. Избранные отрывки из математических сочинений).

В течение всей своей трехвековой истории математический анализ занимал в математике ведущее положение. Его методами решали труднейшие практические задачи, он был объектом бесчисленных теоретических исследований. В наше время, если речь идет о характеристике научного содержания математического анализа, этим термином обозначают громадную ассоциацию тех частей математики, в которых основным объектом изучения является понятие функции, а производимые над функциями действия существенным образом основываются на специфических операциях дифференцирования и интегрирования. Состав математического анализа, во все времена сложный и разнообразный, к нашему времени необычайно разросся. Представление об этом можно получить, например, из рубрикатора, регулярно публикуемого в реферативном журнале «Математика», или из других справочных изданий. В них можно, например, увидеть, что из общеупотребительного представления о функциональной зависимости выросли различные обобщения, а затем и целые теории функций как действительного, так и комплексного переменного, а также функциональный анализ. Оперативно-прикладная часть математического анализа породила вслед за дифференциальным и интегральным исчислением обширные разделы, содержанием которых по преимуществу являются задачи решения дифференциальных и более сложных уравнений. Самостоятельное существование приобрели и другие части математического анализа.

Столь высокая разветвленность и богатство содержания математического анализа в наше время приводит к тому, что все чаще этот термин употребляют не в его общем, широком, понимании, а в более узком. В этом случае к математическому анализу относят только части, которые имеют вводный характер или играют роль основ:

— собственно дифференциальное и интегральное исчисление;
— преобразования функций;
— исследование свойств специальных классов функций;
— теорию рядов и последовательностей;
— теорию конечных разностей;
— операционное исчисление и т. п.

Сведения из математического анализа были включены в математическое образование впервые в 1696 г., когда появился первый учебник Г. Ф. Лопиталя (1661—1704). С тех пор и до наших дней математический анализ являлся и остается важнейшей учебной дисциплиной. По всей видимости, такое положение он сохранит и в будущем.

Курсы математического анализа современных высших учебных заведений по весьма широкому кругу специальностей, с большей или меньшей степенью полноты, в зависимости от требований основной специальности и условий обучения, обычно включают следующие этапы.

1. Разъяснение смысла основных понятий (функции, вещественного числа, множества, предела, комплексных объектов и др.).

2. Теория пределов и связанные с нею понятия, например непрерывности.

3. Операции дифференцирования и неопределенного интегрирования функций.

4. Определенный интеграл как предел сумм специального вида.

5. Числовые и функциональные ряды и последовательности, их сходимость, связанные с ними вычисления (в том числе приближенные).

6. Отдельные виды дифференциальных уравнений.

7. Геометрические задачи анализа (длины дуг, площади поверхностей, объемы тел).

Крайне редко объем излагаемого материала превышает упомянутый перечень. Говоря коротко, в высших учебных заведениях изучают обычно *классические основы* математического анализа.

В школах же изучают только *начальные сведения* из математического анализа. В них до сих пор удавалось включать операции дифференцирования и интегрирования функций, исследование функции с помощью производной и начальные сведения о дифференциальных уравнениях.

Непреходящее значение математического анализа определяется тем, что именно его средствами строят математические модели, описывающие движения, текущие процессы, непрерывно изменяющиеся состояния, и производят операции над этими моделями. Аппарат математического анализа обладает значительной гибкостью и допускает применение (даже на сравнительно невысоких уровнях математической подготовленности) при решении соответствующих этому уровню задач. В то же время многие области математического анализа в силу своей сложности и специфичности в массовом математическом образовании не встречаются. Они являются объектом изучения математиков-профессионалов и находят себе применение либо в целях дальнейшего теоретического развития, либо для решения сложных проблем смежных наук (физика, биология, техника). Возможности развития приложений математического анализа далеко не исчерпаны и в обозримом будущем исчерпаны не будут.

Однако у математического анализа есть слабая сторона. Всякий, кто брался за изучение этой науки или за ее преподавание, знает, как трудно бывает убедительно разъяснить смысл вводимых основных понятий и операций. Еще труднее бывает формализовать представление о рассматриваемом понятии, освободить его от интуитивных элементов восприятия. Такое положение возникает, например, при размышлениях о бесконечно малых величинах. Другим примером может послужить понятие предела. Известно, что с этим понятием невозможно связать никакой регулярный алгоритм его вычисления. Оно, это понятие, можно сказать, принципиально неалгоритмично. А между тем оно оказывается основным в математическом анализе и широко используется при вычислениях. Все подобные проблемы сводятся к одной общей, именно к проблеме отражения формальными понятиями математики природы переменных величин. Остро стоит эта проблема и в наши дни как в общенаучном, так и в педагогическом плане.

Чтобы лучше понять сущность современного математического анализа, его логическую структуру, возможности, преимущества и недостатки, обратимся к его истории. Иначе говоря, заменим поставленный вопрос о том, что такое математический анализ, другим: в силу каких причин и каким образом сформировалась та область математических знаний, которую называют математическим анализом? Или, совсем коротко: как показать конкретно-историческую обусловленность логической структуры математического анализа нашего времени? Отметим сразу же, что история эта сложна. Ее составляет огромное, труднообозримое множество фактов, взаимодействий, устремлений, логическую преемственность которых трудно проследить, а объективную значимость — оценить. Поэтому с учетом цели настоящей работы и ограниченности ее объема мы сможем предложить читателям пока лишь описание принципиально важных, переломных периодов этой истории, когда в содержании математического анализа происходили существенные изменения.

И. Ньютон

Перейдем к освещению вопроса: **в каком виде появился математический анализ?** Ответ прост: в форме *анализа бесконечно малых.* Так называлась первая, самая ранняя, часть математического анализа, которую составляло в основном *дифференциальное и интегральное исчисление.* Создали это исчисление во второй половине XVII в. практически одновременно и независимо друг от друга два великих ученых: И. Ньютон (1643—1727) и Г. В. Лейбниц (1646—1716). Исчисление появилось в двух различных, но по существу эквивалентных, формах: И. Ньютон построил теорию флюксий, а Г. В. Лейбниц — исчисление дифференциалов.

Построить математическое исчисление — это значит выделить класс задач, постановка и решение которых приобрели или приобретают явственные общие черты; выработать по возможности минимальное число вычислительных приемов, алгоритмов, единообразно применяемых для решения выбранного класса задач; составить единую систему отправных понятий, на которые выделяемые алгоритмы могли бы опираться; разработать единую символику, позволяющую единообразно, формально, почти автоматически производить и записывать избранный класс операций и их результат. В рассматриваемом нами вопросе речь идет об операции дифференцирования функций и об обратной ей операции интегрирования функций.

Исчисление бесконечно малых, созданное Ньютоном, последний назвал методом или *теорией флюксий.* Целью теории флюксий было решение следующих двух типов взаимообразных задач механики.

1. Прямые задачи, в которых требовалось определять мгновенные скорости движения, т. е. скорости в заданное мгновение времени или в заданной точке траектории.

2. Обратные задачи, в которых требовалось по заданным мгновенным скоростям давать числовые характеристики движения.

Потребность в решении задач подобных видов была для Ньютона частью его общих научных устремлений. Как и многие его предшественники и современники, Ньютон не был узким специалистом. Он занимался натуральной философией,— неразделенной совокупностью наук о природе,— и притом в весьма широком плане. В первую очередь его интересовали проблемы физики, механики, астрономии, математики. В этих областях ему принадлежат выдающиеся достижения: вывод и формулировка основных законов классической механики, открытие закона всемирного тяготения, закона спектрального разложения света и др. Теория флюксий образовалась у него как часть создаваемого им математического аппарата исследования законов природы, который мог бы характеризовать процесс движения и связанные с ним понятия скорости и ускорения.

В методе флюксий изучаются математические абстракции непрерывного механического движения. Это *переменные*, или, как Ньютон их называет, *флюенты*, т. е. текущие (от лат. flūo — течь). Механическое движение происходит во времени, зависит от него (имеет время своим аргументом). Общим аргументом для всех флюент оказывается также время, т. е. его математически абстрагированный аналог, представляемый в виде равномерно текущей независимой переменной величины. Далее, также по аналогии с механическим движением, вводятся скорости течения флюент, названные флюксиями. Таким образом, *флюксии* оказываются *производными флюент по времени.* Так как флюксии тоже вообще являются переменными величинами, то возможно находить флюксию от флюксии и т. д. Символами последовательных флюксий были избраны точки над символами флюент (если, например, флюенту обозначить $y$, то последовательные флюксии обозначаются: $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, ...), как это до сих пор еще встречается в работах по механике.

Чтобы было возможно вычислять значения флюксий-скоростей, вводятся бесконечно малые изменения флюент, которые Ньютон назвал *моментами.* В качестве символа момента времени Ньютон избрал условный нуль 0; момент флюенты, следовательно, запишется $\dot{y}0$, т. е. как произведение мгновенной скорости на момент времени. Если записать это выражение в привычных нам символах $\frac{dy}{dt}dt$, то станет очевидным, что речь по существу идет о понятии дифференциала. Для обратных задач, когда суждения идут от задания флюксии (обозначаемой, например, $y$) вводятся специальные новые символы $'y$ или $\square y$ (что указывает на связи первообразных функций и квадратур).

Теперь, в теории флюксий, прямым и обратным задачам механически соответствуют вполне определенные задачи.

*Прямые задачи*: задается соотношение между флюентами, найти соотношения между флюксиями.

*Обратные задачи*: задаются соотношения между флюксиями, найти соотношения между флюентами.

Нетрудно увидеть, что прямые задачи теории флюксий являются задачами *дифференцирования* неявных в общей постановке функций. Результат записывается вообще в виде дифференциальных уравнений. Обратные же задачи теории флюксий — это задачи *интегрирования* дифференциальных уравнений, причем задачи, поставленные едва ли не в самом общем виде. Нахождение собственно первообразных функций оказывается при этом весьма частной задачей.

Ньютон построил регулярный прием решения прямых задач теории флюксий. Этот прием в основном таков: пусть задано соотношение между флюентами, например $x^3-ax^2+axy-y^3=0$. Каждой флюенте дадим мгновенные приращения:

$$(x+\dot{x}0)^3-a(x+\dot{x}0)^2+a(x+\dot{x}0)(y+\dot{y}0)-(y+\dot{y}0)^3=0.$$

Раскроем все скобки, используя формулу бинома:

$$x^3+3x^2\cdot\dot{x}0+3x\cdot\dot{x}0\dot{x}0+\dot{x}^3 0^3-ax^2-2ax\cdot\dot{x}0-a\dot{x}\dot{x}00+axy+$$
$$+ax\cdot\dot{y}0+ay\cdot\dot{x}0+a\dot{x}0\cdot\dot{y}0-y^3-3y^2\cdot\dot{y}0-3\dot{y}^2\cdot 00y-\dot{y}^3 0^3=0.$$

Вычеркиваем те члены, сумма которых равна по условию задачи нулю. Остальные члены разделим на момент времени. Те члены, в которых он еще сохранился, отбросим. Получим соотношение между флюксиями:

$$3x^2\cdot\dot{x}-2ax\cdot\dot{x}+ay\cdot\dot{x}+ax\cdot\dot{y}-3y^2\cdot\dot{y}=0.$$

Когда метод применяется к сложно формулируемым задачам, то функции должны быть преобразованы к виду, удобному для дифференцирования. Это делалось главным образом посредством представления их в виде степенного ряда. Тот же способ применяется и при решении обратных задач, когда они не сводятся к непосредственному обращению прямого метода. Для разложения функций в степенные ряды Ньютон собрал или сам изобрел много приемов. Среди них:

1. Индуктивное обобщение теоремы о биноме на случай дробного и отрицательного показателей степени.

2. Непосредственное деление «уголком» числителя дробно-рациональной функции на знаменатель.

3. Замена переменных или замена системы координат.

4. Применения метода неопределенных коэффициентов в различных модификациях.

5. Операция обращения рядов.

Разложение функций в степенные ряды оказывается, как видим, оперативной основой теории флюксий. Таким методом было достигнуто многое: произведено дифференцирование и интегрирование широкого класса аналитических функций, разработаны приемы вычисления экстремумов функций, методы теории флюксий были использованы для решения ряда задач геометрии, механики и других наук. Алгоритмическая сторона исчисления флюксий была развита достаточно широко и производила на современников большое впечатление. Однако Ньютон не спешил с ее публикацией. Причиной этому была, помимо несовершенства методов решения обратных задач, недостаточная логическая разработка системы основных понятий (прежде всего понятия бесконечно малой величины) и операций (в особенности операций над бесконечно малыми, прежде всего их отбрасываний). Ньютон это хорошо понимал, но справиться с такого рода затруднениями не смог.

Основатель другой разновидности анализа бесконечно малых — *исчисления дифференциалов* — Г. В. Лейбниц исходил, так же как и Ньютон, из весьма общего подхода к задачам научных исследований. В те времена идея единого универсального метода изучения природы и даже человека, отражавшая стремительное продвижение техники, математики, естествознания, владела умами многих ученых. У Лейбница она приобрела форму поисков всеобщей характеристики (более полное описание этого вопроса см.: Кузичева З. А. Логическая программа Лейбница и ее роль в истории логики и кибернетики // Вопросы кибернетики.— 1982.— Вып. 78.— С. 3—36).

Выделим ту часть общей идеи Лейбница, которая относится к рассматриваемому здесь вопросу. Лейбниц считал, что во всей совокупности суждений людей существуют простые, не сводящиеся к иным исходные понятия. Их можно выделить, произведя тотальный анализ и систематизацию всего человеческого знания. Выделив их, можно из них составить алфавит человеческих мыслей. Также в ходе анализа человеческого знания можно выделить связи, отношения, в которые вступают элементы алфавита, т. е. способы логических суждений. Из них можно составить энциклопедию доказательств, в особенности математических.

При составлении алфавита знаний и энциклопедии суждений следует стремиться подбирать подходящие обозначения для них — символы. В результате должна получиться всеобщая *символика,* или универсальная характеристика. Необходимо только, чтобы символы были несложными, удобными, их комбинации легко обозримыми; чтобы своими очертаниями они выглядели естественно и возбуждали аналогии с теми свойствами или объектами, которые они отображают.

Поиски простейших суждений и приемов доказательств, заботы об адекватности символики, энциклопедичность научных занятий и интересов сослужили Лейбницу хорошую службу, когда он занялся *инфинитезимальными* задачами (т. е. задачами, требующими для своего решения операций с бесконечно малыми величинами). Начиналось это дело в основных чертах таким образом: в 1673 г. молодой Лейбниц (ему было тогда 27 лет) оказался по делам службы в Париже. Здесь он встречался и беседовал со многими учеными. Один из них — Х. Гюйгенс (1629—1695) ввел Лейбница в курс проблем инфинитезимального характера. Эти проблемы увлекли Лейбница. Он основательно изучал сочинения Декарта, Кавальери, Паскаля, самого Гюйгенса, самостоятельно решил ряд задач, в том числе задачу о сумме чисел вида $\frac{1}{k(k+1)}$, предложенную Гюйгенсом.

Дальнейший ход настойчивых занятий Лейбница, приведших его к открытию исчисления дифференциалов, если говорить коротко (а иначе мы здесь поступать не можем), прошел следующие этапы:

а) решение задач суммирования числовых рядов с привлечением систем конечных разностей;

б) решение задач о касательных, применение характеристического треугольника, почерпнутого им, по-видимому, из сочинений Паскаля. В этот период у Лейбница начинают созревать идеи переноса соотношений между конечными элементами на произвольно, а затем и бесконечно малые величины;

в) решение обратных задач на касательные, суммирование бесконечно малых разностей, открытие взаимообратности дифференциальных и интеграционных задач.

Всего около трех лет прошло со времени парижских встреч, а у Лейбница уже сложились контуры нового исчисления. Он вступает в переписку с Ньютоном, сообщает ему свои результаты, стремится узнать побольше о работе и достижениях своего корреспондента. Однако переписка длилась недолго: на следующий же (1677) год Ньютон ее прекратил. Для обоих уже было все ясно: и эквивалентность содержания, и разнообразие подходов. С публикацией же оба не торопились, работали над усовершенствованием своих исчислений: улучшали алгоритмы, вырабатывали символику, накапливали результаты, трудились над трактовкой основных понятий. И только в 1684 г. в журнале «Acta Eruditorum», выходящем в Лейпциге, Лейбниц опубликовал уже упоминавшуюся в самом начале главы статью.

Статья эта (или, как было принято называть, *мемуар*) была невелика, всего 7 страниц. В ней было определено *понятие дифференциала* и введены символы $dx$ и $dy$. Дифференциал аргумента был определен как произвольная величина. Дифференциал функции определялся равенством $dy=\frac{y\,dx}{S_t}$, где — $S_t$ — подкасательная к кривой в точке $(x;\ y)$. Сформулированы правила дифференцирования постоянной величины, суммы функций, их разности, произведения и частного, а также корня из них. Отмечена инвариантность вида первого дифференциала от выбора аргумента. Сами дифференциалы понимаются вначале как величины, пропорциональные мгновенным приращениям величин. Правда, позднее дифференциалы вновь определяются как бесконечно малые. Доказательств в мемуаре нет.

Это было первое сочинение о дифференциальном исчислении. Через два года, в 1686 г., появился еще один мемуар Лейбница — «О глубоко скрытой геометрии и анализе неделимых и бесконечных». В нем были собраны и систематически изложены правила интегрирования ряда элементарных функций. Для обозначения операций интегрирования был введен символ $\int$, истолковываемый как сумма дифференциалов. Здесь же была подчеркнута его взаимообратность с операцией дифференцирования функций. В том же году Лейбниц рассматривает задачу о соприкосновении кривых, вводит понятие соприкасающейся окружности и применяет получающуюся таким образом конструкцию к измерению кривизны.

Прошло менее десяти лет со времени опубликования первой статьи об анализе бесконечно малых, а Лейбниц уже объявил о распространении нового исчисления на область трансцендентных функций путем разложения их в ряды с помощью метода неопределенных коэффициентов. Изложил он это открытие в 1693 г. в статье «Дополнение к практической геометрии, распространяющееся на трансцендентные проблемы с помощью нового наиболее общего метода бесконечных рядов». Вскоре, в 1695 г., он опубликовал правило дифференцирования общей показательной функции и формулу многократного дифференцирования произведения:

$$d^m(x \cdot y) = d^m x \cdot d^0 y + \frac{m}{1} d^{m-1} x \cdot dy + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} d^{m-2} x \cdot d^2 y + \dots .$$

Тогда же он перенес понятие дифференциала на случай дробных и отрицательных показателей степени. А на рубеже веков, в 1702 г. и в 1703 г., им были разработаны правила интегрирования рациональных дробей.

Столь быстрые успехи в построении дифференциального и интегрального исчисления во многом объяснялись тем, что символика и система терминов были Лейбницем хорошо продуманы. Они не были слишком сложными, отражали сущность производимых операций, помогали пониманию и позволяли оперировать с ними по сравнительно простым правилам. Мы до сих пор пользуемся лейбницевыми терминами: «дифференциал», «дифференциальное исчисление», «функция», «координаты», «дифференциальные уравнения», «алгоритм» (в смысле, близком к современному пониманию), а также многими его символами. Немалую роль в распространении исчисления Лейбница сыграла исключительная активность учеников и последователей Лейбница, в первую очередь членов семейства Бернулли.

Итак, к концу XVII в. анализ бесконечно малых вышел из стадии формирования и предстал перед математиками в образе новой и цельной математической науки. Его практические успехи были настолько явными, что его сразу же стали вводить в систему математического образования. В 1696 г. вышел в свет первый учебник дифференциального исчисления и его приложений к геометрии. Это был «Анализ бесконечно малых» Г. Ф. Лопиталя. Последующие учебники также не заставили себя долго ждать.

Открытия столь большого значения и вообще математические результаты проходят неизменно период «эмбрионального» развития. Теория флюксий и исчисление дифференциалов имеют богатую предысторию. Рассмотрим ее в рамках более общей проблемы: **как вообще формируются математические исчисления.** Выше мы рассказали, что математический анализ начал свое существование во второй половине XVII в. в форме исчисления: дифференциального и интегрального, или, как тогда предпочитали говорить, в виде анализа бесконечно малых. При этом нами было разъяснено, какой смысл вкладывается в термин *исчисление* и какова его служебная роль в математике. Рассмотрим теперь более детально, как математические исчисления формируются, как они появляются и какие общие закономерности развития математической науки при этом проявляются. История ранних этапов развития анализа бесконечно малых послужит нам наглядным примером.

Для построения математического исчисления субъективных устремлений и личных способностей ученых-математиков, как это всегда бывает, недостаточно. Необходимо наличие и воздействие более значимых объективных факторов. Главнейшие из них:

а) достаточно сильная потребность, практическая или теоретическая, в решении определенного класса задач или теоретических проблем, общность которых в достаточной степени осознается;

б) наличие множества конкретных результатов, практически уже достаточного, чтобы из них построить исчисление.

Лишь осознание такой необходимости и учет всех возможностей позволяют увидеть, угадать неустановленные ранее связи, объективно существующие между известными уже результатами, а также провидеть контуры нового исчисления. По выражению К. Маркса, нередко употреблявшемуся им в его математических рукописях, речь идет об осуществлении того переворота в методе, который и оказывается актом рождения нового исчисления. Попробуем на примере анализа бесконечно малых показать, как такой процесс конкретно происходит.

В XVII в., когда появился математический анализ, равно как и в предшествующие два столетия, в странах Европы происходили важные события, сопровождающие установление и укрепление нового общественного и экономического строя — капитализма. Основой социального переустройства и важнейшей его составной частью было преобразование производства на базе изобретенных паровых машин, т. е. то, что называют часто *технической революцией.*

Революциям социальной и технической сопутствовала *революция научная.* Она, как и другие виды революций того времени, совершалась не сразу, а в течение сравнительно длинного периода времени. Перестройка естественнонаучных и математических знаний началась в XV—XVI вв., в эпоху великих географических открытий (и начала эпохи колониального грабежа). Постепенно, но достаточно быстро преобразования захватили географию, астрономию, оптику, а затем и другие области знания. Также постепенно и в разных формах вызревала научная концепция единства мира и взаимосвязанности явлений, в нем происходящих. Следствием развития такой основной идеи были поиски единой научной системы, которая объясняла бы с единых позиций все естественнонаучные факты, всю «натуральную философию» (общую науку о природе) и дала бы аппарат для ее изучения.

По этому поводу Ф. Энгельс писал: «При таком положении вещей было неизбежным, что первое место заняло элементарнейшее естествознание — механика земных и небесных тел, а наряду с ней, на службе у нее, открытие и усовершенствование математических методов. Здесь были совершены великие дела»[1].

Необходимость в совершении упомянутых Ф. Энгельсом великих дел осознавалась быстровозрастающим числом ученых-естествоиспытателей, несмотря на свойственную тому времени энциклопедичность, нерасчлененность научных интересов и дел каждого из них. Процесс сосредоточения интересов на указанной тематике ускорялся под воздействием весьма веских побудительных мотивов.

Самые мощные стимулы исходили, естественно, из практики, из необходимости срочно решать насущные проблемы техники и вообще практической деятельности людей. Приведем, для примера, некоторые из таких проблем: а) задачи гидротехники (усовершенствование насосов, течение водных потоков, расчеты шлюзов и плотин); б) задачи, вытекающие из практики кораблестроения и мореплавания (движение твердых тел в жидкости и отыскание таких их конфигураций, которые испытывали бы наименьшее сопротивление, определение положения корабля в открытом море, изготовление географических карт, расчеты устойчивости плавающих тел); в) задачи, связанные с применением огнестрельного оружия (траектории движения бросаемых тел в пустоте и в среде, оказывающей сопротивление). Можно упомянуть и другие задачи. Для решения каждой из них

---

[1] Маркс К., Энгельс Ф. Соч.— Т. 20.— С. 347.

требовалось математическое описание и исследование функций, а также выражение результатов в числах.

В развивающейся науке тех времен это отозвалось прежде всего попытками построения универсальных по возможности методов механики — универсальной динамики. На этом пути появились, например, гелиоцентрическая система движения планет Н. Коперника; математические законы движения планет по эллиптическим орбитам И. Кеплера, система динамики Г. Галилея, в которой многое основывалось на принципе инерции и где была решена задача о траектории бросаемых тел, обладающих тяжестью (хотя и без учета сопротивления среды). Эта линия развития науки была в известном смысле завершена, когда И. Ньютон написал «Математические принципы натуральной философии» (1687), и одновременно подготовлена к дальнейшим продвижениям.

Такое течение событий приводило в математике к усилению роли инфинитезимальных задач, т. е. таких, где в рассмотрение вводились бесконечно малые элементы (от слова infinitesimal, что означает бесконечно малое). Примерами задач такого рода являются задачи о квадратурах сложных профилей, кубатурах, об определении центров тяжести, о проведении касательных, экстремалей и т. п.

В процессе решения инфинитезимальных задач накапливались и получали общетеоретическое истолкование элементы дифференциального и интегрального исчисления и теории рядов. Это был многосторонний творческий труд большого числа ученых: Кеплер, Кавальери, Галилей, Торричелли, Паскаль, Валлис, Роберваль, Ферма, Декарт, Барроу и многие другие были активными его участниками.

Чтобы легче было разбираться в столь сложном процессе, историки математики делят методы решения задач, о которых здесь идет речь, на две группы. Те из них, в которых проявляются крупицы позднейшего интегрального исчисления, называют *интеграционными.* К другой группе методов, *дифференциальных*, относят те, которыми решались задачи, требующие по существу дифференцирования функций.

Открытие связей и взаимообратности интеграционных и дифференциальных методов оказалось тем решающим моментом, когда все основные составные части исчисления (дифференциального и интегрального) были осознаны в определенном единстве. Тем самым полностью определились все возможности создания исчисления и оно было, как мы рассказывали выше, построено в виде теории флюксий и исчисления дифференциалов. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Начнем с описания того, как появились и совершенствовались интеграционные методы. Вначале эти методы вырабатывались, накапливались и выделялись в ходе решения задач на вычисление объемов, площадей, центров тяжестей и т. п. Задачи Архимеда пересматривались вновь и вновь, изучались его инфинитезимальные методы, выяснились их математические возможности. Интеграционные методы слагались в то время как методы определенного интегрирования. Процесс формирования и внедрения в математику этих методов был очень бурным и быстрым; уже через 50—60 лет со времени появления первой работы этот процесс привел к образованию *интегрального исчисления.*

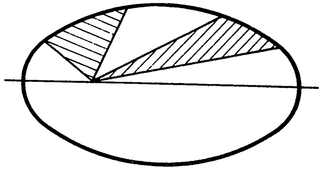

Рис. 24

Самым ранним по времени опубликования методом этого типа был метод непосредственного оперирования с актуальными бесконечно малыми величинами. Появился он в 1615 г. в сочинениях Кеплера.

Иоганн Кеплер, уроженец Вюртемберга, одного из многочисленных в ту пору немецких государств,— выдающийся астроном и математик. Он посвятил практически всю свою жизнь изучению, развитию и пропаганде гелиоцентрической системы Коперника. Анализируя огромный материал астрономических наблюдений, он в 1609—1619 гг. открыл законы движения планет, носящие его имя.

**1.** Планеты движутся по эллипсам, солнце находится в одном из его фокусов.

**2.** Радиусы-векторы планет «заметают» за равные промежутки времени равные секториальные площади (см. рис. 24).

**3.** Квадраты времен обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их средних расстояний до Солнца.

Формулировки этих законов показывают, что для математического доказательства их справедливости недостаточно владения известной в то время вычислительной техникой, знания конических сечений и алгебраических средств. Задача вычисления секториальных площадей требовала умения пользоваться бесконечно малыми величинами. Этого же умения требовали и другие задачи практического характера. И вот по поводу одной из таких практических задач Кеплер изложил свой метод использования бесконечно малых величин.

Речь идет об отыскании наиболее целесообразной формы бочек и о способах измерения их вместимости. Сочинение, посвященное этой проблеме, так и называется: «Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии» (Линц, 1615). Состоит оно, не считая предварительных замечаний, из трех частей: теоретическая часть, специальная «стереометрия австрийской бочки», правила для измерения вместимости бочек. Для нас наибольший интерес представляет теоретическая часть. Начинается она со «Стереометрии правильных кривых тел». Это просто пересказ сочинения Архимеда «О шаре и цилиндре». Кеплер принимает

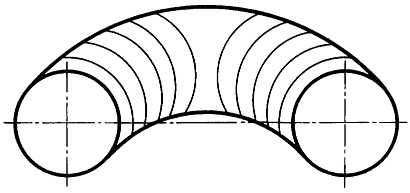

Рис. 25

античный метод исчерпывания, которым пользовался Архимед, называет его глубоким, но отбрасывает заключительный этап приведения к противоречию. Он хочет разгадать замысел Архимеда, который привел того к получению столь замечательных результатов, освободить его от наслоений, вызванных формальными требованиями строгости. Этот замысел, по мнению Кеплера, состоит в том, что любая фигура или тело представляется в виде суммы множества бесконечно малых частей. Круг, например, состоит из бесконечно большого числа бесконечно узких секторов, каждый из которых может рассматриваться как равнобедренный треугольник. Все треугольники имеют одинаковую высоту (радиус круга), а сумма их оснований равна длине окружности. Таким же образом шар оказывается составленным из бесконечного множества конусов, вершины которых сходятся в центре шара, а основания образуют поверхность шара.

Метод суммирования актуально бесконечно малых Кеплер распространяет и на другие несложные геометрические фигуры и тела (конусы и цилиндры) и их части, рассмотренные Архимедом. В некоторых случаях он далеко отходит от строгости изложения, вводя интуитивные соображения. Например, доказано, что боковая поверхность вписанного конуса относится к площади основания (большого круга шара) как $\sqrt{2}:1$; эта поверхность вдвое меньше боковой поверхности описанного конуса. И вдруг Кеплер пишет: «Весьма правдоподобно, что поверхность полусферы есть среднее пропорциональное между поверхностями обоих конусов»[1]. Справедливости ради, заметим, что в большинстве высказываний об интуитивной правдоподобности результата или других рассуждений Кеплер отсылает к Архимеду, который «это доказывает со всей строгостью».

От правильных кривых тел Архимеда Кеплер переходит к изучению тел, образованных вращением круга около прямой, не проходящей через его центр, а также вращением других конических сечений (рис. 25). Всего он рассмотрел 92 вида тел вращения, называя их по внешнему виду лимонами, яблоками, вишнями, турецкими чалмами и т. п.

Метод вычисления объемов тел вращения и их частей был у Кеплера единым. Во-первых, изучаемое тело делилось на бесконечное число единиц, «ломтей», занимающих равноправные положения в теле. Эти части перегруппировывались, образуя другое тело, объем которого можно вычислить. Если оказывалось не-

[1] Кеплер И. Стереометрия винных бочек — М.: ОНТИ—ГТТИ, 1935.— С. 123.

возможным провести непосредственное суммирование, то они предварительно заменялись другими частями, эквивалентными данным. Разъясним этот метод на двух примерах.

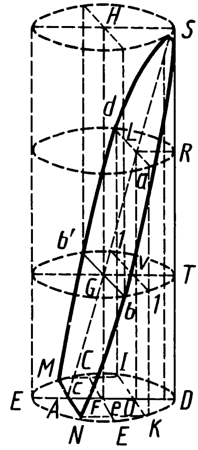

Рис. 26

В теореме 18 Кеплер доказал, что всякий тор кругового или эллиптического сечения равновелик цилиндру, высота которого равна длине окружности, описываемой центром сечения, а основание — сечению кольца. Метод доказательства: тор рассекается на доли плоскостями, проходящими через его центр перпендикулярно поверхности. Каждый разновысокий ломтик заменяется цилиндриком с тем же основанием и с высотой, равной среднему арифметическому наибольшей и наименьшей высоты. Столбик из этих цилиндриков дает наглядное доказательство теоремы. Далее Кеплер обсуждает возможные обобщения, связанные с формой сечения тора, приходя к выводу, что теорема верна для всех сечений, симметричных относительно вертикали, проведенной через центр сечения.

Второй пример более сложен. В нем речь идет об определении объема яблока, т. е. тела, образованного вращением вокруг хорды сегмента, большего, нежели полукруг, а также объема частей яблока.

Кеплер представляет яблоко состоящим из долек, образованных меридиональными сечениями и имеющих общий отрезок $MN$ (рис. 26).

Развернув экватор яблока в прямую $DS$, Кеплер перераспределяет ломтики, деформируя их без изменения объема. Образуется тело $MNSD$, которое можно представить отсеченным от цилиндра, основанием которого является круг, образующий яблоко, а высота равна длине окружности радиуса $AD$. Объем этого тела равен объему яблока.

Тот же результат получается, если яблоко представляется разделенным не на элементарные меридиональные дольки, а на концентрические цилиндрические слои, имеющие осью $MN$ — своеобразные «стружки».

Развернув каждую стружку перпендикулярно плоскости $DMN$, Кеплер получил совокупность бесконечно тонких прямоугольников, составляющих упомянутое цилиндрическое тело (например, прямоугольник $IKad$).

Теперь можно перейти к определению объема пояса яблока — той его части, которая остается после извлечения из него сердцевины, т. е. части цилиндра, имеющей $MN$ своей осью. Если пояс образован, например, сегментом $IKD$, то он равновелик части $LSDO$ цилиндрического тела. Эта часть в свою очередь состоит из двух частей: цилиндрического сегмента $VTDO$ и тела $VLST$. Последнее Кеплер рассматривает как разность двух тел $GLST$ и $GLV$.

Так как точка $G$ является центром круга, тело $GLST$ оказывается равновеликим шару того же радиуса, что и заданный. Поэтому тело $VLST$ трактуется как шаровой пояс, образованный тем же сегментом $IKD$.

Эти соображения и лежат в основе теоремы 20: «Пояс яблока составляется из пояса сферы и прямой части цилиндра, основанием которого служит сегмент, недостающий (до полного круга) на вращающейся фигуре, образующей яблоко, а высотой — длина окружности, описанной центром большого сегмента».

В конце доказательства Кеплер поместил в качестве добавления правило для вычисления объема яблока и его сферического пояса. Методы Кеплера в определении объемов тел вращения, разумеется, были нестрогими. Это было ясно и ему самому, и его современникам.

Вокруг кеплеровских суммирований актуально бесконечно малых разгорались горячие споры. Как и во все эпохи, не было недостатка в придирчивых критиках. Ученик Виета, шотландец А. Андерсон выпустил даже специальное сочинение «В защиту Архимеда» (через год после выхода в свет рассматриваемого сочинения Кеплера), где обвинил Кеплера в оскорблении памяти Архимеда.

Тем не менее плодотворность суммирования элементов, вычитанная Кеплером у Архимеда, была очевидной. Первая же попытка создать регулярный алгоритм оперирования с бесконечно малыми стала весьма популярной. Многие ученые посвятили свои работы усовершенствованию оперативной стороны этого предприятия и рациональному разъяснению возникающих при этом понятий. Наибольшую известность приобрела геометрия неделимых, изобретенная Кавальери.

Бонавентура Кавальери (1598—1647), ученик Г. Галилея, происходил из знатного рода. Монашеская карьера сочеталась в его жизни с научной и преподавательской деятельностью математика. С 1629 г. по рекомендации Галилея он занял кафедру математики в Болонье, будучи одновременно настоятелем католического монастыря ордена иеронимитов. Прекрасный знаток античных авторов, он в то же время глубоко изучал высказанные Галилеем и Кеплером идеи создания исчисления неделимых.

Кавальери написал ряд сочинений по астрономии, технике вычислений, коническим сечениям, тригонометрии. В 1632 г. он опубликовал 11-значные таблицы логарифмов тригонометрических функций. Но делом его жизни, имевшим наибольшее значение для развития математики, был *метод неделимых*, задуманный как универсальный метод геометрии.

Идея общего метода неделимых была впервые высказана Б. Кавальери в 1621 г. В рукописи, представленной им при занятии профессорской должности в 1629 г., уже имеет место систематическое применение неделимых.

Итогом многолетнего усовершенствования метода неделимых явилась книга «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного» (1635). Этому же предмету была посвящена книга Кавальери «Шесть геометрических опытов» (1647).

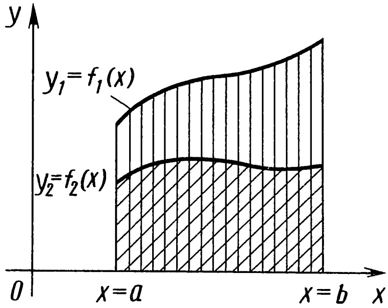

Рис. 27

Метод неделимых был изобретен для определения размеров плоских фигур и тел. Как фигуры, так и тела представляются составленными из элементов, имеющих размерность на единицу меньше. Так, фигуры состоят из отрезков прямых, проведенных параллельно некоей направляющей прямой, называемой *регула*. Этих воображаемых отрезков бесконечно много. Они заключены между двумя касательными, имеющими название парных. Касательные параллельны регуле; за регулу может быть принята одна из них.

В геометрических телах неделимыми являются плоскости, параллельные некоторой плоскости, избранной в качестве регулы. Их тоже бесконечно много; границами их совокупности служат две парные касательные плоскости, параллельные регуле. Часто одна из них избирается в качестве регулы.

Идею своего метода Кавальери образно выражал, предлагая читателям представить паука, непрерывно ткущего геометрию из неделимых. Нам бы сейчас пришло на ум более доходчивое сравнение с лучом, бегущим по экрану телевизора, образующим двумерные картины из строк линейной развертки.

Совокупность всех неделимых, вводимая Кавальери, по существу соответствует понятию *определенного интеграла*. Однако логические трудности, связанные с пониманием неделимого, составления площадей из линий, не имеющих ширины, и тел из бесконечно тонких плоскостей и т. п. не дают еще возможности судить о совокупностях всех неделимых. Поэтому Кавальери вынужден рассматривать отношения объемов тел и площадей фигур, ограничиваясь случаями, когда отношения неделимых постоянны.

Таким образом, сущность геометрии неделимых Кавальери можно сформулировать так: площади плоских фигур и объемы тел относятся друг к другу, как все их неделимые, взятые вместе; если неделимые находятся в одном и том же отношении друг к другу, то отношение площадей соответствующих фигур (или объемов тел) равно этому отношению.

Эти утверждения практически эквивалентны современным умозаключениям типа: даны две фигуры, ограниченные на нашем чертеже (рис. 27) осью $x$, прямыми $x=a$ и $x=b$ и соответственно кривыми $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$. Отношение площадей

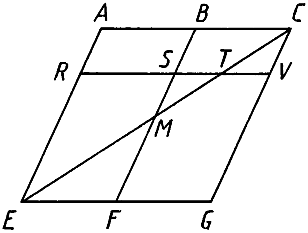

Рис. 28

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_{1k}}{\sum\limits_{k=2}^{\infty} y_{2k}}=\frac{\int\limits_a^b f_1(x)\,dx}{\int\limits_a^b f_2(x)\,dx}.$$

Если $\frac{y_{1k}}{y_{2k}}=a=\text{const}$ для любого $k$, то и $\frac{S_1}{S_2}=a$.

Кавальери рассматривал и отношения степеней неделимых. Например, он ввел совокупность квадратов неделимых и доказал теорему: «Сумма квадратов неделимых параллелограмма втрое больше суммы квадратов неделимых треугольника, образованного в результате проведения диагонали». Введем для краткости обозначения $AC=a$, $RT=x$, $TV=y$, $RS=\frac{a}{2}=b$, $ST=z$. Тогда $x=b+z$, $y=b-z$ и сумма квадратов частей неделимых $x^2+y^2=2b^2+2z^2$. Суммируем все неделимые, обозначив сумму квадратов неделимых символом [ ] (рис. 28), получим:

$$[AEC]+[CGE]=2[ABFE]+2[BCM]+2[FEM].$$

Заметим, что

$$[AEC]=[CGE];\ [ABFE]=\frac{1}{4}[ACGE];$$

$$[BCM]=[FEM]=\frac{1}{8}[ACE].$$

Это нетрудно понять, вообразив над каждым линейным элементом квадрат и рассматривая их совокупности. Следовательно,

$$[ACE]=\frac{1}{4}[ACGE]+\frac{1}{8}[ACE]+\frac{1}{8}[ACE];$$

$$[ACE]=\frac{1}{3}[ACGE].$$

В переводе на язык интегрального исчисления Кавальери доказал, что

$$\int\limits_0^a x^2dx=\frac{1}{3}\int\limits_0^a a^2dx;$$

или, иначе,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{n}\right)^2(1^2+2^2+\ldots+n^2)}{na^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^2}{n^3}=\frac{1}{3}.$$

Эту теорему Кавальери сумел обобщить на случай суммирования более высоких степеней неделимых, вплоть до 9-й, решив таким образом группу задач, эквивалентных вычислению определенных интегралов вида $\int\limits_0^a x^n dx$ для $n=1, 2, ..., 9$. То, что у Кавальери рассматриваются не выражения, эквивалентные интегралам, а их отношения, дела принципиально не меняет. Достаточно выбрать в качестве единого знаменателя интеграл, соответствующий сумме неделимых.

Другим обобщением метода являлось введение криволинейных неделимых. Метод неделимых позволил решить множество трудных задач, ранее не поддававшихся решению. Появились горячие приверженцы этого метода. Один из них, Е. Торричелли, писал, что новая геометрия неделимых переходит из рук одних ученых к другим как чудо науки; она, по мнению Торричелли, убедила мир, что века Архимеда и Евклида были годами детства ныне взрослой геометрической науки. Торричелли, активно работавший методами Кавальери, первый сумел определить объем тела, образованного вращением ветви гиперболы вокруг одной из своих осей.

Б. Паскаль

Однако у этого метода были свои недостатки. Во-первых, он был непригоден для измерения длин кривых, так как соответствующие неделимые (точки) оказывались безразмерными. Во-вторых, невыясненность понятия неделимого, невозможность его рационального объяснения создавала для всей теории атмосферу необоснованности. В-третьих, развитие метода сильно задерживалось из-за того, что Кавальери в соответствии со сложившимися в его время представлениями о научной строгости избегал применять символику и приемы алгебры.

Тем не менее определенное интегрирование в форме геометрических квадратур в первой половине XVII в. уже зарекомендовало себя. Все усилия отныне были направлены на уточнение его и на достижение возможно более общих результатов.

Паскаль (1628—1662), например, рассматривал квадратуры в форме, близкой той, которая употребляется Кавальери. Попытка уточнения состоит в том, что сумму всех неделимых он понимал как сумму элементарных площадок, образуемых бесконечно близкими, одинаково отстоящими друг от друга ординатами, ограниченными отрезком оси абсцисс и кривой (т. е. сумму вида $\sum y dx$). В ряде задач он вводил сумму всех синусов, определяя ее как сумму произведений ординат на элементы дуги $\sum y ds$, которая в случае окружности единичного радиуса оправдывает свое название $\sum \sin\varphi d\varphi$. При помощи этого геометрического эквивалента определенного интегрирования Паскаль сумел решить много задач на определение площадей, объемов, статистических моментов и т. д.

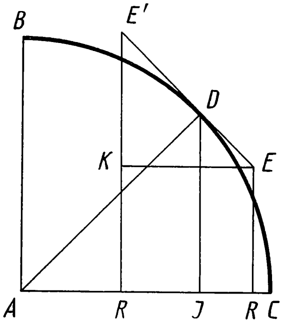

Рис. 29

В случае, когда речь идет о сумме синусов, Паскаль высказал мысль, сыгравшую впоследствии большую роль в истории математики. Он ввел вспомогательный $\triangle\, EKE'$, подобный $\triangle\, AID$ (рис. 29), и сохранил его в своих рассуждениях даже тогда, когда расстояние между двумя соседними ординатами бесконечно мало:

$$\triangle\, EKE' \backsim \triangle\, AID;\quad \frac{EE'}{KE'}=\frac{AD}{DI};$$
$$DI\cdot EE'=AD\cdot KE',$$

или в более привычных нам обозначениях: $yds=rdx$. Последующая теорема Паскаля: «Сумма синусов какой-нибудь дуги четверти круга равна отрезку основания между крайними синусами, умноженному на радиус» — легко переводится на язык интегрального исчисления. В самом деле, $\int\limits_0^s yds=r\int\limits_0^x dx$.

Из равенств $y=r\cos\varphi$, $x=r\sin\varphi$, $s=r\varphi$ следует, что

$$\int\limits_0^\varphi r\cos d(r\varphi)=r\int\limits_0^\varphi d(r\sin\varphi),$$

или

$$\int\limits_0^\varphi \cos\varphi d\varphi=\int\limits_0^\varphi d(\sin\varphi)=\sin\varphi.$$

По признанию Лейбница, треугольник Паскаля послужил ему прообразом дифференциального треугольника, составленного из дифференциалов $dx$, $dy$, $ds$.

Важное усовершенствование геометрических квадратур было проделано Ферма, который ввел деления квадрируемой площади ординатами, отстоящими друг от друга на неравных расстояниях. Это дало ему возможность распространить способы вычисления выражений, эквивалентных $\int\limits_0^a x^n dx$, на случай, когда $n$ дробное и отрицательное.

Пусть, например, речь идет о вычислении интеграла $\int\limits_0^x x^{\frac{p}{q}}\,dx$, где $p>0$, $q>0$. В формулировке Ферма речь идет о квадрировании площади, образованной отрезком $[0;\ x]$ оси абсцисс, двумя крайними ординатами и кривой $x^p=y^q$. Промежуток интегрирования делится на отрезки точками с координатами $x$, $\alpha x$, $\alpha^2 x$, ..., где $\alpha<1$. Последующие операции состоят в вычислении последовательно $\Delta x$, $y$, $y\Delta x$, $\sum y\Delta x$ и переходе к случаю, когда ширина полосок бесконечно уменьшается. Приведем эти выкладки в виде таблицы:

| $\Delta x$ | $(1-\alpha)x$ | $\alpha(1-\alpha)x$ | $\alpha^2(1-\alpha)x$ | ... |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $x^{\frac{p}{q}}$ | $\alpha^{\frac{p}{q}} x^{\frac{p}{q}}$ | $\alpha^{2\cdot\frac{p}{q}} x^{\frac{p}{q}}$ | ... |
| $y\Delta x$ | $(1-\alpha)x^{\frac{p+q}{q}}$ | $(1-\alpha)\alpha^{\frac{p+q}{q}} x^{\frac{p+q}{q}}$ | $(1-\alpha)\alpha^{2\frac{p+q}{q}} x^{\frac{p+q}{q}}$ | ... |

Суммирование, как видим, свелось к отысканию суммы геометрической прогрессии

$$\sum y\Delta x = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}} x^{\frac{p+q}{q}}.$$

Чтобы избежать того, что коэффициент при $x^{\frac{p+q}{q}}$ делается неопределенным, когда полоски уменьшаются, Ферма делает подстановку $\alpha=\beta^q$. Тогда

$$\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{\frac{p+q}{q}}} = \frac{1-\beta^q}{1-\beta^{p+q}} = \frac{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{q-1})}{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^{p+q-1})}.$$

В предельном случае $\alpha=1$, следовательно, $\beta=1$ и

$$\sum y\Delta x = \frac{q}{p+q} x^{\frac{p+q}{q}}.$$

Аналогичные вычисления позволяют получить $\int\limits_x^{\infty} x^{-n}dx$. Ферма делит интервал интеграции точками с абсциссами $x$, $\alpha x$, $\alpha^2 x$, ..., где $\alpha > 1$. Последовательно вычисляя по образцу, данному выше, величины $\Delta x$, $y$, $y\Delta x$, $\sum y\Delta x$ и переходя к предельному случаю, когда $\alpha=1$, Ферма получает результат:

$$\sum_{(\alpha=1)} y\Delta x = \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}.$$

По-видимому, Ферма изобрел этот метод под влиянием сочинений Непера, потому что он сам назвал его *логарифмическим*.

Математики первой половины XVII в. убеждались, какое большое количество, казалось бы, разнородных задач геометрии и механики приводилось к квадратурам. С каждым годом, с каждым новым результатом все более выявлялась общность операций, которые приходилось применять при решении этих задач. Геометрический эквивалент определенного интегрирования, возникший как специфический метод геометрии, частично воспринятый от Архимеда, постепенно приобретал черты общего метода математики. В нем все больший удельный вес приобретали численные методы и элементы грядущего анализа бесконечно малых.

В этом отношении характерным примером являлись работы Дж. Валлиса (1616—1703), английского математика, профессора Оксфордского университета (с 1649 г.), одного из основателей (1663 г.) Лондонского королевского общества. В 1655 г. им была издана «Арифметика бесконечного». Используя метод Кавальери, он перевел на арифметический язык отношения сумм неделимых. Так, отношение степеней неделимых, которые мы интерпретировали как интегрирование степенной функции $x^n$, он представил как отношение сумм чисел. Отношение суммы неделимых треугольника к сумме неделимых параллелограмма с тем же основанием и высотой сводится Валлисом к отношению $\frac{0+1+2+\ldots+n}{n+n+n+\ldots+n}$, которое при безгранично возрастающем $n$ равно $\frac{1}{3}$. Отношение сумм 2, 3, ..., $m$ степеней неделимых истолковано как

$$\frac{0^k+1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^k+n^k+n^k+\ldots+n^k}$$

($k=2$, 3, ..., $m$) для $n$ неограниченно возрастающего. Значения этих отношений до $k=9$ получены Кавальери; они равны $\frac{1}{k+1}$.

Валлис, пользуясь неполной математической индукцией, распространяет этот результат на случай любого целого $k$. Так, им получена была формула, эквивалентная формуле

$$\int_0^1 x^m dx=\frac{1}{m+1}.$$

Валлис знал из сочинений Архимеда, что площадь параболического сегмента равна $\frac{2}{3}$ площади описанного параллелограмма. Он и его перевел на язык отношений указанных выше сумм: отношение

$$\frac{\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n}+\ \ +\sqrt{n}}$$

при неограниченном возрастающем $n$ равно $\frac{2}{3}$. Та же неполная индукция привела Валлиса к обобщению этого результата на все дробные, а затем и на отрицательные показатели степени.

Идеи, включающие элементы определенного интегрирования, широко распространились среди математиков западноевропейских стран. Методы интегрирования охватывали к 60-м гг. XVII в. обширные классы алгебраических и тригонометрических функций. Было решено огромное число задач, осветить которые в настоящей книге невозможно. Нужен был только один толчок — рассмотрение всей совокупности методов с единой точки зрения, чтобы перевернуть всю интеграционную проблематику и создать интегральное исчисление.

В математике XVII в. наряду с интеграционными методами складывались и методы *дифференциальные*. К дифференциальным методам мы отнесем по образцу определения интеграционных методов те, в которых содержатся элементы будущего дифференциального исчисления. Вырабатывались эти элементы при решении задач, которые в настоящее время решаются с помощью дифференцирования. Такие задачи были в то время трех видов: определение касательных к кривым, нахождение максимумов и минимумов функций и отыскание условий существования кратных корней алгебраических уравнений. К этой группе тесно примыкают запросы механики, вытекающие из необходимости определять скорость в любой точке траектории в случае неравномерных движений, не говоря о более сложных задачах.

Научное наследие древних и средневековых авторов в этой области не было столь определенным и значительным, как в случае интегральных методов. Задачи о *касательной* рассматривались не систематически, единообразных приемов выработано не было. Общим, по-видимому, было стремление понимать касательную как прямую, имеющую с кривой одну общую точку и обладающую свойствами локальной односторонности. В области экстремальных задач, помимо фактов элементарной изопериметрии, существовали лишь *диоризмы*, т. е. ограничения, накладываемые на условия задачи, чтобы она имела решение в области рациональных и действительных чисел или геометрических отрезков. Диоризмы часто содержат указания на экстремальные значения. Например, когда алгебраическое уравнение имеет кратные корни, кривые, пересечением которых решается уравнение, не пересекаются, а касаются друг друга. Таким образом, некоторая взаимосвязанность дифференциальных задач к XVII в. уже была отмечена.

В течение XVII в. дифференциальные задачи решались еще самыми различными методами. Как и всегда в науке, наряду с новым существует старое. Так происходило и в рассматриваемой нами области. Геометрические построения в духе античных математиков, механические соображения, исследования в духе новой тогда аналитической геометрии Декарта, инфинитезимальные соображения — в их тесном сплетении вызревало дифференциальное исчисление. Приведем несколько примеров, характеризующих этот процесс.

Уже в школе Галилея для нахождения касательных и нормалей к кривым систематически применялись *кинематические методы*. При этом касательная появляется как диагональ парал-

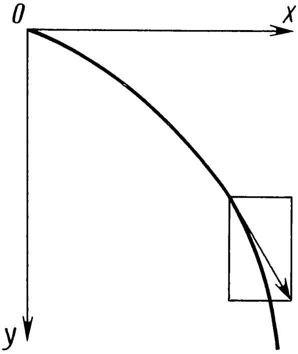

Рис. 30

лелограмма, сторонами которого являются горизонтальная и вертикальная составляющие скорости. Например, пусть тяжелая материальная точка брошена с некоторой горизонтальной начальной скоростью (рис. 30). Перемещения точки по оси $x$ будут пропорциональны отрезкам времени, т. е. $x=nt$; по оси $y$ (вертикальной) — квадратам этих отрезков $y=\frac{q}{2}t^2$.

Траектория движения точки — парабола, параметр которой Галилей определял как учетверенную высоту падения, которая была бы нужна, чтобы сообщить точке скорость, равную начальной горизонтальной скорости $y=\frac{1}{2}\cdot\frac{g}{u^2}x^2$. Обозначив параметр $\frac{2u^2}{g}$ через $2p$, Торричелли нашел, что отношение вертикальной компоненты скорости $gt$ к горизонтальной $u$ равно $\frac{2y}{x}$ или $\frac{x}{p}$. Отсюда Торричелли заключил, что касательная пересекает ось параболы в точке, лежащей на отрезок $2y$ выше данной точки или на $y$ выше вершины параболы.

Этот кинематический метод дал начало рассмотрению различных бросаний и сложных движений и определению касательных в любой точке траектории. Систематическое изложение метода и его главнейших применений дал в 1640 г. Роберваль (1612—1675). Несмотря на важность, кинематический метод был очень неудобен, так как исходил из индивидуальных особенностей кривых и поэтому был недостаточно алгоритмичен. Больше перспектив для определения касательных и нормалей в то время представлял *метод нормалей* Декарта, содержащийся во второй книге его «Геометрии».

Пусть необходимо провести нормаль к алгебраической кривой в точке $(a; b)$ и пусть это осуществлено. Нормаль пересечет ось абсцисс в точке $(c; 0)$. Семейство концентрических окружностей с центром в точке $(c; 0)$ содержит одну окружность радиуса $R=\sqrt{(a-c)^2+b^2}$, которая имеет с кривой две общие точки, слившиеся в одну, а именно в точку $(a; b)$. Одно из двух неизвестных, например $y$, может быть исключено из уравнений данной кривой и окружности. Так как $x=a$ — двойной корень, то при этом должно получиться уравнение вида $(x-a)^2P(x)=0$. Это дает возможность определить величину $c$ с помощью метода неопределенных коэффициентов. Для этого Декарт приравнивает левую часть полученного уравнения к произведению выражения $(x-a)^2$ на многочлен степени, на две единицы меньшей и с неопределенными коэффициентами. Сравнение коэффициентов при членах одинаковой степени дает уравнения, которыми определяется $c$.

Связанная с методом Декарта проблема отыскания кратных корней алгебраических уравнений получила развитие у голландского математика и инженера И. Гудде (1628—1704). Правило Гудде, коротко говоря, состоит в отыскании общего наибольшего делителя уравнений $f(x)=0$ и $f'(x)=0$; последнее уравнение получено умножением коэффициентов данного уравнения $f(x)=0$ на члены произвольной арифметической прогрессии.

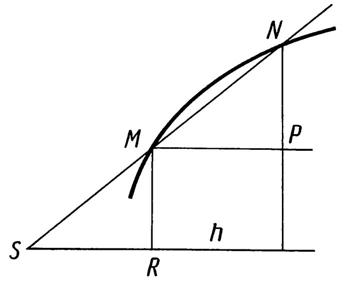


Рис. 31

Применяемый в наши дни способ, связанный с алгебраическим способом образования последовательных производных левой части алгебраического уравнения, появился, по-видимому, впервые у Ролля (1652—1719) в конце XVII в. Однако возвратимся к дифференциальным методам.

Накопление методов дифференциального исчисления приняло наиболее явную форму у Ферма. В 1638 г. он сообщил в письме Декарту, что решил задачу определения экстремальных значений функции $f(x)$. Ферма составлял уравнение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$ и после преобразований в левой части полагал $h=0$. Вопреки мнению позднейших исследователей, которые видели в этом идеи исчисления бесконечно малых, в действительности Ферма нашел это условие и аналогичное $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=0$ при $y=x$ еще алгебраическими путями.

Рассуждения тут примерно такие: имеем $f(x)=0$, найти экстремум.

Пусть для некоторого $x$ функция достигает максимума. Тогда $f(x\pm h)<f(x)$; $f(x)\pm Ph+Qh^2\pm\ldots<f(x)$. Вычитаем из обеих частей по $f(x)$ и делим на $h$, откуда $\pm P+Qh\pm\ldots<0$. Так как $h$ можно выбрать любой малости, член $P$ будет по модулю больше суммы всех остальных членов. Неравенство поэтому возможно лишь при условии $P=0$, что и дает условие Ферма. В случае минимума рассуждения аналогичные. Ферма знал также, что знак $Q$ определяет характер экстремума.

Столь же близок к дифференциальному исчислению метод Ферма отыскания касательных к алгебраическим кривым.

На малой дуге $MN$ алгебраической кривой $f(x)=0$ (рис. 31) путем проведения секущей $SMN$ строится характеристический треугольник $MNP$.

$\triangle\, MNP \backsim \triangle\, SMR$. Отсюда $SR=\frac{MR\cdot MP}{NP}$, или, в более привычных нам символах, $SR=\frac{f(x)\cdot h}{f(x+h)-f(x)}$. Затем Ферма переходит от секущей к касательной, полагая $h=0$, получая тем самым $S_t=\frac{y}{y'}$.

Позднее он распространил этот метод определения касательных на случай неявной функции $f(x, y)=0$. Полученное им равенство легко переводится в привычное нам

$$\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Все функции Ферма — алгебраические полиномиальные. В случаях, когда в исследуемых функциях попадались иррациональности, он освобождался от них возведением обеих частей уравнения в степень. Впрочем, в этом сравнительно узком классе функций метод Ферма определения касательных и экстремальных значений общий, символика единообразная. К сожалению, Ферма не стремился публиковать свои работы, кроме того, пользовался труднодоступными для усвоения алгебраическими средствами Виета с его громоздкой символикой. Видимо, поэтому он не сделал последнего, уже небольшого, шага на пути к созданию дифференциального исчисления.

К середине XVII в. накопился достаточно большой запас средств решения задач, ныне решаемых с помощью дифференцирования. Однако не было еще выделено особой операции дифференцирования понятий, равнозначных понятиям производной и дифференциала. Не была ясна связь дифференциальных и интеграционных методов. Математический анализ формировался в рамках и в терминах алгебры, геометрии, механики — сложившихся уже к тому времени наук. Так, всякое новое математическое исчисление всегда проходит период формирования в пределах уже существующей системы математических наук, используя их средства.

Последним этапом «эмбрионального» периода анализа бесконечно малых явилось установление связи и взаимообратности дифференциальных и интеграционных исследований. Побудительных причин для этого было много. Одними из важнейших были так называемые *обратные задачи на касательные.* Задачи этого типа состоят в определении кривых, исходя из заданного общего свойства всех касательных к ним. Речь идет не о нахождении огибающих семейства прямых, а о таких свойствах касательных, которые зависят от положения точки касания. В общей постановке задачи этого типа можно сформулировать так: «Найти $y=f(x)$ из условия $f_1(x, y, y')=0$». Таким образом, речь идет о необходимости решить дифференциальное уравнение первого порядка с двумя переменными.

Обратные задачи на касательные возникли в результате запросов практики. Например, мореплаватели еще в эпоху великих географических открытий обратили внимание на кривую постоянного истинного курса корабля — *локсодромию.* Это кривая, касательные к которой пересекают меридианы, проведенные в точках касания, под постоянным углом. Различные обратные задачи на касательные были поставлены также в геометрической оптике и в кинематике.

Приближенные графические методы не могли считаться удовлетворительным средством решения этих задач. Попытку дать общий метод первым предпринял Декарт. Он предложил классифицировать все алгебраические кривые (неалгебраических кривых он, как было сказано, не рассматривал), расположить их в ряд, отыскивать их касательные и проверять, обладают ли они заданным свойством. Разумеется, первая же попытка использовать этот метод проб, предпринятая Декартом при решении задачи Дебона, показала практическую его непригодность.

Задача Дебона заключалась в требовании квадрировать кривую, обладающую свойством $\frac{y}{S_t}=\frac{x-y}{a}$, где $S_t$ — подкасательная. Декарт, по его словам, испробовал кривые вида

$$y^n=ax^2+bx+c,\ n=1,\ 2,\ \ldots,\ 1000,$$

но безуспешно. Тогда он избрал другой путь: заменил систему координат на косоугольную, выбрав вместо оси $x$ прямую $y=x-a$. В этой системе подкасательная оказалась постоянной $S_t=a\sqrt{2}$

В самом деле, уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{a}$ подстановкой $y_1=y+a-x$ преобразуется в уравнение $\frac{dy_1}{dx}=-\frac{y}{a}$ и после подстановки $x_1=x\sqrt{2}$ получается уравнение $\frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{y}{a\sqrt{2}}$. Кривая Дебона оказалась неалгебраической. Декарт доказал этот (для нас почти очевидный) факт кинематически. Именно он доказал, что эта кривая образована двумя независимыми движениями: равномерным движением прямой $x=0$ и движением прямой $y_1=0$ или $y=x-a$ со скоростью, пропорциональной пройденному расстоянию. Кривая представляет собой геометрическое место точек пересечения этих двух движущихся прямых. Как было сказано, Декарт относил такие кривые к разряду механических и из своей системы математики исключал.

Задача Дебона, как и другие обратные задачи на касательные, указывала на взаимную обратность задач о проведении касательных и других задач, сущность которых состояла в решении, говоря современными терминами, дифференциальных уравнений. Особенно хорошо удавались задачи, которые можно было свести к интегрированию $\frac{dy}{dx}=f(x)$. Отдельных результатов здесь добились шотландец Д. Грегори (1638—1675) и англичанин Дж. Валлис. Не замедлил появиться и общий, хотя и сформулированный в терминах геометрии, результат о взаимно обратной зависимости задач на квадратуры и на проведение касательной. Принадлежит он И. Барроу (1630—1677), профессору Кембриджского университета, ученику Валлиса и другу И. Ньютона. Опубликован этот результат в 1669 г. в «Лекциях по геометрии и оптике». Состоит он в следующем.

Заданы две кривые $OF$ и $OE$ (рис. 32). Точки $F$ и $E$ имеют общую абсциссу. Кривые связаны условием $DF \cdot R = S_{ODE}$, или, в наших символах, $R \cdot y = \int_0^x v dx$. Тогда подкасательная $DT = R \times \times \frac{DF}{DE}$, или $R \cdot \frac{DF}{DT} = DE$, т. е. $R = \frac{dy}{dx} = v$. Этой теореме Барроу дал два доказательства.

Первое доказательство *кинематическое*. Пусть кривая $OF$ является траекторией движущейся точки $F$. Закон движения: проекция $F$ на ось $x$ постоянна, т. е. точка $D$ движется с постоянной скоростью $R$, скорость возрастания ординаты $DF$ геометрически изображается отрезком $DE$ или $v$. Короче: $\frac{dx}{dt} = R \frac{dy}{dt} = v$. Касательная есть диагональ прямоугольника, составленного из этих скоростей. Тогда для подкасательной $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{R}$, или $v = R \cdot \frac{dy}{dx}$. По Галилею, путь, пройденный точкой $F$ при равномерно ускоренном движении, равен

$$\int_0^x v dx = R \cdot y.$$

Второе доказательство более строгое, *методом древних*. Проведена прямая $FT$, определяемая условием $DT = R \cdot \frac{DF}{DE}$. Нужно доказать, что это касательная, т. е. опорная прямая, точки которой в локальной области лежат по одну сторону от кривой.

Проведем в точке $I$ кривой прямые $LIK$ и $I'K'L'$, параллельные оси $OX$. По свойству кривых площадь $S_{PDEG} = R \cdot LF$. Из чертежа $\frac{LK}{LF} = \frac{DT}{DF} = \frac{R}{DE}$, откуда $LK \cdot DE = R \cdot LF = S_{PDEG}$.

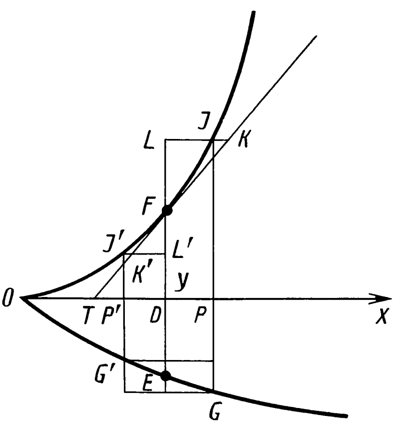


Рис. 32

Но в силу монотонности кривой $OE$ очевидно, что $S_{PDEG}$ больше (или соответственно меньше) $IL \cdot DE$ в зависимости от того, находится точка $I$ правее или левее точки $F$. Отсюда соответственно $LK$ больше (или меньше) $IL$, что и доказывает расположение прямой по одну сторону от кривой, т. е. что она касательная.

Опираясь на этот результат, Барроу решил большое число обратных задач на касательные. С его сочинениями знакомились многие ученые, в том числе Ньютон и Лейбниц.

Итак, к середине XVII в. математика находилась на грани открытия дифференциального и интегрального исчисления. Точнее сказать, это открытие совершалось.

Совсем мало лет прошло со времени изобретения анализа бесконечно малых, а его положение в математике определилось и стало прочным. В глазах математиков он приобрел четкие очертания и все «права гражданства». Его осознали как исчисление, объектами которого были все известные в то время классы функций. Над этими функциями в исчислении производили по единообразным правилам операцию дифференцирования. Сделалось до несомненности ясным, какие классы задач (преимущественно из геометрии и механики) требовали для своего решения операции дифференцирования. Также очевидной сделалась целенаправленность обратных задач, решение которых составляло и пополняло интегральное исчисление, хотя состав последнего был гораздо более сложным из-за входящих в него дифференциальных уравнений, отсутствия общих методов интегрирования. Символика сделалась более систематичной и достаточно развитой, чтобы содействовать оперативным успехам исчисления. Пониманию широкими кругами математиков сущности анализа ничуть не мешало то, что в странах континентальной Европы использовалась символика, разработанная Лейбницем, а в островном английском государстве ревниво оберегали символику теории флюксий.

Быстрыми были первые шаги нового дифференциального исчисления. В оперативной части все возможное и практически важное было освоено в считанные годы и дифференциальное исчисление заняло свое место в классических основах математического анализа и соответственно в математическом образовании.

Гораздо медленнее и труднее шли дела при накоплении способов интегрирования функций. Геометрические методы, состоящие в изучении площадей фигур, ограниченных плотным множеством ординат кривой, заданной на отрезке, оказывались недостаточными. Их пришлось дополнять методами представления функций к виду, удобному для интегрирования. В основном речь шла о представлении функций степенными рядами и другими подходящими формулами. Класс функций, интегрируемых в явном виде, пополнялся медленно.

К успехам в части дифференцирования и интегрирования функций почти тотчас, даже одновременно и неразрывно с ними, добавились первые решения дифференциальных уравнений, начиная с обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Их решения пробовали отыскивать в виде алгебраических или элементарных трансцендентных функций.

Постепенно были найдены элементарные приемы решения дифференциальных уравнений: разделение переменных, частные виды интегрирующего множителя, решение однородных уравнений первого порядка подстановкой $y=x\cdot t$. И. Бернулли сумел проинтегрировать уравнение

$$dy+P(x)\cdot y\cdot dx=Q(x)\cdot y^n\cdot dx$$

с помощью подстановки $y=v^{\frac{1}{1-n}}$, преобразовав его тем самым в линейное дифференциальное уравнение первого порядка. И поныне это уравнение носит имя И. Бернулли. Тот же И. Бернулли нашел решение линейного однородного дифференциального уравнения $n$-го порядка:

$$Qx^n\frac{d^n y}{dx^n}+\ldots+Bx^2\frac{d^2 y}{dx^2}+Ax\frac{dy}{dx}+y=0.$$

Добился он этого с помощью интегрирующего множителя вида $x^p$, отчего порядок уравнения понижался. Очень скоро, впрочем, стало очевидным, что на этом пути нельзя рассчитывать на решение сколько-нибудь широкого класса уравнений. Пришлось видоизменить саму постановку задачи и считать решением дифференциального уравнения сведение к квадратурам.

Таковы были первые успехи нового исчисления. Они могут показаться довольно скромными. Но это были лишь первые капли начавшегося тогда же могучего ливня результатов, в большом числе практических. Работа велась энергично, увлеченно. В нее вовлекалось возрастающее число ученых. Быстро росло число решенных задач. Крепла уверенность, что дифференциальные уравнения описывают если не все, то во всяком случае главнейшие закономерности природы. Надо только научиться их решать. Необозримые возможности открывались перед новым исчислением.

Здесь уместно обратить внимание читателя на то, что на изучаемом материале проявляется еще одна общая историко-научная закономерность: развитие математических исчислений есть процесс, имеющий диалектический характер. Охарактеризовать эту особенность развития можно примерно так: в рамках уже существующего, известного материала происходит накопление предпосылок, элементов и даже составных частей нового исчисления. Затем наступает упоминавшийся нами ранее переворот в методе. Он проявляется явственно тогда, когда начинают существовать математические работы, в которых накопленные до них факты рассматриваются с новой, единой точки зрения. Центр внимания и усилий перемещается с попыток решения отдельных задач на разработку самого метода или группы методов, которые при этом явно формулируются, совершенствуются и применяются для решения задач. Область же применения сложившегося таким путем исчисления, как правило, оказывается более широкой, нежели область, его породившая. Изменяется при этом и само исчисление.

В дальнейшей истории математического анализа это демострируется явно. В самом деле, вместе с первыми значительными успехами стал изменяться состав и характер математического анализа. В нем стали возникать новые и новые ответвления: дифференциальные уравнения (которые в свою очередь разветвились на уравнения обыкновенные и в частных производных) и их приложения, вариационное исчисление, специальные функции, элементы теории функций комплексного переменного, теория рядов и последовательностей, функции многих переменных и т. д. По мере накопления материала эти ответвления приобретали возрастающую самостоятельность и отпочковывались. Вокруг дифференциального и интегрального исчисления разрастался мощный и разнообразный *математический анализ.*

Однако математический анализ, теоретически богатый и практически значительный, нес в самих своих основах неразрешенное противоречие между растущими практическими успехами и логической необоснованностью, неразъясненностью его понятий и операций. Эти противоречия сказывались, и чем далее, тем в более резкой форме. Столь парадоксальной ситуации и дальнейшей истории математического анализа нельзя не посвятить несколько слов, хотя это и выходит за рамки настоящей книги.

Не было тогда (как, впрочем, и позже) в математическом анализе практически ни одной стороны, которая не вызывала бы протестов, недоумений и язвительной (не столь уж несправедливой) критики. Очевидные успехи математического анализа на первых порах были причудливо и плотно переплетены с неясными и даже нелепыми высказываниями и заблуждениями. Главными причинами такого положения были следующие.

1. Для дифференцирования функций не существовало еще рационального объяснения ни употребляемых понятий (в особенности тех, где речь шла о бесконечных величинах), ни осуществляемых действий с ними (в особенности тех, где такие величины отбрасываются).

2. Когда речь заходила о неопределенном интегрировании, то отыскание первообразных не опиралось на какой-либо регулярный метод или хотя бы на таблицу полученных достаточно многочисленных результатов. Определенное же интегрирование наталкивалось также на невыясненность понятий, использующих понятия бесконечно малых и бесконечно больших величин. Столь же остро сказывались необходимость уточнения понятия функции и острая необходимость в аппарате преобразования функций к виду, когда интегрирование оказывается возможным.

3. Дифференциальные уравнения не позволяли медлить или долго и упорядоченно их обдумывать. Они возникали как описания многочисленных задач в большом числе и великом разнообразии. Однако ни проблема классификации уравнений, ни вопрос о том, что же является решением уравнения (не считая многих примыкающих проблем), не находили рационального объяснения.

Если к сказанному еще добавить трудности, возникающие в случае, когда приходится иметь дело с функциями комплексного аргумента или принимающими комплексные значения, то становится ясным, что успехи математического анализа произрастали на весьма зыбкой почве. Это сильнейшим образом препятствовало получению новых результатов и оправданию истинности результатов, уже полученных. Именно поэтому математики XVIII и последующих столетий прилагали столь большие усилия для усовершенствования основ этой области математики.

Последующая история математического анализа сопровождалась часто производимыми вынужденными перестройками его основ. Главнейшими этапами этих перестроек были:

а) построение теории функций как основы математического анализа. Эту систему в наиболее полной форме можно увидеть в монографии Л. Эйлера «Введение в анализ бесконечных», начальной книге в серии монографий, которую Эйлер посвятил полному и систематическому изложению анализа бесконечно малых своего времени;

б) введение понятия предела переменной величины с целью лучшего отражения математическими понятиями сущности переменных состояний и процессов. После неудавшихся или непризнанных попыток многих математиков систематическое построение математического анализа на основе понятия предела было осуществлено О. Коши (1789—1857), начиная с первой половины XIX в.;

в) перестройка основ математического анализа на основе теории действительного числа и теории множеств. Эта работа проводилась начиная со второй половины прошлого века. В ней приняли участие многочисленные ученые-математики.

К сказанному в этой части главы следовало бы добавить, что с 1960 г. в математике существует *нестандартный*, или неархимедов, анализ, имеющий целью ввести в классический математический анализ новые средства логико-математического характера, позволяющие по-новому истолковать операции с бесконечными числами. В основе суждений здесь лежат математические модели вещественной прямой с постоянными бесконечно малыми величинами в отличие от переменных бесконечно малых в традиционном математическом анализе. Эти модели начинают находить свое применение в физике.

Краткие замечания, только что сделанные нами в конце главы, могут послужить для начальной ориентировки заинтересованного читателя в истории математического анализа более близких к нам времен. Более детальное знакомство с таким материалом можно получить, например, из книги [3] (см. список литературы).

# ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ.

## КНИГА ПРОЧИТАНА, ЧТО ЖЕ ДАЛЬШЕ?

Тот, кто внимательно прочитал настоящую книгу, может считать, что он преодолел начальную ступень историко-математического образования. Ему стали известны факты и суждения о ранних этапах развития математической науки, об опыте приобретения и накопления людьми математических знаний. Он уловит (пусть для начала даже интуитивно) общие черты общечеловеческого опыта и опыта индивидуального, приобретаемого каждым школьником, ощутит величие марксистской идеи единства исторического и логического. Наконец (и автор на это крепко надеется), в читателе пробудится (или усилится) неудовлетворенность отрывочностью своих знаний и жажда систематического познания истории своей науки. Иносказательно говоря, увидит он, что обрывки, заплатки не заменяют цельной одежды (в особенности если ее еще нет) и что ток идет по цельному проводу, а не по его обрывкам.

Что же делать дальше? Прежде всего привести в систему уже приобретенные знания, расположить их в логической и временнóй последовательности, выделить те вопросы, которые захочется знать более подробно. Перечислим основные положения, рассмотренные в семи главах книги.

1) Формирование начальных математических представлений: понятие числа, фигуры, способы решения несложных математических задач, возникающих из практики, начальные виды математической символики, системы нумерации. Первичные формы научных суждений на примерах истории научных знаний в странах Ближнего, Среднего и Дальнего Востока. Значение марксистского принципа единства исторического и логического в истории математической науки и в преподавании математики.

2) Пути формирования математической науки. Появление первых дедуктивных математических теорий (числовых и геометрических) в математике Древней Греции в VI—IV вв. до н. э. Открытие несоизмеримости и его роль. Геометрическая алгебра и проблема построений с помощью циркуля и линейки. Знаменитые задачи древности и их стимулирующая роль. Начальный вид общей теории действительного числа (теория отношений). Появление аксиоматического метода построения математических теорий: «Начала» Евклида, их содержание, структура и цели. Элементы позднейших теорий и исчислений: интегральные и дифференциальные методы Архимеда, теория конических сечений

Аполлония. Усовершенствование вычислительных методов, появление буквенной символики.

3) Арифметика практическая и теоретическая. Связи арифметики с другими частями математики. Техника вычислений и расширения числовых полей. Логарифмы как удобный вычислительный прием. Логарифмическая функция, ее табличное задание; аналитическое задание логарифмической функции. Вычислительные устройства, их роль в труде математика.

4) Начало исторического пути алгебры. Придание алгебраической символике оперативного значения. Решение алгебраических уравнений в радикалах, неприводимый случай. Постепенное внедрение в математику общих понятий действительного и комплексного чисел. Первичная информация о результатах Абеля и Галуа.

5) Практическое происхождение геометрии. Геометрические теоремы как теоретические обобщения. Три пути развития геометрии: как орудия измерений и построений, включая проектирование; как одной из неотделимых частей комплексного исследования материального мира математическими средствами; как одной из аксиоматических систем. Система геометрических сведений в «Началах» Евклида и становление аксиоматического метода. Идеи Декарта о единстве математики и создание аналитической геометрии. Пути усовершенствования преподавания геометрии, в особенности достижения математиков времен Великой французской буржуазной революции. Сведения о преподавании геометрии в России и в СССР.

6) Тригонометрия, ее практическое происхождение в задачах об определении труднодоступных и недоступных расстояний. Тригонометрические функции углов треугольника. Появление тригонометрии плоской и сферической и обобщение понятий тригонометрических функций. Приемы вычисления тригонометрических функций в плоских задачах и построение таблиц. Графики тригонометрических функций. Последующее включение тригонометрических функций в общую теорию функций в системе математического анализа.

7) Начальный период истории математического анализа. Разработка математического аппарата решения задач механики и астрономии, связанные с ними характеристики движений и переменных состояний. Задача о касательных. Первичные формы операции дифференцирования. Проблема измерения площадей сложных конфигураций и объемов, определение центров тяжести. Выработка методов интегрирования (Кеплер, Кавальери, Валлис, Ферма и др.). Установление взаимообратимости задач на проведение касательных и вычисление площадей, т. е. методов дифференцирования и интегрирования функций.

Немалые дополнительные знания можно получить, продолжая работать над тематикой, которой посвящена настоящая книга.

Однако это лишь начальная ступень историко-научного образования математика: учителя, вычислителя, ученого — теоретика и прикладника. На эту ступень должны подниматься все. Но, проделав это, каждый, без всякого исключения, испытывает неудовлетворенность. В самом деле, рассмотренный в книге материал:

а) по содержанию касается лишь проблем, относящихся к самым начальным математическим знаниям людей;

б) во времени относится к ранним периодам истории науки, во всяком случае не позднее XVI—XVII вв.;

в) по возможностям использования в работе ограничен.

Впрочем, это почти очевидно. Приобретенными из настоящей книги знаниями нельзя ограничиваться никому. В особенности это относится к преподавателям математики и к тем, кто готовит себя к профессии математика,— к студентам математических специальностей педагогических институтов и университетов. Книга только-только ввела их в увлекательную и практическую важную область, где можно увидеть пути формирования современной математики и где можно пытаться провидеть ее (и свои) перспективы.

Но как продолжать? С учетом специфики педагогической деятельности и достигаемого в вузах уровня высшего математического образования могут быть рекомендованы для изучения следующие проблемы и направления путей дальнейшего развития математики.

1. **Алгебра: история развития ее основ.** Напомнить себе в случае необходимости, что исходным пунктом алгебраических идей и самой алгебры является изменение роли математической символики и приобретение ею оперативного значения и функционирования. Центром алгебраической проблематики делается поэтому решение алгебраических уравнений и связанные с этим расширения понятия числа. История попыток решения алгебраических уравнений в радикалах. Неприводимый случай и появление необходимости во введении комплексных чисел.

Общая проблема разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Более детально о сущности и значении результатов, полученных Лагранжем, Руффини и др., а затем —Абелем и Галуа. Введение понятия группы подстановок, дальнейшее развитие теории групп. Приложение теории групп к кристаллографии.

Развитие линейной и полилинейной алгебры. Создание матричного исчисления (Сильвестр, Кэли). Построение первых алгебр, отличных от алгебры комплексных чисел (кватернионы Гамильтона, алгебры Кэли, система Грассмана). Другие направления разработки основ алгебры, например появление новых алгебраических понятий: «группы», «поля», «кольца», «решетки» и др. Проникновение алгебраических методов в другие области математики; группы С. Ли и непрерывные группы вообще.

2. **Историческое развитие основ геометрии.** Вспомнить, если

это будет необходимо, и не забывать о практическом происхождении геометрии. Три основных пути развития этой части математики: область измерительно-конструктивной практики; взаимопроникновение геометрических методов и методов других частей математики; анализ и видоизменения аксиоматических систем.

Идеи Декарта о всеобщем характере единой математики и соединение методов алгебры и геометрии, породившие аналитическую геометрию. Связи геометрии с анализом бесконечно малых и формирование классической дифференциальной геометрии, теории кривых и поверхностей (Клеро, Эйлер и др.). Связи дифференциальной геометрии с дифференциальными уравнениями (Монж). Желательно отметить, что процесс взаимопроникновения геометрических и иных способов изучения материального мира математическими средствами продолжается и сейчас. Отражение этого процесса в смешанном характере терминологии и в перекрестных интерпретациях.

Сведения об истории начертательной (Монж) и проективной (Понселе и др.) геометрий.

Укрепление идеи о неединственности систем аксиом. Обзор усилий Н. И. Лобачевского, Я. Больяи и К. Ф. Гаусса по построению неевклидовой геометрии. Задача интерпретации неевклидовой геометрии. Классификация геометрических теорий по виду групп преобразований; Эрлангенская программа Ф. Клейна. Метрический принцип классификации; работы Б. Римана.

Аксиоматическая основа евклидовой геометрии: «Основания геометрии» Д. Гильберта. Значение неевклидовой геометрии в современной математике и физике. Аксиоматический метод в геометрии и в математике вообще.

3. **Из истории основ математического анализа.** Вспомнить, если это будет необходимо, что математический анализ — это совокупность частей математики, в которых главным объектом исследования является понятие функции, а оперативная часть существенно опирается на выполнение специфических операций дифференцирования и интегрирования функций. Значение математического анализа определяется тем, что именно в нем, его средствами, исследуют математические модели движений и вообще переменных состояний. Громадность и сложность структуры современного математического анализа буквально вынуждает исследования исторических путей его формирования и дальнейшего развития.

Математический анализ начал свое существование как *исчисление* (в форме теории флюксий Ньютона и исчисления дифференциалов Лейбница) в целях решения определенного класса задач большого практического значения. Усложнение в XVIII в. проблем естествознания и техники, требующих решения, вызвало бурное развитие математического анализа и возникновение новых его частей: дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии, вариационного исчисления. В свою очередь это обострило проблему обоснования его операций и рационального объяснения смысла основных понятий. Для исправления положения в работах Эйлера и др. центр тяжести был перенесен на *анализ функций*, на разработку аппарата бесконечных рядов, проблему сходимости, изучение функций комплексного переменного.

С начала XIX в. в трудах О. Коши и др. начато систематическое введение понятия *предела* как основного понятия математического анализа. Каковы сущность этого понятия, его достоинства, недостатки, необходимость?

Разработка аппарата и расширение области приложений математического анализа в XIX и XX вв. Возрастающая роль дифференциальных уравнений как средства описания и решения проблем математического естествознания. Усиливающееся воздействие задач математической физики. Работы по теории потенциала, теплопроводности, теоретической и практической механике. Обогащение аппарата математического анализа введением тригонометрических рядов. Проблема представимости функций тригонометрическими рядами. В вариационном исчислении разработка прямых методов и исчислений вариаций.

Выделение теории функций комплексного переменного в самостоятельную область математики. Ее последующая дифференциация: геометрическая теория, аналитическое направление, другие области теории.

Дальнейшая перестройка основ математического анализа в XIX и XX вв. на базе теории действительного числа и теории множеств. Идеи нестандартного, или неархимедова, анализа (если окажется возможным).

4. **Ориентировка в истории математики нашей Родины.** Раннее начало и относительно высокий уровень математического образования в ряде областей: Киевская Русь, Новгород, Закавказье, Средняя Азия. Исторические события, прерывавшие рост просвещения и культуры: нашествия иностранных захватчиков, воздействие реакционных слоев общества.

Возобновившееся формирование в XVIII в. учебных и научных учреждений в России. О деятельности Л. Эйлера. Появление научных школ в Петербурге, Москве, Казани и других городах. Общая характеристика уровня развития математики в России в начале XX в.

Решающее воздействие Великой Октябрьской социалистической революции и руководства наукой со стороны Коммунистической партии. Ведущее положение, достигнутое советской математикой. Математическое образование в СССР: его цели, организационные формы, практика работы, задачи.

Такова вторая ступень историко-научной квалификации математика. В ней речь идет, как видно из содержания, об истории классических основ математики в той части, что соответствует программам вузовского обучения. Соответственно полностью или в большей части материал первых двух ступеней может составить содержание курсов лекций по истории математики в университетах, педагогических институтах или в планах мероприятий по повышению квалификации преподавателей математики. И тогда начнет становиться все более ясным, насколько узка и однобока система высшего математического образования, если нет в ней историко-методологической составляющей.

Третья ступень повышения квалификации учителей может быть рекомендована для тех, кто обладает основательной математической и историко-научной подготовкой. Мы имеем в виду в первую очередь преподавателей университетов и педагогических институтов, аспирантов, возможно, некоторых студентов старших курсов. Общая цель занятий в этой части: научиться связывать конкретные общие положения и идеи марксистско-ленинской философии с областью профессиональных математических занятий: научно-теоретических, прикладных, учебно-воспитательных. Начать изучение на этом этапе рекомендуется с книги [4]. Опыт показывает, что предпочтительной формой работы может считаться обсуждение отдельных проблем на заседаниях методологических семинаров кафедр или в ходе других научно-педагогических мероприятий. Желательно при этом работать в сотрудничестве со специалистами по философии естествознания. Примеры тем:

1. Каков предмет истории и методологии математики, задачи и методы?
2. Основной вопрос философии и математика.
3. Как формируется математическое знание?
4. Математическое моделирование как метод научного познания.
5. Об истинности математических знаний.
6. Сущность процесса математизации научного знания.
7. Принцип партийности в математике.
8. Как правильно ставить и решать методологические проблемы, учитывая при этом специфику математических дисциплин (на примерах)?

Материал заключительной главы не является программой, составленной для отдельного, ограниченного во времени учебного, научного или какого-либо иного разового мероприятия. Его следует рассматривать как систему сведений, отражающих исторический опыт развития математики в достаточно полной и логически упорядоченной форме. Из этой системы или на ее основе можно строить программы лекционных курсов в институтах усовершенствования учителей для студентов педвузов и университетов, а также рекомендации по самообразованию.

Само существование, а тем более применение такой системы способствуют повышению уровня профессионального мастерства математика, любого вида занятий, препятствуют лоскутности в накоплении знаний, противостоят суждениям и действиям, основанным на неправильных оценках или на невежестве.

Историю математики, ее методологию невозможно рассматривать как обособленную или привлекаемую извне часть математики. Они составляют неотъемлемую часть содержания математического образования и математической науки, существуют и действуют слитно с другими частями всей математики. Наличие историко-методологической составляющей в знаниях математика (преподавателя, вычислителя, исследователя) ощутимо расширяет его общенаучный, профессиональный и общественно-политический кругозор и делает тем самым его работу все более ценной для социалистического общества.

Обратим, наконец, внимание читателя на приведенный в конце книги список литературы. Он невелик, всего 10 названий. Его составляет минимум сочинений и изданий, могущих быть особенно полезными для тех, кто будет продолжать работать после чтения настоящей книги в намеченных в ней направлениях. Поясним, что сможет найти читатель в этих изданиях.

Книга [1] является распространенным и полезным справочно-хрестоматийным изданием, могущим быть использованным для оживления преподавания математики в школе. В методическом плане интересна и полезна также книга [2], являющаяся собранием очерков по истории арифметики, демонстрирующих пути возникновения арифметических понятий из трудовой деятельности людей.

Книги [3] — [5] являются учебными пособиями для студентов математических специальностей университетов, педагогических институтов и других высших учебных заведений. Они содержат необходимые сведения по всем трем ступеням описанной выше программы.

В обширном многотомном издании [7] — [8] собран большой фактический материал по истории математики в разные времена. Это издание особенно удобно, когда требуется пополнить фактический материал в ходе занятий.

Книги [6], [9], [12] содержат обширный материал по истории математического образования и научной деятельности математиков в нашей стране.

Издание [11] является коллективным трудом авторитетных специалистов Академии наук СССР. Из него можно получить сведения о современном состоянии основ математики в целом и ее отдельных частей, об их происхождении и о перспективах развития.

В книге [10] доступно разъяснена сущность нестандартного, или неархимедова, анализа, о котором упоминается в главе 7.

Все эти книги содержат списки дополнительной литературы, что создает возможность дальнейшей работы читателя по тематике, рассматриваемой в настоящей книге.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Глейзер Г. И. История математики в школе: Пособие для учителей.— М.: Просвещение, 1981—1983.
2. Депман И. Я. История арифметики: Пособие для учителей.— М.: Просвещение, 1965.
3. Рыбников К. А. История математики.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974.
4. Рыбников К. А. Введение в методологию математики — М.: Изд-во Моск ун-та, 1979.
5. Рыбников К. А. Очерки методологии математики — М.: Знание, 1982.
6. История математического образования в СССР: Сб.— Киев: Наукова думка, 1975.
7. История математики с древнейших времен до начала 19 столетия: В 3 т. / Под ред. А. П. Юшкевича.— М.: Наука, 1970—1972.
8. Математика 19 века / Под ред А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича.—М.: Наука, 1978.— Т. 1; 1981.— Т. 2.
9. Очерки развития математики в СССР: Сб.— Киев: Наукова думка, 1983.
17. Успенский В. А. Нестандартный, или неархимедов, анализ.— М.: Знание, 1983.
11. Математика, ее содержание, методы и значение: В 3 т.— М.: Наука, 1956.
12. Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 г.— М.: Наука, 1968.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

**Константин Алексеевич Рыбников**

**ВОЗНИКНОВЕНИЕ И РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКИ**

Зав. редакцией *Р. А. Хабиб*
Редактор *Л. Н. Белоновская*
Младшие редакторы *Л. И. Заседателева, Л. Е. Козырева, Е. А. Сафронова*
Художник обложки *Г. А Шипов*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *Т. Е. Молозева*
Корректоры *Т. С. Крылова, О. С. Захарова*

ИБ № 10400

Сдано в набор 28.07.86. Подписано к печати 13.03.87. Формат 60×90'/16 Бум. офсетная № 2 Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 10. Усл кр-отт. 10,25 Уч.-изд л. 10,52
Тираж 85000 экз. Заказ 1311. Цена 30 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Смоленский полиграфкомбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 214020, г Смоленск, ул. Смольянинова, 1.