А. ДААН-ДАЛЬМЕДИКО
Ж. ПЕЙФФЕР

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

ПУТИ И ЛАБИРИНТЫ

ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Histoire des Mathématiques

AMY DAHAN-DALMÉDICO
JEANNE PEIFFER

ROUTES ET DÉDALES

Préface de
Jean-Toussaint Desanti

Études Vivantes
Paris — Montréal
1982

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

А. ДААН-ДАЛЬМЕДИКО
Ж. ПЕЙФФЕР

ПУТИ И ЛАБИРИНТЫ

ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Перевод с французского
А. А. БРЯНДИНСКОЙ
под редакцией
И. Г. БАШМАКОВОЙ

МОСКВА «МИР» 1986

ББК 22.1 г
Д 12
УДК 518

Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж.

Д 12 Пути и лабиринты. Очерки по истории математики: Пер. с франц.— М.: Мир, 1986.— 432 с., ил.

Живые и занимательные рассказы о развитии математики с древнейших времен до начала XX века. Авторы, французские специалисты, уделяют главное внимание центральным идеям и понятиям, что помогает представить сложный ход развития математики.

Для всех, кто интересуется математикой.

Д $\frac{1702010000-448}{01(041)-86}$ 9—86, ч. 1 **ББК 22.1 г**

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В настоящее время интерес к истории науки вообще, и к истории математики в особенности, все возрастает. Это проявляется в стремительном росте числа публикаций по истории науки во всем мире, в организации многочисленных конференций и конгрессов, наконец, в основании специальных журналов (например, международный журнал «Historia mathematica») и периодических изданий, из которых следует отметить в первую очередь «Историко-математические исследования», которые выходят ежегодно уже около 30 лет и завоевали прочный авторитет во всем мире. Создается впечатление, что современная наука достигла той степени зрелости, когда хочется оглянуться на прошлое, понять пути развития и наметить основные направления на будущее.

Однако, если число публикаций по истории отдельных вопросов и даже отдельных теорий все возрастает, то ощущается острая нехватка в суммирующих произведениях, где делалась бы попытка воссоздать историю математики в целом. Такие замечательные фундаментальные труды, как трехтомная «История математики с древнейших времен до начала XIX века» (под редакцией А. П. Юшкевича) и многотомная «Математика XIX века» (под редакцией А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича), написаны разными авторами, которые зачастую имеют различные точки зрения и на саму математику и на ее историю. Поэтому эти издания скорее представляют сборники очень интересных и содержательных статей, чем единое целое. Кроме того, объем их таков, что читателю — не специалисту в истории математики, трудно их «одолеть». Таким образом, потребность в суммирующей книге по истории математики, такой, какими были, например, известные книги Г. Г. Цейтена (теперь несколько устаревшие, к тому же доведенные только до конца XVII в.), остается насущной.

Мы, конечно, не собираемся сравнивать предлагаемую книгу А. Даан-Дальмедико и Ж. Пейффер «Пути и лабиринты» с основополагающими трудами Г. Г. Цейтена или с очерками по истории математики Н. Бурбаки. Она написана более популярно и обладает целым рядом неоспоримых достоинств, которые, несомненно, будут оценены читателем. Во-первых, главное внимание в ней обращено на развитие идей и концепций, что помогает представить сложный ход развития математики. Во-вторых, в ней учтены новые исследования по истории математики в странах средневекового Востока. Наконец, книга написана с позиций современной математики, что помогает понять многое в ее прошлом, и история доведена в ней до начала XX в.

Книга написана неровно. В ней есть очень удачные места, например глава о комплексных числах как объектах, находящихся на стыке алгебры, анализа и геометрии, или описание алгебраических структур, содержащихся в «Арифметических исследованиях» К. Ф. Гаусса. Однако с некоторыми точками зрения авторов трудно согласиться. Так, интересный обзор «Панорама» требует многих исправлений и дополнений, весьма поверхностна трактовка знаменитых апорий Зенона, которым посвящена богатая математическая и философская литература.

Имеется в книге и недостаток, который, к сожалению, присущ большинству зарубежных исследований — в ней совершенно недостаточно освещена история математики в России. По существу, из математиков XIX в. упоминается только Н. И. Лобачевский. Ничего не говорится о П. Л. Чебышеве и его школе; жаль, что авторы обходят молчанием работы Е. И. Золотарева — они пишут о двух способах построения арифметики в полях алгебраических чисел, принадлежащих Р. Дедекинду и Л. Кронекеру, и даже не упоминают о третьем способе, предложенном Е. И. Золотаревым, в котором развивались столь важные сейчас локальные методы. И это — несмотря на то, что работы замечательного русского математика были опубликованы на французском языке одновременно с исследованиями Дедекинда и до публикаций Кронекера.

В списках дополнительной литературы мы приводим ряд статей и книг, которые помогут читателю восполнить этот пробел.

Мы надеемся, что читателям — а ими могут быть студенты университетов или педагогических институтов, преподаватели, специалисты — математики или физики и просто любители математики — предлагаемая книга доставит большое удовольствие. Она написана живо и эмоционально, будит воображение и помогает уяснить генезис многих основных понятий и методов.

Приношу искреннюю благодарность проф. Б. А. Розенфельду, который прочел перевод гл. 4, посвященной геометрии, и сделал ряд очень ценных замечаний.

И. Башмакова

ПРЕДИСЛОВИЕ

Слово «история» можно толковать по меньшей мере двумя способами. С одной стороны, это хронологическое изложение того, что происходило в той или иной сфере человеческой деятельности (например, в деятельности людей, называемых «математиками»). С другой стороны, это генезис: формирование, существование и преобразование самого того объекта, которого эта деятельность касается. «С одной стороны», «с другой стороны»... Лишь только эти выражения написаны, как они уже не верны. Без строгого воссоздания трудов в соответствии с ходом времени нельзя надеяться понять моменты генезиса. И наоборот, это воссоздание бессмысленно, если оно не направлено на знание и понимание способа формирования самого объекта, существующего исторически — в данном случае математики.

Авторам этой книги удалось отыскать оба конца этой цепочки. Изложение истории математики, написанное Ами Даан-Дальмедико и Жанной Пейффер, обладает тремя важными достоинствами. Во-первых, оно верно — потому что опирается на первоисточники. Во-вторых, оно конкретно — потому что в нем учитывалась специфика трудов, тем и эпох. И, наконец, оно многое проясняет — потому что в нем стала осязаемой связь идей и возникновение проблем. Авторы не могли сказать все — исчерпывающая история невозможна; поэтому надо было выбрать определенные темы, выделить теоретические области, отметить важные и плодотворные исторические моменты. Выбор авторов обоснован и поучителен, как с познавательной, так и с педагогической точки зрения. Хочется пожелать, чтобы как можно больше изучающих математику (и тех, кто уже усвоили ее начала) внимательно прочитали эту книгу. Они узнáют, что математика тоже имеет свою память и что, как и во всякой памяти, в ней есть закоулки и тайники, которые очень важно обнаружить и осветить. Зачем их освещать? Какая от этого польза? Разве «изучить математику» означает снова пройти по всем путям прошлого, заново пережить все их крутые повороты, снова встретиться лицом к лицу со всеми ныне решенными и потерявшими актуальность проблемами? Нет, конечно, не со всеми. Да и кто мог бы это сделать? Но с некоторыми — да. И притом обязательно. Кто забывает свое прошлое, становится чужаком своему настоящему, вплоть до того, что перестает понимать то, что он в нем делает.

Математика не выходит готовой из головы преподавателя, который пишет формулы на доске. Она не содержится в готовом виде в научном труде, таком законченном и упорядоченном. Вовсе нет. Ее теперешнее установившееся состояние, в котором она находится, когда мы приступаем к ее изучению, всего лишь одна из форм равновесия, ценная сегодня, но преходящая, как и все ей предшествующие, чьи следы она сохранила. Научиться отыскивать эти следы — значит разбудить свою память. Наименьший выигрыш, который мы при этом получим — немного юмора. Мы узнаем, какого труда стоил малейший «ослиный мостик». Но выигрыш будет гораздо серьезнее — мы достигнем большего понимания; совсем иной ясности, чем та, которая рождается при строгом следовании готовым методам; ведь она касается причин, потребовавших создания самих этих методов. «Почему математика?» — возникает вопрос. И еще: «Для чего?» Подобная книга показывает, как «делается» математика, каким образом она рождалась, сколь разными были математические работы, продвигавшие ее вперед, и каким требованиям, внутренним и внешним, эти работы должны были подчиняться. И это дает возможность ответить на вопросы: «Почему?» и «Для чего?»

Жан-Туссен Дезанти

К ЧИТАТЕЛЮ

В этой книге по истории математики отразилось наше отношение к самой математике, окрашенное доверием и любовью, а также сомнениями и критическим духом.

Умение с ловкостью оперировать символами и формулами, легко ориентироваться в мире абстрактных объектов, ставших «прирученными», разбираться в теоретических построениях и управляющих ими законах и правилах, позволяющих найти решение задачи,— вот поистине интеллектуальное удовольствие.

Открыть для себя в ходе изучения высшей математики, что эта наука ни в коей мере не является суммой разрозненных результатов, а организована в глобальные и глубокие теории, весьма увлекательно.

К сожалению, обучение математике во Франции часто ограничено застывшими и непоколебимыми теориями, а «упражнения» представляют собой лишь искусственно построенные примеры для подтверждения правильного функционирования теорий.

Это сухое изложение, выдвигающее на передний план математический формализм и затемняющее конкретные проблемы, трудности, аналогии между различными ситуациями и т. д., при котором теоретические обобщения становятся самоцелью, вызвало в нас некоторое отчуждение по отношению к математике. Подобная реакция была составной частью общих поисков роли и влияния науки в обществе, характерных для 70-х гг. нашего столетия.

В поисках выхода из тупика мы обратились к истории: оказалось, что она прекрасно помогает восстановить захватывающую культурную атмосферу математики, часто скрытую за скучной техничностью ее выкладок.

При изучении оригинальных текстов и общих математических трудов — того, что представляет собой сумму знаний, исторически накопленных в этой области,— мы обнаружили сложные и разнообразные переплетения предположений, загадок, тупиков, параллельных путей, интуитивных прозрений, а также стремление к аксиоматизации и синтезу. Цель этой книги — включиться в круговращение этих знаний, взяв за основу избранные нами темы. Если наши скромные усилия помогут ввести читателя в круг вопросов, изучаемых и распространяемых современной наукой, оценить ее историю, чтобы она предстала живой и актуальной — значит, книга написана не напрасно.

Наш выбор пал на историю формирования понятий, что дает возможность проследить развитие внутренних идей математики. В первой главе, слишком краткой и потому схематичной, мы пытаемся, тем не менее, установить связи с условиями развития западной цивилизации. Вместе со второй главой, в которой намечено зарождение рациональной науки в Греции, она подчеркивает избранную нами позицию.

Мы уделили важное место развитию арабской математики, которая часто оставалась за рамками рассмотрения, но не смогли охватить в своем повествовании китайскую и индийскую математику, чьи пути развития проходили вдали от западной науки.

Необозримость всей математики в полном объеме, а также ограничения издательского характера заставили нас остановиться на нескольких понятиях, с одной стороны, сравнительно доступных, и, с другой,— достаточно важных, поскольку именно они определяют развитие фундаментальных дисциплин (анализа, алгебры и геометрии) и позволяют сделать некоторые замечания о тех аспектах, которые не охвачены в этой книге [1]).

Невозможно проследить за развитием математических идей, оставляя в стороне технические вопросы, поэтому мы были вынуждены привести (часто в виде вставок-таблиц) примеры, знакомящие читателя с математическим формализмом. Подобное столкновение с математичес-

[1]) По вопросам развития математики последних лет, которые требуют от читателя более высокого математического уровня, мы рекомендуем книгу «Abrégé d'histoire des mathématiques» («Краткая история математики»), коллективный труд под редакцией Ж. Дьедонне.

кой практикой, быть может, пробудит любознательность и интерес у непосвященного читателя.

Во Франции мало доступных изданий древних научных текстов. Так, если еще возможно раздобыть карманное двуязычное франко-американское издание «Геометрии» Декарта, французское издание недоступно. Поэтому в конце каждой главы мы указали лишь те оригинальные работы, которые легко достать на французском языке. Ни в коей мере наши библиографические ссылки не претендуют на полноту. Мы сочли своим долгом также указать те работы по истории науки, порой вышедшие совсем недавно, которыми мы особенно руководствовались. Конечно, мы не можем указать все разнообразные источники — семинары, дискуссии, рефераты — которые нас питали и стимулировали, и поблагодарить их участников. Но все же мы выражаем глубокую признательность Р. Татону, который приобщил нас обеих к истории математики.

Мы благодарны Ж.-Т. Дезанти, который пробудил в нас интерес к исследованиям и любезно согласился написать предисловие к этой книге. Мы признательны Р. Рашеду, предоставившему нам все свои изыскания в области арабской математики и уделившему время для их обсуждения с нами. Мы также искренне благодарны Ф. де Гандту, прочитавшему главу, посвященную Греции.

Париж, декабрь 1981 г.

Ами Даан-Дальмедико,
Жанна Пейффер

Глава 1

ПАНОРАМА

1. Первые древние цивилизации

Первыми древними цивилизациями, от которых до нас дошли источники, позволяющие судить об их математических познаниях, были вавилонская и египетская.

Вавилонская цивилизация охватывает целую группу народов, живших в Месопотамии начиная с третьего тысячелетия до н. э. Их главным культурным центром был Вавилон. В результате археологических раскопок, начатых в XIX в., было обнаружено несколько сотен глиняных табличек с нанесенными тонкой палочкой клиновидными надписями, по-видимому обожженных и потому хорошо сохранившихся. Около трехсот из них относятся к математике и датируются либо временем первой вавилонской династии (с 1894 по 1595 г. до н. э.), в которой наиболее знаменитым было царствие Хаммурапи, либо так называемым эллинистическим периодом между 600 г. до н. э. и 300 г. н. э. от халдейской династии до государства Селевкидов.

Исследователи О. Нейгебауэр и Тюро-Данжен дали первые переводы надписей на табличках, что позволило по-настоящему оценить уровень знаний вавилонян, а затем Бройнс и Руттен опубликовали и исследовали обнаруженные позднее *Математические тексты Суз*.

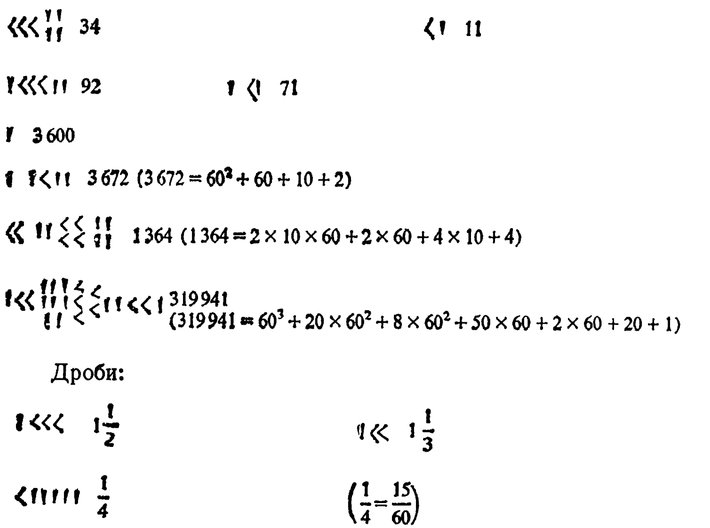
На табличках встречаются ряды чисел, геометрические соотношения и задачи. Поскольку мы будем говорить о вавилонской «алгебре» в другом месте (см. гл. 3), остановимся здесь на элементах вавилонской арифметики.

Вавилонская система счисления является комбинацией шестидесятеричной и десятичной систем с применением позиционного принципа; в ней используются всего два разных символа: один обозначает единицу, второй — число 10; все числа записываются при помощи этих двух символов с учетом позиционного принципа.

В самых древних текстах (около 1700 г. до н. э.) не встречается никакого символа для обозначения нуля; таким образом, численное значение, которое придавалось символу, зависело от условий задачи, и один и тот же символ мог обозначать 1, 60, 3600 или даже 1/60, 1/3600, ... (см. табл. 1).

1. Система счисления вавилонян

Примеры чисел:



Умножение выполняли, обращаясь к таблицам умножения, первоначально составленным, без сомнения, при помощи последовательных сложений, а использование таблиц обратных величин позволяло заменить деление умножением. Наконец, поскольку у 60 много делителей, преимущество позиционного принципа вавилонян по сравнению, например, с системой египтян проявлялось при записи дробей. Они имели возможность представить 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/12, 1/15, 1/20, 1/30; таким образом, вавилонский писец мог записать $1^{1}/_{2}$, т. е. $1+{}^{30}/_{60}$, в виде '<<<. Однако вавилоняне исключали обратные для чисел, которые не являются произведением простых делителей числа 60 и не записываются в виде $2^p\ 3^q\ 5^m$ (где p, q, m — целые), потому что обратные для них не имеют конечного разложения по основанию 60.

Математические познания вавилонян применялись при денежном и товарном обмене, в задачах на простые и сложные проценты, при вычислении налогов и распределении урожая. Большинство встречающихся на клинописных табличках задач можно отнести к разряду хозяйственных.

Расцвет египетской цивилизации — двух царств Верхнего и Нижнего Египта — начался во время III династии фараонов (около 2500 г. до н. э.), когда строились пирамиды, и продолжался без каких бы то ни было внешних влияний до самого завоевания Египта Александром Македонским в 332 г. до н. э.

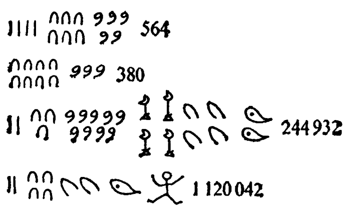
Египтяне пользовались двумя системами письма. Одна — *иероглифическая* — встречается на памятниках и могильных плитах; она пиктографическая: каждый символ изображает какой-нибудь предмет. В другой системе — *иератической* — использовались условные знаки, которые произошли из иероглифов в результате упрощений и стилизаций. Именно эта система, лучше приспособленная для письма от руки, чаще встречается на папирусах, которые являются основным источником сведений о египетской математике. Самые известные среди таких папирусов — *папирус Ринда*, который хранится в Британском музее и представляет собой своего рода учебник для начинающих, в котором собраны 85 задач, записанных писцом Ахмесом около 1650 г. до н. э., и *Московский папирус*, очень схожий с папирусом Ринда, а также *Кожаный свиток египетской математики*, с большим трудом распрямленный в 1927 г. и проливший свет особенно на египетскую арифметику.

Иероглифическая система счисления имеет основание 10 и не является позиционной: для обозначения чисел 1, 10, 100 и т. д. в ней используются разные символы, каждый символ повторяется определенное число раз, и, чтобы прочитать число, нужно просуммировать значения всех символов, входящих в его запись. Таким образом, их порядок не играет роли, и они записываются либо горизонтально, либо вертикально.

Иератическая система счисления также десятичная, но специальные дополнительные символы помогают избежать повторения, принятого в иероглифической системе (см. табл. 2).

2. Иероглифическая система записи целых чисел у египтян

Примеры:



Кроме целых чисел египтяне знали лишь аликвотные дроби (т. е. дроби с числителем 1). В обеих системах счисления над символом, обозначающим знаменатель, ставился специальный знак. Кроме того, дробь 2/3 занимала, по-видимому, особое положение и обозначалась отдельным символом.

В основе арифметики лежало несколько правил:

возможность умножать и делить целое число на два, что позволяло затем выполнять умножение с помощью последовательных сложений;

возможность находить 2/3 от любой аликвотной дроби по правилу

$$\frac{2}{3}\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n},$$

которое в случае четного знаменателя несколько упрощалось:

$$\frac{2}{3}\frac{1}{n}=\frac{1}{n+\frac{n}{2}}.$$

Наконец, отказавшись от признания иных дробей, кроме аликвотных, они вынуждены были разлагать выражения вида $2/n$ в сумму дробей с числителем 1, например $2/5=1/3+1/15$. Но, поскольку подобные вычисления достаточно сложны, они обращались к раз и навсегда составленной таблице. Так, в начале папируса Ринда приводится список разложений для $2/n$ для значений от $n=5$ до $n=101$ (см. табл. 3).

3. Папирус Ринда

В папирусе Ринда встречается равенство

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}.$$

Как Ахмес мог его получить?

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{13}+\frac{1}{13}=\frac{1}{26}+\frac{1}{26}+\frac{1}{13}=$$
$$=\frac{1}{52}+\frac{1}{52}+\frac{1}{26}+\frac{1}{13}=\frac{1}{104}+\frac{1}{104}+\frac{1}{52}+\frac{1}{26}+\frac{1}{13}=$$
$$=\frac{1}{104}+\frac{1}{52}+\left[\frac{1}{104}+\frac{1}{26}+\frac{1}{13}\right]=\frac{1}{104}+\frac{1}{52}+\frac{1}{8}.$$

Когда «раздвоение» оказывалось неэффективным, применялось разбиение на три части.

Отметим, что современные обозначения, которые помогают легко понять процесс получения результата, без сомнения, не отражают реальный ход действий, которые применяли египтяне.

Какой бы медленной и примитивной ни показалась нам эта система счета, она не требовала усилий памяти; писцы очень ловко производили самые сложные действия с аликвотными дробями.

Это, несомненно, связано с тем, что при социальном строе государства фараонов в ведении писцов находилась огромная хозяйственная бухгалтерия по учету производства и распределения ресурсов, пищевых запасов и других вещей. Египетская математика носила очень конкретный характер; в гл. 3 и 4 мы остановимся на их «алгебре» и геометрии.

2. Греция

Самая важная роль в развитии западной математики принадлежит античной греческой цивилизации. Ей мы посвящаем целую главу (гл. 2), а здесь ограничимся определением ее места в истории и кратким описанием принятого в Греции способа вычислений.

Эллины как народ сложились в результате двух вторжений индоевропейских завоевателей. Около 2000 г. до н. э. на полуострове Пелопоннес обосновались ахейцы — о них мы можем судить по деяниям и подвигам полулегендарных героев Гомера. В конце VII в. до н. э. вторжение дорийцев вызвало новое переселение народов. Оно затронуло западное побережье Малой Азии (Ионию) и острова Эгейского моря.

После окончания периода завоеваний и колонизации Средиземноморского побережья на заре XIII в. до н. э. сложилась новая политическая организация — образовались полисы — автономные города-государства, из которых состояла Греция. К VI в. до н. э. главным греческим городом был Милет (в Ионии). Затем главенство перешло к Спарте и Афинам. После завоеваний Александра Македонского (с 334 по 327 г. до н. э.) могущество Афин пошатнулось, и столицей греческого мира стала Александрия (Египет). Смерть царицы Клеопатры (в 30 г. до н. э.) положила конец этой блестящей цивилизации: Египет полностью перешел под контроль римлян (Македония и Греция были завоеваны римлянами еще в 146 г. до н. э.). Однако Александрия оставалась хранительницей греческих традиций вплоть до своего падения под натиском мусульман в 640 г.

При изучении греческой математики возникает вопрос об источниках. Помимо нескольких фрагментов александрийских папирусов мы не располагаем оригинальными манускриптами. Греческие тексты дошли до нас в виде списков со списков, аутентичность которых не гарантирована, а также в виде комментариев, составленных через 500—1500 лет после появления оригиналов, арабских переводов и латинских вариантов [1]). Один из комментариев, составленный Проклом к книге I «Начал» Евклида, по-видимому, воспроизводит несколько фрагментов из истории математики, написанной в IV в. до н. э. Евдемом, учеником Аристотеля, и утерян-

[1]) Однако значительная редакторская работа была все-таки проделана, и мы можем почти не сомневаться, что дошедшие до нас тексты соответствуют оригиналам.

ной. Это единственное свидетельство о доевклидовой (т. е. более ранней, чем III в. до н. э.) математике, которым мы располагаем [1]).

В Греции VI в. до н. э. происходит расцвет позитивной науки, уже не являвшейся просто собранием эмпирических результатов, как это было в предшествующих цивилизациях. Находясь в постоянном контакте с народами Востока, Вавилонией и Египтом, греки не довольствовались усвоением их знаний; они создали абстрактную и дедуктивную математику. Греки были прежде всего геометрами.

Основателем греческой геометрии Евдем называл Фалеса Милетского и говорил о Пифагоре, что он преобразил философию (т. е. геометрию) в свободное учение, доступное каждому. Классический период (600—300 гг. до н. э.) известен нам благодаря обобщающим изложениям трудов великих геометров, Евклида и Аполлония. По-видимому, период спорадических открытий сменила эра систематических исследований. Они привели к изложению основ геометрии, в котором прежние результаты логически сгруппированы и к ним добавлены новые оригинальные исследования. Единственный дошедший до нас труд, «Начала» Евклида, был самым полным и самым завершенным как по своему методу, так и по форме.

Александрийская школа (от 300 г. до н. э. до 640 г. н. э.), возглавляемая такими авторитетами, как Архимед, Птолемей, Герон и Диофант, использовала достижения классического периода и расширила область греческой математики, распространяя свои исследования на механику, астрономию и тригонометрию и возвращаясь к более алгебраической традиции вавилонской математики.

Математические исследования и философские рассуждения были в Древней Греции тесно связаны между собой. Платон (427—347 гг. до н. э.) сделал необходимым условием для принятия в число своих учеников элементарное знакомство с геометрией — согласно легенде, при входе в его школу была надпись: «*Пусть никто не*

---

[1]) Мы располагаем также многочисленными свидетельствами, имеющимися в философских сочинениях Платона и Аристотеля (IV в. до н. э.).— *Прим. ред.*

знающий геометрии не входит сюда». Он подчеркивал воспитательную роль математики как подготовительной дисциплины, имеющей своей целью подвести ум к созерцанию сверхчувственных сущностей.

Его ученик и соперник Аристотель Стагирит (384—322 гг. до н. э.) также задается вопросом об источнике познания и о средствах приблизиться к эмпирической реальности (ощущения, «божественная способность», позволяющая переходить от ощущений к мышлению). Он систематизировал законы рассуждения в логике — организующем начале связной речи — и превратил ее в инструмент мышления, способный выработать свои собственные нормы и применить свои законы к природе. Он разработал всеобъемлющую теоретическую систему и сформировал единое мировоззрение, предлагающее качественные объяснения всей совокупности явлений природы (включая космологию, физику, теорию элементов). Это мировоззрение получило название натурфилософии.

Труды Аристотеля и поныне вдохновляют на философские раздумья; его влияние на западную мысль было самым сильным.

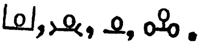
Греческая логистика

Древние греки различали *логистику* — искусство вычисления и *арифметику* — теорию чисел; греческая логистика была очень сложной. Надпись, датируемая 450 г. до н. э., свидетельствует об использовании в Афинах аттической системы счисления — аддитивной системы с основанием 10, включающей девять символов: I, II, III, IIII для первых четырех цифр, затем начальные буквы: Г от penta [1] (5), Δ от deka (10), H от hekaton (100), X от chilioi (1000) и M от myrioi (мириада, 10 000). Все остальные числа обозначались комбинациями этих девяти символов (см. табл. 4).

Постепенно аттическая система счисления была заменена ионической. Ее использование распространилось в Александрию (с III в. до н. э.). Это алфавитная десятичная система счисления, аддитивная, непозиционная,

---

[1]) Буква Г в аттических областях употреблялась для обозначения звука «п», а не «г».— *Прим. ред.*

образованная из 24 букв греческого алфавита (финикийского происхождения) плюс три других знака (см. табл. 4). В александрийских папирусах появился символ для нуля: .

Чтобы отличать числа от слов, греки обычно ставили над соответствующими буквами горизонтальную черту.

4. Греческая система счисления

a) Аттическая система:

ΓΙ = 6, 𐅄 = 50, 𐅇 = 5000, ΔΓ = 15, ΧΓ = 1005, ΧΧ𐅅ΗΔΓ = 2615.

b) В ионической системе использовались следующие символы:

α = 1	ι = 10	ρ = 100
β = 2	κ = 20	σ = 200
γ = 3	λ = 30	τ = 300
δ = 4	μ = 40	υ = 400
ε = 5	ν = 50	φ = 500
ϛ = 6	ξ = 60	χ = 600
ζ = 7	ο = 70	ψ = 700
η = 8	π = 80	ω = 800
θ = 9	ϟ = 90	ϡ = 900

В этой системе

$$\iota\alpha = 11,\quad \xi\theta = 69,\quad \rho\kappa\varepsilon = 125,$$
$$'\overline{\varepsilon\upsilon\pi} = 5480,\quad '\overline{\eta\omega\alpha} = 8801,\quad '\overline{\gamma o\theta} \text{ или } '\gamma\bar{o}o\theta = 3079.$$

$\overset{\gamma}{M} = 3$ мириады $= 30\,000$,

$\overset{\beta}{M}'\varepsilon = 2$ мириады $+\,5$ тысяч $= 25\,000$,

$'\varepsilon\upsilon\pi\delta M'\beta\rho\mu\eta = 54\,842\,148$,

$$L'' = \frac{1}{2},\quad \alpha L'' = 1\frac{1}{2},\quad \gamma L'' = 3\frac{1}{2}.$$

Диофант записывал дробь $\frac{13}{29}$ в виде $\frac{K\theta}{\iota\gamma}$; иногда она обозначалась $\iota\gamma' K\theta''$ или $\iota\gamma' K\theta'' K\theta''$, где числитель отмечен штрихом, а знаменатель — двумя штрихами. Иногда знаменатель совсем опускался.

$$\frac{\iota\gamma}{\rho\iota\zeta} \text{ означало } \frac{117}{13},\quad \frac{\tau\kappa\zeta}{\sigma\iota\theta} = \frac{219}{327}.$$

Девять кратных 1000 обозначались девятью первыми буквами со штрихом слева: $'\alpha=1000$, $'\delta=4000$ и т. д. Мириады обозначались символом М, над (или перед) которым помещалось число мириад. Чтобы выразить числа, большие 10 000, греки помещали слева от числа мириад символы от 1 до 9999.

Эта система с трудом позволяла запись дробей. Существовал специальный символ для 1/2. Как и египтяне, греки старались использовать лишь аликвотные дроби. Они помечали знаменатель штрихом справа: $\gamma'=$ 1/3, $\varkappa\varepsilon'=1/25$ или $20^1/_5$ в зависимости от контекста.

Делались попытки ввести другие обозначения для дробей, однако они не привились, пока Диофант (в начале нашей эры) не придумал обозначения, не вызывающие недоразумений. Он помещал знаменатель чуть выше

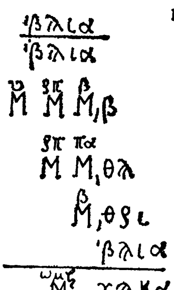
5. Пример умножения в греческой системе счисления

Греки располагали таблицей умножения до 9×9. Чтобы умножить $\lambda=30$ на $\sigma=200$, они действовали следующим образом:

λ читается как γ (= 3) десятков,
при этом γ — «основное число», а порядок величины равен десяти;
σ читается как β (= 2) сотен,
при этом основное число есть β, а порядок величины сотня;
произведение основных чисел равно ζ;
произведение десятков на сотни дает тысячи;
следовательно, результат равен $\zeta=6\,000$.

Можно себе представить сложность процедуры, если перемножались не такие простые числа!

Вот пример умножения, выполненного Евтокием в его комментарии к «Измерению круга» Архимеда:



мы записали бы все это так:

$$\begin{array}{r} \times\ \begin{array}{r}2911\\2911\end{array} \\ \hline \left\{\begin{array}{r}4\,000\,000\\1\,800\,000\\22\,000\end{array}\right. \\ 1\,800\,000 \\ \left\{\begin{array}{r}819\,900\\29\,110\end{array}\right. \\ 2\,911 \\ \hline 8\,473\,921\end{array}$$

числителя. Впрочем, александрийские астрономы отдавали предпочтение вавилонской системе записи дробей и применяли в своих расчетах шестидесятеричные дроби.

Поскольку письменный счет в греческой системе счисления был очень сложным (см. табл. 5), вычисления часто производили на *абаке* — счетной доске, на которой параллельные линии обозначали единицы, десятки, сотни и т. д. На них помещали число жетонов, соответствующее единицам, десяткам и т. д. рассматриваемого числа. Абак широко применялся римлянами, а позднее и на средневековом христианском Западе даже после введения десятичной позиционной системы счисления, которой мы пользуемся в наши дни.

3. Арабская цивилизация

Меньше чем через сто лет после смерти Магомета (в 632 г.) и падения Александрии (в 640 г.) объединенные им древние кочевые племена Аравии под предводительством его последователей — халифов завоевали обширные территории от Индии до Испании, включая Северную Африку и южную Италию.

Это продвижение остановилось только у границ Китая и всего дважды встретило серьезное сопротивление: в Константинополе в 717—718 г., где арабский флот был в конце концов отброшен византийцами, и в Пуатье в 732 г., где Карл Мартелл преградил дорогу арабскому наступлению. Образовалась огромная мусульманская империя со столицей Дамаск (в Сирии), но затем (в VIII в.) империя распалась на два независимых царства: Восточное и Западное.

В покоренных странах после недолгого периода религиозного фанатизма, сопровождавшего завоевание, первые арабские кочевники обнаружили цивилизацию и культуру, намного превосходящую по уровню их собственную. Они очень быстро усвоили обычаи, образ мысли, духовный строй, выработанные жителями этих стран в течение предыдущих веков. Проявив в целом дух терпимости и либерализма, они слились с местными сообществами и совместно с ними начали создавать собственную цивилизацию и культуру.

Таким образом, на огромном географическом пространстве с VII по XIII вв. развивалась арабская цивилизация. В 1236 г. Кордова, столица мусульманского Запада и центр арабо-андалузской цивилизации, была взята королем Кастилии Фердинандом III, а в 1258 г. под натиском монголов пал Багдад — величественная и влиятельная столица Востока. Но арабская наука процветала еще и в XIV в.: в южной Испании на западе (королевство Гренада) и в Северной Африке на востоке (государство мамлюков в Египте); ее очагами (не так долго) оставались еще Марагинская обсерватория и обсерватория Улугбека в Самарканде.

В мусульманских городах стала развиваться наука; некоторые из них превратились в настоящие очаги научного знания. Науку поддерживали меценаты, халифы заботились о ее подъеме. Они основали академии, построили обсерватории, посылали эмиссаров на розыски манускриптов, собирали библиотеки.

Говоря об арабской науке, мы имеем в виду научные труды, написанные на этом языке, надолго ставшем в этот период международным языком образованных людей и ученых. Любой труд, чтобы получить вес в науке, должен был быть написан на арабском языке. Все завоеванные народы — от греческих эрудитов, эмигрировавших в Персию от преследований христиан, до андалузцев и берберов, а также сирийцев, евреев, сабеев, турок, жителей центральной Азии или берегов Каспия — были вовлечены в единый поток исследований.

Арабский язык очень богат: для каждого понятия, каждого конкретного предмета в нем имеется большое разнообразие синонимов. Поэтому при переводе предшествующих научных трудов с греческого, древнесирийского или латыни возникли проблемы терминологии и идентификации понятий, которые способствовали концептуальному углублению знаний; в решении этих проблем приняли участие филологи и лингвисты.

В течение шести — восьми веков арабы стали хранителями мудрости и просветителями. Их ученые отличались неутомимой жаждой знаний и стремлением к энциклопедической образованности. Для арабского ученого характерны разносторонние интересы, и нередко он проявляет выдающиеся способности как философ, и математик, и астроном, и физик, и врач одновременно, а вдобавок еще как историк, географ и поэт. Таким образом, арабская наука неразрывно связана с философией; среди «ученых-философов», подобных которым мало знает современная западная цивилизация, упомянем ал-Кинди, названного «философом арабов» (первая половина IX в.), ал-Фараби (870—950) и двух величайших ученых ибн Сину (Авиценну) и ал-Бируни, живших в первой половине XI в.

Для объяснения явлений природы и строения Вселенной арабская философия все еще пользовалась более или менее модифицированной системой Аристотеля. Но, с одной стороны, толкование исламских религиозных положений оставалось достаточно широким и допускало сосуществование и столкновение различных философских и богословских теорий. Таким образом, хотя весь свод знаний был организован в основном по эллинистическому образцу, оставалось место для различных классификаций наук (ал-Фараби, ал-Бируни), важных в истории идей. Даже комментируя древних, философы переосмысливали их принципы и занимались переустройством науки. С другой стороны, конкретная деятельность ученых опрокидывала любые классификации и разбивала вдребезги любые попытки разделить науку на независимые дисциплины и оторвать теорию от ее приложений.

В структуре научной мысли арабов тоже отразилось наследие греческой культуры: великие авторитеты Александрийской школы — Евклид (математика), Птолемей (астрономия), Гален (медицина) — оставались учителями арабов. В математике труды Евклида, Архимеда, Аполлония, Герона, Диофанта и др. углубленно изучались, много раз переводились на арабский и комментировались, в том числе такими знаменитыми учеными, как Сабит ибн Корра. Эта очень важная работа вдохнула новую жизнь в эти труды.

Но арабы сумели также с пользой для себя усвоить достижения индийцев, и самое замечательное из них — десятичную позиционную систему счисления с нулем. Ее популяризировал в своих трактатах знаменитый ал-Хорезми, однако она долго оставалась словесной, наряду с двумя цифровыми системами восточных и западных арабов, появившимися в X в.

Упоминаемые арабские ученые и математики

Ал-Хорезми Абу Абдаллах (или Абу Джафар) Мухаммад ибн Муса (род. до 800 г., умер после 847). Жил в Багдаде. Теория квадратных уравнений. Теория десятичной системы.

Ал-Кинди. Арабский философ из Басры. Преподавал в Багдаде (первая половина IX в.).

Ал-Махани. Жил в Багдаде (род. около 860 г., умер около 880). Пример уравнения третьей степени.

Сабит ибн Корра ал-Харрани. Перевел «Начала» и другие работы. Жил в Багдаде. Математик. Астроном.

Ал-Рази (или **Разес**). Вторая половина IX в. (умер в 923 г.). Уроженец Рея (близ Тегерана). Жил в Багдаде. Великий врач. Алхимик и физик.

Ал-Фараби (870—950). Жил в Дамаске, Алеппо, Вагдаде. Философ и ученый-энциклопедист.

Абу-Камил Шуджа ибн Аслам (род. около 850 г., умер около 930). Жил в Каире. Продолжатель ал-Хорезми в области алгебры.

Ал-Уклидизи. Первое изложение десятичных дробей.

Ал-Хазен (умер между 961 и 971 гг.). Из Хорасана. Решил кубическое уравнение ал-Махани при помощи конических сечений. Работы, посвященные диофантовым уравнениям.

Абу-л-Вафа (ал-Бузджани). «Книга об арифметике, необходимой для писцов и торговцев» (около 970 г.). Тригонометрия.

Ал-Худжанди (умер в 1000 г.). Теорема синусов для сферических треугольников.

Ал-Бируни Абу Райхан (973—1050). Родился в Хорезме. Астроном, математик, географ, историк, физик.

Ибн Сина (латинизир. **Авиценна**) (980—1037). Родился около Бухары. Великий ученый-энциклопедист. Философ, астроном, физик и врач.

Ибн ал-Хайсам (латинизир. **Альгазен**) (род. в 965 г., умер около 1039 г. в Каире). Астроном, математик. Трактат по оптике. Самый знаменитый физик арабского мира.

Кушияр ибн Лаббан (около 1000 г.), выходец с юга Каспийского побережья, и **Ал-Насави** из Хорасана: математики.

Ал-Караджи (или **ал-Кархи**) Абу Бакр Мухаммад. Жил в Багдаде в конце X—начале XI вв. (умер между 1019 и 1029 гг.). «Достаточная книга о науке арифметике». Книга об алгебре «Ал-Фахри».

Ал-Заркали (вторая половина XI в.). Астроном из Кордовы.

Ал-Хайями (или **Омар Хайям**) (род. около 1048 г., умер в 1131?). Происходит из Нашпура. Математик, астроном, философ, поэт. Геометрическая теория кубических уравнений.

Ал-Хазен (работал в 1115—1130 гг.). Астрономия, механика, научные инструменты.

Ас-Самавал (умер в 1174 г.). Продолжал дело ал-Караджи. Трактат «Ал-Бахир». Десятичные дроби.

Ибн Баджжа (латинизир. **Авемпас**). Философ. Выступил с критикой системы Птолемея с аристотелевой точки зрения.

Ибн Зур (Авензоар). Великий врач.

Продолжение таблицы

Ибн Рушд (латинизир. **Аверроэс**) (1126—1198). Жил в Андалусии и Марокко. Философ, астроном, врач.

Шараф ад-Дин ат-Туси (работал в 1213—1214 гг.). Алгебраический трактат «Об уравнениях». Астрономия, математика.

Насир ад-Дин ат-Туси (род. в 1201 г. в Персии, умер в 1274 г. близ Багдада). Астроном, математик, логик, философ, поэт. Тригонометрия: «Трактат о полном четырехугольнике», «Арифметический сборник при помощи песка и таблицы». Руководил Марагинской обсерваторией (Иран).

Ибн ал-Банна (1256—1321, Марокко). Математик и астроном, автор «Талхиса».

Камал ад-Дин ал-Фаризи (умер в Тебризе в 1320 г.). Оптика, математика.

Ал-Каши Джамшид Гияс ад-Дин (род. в Кашане (Иран), умер в Самарканде в 1429 г.). Математик и астроном: «Ключ к арифметике» (1427), «Трактат об окружности» и «Трактат о хорде и синусе» (не найден).

Кази-заде ар-Руми. Астроном (обсерватория Улугбека в Самарканде).

Ал-Калазади. Математик из Северной Африки.

Особенно значительный вклад внесли арабские математики в области алгебры, которая благодаря им оформилась в самостоятельную дисциплину. Она была одновременно и теоретической наукой, и алгоритмической техникой, и искусством вычислений. Это заслуга таких выдающихся ученых, как ал-Караджи, ал-Хайями, ал-Каши и многих других (см. гл. 3).

В арабской науке появился экспериментальный метод; он зародился, в частности, в механике, и особенно в астрономии, где его применение привело к наиболее заметным успехам. Было написано множество трактатов об изготовлении инструментов (астролябий, квадрантов и т. п.). Величайший физик средневековья ал-Хайсам, называемый также Альгазеном (965—1039), сочетая геометрию с физикой, написал свой «Трактат об оптике» («Китаб ал маназир»), заложивший основы этой дисциплины и имевший определенное влияние вплоть до XVI в. Наконец, в больницах развивалась эмпирическая медицина.

Во всех науках арабы проявили большую заботу о наблюдениях, об описании (ботаника, зоология, химия, география, и т. д.) и о точных измерениях (астрономические таблицы).

В недрах арабской цивилизации зародилась по-настоящему оперативная наука.

Средневековому христианскому Западу, о котором сейчас пойдет речь, понадобилось несколько веков, чтобы усвоить это наследие и достичь подобного уровня.

4. Раннее христианское средневековье

В течение долгого времени на Западе был принят искаженный взгляд на историю развития науки: после греческого «чуда» — десять веков невежества, обскурантизма и забвения теоретических взлетов эллинской мысли — а затем их внезапное переоткрытие гуманистами Возрождения, которое и привело к возникновению современной науки.

Интеллектуальное и научное богатство арабской цивилизации уже доказывает несостоятельность такого взгляда. Кроме того, историки — специалисты по средним векам отказались ныне от мысли об однородности этого длительного отрезка истории, начавшегося падением Западной Римской империи в 476 г. и продолжавшегося до взятия Константинополя турками в 1453 г., который называется средневековьем.

На самом деле начало этого периода (VI—X вв.) почти соответствует этому мрачному описанию. После падения Рима в Европе началась эра экономического спада и политического хаоса. Это была эпоха многочисленных вторжений и мощных переселений, разрушивших естественное культурное развитие и культурные связи, на фоне которых обычно происходит интеллектуальная деятельность. Европа потеряла практически все связи с Восточной Римской империей.

Лишь у некоторых латинских авторов V и VI вв.— Боэция, Изодора Севильского или Беды Достопочтенного — встречаются отрывки математического содержания, основанные на текстах греческих неопифагорейцев (в частности, Никомаха Геразского) и посвященные в основном искусству счета и тайнам чисел.

Однако некоторые контакты между дворами мусульманских халифов и европейских правителей все же существовали: вспомним о подарках багдадского халифа Карлу Великому, а также о посольствах, отправленных в Кордову Карлом Лысым и Оттоном I (германским королем с 936 г., а позднее императором «Священной Римской империи»).

5. Начало проникновения арабской науки на Запад

Первым, кто старался изменить сложившуюся ситуацию, был Герберт (940—1003) — сначала воспитатель, затем советник императора Оттона III, а впоследствии папа Сильвестр II (с 999 г.). Герберт путешествовал в Испанию между 967 и 969 гг. и посетил там арабские школы. Там он познакомился с индо-арабской системой счисления. Во Франции в то время еще считали на пальцах или с помощью системы жетонов. Герберт построил счетную доску — *абак*, на которой он заменил в каждой полосе определенное число жетонов единственным жетоном с *аписом* — отметкой о числе замененных жетонов. Именно так он ввел в Европе в употребление арабские цифры. Метод *абацистов*, пропагандистом которого был Герберт, дает упрощения, аналогичные использованию нашей позиционной системы, по крайней мере для сложения и вычитания, тогда как умножение и особенно деление оставались еще очень сложными.

Постепенно в течение XI и XII вв. благодаря проникновению в Европу евреев был принят обычай производить действия по арабскому образцу, записывая их на песке или пыли. Абацистов сменили *алгоритмики*, которые использовали нуль и арабский метод деления и извлечения квадратного корня. Эти новые способы счета оказались одним из главных вкладов в дело интеллектуальной подготовки науки на Западе — особенно если вспомнить трудности греческой логистики.

Начиная с этого периода в привилегированном положении оказалась южная Италия: коренная латинская культура впитала наследие длительной византийской оккупации, а близость арабов, захвативших Сицилию, создавала прочные связи с их цивилизацией. Славилась Салернская школа, в основном ориентированная на медицину, лекции в ней читались на четырех языках: арабском, древнееврейском, латыни, греческом. Константин Африканский, бывший купец из Карфагена, принявший христианство, собрал манускрипты, чтобы отвезти их в Салерно; позднее он издал труды на латинском языке, оказавшиеся, как было установлено в наше время, переводами с арабского. Таким образом арабская наука начала проникать на Запад.

6. Всемогущество церкви

Для Европы XI и XII века были периодом пробуждения; цивилизация в ней упрочилась, общий демографический подъем привел к освоению новых земель и развитию городов. Хотя в своей массе общество оставалось феодальным, формировались группы независимых купцов, зарождалась промышленность, увеличивалось денежное обращение, наблюдался, правда пока еще медленный, подъем торговли.

Это была эпоха всемогущества церкви, ее монашеских орденов, которые стали первыми культурными центрами христианского Запада. Церковь возводила величественные соборы, открывала первые школы. Латынь, ее официальный язык, стал языком эрудитов, а вскоре и общеевропейским научным языком.

Но до 1100 г. христианская мысль, опираясь на авторитеты отцов церкви, среди которых наиболее известен Августин Блаженный (354—430), поддерживала атмосферу догматизма, мистицизма и рабского следования слову Священного писания.

Преобладали учения о грехе, аде, спасении, а исследования или наблюдения природы не находили места в программе, ориентированной почти исключительно на подготовку к потусторонней жизни.

В 1100 г. ситуация начала меняться. Появилось стремление к более разумному подходу к явлениям природы, предпочтение отдавалось объяснениям, основанным на естественных причинах, а не объяснениям моралистов в терминах божественных откровений. Возрос интерес к *квадривиуму* (арифметика, геометрия, астрономия, музыка), в то время как до этого только *тривиум* (грамматика, логика, риторика) всецело занимал ученых-схоластов.

Свои первые плоды этот подъем принес в Шартрской школе. Основанная в начале XI в. учеником Герберта епископом Фульбером, эта школа объединила в своих стенах ученых (Жильбер Поретанский, Тьерри Шартрский, Бернард Сильвестр), тяготевших к рационализму в описании природы. Это проявилось особенно в претенциозной механистической космогонии Тьерри Шартрского.

Но эти усилия были весьма скромными и остались незамеченными. В течение XII в. самые важные предвестия будущих перемен пришли с юга Европы, где пробивала себе дорогу арабская и через ее посредство греческая наука.

7. Век великих переводов

Начиная с XII в. европейцам, чтобы получить непосредственный доступ к арабской науке и воспользоваться ее достижениями, пришлось преодолевать языковый барьер, подобно тому как за несколько веков до этого арабы были вынуждены овладевать греческим языком и плодами греческой цивилизации. Век XII стал веком великих переводов.

Главные культурные пути для европейцев пролегали через Сицилию и Испанию. Говоря о южной Италии XI в., мы уже объясняли, почему Сицилия оказалась в привилегированном положении.

Одним из первых переводчиков был Аделард из Бата (1075—1160); уроженец и житель Англии, он путешествовал также в Иерусалим, Дамаск и Багдад. Он перевел на латинский язык астрономические таблицы ал-Хорезми, «Начала» Евклида (этот перевод послужил в следующем веке отправным пунктом для трудов Кампана Наваррского) и «Альмагест» Птолемея.

В Испании же в эту эпоху работали очень крупные ученые: ибн Рушд, иначе Аверроэс, философ, астроном и врач — последователь и комментатор Аристотеля (Аверроэсу суждено было оказать большое влияние на эволюцию схоластики); Маймонид, кордовский еврей-талмудист и философ, занимался также медициной, фармакологией и астрономией; ибн Зур, прозванный Авензоаром, один из крупнейших врачей со времен Галена. Испания стала самым крупным научным центром, куда приезжали в поисках арабских источников, чтобы найти дорогу к греческой науке.

Возникали настоящие школы перевода — например, в городе Толедо, находившемся несколько веков под властью арабов и павшем под натиском христиан. Переводы делались не с помощью словаря, а при сотрудничестве нескольких человек: еврея, переводившего с арабского на народный язык, и другого, обычно христианина, излагавшего первый перевод на латыни. Впрочем, евреи были иногда переводчиками, а иногда авторами оригинальных работ на арабском или на древнееврейском.

Назовем, к примеру, Пьера Альфонса (или Моисея Сефарди), которому покровительствовал Альфонс Арагонский и который был врачом Генриха I Английского; Иоанна Севильского, еврея, принявшего христианство; Савосорду (или Авраама бар Хийю из Барселоны), которому принадлежит важный труд на древнееврейском, предназначенный для распространения арабской науки в еврейских поселениях на юге Франции. В частности, Савосорда написал «Книгу об измерениях», переведенную на латынь в 1145 г. Платоном Тивольским. Это была первая книга на латыни, посвященная уравнениям второй степени; ею пользовался Леонардо Пизанский. Роберт из Честера осуществил популярный перевод «Алгебры» ал-Хорезми, и это событие послужило началом европейской алгебры.

Наконец, самым плодовитым и непревзойденным переводчиком был Герардо Кремонский, родившийся в Кремоне в 1114 г. и умерший в Толедо в 1187 г. Известны более 80 работ, переведенных Герардо Кремонским и его «компаньонами» из Толедо — ведь ему приходилось собирать большое число текстов, устанавливать их авторов, классифицировать, затем переписывать и т. д. Среди них большинство великих греческих классиков, переведенных с арабского: вариант «Начал», отредактированный Сабитом ибн Коррой, труды Архимеда, Аполлония, Менелая, Птолемея, Гиппократа, Галена, несколько трактатов Аристотеля («О Небе», «О возникновении и уничтожении», «Физика», первые три книги «Метеорологии») и т. д. Кроме того, были переведены труды великих арабских философов: ал-Кинди, ал-Фараби, «Канон» Авиценны, труды математиков, физиков и астрономов: ал-Хорезми, Сабита ибн Корры, ибн ал-Хайсама и др., врача ал-Рази и т. д.

Герардо Кремонский внес заметный вклад в подъем средневековой науки.

8. Эпоха Леонардо Пизанского (Италия, Испания)

В XIII в. восприятие арабской науки становится менее пассивным, начинается творческий подъем. Император Сицилии Фридрих II (1194—1250) поддерживал научную переписку с восточными правителями по разным проблемам геометрии, астрономии, оптики и философии. Он предавался странным и жестоким опытам, но также организовывал «турниры», во время которых ученые и философы ставили друг другу задачи. Среди них был крупнейший математик всего христианского средневековья Леонардо Пизанский, или Фибоначчи (род. около 1170 г., умер после 1250).

Уроженец Пизы, оживленного торгового города, молодой Леонардо уехал с отцом в Буджию (Алжир). Там он изучил арифметику и арабский язык в бакалейной лавке и приобрел вкус к математике. Занятия коммерцией и поиски манускриптов привели его в Египет, Сирию, Грецию, на Сицилию. По возвращении он написал в 1202 г. свой знаменитый труд «Книга абака», настоящую энциклопедию, которая вместе с «Практикой геометрии», написанной в 1220 г., приобщила итальянских ученых XIII в. к математике арабов и греков и проложила путь расцвету алгебры в Италии эпохи Возрождения.

В начале «Книги абака» приводятся девять индийских символов для чисел, а также знак нуля (zero), название которого происходит от zéphyrum, латинской формы «ас-сифр» (пустой). В книге рассматриваются всякого рода задачи хозяйственного и коммерческого характера, решение квадратных уравнений, неопределенных уравнений, вычисления с радикалами и т. д. «Книга абака» возникла под влиянием «Начал» Евклида, трудов Герона Александрийского, книг Савасорды, ал-Хорезми;

кроме того, вполне вероятно, что Леонардо Пизанский был знаком с трактатом ал-Караджи «Ал-Фахри» и работами арабской школы алгебраистов-арифметиков (см. гл. 3). Уровень «Книги абака» оказался слишком высоким для той эпохи, и она не изучалась в школах.

На Пиренейском полуострове, находившемся под сильным еврейско-арабским влиянием, продолжалось независимое от остальной Европы развитие науки, не затронутой схоластическими теориями. Были составлены для астрономических целей точные числовые таблицы, самые известные из которых — «Альфонсинские таблицы» — названы по имени Альфонса X (1221—1284), короля Кастилии с 1252 г. Они пользовались большой известностью вплоть до XVI в. В Испании и Провансе силами в основном врачей-евреев развивалась медицина.

9. Золотой век схоластики

Для остальной Европы, кроме ее южных районов, XIII в. был веком *схоластики*. Ныне это слово неизбежно вызывает представление о повторении, комментариях к уже высказанному, о формальных, абстрактных, полных условностей рассуждениях в противоположность духу творчества, оригинальных открытий и исследования самой природы вещей — всего того, что символизирует для нас науку. Этот весьма распространенный взгляд сложился под влиянием яростной критики, которой подвергли дух средневековья некоторые представители эпохи Возрождения, в частности Эразм Роттердамский.

Схоластикой называют особый тип философских и теологических рассуждений с ярко выраженными дидактическими устремлениями — схоласты часто объединяются в школы. Сочинениям схоластов свойственны такие интеллектуальные и литературные жанры, как *Комментарии*, *Диспуты*, *Суммы*.

Но схоластика связана также с организационной формой, в недрах которой она существовала: с университетом. Образование университетов (в Париже, Оксфорде, Монпелье, в Италии, несколько позже в Вене и т. д.) датируется началом века. Это было приметой развития городов и некоторого ослабления феодальной системы, поскольку университеты пользовались привилегиями, которые обеспечивали их независимость от гражданских властей.

Университет объединял специализированные факультеты: богословский, юридический, медицинский и факультет искусств, где изучались все остальные науки; последний был обязателен для всех, кто претендовал на богословскую степень. Окончание университета давало право на преподавание: именно там преподаватели работали, набирали себе учеников, и те приходили им на смену. Большим влиянием в университетах пользовались монашеские ордена. Подчиняясь не местным церковным властям, а непосредственно папской власти, они могли посылать своих членов из одного университета в другой невзирая на границы. Однако крупнейшие университеты долго сохраняли «специализацию» по орденам: Париж оставался вотчиной доминиканцев, в основном последователей Аристотеля и натуралистов; в Оксфорде обосновались францисканцы, приверженцы платонизма августинского толка и математики.

Что касается программы схоластов, она имела целью систематизировать открывшиеся свыше истины, освещать положения христианской веры, отстаивать ее — но пользоваться при этом рационалистическими принципами и средствами. Текстами, к которым применялись эти методы толкования, были Священное писание, четыре «Книги сентенций» (около 1150 г.) Петра Ломбардского — свод христианской догматики в том виде, как она понималась и обсуждалась церковью, и, наконец,— это было новое веяние XIII в.— мирские произведения Аристотеля с самыми известными комментариями к ним, как, например, Аверроэса.

Действительно, труды Аристотеля медленно и верно распространялись в латинских переводах и глубоко проникали в недра христианского мировоззрения. Происходило настоящее возрождение античной философии; впрочем, возникали и некоторые проблемы. Идеи Аристотеля и привлекали, и беспокоили. С одной стороны, они восхищали широтой взглядов, логической связностью всей системы, универсальностью объяснений. С другой стороны, эти языческие идеи во многом противоречили христианским догмам (вечность мира, влияние небесных явлений на земные события и т. п.) и не могли быть приняты.

В университете Парижа, ставшего духовной столицей христианства, церковные запреты на преподавание учения Аристотеля были сняты лишь в середине века, и в 1253 г. аристотелева натурфилософия была допущена на факультет искусств; однако богословский факультет остался хранителем ортодоксальности. Философия Аристотеля вдохнула свежую струю в физику, астрономию, физиологию и логику. Она вызвала пересмотр суммы знаний и исправление школьных учебников; из них постепенно были исключены аллегорические и мистические басни.

Однако это переоткрытие Аристотеля не всегда вызывало пробуждение научной мысли. Дилемма между натурфилософией и христианской верой решалась по-разному. Альберт Великий (1206—1280) пытался примирить эти системы взглядов. Это был прославленный просветитель, большой знаток греческой, латинской и арабской науки. Замечательный наблюдатель, лишенный рабского преклонения перед идеями Аристотеля, он стремился изучать природу ради нее самой, следуя принципу, что *«лишь опыт дает уверенность»*. Он тщательно описал фауну и флору Германии. Но ему не удалось выделить общий метод и систематизировать свои исследования.

Фома Аквинский подвел итог этим поискам синтеза аристотелизма и теологии в своих трудах «Сумма против язычников» и «Сумма теологии».

В Оксфорде Роберт Гроссетест (1175—1253), епископ Линкольнский и философ-натуралист, противопоставляет аристотелевым объяснениям необходимость сопоставления с фактами, а его ученик Роджер Бэкон (1214—1294) пошел дальше в этом направлении: его обширные знания, и в частности знакомство с трудами ал-Хайсама, подвели его к признанию первостепенной роли математики. Он заявил, что может объяснить любые явления свойствами линий, углов и простых геометрических фигур, а в своей космогонии ставил оптику над всеми дисциплинами, поскольку в ней основную роль играет свет.

Наконец, теории, изложенные в Аристотелевой «Физике», стали исходным пунктом исследований движения, изменения: Иордан Неморарий изучал рычаг и наклонные плоскости. Его теории принесли плоды лишь в следующем веке.

Таким образом, в конце XIII в. вновь зародилась мысль о необходимости конкретных наблюдений над реальным миром, были отмечены неправдоподобные выводы и заблуждения Аристотеля, но до настоящих достижений дело не дошло: появилось лишь несколько соблазнительных выдумок, но никаких действительно оригинальных исследований.

Позднее средневековье

Век XIV оказался более напряженным, чем предыдущий. К экономическим и политическим трудностям, вызванным Столетней войной, прибавились тяготы десятилетнего неурожая, и особенно бедствия Великой чумы (1347—1348), уничтожившей около трети европейского населения и жестоко ударившей по монашеским орденам.

Не видя другого выхода, народные массы обратились к мистике и суевериям. Пострадала и интеллектуальная элита, пришли в упадок университеты. Но все же критика общепринятых классических форм предыдущего века сделалась более отчетливой, появились некоторые оригинальные идеи.

В учении Аристотеля предпочтение отдается физике как дисциплине качественной и описательной, а математика остается на втором плане, поэтому для развития математики очень важна была эмансипация от аристотелизма, наметившаяся в научных школах Оксфорда и Парижа.

Теоретики этих школ, среди которых были Т. Брадвардин в Оксфорде, Жан Буридан и Николай Орем в Париже, стали приписывать математике роль посредника, необходимого при изучении явлений природы, так как она вводит в эти исследования количественные соображения.

Жан Буридан, ректор университета, создал целую теорию механики, получившую позже название «физика импетуса». Эта теория, хотя и находившаяся еще под влиянием Аристотеля и Авиценны, вызвала к жизни новые исследования. Вклад теоретиков «интенсивности форм» стал важным моментом в деле математизации законов природы; по этому поводу см. гл. 6.

В период позднего средневековья наука становится менее спекулятивной, в большей степени опирается на развитие техники и практической жизни. Это была эпоха первого огнестрельного оружия (1337 г.), кривошипных механизмов, усовершенствования двигателей (с живой тягой, гидравлических, ветряных) и техники перегонки, изобретения механических часов с гирями и т. д. Наконец, великие географические открытия еще больше расширили горизонты.

10. Эпоха Возрождения и новые научные стремления

В Италии начало XV в. характеризуется возросшими связями с восточными цивилизациями. В поисках союзников против турок Византия сблизилась с Западом, и в частности с Венецией. В те времена венецианские корабли бороздили моря и богатые купцы города дожей вели оживленную торговлю с портовыми городами Ближнего Востока. Они вкладывали средства в снаряжение экспедиций, отправлявшихся на поиски новых торговых путей, и стремились укрепить связи с другими цивилизациями. В силу своего географического положения Италия стала плацдармом походов на Восток, поэтому она сыграла особую роль в «возрождении» западной культуры. Отсюда новый подъем интеллектуальной деятельности распространился на другие европейские страны.

После падения Восточной Римской империи начался приток византийских ученых на Запад, открылся доступ к греческим вариантам древних текстов. Это вызвало пересмотр и стимулировало критическое изучение греческих трактатов и уже существовавших их переводов.

Параллельно с усвоением греческой науки зародилось движение за реформу научных методов. Николай Кузанский (1405—1464), немецкий мыслитель и деятель церкви, посвящавший часы досуга математике, сожалел по поводу неспособности схоластики «измерять»; его идея основывать всякое знание на измерении знаменовала начало развития современной науки.

Леонардо да Винчи (1452—1519), всеобъемлющая образованность и инженерный гений которого неизменно вызывают восхищение, считал главным средством познания наблюдение и под влиянием Николая Кузанского пытался выразить законы природы в виде количественных соотношений. Он с пренебрежением относился к книжной эрудиции и умозрительным построениям и, проявляя склонность к конкретным вещам и непосредственному действию, проповедовал эмпирический и интуитивный подход.

В то время как эти реформаторы науки ратовали за наблюдения над природой и требовали экспериментальных фактов, деятели практики — ремесленники, инженеры и художники — накапливали опыт, задавали себе вопросы о сущности явлений, с которыми они сталкивались, и постепенно приобрели богатые эмпирические познания. Это направление развивалось в XV в. под покровительством правителей.

Европа того времени была раздроблена на мелкие государства, потрясаемые бесконечными политическими переменами и нескончаемыми войнами. Их богатые и могущественные правители активно занимались гражданским и военным строительством. Они приглашали ко двору архитекторов и инженеров и поручали им решать возникавшие при этом технические проблемы. Зачастую неспособные понять архимедовы теории, касающиеся механики, гидростатики и т. д., эти практики вновь открывали полученные древними результаты в нужных им областях и добавляли к ним свои новшества.

Многогранные личности в силу возложенных на них разнообразных задач — проектирование военных укреплений, строительство мостов, планировка городов, изобретение военных машин и т. п.— они были к тому же художниками. Наблюдая природу и стремясь к ее верному воспроизведению, художники Чинквеченто выработали систему правил, позволявших изобразить реальное пространство на плоскости: правила перспективы. Главная роль в этом принадлежала Ф. Брунеллески, Л. Б. Альберти, Леонардо да Винчи, Пьеро делла Франческа. Альбрехт Дюрер изучил правила перспективы во время своего пребывания в Италии и ввел их в употребление в Германии, изложив основные принципы перспективы в своем знаменитом трактате «Наставление об измерении циркулем и линейкой» (1525).

11. Распространение новых идей в XVI в.

Распространение новых идей происходило, по-видимому, сравнительно медленно. Консервативные университеты держали монополию на преподавание и хранили верность схоластическим доктринам.

Ученый эпохи Возрождения всегда работал в одиночку, научного сообщества не существовало. Находясь на жаловании у какого-нибудь мецената, он должен был сохранять подвижность, чтобы в любой момент последовать призыву своих покровителей. Вынужденный продавать свои услуги правителям и постоянно опасаясь впасть в немилость, он ревниво оберегал свои открытия. Общение с другими учеными часто сводилось к соперничеству и вызову на соревнование.

Изобретение книгопечатания Гутенбергом в 1434 г. должно было бы ускорить распространение новых знаний, однако эти знания не всегда поддавались изложению в форме книги, да и изготовление книги стоило очень дорого. В самом начале книгопечатание с трудом могло противостоять могучей организации переписчиков, наладивших настоящую индустрию производства рукописей. Тем не менее печатная книга имела преимущества перед рукописной, и к концу XV в. производство книг увеличилось. С печатных станков одной лишь Венеции сходило больше книг, чем было пущено в обращение всеми переписчиками Европы.

Доступные лишь узкому кругу читателей, научные сочинения не попали в число первых печатных книг. Только в 1482 г. вышло первое печатное издание «Начал» Евклида в латинском переводе Кампана Наваррского, сделанном в XIII в. Труды Аполлония и Архимеда были напечатаны лишь в XVI в. Опубликованные на латыни, эти труды были доступны далеко не всем. Язык стал серьезным препятствием к быстрому распространению знаний, и позднее Пачоли, Галилей и Декарт сознательно писали свои работы на разговорных языках (итальянском, французском).

Наконец, форма греческих геометрических трактатов не соответствовала вкусу западных ученых, их интересам больше отвечали алгебра и арифметика арабов.

12. Первые успехи: арифметика и алгебра

Усиление контактов между государствами, развитие торговли и банковской системы — Венеция стала финансовым центром Европы — требовали простой в обращении и легкой в применении арифметики. Для обучения торговцев, банкиров, ремесленников и т. п. появились первые учебники. Большое влияние получила «Сумма» (1494 г.) Луки Пачоли, настоящая сумма математических знаний той эпохи. В ней была полностью воспроизведена «Книга абака» (1202 г.) Леонардо Пизанского. При дворах европейских владык (во Флоренции при дворе Медичи, в Риме при папском дворе и т. д.) стали создаваться публичные библиотеки.

Расцвет учебной литературы в Германии послужил началом создания настоящей алгебраической школы, которая сыграла заметную роль в установлении удобных символических обозначений.

Не менее активной была итальянская школа. Ее представители занялись проблемой разрешения уравнений третьей и четвертой степени и в конце концов, после эффектных взлетов и падений, подогреваемые духом соревнования и секретности, справились с ней (см. гл. 3).

За исключением этих успехов в алгебре, которая развивалась как продолжение арабской традиции, математическая наука почти не обогатилась в эпоху Возрождения [1]). Однако практические разработки художниками проекций подготовили почву для обновления геометрии. Вообще необходимость научных изысканий для решения технических задач, осознанная учеными-инженерами, создала благоприятные условия для небывалого подъема науки в XVII в. Решающую роль в этом сыграло ниспровержение Коперником и Кеплером древней космологии.

13. Реформа астрономии. Коперник

С тех пор как была заново открыта греческая наука, космологические теории Аристотеля и Птолемея, пополненные и видоизмененные достижениями арабской астроно-

---

[1]) Эти успехи, однако, имели огромное значение для становления европейской математики. Они показали, что «древние не все знали». — *Прим. ред.*

мии, были широко известны на Западе. Схоласты приняли астрономию Аристотеля и попытались получше приспособить ее к требованиям теологии. Более математическая теория Птолемея, которая рассматривалась просто как гипотеза, не обязательно описывающая действительность, служила в основном для конкретных нужд мореплавания, вычисления календаря и т. д.

Мятежные веяния, зародившиеся в эпоху Возрождения, были направлены против объединенного авторитета церкви и Аристотеля. Им способствовала критика католической доктрины некоторыми гуманистами, расхождения между данными наблюдений и схоластическими теориями, а также недовольство злоупотреблениями духовенства. Раскол церкви после протестанской реформы был принят с энтузиазмом как средство ослабить ее могущество. Протестантизм сумел привлечь на свою сторону многих деятелей Возрождения вниманием к личным взглядам и мнениям людей и отказом преклоняться перед авторитетом папы.

Обновление астрономии, которое влилось в это движение против Аристотеля и схоластики, было подготовлено новым переводом с греческого на латынь «Альмагеста» Птолемея, который сделали Георг Пурбах и его ученик Региомонтан. Это новое издание (1515 г.) вызвало в университетах многочисленные дискуссии о системе Птолемея. За ними были извлечены на свет доптолемеевы системы, а в 1543 г. появился труд Николая Коперника (1473—1543) «О вращениях небесных сфер». В нем была показана неточность системы Птолемея, согласно которой Земля занимает центральное место во Вселенной, и защищалась революционная по тем временам идея о движении Земли вокруг Солнца. Будучи каноником вармийским — членом капитула во Фромборке, Коперник долго не решался высказать свои мысли, а его рукопись 30 лет оставалась неопубликованной.

В системе Коперника центр Вселенной находится вблизи неподвижного Солнца, вокруг него расположены орбиты планет — материальные сферы, которые благодаря своей сферической форме вращаются вокруг центра земной орбиты, при этом вся система содержится внутри сферы неподвижных звезд.

Математическая техника Коперника не отличалась от техники Птолемея; превосходство его методов объяснялось в основном унификацией и систематизацией движений: он исходил исключительно из принципа равномерного движения по окружности, и длительность обращения планеты вокруг Солнца оказывалась тем больше, чем дальше она отстояла от Солнца.

При своем появлении учение Коперника, идущее вразрез с университетской традицией, нашло мало последователей. Оно было осуждено католической церковью, правда, только после того, как Джордано Бруно (1548—1600) вывел все следствия из гелиоцентризма и, «проломив» небесный свод, заменил его *бесконечной Вселенной*, состоящей из множества *миров*, подобных нашему. Схваченный инквизицией, он заплатил жизнью за свои дерзкие взгляды.

Осуждение церкви было не единственным препятствием для распространения учения Коперника. Астрономы выдвинули массу физических доводов, в силу которых движение Земли невозможно. Несоответствия между теорией и наблюдениями толкнули датского астронома Тихо Браге (1546—1601) на отказ от учения Коперника и поиски некоторого компромисса.

14. Законы Кеплера

Гораздо легче идея гелиоцентризма была воспринята в математически простой форме, приданной ей Иоганном Кеплером (1571—1630).

Кеплер родился в городке Вейль герцогства Вюртембергского; жизнь его была полна злоключений. Как протестант, он был изгнан из Граца, когда к власти в городе пришли католики. Он был принят при дворе Рудольфа II в Праге и служил ассистентом Тихо Браге, а после его смерти заменил его в должности придворного математика. Познания Кеплера в астрологии высоко ценились, и одной из его основных обязанностей стало составление гороскопа его королевского величества. Мать Кеплера была обвинена в колдовстве, и на возбужденном против нее процессе он взял на себя ее защиту. Он мало зарабатывал, постоянно испытывал материальные затруднения, но никогда не бросал своих научных исследований. Вся его жизнь — свидетельство о трудностях, которые порой выпадали на долю немецкого ученого того времени.

В системе Кеплера движение планет описывается простыми математическими законами, которые он установил эмпирическим путем, исходя из своих и Тихо Браге астрономических наблюдений.

Первый закон (сформулированный вместе со вторым в 1609 г. в «Новой астрономии») гласит: «*каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце*». Второй закон постулирует, что прямая, соединяющая планету с Солнцем, описывает равные площади в равные отрезки времени. Третий закон (появившийся в «Гармонии мира» в 1619 г.) гласит, что для всех планет отношение T^2/a^3 (где T — время полного оборота и a — большая полуось эллипса) постоянно.

Теория Кеплера пошла значительно дальше теории Коперника в своей переоценке привычных ценностей. Кеплер не довольствовался заменой одной системы движений по окружности другой подобной системой, но придал траекториям планет форму эллипса. Кроме того, он отказался от предположения о равномерном движении планет. Исчезли также материальные сферы, несущие планеты; однако пространство, содержащееся в сфере неподвижных звезд, оставалось конечным.

Наблюдения пизанца Галилео Галилея (1564—1642), выполненные им в 1609 и 1610 гг. при помощи телескопов собственного изготовления, подтвердили тезис гелиоцентризма. Галилей открыто признал гелиоцентрическую теорию и подвергся преследованиям инквизиции. В 1630 г. он написал свой знаменитый «Диалог о двух главнейших системах мира, птолемеевой и коперниковской». В нем три участника: сторонник теории Коперника Сальвиати (за ним скрывается сам Галилей), его друг Сагредо, занимающий нейтральную позицию, и Симпличо, защитник схоластики и аристотелизма. В 1633 г. Галилей предстал перед трибуналом инквизиции и под угрозой пыток был вынужден отречься от своих взглядов. До конца жизни он оставался под неусыпным надзором инквизиции в полной духовной изоляции.

Новые взгляды, которые несли теории Коперника и Кеплера, имели большое научное значение. Замкнутый иерархический мир, в котором у каждого тела имеется свое «естественное место», превратился в бесконечно протяженное пространство, в котором все места эквивалентны между собой. Человек перестал находиться в неподвижном центре Вселенной, вокруг которого вращается мир, а Земля стала одним из многих небесных тел.

Впервые ученые отказались от вековой традиции и религиозной доктрины в пользу теории, представляющей математические преимущества, хотя Коперник и Кеплер, люди глубоко религиозные, верили, что бог должен был отдать предпочтение простой математической теории. Это было приметой XVII в., вставшего на путь поиска закономерностей, допускающих выражение гармоничными математическими формулами.

15. Математизация науки в XVII в.

Теперь математика получила быстрое развитие: закончился длительный процесс совершенствования символической алгебры (Виет), возродилась теория чисел (Ферма), была создана теория вероятностей (Паскаль и Ферма), аналитическая геометрия (Декарт), исчисление бесконечно малых (Лейбниц, Ньютон). Этот бурный подъем расширил поле действия математики и направил поток ее кипучей энергии в другие науки. Математику начинают применять в разных разделах физики. Сам характер научной деятельности полностью изменился.

Рене Декарт (1596—1650) представлял себе мир как воплощенную геометрию и свою механистическую физику строил лишь на понятиях протяженности, формы и движения. Он был убежден, что силы, вызывающие движение, подчиняются неизменным математическим законам. Так как форма сводится к протяженности, то протяженность можно выразить в математических терминах, и потому мир (который есть не что иное, как протяженность и движение) можно математизировать.

Свои представления Декарт распространял на функционирование человеческого организма и рассматривал его как некий механизм, автомат.

Как и Декарт, Галилей считал, что в мире действуют простые и неизменные математические законы. Но он описал более ясно и полно свой новый экспериментальный метод и блестяще применил его в своих работах по изучению движения и свободного падения тел. Он полагал, что всякая наука должна строиться по образцу математики: ее результаты должны выводиться из аксиом дедуктивными рассуждениями.

В то время как для Декарта основополагающие принципы физики были чистыми построениями разума, Галилей полагал, что они должны основываться на опыте, экспериментальных фактах, наблюдениях. Он считал, что на смену качественному аристотелеву подходу должно прийти количественное описание явлений.

Первой наукой, к которой был применен новый метод, стала механика — были уточнены ее аксиомы, выявлены общие законы и т. д. Она послужила моделью, которую пытались применить для изучения других явлений, например оптических. Ньютон сумел ввести небесную механику в рамки общей механики, установив свой знаменитый закон всемирного тяготения (1686 г.).

16. Научная жизнь в XVII в.

Расширение научной деятельности в XVII в. в Европе (Англия, Франция, Германия, Голландия и Италия), развитие, хотя еще и несмелое, образования (в колледжах силами иезуитов и других религиозных орденов) сопровождалось ростом числа людей, так или иначе связанных с наукой.

Университеты оставались верны средневековой программе и не играли практически никакой роли в подъеме науки. Если некоторые из великих ученых-философов (Декарт, Паскаль, Лейбниц) и получили университетское образование, их всеобъемлющие познания были скорее плодом любознательности, которая заставила их путешествовать по европейским странам в поисках приключений, информации и новых знакомств. Так, Декарт провел в путешествиях 12 лет, посещал королевские дворы, служил простым солдатом в нескольких армиях, прежде чем поселиться в Голландии, которая привлекла его большей, чем в других странах, свободой слова.

Ученые — в XVII в. порой ученые-любители — оставались еще изолированными друг от друга, контакты были затруднены. Чтобы сообщить о своих результатах, они пускали в обращение несколько копий небольших сообщений, слишком коротких, чтобы стать печатной работой, или обменивались письмами, в которых излагали свои открытия в зашифрованном виде. Часто возникали ожесточенные споры, например известный спор о приоритете в изобретении исчисления бесконечно малых между Ньютоном и Лейбницем.

17. Создание академий наук и их роль

Основание научных обществ было вызвано желанием установить обмен научной информацией и упростить встречи людей с одинаковыми научными интересами. Первой академией, объединившей ученых, была «Академия рысей» (Academia dei Lincei), основанная в 1603 г. в Риме под покровительством князя Федерико Чези.

В Англии с начала века Френсис Бэкон (1561—1626) ратовал за научные контакты, и небольшие объединения ученых возникли в Кембридже, Оксфорде, а после 1645 г. в Грешам-Колледже в Лондоне. Последнее было официально учреждено в 1662 г. королевской хартией и получило название «Королевского общества».

В Париже отец Марен Мерсенн (1588—1648), монах ордена минимов, организовал научный кружок и благодаря своей обширной переписке и путешествиям создал целую сеть, по которой шел обмен сообщениями между учеными Франции и всего мира. Подобную же роль, хотя и в меньшем масштабе, сыграл первый секретарь Королевского общества Г. Ольденбург, который служил промежуточной «почтовой станцией» в контактах между Англией и континентом. Свой кружок Мерсенн назвал «Парижской академией» (Academia parisiensis); в него входили самые знаменитые ученые того времени (Роберваль, Этьен и Блез Паскали, Дезарг, Ферма и др.). В 1666 г. Кольбер основал Академию наук, официально назвав так группу, созданную Мерсенном.

Основание академий свидетельствует о зарождении сознательной политики европейских правительств по отношению к науке. Они приняли на себя финансирование научных исследований, исполняя роль, которую играли прежде богатые меценаты. Они предоставляли академиям средства для присуждения крупных премий победителям ежегодных конкурсов, привлекавших самых выдающихся ученых.

Парижская академия наук и Лондонское королевское общество в своих отношениях с государством предоставляют нам две возможные модели: в Англии роль государства ограничена, и наука лишена внимания правительства, во Франции государство, более богатое и могущественное, взяло на себя роль патрона наук и внесло большой вклад в укрепление престижа Академии.

Появляются Берлинская и Санкт-Петербургская академии наук, организованные по образцу Парижской, структура которой оказалась более эффективной. Берлинскую академию наук основал в 1700 г. Г. В. Лейбниц (1646—1716), а Санкт-Петербургскую — царь Петр I в 1724 г.[1]).

В течение всего XVIII в. число академий (провинциальных и общенациональных) постоянно увеличивалось, и они сыграли значительную роль в научной жизни эпохи Просвещения. Они поддерживали атмосферу соперничества, благоприятную для научных открытий, и облегчили обмен информацией, создав научные журналы, которые очень скоро сделались любимой трибуной ученых.

Государи пытались придать блеск своим академиям, привлекая в них знаменитейших ученых. Петр I обратил свой взор к Базелю, который стал подлинным «питомником» ученых, с тех пор как Иоганн и Яков Бернулли развернули там свою преподавательскую деятельность. Он пригласил Даниила и Николая Бернулли — сыновей Иоганна — на должность академиков в Санкт-Петербург. Там же два долгих периода своей жизни работал Леонард Эйлер.

Король Пруссии Фридрих II сразу после воцарения в 1740 г. пожелал превратить свою столицу Берлин в крупный научный центр; ему удалось привлечь к себе таких ученых, как Мопертюи, Эйлер, Лагранж, Ламберт и др.

---

[1]) Открытие Петербургской АН состоялось в 1725 г., вскоре после смерти Петра I.— *Прим. ред.*

18. Математика в XVIII в.

Математическая жизнь начала XVIII в. окрашена спорами между английской ньютоновской школой и континентальными школами, верными точке зрения Лейбница. Ревностные ученики Ньютона, английские математики отказывались принимать исчисление бесконечно малых в алгоритмической лейбницевой форме и оставались в стороне от прогресса, происходившего на континенте. Если в первой половине века столь блистательные ученые, как Муавр, Коутс, Тейлор, Стирлинг и др. еще сохраняли высокий уровень математических исследований, то во второй половине века английская школа быстро потеряла жизнеспособность. Она оставалась в изоляции вплоть до того момента, когда английский перевод «Трактата о дифференциальном и интегральном исчислении» Сильвестра Лакруа (1816 г.) дал ей новый импульс для исследований.

На континенте наблюдался расцвет математического анализа. Прочно уверовав в достижения прошлого века, в частности исчисление бесконечно малых, аналитики упорядочили более ранние результаты, дополнили их и применили во многих других областях математики. Как никогда прежде, математики черпали вдохновение в задачах физики, а теоретические размышления сочетались с экспериментальными исследованиями. Часто работы математиков были ориентированы на практические применения, и еще не существовало четкой грани между наукой и техникой. Решение задач механики и небесной механики (сильно математизированных областей) часто служило поводом для теоретических исследований и привело к созданию новых методов и средств, таких, как дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, вариационное исчисление, формальное исчисление рядов и т. д.

Характерной фигурой XVIII в. был Леонард Эйлер (1707—1783). Плодовитый ученый, наделенный необыкновенной работоспособностью, он применял свой творческий дар во всех отраслях знаний (оптика, механика, астрономия, статистика и т. д.). Член Санкт-Петербургской и Берлинской академий, он поддерживал постоянную переписку с видными учеными Европы (Клеро, Даламбером, Гольдбахом и др.). Он умел схватывать на лету намеки своих корреспондентов и развивать их в обширные теории. Гений обобщения, он собрал и упорядочил все работы и результаты, накопившиеся в области исчисления бесконечно малых, и написал труды, которые в течение целого века служили основными руководствами по анализу.

19. Расцвет французской школы в эпоху Революции

Во Франции в век Просвещения науке не было чуждо философское движение энциклопедистов. Расцвет французской науки следовал через поколение за подъемом литературы, и коллектив ученых того времени производит сильное впечатление (Лавуазье, Гей-Люссак, Бертолле и др.). Наука рассматривалась как фактор социального прогресса и широко распространялась. Даламбер в «Энциклопедии» пытался объяснить основные математические понятия и сделать их доступными для широкой публики.

Научная жизнь группировалась в основном вокруг Академии наук, и создание в конце века блестящей научной школы было отчасти заслугой правительства, которое заботилось о высоком престиже академиков, подвергая их все более суровому отбору. В результате сложилась очень ограниченная, но весьма авторитетная научная элита, взявшая под контроль издание математических трудов. В этот период появились великие, ставшие классическими трактаты: «Аналитическая механика» Лагранжа, «Небесная механика» Лапласа, «Начертательная геометрия» Монжа и др.

Несмотря на столь внушительное здание математики, в конце XVIII в. ощущался некоторый пессимизм. Некоторые математики, например Лагранж, испытывали сомнения относительно будущего своей науки — стоявшие перед ней задачи казались слишком сложными, приемы решения — слишком разбросанными, и не было общих методов, способных упростить поиски решений. Тем не менее труды Лагранжа богаты и разнообразны, и его вклад сравним с вкладом Эйлера. В частности, «Аналитическая механика» Лагранжа была шедевром чистой математики: вся механика в нем представлена в формализованном виде без единого рисунка. Кризис математизации оказался мимолетным.

В период Великой французской революции трое из шести самых выдающихся математиков Франции — Монж, Кондорсе и Карно — приняли активное участие в политических событиях и живо сочувствовали революционным идеалам. Трое других — Лагранж, Лаплас и Лежандр — осторожно выжидали стабилизации положения.

Например, Кондорсе (1743—1794), философ и энциклопедист, был избран в 1789 г. в Законодательное собрание, а затем в Конвент. Когда устаревшая система образования рухнула под напором революции, Кондорсе, одержимый идеями справедливости и демократии, увидел, что пришел подходящий момент, чтобы предложить свой проект реформы народного просвещения, которая предполагала, что образование будет бесплатным. Кондорсе прославился тем, что впервые применил теорию вероятностей и статистику к социальным явлениям.

Влияние революции на развитие математики проявилось особенно в области методов преподавания. Помимо реформы среднего образования, ставшего в результате более демократичным и более приспособленным для обучения наукам, Конвент создал в 1794 г. высшее учебное заведение — Нормальную школу III года (от начала революции). Она просуществовала несколько месяцев, и в ней преподавали многие крупные ученые, в том числе математики Лагранж, Лаплас и Монж.

Более важным событием стало основание в 1794 г. Политехнической школы, в котором активное участие принял Монж. Он стал одним из преподавателей и наставников для самых способных учеников. Политехническая школа более пятидесяти лет играла решающую роль во французской математике. В ней преподавали крупнейшие ученые: кроме Монжа и Лагранжа там работали Ампер, Пуассон, Фурье, Коши и др. Они должны были сочетать научную работу с преподаванием. Контингент студентов был очень высокого уровня, некоторые из них сразу начинали математические исследования. Кроме того, читаемые в школе лекции систематически публиковались. Позднее Ф. Клейн говорил об этих *«восхитительных трактатах»* (самым известным из них был «Курс анализа» О.-Л. Коши, опубликованный в 1821 г.), что они стали *«основой математического образования во всей Германии»* XIX в. Политехническая школа привлекала многочисленных иностранных студентов и ученых, поддерживая тем самым престиж французской математики в течение первой трети XIX в.

В 1808 г. французское правительство основало Высшую нормальную школу, задачей которой стала подготовка преподавателей. Затем был создан Факультет естественных наук, а позднее высшие специальные школы: горная, строительства мостов и дорог, кораблестроения, и это положило конец почти безраздельной монополии Политехнической школы.

Высокий научный авторитет Парижа привлекал всех знаменитых ученых, так что остальные французские города отошли на второй план. Главной фигурой этой эпохи был Огюстен-Луи Коши (1789—1857), который «царил» во французской математике около 35 лет. Он интересовался всеми разделами чистой и прикладной математики, но его главным достижением, несомненно, были работы в области анализа и создание теории функций комплексного переменного.

20. Новые условия работы математиков в XIX в.

Уже в эпоху французской революции ученые были профессионалами, члены Парижской академии наук служили в общественных комиссиях (комиссия по системе мер и весов, картографическое бюро и т. п.) либо занимались преподаванием. Однако по-настоящему условия, позволившие математикам профессионально заниматься своим делом, были созданы лишь в XIX в., когда увеличилось число преподавательских мест, что позволило ученым освободиться от материальных проблем и посвятить себя полностью своим исследованиям.

Растущая демократизация высшего образования открыла более широким социальным слоям доступ к математике. Многие могли последовать своему призванию. Наконец, промышленная и техническая революция второй половины века стимулировала интерес к математическим средствам и их совершенствованию.

Значительно возросло число исследователей и научных публикаций, быстро увеличилось количество теоретических результатов.

Главными математическими центрами оставались Франция, Германия и Англия, но вскоре к ним добавились Италия, Россия, Соединенные Штаты и в меньшей степени Норвегия (Абель и Софус Ли), Венгрия (Бойяи) и Чехословакия (Больцано). Хотя научные идеи универсальны и международные связи между учеными не ослабевают, наука в этот период развивается в основном на специфической национальной почве. В то время как Эйлер, Бернулли или Лагранж жили и работали во многих странах, математики XIX в. оставались на своей родине.

В Германии «королем математики» считался современник Коши — К. Ф. Гаусс (1777—1855) [1]. Гениальность и глубина его работ вызывают восхищение. Он работал в одиночку и мало публиковался при жизни. Ценность и широта его открытий полностью проявились лишь после посмертного опубликования его заметок и переписки.

В 1810 г. Александр фон Гумбольдт основал Берлинский университет и произвел реформу университетского образования. Он ввел правило, что профессор может обучать всему, чему пожелает, и, в частности, читать курсы, посвященные собственным исследованиям. В Кёнигсберге, например, Якоби занимался в своих лекциях исключительно задачами, над которыми он работал; он организовал первый семинар и пытался привлечь к занятиям в нем своих лучших студентов. Многие университеты славились знаменитыми математиками, вокруг которых «вращалась» вся их научная жизнь, и поддерживали плодотворный дух соперничества. В Кёнигсберге работал Якоби, в Берлине — Якоби, Дирихле (с 1844 по 1855 г.) и геометр Штейнер, в Гёттингене — вначале Гаусс, после его смерти Дирихле (с 1855 по 1859 г.) и Риман (с 1854 по 1866 г.), а в конце века Гильберт; про-

---

[1]) Гаусс считался «первым математиком» не только в Германии, но и во всем математическом мире.— *Прим. ред.*

славилась также вторая Берлинская школа (после 1860 г.) во главе с Куммером, Кронекером и Вейерштрассом. Заслуживает упоминания Гейдельберг, в котором преподавали Гессе и Гельмгольц, а также более мелкие центры, группировавшиеся вокруг одного ученого: Мёбиуса в Лейпциге, Плюккера в Бонне, фон Штаудта в Эрлангене и т. д.

Немецкая математическая школа начиная с 1850 г. превзошла французскую по числу своих ученых, активно действующих научных центров и публикаций. Одним из самых знаменитых математических журналов был *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, основанный в 1826 г. Крелле, а после его смерти руководимый Борхардтом [1]).

На смену эпохе писем и публичных ссор, а затем эпохе академий, пришел XIX в., ставший не только веком крупных школ и университетов, но и веком научных журналов. Их стало так много, особенно после 1860 г., что мы можем упомянуть лишь самые известные. Во Франции первым стал выходить *Journal de l'Ecole polytechnique* (1795), затем *Annales de Gergonne* (1810—1831), *Bulletin de Férussac* (1826—1831); в 1836 г. появился *Journal de mathématiques pures et appliquées*, основанный Лиувиллем и выходящий по сей день. С 1835 г. быстрое распространение новых результатов обеспечивалось еженедельными отчетами Парижской академии наук (*Comptes rendus hebdomadaires*).

Наконец, родились первые математические общества разных стран и стали публиковать свои бюллетени: Лондонское математическое общество (1865), Французское математическое общество (1872), Американское математическое общество (1888), Немецкое математическое общество (1890) и т. д. [2])

---

[1]) В XIX в. в России помимо отдельных крупных ученых, таких, как Н. И. Лобачевский и М. В. Остроградский, появляются первые *математические школы*, прежде всего Петербургская школа П. Л. Чебышева, знаменитая исследованиями по теории чисел, теории вероятностей и теории приближения функций. К этой школе принадлежали А. А. Марков, А. М. Ляпунов, Е. И. Золотарев и другие первоклассные ученые.— *Прим. ред.*

[2]) Добавим, что в 1864 г. организовался кружок математиков в Москве, который в 1866 г. получил статус Московского математичес-

Невозможно описать развитие всех многочисленных математических теорий, возникших в XIX в. Впервые оно не столь тесно, как раньше, связано с задачами механики и физики. Лишь гармонический анализ и спектральная теория частично отвечали нуждам физиков; происходит быстрое развитие математической физики. Но все другие мощные теории — порождения XIX в. — стимулировались внутренними потребностями самой математики.

Преподавание, которым занимались математики, было одной из причин их стремления к строгости и выяснению оснований, что, в частности, было характерно для анализа, который сильно расширился с введением комплексного переменного (Коши, Риман, Вейерштрасс) и созданием функционального анализа.

Геометрия активизировалась и радикально изменилась в связи с построением неевклидовых геометрий, что было важным событием с точки зрения последующего развития науки.

Наконец, после 1850 г. рамки алгебры были буквально взорваны во всех направлениях (теория групп, теория колец и полей, алгебраические кривые, линейная алгебра и т. д.), и алгебра заполонила все области математики, осуществляя между ними глубокую внутреннюю связь. Во Франции Галуа (1830 г.), а затем Жордан (1870 г.) были создателями теории групп. Английская школа после десятилетий изоляции снова заняла подобающее место и сделала важный вклад в алгебру (Кэли, Сильвестр, Гамильтон), как, впрочем, и математическую физику. В недрах немецкой школы выросла замечательная плеяда блестящих алгебраистов (Куммер, Кронекер, Дедекинд, Вебер и др.).

Математики XIX в. представляют собой переходный тип между энциклопедистами предыдущего века и узкими специалистами нашего времени. Их открытия охватывали обычно одну, две или три области математики.

Но в последнее десятилетие XIX в. двое великих ученых — Пуанкаре и Гильберт, чьи идеи оказали глубо-

---

кого общества. С 1865 г. выходит *Математический сборник* — журнал М. М. О.— *Прим. ред.*

чайшее влияние на всю науку XX в., проявили разносторонность, невиданную со времен Эйлера или Гаусса.

В 1900 г. Гильберт выказал необычайную интуицию и дар предвидения, изложив перед Вторым международным конгрессом математиков список из 23 проблем, которые, по его мнению, должны были определять ход развития математики XX в. И действительно, история этих знаменитых проблем Гильберта тесно переплелась с историей современной математики.

Глава 2

НАЧАЛО РАЦИОНАЛЬНОСТИ: ГРЕЦИЯ

1. Возникновение абстрактного мышления в ионийской школе

В VI в. до н. э. в греческих городах Малой Азии сложилась форма абстрактного мышления, ставшая основой всей западной науки. В богатом торговом городе, крупном центре духовной культуры Милете, широко открытом восточным влияниям, начали развиваться философия и дедуктивная наука.

Долгое время полагали, что рациональное мышление возникло внезапно из ничего и что «*тот путь, по которому с тех пор наука и идет, нашли ионийские философы*»[1]), но в недавних работах, в частности в трудах Вернана и Детьенна, на которые мы опираемся, были выявлены мифологические и ритуальные истоки этого способа мышления. Лишь постепенно мысль освобождалась от магии и религии. Зарождавшаяся греческая наука ставила вопрос о происхождении мира и отвечала на вопросы такого рода: как из хаоса могла образоваться наша Вселенная? Первые попытки милетских ученых ответить на подобные вопросы переносят в абстрактную плоскость объяснения чувственного мира, которые предлагались древней мифологией. Их описание Вселенной еще соответствует мифам: из неразберихи и путаницы, когда все вещи перемешаны, возникают пары противоположностей: горячее — холодное, сухое — мокрое, а затем противоположности в паре вступают во взаимодействие между собой, поочередно побеждая и терпя поражение.

Фалес (около 597 г. до н. э.), основоположник ионийской школы, создал космологическую теорию, объясняющую становление Вселенной из единственной первичной субстанции — воды, которая может превращаться

---

[1]) Burnet, L'Aurore de la philosophie grecque.

1. Хронологическая таблица математических школ Греции

Древнегреческая математика (600—300 гг. до н.э.)	Около 640—около 479 гг. до н.э.	Ионийская школа (в Милете): Фалес (640—546 гг. до н.э.), Анаксимандр (610—547 гг. до н.э.), Анаксимен (550—480 гг. до н.э.).
	Около 585—около 400 гг. до н.э.	Пифагорейская школа: Пифагор, Филолай (V в. до н.э.), Архит (428—347 гг. до н.э.).
	V в. до н.э. Мидийские войны (480 г. до н.э.)	Элеаты: Ксенофан из Колофона, Парменид (основатель), Зенон (род. между 495 и 480 гг. до н.э.), его ученик.
	Век Перикла (450 г. до н.э.)	Софисты (в Афинах, V в. до н.э.): Анаксагор Клазоменский (500—428 гг. до н.э.), Гиппий из Элиды (род. ок. 460 г. до н.э.), Гиппократ Хиосский (умер ок. 430 г. до н.э.).
	Пелопонесская война	Сократ (469—399 гг. до н.э.).
	V и IV вв. до н.э.	Атомисты: Демокрит из Абдеры (460—370 гг. до н.э.).
	388 г. до н.э.—529 г. н.э.	Платоновская Академия: Платон (427—347 гг. до н.э.); Менехм (350 г. до н.э.), Аристей (2-я пол. IV в. до н.э.).
	Около 408—около 355 гг. до н.э.	Евдокс и его школа в Кизике.
	334 г. до н.э.	Основание школы перипатетиков, или Лицея, Аристотелем (384—322 гг. до н.э.).
Математика эпохи эллинизма	315—255 гг. до н.э.	Евклид.
	Ок. 262 г. до н.э.	Аполлоний.
	323 г. до н.э.—640 г. н.э.	Александрийская школа: Архимед (287—212 г. до н.э.), Эратосфен (род. в 284 г. до н.э.), Зенодор, Гипсикл (II в. до н.э.),
	Юлий Цезарь (60 г. до н.э.)	Герон, Никомед, Диокл, Птолемей, Диофант (I—III вв. н.э.).
	Начало нашей эры	Папп (конец III в.), Теон и его дочь Ипатия, Прокл (V в.), Евтокий (конец V в. и начало VI в.).

во все остальное. Уплотняясь, вода образует твердые тела, испаряясь — воздух, а он в свою очередь порождает огонь. Но вода — не только элемент, из которого все строится, она и опора, носитель: наша Земля покоится на бесконечной массе воды и окружена ею со всех сторон.

Для Анаксимена (около 546 г. до н. э.) первичным элементом был воздух — вездесущий, менее материальный, чем вода, более абстрактный и бесформенный. Разрежение и уплотнение воздуха создают другие элементы, и эти процессы превращения объясняют историю создания мира.

Анаксимандр (610—547 гг. до н. э.), другой ученик Фалеса, за основу всех вещей принимал не материальный элемент, но ἄπειρον (апейрон) — нечто неопределенное, неограниченное, мыслимое как вместилище; все тела там перемешаны, и путем организации этого бесконечного хаоса возникают миры.

Ядро всех этих концепций остается мифологическим. Вернан увидел в них также отражение социальных условий города, которые в VI в. подвергались глубоким изменениям. Двумя веками раньше города-полисы управлялись крупными землевладельцами, и повседневная жизнь народных масс была очень тяжелой. Лишь около 600 г. до н. э. после ожесточенной борьбы между аристократией и ремесленниками произошли перемены, и население городов (демос) получило гражданские свободы и возможность участвовать в управлении. Одной из характерных черт греческого общества с древнейших времен был так называемый *агон*, соперничество, борьба, мирной формой которой были Олимпийские игры. Греки стремились к конфликтным ситуациям и к постоянному соперничеству; они искали противников, которые позволили бы им самоутвердиться и укрепиться в своих мнениях. Чтобы бросить вызов другим, они способны были защищать самые крайние положения. Тот же дух соперничества проявлялся в любви греков к состязаниям в красноречии — они оттачивали свое риторическое мастерство в спорах. Классическая греческая цивилизация — это «цивилизация словесная», при ней системы, дающие картину мира, уже нельзя описывать мифами — они и предстают как вопросы для обсуждения, сформулированные так, чтобы на них можно было дать положительный или отрицательный ответ. Об этом свидетельствуют рассуждения посредством альтернатив, или пар, встречающиеся у первых греческих мыслителей.

Ионийская космология в той законченной форме, которую ей придал Анаксимандр, — Земля, покрытая темными холодными водами, плавающая в центре объятой огнем небесной сферы,— имеет много общего с той политической моделью, которая лежит в основе организации города как однородного пространства вокруг особого центра, *агоры,*— места, где происходили народные собрания.

Таким образом, постепенный переход от мифа к науке отражает присущий грекам склад ума, дух «агона» и социально-политическую организацию, которая установилась в городах. Возникновение абстрактного мышления соответствует в политическом отношении установлению демократических принципов, а в социальном — периоду глубоких потрясений. Появилась интеллектуальная прослойка — врачи, ораторы и *философы* (любители мудрости, среди которых были по-настоящему знающие люди). Однако полученные знания не являлись исключительной собственностью этой прослойки, но посредством публичных дискуссий становились общим достоянием.

Предметы дискуссий, математические предложения — это уже не просто традиционные формулировки эмпирических фактов, а положения, требующие доказательства, которое приводит, исходя из одного или нескольких предложений, называемых посылками, к необходимому заключению.

2. Ионийская математика: Фалес

Первым представителем этой новой формы рационального мышления в математике был Фалес — государственный деятель, купец, инженер, астроном, философ и математик. Много путешествуя, он изучил элементы алгебры и геометрии египтян и вавилонян.

В геометрии ему приписывают несколько предложений. Вот первое из них: «*Диаметр делит круг пополам*». Специалист по истории греческой математики Хизс полагает, что на мысль об этом свойстве, доказательством которого он не располагал, его навели круги, разделенные на равные секторы (рис. 2.1), которые встречались на египетских памятниках.

Второе предложение: «*В равнобедренном треугольнике углы, противолежащие равным сторонам, подобны*». Согласно Хизсу, Фалес мыслил углы не как величины, а как фигуры, имеющие некоторую форму. Формы упомянутых в этой формулировке углов «подобны».

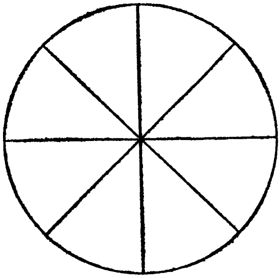


Рис. 2.1.

Фалес также указал, как измерять расстояние корабля от берега, и его малоизвестный способ основан на равенстве двух треугольников, у которых равны одна из сторон и два примыкающих к ней угла [1]).

Наконец, ему приписывают теорему, которая гласит, что «*угол, вписанный в полуокружность, является прямым*» [2]).

Ненадежность исторических свидетельств не позволяет, однако, оценить реальный вклад основателя греческой геометрии.

Древнегреческая математика развивалась последовательно, несколькими школами, каждая из которых использовала достижения своих предшественников. Так, ионийская школа мало-помалу теряла свое значение, и в конце концов ей на смену пришла пифагорейская школа.

3. Арифметическая концепция школы Пифагора

Пифагор, который родился на острове Самос вблизи Милета в первой половине VI в. до н. э., должно быть, был учеником Фалеса и его последователя Анаксимандра.

[1]) Кроме указанных выше теорем Прокл приписывает Фалесу теорему о равенстве противоположных углов, образованных пересечением двух прямых. Свидетельствам Прокла можно верить, так как он располагал «Историей геометрии» Евдема Родосского (IV в. до н. э.).— *Прим. ред.*

[2]) Это предложение у Прокла отсутствует. Сведения о нем передает Памфила — писательница эпохи Нерона.— *Прим. ред.*

После долгих путешествий, которые завели его в Египет и Вавилон, он обосновался в Кротоне — греческой колонии на юге Италии, которую в те времена раздирала нескончаемая политическая и экономическая борьба между народом и аристократией. Пифагор основал здесь братство религиозного, философского и научного характера с политическим уклоном. Пифагорейцы провозглашали борьбу против падения нравов, вызванного роскошью, в которой жили аристократы, и ратовали за суровый образ жизни, прославляя самообладание, смелость и коллективную дисциплину. Живя сообществом, приверженцы Пифагора совершали тайные обряды и занимались изучением философии и наук; у них было общее имущество, и свои научные открытия они делали общим достоянием. Труды, обычно приписываемые Пифагору, относятся, таким образом, не только к легендарному Пифагору, но вообще к трудам этой школы между 585 и 400 г. до н. э.

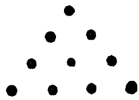
Распад Кротонского братства в результате народного восстания положил конец его политической деятельности, однако научная работа продолжалась даже после разобщения его членов еще в течение двух веков.

В своей космологической концепции Пифагор отказался от монистической идеи первичной субстанции, породившей всю Вселенную. Его концепция дуалистична, и в напряжении между двумя противоположными принципами — ограниченное — неограниченное, нечетное — четное, единое — множественное, прямое — кривое, квадратное — продолговатое — он видел причину всякого развития. Мало интересуясь материальными элементами, которые могли бы дать представление о генезисе различных составных частей Вселенной, Пифагор, увлеченный глубоким религиозным течением, охватившим Грецию того времени, стремился дать глобальную картину космоса в целом. Основу всего он видел в числе, о чем свидетельствует его девиз: *«Всё есть число»* (см. табл. 2).

Пифагорейцы, согласно Аристотелю, рассматривали числа как образующие элементы материи. Они отождествляли числа с совокупностями точек, образующих геометрические конфигурации, наподобие рисунка точками на песке или рисунка из камешков на земле, или даже «подобно звездам, составляющим созвездие». Бруншвиг увидел один из возможных истоков этой концепции в двух характеристиках небесных созвездий — числе светил, которые его образуют, и геометрической фигуре, которую они вырисовывают в небе,— и так выразил

2. Мистика чисел в школе Пифагора

Для мистика-пифагорейца Совокупность Чисел состояла из: **монады**, числа **один**, начала принципа тождества, **диады**, числа **два**, первого четного и женского числа, начала принципа непротиворечия, противостояния между мной и не-мной, **триады**, первого нечетного и мужского числа, и т. д. и **декады**, которая представляет собой сумму точек, содержащихся в *тетрактис*, или четверице,



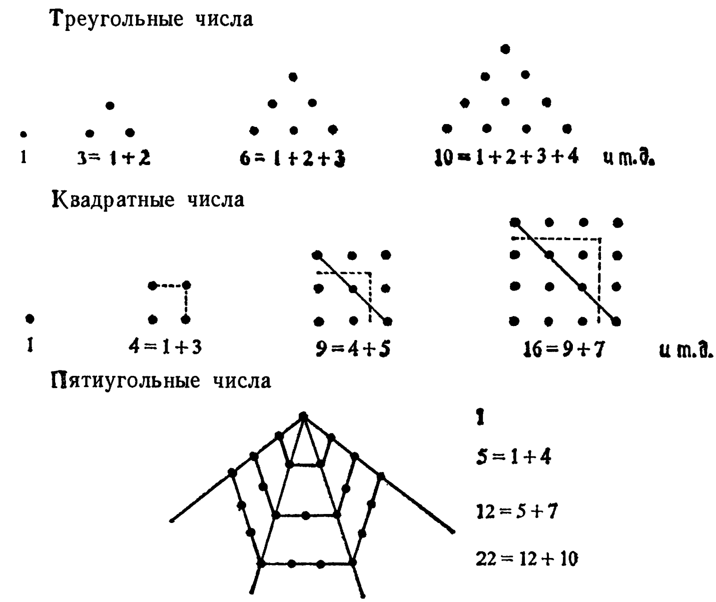
которая служила тайным символом для членов пифагорейского содружества. К ней они обращались со следующей молитвой:

«Благослови нас, о божественное число, породившее богов и людей! О святая, святая Тетрактис! В тебе источник и корни вечно цветущей природы! Ибо это божественное число начинается чистой и глубокой единицей и достигает священной четверки; затем оно порождает праматерь всего сущего, ту, что все объединяет, ту, что первой родилась, что никогда не отклоняется в сторону, ту, что никогда не утомляется, священную Десятку, ключ ко всем вещам».

пифагорейскую идею: *«Подобно тому как созвездия имеют свойственное им число, все известные вещи имеют число»*.

Эта школа заложила основы греческой арифметики, которая ограничивалась изучением целых чисел, рассматриваемых как дискретный набор единиц. Их арифметика геометрична: она разбивает числа в зависимости от формы соответствующих им фигур из точек на треугольные, квадратные, пятиугольные и т. д. числа (см. табл. 3). Она наглядна: многочисленные свойства многоугольных чисел можно непосредственно видеть на геометрических фигурах, которые их изображают. Например, можно видеть, что всякое квадратное число является суммой двух треугольных чисел. Квадратные числа растут «гномонически» — т. е. от одного квадратного числа к следующему можно перейти, прибавив к первому *гномон* (угол). Гномон — это такая фигура, при-

3. Фигурные числа



Для получения этих многоугольных чисел надо суммировать члены арифметической прогрессии, первый из которых равен 1. Разность этой прогрессии равна 1 для треугольников, 2 для квадратов, 3 для пятиугольников и т. д.

бавление которой к некоторой другой фигуре ее увеличивает, не изменяя формы.

Пифагорейцы рассматривали также плоские и пространственные числа, многогранные числа. Они открыли также дружественные числа — два числа являются дружественными, если каждое из них равно сумме собственных делителей другого,— а также совершенные числа, т. е. равные сумме своих собственных делителей.

Нам неизвестно, дали ли они доказательство так называемой теоремы Пифагора: «*Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов*», но, вероятнее всего, нет, хотя они и сознавали необходимость доказательства [1]).

Помимо целых чисел пифагорейцы изучали их отношения и создали теорию пропорций. Среди пропорций они выделяли самые красивые, в частности «музыкальную» пропорцию: $p/a=h/q$, где p и q — два числа, a — их среднее арифметическое, $(p+q)/2$, а h — их среднее гармоническое, $2\,pq/(p+q)$.

В Греции весьма почиталась музыка, причем ее теория составляла область математики, точнее теории чисел. Гармонические созвучия по Пифагору соответствуют отношениям, выраженным с помощью целых чисел, и чем отношение проще, т. е. чем меньше его числовое значение, тем прекраснее созвучие.

Иррациональные числа были открыты (обычно это открытие приписывается пифагорейцам), когда стало ясно, что некоторые отношения нельзя выразить с помощью целых чисел. Это открытие ознаменовало крушение пифагорейской точки зрения о представимости мира с помощью целых чисел и вызвало первый кризис в истории математики.

4. Элеаты

Влияние Элейской школы (V в. до н. э.) на формирование абстрактной научной мысли огромно. Основатель этой школы, Парменид, был первым, кто строго различал чувственное и умопостигаемое, что привело к неизбежной конфронтации между опытом и требованиями разума. Именно поэтому элеаты не приняли пифагорейскую доктрину, ставящую в соответствие всякой вещи число. Если дискретные объекты можно представить целыми числами, то иначе обстоит дело в случае непрерывных величин, таких, как длины, площади, объемы и т. д., которые в общем случае можно интерпретировать

[1]) Плутарх приписывает доказательство этой теоремы самому Пифагору. Аналогичные сведения есть и у Прокла.— *Прим. ред.*

как дискретные наборы единиц, лишь если допускать существование бесконечного числа очень маленьких элементов, из которых эти объекты состоят. В качестве реакции на эту последнюю концепцию Зенон Элейский (род. между 495 и 480 гг. до н. э.) сформулировал четыре парадокса, иллюстрирующих невозможность бесконечной делимости и всякого движения, если мыслить пространство и время состоящими из неделимых частей (см. с. 235—236).

5. Софисты

Победа афинян над персами положила конец мидийским войнам (в 479 г. до н. э.) и закрепила господство Афин над другими греческими городами. Тогда Афины достигли величайшего экономического подъема и невиданного культурного расцвета. Демократия, установленная в VI в. до н. э. законодателями Солоном и Клисфеном, укрепилась в V в. под эгидой Перикла, и это стимулировало развитие всех областей человеческих знаний. Упрочение политических учреждений, существование агоры, необходимость публичных дискуссий приводили к тому, что научные открытия, познания и системы мышления противопоставлялись друг другу и становились всеобщим достоянием.

Первая крупная афинская школа — это школа софистов, профессиональных странствующих учителей, добывавших средства к существованию в обмен на свои знания. Они вовлекали сограждан в словесные схватки, часто происходившие на народных собраниях, и учили спорящих обосновывать свою точку зрения. Платон и Аристотель сурово их критиковали; они видели в них лишь пустых спорщиков. Общее враждебное отношение к этим философам, возможно, объяснялось тем важным положением в общественной жизни города, которого софисты постепенно добились. Позднее это недовольство достигло своей вершины во время процесса и осуждения на смерть Сократа, которого обвиняли в том, что он был софистом.

Математические проблемы, которые изучали софисты, почти всегда были связаны с одной из трех знаменитых задач древности, которые занимали человеческие умы в течение многих веков: это удвоение куба, трисекция угла и квадратура круга.

Согласно Евтокию[1]), происхождение первой задачи связано с легендой: Аполлон устами Делосского оракула приказал удвоить алтарь своего храма. Жители Делоса, таким образом, оказались перед проблемой найти сторону x куба, объем которого вдвое превосходил бы объем куба с данной стороной a, что равносильно решению уравнения $x^3 = 2a^3$ или нахождению кубического корня из 2.

Пытаясь разделить на три равные части данный угол, Гиппий из Элиды (род. около 460 г. до н. э.), софист, современник Сократа, изобрел новую кривую, квадратрису, которую невозможно построить с помощью линейки и циркуля.

Поскольку греческие геометры считали прямую и круг основными фигурами, они вообще рассматривали только задачи, которые можно решить с помощью линейки и циркуля (см. приложение к гл. 3). Три упомянутые задачи не подходят под это ограничение, и потому они столь долго противостояли всем попыткам их решить, что квадратура круга стала синонимом неразрешимости. Под квадратурой круга понимают построение с помощью циркуля и линейки квадрата той же площади, что и данный круг. Если a и d — соответственно сторона квадрата и диаметр круга, то необходимо, чтобы выполнялось равенство $a^2/d^2=\pi/4$, и квадратура круга равносильна нахождению значения для π.

Египтяне и вавилоняне, считавшие, что сторона пропорциональна диаметру, вычислили уже относительно точные значения π: $(^{16}/_9)^2$ и $3^1/_8$ соответственно. Греки не довольствовались нахождением приближенных значений π, хотя Архимед и дал метод, состоящий в заключении π во все более узкие границы, но пробовали построить квадрат, равновеликий кругу. Метод Архимеда служил моделью для приближенного вычисления числа π вплоть до XVII в. Но уже математики XVI в. Штифель и Мавролико высказывали сомнения в возможности

[1]) Евтокий (конец V в.— начало VI в.) — комментатор эпохи эллинизма произведений классической греческой математики.

квадратуры круга, а Джеймс Грегори (1667 г.) предпринял попытку доказать, что π является трансцендентным числом. В 1761 г. Ламберт доказал, что число π иррационально, а в 1882 г. Линдеманн установил его трансцендентность.

6. Платоновская Академия

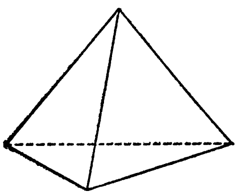
Платон (427—347 гг. до н. э.), ученик Сократа, жил в период упадка Афин. Город был ослаблен Пелопоннесской войной и другими многочисленными войнами с греческими городами. Автономии Афин угрожал царь Филипп Македонский, и демократия переживала кризис. Платон хотел спасти Афины обучением философии и проповедью добродетели; около 377 г. до н. э. он основал философскую школу, получившую название Академии, которая в течение целого века руководила всей интеллектуальной жизнью города. Она просуществовала до 529 г. н. э.— даты ее закрытия христианским императором Юстинианом, который счел невозможным терпеть ее языческие идеи.

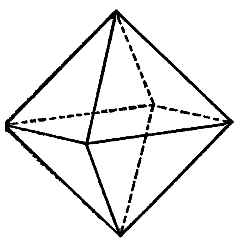
Предназначенная для обучения и для философских и научных исследований, Академия в основном была организована как учебное учреждение, но располагала также жилыми помещениями и местом для прогулок. Не будучи сам математиком, Платон уделял математике важное место в своей воспитательной системе и энергично поощрял ее изучение. В его трудах есть несколько математических мест, касающихся теории чисел, стереометрии и космических фигур (см. табл. 4), но его значение для математики заключено не в этом.

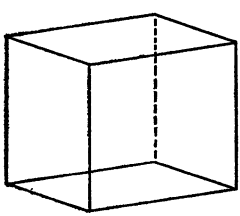
Именно в эпоху Платона и в его окружении зародились первые элементы геометрии. Их авторы обогатили область известных математических истин и начали с того, что ввели иерархический порядок в систему представлений. Основные результаты IV в., в частности о конических сечениях, приписываются ученикам Платона.

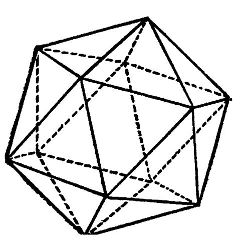
Платон ставил вопрос о природе и структуре математики. Его ученики первыми полностью осознали абстрактный характер математических объектов. Они различали реальный мир и мир *идей*. В то время как чувст-

4. Платоновы тела или космические фигуры







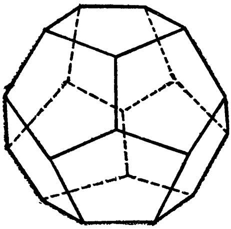


«... его первоначало — треугольник, у которого гипотенуза вдвое длиннее меньшего катета. Если такие треугольники сложить, совмещая их гипотенузы, и повторить такое действие трижды, притом так, чтобы меньшие катеты и гипотенузы сошлись в одной точке как в своем центре, то из шести треугольников будет рожден один, и он будет равносторонним. Четыре равносторонних треугольника соединяются так, что каждые три плоских угла образуют один объемный угол, а именно такой, который занимает место вслед за самым тупым из плоских углов. Завершив построение четырех таких объзмных углов, мы получаем первый объемный вид, имеющий свойство делить всю описанную вокруг него сферу на равные и подобные части.

Второй вид строится из таких же исходных треугольников, соединившихся в восемь равносторонних треугольников и образующих каждый раз из четырех плоских углов по одному объемному; когда таких объемных углов шесть, второе тело получает завершенность.

Третий вид образуется из сложения ста двадцати исходных треугольников и двенадцати объемных углов, каждый из которых охвачен пятью равносторонними треугольниками, так что все тело имеет двадцать граней, являющих собой равносторонние треугольники.

На этом порождении и кончилась задача первого из первоначал. Но равнобедренный треугольник породил природу четвертого (вида) и притом так, что четыре треугольника, прямые углы которых встречались в одном центре, *Продолжение табл.*



образовали квадрат; а из сложения шести квадратов возникло восемь объемных углов, каждый из которых гармонично охватывается тремя плоскими прямыми углами. Составившееся таким образом тело имело очертания куба, наделенного шестью квадратными плоскими гранями. В запасе оставалось еще пятое многогранное построение: его бог определил для Вселенной и прибегнул к нему, когда разрисовывал ее и украшал.»

(Платон «Тимей», 54c—55d)

венные объекты подвержены изменениям и воспринимаются только субъективно, их модели незыблемы, постоянны и универсальны. И конечно, именно в мире идей философы Академии искали истинное знание, поскольку они хотели знать то, что вечно, а не то, что в данный момент родится и умирает. Их интересовали свойства идеальной окружности, а не мимолетная природа кругов на воде. Прямая, проведенная палкой на песке, является лишь несовершенным образом абстрактной прямой. Этот несовершенный рисунок дает только некоторое представление об идеальной прямой, объекте математического знания. Философ-геометр был бы неспособен, например, пересчитать два предмета, если бы он не носил уже в себе идеи числа и сущности числа 2. Поскольку идеи вечны, т. е. предшествуют всякому опыту, они постижимы интуитивно как объекты, которые можно созерцать мысленно.

Такое восприятие математики, при котором она отделена от физического мира, имело последствия в плане доказательств: всякое обращение к опыту отныне запрещалось. Ученики Платона ратовали за то, чтобы использовать лишь дедуктивные рассуждения, и этот выбор радикально изменил математику.

Историки науки часто задавали себе вопрос о причинах такого выбора и пришли к выводу, что дело здесь в поисках греческими философами вечной и незыблемой истины. Благодаря своей причастности к философским школам древнегреческие математики приняли участие в этих поисках. Однако в противоположность рассуждениям по аналогии или по индукции, которые не дают никакой уверенности в окончательном заключении, *дедукция* приводит к абсолютно достоверным результатам, если посылки были верны.

Значение, которое греческие мыслители придавали форме, способствовало установлению канонов строгости, которым должно подчиняться изложение результатов, даже если методы исследования отличаются от методов доказательства.

Историки долгое время обсуждали раскол, происшедший, по-видимому, между чистой математикой — умственным построением, облегчающим переход от чувственного к умопостигаемому и к истине,— и прикладной математикой — простым орудием труда торговцев, дельцов и ремесленников. Класс интеллектуалов, целиком обратившийся к умозрительным построениям, вероятно, был совершенно чужд всякой практике, и поэтому понятно то предпочтение, какое он оказал дедукции, не требующей обращения к опыту или наблюдению.

7. Аристотель и Лицей

Аристотель (384—322 гг. до н. э.), самый известный ученик Платона, после смерти своего учителя стал воспитателем Александра Великого. В 344 г. до н. э. Аристотель вернулся в Афины и создал там свою школу, которую разместил в гимнасии, примыкающем к Ликею (или Лицею) — храму Аполлона Ликейского.

Хорошо знакомый с математикой своего времени, Аристотель, как и Платон, интересовался в основном ее природой и ее связью с реальным миром. По своим воззрениям он был более материалистом, чем Платон, поскольку, если последний относил математические объекты полностью к области идей, то Аристотель ограничивался выделением из них универсальных сущностей — числа и геометрической формы. Математика изучает эти абстракции, выведенные непосредственно из свойств физических тел, и Аристотель разъясняет основные понятия, необходимые для такого изучения. Он различает между собой определения, аксиомы, гипотезы и т. п. и поднимает вопрос о существовании определяемых объектов (см. табл. 5). В самом деле, определение не гарантирует существования рассматриваемого объекта. Так, нетрудно определить многогранник с 10 гранями и вывести его свойства, даже если такой фигуры не

5. Аристотель. Определения и элементы доказательства

Всякое обучение и всякое основанное на размышлении учение исходит из *ранее имеющегося знания*.

Иметь предварительное знание необходимо двояко, а именно: в одних случаях необходимо заранее принять, что это *есть*, в других следует уразуметь, *что́* именно есть то, о чем идет речь, иногда же необходимо и то и другое; ...

Из непосредственных силлогических начал *тезисом* называю то, которое нельзя доказать и которое тому, кто будет что-то изучать, не обязательно иметь. То [начало], которое необходимо иметь каждому, кто будет что-то изучать, я называю *аксиомой*; некоторые такие [начала], конечно, имеются, и главным образом их мы обычно так и называем.

Тезис, который принимает ту или другую часть противоречия (я имею в виду, например, «нечто есть» или «нечто не есть»), есть *предположение*, без этого же — *определение*.

Вторая аналитика, книга I

существует. Для Аристотеля существование математического объекта установлено, если удается его построить.

«*Знать — это установить при помощи доказательства*»,— писал Аристотель. Таким образом, обладать знанием — это уже не созерцать, как у Платона, а провести рассуждение, способное объяснить. Это рассуждение должно подчиняться некоторым правилам, установленным Аристотелем, который стал тем самым основоположником логики. Упорядочив и систематизировав знание, Аристотель одновременно заложил основы разделения науки на отдельные дисциплины.

В своем труде «Физика» Аристотель размышлял о бесконечности. Поскольку не существовало корректно определенного понятия бесконечности, он пытался выработать концепцию, позволяющую учитывать результаты, получаемые математиками с помощью итераций сложения и умножения. Положительные целые числа имеют бесконечную мощность по отношению к сложению, поскольку, прибавляя единицу к числу, получаем новое число и эту операцию можно повторять неопределенно долго. Геометрическая величина — линия, поверхность или тело, бесконечна по отношению к делению. Время обладает тем же свойством. Но «точки» и «моменты» уже не являются самыми мелкими элементами, составляющими линию или время, как это было в учении пифагорейцев. Точка у них мыслилась неделимой, и, следовательно, множество точек не могло образовывать непрерывную и делимую линию. Как и числа, точки являются дискретными величинами, отличными от непрерывных величин геометрии.

8. «Начала» Евклида [1])

Родившись в эпоху Фалеса, очень близкая к своим истокам — мифам, абстрактная наука расцветала вместе с развитием греческих городов-полисов. В III в. до н. э., ставшем веком кризиса для этих городов, она уже была вполне автономна, независима от философии и религии. Отличительной чертой греческой математики были ее дедуктивность и доказательность — свойства, выкованные в горниле жарких дискуссий. «Начала геометрии» Евклида полностью отвечали этим двум требованиям. Благодаря строгости своей логической структуры, умелому подбору «*основных понятий*», которые ему служили фундаментом, и ясности доказательств этот труд стал апогеем математического творчества классической Греции.

В V в. н. э. Прокл утверждал, что, составляя «Начала», Евклид «*включил в них многое из Евдокса, усовершенствовал многое из Теэтета и дал неопровержимые доказательства того, что его предшественники показали нестрого*». Евклид жил в III в. до н. э. в Александрии и преподавал там геометрию. Текст «Начал», которым мы ныне располагаем благодаря трудам Гейберга, Хиза,

[1]) На русском языке существует полный перевод «Начал» Евклида, сделанный Д. Д. Мордухай-Болтовским, которому мы в основном следовали.— *Прим. перев.*

Таннери и других историков математики, по-видимому, очень близок к оригиналу. Нам известно, что книги XIV и XV являются более поздними добавлениями. Мы не знаем, являются ли первые тринадцать книг созданием одного человека или школы, руководимой Евклидом. Из приведенного выше высказывания Прокла можно заключить, что «Начала» явились результатом собирания и упорядочения более ранних работ; однако от этих работ они в корне отличаются систематичностью изложения, при котором все более сложные предложения выводятся из нескольких определений, аксиом и постулатов, которые принимаются без доказательств. На протяжении более двух тысячелетий «Начала» Евклида считались образцом строгости и оказали длительное влияние на развитие математики.

Фундамент здания

Первые четыре книги «Начал» посвящены геометрии на плоскости, и в них изучаются основные свойства прямолинейных фигур и окружностей. В «Началах» Евклид затрагивает лишь те задачи, решения которых строятся при помощи циркуля и линейки, материальных воплощений окружности и прямой.

Книге I предпосланы определения понятий, используемых в дальнейшем. Они носят интуитивный характер, поскольку определены в терминах физической реальности: «*Точка есть то, что не имеет частей*» (определение 1). «*Линия же — длина без ширины*» (определение 2). «*Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней*» (определение 4). «*Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину*» (определение 5) и т. д. За этими определениями следуют пять *требований* (или постулатов):

«*Допустим*: 1) *что от всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию*;
2) *и что ограниченную прямую можно непрерывно продолжить по прямой*;
3) *и что из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг*;
4) *и что все прямые углы равны между собой*;

5) *и если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых.*»

Три первых постулата обеспечивают существование прямой и окружности. Пятый, так называемый постулат о параллельных — самый знаменитый. Его относительно сложный вид всегда интриговал математиков, которые пытались вывести его из четырех предыдущих или вообще отбросить, до тех пор, когда в XIX в. обнаружилось, что можно построить другие, неевклидовы геометрии и что пятый постулат Евклида имеет право на существование.

Затем Евклид сформулировал *общие понятия*, или аксиомы, которые в противоположность постулатам, справедливым только для геометрии, применимы вообще ко всем наукам. Аксиомы — это такие очевидные вещи, которые, по словам Аристотеля, «*необходимо иметь каждому, кто будет что-то изучать*» (см. табл. 5). Постулат — это лишь принцип, который геометр предлагает своему собеседнику принять, но который не является ни «очевидным», ни «аксиоматическим» и который можно отвергнуть, не приходя к противоречию. По-видимому, Евклид придерживался аристотелевой точки зрения, согласно которой постулаты интерпретировались как простые «гипотезы», которые будут подтверждены, если выведенные из них следствия будут соответствов ть действительности. Если математики XX в. видят в них первое проявление аксиоматического метода, позиция последователей Евклида была более примитивной: вплоть до XIV в. геометры видели в постулатах евклидовой геометрии неопровержимые истины, применяемые для описания чувственного мира.

Сформулировав определения, постулаты и аксиомы, Евклид доказывает в книге I элементарные свойства треугольников, среди которых — условия равенства, причем два треугольника равны, если они совмещаются при наложении. Далее описываются некоторые геометрические построения, такие, как построение биссектрисы угла, середины отрезка и перпендикуляра к прямой.

В книгу I включены также теория параллельных (ср. гл. 4) и вычисление площадей некоторых плоских фигур (треугольников, параллелограммов и квадратов). Понятие площади являлось фундаментальным в греческой геометрии. Одной из ее задач было сравнение площадей прямолинейных фигур с помощью понятия эквивалентных фигур, т. е. таких, которые имеют одинаковую площадь, но не равны.

В книге II заложены основы так называемой геометрической алгебры, восходящей к школе Пифагора. Все величины в ней представлены геометрически, и операции над числами выполняются геометрически. Числа заменены отрезками прямой. Произведение двух чисел, ab, таким образом,— не что иное, как площадь прямоугольника со сторонами a и b [1]). Произведение трех чисел — объем. Сложение двух чисел производилось прикладыванием конец к концу отрезков прямой, которые их представляют; произведение ab делилось на число c построением с помощью приложения площадей прямоугольника со стороной c и данной площадью ab. Этот же метод, как мы увидим позже (рассматривая книгу VI, в которой даются общие теоремы, лежащие в основе этого метода), помогает решать геометрически квадратные уравнения.

Книга III целиком посвящена геометрии окружности (см. гл. 4), а в книге IV изучаются правильные многоугольники, вписанные в окружность, а также описанные вокруг нее.

Теория пропорций книги V

Если первые четыре книги элементарны, то книга V* написана на значительно более высоком уровне, а теория отношений, которая в ней изучается,— вещь очень тонкая. Иногда ее приписывают Евдоксу Книдскому (около

---

[1]) Здесь и далее авторы говорят об «операциях над числами». Между тем греки строго отличали числа — множества единиц — от пространственно-протяженных величин. Произведением двух чисел снова было число (это произведение определяется в книге VII «Начал» Евклида), а произведение двух величин — отрезков — построенный на них прямоугольник, т. е. величина двумерная. Геометрическая алгебра строилась не для чисел, а для величин.— *Прим. ред.*

400—355 гг. до н. э.), основателю школы в Кизике, которая соперничала с платоновской Академией, однако факт авторства Евдокса не доказан.

Понятие отношения возникает интуитивно, когда хотят сравнить две величины, т. е. измерить их. Так, пифагорейцы разработали теорию отношений, но она была применима лишь к соизмеримым величинам, т. е. величинам, отношение которых можно выразить с помощью целых чисел: пифагорейцы интерпретировали геометрические величины как дискретные наборы единиц. Таким образом, они могли сравнивать две величины, только если они имели общую единицу измерения, так что каждая из них была целым кратным этой общей единицы. Если, например, длина одного отрезка прямой содержит m единиц, а длина другого отрезка содержит n единиц, то эти две длины находятся в отношении $m : n$. Однако, пытаясь соотнести диагональ квадрата с его стороной, пифагорейцы констатировали с ужасом, что эти две величины не имеют общей меры. То, что было зримой реальностью с точки зрения геометрии, становилось несуществующим при попытке выразить это посредством отношения целых чисел. Эти арифметически несуществующие несоизмеримые отрезки ускользали от пифагорейской теории отношений. Теория пропорций, разработанная в книге V, одинаково хорошо прилагалась и к соизмеримым и к несоизмеримым величинам.

Теория пропорций представляет собой шедевр математической литературы всех времен. На протяжении многих веков она интересовала и интриговала математиков. Карл Вейерштрасс, произведший реформу математического анализа в XIX в., отдал ей должное, приняв известные определения 5, 6 пропорциональности величин (ср. табл. 6) и применив их к определению равенства двух чисел. Однако построение множества чисел [1]) не входило в намерения Евклида, он лишь стремился обосновать измерение величин. Его теория играет в греческой математике такую же роль, как теория вещественных чисел в современном математическом анализе.

---

[1]) То есть множества всех действительных (положительных) чисел.— *Прим. ред.*

Евклид включал в понятие *величины* длины, площади, объемы, веса, углы, временны́е интервалы и т. д., хотя нигде об этом не писал. Отказавшись использовать геометрическую очевидность, но избегая также обращения

6. Первые определения книги V «Начал» Евклида

1. Часть есть величина (от) величины, меньшая (от) большей, если она измеряет большую.

2. Кратное же — большая (от) меньшей, если она измеряется меньшей.

3. Отношение есть некоторая зависимость двух однородных величин по количеству.

4. Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга.

5. Говорят, что величины находятся в том же отношении: первая ко второй и третья к четвертой, если равнократные первой и третьей одновременно больше, или одновременно равны, или одновременно меньше равнократных второй и четвертой каждая каждой при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответственном порядке.

6. Величины же, имеющие то же отношение, пусть называются пропорциональными.

к арифметике, он не приписывал величинам численных значений.

Его определение 4 (ср. табл. 6) устанавливает, какие величины можно сравнивать; нельзя образовать отношение двух величин, одна из которых была бы настолько мала, что никакое ее конечное кратное не может превзойти другую величину. Это определение, называемое *аксиомой Архимеда*, о которой речь пойдет далее, исключает бесконечно малые и бесконечно большие величины. Определение пропорциональных величин являлось ключевым для всех построений книги V (см. табл. 6, определение 5). В нем указывались необходимые и достаточные условия того, чтобы два отношения были равны:

Даны величины a, b, c и d; они имеют одно и то же отношение $a/b=c/d$, если для всех целых n и m справедливы следующие импликации:

$$\begin{aligned}
&\text{если } ma > nb, \quad \text{то } mc > nd;\\
&\text{если } ma = nb, \quad \text{то } mc = nd;\\
&\text{если } ma < nb, \quad \text{то } mc < nd.
\end{aligned}$$

Евклид ввел затем линейное упорядочение на множестве отношений величин, т. е. сделал возможным сравнение любых двух отношений.

Удалось доказать, что определение 5 делит множество рациональных чисел на два непустых непересекающихся подмножества, таких, что всякое число из первого множества строго больше любого числа из второго, т. е. это определение задает *дедекиндово сечение* на множестве рациональных чисел (ср. гл. 5, с. 289). Такое сечение определяет действительное (рациональное или иррациональное) число. Но, как мы уже раньше заметили, не это было целью Евклида.

Из восемнадцати определений, помещенных в начале всей книги, и общих понятий, сформулированных в книге I, с восхитительным изяществом и почти без логических недочетов Евклид вывел (не прибегая к постулатам, содержание которых было геометрическим) двадцать теорем, в которых устанавливались свойства величин и их отношений. Он доказал, например (мы переводим его утверждения на современный алгебраический язык), что

$m(a+b+c+\ldots)=ma+mb+mc+\ldots$ (предложение 1);

если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}$ (предложение 4);

если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и $\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, то $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$ (предложение 11);

если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, то $\frac{a}{b}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$ (предложение 12);

если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и если $a>c$, то $b>d$;
если $a=c$, то $b=d$;
если $a<c$, то $b<d$ (предложение 14);

$\frac{ma}{mb}=\frac{a}{b}$ для всякого целого m (предложение 15);

если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (предложение 16);

если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (предложение 18).

7. Книга V «Начал» Евклида. Пример доказательства. Перевод на язык современных обозначений

Предложение 16

Теорема

Если четыре величины пропорциональны, то они будут пропорциональны также после перестановки.

Пусть даны четыре пропорциональных величины A, B, C, D, и пусть A относится к B как C к D; я утверждаю, что эти величины будут пропорциональны также после перестановки, т. е. A будет относиться к C как B к D.

Возьмем равнократные E и F величин A и B и другие какие-нибудь равнократные G и H величин C и D.

Поскольку E имеет такую же кратность по отношению к A, что F к B, и части, сравниваемые между собой, имеют то же отношение, что и их равнократные, величина A будет относиться к B как E к F. Но A относится к B как C к D; значит, C относится к D как E к F. Кроме того, поскольку G и H— равнократные C и D, величина C будет относиться к D как G к H. Но C относится к D как E к F; следовательно, E относится к F как G к H. Но, если четыре величины пропорциональны и первая из них больше, чем третья, вторая будет больше, чем четвертая; если первая будет равна третьей, вторая будет равна четвертой; и если первая меньше, чем третья, то вторая будет меньше, чем четвертая. Следовательно, если E превосходит G, то величина F будет превосходить H; если E равна G, то величина F будет равна H, и если E меньше, чем G, то величина F будет меньше, чем H. Но E и F—некоторые равнократные A и B, а G и H— некоторые другие равнократные C и D; следовательно, A относится к C, как B относится к D.

Если m и n—целые числа, то

$$\frac{A}{B}=\frac{mA}{mB}$$

и

$$\frac{C}{D}=\frac{nC}{nD} \text{ (предл. 15).}$$

Поскольку $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, имеем

$$\frac{mA}{mB}=\frac{nC}{nD} \text{ (предл. 11).}$$

Следовательно,

если $mA > nC$, то $mB > nD$,

если $mA = nC$, то $mB = nD$,

и

если $mA < nC$, то $mB < nD$,

но это влечет за собой равенство (опр. 5)

$$\frac{A}{C}=\frac{B}{D}.$$

Следовательно, если четыре величины пропорциональны, они будут также пропорциональны после перестановки, что и требовалось доказать.

В табл. 7 дается пример оригинального доказательства Евклида и его перевод на язык современных обозначений.

Евклид доказал предложение 18 рассуждением от противного и неявно использовал существование четвертой пропорциональной x для трех данных величин a, b, c, т. е. такой величины x, что $a/b=c/x$. Ее существование было доказано лишь в частном случае, когда величины являются длинами прямолинейных отрезков (предложение 12 книги VI). Допускать существование четвертой пропорциональной для величин в более общем случае было, таким образом, не вполне законно, и нас удивляет, что так поступал автор, который старался избегать всяких ссылок на геометрию и логически выводить свойства величин из уже установленных. Однако строгое доказательство существования четвертой пропорциональной потребовало бы математического понятия непрерывности, о котором греки имели лишь смутное представление и так и не смогли строго сформулировать. Дедекинд первым построил непрерывную область величин (1872 г.).

Приложение площадей

В книге VI теория пропорций книги V применяется к прямолинейным фигурам, к геометрии на плоскости и, в частности, к подобным фигурам, причем «*подобные прямолинейные фигуры суть те, которые имеют углы, равные по порядку, и стороны при равных углах пропорциональные*». Евклид использовал здесь знаменитое определение 5 для проверки пропорциональности при доказательстве первого предложения, устанавливающего тот факт, что «*треугольники и параллелограммы, находящиеся под одной и той же высотой, относятся друг к другу как основания*». Здесь можно обнаружить также (предложения XXV—XXIX) основы техники построения, развитые в школе Пифагора и названные *приложением площадей*. Эта техника охватывает три различных построения с помощью лишь циркуля и линейки. Первое называется *простым* или *параболическим приложением*. Речь идет о построении параллелограмма с заданным углом, равновеликого некоторой прямолинейной фигуре, тоже данной. Точнее, Евклид задавался отрезком AD, углом при точке A и площадью c некой прямолинейной фигуры и строил на AD параллелограмм $ADFI$ с этим углом при вершине A, площадь которого была равна данной площади c (см. рис. 2.2a). В случае *приложения с недостат-*

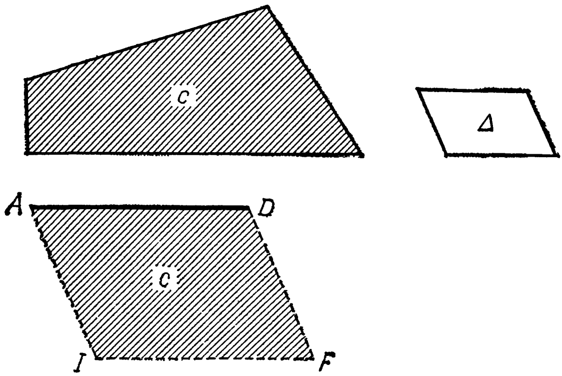


Рис. 2.2a. Простое, или параболическое, приложение.

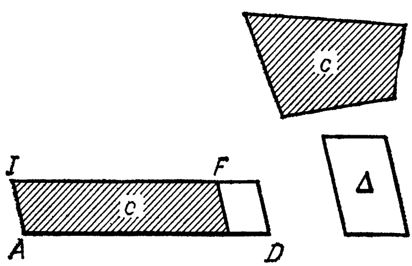


Рис. 2.2b. Приложение с недостатком, или эллиптическое приложение.

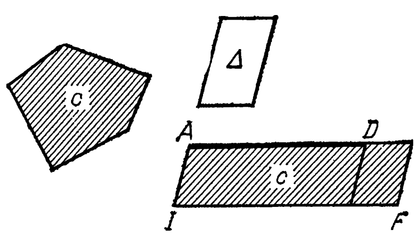


Рис. 2.2c. Приложение с избытком, или гиперболическое приложение.

ком, или *эллиптического приложения* [1]) (см. рис. 2.2b), он строил на AD параллелограмм данной площади c, недостаток которого был подобен параллелограмму Δ, т. е. основание построенного параллелограмма не полностью покрывало данный отрезок AD. В случае *приложения с избытком*, или *гиперболического приложения* [2]) (см. рис. 2.2c), параллелограмм строился на продолженном отрезке AD.

Часто данный угол был прямым. Простое приложение позволяло тогда построить вторую сторону прямоугольника. Когда заданный для подобия параллелограмм был квадратом, приложения с недостатком и с избытком позволяли найти положительный корень уравнений второго порядка $ax \pm x^2 = c$, где c положительно.

Действительно, если к данному отрезку AD (см. рис. 2.3) прилагается прямоугольник $ACFI$ площади,

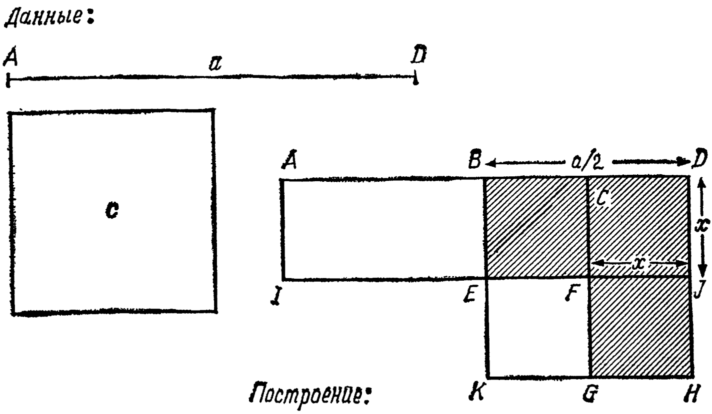


Рис. 2.3.

равной данной площади c, и такой, что недостаток $CDJF$ равен квадрату x^2, то площадь гномона $BDHGFE$, где B — середина AD, будет равна площади прямоугольника $ACFI$. Площадь гномона, равная разности площадей квадрата со стороной $BD = a/2$ и квадрата со стороной

[1]) Термин «эллиптическое приложение» происходит от слова elleipsis — недостаток.— *Прим. ред.*

[2]) Термин «гиперболическое приложение» происходит от слова hyperbole — избыток.— *Прим. ред.*

$EF=a/2-x$, равна (в современных алгебраических обозначениях)

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2=ax-x^2.$$

Площадь прямоугольника $ACFI$ по построению равна c, но, с другой стороны, она равна $(a/2)x+(a/2-x)x=$ $=ax-x^2$. Следовательно, $ax-x^2=c$, и построение гномона позволяет найти значение x.

Арифметические книги

Книги VII, VIII и IX составляют трактат по теории чисел; теория пропорций в них прилагается к числам [1].

Из многих свойств чисел, исследованных Евклидом (четность, делимость и т. д.), мы процитируем только предложение 20 книги IX, устанавливающее существование бесконечного множества «первых», т. е. простых, чисел: «*Первых чисел существует больше всякого предложенного количества первых чисел*». Его доказательство от противного до сих пор можно найти в учебниках по алгебре.

Пусть даны простые числа a, b, c, ..., k и $abc...k$ — их произведение. Если к нему прибавить единицу, то $abc...k+1$ будет простым или непростым.

Если $abc...k+1$ — простое, то это то простое число, которое добавляется к данной совокупности.

Если же нет, то $abc...k+1$ в силу одной из теорем книги VII является кратным простого числа p, причем p не может быть одним из заданных простых чисел a, b, c, ..., k.

Действительно, допустим, что p находится среди этих заданных простых чисел. Тогда их произведение делится на p. Но $abc...k+1$ также делится на p, а следовательно, на p должна делиться разность, которая равна 1, что невозможно.

---

[1] В книге VII излагается теория пропорций, совершенно отличная от построенной в книге V. В книге VII определяется равенство отношений целых чисел, или, с современной точки зрения, строится теория рациональных чисел. Создание этой теории, как показал Ван-дер-Варден, относится к ранним пифагорейцам (первая половина V в. до н. э.), тогда как теория пропорций, изложенная в книге V, была построена Евдемом из Книда (середина IV в. до н. э.).— *Прим. ред.*

Книга X читается с трудом, но считается одной из самых тонких; она содержит классификацию квадратичных иррациональных величин, которые там представлены геометрически прямыми и прямоугольниками. Евклид доказал справедливость геометрических преобразований, которые мы записываем теперь так:

$$\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a-b},$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

и многих других. Эта классификация стала необходимой из-за возрастающего числа несоизмеримых величин, которые возникали при геометрических построениях. Цейтен полагает, что в своих точных исследованиях греки не сопоставляли этим величинам числовых значений и использовали их в том виде, в каком получили, т. е. в виде отрезков прямой, построенных геометрически. Однако отрезки, представляющие несоизмеримые величины, порой очень трудно различать между собой, и необходима классификация соответствующих чисел.

Книга XI посвящена стереометрии. В книге XII, которая также восходит, вероятно, к Евдоксу, с помощью метода исчерпывания (см. гл. 5) площади криволинейных фигур сравниваются с площадями многоугольников. Предметом книги XIII является построение правильных многогранников (см. табл. 4). Построение платоновых тел, которым, по-видимому, завершаются «Начала», дало основание комментатору Проклу причислить Евклида к последователям философии Платона.

«Начала» — не единственный труд Евклида, ему принадлежат, кроме того, «Данные», дополняющие «Начала», а также «Сечение канона» о музыкальных пропорциях, утерянный труд о конических сечениях, «Геометрические места на поверхности», трактат о делении фигур [1]), который цитирует Прокл, «Поризмы» (следствия), о котором свидетельствуют Прокл и Папп, и трактаты по оптике, механике и астрономии.

[1]) Этот трактат сохранился в арабском переводе.— *Прим. ред.*

9. Аполлоний и конические сечения

Как и Евклид, Аполлоний Пергский [1]) работал на стыке классической и эллинистической эпох. Хотя достоверно известно, что деятельность обоих геометров связана с первым веком существования Александрийской школы, по своему содержанию и духу их работы близки предыдущей эпохе. В «Конических сечениях», единственном уцелевшем труде Аполлония, систематизируются и обобщаются знания его предшественников. Из-за применения методов, заимствованных из «геометрической алгебры», и чисто словесной формы изложения, не использующей никакой символики, этот трактат трудно читать.

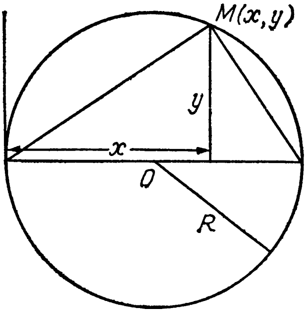


Рис. 2.4. Имеем $y^2=x(d-x)$, где $d=2R$.

Изучение конических сечений в Греции восходит к IV в. до н. э. Ученик Евдокса и современник Платона Менехм открыл их при попытке решить задачу удвоения куба. На самом деле Гиппократ Хиосский свел эту задачу к нахождению двух средних пропорциональных x и y [2]), таких, что $a/x=x/y=y/b$ $(b=2a)$. Однако эту задачу можно решить, найдя с помощью построения точку пересечения двух парабол $x^2=ay$ и $y^2=xb$ или же параболы и гиперболы $xy=ab$. Хизс полагал, что Менехм руководствовался аналогией с описанием окружности как геометрического места точек M с координатами (x, y), где $y^2=x(d-x)$ (см. рис. 2.4), и полагал, что соотношение $y^2=bx$, получающееся из него подстановкой константы вместо одной из переменных, также будет представлять геометрическое место; это привело его к мысли о рассмотрении конуса.

---

[1]) Аполлоний Пергский жил в конце III в. до н. э. (около 260—170 гг. до н. э.); таким образом, он принадлежал ко второму поколению после Евклида. Его творчество уже полностью относится к эпохе эллинизма.— *Прим. ред.*

[2]) Между двумя заданными отрезками a и b.— *Прим. ред.*

После Менехма Аристей (вторая половина IV в.?) заинтересовался коническими сечениями в своей, ныне утерянной, работе «О пространственных местах». Эти геометрические места — не что иное, как конические сечения. Менехм и Аристей знали, что сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к его образующей, дает различные кривые в зависимости от того, каков угол при вершине конуса — острый, прямой или тупой. Предшественники Аполлония, включая Архимеда и Евклида, использовали терминологию, введенную Аристеем, и говорили о сечении остроугольного конуса (эллипсе), сечении прямоугольного конуса (параболе) и сечении тупоугольного конуса (гиперболе). Аполлоний изменил положение, получив все три конических сечения, пересекая один и тот же конус с острым углом при вершине и с окружностью в основании различными плоскостями. В зависимости от того, пересекает ли секущая плоскость все образующие на одной полости конуса, параллельна ли одной из образующих или пересекает обе полости конуса, получается либо эллипс, либо парабола, либо гипербола. Аполлоний установил характеристические свойства конических сечений. На современном языке мы бы сказали, что он выразил их уравнения в системе координат, за оси которой взяты диаметр данной кривой и касательная к ней в одной из концевых точек диаметра. Записанные в современных обозначениях характеристические свойства конических сечений описываются уравнениями

1) $y^2=px$ (парабола);

2) $y^2=x\left(p-\frac{p}{a}x\right)$ (эллипс);

3) $y^2=x\left(p+\frac{p}{a}x\right)$ гипербола,

где a — длина диаметра, а p — длина параметра (latus rectum).

Этот новый подход позволил ему построить все три кривые при помощи метода приложения площадей. В широком смысле он называет параболой кривую, полученную приложением к отрезку прямой данной длины p прямоугольника со стороной x и площадью, равной площади квадрата со стороной y (см. рис. 2.5а). Если прямоугольник со стороной x и площадью y^2 имеет

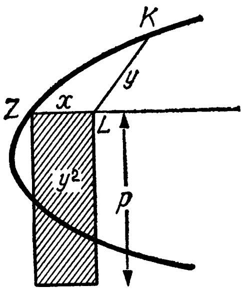


Рис. 2.5a. Парабола.

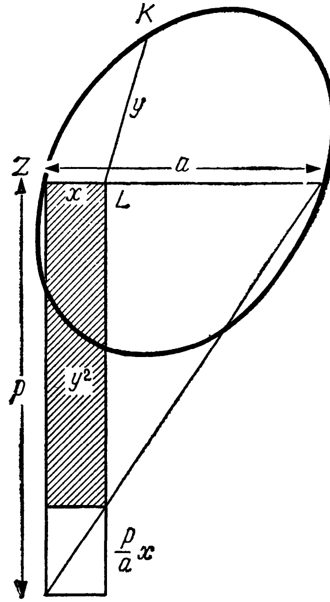


Рис. 2.5b. Эллипс.

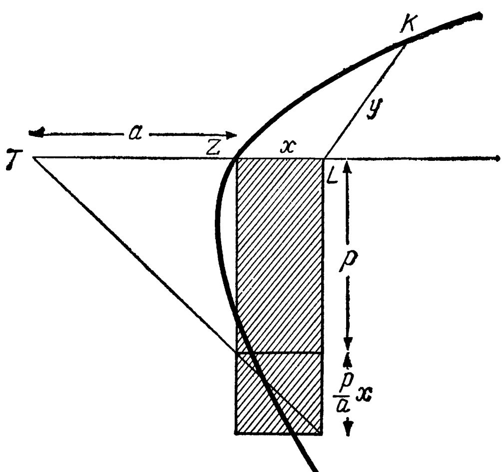


Рис. 2.5c. Гипербола.

слишком короткое основание, так что его надо дополнить прямоугольником со сторонами x и $(p/a)x$, то кривая будет эллипсом (см. рис. 2.5b), а если основание прямоугольника превосходит параметр на $(p/a)x$, то построенная кривая будет гиперболой (см. рис. 2.5c).

Из восьми книг, входящих в трактат, до нас дошли только семь [1]). Определив и построив три конических сечения, Аполлоний изучал их основные свойства (асимптоты, касательные, фокусы, сопряженные диаметры и т. д.). В частности, он доказал теорему, которая легла в

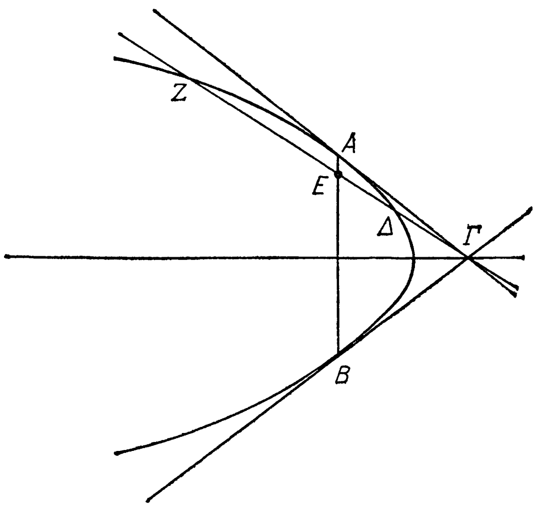


Рис. 2.6.

основу теории поляр: «*Если две прямые, касательные к коническому сечению, окружности или к противоположным сечениям* — двум ветвям гиперболы,— *пересекаются и если провести прямую через точки касания и провести через точку пересечения касательных прямую, пересекающую эту кривую в двух точках, то отрезки этой прямой, на которые ее* [2]) *делит прямая, соединяющая точки*

---

[1]) Из них 4 первых по-гречески, следующие 3 в арабском переводе Сабита ибн Корры. Восьмая книга была впоследствии реконструирована Галлеем (XVII в.).— *Прим. ред.*

[2]) Имеется в виду ее отрезок между двумя точками пересечения с кривой. Далее под «всей прямой» понимается ее отрезок от точки

касания, будут между собой в том же отношении, что и вся прямая и ее внешний отрезок» (см. рис. 2.6).

Точки пересечения Δ и Z секущей и конического сечения гармонически сопряжены с парой точек, образованной точкой пересечения Г касательных и точкой пересечения E секущей и хорды, соединяющей точки касания касательных к кривой, т. е. $ZE/E\Delta = Z\Gamma/\Gamma\Delta$.

Помимо этого трактата о конических сечениях Аполлоний написал серию других работ, которые впоследствии прокомментировал Папп. В отличие от «Конических сечений», в которых изложена глобальная теория, в них рассматриваются частные проблемы.

10. Александрийская школа

К III в. до н. э. греческие города потеряли свою независимость. После завоевания Греции Филиппом Македонским они вынуждены были отступить от своих демократических принципов и повиноваться царю. Сын Филиппа, Александр, объединил под своей властью огромную империю и сделал столицей Александрию. Во времена правления первых Птолемеев Александрия стала культурным центром античного мира. Стратон, ученик Аристотеля, организовал в ней Мусейон, сообщество ученых, посвятивших себя научным исследованиям и получавших от царя плату за свои занятия. Богатые собрания библиотеки Мусейона — они насчитывали 700 000 томов — были предоставлены в распоряжение ученых и учащихся. Несмотря на то что некоторые из этих ученых были выходцами из обеспеченных слоев общества и все они получали царское жалование, большинство занимались преподаванием или каким-либо ремеслом — медициной, землемерием, архитектурой и т. п.

Среди четырех дисциплин, изучаемых в Мусейоне — литературы, математики, астрономии и медицины,— математика занимала особое место. В течение первого века своего существования математическая школа отличалась интенсивной и блестящей деятельностью, которая началась с систематизации знаний, накопленных в клас-

---

пересечения касательных до дальней точки пересечения с кривой, а под «внешним отрезком» — до ближней.— *Прим. перев.*

сическую эпоху, по образцу Евклида, который синтезировал начала геометрии, и Аполлония, создавшего общую теорию конических сечений.

Поскольку Александрия была новым городом без установившихся традиций, она была открыта всевозможным влияниям: Мусейон привлекал ученых всего мира; в нем были представители греческих, египетских и еврейских общин. Процветающая торговля способствовала связям с далекими культурами, торговцы и путешественники приносили новые практические знания, расширявшие научные горизонты. Александрийцы не обходили вниманием прикладную математику, и механика, оптика, геодезия, астрономия и логистика успешно развивались. Они обучали арифметическим действиям как в греческой буквенной нумерации, так и с помощью техники, пришедшей из Египта, а также использовали в своих астрономических расчетах систему счисления с основанием 60 на базе вавилонской нумерации.

Архимед и эпигоны великих геометров

В своих трудах Архимед (родился в Сиракузах около 287 г. до н. э.) наиболее полно выразил дух Александрийской школы. Стремление к строгости в них сочетается с заботой о надлежащих приложениях. Гениальный и популярный изобретатель, он во всем греческом мире был известен благодаря конструкции тонких и простых механизмов — рычагов, водяных насосов, военных машин и т. д. Рассказывали, что он использовал свойства параболических зеркал, чтобы собрать солнечные лучи и направить их на римские корабли, осаждавшие Сиракузы, что вызвало пожар на римском флоте. Архимед был не только искусным механиком-инженером, он также установил принципы теоретической механики и заложил основы гидростатики. Свои знания по механике он использовал как средства исследования в геометрии, о чем он и сообщал в своем письме Эратосфену.

Его работы по вычислению площадей и объемов являются вершиной александрийской математики. Мы рассмотрим их в гл. 5. Методом исчерпывания, в котором при помощи все более тесных неравенств достигается сколь угодно близкое приближение к равенству, он доказал, строго и элегантно, результаты, которые он предвидел заранее благодаря соображениям из области механики: он вычислял центры тяжести, точки касания прямых и кривых, определял площади криволинейных фигур, получил формулы объема цилиндра и шара и установил важные свойства тел вращения, порожденных коническими сечениями.

В работе «Измерение круга» он ищет хорошее приближение числа π, т. е. отношения между длиной окружности и диаметром круга. Вначале он доказал, что площадь круга равна площади треугольника, основанием которого служит длина окружности, а высотой — радиус. Чтобы найти значение длины окружности, он вписывал в круг правильные многоугольники с возрастающим числом сторон и вычислял их периметры. Он использовал также описанные многоугольники и определил значение π с помощью следующих неравенств:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

В «Исчислении песчинок» он разработал метод, позволяющий явно выразить число, превышающее число песчинок, содержащееся внутри сферы диаметра, равного расстоянию между центром Земли и небесным сводом с неподвижными звездами, что в греческой буквенной системе счисления было делом нелегким.

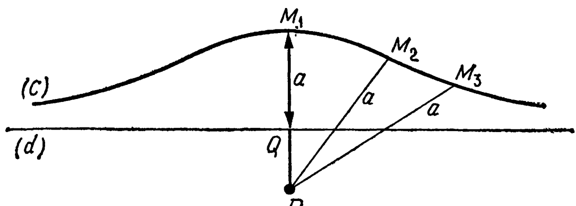
Эратосфен Киренский, известный тем, что он измерил длину земного меридиана, и Аристарх Самосский, защищавший идею гелиоцентрической системы мира, также вращались в среде александрийских математиков.

За богатым открытиями начальным периодом последовал длительный период анализа, углубления и разработки. Евклид, Аполлоний и Архимед подняли греческую геометрию на такую высоту, что их достижения трудно было превзойти методами античной математики. Начала планиметрии были исчерпаны, изучение конических сечений не могло продвигаться вперед в рамках греческой математики. Дальнейшее продвижение в области стереометрии стало возможным после того, как

Архимед своими исследованиями спирали открыл дорогу изучению трансцендентных кривых, обойденных вниманием геометров классического периода, потому что они интересовались исключительно кривыми, которые можно построить с помощью линейки и циркуля. Так, Никомед (около 200 г. до н. э.) определил и изучил конхоиду (см. табл. 8); он разработал прибор, позволяющий ее построить.

Диокл (конец II в. до н. э.), пытаясь решить все ту же задачу удвоения куба, изобрел новую кривую, циссоиду, чтобы найти две средние пропорциональные между

8. Конхоида Никомеда



Конхоида (C) прямой (d) по отношению к P и $a > 0$ есть геометрическое место (C) точек M, лежащих на одной прямой с P и Q, когда Q описывает прямую (d), и таких, что $MQ = a$. Точки M_1, M_2, M_3 лежат на конхоиде.

двумя данными прямолинейными отрезками. Зенодор положил начало исследованию нового геометрического объекта, рассматривая изопериметрические фигуры, т. е. фигуры, имеющие одинаковый периметр. Помимо теоретического значения, его исследования имели большую практическую важность. В самом деле, Прокл сообщает, что некоторые общины обманывали своих членов, выдавая им участки земли, имеющие большой периметр и маленькую площадь.

Гипсикл Александрийский, вероятно, добавил (около 180 г. до н. э.) XIV книгу к «Началам» Евклида; в ней он приводит построение правильного додекаэдра (многогранника с 12 гранями) и правильного икосаэдра (20-гранника) (см. табл. 5).

Сферическая тригонометрия

Эпигоны великих геометров проводили свои исследования в рамках, установленных классической геометрией, и, естественно, обращались к их приложениям. Особой областью приложений была астрономия. Представления о сферичности неба и шарообразности Земли потребовали разработки специальных научных средств, сферической геометрии. Предполагают, что ее основоположником был Гиппарх (II в. до н. э.). Ему приписывают составление таблицы хорд окружности. Менелай, римский астроном I в. н. э., написал трактат из трех книг «Сферика», в котором он систематически исследовал свойства сферических треугольников и построил сферическую геометрию.

В своем труде «Математическое построение», или «Альмагест», Клавдий Птолемей (умер в 168 г.) развил дальше результаты Гиппарха и Менелая и указал общие и строгие методы вычисления хорд, стягивающих дуги окружности. В основу своей астрономии он положил предварительно им сформулированные и доказанные тригонометрические теоремы, однако полное изложение тригонометрии у него отсутствует. «Альмагесту» суждено было служить справочной книгой астрономов вплоть до отказа от геоцентрической концепции Вселенной.

Арифметика и алгебра, первые шаги к самостоятельности

Именно в Александрии арифметика и алгебра впервые отделились от геометрии и сделали первые шаги на пути самостоятельного развития. Эта тенденция, уже различимая в арифметических трудах Архимеда, Аполлония и Птолемея, становится более заметной в работах Герона, Никомаха Геразского и особенно Диофанта.

В «Метрике», труде, посвященном измерению площадей и объемов и вообще геодезии, Герон порывает с древнегреческой традицией и более не отождествляет числа с геометрическими величинами, их представляющими, но проводит вычисления непосредственно с самими числами. Поскольку геодезию преподавали в практических целях землемерам, каменщикам и другим ремесленникам, Герон не мог довольствоваться лишь строгими геометрическими методами, которые ему запрещали перемножать две площади, извлекать квадратные и кубические корни, но сочетал с ними вавилонские приемы вычисления и приближенные методы египетских землемеров.

Подобная же эволюция намечается и в алгебре. К началу нашей эры появились сборники задач, решаемых алгебраическими методами. Самым значительным и оригинальным из них был сборник «Арифметика» Диофанта (см. гл. 3).

Комментаторы

Диофант жил в эпоху, когда александрийская математика теряла свою созидательную мощь. Его произведение было последним оригинальным вкладом. Отныне на смену изобретателям приходят ученые комментаторы (некоторых из них мы уже цитировали); самым блестящим среди них был Папп (около 300 г.). Многие математические тексты дошли до нас благодаря его «Математическому собранию». Прокл исследовал первую книгу «Начал» Евклида, Евтокий — труды Архимеда и Аполлония. Ипатия, дочь Теона Александрийского, участвовала в переиздании «Начал» Евклида (IV в.). Она входила в неоплатоновскую школу, основанную в Александрии в середине III в. и проповедовавшую учение, несовместимое с христианством; она была растерзана толпой фанатиков-христиан, враждебных языческим традициям эллинистической науки. Ее смерть символизировала конец Александрийской школы и эллинистической культуры.

После смерти Клеопатры (31 г. до н. э.) Египет стал простой провинцией Римской империи. Римляне не поддерживали научной деятельности, большинство христианских церквей ее осуждали, тысячами жгли языческие трактаты. Когда мусульмане завладели в 640 г. Александрией, собрания Мусейона были уничтожены и научная жизнь в городе практически прекратилась.

Оригинальные работы

Архимед. Сочинения. Пер. с греч.— М.: Физматгиз, 1962.
Начала Евклида. Пер. с греч.— М.— Л.: ГИТТЛ, 1948—1950. 3 т. (т. 1: книги I—VI; т. 2: книги VII—IX; т. 3: книги X—XII).
Диофант. Арифметика. Пер. с греч.— М.: Наука, 1974.
Ver Eecke P. Les Coniques d'Apollonius.— Bruxelles, 1923.

Работы по истории, которым мы особенно следовали

Desanti J.-T. Genèse de la mathématique.— Séminaire à Paris-VII, 1975—76.
Heath T. L. A History of Greek Mathematics.— Oxford, 1921.
Heiberg J. L. Geschichte der Mathematik im Altertum.— Beck, Munich, 1925.
Гейберг И. Л. Естествознание и математика в классической Греции. Пер. с нем.— М.: ОНТИ, 1936.
Michel P.-H. Les nombres figurés dans l'arithmétique pythagoricienne.—Conférence du Palais de la découverte, série D № 56. Paris, 1958.
Vernant J.-P. Mythe et pensée chez les Grecs.— Maspero, Paris.

Работы, добавленные редактором перевода

История математики с древнейших времен до начала XIX в. Под редакцией А. П. Юшкевича. Т. 1 — М.: Наука, 1970.
Ван-дер-Варден Б. А. Пробуждающаяся наука.— М., 1959.
Башмакова И. Г. Лекции по истории математики в Древней Греции.— Истор.-матем. иссл., вып. XI, 1958.
Нейгебауэр О. Точные науки в древности.— М., 1968.
Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века.— М.-Л., 1938.

Глава 3

СТАНОВЛЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ

Вначале не делали различия между алгеброй и арифметикой, которая сама находилась в весьма примитивном состоянии. Еще задолго до появления термина «алгебра» существовали некоторые стереотипные рецепты, являющиеся зачатками техники решения практических задач.

Мало-помалу развивался исторический процесс выделения правил абстрактного алгебраического исчисления — исчисления, производимого над выражениями, содержащими одну неизвестную величину; этот процесс был тесно связан с процессом становления арифметики. Из правил и рецептов складывалась методика, почти исключительным объектом которой продолжала вплоть до начала XIX в. оставаться теория уравнений.

В ходе этого двойного развития складывалась и уточнялась система обозначений арифметических операций и алгебраического исчисления, и множества, с которыми работали арифметики и алгебраисты, постепенно расширялись — от множества натуральных чисел до множества рациональных положительных чисел, а затем до квадратичного расширения последнего и почти в то же время до некоторого аналога наших действительных чисел, и, наконец, до отрицательных и комплексных чисел.

Мы наметим здесь основные этапы создания классической алгебры, тесно связанной в начале своего развития с арифметикой.

1. Линейные и квадратные уравнения в первых цивилизациях античности

Еще в глубокой древности при рассмотрении конкретных задач встречались примеры, которые можно интерпретировать как образцы решения уравнений первой и второй степени.

Вавилон

В вавилонских табличках встречаются численные задачи, сформулированные описательно, т. е. без символических обозначений, с помощью слов и фраз, решение которых представлено как последовательность правил, которые нужно выполнить, но без какого бы то ни было их обоснования (см. табл. 1).

Вавилоняне использовали геометрический язык, причем неизвестное x они называли стороной, а его вторую

1. Пример вавилонской задачи

	Перевод в десятичную систему счисления	Общая схема
Площадь квадрата, прибавленная к его стороне, равна 45′	$x^2+x=\frac{3}{4}$	$x^2+px=q$
Положи 1 единицу	1	p
Раздели 1 на два: 30′	$\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$
Умножь полученное на 30′ : 15′	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	$\frac{p^2}{4}$
Прибавь 15′ к 45′: 1	$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$	$\frac{p^2}{4}+q=\delta$
Это квадрат от 1	$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{\delta}$
Вычти 30′, которое ты перемножал, из 1 : 30′	$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	$\sqrt{\delta}-\frac{p}{2}$
Ты получил сторону квадрата	$x=\frac{1}{2}$	$x=\sqrt{\delta}-\frac{p}{4}$

степень, x^2,— квадратом. В случае двух неизвестных их называли длиной и шириной, а их произведение — площадью. Но, несмотря на эту терминологию, они без колебания вычитали сторону из площади. Так, текст 13901 из Британского музея «*Я вычитаю сторону квадрата из его площади и получаю* 14,30» можно перевести на алгебраический язык уравнением $x^2-x=14,30$.

Здесь замечательно несоблюдение принципа однородности. В эпоху позднего эллинизма такое несоблюдение будет явлением исключительным, и алгебраистам понадобятся века, чтобы освободиться от ограничительных ссылок на геометрию.

Историк Гётш провел анализ типов уравнений, встречающихся у вавилонян, и методов их решения [1]. Эти методы оставались почти постоянными с раннего вавилонского периода (1800 г. до н. э.) до эпохи Селевкидов (около 300 г. до н. э.); мы находим здесь линейные уравнения с одним неизвестным и системы двух уравнений с двумя неизвестными, состоящими из одного линейного уравнения и одного уравнения второй степени:

$$x \pm y=a \quad \text{и} \quad xy=b$$

или

$$x\pm y=a \quad \text{и} \quad x^2+y^2=b.$$

В случае систем общий метод состоял в разрешении одного из уравнений относительно одного неизвестного и в подстановке соответствующего выражения в другие уравнения. Иногда встречался так называемый метод *«больше или меньше»*: если имелось уравнение $x+y=a$ и второе уравнение относительно x и y, то полагали $x=$ $=a/2+s$ и $y=a/2-s$. После подстановки во второе уравнение получали одно квадратное уравнение относительно s. Точно так же, если имелось уравнение $x-y=a$, вавилоняне полагали

$$x=s+a/2 \quad \text{и} \quad y=s-a/2.$$

Отметим, что этот метод не раз встречается в арифметических задачах Диофанта. Наиболее распространенные квадратные уравнения — это $x^2-ax=b$ и $x^2+ax=b$, и последовательность численных операций, которые нужно применять при решении этих двух уравнений, может быть выражена хорошо нам известной (со времен ал-Хорезми) формулой, а именно $\sqrt{a^2+4b}/2+a/2$ в первом случае и $\sqrt{a^2+4b}/2-a/2$ во втором.

Очень вероятно, что вавилоняне находили их решения, добавляя $(a/2)^2$ к обеим частям уравнения и приме-

---

[1] Наиболее полное исследование математики Вавилона было проведено известным историком науки О. Нейгебауэром.— *Прим. ред.*

няя тождества $(x\pm(a/2))^2=x^2\pm ax+(a/2)^2$. Очевидно, что отрицательные корни квадратного уравнения считались несуществующими.

Вавилонские вычислители не использовали вещественных чисел, они пользовались лишь числами, имеющими конечную запись в шестидесятеричной системе (эти числа образуют кольцо). Таким образом, для решения квадратных уравнений надо, чтобы в этом кольце можно было извлекать квадратный корень, а также делить на коэффициент при x^2, если он не равен единице. Квадратный корень они искали с помощью составленной ими таблицы квадратов. Кроме того, встречаются несколько примеров кубических уравнений, таких, как $x^3=a$, $x^2(x+1)=a$, решение которых также основано на обращении к таблице кубов или суммы квадратов и кубов для нахождения подходящих значений чисел, выраженных всегда в шестидесятеричной системе. Был также отмечен пример системы, решение которой эквивалентно решению уравнения шестой степени, но квадратного относительно x^3.

Интересны еще некоторые моменты. Так, Нейгебауэр обнаружил две суммы:

$$1+2+2^2+\ldots+2^9=2^{10}-1$$

и

$$1^2+2^2+\ldots+10^2=\left[1\left(\frac{1}{3}\right)+10\left(\frac{2}{3}\right)\right]\cdot 55$$

в табличке, датируемой эпохой Навуходоносора (ок. 580 г. до н. э.), из коллекции Лувра. Быть может, вавилоняне были знакомы с некоторыми элементарными рядами, такими, как

$$\sum_{i=0}^{n} q^i=\frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Изучение текста знаменитой таблички Plimpton 322 из коллекции Колумбийского университета, проведенное Нейгебауэром в 1945 г., дает основание полагать, что вавилоняне были знакомы с пифагоровыми тройками x, y, z, такими, что $z^2=x^2+y^2$. Но определяли ли они их общими формулами

$$x=p^2-q^2, \quad y=2pq, \quad z=p^2+q^2?$$

На этот счет мнения расходятся.

Многие специалисты утверждают, что математические знания вавилонян имели в основном алгебраический характер: наибольший интерес в задачах представляли для вавилонян алгебраические соотношения, а практическое приложение решений отходило на второй план. По всей вероятности, вавилоняне с большим умением обращались с уравнениями указанных выше типов. Тем не менее отсутствие какой бы то ни было формулировки общей методологии не позволяет считать эти зачатки навыков самостоятельной дисциплиной; они были лишь простым инструментом с точными правилами его применения.

Египтяне

У нас еще меньше оснований говорить о египетской алгебре, чем о вавилонской. Среди сотни задач, содержащихся в папирусе Ринда и Московском папирусе (около 1700 г. до н. э.), большинство связаны с повседневной жизнью и касаются распределения хлеба, зерна или скота. Чаще всего они решались одними арифметическими методами или использованием линейных уравнений типа

$$x+ax=b$$

или

$$x+ax+cx=b.$$

Вся трудность для египтян заключалась в выборе единиц измерения и их подразделений. В самом деле, кроме дроби 2/3 египтяне пользовались при вычислениях только аликвотными дробями (дробями с числителем, равным единице (см. табл. 2)). Вообще при решении таких задач пользовались методом *ложного положения*. Например, «*Когда писец говорит тебе* 10, *то от чего это будет* 2/3 *и* 1/10?» Запись в виде уравнения дает $(2/3)x+(1/10)x=10$. Если взять 30, то 2/3 равны 20, а 1/10 равна 3 и итог равен 23. Однако нам нужно 10 — на сколько нужно умножить 23, чтобы получить 10? Этот метод ложного положения четко можно было выделить еще у китайцев. Он был распространен на Запад арабами под названием «ал-катаян», «китайский».

Было решено лишь несколько простых типов квадратных уравнений, как, например, уравнение $ax^2=b$. Редкие случаи, когда встречаются два неизвестных, как в системе $x^2+y^2=a$ и $y=bx$, приводят после исключения неизвестного y к тому же типу уравнения.

2. Задача 40 из папируса Ринда

Пример арифметической прогрессии и метод ложного положения

Распределить 100 караваев хлеба между 5 человеками так, чтобы $^1/_7$ общего количества караваев у трех последних равнялась количеству караваев у первых двух. Чему равна разность?

Приняв за разность $5^1/_2$ и 1 за первый член, найдем первое приближение: 1, $6^1/_2$, 12, $17^1/_2$, 23, что дает в сумме 60, т. е. $^2/_3$ от 100.

Таким образом, прибавляем к каждому члену $^2/_3$ его самого и получаем решение: $1^2/_3$, $10(^2/_3+^1/_6)$, 20, $29^1/_6$, $38^1/_3$, что в сумме дает 100.

Некоторые зачатки символической записи имеются в папирусе Ахмеса: сложение и вычитание изображались парой ног в двух различных положениях и использовался еще один символ для обозначения квадратного корня; неизвестное обозначалось символом «аха».

Однако египетская алгебра была очень ограниченной, скорее, она сводилась к чисто арифметическому процессу. Она часто применялась к задачам, относящимся к геометрии и к установлению формул для измерения площади плоских фигур и некоторых объемов.

2. Евклидова «геометрическая алгебра»

В классическую греческую эпоху геометрия занимала привилегированное положение. Она являлась именно той наукой, в которой проявлялся дедуктивный характер рассуждения, искусство доказательства, в то время как в теории чисел долгое время все сводилось к процессу обобщения с помощью простой индукции [1]) (от Пифагора

[1]) Греки строго различали теорию чисел (арифметику) и вычислительное искусство (логистику). В книгах VII—IX «Начал» Евклида была построена строгая теория целых чисел и их отношений (т. е. рациональных чисел).— *Прим. ред.*

до Никомаха Геразского в I в. до н. э.). Что касается вычислительных и практических тенденций, характерных для вавилонской математики, то они также не были отброшены. Упражнения в решении конкретных задач *логистики*, настоящего искусства вычисления, даже рекомендовались Платоном для обучения детей, «чтобы их заставляли под видом развлечения обращаться к науке чисел». Однако логистика не пользовалась благородным престижем науки.

Мы видели, что в книгах II и VI «Начал» Евклида метод приложения площадей соответствовал после перевода на язык современных алгебраических формул геометрическому построению величин, являющихся корнями некоторых уравнений второй степени. Чаще всего речь шла о нахождении двух конкретных величин, сумма (или разность) и произведение которых известны (ср. гл. 2, с. 83).

Вслед за Полем Таннери этот набор методов и результатов принято называть *геометрической алгеброй*. Таннери нашел также в теории иррациональностей книги X «Начал» описание геометрического решения биквадратного уравнения и даже зачатки решения триквадратного уравнения, увидя в перечне иррациональностей некоторый паллиатив для несуществующих у греков алгебраических обозначений.

Наконец, в результате исследования вавилонских текстов Нейгебауэр обратил внимание на тесную связь между их численной алгеброй и предложениями книги VI, а также высказал предположение, что не может не существовать некоторой преемственности между вавилонянами и греками. Не означает ли все это, что евклидова геометрическая алгебра являлась лишь геометрическим облачением арифметических и даже алгебраических по своей природе исследований, унаследованных у догреческой эпохи? Эту интерпретацию в свою очередь оспаривали многие другие специалисты по истории греческой математики.

Термин «алгебра» в применении к эпохе, когда и нахождение неизвестного и тем более исследование «уравнений» не проводились в явном виде, нужно использовать с осторожностью. Со своей стороны, методы геометрического построения книг II и VI оказывали долгое время влияние на развитие алгебры, в том числе на арабских основоположников и законодателей теории квадратных, а затем и кубических уравнений.

Другим наиболее значительным для предмета данной главы периодом греческой античности является эпоха Диофанта, когда движущей силой являлась арифметическая интуиция. Труды таких математиков, как Архимед, Аполлоний, Птолемей, подготовили интерес александрийцев начала нашей эры к подобным вопросам.

3. «Арифметика» Диофанта

Диофант открыл новую главу в математике, и невозможно выявить, какие невидимые источники питали его творчество. Жизнь Диофанта мало известна, и даже насчет дат его жизни не пришли к общему соглашению (III в. н. э.). Его великий труд «Арифметика» включал в себя, как он сам сообщил во введении, тринадцать книг.

С XVI в. известны только шесть книг. Они содержатся в греческом манускрипте, обнаруженном в 1464 г. Региомонтаном в Венеции и являвшемся копией более древнего манускрипта. Неясно, где располагались семь недостающих книг в общей структуре трактата. Тот кажущийся беспорядок, в котором находится этот труд и который мог возникнуть в результате переписок и вмешательства позднейших комментаторов, дал пищу для множества противоречивых интерпретаций в XIX в.

Ныне возникла опасность, что прежнее прочтение Диофанта окажется неверным, и анализ его труда нужно будет проводить заново. Действительно, недавно в Иране (1972 г.) были обнаружены и идентифицированы четыре из арифметических книг Диофанта. Речь идет об арабском манускрипте, датируемом 1175 г., который оказался копией знаменитого перевода Диофанта на арабский язык, приписываемого Коста ибн Лука (умер около 912 г.), под названием «Искусство алгебры». Об «Искусстве алгебры» упоминали древние арабские библиографы, и, кроме того, известно, что с X в. такие математики, как Абу-л-Вафа и ал-Караджи, к которым мы еще вернемся в этой главе, обращались к этому переводу и комментировали его.

Арабские книги помечены номерами 4, 5, 6 и 7, и первое исследование Рашеда, по-видимому, указывает на то, что они идут за греческой книгой III. Вообще проблему числа и порядка книг «Арифметики» историки математики должны полностью пересмотреть. Может оказаться, что труд Диофанта еще более значителен, чем казалось раньше [1]).

«Арифметику» нельзя считать теоретическим трудом по арифметике в пифагорейском смысле — пифагорейцы термин «арифметика» предназначали для теории чисел, которая считалась дисциплиной без определенного метода, но требующей от ума некоего рода божественной интуиции. А этот трактат ближе всего к традициям вычислительной математики, или логистики. Однако в период, когда Диофант работал над составлением своей книги, это первоначальное различие уже, по-видимому, стерлось — это видно и из самого выбора названия и из того, что практические задачи у Диофанта всегда сначала формулируются в абстрактной форме, а числовые данные вводятся позже. Эта общая и абстрактная формулировка радикальным образом отличает Диофанта от вавилонских математиков.

Разумно считать «Арифметику» компиляцией, аналогичной «Началам» Евклида, составленной одним автором, но являющейся плодом коллективной традиции. Шесть греческих книг являются собранием 189 числовых задач, снабженных решениями.

Синкопированная форма

В своем предисловии Диофант выделяет среди чисел квадраты, кубы, биквадраты, квадратокубы, наконец, кубокубы.

---

[1]) В советской историко-математической литературе (см. статью И. Г. Башмаковой, Б. А. Розенфельда и Е. И. Славутина «Арабская версия «Арифметики» Диофанта», ИМИ, 1978, вып. XXIII, 192—225, а также книгу И. Г. Башмаковой и Е. И. Славутина «История диофантова анализа», М.: Наука, 1984) высказывалось мнение, что найденные книги 1—4 «Искусства алгебры» не являются составной частью «Арифметики» Диофанта. Это — некоторая позднейшая переработка текста Диофанта, снабженная обширными комментариями. По существу к такой же точке зрения приходит и Ж. Сезиано.— *Прим. ред.*

Отметим, что наименование степеней основано на сложении показателей степеней, т. е. квадратокуб — это квадрат, умноженный на куб, $x^2x^3=x^5$, в то время как арабы (за исключением ал-Караджи), а после них и итальянские алгебраисты использовали наименование, основанное на умножении показателей степени. Диофант указывал, что решение большого числа арифметических задач приводит к операциям над числами различного вида [1]). Он ввел символы для шести первых положительных и шести первых отрицательных степеней неизвестных. Присутствие степеней неизвестной, больших трех, подтверждает независимость от чисто геометрического обоснования.

3. Диофантова синкопированная запись

Неизвестное (наше x) обозначается через ς

x^2	Δ^{Υ}
x^3	K^{Υ}
x^4	$\Delta^{\Upsilon}\Delta$
x^5	ΔK^{Υ}
x^6	$K^{\Upsilon}K$

Вычитание обозначается знаком $\pitchfork$.
Диофант использовал греческую числовую систему.

Пример: дробь

$$(2x^3+3x^2+x)/(x^2+2x+1)$$

обозначается $K^{\Upsilon}\overline{\beta}\Delta^{\Upsilon}\overline{\gamma}\varsigma\overline{\alpha}$ ἐνμοριω $\Delta^{\Upsilon}\overline{\alpha}\varsigma\overline{\beta}\overset{\circ}{M}\overline{\alpha}$
(часть от)

Неизвестное x определяется как неопределенное кратное единицы, однако на деле это означает, что его значение может быть рациональным [2]); оно просто называется *числом*. Числа, не являющиеся коэффициентами при неизвестных, называются единицами и обозначаются

[1]) То есть к оперированию с различными степенями неизвестного.— *Прим. ред.*

[2]) Во введении Диофант определяет число как множество единиц, однако в дальнейшем каждое решение, которое ищется в области положительных рациональных чисел, он называет *числом*.— *Прим. ред.*

символом $\overset{\circ}{M}$. Появился знак вычитания, в то время как сложение чисел обозначается просто написанием их друг за другом. Наконец, Диофант вставлял слова «часть от» между двумя алгебраическими выражениями в том месте, где мы ставим черту дроби (см. табл. 3).

Число неизвестных могло достигать шести [1]), но Диофант имел обозначение только для одного. Когда их было несколько, он говорил о первом, втором, самом большом, самом маленьком и т. д. неизвестном или выражал неизвестные через одно из них. В этом отношении его текст бывает иногда весьма темным.

Диофант написал свой труд в классической форме непрерывного рассуждения. Но он сократил немного этот словесный поток, систематически используя некоторые сокращения для степеней чисел, а также для операций, и заменил некоторые часто встречающиеся слова их начальными или конечными буквами. Но алгебраических манипуляций над этими сокращениями он никогда не производил. Эта стадия эволюции алгебраической записи, промежуточная между чисто описательной, словесной стадией и стадией алгебраического символизма, которая, как мы увидим, сложилась к XVII в., была названа *синкопированной алгеброй* [2]).

Определенные задачи

Книга I в греческом варианте посвящена определенным задачам первой и второй степени с одним или несколькими неизвестными. Вот пример: «*Найти два таких числа, чтобы их сумма и произведение равнялись заданным числам. Нужно, чтобы квадрат полусуммы искомых отли-*

---

[1]) В задаче III, 19 число неизвестных равно 12.— *Прим. ред.*

[2]) Диофант проводил над своими символами все алгебраические операции, которые мы проводим теперь (возведение в степень, приведение подобных, подстановки и т. д.). Отличие от алгебры XVI—XVII вв. состояло в том, что у Диофанта не было обозначений для параметров. Им приходилось придавать всякий раз конкретное числовое значение. Таким образом, в «Арифметике» впервые была введена буквенная символика. Более того, в «Арифметике» мы находим впервые запись уравнений (с числовыми коэффициентами), там же формулируются и первые операции с уравнениями, ставшие впоследствии известными под арабскими названиями «ал-джабр» и «ал-мукабала».— *Прим. ред.*

чался от их произведения на квадрат. Это необходимое условие формирования. Пусть их сумма будет 20, *а произведение* 96» (I, 27).

Диофант действовал следующим образом: он полагал, что разность двух чисел равна двум *аритмам* (аритм обозначал неизвестную величину), скажем $2d$. Тогда эти два числа равны $10+d$ и $10-d$. Имеем $(10+d)(10-d)=96$, т. е. $100-d^2=96$ и $d=2$. В современных обозначениях, если x и y — искомые числа, полагаем

$$x+y=20,$$
$$xy=96,$$
$$x-y=2d,$$

тогда

$$x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=10+d,$$

$$y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=10-d.$$

Получаем $xy=100-d^2=96$, откуда $d=2$. Первое число равно $10+2=12$, второе $10-2=8$. Мы узнаем здесь метод «больше или меньше», который использовали вавилоняне.

Таким образом, условие разрешимости выражается соотношением

$$((x+y)/2)^2-xy= \text{полный квадрат.}$$

У Диофанта оно имеет целью получение лишь рациональных положительных решений.

Действительно, если мы положим $x+y=a$ и $xy=b$, то получим значения $a/2\pm\sqrt{(a/2)^2-b}$, которые будут рациональными, если $(a/2)^2-b=$полный квадрат, что непосредственно дает

$$((x+y)/2)^2-xy=\text{полный квадрат.}$$

Мы начали с этого очень простого примера, потому что он возвращает нас к задаче из «Начал» Евклида, состоящей в отыскании двух чисел, сумма и произведение которых известны. Можно заведомо констатировать отсутствие обращений к какому бы то ни было геометрическому построению и обнаружить начатки разрешающего алгоритма, который бесспорно роднит Диофанта с вавилонянами. Эта разрешающая процедура присутствует во многих аналогичных задачах, состоящих в решении систем уравнений с двумя неизвестными, и приводит с помощью исключения к квадратному уравнению. На самом деле квадратных уравнений как таковых у Диофанта нет, хотя он и обещал во введении их рассмотреть, но тем не менее многие примеры доказывают, что он был знаком с их решением.

Коэффициенты уравнений были всегда рациональными положительными числами, часто даже целыми, и если уравнение не имело рациональных положительных корней, Диофант его отбрасывал и объявлял не имеющим смысла; иногда он изменял числовые значения, чтобы сделать уравнение разрешимым в его смысле. В противоположность Герону Александрийскому или Архимеду, допускавшим в решении геометрических задач иррациональные числа, которые они затем пытались найти приближенно, Диофант проявил себя бо́льшим приверженцем арифметики и алгебры. Для него статус чисел распространялся лишь на положительные рациональные числа. Разумеется, отрицательное решение было немыслимо.

Наконец, если уравнение второй степени имеет два допустимых корня, Диофант либо упоминал лишь об одном из них, либо, если он находил эти два решения с помощью различных процедур, то не пытался объединить их общим представлением.

Неопределенные уравнения

Пять других книг в основном посвящены *неопределенным* уравнениям, т. е. уравнениям и системам уравнений со многими неизвестными, которые, вообще говоря, имеют большое число решений. И здесь Диофант ограничился исключительно рациональными решениями. Можно сказать, что это наиболее новая тема «Арифметики» Диофанта. (В настоящее время исследование целочисленных решений этого типа неопределенных уравнений называют диофантовым анализом.)

Среди примеров неопределенных уравнений, входящих в большое число разнородных задач, мы упомянем несколько типов, первыми пришедших в голову; следуя традиции, установившейся в конце прошлого века, мы придадим задачам, которые при своем возникновении имели чисто словесную формулировку, форму алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x+a=\alpha^2, \\ x+b=\beta^2, \end{cases} \qquad a=3, \; b=2, \qquad \text{(II, 10)}$$

$$\begin{cases} xy-x=\alpha^2, \\ xy-y=\beta^2, \end{cases} \qquad \alpha+\beta=a, \qquad a=5, \qquad \text{(II, 27)}$$

$$\begin{cases} x^3+y=\alpha^3, \\ y^2+x=\beta^3, \end{cases} \qquad \text{(IV, 18)}$$

$$\begin{cases} (x+y+z)^3+x=\alpha^3, \\ (x+y+z)^3+y=\beta^3, \\ (x+y+z)^3+z=\gamma^3. \end{cases} \qquad \text{(V, 15)}$$

Один пример мы разбираем в табл. 4.

Можно сказать, что, изучив сто решений Диофанта, невозможно предвидеть сто первое; и действительно, каждая из 189 задач решалась особым способом благодаря разумному выбору вспомогательного неизвестного и блестящим вычислительным приемам, учитывающим конкретные свойства чисел, выбранных в качестве числовых значений [1]). Самые трудные дроби не пугали Диофанта — вообще он любил вычисления.

В общем случае при решении систем неопределенных уравнений он уменьшал число неизвестных, подставляя вместо них произвольные рациональные значения или выбирая вспомогательные неизвестные. Так, некоторые задачи с неопределенными уравнениями изменяли харак-

[1]) Здесь авторы повторяют ошибочное мнение, которое долгое время существовало в истории математики. На самом деле у Диофанта были вполне общие методы, которые мы отнесли бы теперь к алгебраической геометрии. Так, он владел общим методом решения уравнения $F_2(x, y)=0$, где $F_2(x, y)$ — многочлен второй степени, и показал, что если такое уравнение имеет рациональное решение (x_0, y_0), то оно имеет и бесконечно много рациональных решений, причем x, y выражаются как рациональные функции одного параметра. Он развил и более глубокие и тонкие методы, относящиеся к решению неопределенных уравнений вида $y^2=F_2(x)$, $y^3=F_3(x)$ и $y^2=F_4(x)$, где $F_k(x)$ — многочлен степени k. См. об этом подробнее в книге: Башмакова И. Г., Славутин Е. И. История диофантовых уравнений.— М.: Наука, 1984.— *Прим. ред.*

тер в ходе решения, поскольку он доопределял одну или несколько неизвестных произвольным образом, что сводило их к задачам с определенными уравнениями (см.

4. Пример неопределенной задачи Диофанта (III, 4)

«Найти такие три числа, чтобы квадрат суммы всех трех, вычтенный из каждого числа, давал квадрат. Положим сумму этих трех чисел аритмом.»

Условия задачи можно перевести так:

$$X-(X+Y+Z)^2=\alpha^2,$$
$$Y-(X+Y+Z)^2=\beta^2,$$
$$Z-(X+Y+Z)^2=\gamma^2.$$

Диофант полагал $X+Y+Z=x$, откуда $(X+Y+Z)^2=x^2$. Затем он делал следующие подстановки:

$$X=2x^2,\quad Y=5x^2,\quad Z=10x^2,$$

которые обращали все три уравнения в тождества $\alpha^2=x^2$, $\beta^2=4x^2$, $\gamma^2=9x^2$.

Затем он подставлял эти значения в соотношение $X+Y+Z=x$ и получал $2x^2+5x^2+10x^2=x$ или

$$17x^2=x,\ \text{откуда}\ x=\frac{1}{17},\ x^2=\frac{1}{289}.$$

Решение Диофанта таково:

$$X=\frac{2}{289},\quad Y=\frac{5}{289},\quad Z=\frac{10}{289}.$$

табл. 4) [1]. Он редко приводил полное семейство решений.

Хотя ни один общий результат в «Арифметике» не был сформулирован, Диофант явно ссылался на леммы, возможно доказанные в работе, озаглавленной «Поризмы» и полностью утерянной. Речь идет о тождествах, которые

[1]) Дело в том, что, как мы уже отмечали, у Диофанта не было обозначений для произвольных постоянных (или параметров), поэтому, делая подстановки, он брал вместо параметров конкретные числа, которые выполняют в его алгебре две функции — обычного числа и символа для обозначения произвольного числа. Поэтому в современных обозначениях подстановки в табл. 4 можно было бы записать так: $X=ax^2$, $Y=bx^2$, $Z=cx^2$. Тогда $x=1/(a+b+c)$ и решение имело бы вид $X=a/(a+b+c)^2$, $Y=b/(a+b+c)^2$, $Z=c/(a+b+c)^2$.—*Прим. ред.*

можно квалифицировать как алгебраические, таких, как

$$[(m-n)/2]^2+mn=[(m+n)/2]^2,$$

или

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2;$$

второе является тождеством для пифагоровых троек.

Например, в задаче из греческой книги III Диофанту нужно было построить четыре прямоугольных треугольника с одинаковой гипотенузой. Он исходит из двух пифагоровых троек: 3, 4, 5 и 5, 12, 13 и, умножая каждый «треугольник» на «гипотенузу» другого, выводит из них две новые пифагоровы тройки: 39, 52, 65 и 25, 60, 65.

Но, пишет далее Диофант, 65 записывается также в виде 16+49 и 64+1, *«а это происходит потому, что* 65 *получается от произведения* 13 *и* 5, *а каждое из этих чисел раскладывается на два квадрата»*.

В действительности он использовал здесь тождество

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2,$$

где

$$a=2,\quad b=1,\quad c=2,\quad d=3,$$

откуда

$$5\times 13=65=4^2+7^2=8^2+1^2.$$

Затем отсюда с помощью пифагоровых троек он выводит при $m=7$, $n=4$ и $m=8$, $n=1$, что

$$65^2=33^2+56^2$$

и

$$65^2=63^2+16^2.$$

Числа, выбранные для этого примера, позволяют предположить, что Диофант знал, что всякое простое число вида $4n+1$ является суммой двух квадратов. Судя по выбираемым им числовым значениям, Диофант, вероятно, был знаком со многими свойствами чисел, например с тем фактом, что число вида $4n+3$ не является суммой двух квадратов, число вида $8n+7$ не является суммой трех квадратов и т. д., но эти свойства нигде не были им высказаны явно (V, 9, 11, 14 . . .). Многие из них были сформулированы, а затем доказаны Ферма и его последователями в XVIII в. и легли в основу современной теории чисел.

«Арифметика» Диофанта предполагала хорошее знакомство со свойствами целых и рациональных чисел и подразумевала знание определенных приемов алгебраического характера: преобразования выражений, подстановок, исключения и т. д., даже если это явно не оговаривалось.

В греческой математике этот труд представлял собой новое по своей сути слово как в смысле содержания, так и методов, которые означали разрыв с традиционными геометрическими методами. Однако именно эти последние воспринимались впоследствии как основное греческое наследие, в то время как влияние Диофанта оказалось скрытым.

4. Арабская математика

Развитие арабской математики началось в VII в. нашей эры, как раз в эпоху возникновения религии ислама. Она выросла из многочисленных задач, поставленных торговлей, архитектурой, астрономией, географией, оптикой, и глубоко сочетала в себе стремления решить эти практические задачи и напряженную теоретическую работу.

В этом разделе мы остановимся на наиболее существенных ее успехах. Арабские математики добились решающих достижений и сделали ряд неоспоримых открытий в области разработки алгебраического исчисления, как абстрактного, так и практического, становления теории уравнений, алгоритмических методов на стыке алгебры и арифметики.

В развитии арабской математики можно различить два этапа: прежде всего усвоение в VII и VIII вв. греческого и восточного наследия. Багдад был первым крупным научным центром в правления ал-Мансура (754—775) и Гарун ал-Рашида (786—809). Там было большое количество библиотек, и изготовлялось много копий научных трудов. Переводились труды античной Греции (Евклид, Архимед, Аполлоний, Герон, Птолемей, Диофант), изучались также труды из Индии, Персии и Месопотамии.

Но к IX в. сформировалась настоящая собственная арабская математическая культура, и новые работы вышли за рамки, определенные эллинским математическим наследием.

Первым знаменитым ученым багдадской школы был Мухаммед ал-Хорезми, деятельность которого протекала в первой половине IX в. Он входил в группу математиков и астрономов, которые работали в *Доме мудрости*, своего рода академии, основанной в Багдаде в правление ал-Маммуна (813—833). Сохранились пять работ ал-Хорезми, частично переработанные, из которых два трактата об арифметике и алгебре оказали решающее воздействие на дальнейшее развитие математики.

Его трактат об арифметике известен только в латинском варианте XIII в., который, без сомнения, не является точным переводом. Его можно было бы озаглавить «Книга о сложении и вычитании на основе индийского исчисления». Это, во всяком случае, первая книга, в которой изложены десятичная система счисления и операции, выполняемые в этой системе, включая умножение и деление. В частности, там использовался маленький кружочек, выполнявший функции нуля. Ал-Хорезми объяснял, как произносить числа, используя понятия единицы, десятка, сотни, тысячи, тысячи тысяч..., которые он определил. Но форма использованных ал-Хорезми цифр неизвестна, возможно, это были буквы арабского алфавита или арабские цифры Востока. В действительности чисто буквенная система счисления просуществовала очень долго, о чем свидетельствуют «Книга по арифметике для писцов и торговцев», написанная Абу-л-Вафа между 961 и 976 гг., и знаменитая «Достаточная книга о науке арифметике», написанная ал-Караджи в конце X — начале XI в.

Умножение и деление на два рассматривались как отдельные операции. Вспомним, что они играли очень важную роль в египетской математике. По-видимому, ал-Хорезми обучал индийскому методу извлечения квадратного корня и использовал способ приближения, который можно представить следующим образом:

$$\sqrt{N}=\frac{1}{10^k}\sqrt{N\cdot 10^{2k}}.$$

В латинском варианте книги по арифметике ал-Хорезми сообщается, что он приводил в качестве приближения квадратного корня из числа $N=a^2+r$ величину $\sqrt{N}=a+r/2a$. Отметим, что слово *алгоритм*, которое вплоть до начала нового времени означало вычисление в десятичной позиционной системе, происходит от латинизированного варианта имени ал-Хорезми.

5. Ал-Хорезми и рождение «ал-джабр»

Самым значительным трудом ал-Хорезми можно считать «Краткую книгу об исчислении ал-джабр и ал-мукабала», которую можно рассматривать как сочинение по основам алгебры на арабском языке и которая оказала сильное влияние благодаря своим многочисленным латинским переводам на всю средневековую западную науку. Большая часть этой работы посвящена практическим задачам — насущным задачам повседневной жизни той эпохи, в частности задачам раздела наследства, связанным с очень сложными мусульманскими правами наследования. Трактат ал-Хорезми учит, как решать уравнения первой и второй степени с числовыми коэффициентами. Его алгебра целиком риторическая, он не использовал символов даже для чисел. Тем не менее он различал три вида чисел: просто числа, которые он обозначал «дирхам» (по названию греческой денежной единицы драхмы); неизвестное, которое он называл «шай» (вещь) или «джизр», когда речь шла о корне уравнения; наконец, он использовал «маал», чтобы обозначить квадрат неизвестного.

Все уравнения приводились к шести каноническим типам, которые ал-Хорезми и его ученики записывали в формах, эквивалентных следующим:

1) $ax^2=bx$; 4) $ax^2+bx=c$;
2) $ax^2=c$; 5) $ax^2+c=bx$;
3) $bx=c$; 6) $bx+c=ax^2$.

Все коэффициенты были положительные, и члены только складывались. Чтобы решать эти уравнения, были введены две основные операции:

операция *ал-джабр* (что означает «дополнение» или «восполнение»), которая состояла в избавлении от членов со знаком «минус» в одной части уравнения путем прибавления к обеим частям уравнения одинаковых членов;

операция *ал-мукабала* (что означает «противопоставление», «уравновешивание»), которая состояла в сокращении равных членов в обеих частях уравнения.

Кроме того, коэффициент при члене второй степени должен был быть сделан единицей. Например, уравнение

$$2x^2+100-20x=58$$

при помощи *ал-джабр* преобразовывалось к виду $2x^2+100=20x+58$,
при помощи *ал-мукабала* — к виду $2x^2+42=20x$
и при помощи деления на два — к виду $x^2+21=10x$.

Словом *ал-джабр* вскоре стали называть все позднейшие книги арабов по этому предмету. Оно затем распространилось на всю теорию уравнений и пришло в Европу в XIV в. в виде слова «алгебра» для обозначения этой науки.

Ал-Хорезми рассматривал уравнение $ax^2=bx$ как уравнение $ax=b$, игнорируя решение нуль; этот взгляд сохранился до XVII в. Кроме того, он искал не только корень уравнения, но и его квадрат (*маал*). Решения уравнений второй степени (типов 4, 5, 6) обосновывались при помощи некоторых геометрических построений, что частично напоминало так называемую геометрическую алгебру греков. Именно так обстоит дело с типом 4, который соответствует одному из предложений книги II «Начал». Но это лишь очень частичное сходство.

Прежде всего в «Началах» Евклида не было примеров решения уравнений типа 6, в то время как ал-Хорезми нашел для каждого типа уравнений общие правила решения. Действительно, греки искали конкретным образом одно или два различных неизвестных и видели в том, что мы называем уравнением, всего лишь соотношение, которое может существовать между этими конкретными величинами.

Неизвестное тогда может принимать всего лишь одно значение, за исключением случая, когда предположения оказываются недостаточными и значение неизвестного не определяется однозначно, поскольку одному и тому же соотношению могут удовлетворять два различных значения неизвестного. Ал-Хорезми же исследовал квадратное уравнение уже как целое, как математический объект сам по себе. Он стремился к классификации, включающей процедуру решения и обсуждение каждого случая. Но он никогда не учитывал отрицательный корень уравнения. Уравнения типа 4 и 6 имеют единственный положительный корень (поскольку произведение корней отрицательно), уравнения типа 5 либо вовсе не имеют корней, либо имеют два положительных корня. Были указаны условия существования корней и отмечен случай двойного корня.

Мы наблюдаем здесь рождение теории квадратных уравнений над множеством положительных (почти всегда рациональных) чисел, но эта теория отнюдь не была полной.

Отметим, что ал-Хорезми очень редко использовал иррациональные величины, которые называл *джизр асамм*, что означает «немой корень» или «слепой корень». Герардо Кремонский перевел в XII в. слово *асамм* латинским словом surdus (глухой) и до XVIII в. иррациональные числа назывались также глухими числами.

Ал-Хорезми дал краткое введение в алгебраическое исчисление, объяснив некоторые операции над одночленами и двучленами и некоторые преобразования типа

$$a\sqrt{x}=\sqrt{a^2x}, \dots .$$

Наконец, в его «Алгебре» содержится также ряд задач о наследстве, которые приводят к неопределенным уравнениям, часто однородным, честь постановки которых он себе не приписывает; это были задачи, которые можно было бы квалифицировать как задачи диофантова анализа, если бы к тому времени «Арифметика» Диофанта была уже переведена на арабский язык.

6. Абу-Камил, первый последователь

Ал-Хорезми следует считать подлинным основателем теории квадратных уравнений, и его труд был непосредственно продолжен Абу-Камилом, выходцем из Египта, который опубликовал трактат с почти таким же названием: «Книга об ал-джабр и ал-мукабала». В ней исследования тоже доводились до уравнений второй степени (конец IX — начало X в.). Книга Абу-Камила, снабженная большим числом примеров, значительно продвинула эту зарождающуюся алгебраическую теорию как в плане практическом, так и абстрактном. Эта книга завоевала большую популярность и была предметом многих комментариев, которые, однако, еще не найдены.

Абу-Камил более широко и более уверенно, чем его предшественник, использовал сложные преобразования над иррациональными выражениями, многочисленные операции алгебраического исчисления, на общий характер «тождеств» которого он не раз указывал своему читателю. Например, он использовал формулу

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}.$$

Сдержанность ал-Хорезми по отношению к иррациональным величинам второй степени здесь была преодолена, и Абу-Камил использовал их как объекты чисто арифметической природы. Абу-Камил использовал несколько неизвестных, которым он приписывал различные названия, и мог выбрать одну вспомогательную неизвестную для облегчения решения задачи (см. табл. 5). Он дополнил некоторые моменты теории ал-Хорезми (случай типа 6).

Алгебраическое исчисление Абу-Камила достигло уже довольно высокого уровня абстракции; в частности, хотя он еще был привязан к геометрической форме, принятой у греков, он отказался от классического требования однородности размерностей, которое ал-Хорезми еще соблюдал.

Между 970 и 1170 гг. наметилась вторая волна арабской науки, которая вознесла нарождающуюся алгебру, построенную ал-Хорезми и Абу-Камилом, на еще большую высоту: она достигла статуса теоретической дисциплины, определившей свой собственный объект исследований и развившей разнообразные методы.

Два относительно различных течения приняли участие в этом обновлении. Одно из них, работая на стыке арифметики и алгебры, питало каждую из этих дисциплин достижениями другой, перенося численные алгоритмы в алгебраические выражения и процедуры, найденные для этих последних, в область чисел; это было чрезвычайно плодотворное диалектическое движение [1]). Речь идет главным образом об ал-Караджи и его последова-

5. Задача Абу-Камила, в которую входят иррациональные величины и замена неизвестного (начало X в.)

Надо разделить 10 на две части: x и $10-x$ так, что

$$\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}=\sqrt{5}.$$

Соответствующее уравнение второй степени будет таково:

$$(2+\sqrt{5})\,x^2+100=(20+\sqrt{500})\,x.$$

Оно сводится после умножения на $\sqrt{5}-2$ к уравнению

$$x^2+\sqrt{50\,000}-200=10x.$$

Абу-Камил нашел другое, более простое решение, положив в качестве «шай» $(10-x)/x$.

Если обозначить $(10-x)/x$ через y, получим

$$y^2+1=\sqrt{5}y,$$

$$y=\sqrt{1\tfrac{1}{4}}-\frac{1}{2}.$$

Из линейного уравнения

$$\frac{10-x}{x}=\sqrt{1\tfrac{1}{4}}-\frac{1}{2}$$

определяем неизвестное x, знаменатель которого иррационален. Чтобы определить x^2, Абу-Камил возводит в квадрат обе части уравнения

$$10-\frac{x}{2}=\sqrt{1\tfrac{1}{4}}\cdot x.$$

Получаем

$$x^2+10x=100 \quad \text{и} \quad x=\sqrt{125}-5.$$

телях ал-Шахразури и особенно ас-Самавале. Воздействие, которое оказала на развитие арабской математики переведенная в X в. на арабский язык «Арифметика» Диофанта, сложно и еще мало изучено: она повлияла

[1]) Мы выражаем благодарность Р. Рашеду, указавшему нам ряд статей, которые мы поместили в список литературы и на которые опирались при написании этого раздела.

на школу ал-Караджи и влилась в древнюю арабскую традицию теоретической арифметики.

Второе течение связано с работами некоторых ученых, которые стремились главным образом достичь продвижения в области алгебры с помощью геометрии, в частности с помощью геометрического построения корней уравнений степени выше двух. Это касается в основном Ибн ал-Хайсама, ал-Хайями, Шараф ад-Дина ат-Туси.

7. Школа ал-Караджи: арифметико-алгебраисты

Ал-Караджи (конец X — начало XI в.), выходец из города Карадж, расположенного между Тегераном и Казвином, является автором многих очень важных работ, а именно «Достаточной книги о науке арифметике», «Ал-Фахри», обширного алгебраического трактата, посвященного визирю Багдада Фахру ал-Мулку, а также книги «Ал-Бади», посвященной исследованию неопределенных уравнений.

«Достаточная книга» — это учебник практической арифметики, во многом схожий с другой книгой, которую написал между 961 и 976 гг. Абу-л-Вафа и которая носит название «Книга по арифметике для писцов и торговцев». Числа там записывались словесно и нигде не использовалась десятичная позиционная система счисления, что более соответствовало привычкам торговцев.

Абу-л-Вафа подробно рассмотрел теорию дробей. Ал-Караджи также уделил внимание разложению обыкновенных дробей в сумму аликвотных дробей. Отметим здесь, что в конце X в. арифметические алгоритмы, в частности алгоритмы извлечения квадратных и даже кубических корней, получили значительное развитие. Ал-Уклидизи (около 952—953 гг.) дал приближение с недостатком квадратного корня из $N=a^2+r$ выражением $\sqrt{N}=a+r/(2a+1)$.

Другие математики, такие, как Кушияр ибн Лаббан (около 1000 г.) и его ученик Ан-Насави, улучшили эти результаты и распространили их на кубический корень, используя десятичное представление числа $N=n_0 10^{m-1}+$ $+\ldots+n_m$ и разложение бинома $(a+b)^3$, а также $(a+b+$ $+\ldots+k)^3$. Мы еще вернемся к этому предмету.

Ал-Караджи и его арифметика неизвестного

Успешное развитие арифметических алгоритмов привело Ал-Караджи и его последователей к поискам аналогичных процедур в случае алгебраических выражений.

Кроме практической части, в «Достаточной книге» есть основная алгебраическая часть, посвященная решению шести канонических типов уравнений. Но его изложение является достижением с точки зрения методологии, потому что ал-Караджи сгруппировал перед каждой задачей элементы алгебраического исчисления, которые необходимы для ее решения (преобразование иррациональных величин, тождества и т. д.).

Эта теоретическая направленность четко утвердилась в алгебраическом трактате «Ал-Фахри». В своем предисловии ал-Караджи определил цель науки исчисления как определение неизвестных величин при помощи известных. Надо обратиться к средствам арифметического исчисления и приложить их к алгебраическим выражениям, содержащим неизвестные. Так алгебра явным образом сделалась арифметикой неизвестного. Можно сказать, что здесь в первый раз был определен ее предмет, и школа ал-Караджи расширила круг методов и алгоритмов, применяющихся к выражениям, содержащим неизвестное.

Вначале ал-Караджи провел исследование степеней неизвестного и обратных к ним и затем пришел к рядам соотношений следующего вида:

$$\frac{1}{x}:\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}:\frac{1}{x^3}=\dots,$$
$$\frac{1}{x^m}\cdot\frac{1}{x^n}=\frac{1}{x^{m+n}},$$
$$\frac{1}{x^m}\cdot x^n=\frac{x^n}{x^m},$$

где m и n — положительные целые числа [1]).

[1]) По существу ал-Караджи вводит при помощи пропорций

$$1:x=x:x^2=x^2:x^3=\dots,$$
$$\frac{1}{x}:\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}:\frac{1}{x^3}=\dots$$

бесконечно много положительных и отрицательных степеней неизвестного.— *Прим. ред.*

Он применял арифметические операции к одночленам, а затем к выражениям, составленным из одночленов, т. е. к многочленам, рассматривая на равных правах сложение и вычитание. Что касается деления, то он ограничился делением на одночлены. С результатами школы ал-Караджи, касающимися деления и извлечения квадратного корня, мы знакомимся по работе его последователя ас-Самавала, который продолжил его исследования.

Но ал-Караджи удалось уже описать то, что можно было бы теперь назвать алгеброй многочленов [1]). Эти методы «арифметизации алгебры», по выражению Рашеда, основаны, с одной стороны, на начальных элементах алгебры ал-Хорезми и Абу-Камила, а с другой стороны, на переводе Диофанта, выполненном Коста ибн Лука под названием «Искусство алгебры». Действительно, хотя «Арифметика» рассматривала арифметику на множестве положительных рациональных чисел, Диофант в ней использовал методы алгебраической природы. Эти методы оказали влияние на методы арабских алгебраистов второго периода, которые ими овладели и развили их.

Ал-Караджи произвел суммирование многих конечных арифметических рядов, таких, как

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2,$$

для которого дал красивое доказательство, одновременно геометрическое и алгебраическое (см. табл. 6).

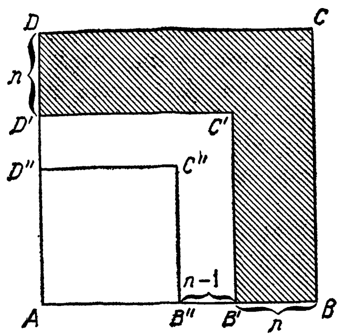
В тексте ас-Самавала, который тот, однако, приписывал ал-Караджи, имеется таблица коэффициентов для $(a+b)^n$ до $n=12$, и автор добавляет, что ее можно продолжать бесконечно в соответствии с правилом образования, которое ныне записывается как $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ (так называемый треугольник Паскаля).

В «Ал-Фахри» и «Ал-Бади» ал-Караджи рассматривал также задачи на исследование неопределенных уравнений, которые он называл «*истикра*». Эти задачи часто состояли в нахождении неизвестного рационального числа x, такого, что алгебраическое выражение, или многочлен, $P(x)$ является квадратом данного рациональ-

[1]) В смысле алгебраической структуры (см. глоссарий в гл. 8).

6. Доказательство ал-Караджи тождества

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$



Пусть $1+2+\ldots+n$ — сторона квадрата $ABCD$.

Ал-Караджи построил в этом квадрате гномон $BB'C'D'DC$ (заштрихованный), в котором $BB'=n$.

Площадь гномона равна

$$2n(1+2+\ldots+n)-n^2=2n\frac{n(n+1)}{2}-n^2=n^3.$$

Затем он построил следующий гномон с $B'B''=n-1$.

Его площадь равна $(n-1)^3$.

Продолжая таким же образом, он получил, наконец, квадрат со стороной 1.

Площадь первоначального квадрата $ABCD$ разбивается на площади всех гномонов и квадрата 1^2, равную 1^3.

Таким образом, $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$.

ного числа, например

$$ax^{2n}+bx^{2n+1}=u^2 \text{ или } x^3 \pm y^3 = u^2,$$

а также получались путем многочисленных вариаций числа неизвестных и уравнений. Недавнее открытие арабского перевода Диофанта подтверждает, что ал-Караджи в целом воспроизвел порядок задач из «Арифметики»; она способствовала развитию алгебраического исчисления.

Ас-Самавал. Табличный символизм

Главным последователем ал-Караджи был ас-Самавал, сын образованного еврея, эмигрировавшего из Марокко и обосновавшегося в Багдаде, и просвещенной женщины, Анны Исаак Леви, приехавшей из Ирака. Он готовился к карьере врача и еще в молодости ознакомился с индийскими методами вычислений и прочитал все доступные ему математические книги: Евклида, Абу-Камила, ал-Караджи, причем сумел заметить, чего им недоставало. Он стал знаменитым врачом, у него лечились многие эмиры; перед смертью он принял религию ислама.

Его самым значительным трудом по математике была книга «Ал-Бахир» («Блестящая книга о науке арифметике»), которую он написал в девятнадцать лет. Он значительно развил труды своих предшественников, в частности ал-Караджи, результаты которых перегруппировал и синтезировал. Он первый систематически изложил правила обращения с отрицательными величинами, как, например,

$$-(-ax^n) = ax^n,$$
$$-ax^n-(bx^n)=-(a+b)x^n,$$

не прибегая к большей положительной величине, из которой они обычно вычитались. Благодаря его определению нулевой степени $x^0=1$ для x, не равного нулю, он сумел обобщить понятие алгебраической степени и сформулировать правила для арифметических операций над степенями, например $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ для всех целых чисел m, n. Он использовал следующую таблицу:

$$\begin{array}{ccccccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline x^4 & x^3 & x^2 & x & 1 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^3} & \frac{1}{x^4} \end{array} \cdots$$

Таким образом, чтобы умножить x^m на x^n (n положительно), достаточно было сдвинуться на n столбцов влево от x^m. Если n отрицательно, сдвиг надо было производить вправо.

При помощи этого наглядного мнемонического способа ас-Самавал преодолел трудности, связанные с операциями, которые возникали из-за того, что алгебра его предшественников была выражена в словесной форме. Отведя каждой степени x, включая отрицательные, место в таблице, он смог представлять выражение вида $\sum\limits_{k=-m}^{k=+n} a_k x^k$ последовательностью его коэффициентов, записанных индийскими цифрами.

Эта техника, которой требовала возрастающая сложность арифметических вычислений, представляла собой решительный шаг в развитии символизма. Действительно, табличный символизм, хотя и очень неуклюжий, позволял выполнять все алгебраические операции над многочленами, и несколько веков спустя он снова обнаруживается у Штифеля, Виета и Валлиса. Ас-Самавал использовал его для создания алгоритма деления многочленов.

В действительности он рассматривал многочлены не только от одного неизвестного x, но, следуя ал-Караджи, брал многочлены от x и $1/x$, которые, говоря современным языком, принадлежат кольцу $\mathbb{Q}[x,\ 1/x]$. Но рассматривал он и многочлены в строгом смысле и получил для них метод деления многочленов с остатком; его алгоритм является обобщением алгоритма Евклида для деления целых чисел. Например, он делил $20x^2+30x$ на $6x^2+12$, продолжая деление до отрицательных степеней x, подойдя тем самым вплотную к методу разложения в ряд. В результате он получил

$$3^1/_3+5(1/x)-6^2/_3(1/x^2)-10(1/x^3)+13^1/_3(1/x^4)+\\+20(1/x^5)-26^2/_3(1/x^6)-40(1/x^7).$$

Ас-Самавал выявил закон образования коэффициентов, $a_{n+2}=-2a_n$, и выписал коэффициент при $(1/x^{28})$ в этом разложении, но это разложение справедливо, только если x достаточно велико, о чем ас-Самавал ничего не говорит.

Наконец, ему удалось найти алгоритм извлечения квадратных корней из многочленов (в широком смысле, т. е. от x и $1/x$), даже когда в них имеются отрицательные коэффициенты — этого момента не удалось преодолеть ал-Караджи.

Таким образом, арифметика и алгебра взаимно обогатили друг друга. Арифметика дала алгебре следующее: алгоритмы деления и извлечения квадратного корня, проверенные вначале на числах, были применены к выражениям вида $\sum\limits_{k=-m}^{k=+n} a_k x^k$. А алгебраические результаты, которые получили ал-Караджи и ас-Самавал, привели к возникновению в арифметике теории десятичных дробей. Действительно, если заменить x на 10, использовать тот же табличный метод и принять форму записи и способ осуществления операций, разработанные для случая алгебраических выражений, то сразу получаются правила вычислений над десятичными дробями.

Мы вкратце рассказали содержание манускрипта, недавно идентифицированного как часть «Трактата об арифметике», составленного ас-Самавалом в 1172 г., за два года до его смерти, о котором упоминали древние арабские библиографы. На самом деле исходным пунктом изложения является метод приближенного численного решения уравнения вида $x^n—Q=0$.

Ас-Самавал стремился найти неизвестное вещественное число, являющееся иррациональным корнем степени n из Q, с помощью последовательности известных рациональных чисел, приближающейся к корню степени n. Процитируем ас-Самавала: «*...вот почему становится возможным последовательно находить некоторую рациональную величину, близкую к иррациональному корню, затем другую рациональную величину, более близкую к этому иррациональному корню, чем первая, и так до бесконечности*». Он обнаружил хорошее знакомство с множеством вещественных чисел. Именно эта последовательность рациональных чисел предоставила ему возможность ввести десятичные дроби, но при этом новый объект не был никак назван. Мы не приводим здесь подробностей метода численного решения; он сходен с тем, который мы рассмотрим, когда речь пойдет о Шараф ад-Дине ат-Туси.

Многие результаты и методы конца X, XI, XII вв., которые можно тоже отнести к школе ал-Караджи, были приписаны ал-Каши, жившему в XV в., чье влияние непосредственно ощущалось на Западе, в частности в работах Региомонтана.

8. Геометры-алгебраисты и решение кубических уравнений

В первых работах, посвященных алгебре (ал-Хорезми, Абу-Камил), или в работах школы ал-Караджи исследование уравнений не выходило за рамки уравнений второй степени, или, самое большее, таких «квадратных» уравнений с одним неизвестным, как $ax^{2n+m}+bx^{n+m}=$ $=cx^m$, в работе «Ал-Фахри». Первый импульс к изучению кубических уравнений связан с задачей Архимеда, изложенной в его трактате «О шаре и цилиндре» (предложение 4 книги II); задача состояла в нахождении сечения сферы плоскостью так, чтобы отношение объемов двух полученных сферических сегментов было бы равно заданному. Геометрическое решение этой задачи с помощью пересечения двух конических сечений принадлежит Евтокию Аскалонскому (около 500 г.), который опирался на рукопись, приписываемую Архимеду [1]).

Первым, кто снова заинтересовался этой задачей, был ал-Махани. Он стремился в первую очередь придать ей алгебраическую форму, а именно «*равенство куба и числа квадрату*», т. е. форму уравнения типа $x^3+r=px^2$. Но ему не удалось построить корень этого уравнения. Многие математики X в., среди которых были Абу Джафар ал-Хазен, Ибн ал-Хайсам и другие, вернулись к ряду задач, унаследованных от александрийцев: удвоение куба, трисекция угла, построение правильных многоугольников, вписанных в окружность, в частности с семью и девятью сторонами. Но все эти задачи на геометрическое построение приводят к уравнениям 3-й степени и, следовательно, неразрешимы при помощи циркуля и линейки, что было доказано Ванцелем в 1837 г. (см. приложение к гл. 3).

Таким образом, задачи этого рода были вызовом арабским геометрам и служили предметом споров; им пришлось обратиться не к прямой и окружности, а к другим кривым — к коническим сечениям Аполлония.

---

[1]) Это решение принадлежит Архимеду. Евтокий — комментатор Архимеда — привел решение из найденной им рукописи Архимеда. Архимед не только решил задачу, но и провел полное ее исследование.— *Прим. ред.*

Ибн ал-Хайсам, известный в Западной Европе под именем Альгазен, выходец из Басры в Ираке, жил в Каире (965—1093). Он был математиком, астрономом, физиком и врачом. Его работы в области оптики, физиологии зрения, отражения и преломления света оказали значительное влияние на ученых Запада, в частности на Кеплера, Декарта, Гюйгенса. Он решил указанную задачу Архимеда при помощи параболы и гиперболы, и одновременно с этим ал-Хазен нашел ее приближенное решение. Известно, что эту задачу можно свести к кубическому уравнению вида $x^3+a^2b=cx$, и при его решении (у Евтокия и ал-Хайсама) рассматривается пересечение параболы $x^2=ay$ и гиперболы $y(c-x)=ab$. Однако в этих решениях еще отсутствуют алгебраические выражения.

В «Трактате по оптике» задача определения точки отражения на цилиндрическом зеркале светового луча, идущего из некоторой точки и попадающего в глаз наблюдателя, привела ал-Хайсама к уравнению 4-й степени, которое он решил, прибегнув к пересечению окружности и гиперболы. Он также написал два трактата, посвященные построению правильного семиугольника.

В X в. тенденция придавать алгебраическую формулировку известным в прошлом задачам третьей степени усиливается благодаря явному прогрессу в теории уравнений второй степени, которая предлагала модель их решения в радикалах, а также благодаря насущным потребностям астрономии, которая выдвинула в явном виде множество задач 3-й степени.

Ал-Бируни (973—1048) составил таблицы синусов. Он в явном виде сформулировал два кубических уравнения:

$$x^3-3x-1=0, \quad \text{где } x \text{ есть хорда угла в } 20^\circ,$$
$$x^3-3x+1=0, \quad \text{где } x \text{ есть хорда угла в } 80^\circ.$$

Многочисленность, а также важность задач, сводящихся к уравнениям 3-й степени, вызвали необходимость создания более систематической теории таких уравнений, а развитие алгебраического исчисления ал-Караджи сделало возможным ее создание. Эта теория принадлежит ал-Хайями.

Ал-Хайями

Ал-Хайями (или Омар Хайям) родился в 1048 г. в Нишапуре, в области Хорасан, где он получил образование. Беспокойная политическая обстановка той эпохи вынудила его вести скитальческую жизнь, часто переезжать с места на место.

Около 1070 г. он обосновался в Самарканде, получил поддержку Абу-Тахира и написал под его покровительством свой большой трактат «О доказательствах задач ал-джабр и ал-мукабала (Рисала...)», посвященный кубическим уравнениям. Затем он прожил восемнадцать лет в Исфахане, где руководил при покровительстве султана Малик-шаха обсерваторией, в которой были собраны лучшие астрономы, составлявшие точные астрономические таблицы и подготовлявшие реформу календаря. Однако смерть султана лишила его защиты от преследований, и он снова пустился в странствия.

Он написал ряд философских трудов и, главное,— знаменитые «Рубайат», содержащие около тысячи четверостиший на персидском языке и принесшие ему в XIX и XX вв. мировую известность.

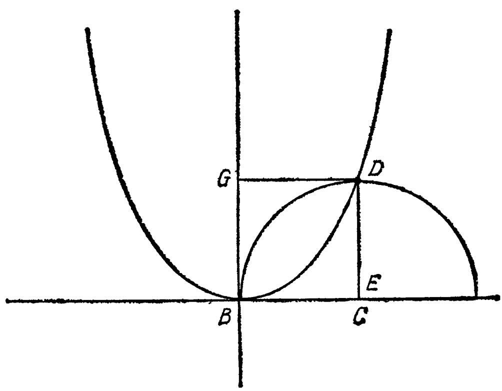
Кроме трактата «Рисала», его наиболее значительным научным вкладом является комментарий к евклидовой теории параллельных и отношений, к которому мы еще вернемся. Его арифметический трактат об извлечении корней не найден, но о нем свидетельствуют его последователи.

В трактате «Рисала» ал-Хайями объяснил, что алгебра — это теория уравнений, правая и левая части которых суть многочлены. И здесь алгебра четко отделена от арифметики. Неизвестные величины могут быть и целыми числами, и непрерывными величинами (длина, площадь, объем и даже время), и их нахождение требует как численных решений, так и геометрических. Ал-Хайями признавал неудачу своей попытки найти решение кубических уравнений «в радикалах», но высказал пожелание: «*быть может, кто-нибудь из тех, кто придет после нас, это осуществит*». Что касается геометрических решений, то ал-Хайям указывал, что в случае кубических уравнений следует опираться на две первые книги аполлониевых «Конических сечений», поскольку евклидовых «Начал» недостаточно.

В трактате ал-Хайями содержалась классификация уравнений и геометрических построений корней, при помощи которых определяется число и наличие положительных корней. Уравнения исследовались в общем виде, т. е. с произвольными положительными коэффициентами, однако выражены были целиком в словесной форме.

Как и древние, он полностью придерживался принципа однородности размерностей. Например, чтобы геометрически решить уравнение $x^3+ax=b$, он вначале его

7. Ал-Хайями. Решение кубического уравнения



Ал-Хайями решил уравнение $x^3+ax=b$ с помощью пересечения окружности $x^2+y^2=qx$ и параболы $x^2=py$.

приводил к виду $x^3+p^2x=p^2q$. Это уравнение решалось с помощью окружности $x^2+y^2=qx$ и параболы $x^2=py$ (см. табл. 7). Абсцисса точки пересечения этих кривых, не совпадающей с началом координат, есть корень данного уравнения. Точно так же этот метод применялся для решения другого уравнения $x^3=ax+b$. Его решение сводилось к рассмотрению пересечения параболы $x^2=\sqrt{a}y$ и равносторонней гиперболы $x(b/a+x)=y^2$, и т. д. Для каждого класса кубических уравнений (а ал-Хайями различал четырнадцать канонических типов) он обосновал выбор соответствующей пары конических сечений. Этот выбор не был произвольным: как показал Вёпке, первый издатель «Алгебры ал-Хайями» в XIX в., предпочтение отдавалось окружностям, равносторонним гиперболам, асимптоты или оси симметрии которых были параллельны осям координат, а также параболам, ось симметрии которых была одной из осей координат.

Наконец, ал-Хайями обсуждал условия существования положительных корней в зависимости от значений некоторых параметров, условия, при наличии которых конические сечения пересекаются или не пересекаются. Так, в случае уравнения $x^3+a=cx^2$ построение корня производилось при помощи параболы $y^2=\sqrt[3]{a}(c-x)$ и гиперболы $xy=\sqrt[3]{a^2}$. Ал-Хайями показал, что при $\sqrt[3]{a}\geqslant c$ решения не существует, затем исследовал случай, когда $\sqrt[3]{a}$ больше, меньше или равен $c/2$, и указал пределы, в которых могут существовать корни. Он в явном виде отметил, что уравнение 3-й степени может иметь два положительных корня, но, несмотря на подробное исследование, упустил возможность существования трех положительных корней, в частности в случае уравнения

$$x^3+bx=cx^2+a.$$

Некоторые другие моменты, связанные с геометрической теорией кубических уравнений ал-Хайями, но практически отсутствующие в его книге, более ясно проявились у одного из его последователей Шараф ад-Дина ат-Туси: речь идет об исследовании свойств кривых для установления их пересечений, их непрерывности, выпуклости, асимптотического поведения.

Геометрическое построение корней уравнений вызывало позднее, в XVII в., интерес почти у всех математиков. В частности, Декарт нашел единое построение для решения уравнений 3-й и 4-й степени с помощью параболы и окружности. Впрочем, использование геометрических построений в алгебре привело его к классификации алгебраических кривых и тесно связано с развитием аналитической геометрии.

9. Численное решение и методы приближения от Шараф ад-Дина ат-Туси до ал-Каши

Конец XII и начало XIII в. ознаменовались многочисленными работами в области алгебры и арифметики. Нам не известны их авторы, и немало работ так и не обнаружено. Не так давно начали изучать манускрипт из собрания Министерства по делам Индии в Лондоне. Речь идет о конспекте анонимного автора книги «Трактат об уравнениях» Шараф ад-Дина ат-Туси, упоминаемой многими арабскими учеными, в частности ал-Каши в XV в.

Шараф ад-Дин ат-Туси

Шараф ад-Дин ат-Туси, который жил в Иране в конце XII в. (он умер примерно в 1213—1214 г.), был последователем ал-Хайями и продолжил его исследования по решению кубических уравнений геометрическим способом. Он добавил к ним довольно систематическое исследование существования у этих уравнений положительных корней. И это занятие привело его к серьезным достижениям в изучении кривых с помощью уравнений и даже к использованию в своих вычислениях соображений инфинитезимального характера.

В действительности его исследование почти всегда основывалось на поисках максимумов, и для этого Шараф ад-Дин использовал выражения, соответствующие первой производной многочленов. Хотя это понятие нигде не было выделено и существующий манускрипт пока не позволяет установить происхождение этих глубоких результатов, все же следует отметить их наличие.

Он отмечал роль дискриминанта в кубических уравнениях: например, он заметил, что у уравнения $x^3+a=bx$ положительные корни существуют лишь в случае, когда $b^3/27-a^2/4$ положительно или равно нулю. Но этот дискриминант не появляется в формуле решения, и, по-видимому, невозможность дать непосредственное алгебраическое решение этих уравнений заставила Шараф ад-Дина ат-Туси поставить задачу их численного приближенного решения.

Для этого он применил всю сумму математических достижений двух последних веков и теоретический и технический аппарат, выкованный как арифметико-алгебраистами, так и геометрами-алгебраистами: алгоритмы извлечения корней из чисел, «алгебру» многочленов ал-Караджи, табличный символизм, формулу бинома, обобщение теории уравнений на неквадратные уравнения и даже примитивную попытку исследования кривых алгебраическими средствами.

Вся эта техника используется в методе численного решения Шараф ад-Дина ат-Туси. Его метод явился развитием способов извлечения корня из числа или, быть может, вычисления положительного корня уравнения $x^n=N$, без сомнения, известных со времен ал-Хайями и использованных позднее ал-Каши. Если x_0 — наибольшее целое число, меньшее $\sqrt[n]{N}$, то $N=x^n$ записывается в виде $N=(x_0+x_1)^n$ и приближение состоит в том, что пишут $x_0^n + nx_0^{n-1}x_1 \approx N$, т. е. пренебрегают степенями x_1/x_0, большими двух, в разложении бинома. Впрочем, этот же метод использовали Штифель и Виет.

В «Трактате об уравнениях» Шараф ад-Дин распространил свой метод на небиномиальные квадратные и кубические уравнения.

Приводим подробности метода Шараф ад-Дина ат-Туси на примере кубического уравнения

$$x^3+3ax=N;$$

пусть

$$x^3+36x=91750087.$$

Метод состоит в последовательном отыскании каждого разряда числа N (миллионы, сотни тысяч, . . ., десятки, единицы) с помощью группировки членов при возведении в куб величины, которая считается состоящей из некоторого числа сотен (x_1), некоторого числа десятков (x_2) и некоторого числа единиц (x_3), и умножения этой величины на 36.

Ныне мы формализовали бы ситуацию следующим образом: обозначим корень через $x=x_1+x_2+x_3$, где

$$x_1=a\cdot 10^2,$$
$$x_2=b\cdot 10,$$
$$x_3=c$$

(здесь a, b, c — цифры от 0 до 9),

$$x^3=(x_1+x_2+x_3)^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+$$
$$+3x_1^2x_3+3x_1x_3^2+3x_2^2x_3+3x_2x_3^2+6x_1x_2x_3,$$
$$36x=36x_1+36x_2+36x_3.$$

Расположим эти выражения по убывающим степеням 10:

$$x^3=a^3\cdot 10^6+3a^2b\cdot 10^5+3ab^2\cdot 10^4+3a^2c\cdot 10^4+6abc\cdot 10^3+$$
$$+b^3 10^3+3ac^2\cdot 10^2+3b^2c\cdot 10^2+3bc^2\cdot 10+c^3,$$
$$36x=36a\cdot 10^2+36b\cdot 10+36c.$$

Первый этап (схема I) состоит в нахождении a, т. е. наибольшего числа сотен, куб которого меньше 91 миллиона.

Схема I:

N	9	1	7	5	0	0	8	7
$x_1^3+36x_1$	6	4		1	4	4		
N_1	2	7	7	3	5	6	8	7
					1	2		

Вычислитель находит $a=4$.

Затем он суммирует все члены, которые можно определить, исходя из этого значения a, и записывает то, что остается:

$$N_1=N-a^3 10^6-36a10^2,$$
$$N_1=91\,750\,087-64\,000\,000-14\,400,$$
$$N_1=27\,735\,687.$$

Второй этап (схема II) состоит в нахождении b. В том, что осталось, вычислитель отыскивает, какой член, содержащий b, может достигать сотен тысяч: таким образом, он ищет такое наибольшее целое число b, что $3a^2b<277$, т. е. $3\cdot 16\cdot b<277$. Он находит, что $b=5$.

Схема II:

N_1	2	7	7	3	5	6	8	7
x_2^3			1	2	5			
$3x_1+3x_2^2+3x_2x_1^2+36x_2$	2	7	0	0	1	8	0	
			6	0	8	8	8	7
		1	6			1	2	
			2	0				

Затем он снова повторяет операцию, состоящую в определении остатка, после того, как вычитают из N_1 все члены, содержащие уже найденные a и b.

$$N_2=N_1-3a^2b\cdot 10^5-3ab^2 10^4-b^3\cdot 10^3-36b\cdot 10=608\,887.$$

Третий этап (схема III) состоит в нахождении точно таким же образом c, т. е. такого наибольшего целого числа, что $3a^2c<60$, т. е. $3\cdot 16\cdot c<60$.

Схема III:

6	0	8	8	8	7
					1
6	0	8	8	8	6

Он находит $c=1$.

Тогда он определяет последний остаток, который в данном случае равен нулю.

Корень равен 451.

Этот манускрипт, как, впрочем, и другая работа, «Сборник по арифметике с помощью доски и пыли» Насир ад-Дина ат-Туси (около 1265 г.), является подтверждением того, что труд ал-Каши служил завершением длительной работы предыдущих веков в области арифметики и алгебры.

Труды ал-Каши

Ал-Каши (умер в 1429 г. в Самарканде) был одним из последних великих арабских ученых; он был астрономом и математиком. После долгих лет бедности и лишений он приехал в Самарканд, где правитель Улугбек, сам будучи ученым, основал школу для способных учеников, построил обсерваторию, которой ал-Каши руководил в течение долгих лет, и превратил свой город в самый крупный научный центр Востока. В области астрономии ал-Каши работал совместно с Кади-заде над составлением астрономических таблиц необычайной точности — так называемых таблиц «Зидж Улугбек»,— в которых давались значения синусов и тангенсов дуг, следующих с промежутком в 1 мин.

Его наиболее известный труд «Ключ к арифметике» («Мифах ал-хисаб», 1427 г.), настоящая энциклопедия математики, написан так, чтобы отвечать потребностям всех — вычислителей, астрономов, архитекторов, а также чиновников и торговцев. Он стал справочной книгой для математиков последующих столетий, его очень часто переписывали и обновляли. В этой книге собрано большинство арифметических и алгебраических методов, выработанных ранее и о которых здесь уже шла речь. В частности, ал-Каши изложил не только шестидесятеричную арифметику, но в первый раз привел довольно методично теорию десятичных дробей, чтобы доказать, что над ними можно производить различные операции точно так же, как над целыми числами. Большое внимание он уделил переводу чисел из одной системы счисления в другую; он также снова вернулся к методу извлечения квадратных корней (так называемому методу Руффини — Горнера (XIX в.)). Этот метод мы уже упоминали, когда говорили о Шараф ад-Дине ат-Туси.

В «Трактате об окружности» он дал определение 2π с 16 правильными десятичными знаками, и его приближенное вычисление, как и вычисление Архимеда, было основано на вычислении периметра правильных многоугольников, вписанных в окружность и описанных вокруг нее. Но работа ал-Каши отличается большим изяществом метода и простотой численных оценок и далеко превосходит все предшествующие попытки.

Его мастерство владения методами приближения проявляется также при численном решении уравнения трисекции угла. По всей вероятности, оно содержалось в ненайденной работе «Трактат о хорде и о синусе», но о нем сообщает внук Кади-заде, Мирам Салаби (умер около 1524 г.). Это уравнение получается из соотношения $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ и, следовательно, его можно записать в виде $x^3+q=px$. Ал-Каши исходил из значения $\sin 3°$, которое можно найти элементарным способом, и искал $\sin 1°$. В случае, когда надо решить уравнение вида $x=(q+x^3)/p$ и известно, что положительный корень очень мал, его метод по существу состоял в том, что за первое приближение он брал $x_1=q/p$, за второе приближение $x_2=(q+x_1^3)/p$, . . ., за n-е приближение $x_n=(q+ + (x_{n-1})^3)/p$.

Можно доказать, что этот метод быстро сходится и оказывается более интересным и экономичным в смысле вычислений, чем другие общие методы приближенного решения. В XIX в. Ганкель смог написать об этом методе, что *«он не уступает ни в тонкости, ни в элегантности ни одному из методов приближения, открытых на Западе со времен Виета»*. Кроме того, он утверждал, что это первый численный метод последовательных приближений в истории математики.

Арабская математика Востока достигла своего апогея в работах Самаркандской школы. Но после смерти Улугбека в 1449 г. школа распалась и математические исследования пришли в упадок.

На Западе, без сомнения, не было столь выдающихся арабских ученых, за исключением известного марокканского математика ибн ал-Банны (1256—1321). Но наиболее интенсивно научные и культурные контакты между исламскими странами и христианскими странами Европы развивались в Испании. В XII в. процветала деятельность переводчиков и компиляторов арабских научных трудов и арабских переводов с греческого. И долгое время спустя именно в Испании, а также на Сицилии европейские ученые продолжали изучать арабскую науку. Среди арабских математиков Запада следует упомянуть ал-Калазади, который жил в Гранаде и умер в 1486 г. в изгнании в Африке. Его книга «Обучение науке арифметике» очень содержательна и отличается от «Ключа к арифметике» ал-Каши и других ранних работ ученых Востока, в частности, наличием весьма разработанной математической символики: квадратный корень обозначен первой буквой слова «джизр» (корень), помещенной над числом. В уравнениях первая степень, квадрат и третья степень неизвестных обозначены первыми буквами слов «шай», «мал» и «каб», и все эти знаки помещены во всех случаях над коэффициентами. Был введен знак для равенства. Развитие процессов, которые привели к этим элементам алгебраической символики, по-видимому, происходило в основном в Северной Африке начиная с XIII в. Отметим, что в Европе развитие символизма началось приблизительно в то же время, в конце XV в.

10. Понятие числа

Представление о понятии числа, которое складывается у математиков некоторой эпохи, всегда свидетельствует о том теоретическом уровне, которого достигла к этому времени математика, и определяет границы их арифметико-алгебраической практики.

Развитие вавилонской математики происходило в рамках кольца чисел, имеющих конечное представление по основанию 60, египетские математики ограничивались целыми числами и дробями с числителем единица, греки владели тонкой теорией отношений книги V «Начал», тонкой, но неудобной для практических применений [1]). Нарождающаяся алгебра (Диофант, ал-Хорезми) не выходила за пределы множества положительных рациональных чисел. Остановимся на состоянии, в котором находилось понятие числа в эпоху становления алгебры в арабской математике.

Рождение нового понятия числа, охватывающего одновременно все вещественные положительные числа, можно проследить уже в начале X в. в использовании одного и того же слова «адад» (число) для рациональных чисел (ал-адад ал мунтика) и для иррациональных (ал-адад ал сумма) [2]). Постепенно, начиная с Абу-Камила и

---

[1]) Можно обратиться также к началу гл. 5.

[2]) Такое обобщение понятия числа мы находим в античной математике начала нашей эры. Так, Птолемей в «Альмагесте» называет любое отношение величин (хорд к диаметру или отрезков касатель-

вплоть до ас-Самавала, иррациональные числа становятся полноправными объектами алгебры и арифметики; понятия несоизмеримых геометрических величин и числовых иррациональных величин постепенно сближаются.

Намерение ал-Караджи и ас-Самавала распространить операции арифметики, включая извлечение корней, на алгебраические иррациональные величины привело к расширению области вычислений — они теперь стали затрагивать и числа, и отрезки прямых, т. е. и арифметические и геометрические объекты,— а также к прояснению алгебраической структуры вещественных чисел. Если временно обратиться к современному языку, то можно сказать, что ал-Караджи и ас-Самавал достигли очень глубокого эмпирического знания в области конечных алгебраических расширений поля рациональных чисел, в частности степени 2 и 4.

Эта точка зрения повлекла за собой новую интерпретацию книги X «Начал», которую теперь арифметики-алгебраисты стали рассматривать не только как книгу о геометрии, но и как книгу о величинах вообще, т. е. о числах. Действительно, для них преобразования над иррациональными величинами соответствовали арифметическим операциям, и они их объясняли на числовых примерах.

Наконец, от ас-Самавала до ал-Каши, использование последовательностей десятичных чисел для приближения иррационального числа знакомило математиков с непрерывной структурой вещественных чисел. Тем не менее эти арифметики-алгебраисты не задавались слишком точными вопросами о статусе таких несоизмеримых величин и причинах успеха новой трактовки.

Эти вопросы, связанные с теорией пропорций книги V «Начал», были затронуты такими геометрами, как ал-Хайями в его «Комментариях к трудностям во введениях книги Евклида». В них ал-Хайями изложил разработанную теорию пропорций. Хотя он и считал правильным определение пропорций, данное в книге V «Начал», но

ных к диаметру) числом. На эти отношения Птолемей распространил обычные арифметические операции, тогда как у Евклида для них определялась только операция «составления», соответствующая умножению. Таким образом, расширение понятия числа произошло задолго до X в.— *Прим. ред.*

полагал, что оно не выражает сущности отношения, состоящей в измерении одной величины с помощью другой.

Что касается отношения несоизмеримых величин, а это трудный пункт данной теории, он воспользовался разложением отношения A/B в непрерывную дробь.

Напомним, что такое непрерывная дробь.

Пусть x — положительное рациональное или иррациональное число. Можно положить

$$x=q+\frac{1}{x_1}, \quad x_1=q_1+\frac{1}{x_2}, \ \ldots, \ x_{n-1}=q_{n-1}+\frac{1}{x_n}, \ \ldots,$$

где q, q_1, $q_2, \ldots$ — соответственно наибольшие целые числа, содержащиеся в x, x_1, $x_2, \ldots$. Только первое целое число может быть равно нулю, другие же больше или равны 1.

После подстановки можно записать:

$$x=q+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cdot_{\cdot_{\cdot_{+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cdot_{\cdot_{\cdot}}}}}}}}$$

и это выражение называется непрерывной дробью.

Если x — рациональное число A/B, то существует значение n, для которого $1/x_n=0$. Действительно, указанная процедура сводится к алгоритму Евклида деления A на B, который в данном случае оказывается конечным. Он записывается следующим образом:

$$A=Bq+r; \ B=rq_1+r_1; \ldots; r_{n-1}=q_n r_n+r_{n+1}, \text{ но } r_{n+1}=0;$$

или же

$$\frac{A}{B}=q+\frac{1}{\frac{B}{r}}; \quad \frac{B}{r}=q_1+\frac{1}{\frac{r}{r_1}}; \quad \ldots; \quad \frac{r_{n-1}}{r_n}=q_n.$$

Если x иррационально, то последовательность бесконечна, и можно доказать, что x является пределом дробей, полученных, если ограничиваться каждый раз только конечным числом членов; $q, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ называются неполными частными непрерывной дроби.

Ал-Хайями указывал, что два отношения равны, если равны их неполные частные для всех n. Он привел также критерий, позволяющий сравнивать два отношения, и пытался установить эквивалентность своей теории с теорией книги V «Начал» Евклида [1]).

Здесь ал-Хайями затронул глубокую проблему связи, существующей между понятиями отношения и числа, которая для него имела философскую природу: «*Может ли отношение по своей сути быть числом или число ему только сопутствует, кроме того, связано ли отношение с числом не по своей природе, а посредством чего-то внешнего, или отношение связано с числом по своей природе, и потому нет нужды в чем-то внешнем?*». Каков бы ни был ответ, ал-Хайями считал, что любые отношения должны выражаться посредством чисел, даже если некоторые из них не будут «настоящими» числами; мы сказали бы теперь, что они являются иррациональными числами.

Его концепция была принята и развита Насир ад-Дином ат-Туси в работах «Изложение Евклида» и «Трактат о полном четырехстороннике»; для него каждое отношение имеет меру.

Это теоретическое завоевание, распространение понятия числа на положительные иррациональные числа, стало известно в Европе в конце XVI в. благодаря изданию в Риме «Изложения Евклида» сначала на арабском языке в 1594 г., а затем в латинском переводе в 1657 г.

На христианском средневековом Западе, где практика арифметики и алгебры была намного менее развитой, чем у арабов, концепция числа оставалась узкой. Брадвардин утверждал, что иррациональную пропорцию нельзя представить числом, а Орем полагал, что в то время, как геометрия рассматривает и несоизмеримые величины, арифметика занимается соизмеримыми величинами.

В XVI в. Штифель (1487—1567) еще отказывался признать за иррациональностями право считаться «настоящими» числами, тогда как Симон Стевин (1548—1620),

---

[1]) Аналогичная теория, как удалось восстановить на основании высказываний Аристотеля, существовала в античности до Евдокса, но была оставлена, так как нет удобных формул, чтобы при умножении двух отношений по неполным частным сомножителей вычислить неполное частное произведения.— *Прим. ред.*

который обладал настоящим практическим опытом вычислений с числами в десятичной системе,— это он ввел в Европе десятичные дроби в небольшом трактате, изданном на фламандском языке в 1585 г.,— развил бурную деятельность, чтобы заставить признать иррациональности полноправными числами. Он выступил против использования терминов «иррациональный», «невыразимый».

Спор вокруг прочтения и интерпретации пятой книги Евклида продолжался в течение всего XVII в. Однако начавшееся в эту эпоху развитие всех исчислений, алгебраического символического исчисления и исчисления бесконечно малых, сломало рамки, в которых он возник. Теоретически этот вопрос прояснился лишь в XIX в., когда различными способами были построены теории вещественных чисел (Дедекинд, Вейерштрасс, Кантор, Мере).

Что касается непрерывных дробей, то им было уделено большое внимание в XVIII в. при изучении теоретико-числовых проблем, связанных с природой рациональных, иррациональных, алгебраических и трансцендентных чисел.

Например, Эйлер показал, что периодическая непрерывная дробь есть вещественная квадратичная иррациональность (т. е. корень уравнения второй степени, дискриминант которого не является полным квадратом), а Лагранж доказал обратную теорему.

11. Немецкая школа «Косс»

В эпоху Возрождения алгебраические знания на Западе значительно обогатились, особенно в Италии и Германии, где возникли настоящие школы алгебраистов. Открытие в 1464 г. Региомонтаном, крупным собирателем и переводчиком греческих манускриптов, «Арифметики» Диофанта, без сомнения, оживило интерес к тому, что он назвал «искусством «вещи», или неизвестной» (ars rei et census) [1]).

[1]) Региомонтан не опубликовал ни рукописи Диофанта, ни выдержек из нее, поэтому «оживление» она вряд ли могла вызвать. Европейские математики познакомились с рукописью «Арифметики» только 100 лет спустя (см. об этом ниже).— *Прим. ред.*

В самом деле, термины, используемые арабами для обозначения неизвестного, означают «вещь» и «корень». Вместе с наименованием квадрата неизвестного, которое означает «владение», эти названия породили употреблявшиеся в эпоху христианского средневековья термины res, radix, causa для обозначения неизвестного (cosa по-итальянски, coss на немецкий лад) и census для квадрата неизвестного.

Немецкая школа, которая и получила название «Косс», стремилась выработать удобные обозначения и ввела в формулах сокращения от res, radix, census и т. д.; эти обозначения называются коссическими символами.

Необходимость в обозначениях, которые позволили бы сократить вычисления, с развитием торговли и становлением товарного хозяйства становилась насущной. Под давлением практических потребностей и в связи с изобретением книгопечатания появились многочисленные учебники арифметики. По большей части они были посвящены четырем основным операциям — умножение и деление рассматривались в эпоху Возрождения как самостоятельные операции — затем давалось тройное правило и некоторые зачатки математики, необходимой для финансовой и торговой деятельности. Самым древним из таких учебников была «Арифметика из Тревизы» («Arithmétique de Trévise») неизвестного итальянского автора (1478 г.) и его немецкий аналог «Бамбергская книга о счете» («Bamberger Rechenbuch») (1483 г.). Книга «Наука о числах в трех частях» («Triparty en la science des nombres») (1483 г.) самого крупного французского математика XV в. Никола Шюке имела большое влияние, хотя и оставалась неизданной до 1880 г. По-видимому, он первым использовал показатели для обозначения степеней неизвестной.

Примерно в ту же эпоху в Германии развивалась традиция «рехенмейстеров» (мастеров вычислений), практиков, занимавшихся преподаванием приемов вычисления; эта традиция лежала в основе коссической алгебры. Первый учебник алгебры на немецком языке, автором которого был Рудольф, вышел в Страсбурге в 1525 г.; в нем уже широко применялись знаки + и —, которые практик Видман использовал в 1489 г. для обозначения «избытка» и «недостатка». Коссические учебники играли заметную роль в представлении и организации полученных знаний. Характерной была тенденция к систематизации, сокращению числа коссических символов и четкому осознанию необходимости единообразных символических обозначений.

Книга «Полная арифметика» («Arithmetica integra») Михаила Штифеля (1487? —1567), который не был ни практиком, ни университетским ученым, а странствующим проповедником Реформации, объединила в себе все

8. Коссические обозначения

Кристоф Рудольф ввел в 1525 г. обозначение  для квадратного корня,  для кубического корня и  для корня четвертой степени.

М. Штифель принял обозначение $\sqrt{}z$ для $\sqrt{\ }$, но позже писал $\sqrt{\ }$,

$\sqrt{}\&$ для $\sqrt[3]{\ }$,

$\sqrt{}zz$ для $\sqrt[4]{\ }$.

Для x^2 он употреблял обозначение AA, а для x^3 — обозначение AAA.

те изменения в обозначениях арифметических операций и неизвестных вместе с их степенями, которые произошли к тому времени. Он ввел символ $\sqrt{\ }$ для обозначения квадратного корня и обозначал неизвестные буквами A, B, C,. . ., повторенными столько раз, какова их степень (см. табл. 8).

Штифель придавал большое значение изучению арифметических прогрессий, которые он без колебания продолжил в область отрицательных чисел. В соответствующих геометрических прогрессиях (см. гл. 6, с. 298) появились отрицательные показатели степени, которым он приписывал роль, симметричную роли положительных показателей.

Работа Штифеля имела большой резонанс, и его обозначения распространились за пределы Германии вплоть до Италии, где алгебраисты пытались в это время решить уравнение третьей степени.

12. Итальянские алгебраисты эпохи Возрождения

В Италии в конце XV в. появилось много работ в области практической арифметики. Францисканский монах Лука Пачоли (1450—1510), занимавший кафедру математики в Милане, опубликовал первую напечатанную типографским способом книгу, в которой действительно содержались сведения по алгебре: «Сумма ⟨знаний⟩ по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциям» («Summa de arithmetica, geometria, proporzioni di proporzionalita») (1494 г.). В ней он привел созданную арабами классификацию уравнений второй степени. Впрочем, по-видимому, совокупность алгебраических достижений арабов была известна в Италии и послужила отправной точкой для исследований итальянских математиков.

В 1500 г. гражданин Болоньи, очень известный профессор математики Сципион дель Ферро (1456—1526) дал формулу решения уравнения $x^3+ax=b$:

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Несмотря на прогресс, достигнутый арабами в области кубических уравнений, эта формула была новшеством. Но как это было принято в ту эпоху, дель Ферро держал свой метод в тайне. Тем не менее его формула, по-видимому, способствовала большим успехам в теории уравнений и вызвала живое соперничество и жестокие споры о приоритете среди его последователей: Тартальи, с одной стороны, и Кардано и его школы, с другой.

Около 1535 г. Николо Фонтана из Брешии (1499? — 1557), известный под именем Тарталья, в ходе публичного состязания разрешил три десятка кубических уравнений специального вида

$$x^3+mx^2=n \text{ и } x^3+ax=b.$$

По-видимому, Кардано ознакомился с его методом, но поклялся его не разглашать. Однако он первый в 1545 г. обнародовал этот метод решения кубических уравнений, чем на долгие годы вызвал ярость Тартальи.

На самом деле Кардано, известный врач и эрудит — он написал за свою жизнь около двухсот статей на самые различные темы,— уже опубликовал в 1539 г. первую работу «Практика арифметики» («Practica arithmeticae»), в которой проявил большое мастерство в решении уравнений с числовыми коэффициентами, однако не использовал никакого формализма и общих правил.

К моменту, когда он опубликовал свою крупнейшую работу, так называемое «Великое искусство» («Ars magna sive de regulis algebraicis»), Кардано, без сомнения, был уже самым опытным алгебраистом во всей Европе. Однако его книга для современного читателя очень скучна, так как, подобно арабским алгебраистам, Кардано по отдельности рассматривал большое число типов уравнений 3-й степени, потому что в качестве коэффициентов он допускал лишь положительные числа — и не только в решаемых им кубических уравнениях, но и в квадратных, к которым он их сводил. В самом деле, приведем его метод на примере $x^3+mx=n$ (где m и n положительны). Он ввел такие t и u, что $t-u=n$ и $tu=(m/3)^3$. Потом он установил с помощью геометрических соображений, что $x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$, а это эквивалентно доказательству равенства

$$(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u})^3=t-u-3(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u})\sqrt[3]{t}\cdot\sqrt[3]{u}.$$

Он получил уравнение второй степени с корнями

$$t=\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}+\frac{n}{2},$$

$$u=\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}-\frac{n}{2}$$

и, взяв положительные кубические корни, нашел x, В решении Кардано была одна трудность, которую он заметил, но не смог разрешить: когда величина $(n/2)^2+(m/3)^3$ отрицательна, что соответствует случаю трех вещественных корней, формулу нельзя применять, не выходя за пределы поля вещественных чисел. Чтобы сохранить эту формулу, надо выйти за пределы $\mathbb{R}$, и тогда можно найти вещественное значение x, которое записывается как сумма двух кубических корней из комплексных чисел. Этот случай Тарталья назвал неприводимым.

9. Обозначения Кардано («Великое искусство»)

Кардано записывал равенство

$$(5+\sqrt{-15})\cdot(5-\sqrt{-15})=25-(-15)=40$$

в виде

5p:Rm:15,
5m:Rm:15,
25m:m:15qd есть 40.

Для $\sqrt{7+\sqrt{14}}$ он употреблял обозначение R.V.7p:R14. Символ V указывал, что все, что за ним следует, находится под знаком корня.

Кардано обладал мастерством тонкого вычисления: он отваживался с большими предосторожностями манипулировать выражениями, содержащими квадратные корни из отрицательных чисел. И иногда он допускал в конце отрицательные решения, которые называл фиктивными числами или *«менее чистыми корнями»*. Кроме того, он умел систематически избавляться в уравнениях n-й степени от членов степени $n-1$ при помощи соответствующего сдвига $y=x+h$. Он заметил, что уравнения 3-й степени могут иметь три корня, а уравнения 4-й степени — четыре. Он допускал возможность кратных корней. В книге «Великое искусство» имеется также метод решения уравнения 4-й степени при помощи вспомогательного уравнения 3-й степени — этот метод Кардано приписывал своему ученику Лудовико Феррари (1522—1565). В ней также рассматривалось около двадцати различных типов уравнений.

Рафаэль Бомбелли

Последним крупным итальянским алгебраистом того периода был Рафаэль Бомбелли (1526—1572). После того как спор между Кардано и Тартальей принял публичный характер с выходом в 1546 г. работы Тартальи «Вопросы и различные изобретения» («Quesiti et inventione diverse») и после того, как копии брошюр «Вызовы» («Cartelli di matematica disfida») (1547—1548 гг.), которыми обменялись между собой Тарталья и Феррари, распространились по всем городам Италии, Бомбелли, почитатель Кардано, задумал написать трактат по алгебре. Он написал это систематическое и логичное изложение алгебраических знаний своей эпохи между 1557 и 1560 гг.

Однако несколько лет спустя Бомбелли получил возможность прочитать в Риме рукопись «Арифметики» Диофанта, найденную Региомонтаном в Венеции за сто лет до того. Она, без сомнения, произвела на него глубокое впечатление, потому что он после этого частично пересмотрел свой трактат и включил в него около ста сорока задач, взятых из «Арифметики» Диофанта (даже не отмечая, где свои, а где заимствованные), причем у восьмидесяти одной из них он сохранил те же численные значения. В своем предисловии Бомбелли указал, что он отошел от обычаев авторов своей эпохи, занятых в основном конкретными задачами, и хочет дать курс высшей арифметики и вернуть «престиж» этой дисциплине. Сравнение с первоначальным вариантом этой работы, найденным в 1923 г. в Болонье, подтверждает его отказ от многочисленных практических задач, связанных с повседневной жизнью, и обращение к задачам, сформулированным абстрактно по образцу Диофанта. Первые три книги «Алгебры» Бомбелли были опубликованы в 1572 г. за несколько месяцев до смерти автора.

Таким образом, Бомбелли первым распространил задачи Диофанта на Западе, хотя они в его «Алгебре» приняли более символический вид и их связь с Диофантом была установлена позднее [1]). Его работы способствовали

[1]) Перевод «Арифметики» на латынь был опубликован Ксиландером в 1575 г.— *Прим. ред.*

возникновению более абстрактных и более теоретических формулировок в алгебре.

В области же уравнений степени выше двух Бомбелли, как и его современники, исследовал большое число случаев, рассматривая лишь положительные коэффициенты, но его ловкость и мастерство, с которым он формально манипулировал корнями из отрицательных чисел, дали ему возможность установить, что формула Сципиона дель Ферро справедлива во всех случаях. Можно сказать, что решение неприводимого случая кубического уравнения восходит к нему. Уравнения 4-й степени он тоже исследовал методами Феррари. Он называл квадратные корни из отрицательной величины piu di meno (плюс из минуса) и meno di meno (минус из минуса). Так, он обозначал p. d. m. 10 выражение $+\sqrt{-10}$ и m. d. m. 10 выражение $-\sqrt{-10}$.

Бомбелли рассматривал корни уравнений в виде алгебраических сумм положительных чисел, которым придан один из следующих четырех знаков: piu (плюс), meno (минус), piu di meno (плюс из минуса), meno di meno (минус из минуса), которые приблизительно соответствуют теперешним: $+$, $-$, $+i$, $-i$. Он дал правила умножения этих четырех элементов. Например, piu di meno via meno di meno fa piu (плюс из минуса на минус из минуса дают плюс) можно перевести как $(+i)\ (-i)=+1$. С другой стороны, он полагал, что piu и piu di meno не суммируются, тем самым отразив первое интуитивное предположение о линейной независимости 1 и i [1]).

Отметим также в качестве важного вклада Бомбелли, что его обозначения представляли собой прогресс в алгебре. Его обозначение степени аналогично обозначению Шюке, хотя он и не знал степени 0 и отрицательных степеней, встречавшихся уже у Штифеля. Дробные же показатели были введены Симоном Стевином в 1585 г. (см. табл. 10).

Влияние Бомбелли, о котором свидетельствуют имеющиеся в работе Стевина «Арифметика» ссылки на

---

[1]) Здесь Бомбелли вводит «новые числа», определяя правила действий с ними, т. е. по существу аксиоматически. В этом он следует за Диофантом, который ввел таким способом в «Арифметике» отрицательные числа.— *Прим. ред.*

него или же переписка Лейбница и Гюйгенса, было велико.

Решение кубических и биквадратных уравнений выявило необходимость одновременного расширения поня-

10. Обозначения Бомбелли по книге «Алгебра» 1572 г.

Он использует обозначения

$\underset{\smile}{1}$ для x,

$\underset{\smile}{2}$ для x^2,

$5^{\underset{\smile}{1}}$ или $\overset{1}{\underset{5}{\smile}}$ для $5x$,

$R_x\lfloor\ \ \ \ \ \rfloor$ для корня из совокупности двух или более членов,

$R_x\lfloor 4pR_x6\rfloor$ для $\sqrt{4+\sqrt{6}}$,

$R_x^3\lfloor 2pR_x\lfloor 0m121\rfloor\rfloor$ для $\sqrt[3]{2+\sqrt{0-121}}$.

Иногда он заменяет R_x на Rq и $\overset{3}{R_x}$ на $R\cdot c$.
Пример:

$1\cdot p\cdot 3^{\underset{\smile}{1}}\cdot p6^{\underset{\smile}{2}}\cdot 1^{\underset{\smile}{3}}$ следует читать $1+3x+6x^2+x^3$.

Это же выражение Стевин записывает так:

$$1^{⓪}+3^{①}+6^{②}+{}^{③},$$

Стевин использует обозначение (1/2) для $\sqrt{\ }$ и (1/3) для $\sqrt[3]{\ }$.

тия числа в двух направлениях: введения отрицательных и мнимых чисел; эволюцию этих двух понятий мы проследим в гл. 7.

13. Алгебраическая символика

История алгебраических обозначений очень запутанна: она состоит из поисков, находок, правил, принимаемых тем или иным математиком и исчезнувших вместе с ним. Большинство из обозначений, оказавшись несостоятельными, никак не отразились на развитии математики. Некоторые в конце концов утвердились и используются до сих пор. Здесь мы хотим в основном остановиться на том, какими концептуальными изменениями сопровождалось появление подлинно символического алгебраического языка, который приобрел свои основные черты после Виета и Декарта.

Мы видели, что в эпоху античности в геометрии систематически использовались буквы для обозначения неопределенных величин, таких, как точки или прямые и т. п., т. е. величин, не являющихся неизвестными, но лишь заданных неконкретным образом. На самом деле применение букв в греческой геометрии кажется весьма примитивным. Буквами пользовались в качестве имен объектов, но затем этими символами никак не манипулировали.

Что касается арифметики и теории уравнений, то некоторые следы символических сокращений весьма древни [1]). Однако господствовал словесный характер изложения алгебры, в частности, так обстояло дело у арабов, несмотря на высокий уровень техничности их алгебраического исчисления. Лишь табличный символизм, встречавшийся с XI в. у ас-Самавала, а затем у Шараф ад-Дина ат-Туси, представлял собой замечательное изобретение, способствовавшее быстрому развитию арифметических операций над многочленами, немыслимых в рамках чисто словесной алгебры.

Можно выделить два процесса: с одной стороны, изобретение удобных обозначений для четырех действий арифметики и принятие ряда соглашений о записи, позволяющих объединять некоторые члены, а другие разделять,

---

[1]) У Диофанта был специальный знак для вычитания и для характеристики отрицательного числа. У него же имелись буквенные обозначения для неизвестного и его степеней (как положительных, так и отрицательных, см. с. 107). Арабы, отказавшись от алгебраической символики, сделали, таким образом, шаг назад.— *Прим. ред.*

чтобы избежать какой бы то ни было путаницы относительно порядка выполнения операций — короче говоря, чтобы ввести структуру в последовательность операций; с другой стороны, изобретение символов для неизвестного и его степеней и образование алгебраических сумм этих символов. Эти два процесса развивались параллельно.

В алгебре буквы стали использоваться с начала XVI в. Так, Мавролико (он же Франческо де Мессина) использовал их, но вычислений с ними не производил, и если он складывал или умножал, то каждый раз вводил новую букву для каждой суммы и произведения, подобно тому как это делали античные геометры. Важным новшеством было использование заглавных букв A, B, C,... для обозначения неизвестных в уравнениях со многими неизвестными. Его можно встретить в несколько видоизмененной форме у немецкого математика Штифеля в 1544 г., французского математика Жака Пелетье в 1554 г., и очень ярко выражено оно у Жана Борреля, человека, носившего церковный сан и известного под латинизированным именем Бутео, который в 1559 г. опубликовал работу «Логистика, которая называется вульгарной арифметикой» («Logistica quae et arithmetica Vulgo dicitur»).

Таким образом, в эту эпоху манипуляции с некоторыми алгебраическими выражениями с одной или несколькими неизвестными, обозначенными буквами, и с числовыми коэффициентами стали более распространенными. Это была так называемая числовая алгебра. Но наиболее глубокие изменения были внесены известным в свою эпоху государственным деятелем и личным советником Генриха IV Франсуа Виетом (1540—1603). Блестящая политическая карьера Виета мешала ему уделять много времени научным трудам, главный из которых назывался «Аналитическое искусство» («L'Art analytique»). Он был задуман как большой трактат из десяти частей, и в нем вводился и использовался на практике принадлежавший автору метод буквенного представления в алгебре и геометрии.

Большой заслугой Виета является то, что он объединил традиционный метод, применяемый в геометрии, с новым методом, возникшим в алгебре: он обозначал буквами не только неизвестные и их степени, что уже прочно укрепилось в алгебре, но также и неопределенные коэффициенты — как было принято в геометрии со времен античности. Из этих букв он образовывал слова, т. е. алгебраические выражения, которыми он оперировал, как уже в течение века делалось в теории уравнений.

Для известных неопределенных величин он отвел согласные B, C, D, . . ., а для неизвестных — гласные A, E, O, ... Благодаря Виету исчисление алгебраических выражений, а также его приложения к греческой геометрии существенно продвинулись вперед. Он исследовал классические задачи второй и третьей степени, а также многие задачи более высоких степеней.

Но главное, что за один шаг — систематическое введение буквенных представлений — алгебра стала учением об общих типах выражений и уравнений, поскольку то, что доказано в общем случае, охватывает бесчисленное множество частных случаев. И это позволило уделять внимание структуре задач, а не их частной форме.

В работе «Введение в аналитическое искусство» («In artem analyticam Isagoge»), задуманной как методологическое введение в «Аналитическое искусство», Виет сам свою logistica speciosa противопоставлял logistica numerosa, существовавшей ранее. Только первая есть алгебра, метод, позволяющий оперировать с пространствами, классами вещей; вторая же есть арифметика, которая оперирует просто с числами.

Последнее предложение трактата «Аналитическое искусство» Виета легло в основу теории уравнений, дав соотношения между *коэффициентами* (термин его) и корнями. В нем черпали свое вдохновение Гарриот и Альбер Жирар. Математики первой половины XVII в. упростили обозначения Виета. У Декарта математические обозначения достигли почти современного уровня. В частности, неизвестные обозначались не гласными, а последними буквами алфавита.

14. Отделение алгебры от геометрии

Отметим, что Виет использовал буквенные обозначения лишь для положительных чисел и придерживался чисто геометрической концепции величин. При этом в уравнениях буквы представляли собой геометрические величины, природа которых всегда была указана, причем соблюдался закон однородности. Однако хотя геометрически нельзя превысить три измерения, Виет без колебаний использовал величины с бóльшим числом измерений, что шокировало таких математиков, как Штифель, который объявил это «противоестественным». Важной задачей XVI в. и начала XVII в. было обоснование алгебраических рассуждений. При этом вначале обоснованием считалось придание алгебраическим выражениям геометрического смысла.

Как и его итальянские предшественники, Виет оставался тесно связанным с геометрией. Он рассматривал алгебру как «королевскую дорогу» к геометрии. Она для него была способом делать открытия, осуществлением «анализа» в платоновском смысле (в противоположность синтезу), и поэтому он назвал ее аналитическим искусством. Но его кругозор был достаточно широк, чтобы допустить автономное развитие и самостоятельную жизнь алгебры, которая постепенно выходила за рамки ограничений, навязанных ей геометрическим образом мысли.

Существующая зависимость между алгеброй и геометрией коренным образом изменилась, когда Декарт использовал алгебру для решения задач на геометрические построения, в особенности благодаря его методу координат. Для Декарта алгебра не была наукой, так как она не дает знания о физическом мире: эти знания дает нам геометрия и механика. Но он видел в алгебре мощный метод для проведения рассуждений в области абстрактных и неизвестных величин. Согласно его точке зрения, алгебра, делая математику автоматической, «*механической*», позволяет упростить рассуждения и сэкономить усилия. Так, по Декарту, алгебра предшествует другим отраслям математики, она является расширением логики, которое лишено смысла само по себе, но необходимо для обращения с величинами и в некотором смысле более фундаментально, чем даже геометрия. В качестве техники, освобожденной от связей с геометрией, алгебра для Декарта стала частью его общих исследований в трактате «Рассуждение о методе».

Многие математики, в том числе и Лейбниц, будут обдумывать возможности «механизировать» математическое рассуждение ради «экономии мышления», которая достигается с помощью хорошей символики. Исаак Барроу, учитель и друг Ньютона, придерживался похожей точки зрения на алгебру, которую он считал скорее формализацией логики, чем отраслью математики. Но как бы ни относился к алгебре тот или иной ученый, практическим результатом развития алгебраического символизма и теории уравнений было поднятие алгебры до ранга самостоятельной дисциплины, и этот ее статус был признан к 1700 г.

15. Ферма и возникновение теории чисел

Параллельно этому становлению алгебры как самостоятельной дисциплины другая отрасль математики, арифметика, приобрела в XVII в. актуальность и силу, которые были ею утеряны со времен Диофанта и средневековых арабских алгебраистов. И этому способствовала деятельность Пьера де Ферма (1601—1665).

Рожденный в семье коммерсантов, Пьер де Ферма стал юристом и советником Парламента [1]) г. Тулуза. Хотя математика всегда оставалась для него лишь увлечением, он стал основоположником наиболее плодотворных ее отраслей: аналитической геометрии, исчисления бесконечно малых, теории вероятностей. Однако он не оставил ни одной законченной работы и большинство его набросков не было опубликовано при его жизни. Так, он не записал ни одного точного доказательства, ограничиваясь лишь некоторыми указаниями [2]).

В области арифметики отправной точкой для Ферма был Диофант. Уже в XVI в. математики открыли для себя труды Диофанта, Ксиландер перевел их на латынь, Стевин на французский, Бомбелли и Виет черпали в них вдохновение.

В 1621 г. Баше де Мезирьяк опубликовал греческий текст Диофанта и новый перевод его на латынь с важными комментариями, исправив некоторые ошибки в его

---

[1]) Парламент — судебный орган во Франции того времени.— *Прим. перев.*

[2]) Ферма записал доказательство того, что уравнение $x^4+y^4=z^4$ неразрешимо в целых числах.— *Прим. ред.*

«Арифметике» и обобщив несколько решений. Он же исследовал в работе «Приятные и занимательные задачи» («Problèmes plaisants et délectables») решение неопределенных уравнений 1-й степени вида $ax+by=c$ и показал, что, если a и b взаимно просты, уравнение $ax+by=1$ всегда имеет решение (x, y). Этот результат известен в наше время под названием тождества Безу, потому что последний установил его аналог для кольца многочленов с действительными коэффициентами.

У Ферма было издание трудов Диофанта в переводе Баше, поля которого он исписал ставшими теперь знаменитыми замечаниями; он с большим энтузиазмом занимался диофантовым анализом. К тому времени Ферма познакомился с трудами Виета и пользовался его символическими обозначениями.

В то время как Диофант проводил свои исследования в множестве положительных рациональных чисел, Ферма был первым, кто ограничился областью целых чисел, которая представлялась ему самой сутью арифметики. Он задавал себе вопрос: не потому ли целочисленные задачи до сих пор не привлекали к себе внимания математиков, что этому мешало слишком сильное преклонение перед геометрией? Его отказ признать наперекор традиции древнего диофантова анализа рациональные решения для некоторых задач послужил причиной споров с Валлисом, Френиклем и некоторыми другими математиками.

В арифметике Ферма в основном интересовали простые числа, делимость. Среди множества его теоретико-числовых результатов, часть из которых была доказана только математиками XVIII в., в основном Эйлером, отметим следующие:

Малая теорема Ферма: *для всякого простого числа p и числа a, не делящегося на p, имеет место сравнение* $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$.

Так называемое уравнение Пелля — Ферма $x^2=Ay^2+1$ для всякого положительного целого A, не являющегося полным квадратом, имеет в $\mathbb{Z}$ бесконечное множество решений.

Введение чисел Ферма вида $F_n=2^{2^n}+1$, которые он все считал простыми. Эйлер доказал, что $F_5=2^{32}+1$ не является простым.

И самое главное, знаменитая гипотеза, которую называют последней теоремой Ферма: *для целых n, больших* 2, *равенство* $x^n+y^n=z^n$ *невозможно в* $\mathbb{Z}$ *и в* $\mathbb{Q}$. Эта теорема вызвала множество очень глубоких исследований, продолжающихся более трех веков, и были достигнуты большие успехи в ее решении, но до наших дней она не доказана для всех n.

Наконец, упомянем метод бесконечного спуска, названный так Ферма и позволяющий доказывать в общем

11. Метод бесконечного спуска Ферма

В 1659 г. Ферма описал принцип этого метода в письме к Пьеру де Каркави. В письме речь шла о следующей теореме: «Всякое простое число вида $4n+1$ можно выразить единственным образом как сумму двух квадратов». Так,

$$17=16+1,$$
$$29=25+4.$$

Метод состоит в доказательстве того, что если найдется простое число вида $4n+1$, не обладающее этим свойством, то найдется и меньшее число, не обладающее этим свойством.

Поскольку n произвольно, спуск продолжается по целым положительным значениям n до $n=1$. Но $5=4\cdot 1+1$ этим свойством обладает. Значит, исходное предположение неверно.

Ферма упомянул в письме к Каркави, что он использовал указанный метод для доказательства этой теоремы, но не привел самого доказательства. Первое полное доказательство этой теоремы дал Эйлер в 1752 г.; при этом он эффективно использовал метод бесконечного спуска.

виде некоторое свойство для любого натурального числа. Он основан на факте, что не существует строго убывающей бесконечной последовательности положительных целых чисел (см. табл. 11). Этот метод использовался еще задолго до Ферма.

Идеи и открытия Ферма в области теории чисел не оказали большого влияния на математику его времени. Но велико было их влияние на последующие поколения математиков.

Особый интерес к этим исследованиям проявил Эйлер. Он доказал малую теорему Ферма и обобщил ее на случай, когда модуль не будет простым. Он доказал также, что всякое простое число вида $4n+1$ есть сумма двух квадратов, разработал теорию делителей выражений вида a^n+b^n и в случае $n=3$ и 4 доказал последнюю теорему Ферма.

Важный вклад внес также Лагранж: он дал первое строгое доказательство того, что уравнение Пелля — Ферма $x^2-Ay^2=1$ всегда разрешимо. Он доказал также, что всякое простое число есть сумма самое большее четырех квадратов, и использовал для этого формы первой и второй степени, делители выражений вида t^2+au^2, где t и u — две неопределенные величины, а a — данное число. Этот век в математике закончился книгой Лежандра «Теория чисел» («Théorie des nombres») (1798 г.), содержащей массу отдельных интересных результатов, но вывести из них общие концепции сумело лишь поколение более молодых математиков.

Действительно, лишь с появлением основного труда Гаусса «Арифметические исследования» («Disquisitiones arithmeticae»), опубликованного в 1801 г., когда автору было двадцать четыре года, теория чисел перестала быть собранием разрозненных результатов, интуитивных догадок и открытий, порой гениальных, и стала новой дисциплиной со своими собственными мощными и очень глубокими методами (см. гл. 8).

16. Алгебраическое решение уравнений: топтание на месте и продвижение вперед

В XVII в. алгебра находилась в центре интересов математической науки, но в последующие века в результате создания исчисления бесконечно малых горизонты расширились, и она была отнесена на второй план [1]. Впрочем, уточним, что в то время как алгебра и геометрия уже разделились, грань между анализом и алгеброй в XVIII в. была очень нечеткой. В эпоху Эйлера и Лагранжа исследование функций, рядов, бесконечные алгоритмы и т. п. входили в «алгебраический анализ» (см. гл. 6), а теория уравнений зачастую была известна под названием «конечный алгебраический анализ».

---

[1]) Собственно говоря, алгебра была в центре интереса математиков в XVI в., в XVII в. ее оттеснил на второй план математический анализ.— *Прим. ред.*

Наряду с доказательствами основной теоремы алгебры, о которой мы будем говорить в связи с мнимыми числами (см. гл. 7), математики всегда искали методы решения уравнений произвольной степени. Не находя их, Декарт, Ньютон, Лагранж и т. д. исследовали методы численного решения: правила разделения корней, нахождение числа действительных корней (Декарт, затем Стирлинг и де Гюа в XVIII в.), правила определения знаков корней, методы аппроксимации Ньютона, Лагранжа, а также теорию исключения неизвестной из двух уравнений и т. д.

Однако отсутствие алгебраического решения уравнений высших степеней (т. е. алгебраического выражения, составленного из коэффициентов заданного уравнения, которое, будучи подставленным вместо неизвестного, тождественно удовлетворяло бы данному уравнению) оставалось главным темным пятном в теории уравнений. Первые серьезные попытки в этом направлении были предприняты другом Лейбница Чирнхаузом (1651—1708), попытавшимся в 1689 г. при помощи некоторой замены переменных свести всякое алгебраическое уравнение к двучленному уравнению $x^n—C=0$, которое Коутс и Де Муавр разрешили с помощью деления дуг. Чирнхауз исходил из уравнения $P(x)=0$ степени n и полагал $y=$ $=Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен степени $n—1$ с неопределенными коэффициентами. Он исключал x из уравнений $P(x)=0$ и $Q(x)—y=0$ и пытался найти такие коэффициенты многочлена Q, чтобы из получающегося уравнения по y исчезли некоторые или все промежуточные члены. Его метод хорошо работает при $n=3$, но при $n=5$ отыскание таких коэффициентов приводит к уравнению 24-й степени, причем эту степень нельзя понизить. Очевидно, что если бы этот метод был результативным всегда, то всякое уравнение было бы разрешимо алгебраически. Позднее Эйлер и Безу пытались решать эту задачу похожими методами, но безуспешно.

В 1770 г. вышли два очень важных мемуара: Вандермонда и Лагранжа. Они положили конец более или менее эмпирическим поискам методов решения.

Мемуар Вандермонда

Вандермонд интересовался главным образом разрешимостью в радикалах уравнений $x^p-1=0$, носящих название уравнений деления круга. Их корни, являющиеся p комплексными корнями p-й степени из единицы, имеют вид $x_k=\cos(2k\pi/p)+i\sin(2k\pi/p)$, $k=0, 1, 2, \ldots, p-1$. Но такое тригонометрическое решение не обязательно будет алгебраическим.

Вначале Вандермонд показал, что достаточно рассмотреть случай простого p, поскольку, если $p=p'm$, где p' — простое число, данное уравнение $x^p-1=0$ становится уравнением $y^{p'}-1=0$ (где $y=x^m$) и разрешимость одного из них влечет за собой разрешимость другого. Он утверждал, что всякое уравнение вида $x^p-1=0$ разрешимо в радикалах.

Мемуар Вандермонда написан довольно сложно. Но приведем идею его метода в том виде, в каком ее блестяще использовал Гаусс в своей работе «Арифметические исследования» [1]) в случае $x^{17}-1=0$ (см. табл. 12). Результат, лежащий в основе его рассуждения, таков: если симметрические (т. е. инвариантные относительно любой перестановки своих аргументов) функции от n переменных принадлежат данному полю K, то эти n переменных являются корнями некоторого уравнения с коэффициентами из этого поля [2]).

Если $r=e^{2i\pi/p}=\cos(2\pi/p)+i\sin(2\pi/p)$, то корни уравнения $x^p-1=0$ представляются в виде $1, r, r^2, \ldots, r^{p-1}$. Их сумма $1+r+\ldots+r^{p-1}$ равна нулю. Идея Вандермонда состояла в нахождении непересекающихся подсумм $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_e$ (при $e<p$) суммы корней, так чтобы симметрические функции от σ_i были все рациональными. В силу сформулированного ранее результата σ_i являются

[1]) Слова авторов не следует понимать в том смысле, что Гаусс заимствовал идею Вандермонда. Гаусс не был знаком с мемуаром Вандермонда, а, кроме того, использовал в своем доказательстве теоретико-групповые методы (установление того, что группа уравнения деления круга циклична, рассмотрение ее подгрупп и соответствующих им подполей), которых просто не было у Вандермонда.— *Прим. ред.*

[2]) Мы следуем изложению Ф. и В. Эллисонов из книги «Краткая история математики» (Abrégé d'histoire des mathématiques) (под редакцией Дьёдонне).

12. Гаусс: метод решения уравнения $x^{17}-1=0$

Пусть $r=e^{2i\pi/17}$. Корни будут иметь вид

$$1,\ r,\ r^2,\ \ldots,\ r^{16},$$

и для них выполняется соотношение

$$1+r+r^2+\ldots+r^{16}=0.$$

Гаусс использовал существование первообразных корней по модулю p для осуществления разбиения на последовательные подсуммы. Именно существование таких корней устанавливает некоторый порядок, в котором располагаются корни 17-й степени из единицы.

Пусть g — первообразный *) корень по модулю 17, например $g=3$.

Запишем $n_1=r^{g^0}+r^{g^2}+\ldots+r^{g^{14}}$,

$$n_2=r^{g^1}+r^{g^3}+\ldots+r^{g^{15}}.$$

Можно доказать, что $n_1+n_2=-1$,

$$n_1\cdot n_2=-4,$$

и, значит, n_1 и n_2 — корни уравнения $x^2+x-4=0$,

$$n_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\quad n_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}.$$

К n_1 и n_2 применяется одинаковое рассуждение.

Пусть

$$\mu_1=r^{3^0}+r^{3^4}+r^{3^8}+r^{3^{12}},\quad \mu_2=r^{3^2}+r^{3^6}+r^{3^{10}}+r^{3^{14}},$$
$$\mu_3=r^{3^1}+r^{3^5}+r^{3^9}+r^{3^{13}},\quad \mu_4=r^{3^3}+r^{3^7}+r^{3^{11}}+r^{3^{15}}.$$

Получаем соотношения

$\begin{cases}\mu_1+\mu_2=n_1,\\ \mu_1\mu_2=-1,\end{cases}$ а значит, μ_1 и μ_2 — корни уравнения $x^2-n_1x-1=0$,

$\begin{cases}\mu_3+\mu_4=n_2,\\ \mu_3\cdot\mu_4=-1,\end{cases}$ а значит, μ_3 и μ_4 — корни уравнения $x^2-n_2x-1=0$.

Разбиваем μ_1 на подсуммы

$$\beta_1=r^{3^0}+r^{3^8},$$
$$\beta_2=r^{3^4}+r^{3^{12}}.$$

Тогда $\begin{cases}\beta_1+\beta_2=\mu_1\\ \beta_1\cdot\beta_2=3,\end{cases}$

т. е. β_1 и β_2 — корни уравнения $x^2-\mu_1x+\mu_3=0$.

Затем

$$r^{3^0}+r^{3^8}=\beta_1,$$
$$r^{3^0}\cdot r^{3^8}=1,$$

т. е. r^{3^0} и r^{3^8} — корни уравнения $x^2-\beta_1x+1=0$, но $r^{3^0}=r$.

Уравнение $x^{17}-1=0$ решено с помощью четырех последовательных квадратных уравнений.

---

*) 3 является первообразным корнем по модулю 17, поскольку 16 первых степеней числа 3 попарно несравнимы по модулю 17, т. е. остатки по модулю 17 у них всех различны (см гл. 8, с. 379).

корнями уравнения степени $e<p$ с рациональными коэффициентами. Затем будем считать известными величины σ_i — говорят, что их *присоединяют* к полю рациональных коэффициентов,— и попробуем найти непересекающиеся подсуммы $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{e'}$ некоторых σ_i, симметрические функции от которых можно выразить как рациональные функции от $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_e$. В этом случае $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{e'}$ будут корнями уравнения степени $e'<p$, коэффициенты которого — рациональные функции от $\sigma_1, \ldots, \sigma_e$. Этот процесс повторяется, но теперь считаются известными величины $\tau_1, \ldots, \tau_{e'}$. Суть заключается в том, что процесс заканчивается подсуммами ω_i, которые свелись к одному члену (т. е. это корни исходного уравнения) и являются корнями уравнения степени, меньшей p, коэффициенты которого — рациональные функции от предыдущих подсумм.

Вандермонд осуществил свой метод лишь в случае уравнения $x^{11}-1=0$, решения которого он выразил через квадратные корни и корни пятой степени; без сомнения, последовательные подсуммы он искал перебором. Гаусс же в своих исследованиях опирался на арифметические свойства показателя p и существование первообразных корней сравнений (см. раздел о его «Арифметических исследованиях» в гл. 8). Но Вандермонд одним из первых применил понятие подстановки на множестве корней алгебраического уравнения, а его интуитивные последовательные «присоединения» имели большое будущее.

Лагранж подводит итог

В некотором отношении мемуар Лагранжа схож с мемуаром Вандермонда, но он более значителен, систематичен и стиль его изложения замечательно ясен.

«*Я намереваюсь*,— заявил в нем Лагранж,— *исследовать различные методы алгебраического решения уравнений, которые встречались до сих пор, свести их к общим принципам и показать априори, почему эти методы приводят к успеху для третьей и четвертой степени и непригодны для более высоких степеней*».

Таким образом, предметом исследования Лагранжа в большей степени были методы, чем уравнения; он изучил в исторической последовательности попытки своих предшественников Сципиона дель Ферро, Тартальи, Кардано, Феррари, Декарта, Чирнхауза, Эйлера, Де Муавра и подвел систематический итог их усилиям, затем сравнил их методы между собой, чтобы сделать заключение об их важности и области их применимости.

В результате своего исследования Лагранж показал, что эти методы сводятся к установлению зависимости решения предложенного уравнения от решения некоторого другого вспомогательного уравнения, корни y_k которого являются линейной комбинацией корней x_h данного уравнения и степеней корня n-й степени из единицы. Эти выражения $y_k=\sum\limits_{h=1}^{h=n}\omega_k^h x_h$, $1\leqslant k\leqslant n$, где ω_k принимает последовательно значения всех корней n-й степени из единицы, называются *резольвентами Лагранжа*. Продвижение в решении исходного уравнения достигается, если полученное вспомогательное уравнение имеет степень, меньшую степени исходного уравнения.

Лагранж ясно показал, что разрешимость кубического уравнения связана с существованием функции от трех переменных, которая при перестановке этих переменных принимает всего два различных значения вместо шести, которых можно было бы теоретически ожидать (возможны шесть перестановок трех объектов). В данном случае речь идет о выражении $(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)^3$, где ω — кубический корень из единицы. Тогда вспомогательное уравнение имеет степень два и корни $x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3$ и $x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3$. Точно так же разрешимость в радикалах уравнения четвертой степени связана с существованием функции от четырех переменных, принимающей только три различных значения при перестановке этих переменных; это выражение в данном случае таково: $x_1x_2+x_3x_4$.

Не довольствуясь исследованием апостериори существующих методов, но пользуясь свойствами резольвент и первообразных корней из единицы, он построил непосредственно и априори приведенные вспомогательные уравнения. Он показал, что для степеней, больших 4, вспомогательное уравнение имеет степень, большую степени данного исходного уравнения, и, как видно, понижения не получается.

Таким образом, результаты, к которым пришел Лагранж, не являются окончательными. Но они по крайней мере позволяют избежать бесполезных новых попыток. Он пришел к выводу: «*Если алгебраическое решение уравнений степени, большей четырех, возможно, то оно должно зависеть от некоторых функций корней, отличных от рассмотренных раньше*». И в этой связи Лагранж доказал первые предложения, которые можно отнести к теории групп:

1) Утверждение, что число различных значений, которые может принимать функция n переменных при перестановке своих переменных, является делителем $n!$

13. Пример подобных функций

Функции $x_1x_2+x_3$ и $x_1^2+x_2^2+2x_3$ являются подобными, потому что они обе инвариантны относительно лишь одной перестановки, которая меняет местами x_1 и x_2, оставляя x_3 на месте.

В предложении Лагранжа утверждалось, что если имеются две подобные функции корней некоторого уравнения, то каждая из них является рациональной функцией другой и коэффициентов уравнения. Галуа заново доказал этот факт в своем знаменитом мемуаре 1829 г.

При этом он привел рассуждение, используемое и ныне для доказательства того, что порядок подгруппы делит порядок группы.

2) Очень глубокую теорему о *подобных* функциях корней, которая предвосхитила идею Галуа о «композиционных рядах» (см. табл. 13).

Мемуар Лагранжа 1770—1771 гг., необыкновенный по своей структуре и охвату материала, представляет собой методологический итог всех предшествующих алгебраических исследований. Хотя основным вопросом мемуара оставалась теория уравнений, он изобиловал глубокими и новыми понятиями, относящимися к теории подстановок. Он стал исходной точкой исследований основоположников новой алгебры XIX в., которые значительно расширили ее границы.

17. Абель: уравнения пятой степени

Невозможность решения в радикалах уравнений общего вида степени, большей или равной 5, была, наконец, доказана в 1826 г. молодым норвежским математиком Нильсом Хенриком Абелем (1802—1829). После Лагранжа исследования в области подстановок продолжались. В 1799 г. Паоло Руффини (1765—1822) показал, что если у функции пяти переменных меньше пяти различных значений, то их у нее самое большее два, что окончательно доказывало невозможность построить вспомогательное уравнение Лагранжа степени, меньшей 5. В 1815 г. Коши обобщил этот результат на все n и заложил тем самым основы самостоятельной теории подстановок. Он предложил удобные обозначения для подстановок, определил произведение двух подстановок, обратную подстановку, порядок подстановки и т. д. Абель использовал результат Коши.

Замечательным в мемуаре Абеля была постановка задачи, которую он решал. В одном из своих опубликованных посмертно произведений он объясняет это так: «*Действительно, я принимался решать уравнения, не зная, возможно ли это. В этом случае, быть может, и удастся найти решение, хотя не наверняка; но, если, к несчастью, решения не существует, можно безрезультатно потратить вечность на его поиски... Вместо того чтобы искать некое соотношение, не зная заранее, существует ли оно, нужно выяснить, действительно ли существует такое соотношение*». Поскольку решить уравнение алгебраически означает выразить его корни в виде алгебраических функций его коэффициентов, Абель прежде всего искал общий вид алгебраических функций, которые он тщательно классифицировал в соответствии с числом содержащихся в них радикалов и их расположением в выражении. Затем он исследовал, каким условиям должно вообще удовлетворять разрешимое алгебраическое уравнение, т. е. уравнение, корни которого являются алгебраическими функциями, ранее определенными и классифицированными.

И он уточняет этот второй вопрос: какие соотношения существуют между одним корнем и всеми остальными в случае, когда уравнение разрешимо? Абелю удалось прийти к результату, что в этом случае можно всегда «*придать корню такую форму, чтобы все алгебраические функции, из которых он составлен, можно было выразить как рациональные функции от корней предложенного уравнения*». Он завершил очень длинные вычисления доказательством того, что всякое рациональное выражение от пяти величин, принимающее пять различных значений, должно иметь вид $r_0+r_1x+r_2x^2+r_3x^3+r_4x^4+r_5x^5$, где r_i — симметричные выражения от этих пяти величин, а x — одна из них. И наконец, он пришел к выводу о неразрешимости в радикалах уравнения 5-й степени общего вида.

Мемуар Абеля, относительно архаичный по своей форме и технике, открывал новые пути для исследований и давал ответ на вопрос, в течение веков стоявший перед геометрами: охарактеризовать классы разрешимых уравнений. Абель изучил уравнения, получающиеся при делении лемнискаты, по аналогии с уравнениями деления круга, которые эквивалентны делению окружности на n равных дуг, и получил названные его именем уравнения, разрешимые в радикалах [1]).

Этот мемуар вписал последнюю страницу в длинную главу классической алгебры. Теория уравнений в традиционной форме была в основном завершена.

Приложение

Построение с помощью циркуля и линейки

Примем точку зрения аналитической геометрии. Если выбрана единица измерения, то можно считать, что точки с целыми координатами уже даны. Говорят, что вещественное число a *можно построить*, если точку $(a, 0)$ можно получить из точек с целыми координатами некоторым построением с помощью циркуля и линейки.

Очевидно, что точку (a, b) можно построить, если a и b — числа, которые можно построить.

Построения с помощью циркуля и линейки можно классифицировать следующим образом:

1) Пусть заданы четыре различные точки A, B, C, D, такие, что AB и CD — две непараллельные прямые; тогда можно построить точку пересечения прямых AB и CD.

2) Пусть даны такие точки A, B, C, D, что окружность (T) с центром в точке A радиуса AB пересекается с прямой CD; тогда можно построить точки пересечения окружности (T) и прямой CD.

---

[1]) Уравнения с коммутативной группой Галуа Абель изучил в «Мемуаре об одном особом классе алгебраических разрешимых уравнений», опубликованном в 1829 г. в J. für Math.— *Прим. ред.*

Случай, когда пересекаются две окружности, можно свести к двум предыдущим случаям.

Если координаты точек A, B, C, D рациональны, то при помощи простых соображений аналитической геометрии можно доказать, что в первом случае координаты точки пересечения рациональны, а во втором случае координаты точек пересечения лежат в квадратичном расширении поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, которое обозначается через $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$, поскольку они являются корнями уравнений второй степени с рациональными коэффициентами.

Можно снова выполнить эти два типа построений при помощи циркуля и линейки, исходя из предварительно полученных точек, которые принадлежат $\mathbb{Q}(\sqrt{a})=\mathbb{Q}_1$.

Окончательно, числа, которые можно построить, обязательно должны принадлежать надполю $\mathbb{Q}_n$ поля $\mathbb{Q}$, полученному из $\mathbb{Q}$ с помощью n последовательных квадратичных расширений, т. е. такому полю $\mathbb{Q}_n$, что

$$\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}_1\subset\ldots\subset\mathbb{Q}_n,$$

где $\mathbb{Q}_i=\mathbb{Q}_{i-1}(\sqrt{a_i})$, причем a_i — положительное число из $\mathbb{Q}_{i-1}$ для каждого i.

Они лежат в расширении поля $\mathbb{Q}$ степени 2^n и являются корнями многочлена с рациональными коэффициентами степени, равной некоторой степени числа 2. Это позволяет выяснить, почему три знаменитые греческие задачи не решаются построением с помощью циркуля и линейки:

1) Квадратура круга: эта задача эквивалентна построению π. Но π — трансцендентное число, т. е. не является корнем никакого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами.

2) Удвоение куба: эта задача эквивалентна построению положительного корня уравнения $x^3=2$, уравнения степени 3.

3) Трисекция угла: эта задача эквивалентна построению корня тригонометрического уравнения

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

В частном случае, когда $3\theta=60°$, этот корень $\cos 20°$ является корнем уравнения 3-й степени $4u^3-3u=1/2$.

Итак, здесь снова уравнение 3-й степени.

Замечание:

Понятно апостериори, почему правильный многоугольник с 17 сторонами может быть построен с помощью циркуля и линейки. Эта задача соответствует решению уравнения $z^{17}-1=0$, которое можно записать следующим образом:

$$(z-1)(z^{16}+z^{15}+\ldots+z^3+z^2+z+1)=0;$$

степень второго множителя равна 16, т. е. 2^4. Гаусс показал, что, решив последовательно четыре уравнения второй степени, можно выразить $r=e^{2i\pi/17}$ в виде суперпозиции квадратных корней.

Оригинальные работы

Abel N. Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le 4-e degré. Œuvres, T. 1. Éd. Sylow—Lie. Christiania, 1881.

Диофант Александрийский. Арифметика и Книга о многоугольных числах.—М.: Наука, 1974.

Гаусс К. Ф. Арифметические исследования.— В кн.: Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел.— М.: Изд-во АН СССР, 1959.

Абу-л-Вафа. Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений.— В сб.: Физико-матем. науки в странах Востока, вып. I.— М., 1966.

Бану Муса. Книга измерения плоских и сферических фигур.— Историко-матем. исслед., вып. XVI.— М.: Наука, 1965.

Сабит ибн Корра. Математические трактаты.— М.: Наука, 1984.

Lagrange J.-L. Réflexions sur la résolution algébrique des équations. Œuvres, t. 3, pp. 205—421.

Работы по истории, которым мы особенно следовали

Rashed R. Recommencements de l'algèbre aux XI et XII siècles.— D. Reidel, Publishing Company.

Rashed R. Ibn Al-Haytham et le théorème de Wilson.—Archive for History of Exact Sciences. Vol. 22, № 4, 1980.

Rashed R. Résolution des équations numériques et algèbre. Sharaf Al-din Al-Tusi, Viète. Ibid., vol. 12, № 3, 1972.

Rashed R. L'Extraction de la racine n-e et l'invention des fractions décimales. Ibid., vol. 18, № 3, 1978.

Rashed R. L' Analyse diophantienne au X-e siècle, l'exemple d'Al-Khazin.—Revue d'Histoire des sciences. T. 32, 1979.

Rashed R. Les Travaux perdus de Diophante.—Revue d'Histoire des sciences. T. 27, 1974; t. 28, 1975.

Vuillemin J. La Philosophie de l'algèbre.—P. U. F. 1962, Paris.

Юшкевич А. П. История математики в средние века.— М.: Гостехиздат.— М., 1961.

Следует отметить недавнее исследование:

Djebbar A. Enseignement et Recherche mathématiques dans le Maghreb des XIII-e et XIV-e siècles.—Publications mathématiques de l'Université d'Orsay, mai 1981.

Работы, добавленные редактором перевода

Башмакова И. Г. Диофант и диофантовы уравнения.— М.: Наука, 1972.

Башмакова И. Г., Славутин Е. И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма.— М.: Наука, 1984.

Чеботарев Н. Г. О значении работ Лагранжа по алгебре и теории чисел.— УМН 2 (1936), 17—31.

История математики с древнейших времен до начала XIX в. Под ред. А. П. Юшкевича. Т. I—III.—М.: Наука, 1970—1972.

Глава 4

ФИГУРЫ, ПРОСТРАНСТВА, ГЕОМЕТРИИ

1. Практические истоки

Древнейшие из доступных нам документов (вавилонские таблички, египетские папирусы) позволяют предположить, что существует непосредственная связь между истоками геометрии и требованиями повседневной жизни: изготовление и украшение предметов быта, строительство жилых зданий, амбаров и погребальных памятников, вычисление площадей полей и т. д.

Хотя, как мы видели, характер вавилонской математики был в основном алгебраическим, происхождение задач, записанных писцами, было часто геометрическим — например, вычисление некоторых очень простых площадей и объемов. Иногда эти задачи сопровождались неточными чертежами, которые свидетельствуют о зачаточном состоянии вавилонской геометрии.

У вавилонян практически не существовало геометрии круга. Однако было известно правило, устанавливающее его площадь: если p — периметр круга, его площадь A вычисляется по формуле $A=p^2/12$, откуда для π находится значение 3. Другие источники позволяют думать, что вавилоняне пользовались для π значением $3^1/_8$. Кроме того, вавилоняне знали отношения подобия между прямоугольными треугольниками и, по-видимому, с легкостью пользовались соотношением Пифагора для сторон такого треугольника.

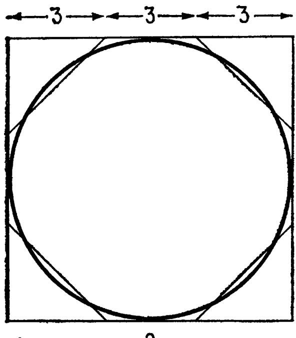
Геродот [1]) возводит истоки египетской геометрии к необходимости после каждого разлива Нила заново справедливо распределять поля между их владельцами, подтверждая тем самым материальность происхождения геометрии. Как и вавилонская, египетская геометрия была практической; в ней не столько рассуждали, сколько устанавливали наощупь правила действий, удоб-

[1]) Греческий историк (около 484—420 гг. до н. э.).

ные для приложений, но сами эти правила никогда не исследовались. Египтяне правильно вычисляли площади некоторых прямолинейных фигур, таких, как прямоугольник, квадрат, треугольник и трапеция, и располагали довольно хорошим приближением площади A круга: $A=(^8/_9d)^2$, чему соответствует значение $(^{16}/_9)^2\approx 3,1605$ для числа π (см. табл. 1).

Погребальная камера отца фараона Рамзеса II (ок. 1300 г. до н. э), оставшаяся неоконченной, дает нам представление о том, как египтяне украшали внутренние стены, и подтверждает то, что им были знакомы элементар-

1. Вероятное происхождение значения $\pi=3^1/_6$ у египтян



В квадрат со стороной 9 единиц вписывается восьмиугольник. Каждый из равнобедренных треугольников в углах имеет площадь $(3\cdot 3)/2=4,5$ единиц площади.

Площадь квадрата равна $9^2=81$ единице площади.

Поскольку площадь восьмиугольника является разностью между площадью квадрата и площадью четырех равнобедренных треугольников, она равна $81-4\cdot 4,5=81-18=63$ единицам площади.

Таким образом, площадь восьмиугольника приближенно равна площади квадрата со стороной 8, а с другой стороны, она почти совпадает с площадью круга, вписанного в квадрат.

Площадь A круга диаметра d будет приближенно равна площади квадрата со стороной $(8/9)\,d$, следовательно,

$$A=\left(\frac{16}{9}r\right)^2=\left(\frac{16}{9}\right)^2 r^2\approx\pi r^2,\ \text{откуда}\ \pi\approx\left(\frac{16}{9}\right)^2\approx 3\frac{1}{6}.$$

ные свойства подобных фигур и зачатки теории пропорций. Они покрывали поверхность стены правильной сетью горизонтальных и вертикальных линий, пересекающихся под прямым углом,— землемеры строили их геометрически точно так же, как и в наше время,— и на них переносили рисунок со сделанных заранее чертежей с такими же сетками, но в малом масштабе.

Кроме того, египетские писцы умели рассчитывать количество материалов, нужное для строительства памятников и пирамид, вместимость амбаров и т. д. Они умножали площадь основания b на высоту h для вычисления объема куба, призмы и цилиндра, и нам известно, что им удалось вычислить объем пирамиды $V={}^1/_3bh$ и усеченной пирамиды с квадратными основаниями a^2 и b^2, $V={}^1/_3(a^2+ab+b^2)h$, но неизвестно, как они этого достигли.

2. Требование доказательности в греческой геометрии

Греческая геометрия усвоила знания предыдущих поколений, но в корне порвала с прагматизмом вавилонской и египетской геометрии. Сразу в законченной форме она предстает перед нами в «Началах» Евклида как абстрактная и дедуктивная наука. Мы уже говорили (гл. 2) о совершенстве евклидова творения, строгости его логического построения, изяществе его доказательств.

Постулаты, положенные в основу всего здания (см. с. 78), не только обеспечивали существование основных фигур, таких, как прямая и окружность, исходя из которых греки строили все остальные рассматриваемые фигуры, но также определяли свойства евклидова пространства. Оно бесконечно и однородно, потому что можно «*ограниченную прямую непрерывно продолжить по прямой*», и, поскольку все прямые углы равны между собой, геометрические фигуры не изменяются при перемещениях.

Предпоследнее предложение книги I — «*В прямоугольных треугольниках квадрат на стороне, стягивающей прямой угол, равен* [*вместе взятым*] *квадратам на сторонах, заключающих прямой угол*» — снабдило это пространство метрикой (мерой расстояний). Эта теоре-

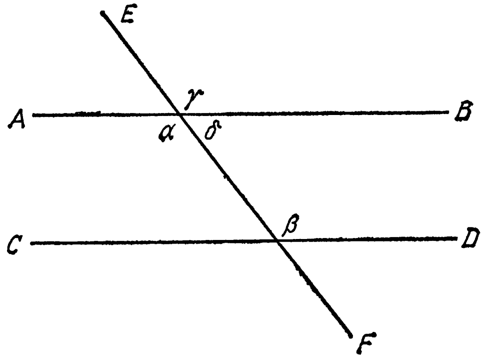


Рис. 4.1. $\alpha=\beta$,
$\gamma=\beta$,
$\delta+\beta=\pi$.

ма, известная еще вавилонянам, в греческую математику была введена Пифагором. Вавилоняне пользовались ею, а греки почувствовали необходимость ее доказать и вывести из нее следствия.

В евклидовой геометрии сумма углов треугольника равна двум прямым. По словам Прокла, Евдем в своей истории математики также приписывает эту теорему пифагорейцам. В евклидовом построении она вытекает из одного предложения теории параллельных (предл. 29, книга I): «*Прямая, падающая на параллельные прямые, образует накрестлежащие углы, равные между собой, и внешний угол, равный внутреннему, противолежащему с той же стороны, и внутренние односторонние углы,* [*вместе*] *равные двум прямым*». (См. рис. 4.1.)

В своем доказательстве Евклид прибегал к постулату о параллельных (см. гл. 2, с. 75), который занимает несколько особое место в евклидовом здании. Из приведенного предложения Евклид выводил построение «*через данную точку прямой линии, параллельной данной прямой*» (предложение 31), а затем и теорему о сумме углов треугольника.

Рассмотрим теперь способ евклидова доказательства на примере теоремы о произведении отрезков хорд, доказанной в книге III (предложения 35 и 36):

«*Если в круге две прямые пересекают друг друга, то прямоугольник, заключенный между отрезками одной,* *равен прямоугольнику, заключенному между отрезками другой».*

«Пусть в круге ABCD две прямые AC и BD пересекают друг друга в точке E; я утверждаю, что прямоугольник, заключенный между AE, EC, равен прямоугольнику, заключенному между DE, EB», т. е. $AE \cdot EC = DE \cdot EB$.

Евклид рассматривал сначала частный случай, когда точка пересечения двух прямых (хорд) является центром круга (см. рис. 4.2). Поскольку $AE = EC = DE = EB = R$ (радиус круга), то искомое свойство устанавливается тривиально.

Доказательство общего случая опирается на некоторые теоремы, предшествующие теореме о произведении отрезков хорд в структуре «Начал»:

— построение центра данного круга;

— проведение перпендикуляра из точки к прямой;

— теорема Пифагора;

— предложение 3 книги III (см. рис. 4.3):

«Если в круге некоторая проходящая через центр прямая другую, не проходящую через центр прямую сечет пополам, то сечет ее и под прямыми углами, и если сечет ее под прямыми углами, то сечет ее пополам».

Чтобы доказать, что $AF = FB$ в предположении, что углы AFE, BFE оба прямые, из равенства $EA = EB = R$ Евклид вывел равенство двух углов EAF и EBF. Но два треугольника, имеющие равные стороны, смежные с двумя соответственно равными углами, равны.

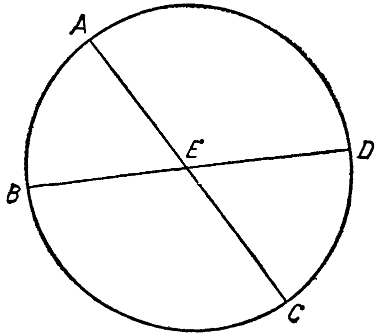


Рис. 4.2.

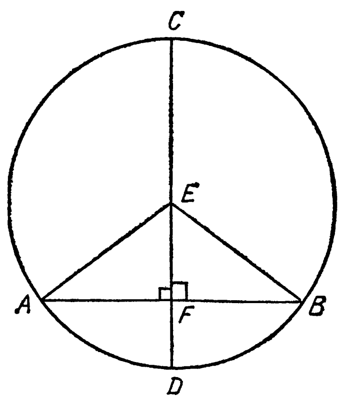


Рис. 4.3.

— Предложение 5 книги II:

«Если прямая линия рассечена на равные и неравные отрезки, то прямоугольник, заключенный между неравными отрезками всей прямой, вместе с квадратом на отрезке между сечениями равен квадрату на половине».

Его доказательство эквивалентно геометрическому построению корня квадратного уравнения (см. гл. 2).

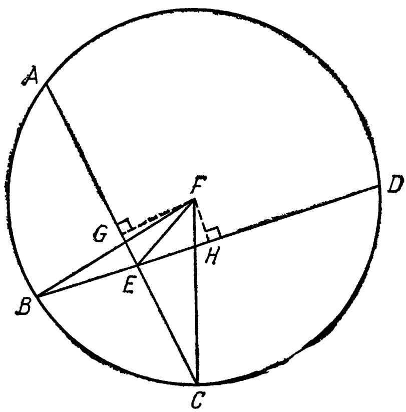


Рис. 4.4.

Чтобы доказать предложение 35, Евклид действовал следующим образом (см. рис. 4.4).

Он строил центр F круга $ABCD$, из F опускал перпендикуляры FG и FH на прямые (хорды) AC и BD и проводил прямые FB, FC и FE. В силу предложения 3 книги III, отрезок AG равен отрезку GC, а в силу предложения 5 книги II, $AE \cdot EC + GE^2 = GC^2$.

К этому равенству Евклид прибавлял GF^2:

$$AE \cdot EC + GE^2 + GF^2 = GC^2 + GF^2.$$

Но по теореме Пифагора

$$FE^2 = EG^2 + GF^2,$$
$$FC^2 = CG^2 + GF^2;$$

следовательно, $AE \cdot EC + FE^2 = FC^2$.

Из равенства $FC = FB$ следует, что $AE \cdot EC + EF^2 = FB^2$.

Точно так же $DE \cdot EB + FE^2 = FB^2$ и

$$AE \cdot EC + FE^2 = DE \cdot EB + FE^2.$$

Окончательно, $AE \cdot EC = DE \cdot EB$, что и требовалось доказать.

В предложении 36 Евклид исследовал случай, когда точка E находится вне круга.

Деятельность Евклида была тесно связана с Александрийским Мусейоном, и представляется вероятным, что его ученики образовывали настоящую школу. В гл. 2 мы уже излагали подходы Аполлония, который был представителем этой школы, к теории конических сечений. Архимед получил блестящие результаты в геометрии площадей. Он разработал метод исчерпывания и при этом достиг большого мастерства.

После блестящих достижений Евклида, Аполлония и Архимеда греческая геометрия вступила в период застоя и очень быстро выродилась. Александрийцы ограничивались применением результатов своих гениальных предшественников, не расширяя границ своих познаний [1]).

На рубеже нашей эры Герон Александрийский, например, комментировал «Начала» и использовал результаты Архимеда для доказательства новых теорем в рамках евклидовой геометрии, но при этом также обращался к методам и приближенным формулам египтян. Его исследования в основном ориентированы на практические приложения; он применял измерение площадей и объемов в геодезии, межевании, строительстве и архитектуре, изобретал измерительные инструменты, автоматы, рычаги, военные машины и т. д. Его труды отмечены характерными чертами эллинистического периода.

3. Вклад арабов

Исследования арабских математиков вписываются в те рамки, которые были намечены греками. В начале IX в. основные труды греческих ученых были переведены на арабский язык, и целый поток комментариев и

[1]) Это не совсем верно. Папп, например, исследовал спираль на сфере и вычислил площадь витка спирали. Были изучены и другие кривые, как плоские, так и пространственные.— *Прим. ред.*

кратких изложений позволил арабам усвоить, а затем и использовать эти знания. Эти исследования часто носили критический характер; так, особенности 5-го постулата Евклида (постулата о параллельных) не ускользнули от внимания арабов, и, следуя Птолемею, который придал этому постулату статус теоремы, они предприняли попытки его доказать (см. далее параграф о неевклидовых геометриях).

Арабские ученые разработали методы вычисления площадей и объемов, используя, порой весьма свободно, греческий метод исчерпывания. В «Книге измерения плоских и шаровых фигур» братьев Бану Муса (IX в.), оказавшей огромное влияние на развитие геометрии в Багдаде и дошедшей до наших дней в латинском переводе Герардо Кремонского под названием «Liber trium fratrum de geometria» («Книга трех братьев о геометрии»), содержится множество предложений о площади круга, в последнем из которых, как и у Архимеда, устанавливается, что отношение длины окружности к диаметру заключено между $3^{10}/_{71}$ и $3^{1}/_{7}$.

Арабский ученый Сабит ибн Корра (836—901), ученик братьев Бану Муса, знакомый с работами Архимеда, Евклида и Аполлония (некоторые из работ этих математиков он сам переводил либо комментировал), вычислял площадь параболического сегмента, суммируя площади вписанных трапеций (см. гл. 5, с. 244—245). Он рассматривал также тела, образованные вращением параболических сегментов, и вычислял их объемы.

Арабские авторы развили сферическую геометрию для нужд астрономии. Тем не менее иногда данные ими формулы для объема шара были лишь грубыми приближениями. Приведем формулу ал-Караджи: $V=d^3(1-{}^1/_7-{}^1/_7\cdot{}^1/_2)^2$, в которой объем шара отождествляется с объемом прямого параллелепипеда, основанием которого служит квадрат со стороной, равной четверти длины окружности большого круга $\pi d/4$ (где $\pi=22/7$), а высота равна диаметру d. Напомним, что Архимед умел методом исчерпывания доказывать точную формулу [1]).

Практика землемерных работ, архитектуры и техни-

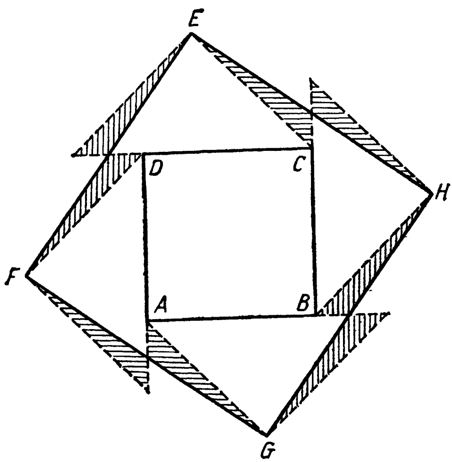
---

[1]) Бану Муса и Сабит ибн Корра (их трактаты, упомянутые в тексте, имеются в русском переводе, см. дополнительную литературу к гл. 3) знали уже формулы Архимеда.— *Прим. ред.*

ки ставила перед арабскими геометрами задачу упростить методы построений: порой оказывалось трудно проводить на местности окружности разных радиусов, поэтому геометры попытались выполнить построения при одинаковом растворе циркуля.

Абу-л-Вафа в работе, посвященной прикладной геометрии: «Книга о том, что необходимо ремесленнику из

2. Построение Абу-л-Вафы квадрата *EFGH*, площадь которого втрое больше площади данного квадрата *ABCD*



Перед Абу-л-Вафой стояла задача разрезать три маленьких квадрата, а затем собрать их в один больший квадрат.

Два из маленьких квадратов он разрезал по диагонали, а затем приложил их к сторонам третьего.

Он соединил вершины *E*, *F*, *G*, *H* между собой и получил квадрат, площадь которого равна утроенной площади квадрата *ABCD*; действительно, маленькие треугольники, выходящие за пределы квадрата *EFGH*, равны маленьким треугольникам, расположенным внутри этого квадрата.

геометрических построений», исследовал основные построения (перпендикуляров, параллельных прямых, деления отрезка и т. д.) при помощи линейки и циркуля с постоянным раствором. Его исследования приобрели новое признание в Италии XVI в. и были приняты математиками эпохи Возрождения (Леонардо да Винчи, Бенедетти, Тартальей и Кардано).

Впрочем, арабы зачастую довольствовались приближенными построениями. Братья Бану Муса, например, с помощью циркуля и линейки с «движком» выполняли трисекцию угла, эквивалентную решению уравнения 3-й степени и потому невыполнимую с помощью циркуля и линейки. Кроме того, они придумали специальный инструмент, состоящий из выдвижных линеек, скользящих в желобках, для определения среднего пропорционального между двумя данными величинами.

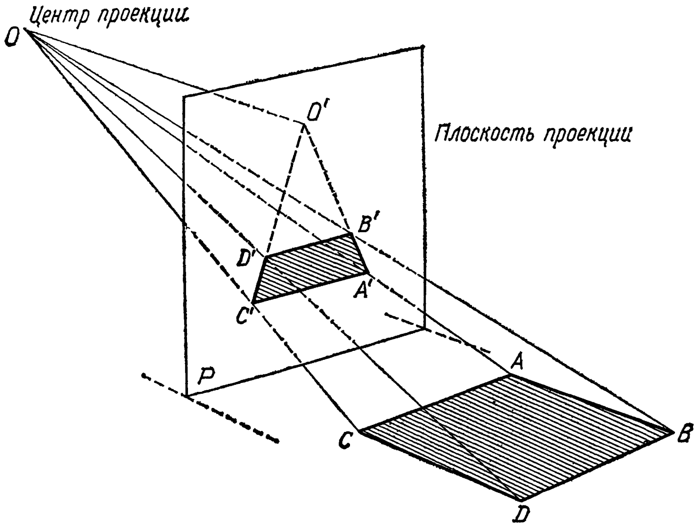
Одна часть работы Абу-л-Вафы посвящена разбиению квадрата в сумму нескольких квадратов и составлению одного квадрата из некоторого числа более мелких квадратов (см. табл. 2). Книга заканчивается построениями пяти правильных многогранников и весьма оригинальными построениями пяти полуправильных многогранников, из которых три оказались неточными.

Таким образом, в период с 800 г. и до XIII в. арабские ученые усвоили науку греческих геометров и даже расширили ее. Но иначе обстояло дело в средневековом западном мире. За исключением отдельных фрагментов, доступных на латинском языке (Боэций, например, объединил и перевел несколько элементарных трактатов, среди которых несколько книг из «Начал» в упрощенном виде, без доказательств), греческая геометрия была почти неизвестна. И только ученые эпохи Возрождения с энтузиазмом приняли греческое наследие от арабских математиков и византийских эрудитов.

4. Правила перспективы и зарождение проективной геометрии

Знакомство с философией Аристотеля и греческой наукой пробудило интерес к природе и ее структурам. Жажда знаний и неутолимая любознательность деятелей эпохи Возрождения выразились в стремлении отразить реальный мир, природу и изучить происходящие в ней процессы. Так, Леонардо да Винчи считал, что творчество живописца есть научный акт, поскольку оно позволяет раскрыть свойства реального мира. С XV в. итальянские художники, обладавшие практическими навыками во многих областях человеческой деятельности, пытались изобразить пространственные фигуры на плоскости так, как видит их человеческий глаз. Считая математику отражением самой сути природы, они разработали геометрические правила, позволяющие достичь сходства с реальностью — правила перспективы. По-видимому, пер-

3. Перспектива



На математическом языке перспектива — это центральная проекция из точки O (центра) на данную плоскость P (плоскость проекции), при которой произвольной точке M пространства ставится в соответствие точка M' — пересечение прямой OM с плоскостью P.

Это отображение пространства на плоскость не определено для точек плоскости, параллельной P и проходящей через точку O.

вым их изобрел флорентинский архитектор Ф. Брунеллески (1377—1446). Вообще практики Возрождения интерпретировали картину как «*окно*» в мир, сквозь которое взгляд изучает пространство, как «*прозрачное*» плоское сечение конуса зрения — конуса, образованного лучами, направленными из глаза, отождествляемого с вершиной конуса (см. табл. 3).

С начала XVI в. появились многочисленные трактаты о перспективе. В некоторых из них делались попытки построить связную теорию (например, в работе Пьеро делла Франческа, написанной в 1470 г., и в работе Альбрехта Дюрера, написанной в 1525 г.), но в большинстве приводились только различные рецепты и правила, рассчитанные на художников-практиков. В «Трактате о живописи» Леоне Альберти, напечатанном в 1511 г. в Нюрнберге, поднят вопрос, который в XVII в. стал исходным пунктом развития проективной геометрии: каковы общие свойства двух перспектив одной и той же фигуры?

В течение еще целого века область применения методов перспективы оставалась относительно ограниченной и не выходила за рамки изобразительного искусства. Математически основной идеей перспективы является идея проекции; эта же идея лежит в основе картографии, получившей интенсивное развитие в связи с необходимостью описания и учета результатов великих географических открытий европейских путешественников конца XV в. Включение проективных методов в математику обогатило и обновило геометрию. Последняя получила быстрое развитие после выхода из печати нескольких изданий «Конических сечений» Аполлония (к 1600 г.). Интерес к геометрии возрос после того, как Кеплер (в 1609 г.) использовал ее в формулировке законов движения планет. Зарождение проективных методов обновило основные положения теории конических сечений и позволило унифицировать ее методы.

Труд Дезарга

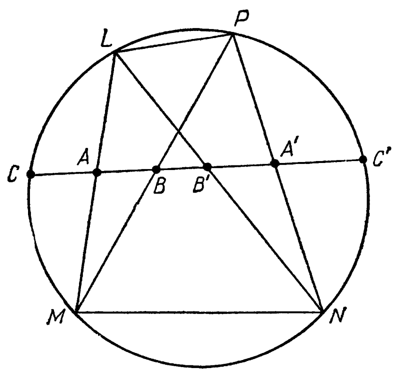
Это возрождение геометрии было делом уроженца Лиона Жирара Дезарга (1591—1661) — практика, архитектора, инженера, хорошо знакомого с трудами Аполлония. Дезарг не питал склонности к умозрительным построениям и намеревался дополнить теорию конических сечений открытиями художников в области перспективы и, с другой стороны, усовершенствовать методы художников, инженеров и каменотесов, сформулировав их в сжатых математических терминах. Его основной труд «Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью» (1639 г.) был напечатан всего в 50 экземплярах, розданных автором своим друзьям-геометрам для облегчения обсуждения его положений, и вскоре стал библиографической редкостью. До 1950 г., когда был обнаружен экземпляр этой работы в Национальной библиотеке, была известна всего одна копия, сделанная Лаиром (она найдена в 1854 г. М. Шалем и переиздана в 1864 г. Пудра, издателем трудов Дезарга). Ограниченное распространение «Чернового наброска», возможно, объясняет, почему он имел такой небольшой резонанс. Следует добавить еще и то, что он считался трудночитаемым из-за странной и оригинальной терминологии, использовавшей ботаническую символику. Она вполне отвечала требованиям эстетики барокко, выражавшей растительными метафорами бурное кипение жизни. Она свидетельствовала также о стремлении Дезарга и его друзей, членов «Мерсенновской академии» (1635 г.), к обновлению терминологии во избежание путаницы и двусмысленности, могущих возникнуть при использовании слов из разговорного языка. Так, Дезарг называет цилиндрическое или коническое тело «свитком» (rouleau); секущую плоскость, отличную от основания,— «плоскостью среза свитка» (plan de coupe du rouleau); эллипс — «недостатком» (défaillement); параболу — «приравниванием» (égalation) и гиперболу — «избытком» (outrepassement). Последние три термина интересны тем, что они напоминают терминологию античного метода приложения площадей (см. терминологию Аполлония на с. 81—83).

За исходное определение сечения Дезарг взял пересечение конуса с плоскостью; при этом он рассматривал все возможные положения плоскости. Это заставило его отнести к семейству конических сечений окружность и систему двух прямых. Интерпретируя конические сечения как проекции окружности с центром проекции в вершине конуса, он перенес на них свойства окружности, лежащей в основании конуса. Это новшество позволило ему, изучив прежде всего свойства круга, распространить их без дополнительного доказательства на конические сечения. Преимущество этой проективной точки зрения видно сразу: вместо того чтобы по отдельности изучать каждый тип конического сечения, она позволяет создать общую теорию, справедливую для всех типов конических сечений.

В своем «Трактате о живописи» Альберти установил, что перспектива преобразует систему параллельных прямых в пучок прямых, проходящих через одну точку, и, чтобы соответствие между этими двумя системами было полным, Дезарг ввел новую точку на каждой прямой — «бесконечно удаленную точку». Эта точка принадлежит каждой прямой системы, и Дезарг ввел соглашение, по которому она называется точкой пересечения системы

4. Теорема Дезарга об инволюции

$$\frac{AB \cdot AB'}{AC \cdot AC'} = \frac{A'B \cdot A'B'}{A'C \cdot A'C'}$$



В проективной геометрии всегда рассматривается полный четырехвершинник: если L, M, N, P — четыре точки, никакие три из которых не коллинеарны, то имеются шесть способов соединить их прямыми; это и есть шесть сторон полного четырехвершинника.

параллельных прямых. Таким образом, параллельные прямые и пучок прямых имеют одну и ту же природу, за исключением того, что точка пересечения параллельных прямых удалена в бесконечность. Аналогичным образом он ввел понятие «бесконечно удаленной прямой».

Дезарг установил на примере окружности свойство конических сечений, связывающее шесть произвольно выбранных на них точек. Он рассматривал четырехвершинник $LMNP$, вписанный в окружность (см. табл. 4), и прямую, пересекающую противолежащие стороны LM и PN четырехвершинника в точках A и A', две другие противолежащие стороны LN и MP в точках B и B' и окружность в точках C и C'. Тогда эти три пары точек A, A', B, B', C, C' образуют «*инволюцию*», т. е. $\frac{AB \cdot AB'}{AC \cdot AC'} = \frac{A'B \cdot A'B'}{A'C \cdot A'C'}$. Это понятие восходит к Менелаю и Паппу, хотя термин придуман Дезаргом. Эти шесть точек попарно сопряжены.

В соответствии с тем, что Дезарг считал коническое сечение всего лишь перспективой окружности, для него была ясна справедливость этой теоремы для четырехвершинника, вписанного в любое коническое сечение, если предварительно доказать, что перспектива сохраняет свойство множества точек образовывать инволюцию. Чтобы доказать это, Дезарг воспользовался работами Менелая и Паппа.

Затем Дезарг рассмотрел случай, когда две сопряженные точки совпадают:

$$\text{если } B = B', \text{ то } \frac{(AB)^2}{AC \cdot AC'} = \frac{(A'B)^2}{A'C \cdot A'C'};$$

$$\text{если, кроме того, } C = C', \text{ то } \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{A'B}{A'C}\right)^2;$$

тогда четыре точки A, A', B, C являются *гармонической четверкой* точек, т. е. две точки A и A' *гармонически разделяют* пару двойных точек B и C, являются *гармонически сопряженными* относительно точек B и C.

Современное определение в терминах двойного отношения было дано позже (в 1827 г. Мёбиусом). Дезарг ввел это понятие в дополнении к труду гравера А. Босса «Общий способ г-на Дезарга использования перспективы и т. д.», в котором этот ученик Дезарга пытался в популярной форме изложить идеи своего учителя и завоевать для них более широкий круг сторонников (1648 г.).

Двойное отношение четырех коллинеарных точек определяется формулой:

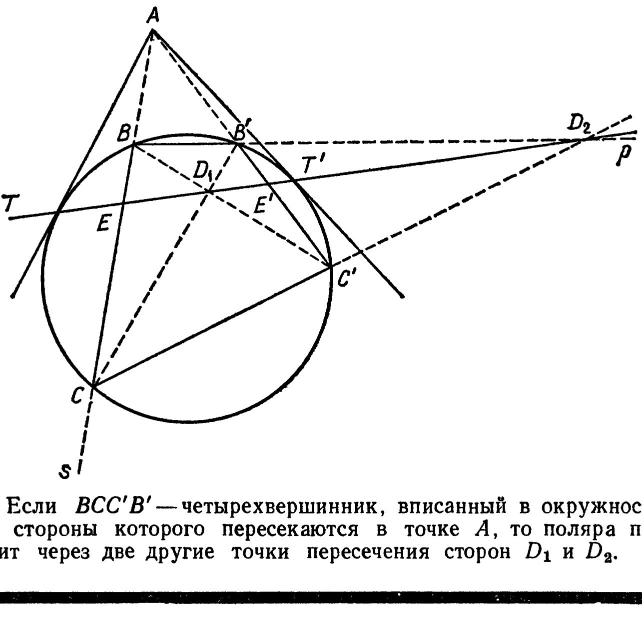
$$(A, B, C, D) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}.$$

Когда оно равно -1, эти четыре точки образуют гармоническую четверку. Когда одна из них является бесконечно удаленной точкой, ее гармонически сопряженная находится в середине отрезка, образованного двумя другими точками.

При помощи понятия гармонической четверки точек и ее инвариантности по отношению к проекции (поскольку проекция сохраняет свойство группы точек образовывать инволюцию) Дезарг разработал теорию поляр

5. Поляра точки относительно окружности

$$(A,\ E,\ B,\ C)=\frac{BA}{BE}:\frac{CA}{CE}=(A,\ E',\ B',\ C')=-1$$



Если $BCC'B'$ — четырехвершинник, вписанный в окружность, две стороны которого пересекаются в точке A, то поляра проходит через две другие точки пересечения сторон D_1 и D_2.

точки относительно окружности, а затем посредством проекции из точки, находящейся вне плоскости фигуры, и далее, посредством сечения проекции, распространил ее на все конические сечения. Если точка A находится вне окружности (точка, называемая полюсом), то на всякой секущей, проведенной из точки A и пересекающей окружность в точках B и C, существует четвертая точка

E, гармонически сопряженная с A относительно пары точек B и C (см. табл. 5). Для всех секущих s эти четвертые гармонически сопряженные с A относительно пары точек B и C точки лежат на одной прямой p, называемой полярой точки A. То же самое верно и для точки A, находящейся внутри круга. Если A — внешняя точка, то ее

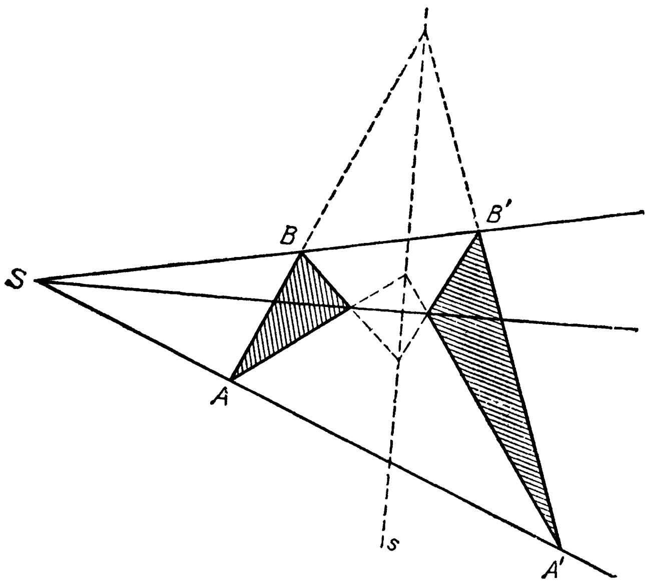


Рис. 4.5.

поляра соединяет точки касания касательных к окружности, проведенных из точки A. Аполлоний изучал гармонические свойства поляр, но он установил их по отдельности для каждого типа конического сечения.

Приведем также важную теорему, доказанную Дезаргом в дополнении к работе Босса, которую Понселе положил в основу разработанной им теории гомологий:

«*Если вершины двух треугольников, расположенных в пространстве или в одной плоскости, лежат попарно на трех прямых, пересекающихся в одной точке, то соответствующие стороны этих треугольников попарно пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой, и обратно*». (См. рис. 4.5.)

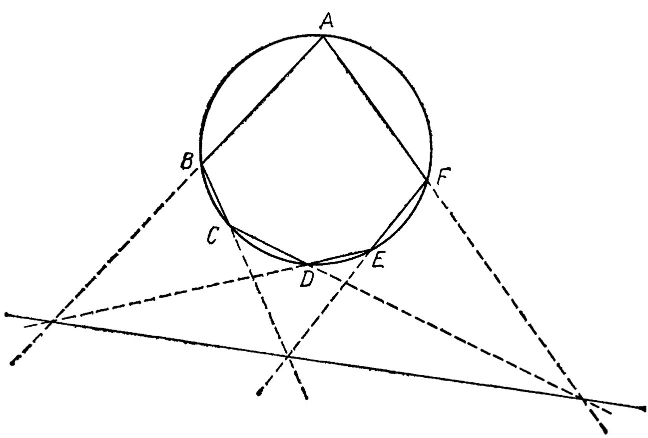
Ввиду относительного неуспеха своих геометрических идей Дезарг все внимание сосредоточил на приложениях и с 1645 г. посвятил себя карьере архитектора.

Тем не менее его идеи были подхвачены двумя его учениками: Блезом Паскалем (1623—1662) и Филиппом Лаиром (1640—1718).

Паскаль и Лаир

Паскаль очень быстро усвоил новые проективные методы и понял, насколько они важны и интересны. В возрасте 16 лет он написал небольшой трактат о конических

6. Теорема Паскаля: мистическая гексаграмма



Если $ABCDEF$ — шестиугольник, вписанный в коническое сечение, то точки пересечения трех пар противоположных сторон AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой.

сечениях, в котором использовал методы Дезарга. Об этом трактате мы знаем только из замечания Лейбница, который его видел в Париже и описал в письме к племяннику Паскаля. «Опыт о конических сечениях» («Essai sur les coniques»), написанный в 1640 г., постигла та же участь, но в 1779 г. он был заново открыт. В этих двух мемуарах сформулирована знаменитая теорема Паскаля о «мистической гексаграмме». Эта теорема занимает центральное место в изучении свойств конических сечений (см. табл. 6.) Паскаль наметил ее доказательство с помощью перспективы: три точки пересечения противоположных пар сторон шестиугольника, вписанного в окружность, лежат на одной прямой, и достаточно произвести преобразова-

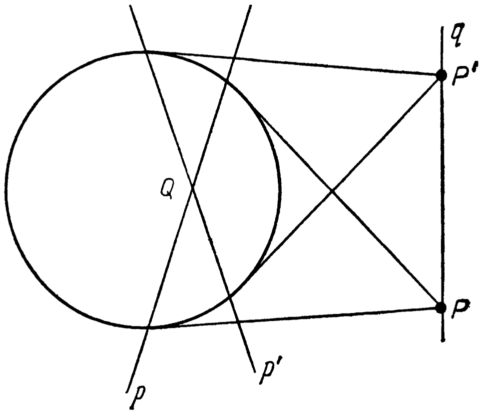


Рис. 4.6.

ние этой фигуры с помощью центральной проекции, чтобы распространить эту теорему на любые конические сечения.

Лаир в своих «Конических сечениях» («Sectiones conicae», 1685 г.) использовал проективные методы, чтобы представить почти полный свод известных свойств конических сечений. К ним он добавил несколько новых результатов.

В теории поляр Лаир доказал, что, когда полюс P пробегает прямую q, поляра p точки P вращается вокруг полюса Q прямой q (см. рис. 4.6).

5. Аналитическая геометрия и исследование кривых в XVIII в.

После работ Лаира проективные методы почти на целый век были преданы забвению. Это объясняется отчасти расцветом в XVII в. методов исчисления бесконечно малых, которые всецело завладели умами математиков, а также большой популярностью метода координат, опубликованного Р. Декартом в его «Геометрии» (1637 г.). К тому же различие в точках зрения противопоставило Дезарга и Декарта. Хотя оба они стремились к отысканию общего подхода, способного унифицировать и упростить математические методы, они придерживались разных мнений относительно того, как к этому можно прийти. Дезарг верил в могущество геометрии, Декарт же всецело полагался на алгебру.

Декарт считал аналитическую геометрию в большой мере приложением алгебры к геометрии. Вначале он использовал алгебру как инструмент для решения задач на геометрические построения, затем постепенно у него появилась идея уравнения кривой.

«*Итак, желая решить какую-нибудь задачу, следует сперва ее рассматривать как уже решенную и дать названия всем линиям, которые представляются необходимыми для ее построения, притом неизвестным так же, как и известным. Затем, не проводя никакого различия между этими известными и неизвестными линиями, нужно обозреть трудность, следуя тому порядку, который показывает наиболее естественным образом, как они взаимно зависят друг от друга, до тех пор, пока не будет найдено средство выразить одну и ту же величину двояким образом: это то, что называется уравнением, ибо члены, полученные одним из этих двух способов, равны членам, полученным другим. И следует найти столько подобных уравнений, сколько было предположено неизвестных линий*».

Идея уравнения кривой более явно выступает у П. де Ферма, который независимо от Декарта около 1629 г. открыл основной принцип аналитической геометрии. Он был опубликован только в 1679 г. в его работе «Isagoge» («Введение в изучение плоских и телесных мест»).

Метод Ферма был основан на взаимно однозначном соответствии между точками плоскости и парами чисел (x, y) и ставил в соответствие кривым их уравнения $f(x, y)=0$.

В своих исследованиях Ферма исходил из работ великих александрийских ученых, и в частности Аполлония, которые он стремился выразить на алгебраическом языке

Виета. Положение точки P на кривой фиксировано длиной A, измеренной на какой-нибудь определенной, взятой за основу прямой от начальной точки O до некоторой точки Z, и длиной E от Z до P. Конец E описывает нашу кривую: «*Всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины, то налицо имеется место, и конец одной из них описывает прямую или кривую линию*» (см. рис. 4.7).

Ферма исследовал алгебраические уравнения относительно A и E, а также описываемые ими кривые.

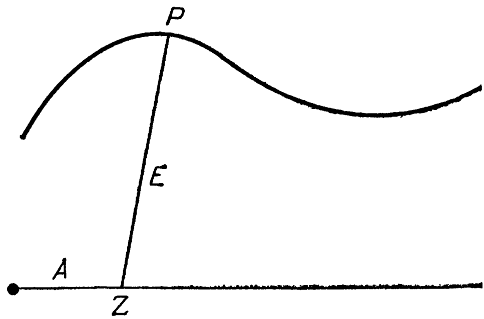


Рис. 4.7.

Он установил, что уравнения первой степени представляют прямые, а уравнения второй степени — конические сечения.

Декарт отошел от древней классификации кривых на плоские (прямые и окружности), пространственные (конические сечения) и линейные (все остальные, такие, как конхоида, спираль, квадратриса и т. д.) и ввел два новых класса: геометрические и механические кривые, т. е. в современной терминологии алгебраические и трансцендентные кривые (см. гл. 6). Он считал приемлемыми только первые и классифицировал их по степени соответствующего уравнения.

Алгебраическая кривая порядка n — это алгебраическая кривая, уравнение которой при помощи рациональных операций сводится к многочлену степени n. Так, кривая $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ является алгебраической кривой второго порядка, потому что ее уравнение возведениями в квадрат приводится к виду $4xy-(1-x-y)^2=0$.

Благодаря удобству методов и простоте алгоритмов аналитическая геометрия немедленно завоевала большое число сторонников и ее первоначальные методы были расширены: Ф. ван Схоотен вывел в 1649 г. формулы замены координат, Валлис первым (в 1655 г.) рассмотрел отрицательные абсциссы и ординаты; Ньютон, а затем Яков Бернулли изобрели полярные координаты, в которых точки плоскости задавались при помощи фиксированной точки и выходящего из нее луча [1]). Были исследованы новые кривые: лемниската, логарифмическая спираль, цепная линия, циклоида (см. гл. 5, с. 251—252) и др.

В XVIII в. математики обратились к физике; это, как правило, требовало хорошего знания свойств кривых и поверхностей: траектории движущихся тел представляют собой кривые, тела ограничены поверхностями.

Быстрые успехи исчисления бесконечно малых давали новые инструменты, пригодные для исследования этих кривых и поверхностей. Они позволяли изучать свойства, меняющиеся от точки к точке. На основе объединения методов исчисления бесконечно малых и аналитической геометрии возникла дифференциальная геометрия, развитие которой тесно связано с развитием аналитической геометрии.

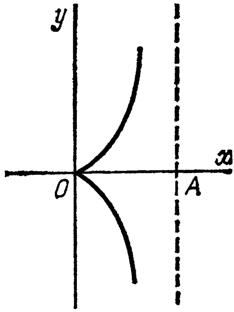
Систематическое исследование плоских алгебраических кривых, и в частности изучение кривых высших порядков, привело к расширению известных свойств кривых. Например, кривые более чем второго порядка могут иметь особенности, отсутствующие на кривых первого или второго порядка: точки перегиба, кратные точки, точки возврата (см. табл. 7).

Были изучены пересечения кривых. К. Маклорен сформулировал в своей работе «Geometria organica» (1720 г.) следующее свойство: «*Две плоские алгебраические кривые соответственно порядков m и n имеют вообще $m \cdot n$ общих точек*». Эйлер и Г. Крамер (1704—1752) без особого успеха пытались его доказать, затем Э. Безу (1730—1783) дал более полное доказательство этого свойства. Теорема получила его имя.

---

[1]) Отрицательные ординаты рассматривал уже Декарт, а полярными координатами пользовался еще Архимед в трактате «О спиралях».— *Прим. ред.*

O — точка возврата



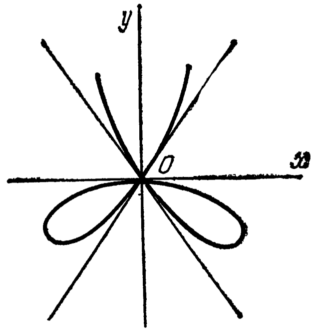
Циссоида (Диокла) с уравнением в декартовых координатах:

$$x(x^2+y^2)=ay^2,$$

в полярных координатах (ρ, θ):

$$\rho = a\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

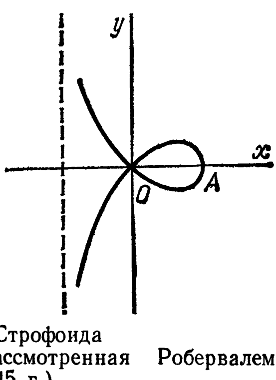
O — тройная точка



Кривая четвертого порядка с уравнением в декартовых координатах:

$$ay^3-3ax^2y=x^4.$$

O — двойная точка



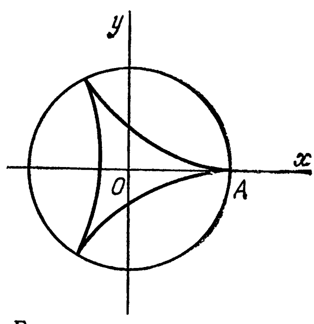
Строфоида (рассмотренная Робервалем в 1645 г.).

Ее уравнение в декартовых координатах:

$$x(x^2+y^2)=a(x^2-y^2),$$

в полярных координатах:

$$\rho = a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}.$$



Гипоциклоида с тремя точками возврата (исследованная Эйлером в 1745 г.).

Ее уравнение в декартовых координатах:

$$3(x^2+y^2)^2+8ax(y^2-x^2)+ \\ +6a^2(x^2+y^2)-a^4=0.$$

Первый импульс к изучению поверхностей был дан попытками определить форму Земли в ответ на конкурс, объявленный Парижской академией. Было разработано представление поверхности, погруженной в пространство, уравнением $W(x, y, z)=0$ относительно трех координат. Клеро вывел уравнения нескольких поверхностей второго порядка (сфера, цилиндр, параболоид, двуполостный гиперболоид, эллипсоид), а Эйлер систематически изучил общее уравнение второй степени от трех переменных, представляющее квадрики.

Клеро показал, что пространственные кривые можно описать как пересечение двух поверхностей.

В конце века Гаспар Монж получил важные результаты по пространственной дифференциальной геометрии. В своих работах он вернулся к методам чистой геометрии, которые после первых головокружительных успехов пришли в упадок и почти полностью исчезли из математики. Монж призывал к изучению пространственных фигур, учитывающему оба аспекта — аналитический и геометрический. Ему удалось дать первый толчок к обновлению чистой геометрии созданием начертательной геометрии, к которой мы сейчас обратимся.

6. Начертательная геометрия. Гаспар Монж

В ходе реорганизации образования во Франции во время французской революции Гаспар Монж (1746—1818), принимавший деятельное участие в этой кампании, ввел начертательную геометрию в программу Нормальной школы III года. Это был редчайший в истории науки случай внезапного появления новой дисциплины с уже сложившимся предметом, своими методами и четко очерченными границами области применений. Безусловно, считать Монжа ее единственным создателем было бы неверно. Даже если трудно назвать его предшественников, сами корни начертательной геометрии можно отыскать в графических приемах, издавна используемых на практике. Монж разработал эту дисциплину в 1760—1770 гг., когда как преподавателю Инженерной школы в Мезьере ему поручили сложную задачу расчета рельефа крепостных сооружений.

В своих лекциях в Нормальной школе, текст которых был стенографирован, а затем издан в 1799 г. под названием «Начертательная геометрия», Монж уточнил основные цели и задачи этой дисциплины.

«*Первая — точное представление на чертеже, имеющем только два измерения, объектов трехмерных, которые могут быть точно заданы. Вторая цель начертательной геометрии — выводить из точного описания тел все, что неизбежно следует из их формы и взаимного расположения*». В основе этой техники заложено представление каждой точки пространства ее ортогональными проекциями m и m_1 на две взаимно перпендикулярные плоскости (горизонтальная и фронтальная плоскости проекций). Вторая из этих плоскостей затем совмещается с первой поворотом на угол $\pi/2$ вокруг линии их пересечения, называемой осью проекций. Обе проекции m и m' точки M тогда находятся на одном и том же перпендикуляре к линии пересечения плоскостей проекций, называемом *линией связи* (см. рис. 4.8). Каждой точке M пространства соответствует единственная пара проекций m и m', называемая *эпюрой точки* M, и обратно, можно показать, что каждой паре проекций m и m', лежащих на одной и той же прямой, перпендикулярной к линии пересечения плоскостей проекций, соответствует единственная точка M пространства. Это взаимно однозначное со-

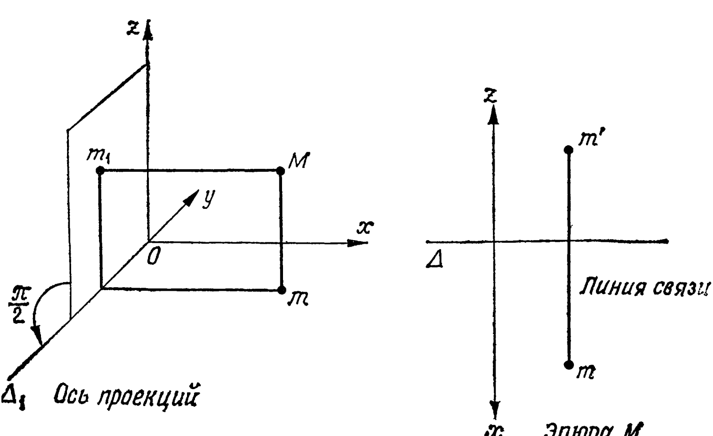


Рис. 4.8.

ответствие позволяет на основе плоских эпюр делать заключения относительно пространственных фигур.

Для Монжа начертательная геометрия была прежде всего графическим методом, позволяющим упростить решение многих практических задач, возникающих при обтесывании камня, плотницких работах, построении теней или перспективы, в топографии, теории машин и т. д.

Труд Монжа содержал ростки будущего развития проективной геометрии. Его ученикам Брианшону, Карно и Понселе оставалось только их отыскать и развить.

7. Трактат Понселе: синтез и манифест проективной геометрии

Жан-Виктор Понселе (1788—1867) разрабатывал свои первоначальные идеи проективной геометрии, находясь в русском плену. Он был офицером наполеоновской армии, попал в плен в России и там восстановил без помощи записей и каких бы то ни было других письменных источников те геометрические знания, которые получил на лекциях Монжа и Карно. На этой основе он провел собственные исследования.

«Трактат о проективных свойствах фигур», опубликованный в 1822 г.,— это переработанный и дополненный вариант заметок, написанных в России. В нем он снова обратился к принципам, которыми проникнут труд Дезарга, написанный почти на два века раньше, разъяснил их и включил в свой замечательный синтез проективных идей. Его подход был близок всем тем геометрам, которые вслед за Монжем и Карно выступали против засилья метрической геометрии, усугубленного исключительным использованием аналитических методов.

Эти геометры стремились придать синтетической геометрии такую же общность, которая характерна для аналитической геометрии. Действительно, в синтетической геометрии изучаются сами геометрические фигуры, и приходится рассматривать много «случаев расположения фигур» при возможных данных. Использование декартовых координат избавляло от такого исследования многих случаев.

Обе точки зрения, синтетическая и аналитическая, могли бы прекрасно дополнять друг друга, как и учил Монж, но мало-помалу их стали противопоставлять. В своих черновых заметках Понселе использовал координаты, но в дальнейшем его позиция ужесточилась: он полностью отказался от обращения к аналитической геометрии и без колебаний вступил в нескончаемую полемику со сторонниками последней.

Понселе первым стал рассматривать проективную геометрию как самостоятельную область геометрии, обладающую своими специфическими методами, собственными результатами и вполне определенными целями.

Принцип проектирования

В качестве общего метода Понселе избрал принцип проектирования, использованный Дезаргом для распространения свойств окружности на конические сечения и разработанный Паскалем в доказательстве его теоремы о мистической гексаграмме.

Понселе писал, что «*из данной точки, взятой за центр проекции, исходит пучок прямых, идущих во все точки*

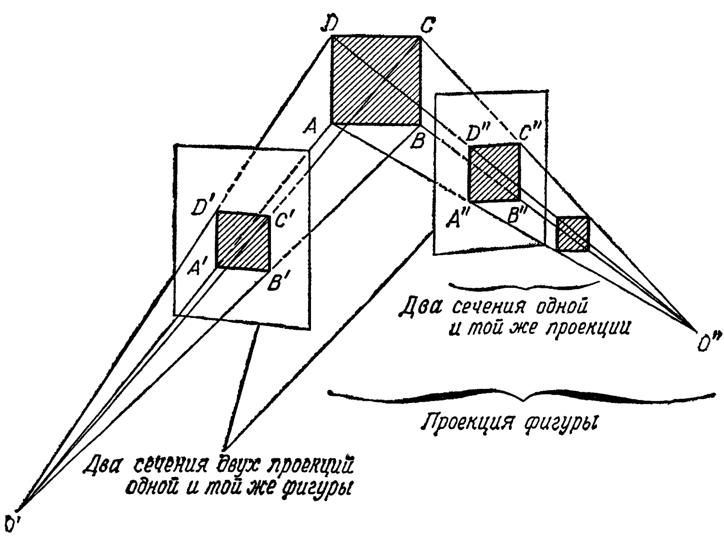


Рис. 4.9.

фигуры, расположенной в одной плоскости; если пересечь этот пучок проектирующих прямых другой плоскостью, произвольным образом расположенной в пространстве, в результате на этой плоскости получится новая фигура, являющаяся проекцией первой». Таким образом, на каждой плоскости, секущей пучок проектирующих прямых, получается проекция исходной фигуры.

Можно также представить себе две плоские фигуры, являющиеся проекциями из двух различных центров одной и той же плоской фигуры (см. рис. 4.9).

Понселе поставил общую задачу нахождения всех геометрических свойств, общих для плоских сечений различных проекций одной фигуры.

Он рассмотрел преобразования, более общие, чем те, которые происходят при проектировании и сечении: если F и F' — две плоские фигуры, полученные двумя сечениями одной и той же проекции (одного и того же пучка проектирующих прямых), и если спроектировать фигуры F и F' из некоторой точки на одну и ту же плоскость, полученные в результате фигуры называются *гомологичными фигурами.*

Гомологию можно также определить как преобразование плоскости в себя, в которой выбираются центр гомологии S и ось гомологии s. Точкам A, B, . . . ставятся в соответствие точки A', B', . . ., такие, что прямые AA', BB', . . . проходят через S и прямые AB, . . . и $A'B'$, . . . пересекаются на оси s (см. рис. 4.5). Треугольники из теоремы Дезарга являются гомологичными фигурами, поскольку их можно преобразовать один в другой посредством гомологии с центром в точке S и с осью s.

Понселе рассматривал также две фигуры, одна из которых может быть получена из другой конечным числом проектирований и сечений, и задавался вопросами об общих свойствах этих фигур.

Каковы же эти свойства, «*ненарушаемые при проектировании*», которые так интересовали Понселе? Немедленно обнаружилось, что длины и углы не сохраняются, но точки, лежащие на одной прямой, остаются лежащими на одной прямой; что пересекающиеся прямые остаются пересекающимися и т. д. Таким образом, Понселе пришел к различению метрических свойств, связанных с евклидовыми понятиями угла и расстояния, как, например, теорема Пифагора, и «дескриптивных» свойств, инвариантных относительно проектирования, как, например, теорема Паскаля. Для изучения этих последних свойств достаточно установить их для случая, когда они легко доказываются, а затем распространить на общий случай.

Принцип непрерывности

Может случиться, что при применении принципа проектирования для перехода от одной фигуры к другой некоторые элементы фигуры перестанут быть конечными или даже исчезнут. Так, Дезарг ввел фиктивную точку на каждой прямой — бесконечно удаленную точку, что сделало параллельные прямые и прямые, пересекающиеся в одной точке, объектами одинаковой природы. Монж, например, без колебаний называл касательные к окружности, проведенные из некоторой точки плоскости, *мнимыми*, если точка находилась внутри круга. Чтобы оправдать введение мнимых элементов, он сформулировал общий принцип — «*принцип возможных (contingentes) отношений*», к которому обратился Понселе, дав ему название «*принцип непрерывности*». Понселе рассматривал «*некоторую фигуру в общем положении*», затем сформулировал следующее: «*Не является ли очевидным, что если . . . первоначальную фигуру очень постепенно подвергать нечувствительным изменениям, или же если придавать некоторым частям этой фигуры произвольное непрерывное движение, не очевидно ли, что свойства и отношения, найденные для первой системы, останутся справедливыми при последовательных состояниях этой системы; при этом, однако, следует учитывать частные изменения, могущие с ней произойти, например когда некоторые величины исчезнут, переменят направление или знак и т. д.— изменения, которые было бы удобно узнать заранее и при помощи надежных правил?*».

У Понселе никогда не возникало потребности доказать этот принцип, казавшийся ему интуитивно ясным. Вслед за ним геометры широко использовали этот принцип, соблюдая некоторые предосторожности. Однако он был принят далеко не всеми. И даже оспаривался Академией наук.

Аналитик О.-Л. Коши высказывал по поводу этого принципа горькие замечания, утверждая, что ему недостает логического основания, и признавая за ним лишь некоторую эвристическую ценность. В своем докладе о трактате Понселе на заседании в Академии он сказал: «*Этот принцип, строго говоря, является лишь смелой индукцией, при помощи которой теоремы, установленные вначале при некоторых ограничениях, распространяют на случаи, когда этих ограничений не существует. Его применение к кривым второго порядка привело автора к точным результатам. Тем не менее мы полагаем, что он не станет общепринятым и не будет применяться к разнообразным вопросам геометрии и даже анализа*».

Коши был прав: принцип Понселе справедлив лишь в случае, когда рассматриваемые свойства можно аналитически выразить в виде $f(a, b, c, \ldots)=0$, где f — алгебраическая функция, так как в этом случае такая функция тождественно равна нулю, как только она обращается в нуль на небольшой части своей области определения.

Благодаря принципу непрерывности Понселе доказал результаты, касающиеся бесконечных и мнимых элементов, не вводя их явным образом. Он ввел «*циклические точки*»: «*Окружности, расположенные произвольным образом на плоскости, не являются полностью независимыми между собой, как могло бы показаться на первый взгляд, в идеальном смысле они имеют две общие мнимые точки в бесконечности*». Он доказал, что два действительных непересекающихся конических сечения имеют две общие мнимые хорды, так что можно было бы утверждать, что два конических сечения всегда имеют четыре общие точки, либо вещественные, либо мнимые. Систематическое введение несобственных фиктивных элементов (бесконечных или мнимых) позволило, таким образом, уничтожить различие между отдельными случаями фигур и придало проективной геометрии столь необходимую ей общность.

Принцип двойственности

В то время как принцип проектирования позволил Понселе свести общие доказательства к частным случаям фигур, принцип двойственности дал ему другой простой способ доказательства. Действительно, геометрами было замечено, что если заменить слово «точка» на «прямая» и «прямая» на «точка» в теоремах о плоских фигурах, то они оставались осмысленными и даже верными. Происхождение этого явления было им абсолютно неизвестно. Понселе связал это с отношением между полюсами и полярами относительно некоторого конического сечения, которое в действительности устанавливает соответствие между точками и прямыми плоскости. Точке P (полюсу) ставится в соответствие прямая (поляра точки P относительно этого конического сечения). Понселе определил преобразование с помощью взаимных поляр, при котором всякой прямой на плоскости ставится в соответствие ее полюс относительно конического сечения. Он развил эту идею, исследовав, каков будет результат преобразования шестиугольника, многоугольника, а затем и произвольной плоской кривой:

«*Если две произвольные кривые, лежащие в плоскости данного конического сечения, таковы, что точки одной являются соответственно полюсами касательных к другой, то и наоборот, точки второй являются полюсами касательных к первой, так что каждую из них можно рассматривать одновременно и как огибающую поляр точек другой, и как геометрическое место полюсов ее касательных*».

Поставив в соответствие некоторой точке ее полярную плоскость (т. е. множество точек, сопряженных относительно полюса), Монж ввел в пространстве понятие полярности относительно квадрики.

Полярное преобразование всегда производится относительно конического сечения или квадрики. Жергонн, энергичный издатель журнала Annales de mathématiques pures et appliquées, утверждал, что существует более общий принцип, не зависящий от конических сечений и квадрик и применимый ко всем аксиомам и теоремам, не содержащим метрических свойств. Однако Жергонн не сумел придать ему корректный вид, чем вызвал нападки Понселе. Сущность «*принципа двойственности*» — так назвал его Жергонн — постепенно определилась в ходе дискуссии между Понселе, Жергонном, Мёбиусом, Шалем и Плюккером.

Жергонн ввел запись исходной и двойственной теорем в два столбца, параллельно друг другу:

Свойство.	Двойственное свойство.
Через любые две точки можно провести прямую.	Любые две прямые имеют общую точку.
Три точки коллинеарны, т. е. лежат на одной прямой.	Три прямые проходят через одну точку, т. е. принадлежат одному пучку.
Треугольник образован тремя неколлинеарными точками и тремя попарно соединяющими их прямыми.	Двойственная фигура образована тремя не пересекающимися в одной точке прямыми и тремя точками пересечения пар этих прямых: это тоже треугольник.

Мы можем теперь сформулировать теорему, двойственную теореме Дезарга.

«*Если заданы два таких треугольника, что прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников, пересекаются в одной точке, то пары соответственных сторон пересекаются в трех точках, принадлежащих одной прямой*».	«*Если заданы два таких треугольника, что точки пересечения соответственных сторон принадлежат одной прямой, то соответственные вершины треугольников соединяются тремя прямыми, пересекающимися в одной точке*».

Можно заметить, что теорема, двойственная теореме Дезарга, является ее обратной.

Еще в 1806 г. ученик Монжа Брианшон (1785—1864) установил при помощи принципа полярности теорему, двойственную теореме Паскаля, показав, что взаимная поляра (по отношению к некоторому коническому сечению) некоторого шестиугольника, вписанного в коническое сечение, является шестиугольником, описанным вокруг такой же кривой, и обратно.

Теорема Паскаля	**Теорема Брианшона**
«*Противоположные стороны шестиугольника, вписанного в коническое се-*	«*Во всяком шестиугольнике, описанном вокруг конического сечения, прямые,*

чение, пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой».

соединяющие пары противоположных вершин, проходят через одну точку». (См. рис. 4.10.)

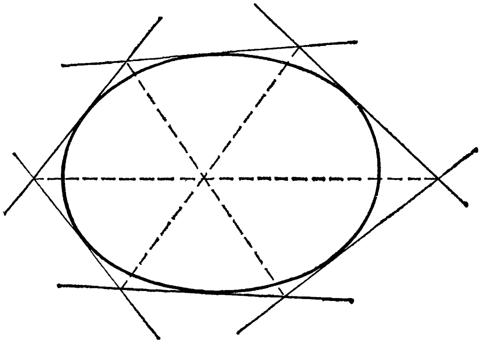


Рис. 4.10.

Связь между двойственностью и полярностью окончательно прояснил Мёбиус (в 1827 г.). Принцип двойственности распространяется за пределы теории конических сечений и совпадает с принципом полярности там, где последний имеет место.

Влияние Понселе

В своем большом обобщающем труде «Трактат о проективных свойствах фигур» Понселе положил в основу проективной геометрии несколько интуитивно понятных принципов, вывел из них изящные и общие методы, систематизировал понятие бесконечно удаленного элемента и совершил переход к комплексной проективной геометрии. Принятый как манифест синтетической геометрии, «Трактат» покорил многих геометров.

Под влиянием идей Понселе в Германии вокруг журнала, издаваемого Крелле, возникла целая школа проективной геометрии, которая занималась в основном изучением алгебраических кривых и поверхностей.

В поисках все большей общности в геометрии Август Фердинанд Мёбиус (1790—1868) снабдил геометрические величины — длины, углы, площади, объемы — знаком (+ или —) и рассматривал, таким образом, ориентированные величины. Он снова рассмотрел двойное отношение четырех точек и создал его строгую теорию (что стало возможным после введения знаков в геометрии). Система четырех пересекающихся в одной точке прямых образует гармоническую четверку, если их точки пересечения с секущей находятся в гармоническом отношении. Мёбиус и Юлиус Плюккер (1801—1868) ввели однородные координаты. Плюккер рассматривал фиксированный треугольник и в качестве кординат (x_1, x_2, x_3) точки P, лежащей в плоскости этого треугольника, выбирал алгебраические длины перпендикуляров, опущенных из этой точки на стороны треугольника, умноженные на произвольные константы. Эти координаты определены неоднозначно, корректно определены лишь их попарные отношения. Если (x, y) — декартовы координаты некоторой точки, то $x=x_1/x_3$ и $y=x_2/x_3$. Уравнения кривых, записанные в однородных координатах, являются однородными.

Французский математик Мишель Шаль (1793—1880), игравший ведущую роль в геометрических исследованиях середины XIX в., независимо получил многие результаты немецких геометров и распространил их во Франции.

8. Геометрические преобразования

В работе Понселе впервые на передний план выступила идея геометрических преобразований, которая до тех пор очень мало использовалась в математике.

Евклид использовал движение, чтобы доказать, например, случаи равенства треугольников. Зная, что невозможно спроектировать сферу на плоскость с сохранением длин, картографы XVI в. искали отображения, сохраняющие углы [1]). Наконец, известны практические применения центральной проекции для изображения тел на плоскости. Однако никто явным образом не сформулировал понятия преобразования. Оно выступило на по-

[1]) Проектирование сферы на плоскость, сохраняющее углы (стереографическая проекция) было известно еще Клавдию Птолемею (II в. н. э.), а также многим арабским астрономам, называвшим эту проекцию «проекцией астролябии», так как она лежала в основе действия этого инструмента.— *Прим. ред.*

верхность в понятиях центральной проекции Дезарга и цилиндрической проекции Монжа. Для изучения некоторых геометрических свойств пространственных фигур их заменяли плоскими проекциями.

У Понселе преобразование появилось в виде соответствия между фигурами, лежащими в двух разных плоскостях, преобразующего точки первой плоскости в точки второй (проектирования и гомологии) или точки первой плоскости в прямые второй (двойственность).

Несколько позже Монж и независимо от него Шаль определили самые общие проективные преобразования, названные Шалем *«гомографиями»*, как преобразования одной плоскости в другую, переводящие точки в точки, прямые в прямые и сохраняющие двойное отношение точек. Мёбиус показал, что последнее условие является следствием предыдущих: если A', B', C', D' — результаты проективного преобразования системы коллинеарных точек, то $(A', B', C', D')=(A, B, C, D)$. Как и Мёбиус, Шаль указал, что аналитически проективные преобразования выражаются линейными обратимыми подстановками в однородных координатах (см. табл. 8).

Плоское преобразование, ставящее в соответствие точкам прямые и наоборот, Шаль назвал *«корреляцией»*.

Очень ясной была у Мёбиуса концепция точечного преобразования двух плоскостей. Для описания различных типов преобразований он создал понятие *«геометрического сродства»* (Verwandschaften). В соответствии с тем, равны или подобны исходные фигуры результатам своих преобразований, он различал движения и подобия. Уже Эйлер изучал движения и доказал по существу, что любое плоское движение является вращением или сдвигом с возможной последующей симметрией. Мёбиус принял эйлеров термин «аффинное преобразование» для обозначения преобразования, сохраняющего параллельность без сохранения расстояния. Наиболее общее изученное Мёбиусом преобразование — это гомография, названная им *«коллинеацией»* (см. табл. 8).

Мёбиус заметил, что можно изучать свойства, инвариантные при каждом типе преобразований. Феликс Клейн видел в «сродстве» понятие, эквивалентное понятию группы, и считал, что Мёбиус предвосхитил Эрлангенскую программу.

Если $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ — однородные координаты некоторой точки проективной плоскости, $x'=\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$ — однородные координаты ее образа при проективном преобразовании, то

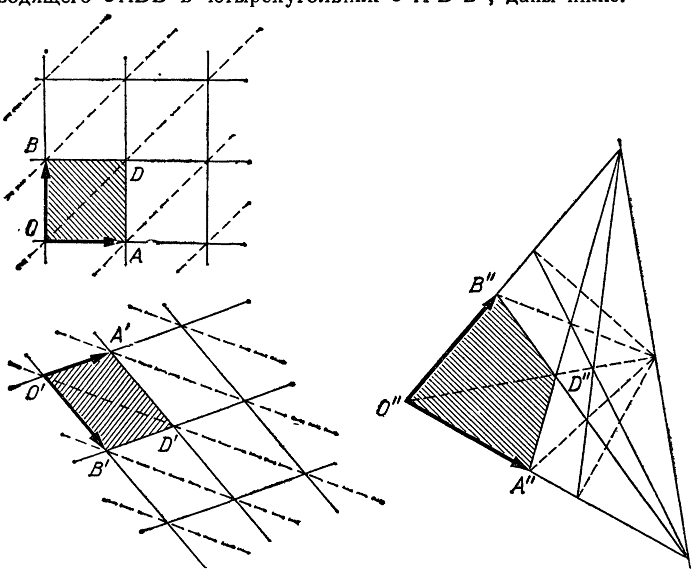
$$x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,$$
$$x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,$$
$$x_3'=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3,$$

где на коэффициенты a_{ij} наложено условие, обеспечивающее обратимость преобразования.

В сжатом виде можно записать $x'=Ax$, где

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ — матрица с определителем, не равным нулю.

Аффинные преобразования аналитически записываются как $x'=A'x$, где A' — такая же матрица с $a_{31}=a_{32}=0$. Примеры аффинного преобразования, которое переводит квадрат $OADB$ в параллелограмм $O'A'D'B'$, и проективного преобразования, переводящего $OADB$ в четырехугольник $O''A''D''B''$, даны ниже:



9. Проективные координаты фон Штаудта

Внутри немецкой школы произошел разрыв между геометрами, ставящими форму на первое место и желавшими создать чисто синтетическую геометрию, и их коллегами, предпочитавшими алгебраические методы. Наиболее непримиримыми сторонниками первого направления были Штейнер и фон Штаудт, тогда как Мёбиус и Плюккер отказывались изгнать координаты из проективной геометрии. Кульминационным пунктом усилий создать «чистую» геометрию, свободную от аналитических методов и независимую от какой бы то ни было метрики, была попытка Кристиана фон Штаудта (1798—1867) определить проективные координаты. Действительно, одно из наиболее важных понятий проективной геометрии — двойное отношение четырех точек — определяется при помощи чисто метрического понятия длины. Фон Штаудт решил освободить проективную геометрию от каких бы то ни было метрических соображений, введя проективную меру длин [1]. Чтобы подчеркнуть свой разрыв с метрическими методами, он заново окрестил двойное отношение, назвав его *«вурфом»* (Wurf). Если M — некоторая точка плоскости, координатой M будет «вурф», который эта точка M образует с тремя другими точками: 0, 1, ∞, произвольно выбранными на прямой, проходящей через M.

В основе его построений лежала конструкция так называемой мёбиусовой сети, при которой для нанесения проективной шкалы на прямой использовались только точки и прямые. Бесконечно удаленная точка лежит на бесконечно удаленной прямой, которая в проективной геометрии считается «обычной» прямой (см. рис. 4.11).

Вначале проводят прямую, параллельную прямой $O1$ и проходящую через точку M. Но две параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке, поэтому проводят прямую $M\infty$. Продолжив прямую OM до ее пересечения с бесконечно удаленной прямой в точке P, проводят прямую $1P$, параллельную OM и проходящую через точку 1. Эти две параллельные прямые должны пересечься на бесконечно удаленной прямой. Точно

[1] В «Geometrie der Lage» («Геометрия положения»), 1847 г.

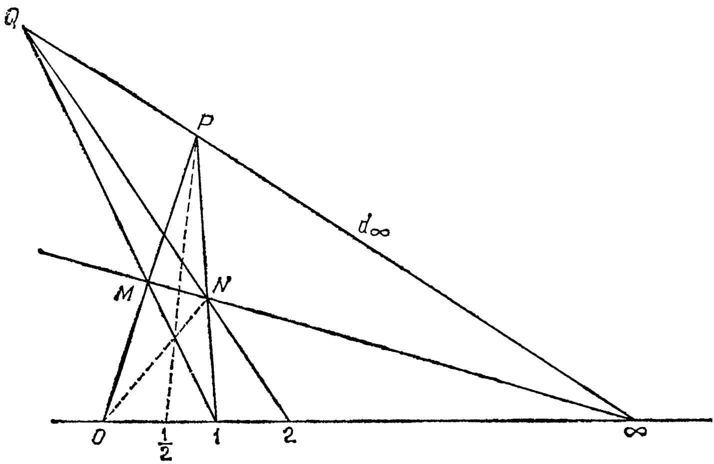


Рис. 4.11.

так же продолжают прямую $1M$ до пересечения с бесконечно удаленной прямой в точке Q и проводят прямую QN, параллельную $1M$ и проходящую через точку N. Эта последняя прямая пересекает основную прямую $O\infty$ в некоторой точке, которую обозначают символом 2.

Такая конструкция фон Штаудта позволяет получить все рациональные значения координаты x. А установление соответствия между иррациональными числами и точками прямой столь же проблематично, как и в евклидовой геометрии, и требует аксиомы непрерывности. Проективной геометрии не удалось избежать этого подводного камня, и попытка фон Штаудта сделала предметами дискуссии природу иррациональных чисел, меру и связь между геометрическими величинами и числами.

«Алгебра вурфов» фон Штаудта позволила построить проективную геометрию независимо от понятия расстояния. Ее понятия основывались на качественных и дескриптивных свойствах геометрических фигур и логически предшествовали понятиям евклидовой геометрии, основанной на измерении длин и углов. Отметим, однако, некоторую логическую уязвимость конструкции фон Штаудта: он использовал аксиому о параллельных евклидовой геометрии (в то время как параллельность не является проективным инвариантом).

10. Аналитические формулировки

Параллельно усилиям по основаниям проективной геометрии в Германии развивались и аналитические методы. Мёбиус и Плюккер ввели однородные координаты, позволившие сформулировать аналитически принципы проективной геометрии и вытекающие из них свойства.

Однородные координаты

Итак, Плюккер записал в однородных координатах (x_1, x_2, x_3) уравнение бесконечно удаленной прямой: $x_3 = 0$. Конечные точки евклидовой плоскости можно определить координатами $x = x_1/x_3$ и $y = x_2/x_3$. Точки, третья координата которых $x_3 = 0$, таким образом, лежат на бесконечно удаленной прямой.

Чтобы получить уравнение циклических точек, достаточно вычислить точки пересечения некоторой окружности с бесконечно удаленной прямой. В декартовых координатах уравнение окружности с центром (a, b) и радиусом R записывается как

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2;$$

в однородных координатах оно имеет вид

$$(x_1-ax_3)^2+(x_2-bx_3)^2=R^2x_3^2.$$

Пересечение окружности с бесконечно удаленной прямой представляется уравнениями $x_1^2+x_2^2=0$ и $x_3=0$. Следовательно, оно состоит из двух точек с координатами $(1, i, 0)$ и $(1, -i, 0)$ соответственно, где $i^2=-1$.

Прямая, проходящая через точку (x_1, y_1, z_1) и точку $(1, i, 0)$, может быть аналитически представлена уравнением $(x-x_0)+i(y-y_0)=0$, где $x_0=x_1/z_1$, $y_0=y_1/z_1$; точно так же прямая, проходящая через точки (x_1, y_1, z_1) и $(1, -i, 0)$, задается уравнением $(x-x_0)-i(y-y_0)=0$. Полученные прямые обладают той особенностью, что они перпендикулярны сами себе. Ведь угловой коэффициент перпендикуляра к первой прямой, равный $-1/i$, в то же время равен угловому коэффициенту самой прямой. Софус Ли назвал в шутку такие прямые *«безумными»*. Они носят название *«изотропных прямых»*.

Позиция Юлиуса Плюккера тяготела к традиции Монжа и выражала его стремление воссоздать проективную геометрию, используя и геометрические конструкции, и аналитические формулы. Он предложил аналитический подход к принципу двойственности Жергонна — Понселе.

Тангенциальные координаты

Уравнение прямой в однородных координатах (x_1, x_2, x_3) записывается в виде

(1) $$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0,$$

где u_1, u_2, u_3 — три константы. Для каждой системы значений коэффициентов u_1, u_2 и u_3 уравнение (1) определяет прямую. Придавая величинам u_1, u_2, u_3 все возможные значения, мы получим представление уравнением (1) всех возможных прямых.

Если u_1, u_2, u_3 связаны соотношением au_1+bu_2+ $+cu_3=0$, где a, b и c обозначают три новые константы, то уравнение (1) представляет снова бесконечное множество кривых, которые все проходят через точку с координатами (a, b, c).

Считая u_1, u_2, u_3 переменными величинами, Плюккер отождествил этот пучок прямых, проходящих через одну точку, с их точкой пересечения и заявил, что уравнение

(2) $$au_1+bu_2+cu_3=0$$

представляет точку. Каждой системе значений u_1, u_2 и u_3 соответствует прямая, проходящая через точку $P(a, b, c)$. Плюккер назвал систему (u_1, u_2, u_3) «*тангенциальными координатами*» этой прямой. Тангенциальные координаты прямой $3x_1—2x_2+2x_3=0$ ($3x—2y+2=0$ в декартовых координатах) равны (3, —2, 2).

Поскольку уравнение $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ симметрично относительно коэффициентов u_i и координат x_j, его можно интерпретировать как «*геометрическое место бесконечного множества точек*», когда переменными являются координаты, или же как «*геометрическое место* —

пересечение бесконечного числа прямых», когда переменными являются коэффициенты.

Если заменить уравнение (2) каким-нибудь однородным уравнением, например,

$$(3) \qquad f(u_1, \ u_2, \ u_3)=0,$$

то каждому значению тройки (u_1, u_2, u_3), удовлетворяющему уравнению (3), соответствует некоторая прямая. «*Мы получим бесконечно много таких прямых, которые непосредственно следуют друг за другом, так что огибающая их будет непрерывной кривой. Мы будем говорить, что эта кривая представляется уравнением* (3)». И далее: «*легко видеть, как способы доказательства удваиваются в геометрии кривых, как каждому рассуждению об обычной кривой соответствует другое, относящееся к новой кривой*». Плюккер понимал связь с теорией взаимных поляр, и в более общем виде, с принципом двойственности.

Уравнение (3) представляет кривую, если интерпретировать (u_1, u_2, u_3) как однородные координаты; оно представляет двойственную кривую (или поляру), если (u_1, u_2, u_3) считать тангенциальными координатами.

Поскольку уравнение прямой (1) или плоскости симметрично по отношению к обеим интерпретациям, то можно заменить «прямую» или «плоскость» «точкой» во всех теоремах о свойствах, связывающих прямые или плоскости с точками.

Плюккер применил эти новые идеи в геометрии к кривым первого и второго порядков и приступил к изучению кривых порядка 3 и 4 (от которых должен был отказаться Понселе, не справившись с трудностями такой задачи); он создал первый удачный набросок общей теории плоских алгебраических кривых.

11. Неевклидовы геометрии

Одновременно с развитием проективной геометрии и созданием в ней, как и в аналитической геометрии, новых средств для изучения алгебраических кривых и поверхностей в первой половине XIX в. происходит зарождение новой геометрии, которая выдвинулась как альтернатива евклидовой геометрии.

Теория параллельных

История этой теории началась практически вместе с историей евклидовой геометрии в III в. до н. э.— одновременно с «Началами» Евклида. Она сложилась из многочисленных попыток разъяснить 5-й постулат Евклида, постулат о параллельных: «*Через заданную точку можно провести не более одной прямой, параллельной заданной прямой*», в формулировке Ж. Плейфера, данной им в XVIII в. и эквивалентной формулировке Евклида (см. гл. 2, с. 73).

Начиная со времен античности и вплоть до 1800 г. можно выделить два различных направления: первое состояло в попытке заменить аксиому о параллельных другой, более простой и интуитивно ясной. Второе направление заключалось в стремлении превратить ее в простую теорему, выведя ее из четырех предыдущих аксиом. Попытки доказательства были многочисленными, но все, кто считал, что им найдено доказательство, неявно использовали какую-нибудь аксиому, эквивалентную аксиоме Евклида.

Теория параллельных сильно занимала арабских математиков от ал-Джаухари (начало IX в.) до ас-Самарканди (вторая половина XIII в.). Сабит ибн Корра, и в особенности ибн ал-Хайсам, ал-Хайями и ат-Туси проложили путь, который в XIX в. привел к построению неевклидовых геометрий. Они понимали связь между постулатом о параллельных и суммой углов четырехугольника и, следовательно, треугольника.

Ал-Хайями заменил постулат о параллельных следующим принципом: «*Две сходящиеся прямые* (т. е. те, которые приближаются друг к другу) *пересекаются, и невозможно, чтобы они удалялись одна от другой в том направлении, в котором они сходятся*» [1]). Отсюда вытекает, что два перпендикуляра к одной прямой одинаково отстоят друг от друга.

Ал-Хайями рассматривал так называемый четырехугольник Саккери (Джироламо Саккери был иезуитом и жил в XVII в.), образованный данной прямой AB, в концах которой восставлены равные перпендикуляры AC и BD, и прямой CD. Вначале он доказал равенство

[1]) Комментарий о проблематических постулатах книги Евклида.

двух верхних углов четырехугольника, уже установленное ибн Коррой. Затем сформулировал три гипотезы, а именно: «1) *верхние углы четырехугольника острые*; 2) *верхние углы четырехугольника тупые*; 3) *верхние углы четырехугольника прямые*». Используя вышеприведенное свойство, он доказал, что гипотезы 1) и 2) приводят к противоречию (см. табл. 9). Остается принять гипотезу прямого угла.

Идея доказать постулат о параллельных от противного оказалась плодотворной. Она позволила рассмотреть обе гипотезы, которые входят в ее отрицание, и вывести предложения, являющиеся уже теоремами неевклидовой геометрии.

В XVII в. Джон Валлис, а затем Дж. Саккери подхватили исследования арабов. При гипотезе острого угла Саккери не пришел к противоречию, но полученные им теоремы показались ему такими отвратительными, что он их отбросил.

Адриен-Мари Лежандр (1752—1833) предложил множество доказательств пятого постулата и получил при этом некоторые новые результаты: «*Если сумма углов в одном треугольнике равна двум прямым, то она равна этому значению и во всяком другом треугольнике, и пятый постулат Евклида верен*».

Следующий шаг был сделан в работах И. Г. Ламберта (1766 г.). Опираясь на работы Саккери, он не остановился, как Саккери, на опровержении гипотезы острого угла, но посчитал, что это может служить исходным пунктом для дальнейших выводов. У него зародилась мысль о возможности построения логически связных геометрий на основе обеих гипотез — гипотезы острого угла и гипотезы тупого угла [1]).

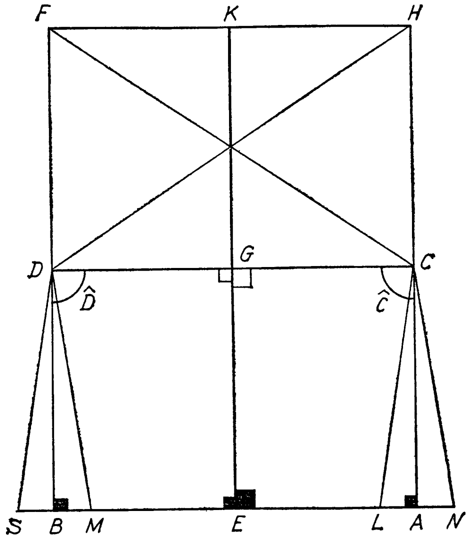
Творцы неевклидовой геометрии:
Гаусс, Бойяи и Лобачевский

На исходе века несколько человек пришли к убеждению, что постулат о параллельных недоказуем, и увидели в этом возможность вывести свод теорем из системы евклидовых

[1]) На самом деле гипотеза тупого угла легко приводится к противоречию с другими аксиомами и постулатами евклидовой геометрии, так что это утверждение справедливо лишь для гипотезы острого угла.— *Прим. ред.*

9. «Четырехугольник Саккери» у ал-Хайями (XI в.)

Доказательство того, что $\hat{C}=\hat{D}=\pi/2$



Ал-Хайями восставил перпендикуляр EG в середине нижнего основания и показал, что он также перпендикулярен к верхнему основанию и делит его на две равные части.

Он продолжил его до точки K, такой, что $GK=EG$.

Он продолжил стороны AC и BD.

Он провел FH перпендикулярно EK, где F и H — точки пересечения перпендикуляра с продолжениями сторон AC и BD.

В четырехугольнике $CDFH$ диагонали равны.

Он сложил чертеж вдоль прямой CD:

если углы $\hat{C}=\hat{D}$ острые (гипотеза 1), отрезок HF становится отрезком SN, который больше AB:

если углы $\hat{C}=\hat{D}$ тупые (гипотеза 2), HF совпадает с отрезком LM, который меньше AB.

Весь чертеж он затем отогнул по AB.

При гипотезе острого угла два перпендикуляра BF и AH к AB пересекаются.

При гипотезе тупого угла эти два перпендикуляра должны расходиться в обе стороны от AB.

Но два перпендикуляра к одной прямой равноудалены друг от друга, и обе гипотезы приводят к противоречию.

аксиом, в которой 5-й постулат заменен его отрицанием[1]). Однако они не признавали за этими новыми геометриями способности описывать физическое пространство. В лучшем случае они могли соответствовать межзвездным пространствам, откуда и поизошло название *астральная геометрия*, которое иногда давали неевклидовой геометрии. Чтобы лучше понять эту ситуацию, мы должны вкратце изучить статус евклидовой геометрии. До 1800 г. предполагалось, что она отражает мир ощущений. Ее теоремы, леммы и следствия — *идеальные* отражения реальных свойств — считались абсолютно верными. Догма евклидовой структуры пространства подкреплялась положениями немецкого философа И. Канта (1724—1804), которые безраздельно господствовали в западной философии. Кант считал, что евклидово пространство априорно предшествует всякому опыту.

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), представитель переходной эпохи: ученый XVIII в. по классической форме своих трудов, универсальности научных интересов и своей глобальной концепции науки и в то же время математик XIX в. по новизне и смелости своих идей, сумел преодолеть кантовскую точку зрения. Он первый признал за неевклидовой геометрией право представлять физическое пространство в той же мере, как это делает евклидова геометрия.

Гаусс интересовался теорией параллельных еще с 1792 г. Из его переписки и личных бумаг мы знаем, что уже в 1813 г. Гаусс разработал эту «*странную геометрию, совсем отличную от нашей* (. . .), *но совершенно последовательную в себе самой*». Гаусс ничего не опубликовал по этому поводу. «*Я опасаюсь крика беотийцев, если я выскажу мои воззрения целиком*»,— писал он своему другу Бесселю в 1829 г. Без сомнения, взгляды Гаусса повлияли на его мемуар по теории поверхностей, в котором впервые появилась возможность ввести различные геометрии на одной и той же поверхности.

Гаусс считал, что опыт поможет определить, какая геометрия наиболее приспособлена для отражения ре-

[1]) В конце XVIII в. к идеям неевклидовой геометрии пришел один только Гаусс. У «нескольких человек» идея о недоказуемости V постулата возникла лишь в первой половине XIX в.— *Прим. ред.*

ального мира. В своих работах по геодезии он искал выражение суммы углов треугольника, образованного тремя геодезическими — кратчайшими путями между двумя точками на поверхности. Он измерял на местности углы треугольника, образованного тремя вершинами гор. Если бы эти углы в сумме дали два прямых, то геометрия была бы евклидовой. Найденный результат превзошел π на 14″85, что заключено в пределах ошибки измерений.

Творцами неевклидовой геометрии повсеместно признаны Николай Иванович Лобачевский (1792—1856), профессор Казанского университета, и Янош Бойяи (1802—1860), венгерский офицер. Ничего не зная об исследованиях другого, каждый из них разработал около 1825 г. концепцию, сходную, с концепцией Гаусса. В противоположность Гауссу они стремились к распространению своей теории, и им мы обязаны первыми систематическими изложениями геометрии, основанной на гипотезе острого угла, которую Клейн назвал гиперболической геометрией. Первая публикация Лобачевского, относящаяся к 1826 г., ныне утеряна [1]), но за ней последовали многочисленные публикации (начиная с 1829—1830 гг.) на русском, французском и немецком языках. Бойяи изложил свои результаты в приложении к работе его отца, озаглавленном «Абсолютно верное учение о пространстве» (1832—1833 гг.).

Воображаемая геометрия Лобачевского

Лобачевский начал с того, что доказал теоремы евклидовой геометрии, не опирающиеся на постулат о параллельных. Затем он заменил этот постулат следующим свойством, уже имевшимся у Саккери: «*Для всякой прямой AB и данной точки C все прямые, лежащие в этой же плоскости и проходящие через точку C, могут быть разделены на два класса относительно AB: те из прямых,*

---

[1]) 23 февраля 1826 г. Н. И. Лобачевский сделал доклад на заседании Отделения физико-математических наук Казанского университета «Сжатое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных», в котором изложил основы новой геометрии. Текст доклада не сохранился. Первая публикация относится к 1829 г. Как утверждает Лобачевский, он включил текст доклада в эту свою работу.— *Прим. ред.*

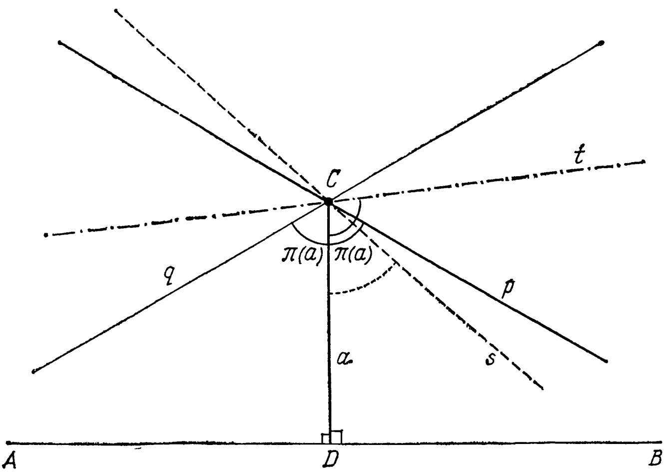


Рис. 4.12. p и q параллельны AB; s — сходящаяся; t — расходящаяся.

которые пересекают AB, и те, которые не пересекают AB». (См. рис. 4.12.)

Во втором классе существуют две прямые p и q, названные «*параллельными прямыми*», которые образуют границу между двумя этими классами, т. е. существует угол $\pi(a)$, который Лобачевский назвал «*углом параллельности*», зависящий от расстояния a от точки C до прямой AB и имеющий следующее свойство: все прямые, проходящие через C и образующие с перпендикуляром CD угол, меньший $\pi(a)$, пересекают AB; все остальные прямые, проходящие через точку C, не пересекают AB. Последние, которые в евклидовом смысле были бы параллельными AB, названы «*расходящимися*» прямыми. Через C проходит бесконечное множество таких прямых.

В частном случае, когда угол $\pi(a)$ равен прямому углу, получается постулат Евклида. Угол $\pi(a)$ возрастает и приближается к прямому углу при приближении точки C к прямой AB; угол $\pi(a)$ уменьшается и стремится к нулю, когда a стремится к бесконечности. В дальнейшем Лобачевский доказал множество теорем, из которых мы приведем следующие: «*Сумма углов в треугольнике должна быть всегда меньше двух прямых; она уменьшается, когда площадь треугольника возрастает, и при-*

ближается к двум прямым, когда площадь стремится к нулю. Два подобных треугольника равны между собой». (См. табл. 10.)

10. Евклидова и неевклидовы геометрии

Геометрия	Терминология Клейна	Четырехугольник Саккери	Число параллельных к данной прямой, проходящих через одну точку	Сумма углов треугольника
Евклид	параболическая геометрия	гипотеза прямого угла	одна параллельная	π
Гаусс — Бойяи — Лобачевский	гиперболическая геометрия	гипотеза острого угла	бесконечное множество параллельных	меньше π
Риман	эллиптическая геометрия	гипотеза тупого угла	ни одной параллельной	больше π

Риманова геометрия

Неевклидова геометрия, основанная на гипотезе тупого угла, была разработана учеником Гаусса, Бернгардом Риманом (1826—1866) в знаменитом мемуаре, написанном по случаю его вступления на философский факультет Гёттингенского университета (1854 г.) и озаглавленном «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (опубликовано в 1867 г.) [1]).

Приняв локальную точку зрения дифференциальной геометрии, Риман сумел раздвинуть ее рамки. Чтобы описать его теорию, нам следует вернуться вкратце к работе Гаусса «Общие исследования о кривых поверхностях» (1827 г.). Там развита концепция *внутренней* геометрии

[1]) Риман не был учеником Гаусса в обычном смысле слова, хотя, несомненно, развивал его идеи. Он не разрабатывал эллиптической геометрии, а построил общую «риманову геометрию» переменной кривизны, которая в случае постоянной положительной кривизны и дает эллиптическую геометрию.— *Прим. ред.*

поверхности. Гаусс отвлекся от свойств пространства, в которое погружена данная поверхность. Вместо того чтобы задавать ее в некоторой точке пространства введением системы координат (x, y, z), он ввел криволинейные координаты на самой поверхности по образцу широт и долгот на сфере.

Точнее, если в параметрических уравнениях поверхности $x=x(p, q)$, $y=y(p, q)$, $z=z(p, q)$ фиксировать p, а затем q, получатся два семейства параметрических кривых на поверхности. Каждая точка, находясь на пересечении двух кривых с параметрами соответственно p и q, может быть представлена парой значений (p, q).

11. Кривизна

Кривизна кривой в точке P

Рассматривается нормаль к кривой в точке P, которая фиксируется. Нормаль в близкой точке последовательно приближается к этому фиксированному положению, и их точка пересечения достигает предельного положения W на фиксированной нормали, которое называется *центром кривизны* кривой в точке P. Расстояние между P и W является *радиусом кривизны* R в точке P. Кривизна k кривой в точке P по определению равна $1/R$.

Примеры: Кривизна окружности равна $1/R$;

кривизна прямой равна 0 (W отнесено в бесконечность).

Кривизна поверхности в точке P

Рассматриваются радиусы кривизны различных сечений поверхности в точке P нормальными плоскостями, проходящими через P. Они изменяются в пределах между крайними значениями R_1 и R_2, названными *главными родиусами кривизны* в точке P.

Кривизна k поверхности в точке P по определению равна $1/(R_1 \cdot R_2)$.

Примеры: кривизна цилиндра вращения, на котором окружности-параллели имеют радиус R, равна $\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\infty}=0$.

Гаусс ввел расстояние между двумя точками поверхности следующим образом. Если (x, y, z) — координаты некоторой точки, а $(x+dx, y+dy, z+dz)$ — координаты бесконечно близкой к ней точки, то по определению квадрат расстояния между этими двумя точками будет квадратичной формой $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$. Гаусс выразил ее в криволинейных координатах: $ds^2=Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2$, где E, F и G — функции от p и q.

Исследуя свойства поверхности, независимые от выбора криволинейных координат, Гаусс доказал, что геометрические свойства поверхности — расстояния, углы, кривизна — зависят лишь от функций E, F и G (см. табл. 11). Из этого он заключил, что достаточно задать на некоторой поверхности квадратичную форму ds^2, чтобы вывести из нее все свойства поверхности: «*...чтобы найти меру кривизны, мы не нуждаемся в конечных формулах, дающих координаты x, y, z как функции неизвестных p и q, но достаточно иметь общее выражение величины каждого линейного элемента*» (который обозначен ds).

Такой способ рассмотрения поверхности как самостоятельного пространства позволил определить на одной и той же поверхности несколько геометрий, потому что именно задание линейного элемента ds, т. е. задание произвольных функций E, F и G криволинейных координат (p, q), определяет геометрические свойства этой поверхности.

Риман в своей работе возобновил исследования внутренней геометрии поверхностей, но при этом он освободился от необходимости вести рассмотрения в трехмерном пространстве, что уже Гаусс считал недостатком человеческого ума. Риман рассматривал «многократно протяженные величины», которые он называл *многообразиями* — это множества всех возможных значений n переменных параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называемых координатами. Он ввел на многообразии квадратичную форму — однородный многочлен второй степени от переменных, коэффициентами которого являются функции координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$ds^2=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,dx_i\,dx_k=a_{11}\,dx_1^2+2a_{12}\,dx_1\,dx_2+\ldots+a_{nn}dx_n^2.$$

Эта форма ds^2, являющаяся не чем иным, как обобщением линейного элемента поверхностей Гаусса, определяет меру расстояния между двумя точками с координатами, различающимися на бесконечно малые величины. Поскольку коэффициенты a_{ik} являются функциями места, метрика (и зависящая от нее природа геометрии) может изменяться от одной точки многообразия к другой. Неравномерно нагретый диск, на котором помещены металлические стержни, расширяющиеся под действием тепла, является примером поверхности, на которой длины зависят от места.

Риман указал, как измерять кривизну многообразия, и сосредоточил свое внимание на многообразиях постоянной кривизны, в которых возможны перемещения фигур без каких бы то ни было изменений их формы или размера.

Таким образом, евклидова геометрия и геометрия Гаусса — Бойяи — Лобачевского, соответственно отвечающие нулевой и отрицательной кривизнам, оказываются частными случаями более общей римановой геометрии. Но какова тогда природа многообразия постоянной положительной кривизны? Риман показал, что если размерность равна двум, то поверхности положительной кривизны наложимы на сферу. На них можно развить геометрию без параллельных.

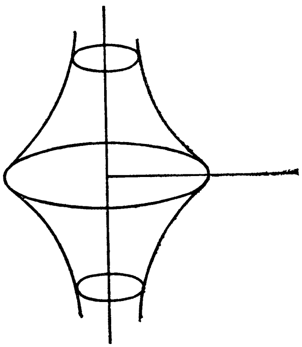


Рис. 4.13.

Таким образом, пространство постоянной положительной кривизны в двумерном случае можно «реализовать» на сфере, если отождествить ее поверхность с плоскостью, большие круги — с «прямыми», а пары диаметрально противоположных точек — с «точками».

В 1866 г. Эудженио Бельтрами (1835—1900) показал, что геометрия ограниченной части гиперболической плоскости [1]) наложима на псевдосферу — поверхность вращения постоянной отрицательной кривизны, при этом роль «прямых» будут играть геодезические линии на поверхности (см. рис. 4.13).

---

[1]) То есть плоскости, на которой справедлива геометрия Лобачевского.— *Прим. ред.*

Эти евклидовы модели придали эллиптической и гиперболической геометриям интуитивное основание и ускорили их признание математической общественностью.

Новая концепция пространства

Евклидова геометрия в основном занимается изучением плоских и пространственных фигур. Пространству отведена роль беспредельной и нейтральной протяженности, вместилища, в которое погружены тела.

Если конструкция Евклида опиралась на интуицию и наблюдение, то она также основана и на «гипотезах», постулатах Евклида. В течение двух тысячелетий эта гипотетическая сторона была скрыта, и, как мы уже говорили, евклидова структура реального мира была возведена в ранг догмы.

Можно легко себе представить «*странное раздвоение геометрической личности*» (по выражению Башляр), происшедшее в течение XIX в., когда Гаусс, Бойяи, Лобачевский и Риман построили независимо от человеческого опыта логически связные геометрии, не являющиеся евклидовыми. Абсолютная истинность последней была тем самым серьезно поколеблена, и вновь встал вопрос о связи реального мира с математическими объектами. По словам Дьедонне: «*Несколько наивная точка зрения, в соответствии с которой математические объекты являются всего лишь «идеями» (в платоновском смысле) чувственных вещей, становилась невозможной и постепенно уступала место более четкому осмыслению того, что этот вопрос гораздо сложнее; при теперешнем понимании его нам кажется, что математика и реальность почти полностью независимы, а их контакты более таинственны, чем когда-либо*».

Сознавая многообразие возможных геометрий, Риман, как и Гаусс, думал, что опыт поможет разрешить спор между различными геометриями. Он писал: «...*в многократно протяженной величине возможны различные мероопределения и... пространство есть не что иное, как частный случай трижды протяженной величины. Необходимым следствием отсюда является то, что предложения геометрии не выводятся из общих свойств про-*

тяженных величин и что, напротив, те свойства, которые выделяют пространство из других мыслимых трижды протяженных величин, могут быть почерпнуты не иначе как из опыта...».

Риман первым поставил вопрос о природе пространства. Он считал, что физическое пространство — это аморфное трехмерное многообразие, организованное только наполняющими его материальными массами, которые определяют также и его метрику. Если тела не зависят от местоположения, то кривизна пространства должна быть постоянной. Но постоянство кривизны более не является необходимым, если сделать метрику зависимой от распределения материи в пространстве. Тело влечет за собой «метрическое поле», которое оно порождает: существуют взаимодействия между пространством и погруженными в него телами.

Эта концепция нашла свое подтверждение в общей теории относительности. Мир является четырехмерным континуумом, который изменяется в зависимости от метрического поля, зависящего от состояния, скопления и движения материи, представляемого квадратичной формой ds^2.

12. Проективная интерпретация метрических понятий

Понселе, а затем и Шаль делали четкое различие между «*дескриптивными*» и метрическими свойствами. Фон Штаудт предпринял попытку подвести под проективную геометрию фундамент, не зависящий от понятия расстояния, однако связь между проективной и метрической геометриями не была до конца уточнена.

В 1853 г. французский математик Эдмон Лагерр (1834—1886) попытался обосновать измерение углов чисто проективным образом. Он вывел формулу угла Φ между двумя прямыми в точке их пересечения через двойное отношение, связывающее эти прямые и две изотропные прямые, проходящие через их точку пересечения.

Две прямые u и u', пересекающиеся в начале координат, образуют некоторый угол Φ. Если их углы с положительной осью x соответственно равны θ и θ', то в декартовых координатах их уравнениями будут $y=$

$=x\cdot\operatorname{tg}\theta$ и $y=x\cdot\operatorname{tg}\theta'$ соответственно. Если v и v' — две изотропные прямые, соединяющие начало координат с циклическими точками [1]) и имеющие уравнения $y=ix$ и $y=-ix$ соответственно, то Лагерр утверждал, что угол Φ равен $\Phi=\theta'-\theta=(i/2)\log(v, v', u, u')$, где (v, v', u, u') — двойное отношение этих четырех пересекающихся прямых.

Английский алгебраист А. Кэли независимо разработал проективную меру длин и углов, обобщающую метрику Лагерра. Интерпретируя циклические точки как вырожденное коническое сечение, он заменил их некоторым плоским коническим сечением, названным им «*абсолютом*» (его называют также *фундаментальным сечением*), и получил общую метрику, включающую в себя евклидову метрику. Кэли утверждал, что метрические свойства фигуры F являются проективными свойствами фигуры F', образованной фигурой F и *абсолютом*.

Исходным пунктом исследований Кэли был его мемуар о формах, являющихся однородными многочленами от двух, трех и т. д. переменных (шестой, вышедший в 1859 г.). Как Гаусс и Риман, он ввел меру расстояния, определив квадратичную форму в проективной плоскости. В однородных координатах она записывается как

$$q(x)=Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2+2Dx_1x_2+2Ex_1x_3+2Fx_2x_3.$$

Примером такой квадратичной формы служит

$$q_0(x)=x_1^2+x_2^2-x_3^2.$$

Она удовлетворяет условию $q(kx)=k^2q(x)$, где k — вещественное число. С ней можно ассоциировать симметрическую билинейную форму

$$F(x, y)={}^1/_2\,[q(x+y)-q(x)-q(y)].$$

При этом $y=(y_1, y_2, y_3)$,

$$F(x, y)=Ax_1y_1+Bx_2y_2+Cx_3y_3+D(x_1y_2+x_2y_1)+ \\ +E(x_1y_3+x_3y_1)+G(x_2y_3+x_3y_2)$$

и $F(x, x)=q(x)$.

В нашем примере $F_0(x, y)=x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3$.

---

[1]) Определение циклических точек см. на с. 198. — *Прим. ред.*

Но $F(x, x)=0$ определяет коническое сечение, *абсолют* Кэли. Таким образом, $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ является уравнением в однородных координатах окружности радиуса 1 с центром в начале координат. Кэли вычислял расстояние между точками x и y при помощи формулы

$$\delta = \arccos \frac{F(x, y)}{\sqrt{F(x, x)\cdot F(y, y)}}.$$

В данном примере

$$\delta = \arccos \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2-x_3^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2-y_3^2}}.$$

Аналогичным образом, рассматривая уравнение конического сечения в тангенциальных координатах, Кэли нашел двойственную формулу для проективного измерения углов и расстояний между двумя прямыми. Он показал, что эти формулы приводят к формулам евклидовой геометрии, если в качестве *абсолюта* выбрать циклические точки $(1, i, 0)$ и $(1, -i, 0)$, и это позволило ему заявить: «*метрическая геометрия является, таким образом, частью проективной геометрии*». Но Кэли не уловил связи с неевклидовыми геометриями.

Кэли не ограничил свои исследования геометрией на плоскости; в случае пространства он заменил циклические точки произвольной поверхностью второго порядка и показал, что метрика зависит от выбора этой поверхности.

13. Проективная природа неевклидовых геометрий

Немецкий математик Феликс Клейн (1849—1925), один из ведущих ученых второй половины XIX в., сумел использовать идеи Кэли и около 1871 г. нашел возможность охватить неевклидовы геометрии рамками проективной геометрии.

Клейн предпринял изучение метрических геометрий, соответствующих всем возможным поверхностям второго порядка в пространстве и всем коническим сечениям на плоскости, выбираемым в качестве *абсолюта*.

Он доказал для плоского случая, что выбор вещественного конического сечения (эллипс, гипербола или парабола) приводит к геометрии Гаусса — Бойяи — Лобачевского, а выбор мнимого конического сечения — к эллиптической геометрии. Примером мнимого конического сечения служит $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$. Если абсолют вырождается в две бесконечно удаленные точки, то мы приходим к евклидовой геометрии.

При этом Клейн ввел следующую терминологию: геометрию Лобачевского он характеризовал как *гиперболическую*, потому что в ней каждая прямая пересекает коническое сечение, выбранное в качестве абсолюта, в двух действительных точках; подобным же образом гипербола пересекает бесконечно удаленную прямую в двух точках. Геометрия Римана была названа *эллиптической* из-за аналогии между тем, что обычный эллипс имеет пустое пересечение (в вещественной области) с бесконечно удаленной прямой, и тем, что прямые римановой геометрии не имеют вещественных общих точек с абсолютом. Евклидова геометрия получила название *параболической*, потому что прямые в ней пересекают абсолют в единственной вещественной точке.

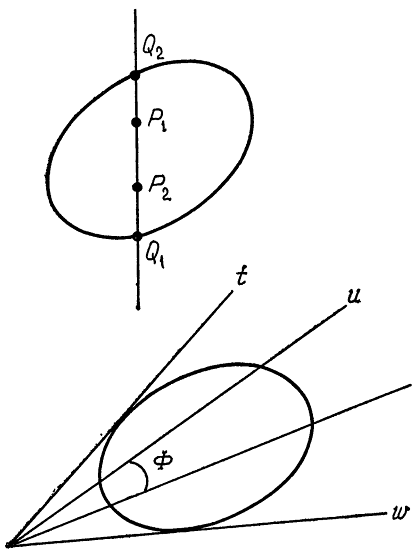


Рис. 4.14.

Предположим, что в качестве *абсолюта* выбрано коническое сечение, изображенное на рис. 4.14, и мы хотим вычислить расстояние между двумя точками P_1 и P_2. Прямая, проходящая через эти две точки, пересечет *абсолют* в двух точках (вещественных или мнимых) Q_1 и Q_2. Клейн выразил расстояние между P_1 и P_2 при помощи двойного отношения (P_1, P_2, Q_1, Q_2) четырех точек, лежащих на одной прямой: концов искомого отрезка и двух точек пересечения прямой с *абсолютом:*

$$d = c \log (P_1, P_2, Q_1, Q_2),$$

где c — некоторая постоянная.

Точно так же, если u и v — две прямые, рассматриваются касательные t и w к *абсолюту*, выходящие из точки пересечения прямых u и v, и угол между u и v определяется по формуле $\Phi = c' \log (u, v, t, w)$, где c' — постоянная, а (u, v, t, w) — двойное отношение этих четырех прямых.

Клейн выразил двойное отношение в проективных координатах, несколько видоизменив координаты фон Штаудта, которые зависят от постулата о параллельных. Отныне измерение длин и углов основывалось на чисто проективных соображениях, и высказывание Кэли «*проективная геометрия представляет всю геометрию*» — обрело точный смысл. Метрические геометрии, как евклидовы, так и неевклидовы, являются частными случаями проективной геометрии.

14. Синтез: Эрлангенская программа

Прояснив связь между метрическими геометриями и проективной геометрией, Клейн поставил своей целью установить «*общий принцип, на основе которого можно построить оба метода*». Он сделал это в лекции, прочитанной по случаю вступления в должность в Университете г. Эрланген (в 1872 г.) и озаглавленной «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований».

Его основной идеей было охарактеризовать каждую геометрию с помощью *группы преобразований.* Тогда геометрией является теория, которая изучает свойства фигур, сохраняющиеся при всех преобразованиях данной группы.

Мы уже подчеркивали ту роль, которую преобразования стали играть в геометрии с начала XIX в., когда Понселе избрал предметом своих исследований свойства, сохраняющиеся при проектировании. Вслед за ним геометры начали отождествлять фигуры, получившиеся одна из другой с помощью преобразований проектирования.

Геометрические преобразования аналитически записываются с помощью формул преобразования координат. Сохранение некоторых свойств фигур выразилось в появлении алгебраических выражений, не изменяющихся при некоторых подстановках переменных. В частности, проективные свойства нашли свое выражение в независимости относительно любой «линейной подстановки». Эта независимость породила понятие *«инвариантов»* — однородных алгебраических форм степени 1, 2 или более, сохраняющихся при линейном преобразовании переменных.

Теория инвариантов зародилась в теории чисел, точнее в учении о квадратичных формах, изложенном Гауссом в «Арифметических исследованиях» (см. гл. 8), и была развита начиная с 1840 г. в основном Кэли, Сильвестром и Эрмитом.

Но тем новшеством, которое сделало «Эрлангенскую программу» *«важнейшим моментом в истории геометрии и даже шире, в истории математики»* (Ф. Рюссо), было сближение понятий преобразований и групп.

Классифицирующая роль понятия группы

Хотя Галуа и ввел понятие группы (см. гл. 8) уже в 1830 г., оно не получило распространения до работ Жордана (1870 г.) и, что самое главное, не вышло за рамки перестановок конечного множества объектов, очерченные ее творцами Галуа и Коши.

Феликс Клейн сразу же встал на точку зрения теории групп:

«Наиболее существенное понятие, необходимое для дальнейшего изложения, есть понятие о группе пространственных изменений.

Произвольное число преобразований пространства дает, складываясь, снова преобразование пространства. Если данный ряд преобразований обладает тем свойством, что *каждое изменение, получаемое от последовательного применения нескольких преобразований, принадлежащих этому ряду, само входит в его состав, то мы называем этот ряд группой преобразований»* [1]).

В качестве примеров групп преобразований Клейн привел совокупность всех движений, которая содержит группу вращений вокруг точки и содержится в группе коллинеаций.

Можно легко показать, что вращения плоскости вокруг некоторой точки O образуют группу. Если взять комбинацию такого вращения на угол α с вращением на угол β, то снова получится вращение — а именно вращение на угол $\alpha+\beta$. Вращение на угол, равный нулю, является тождественным преобразованием, оставляющим точку неизменной. Это единица группы. Для каждого вращения на угол α существует обратное преобразование: вращение на угол $-\alpha$, которое возвращает точку в ее исходное положение.

Клейн продолжал: *«Существуют такие преобразования пространства, которые оставляют вообще без изменения геометрические свойства пространственных образов. Геометрические свойства, по самому определению, не зависят от положения, занимаемого в пространстве изучаемым образом, от его абсолютной величины и, наконец, от ориентации в расположении его частей. Свойства пространственного образа не изменяются поэтому от всех движений пространства, от его преобразований подобия, от процесса зеркального отражения и от всех преобразований, которые могут быть из них составлены. Совокупность всех этих преобразований мы назовем главной группой изменений пространства; геометрические свойства не изменяются от преобразований главной группы, и обратно, можно сказать: геометрические свойства характеризуются их неизменяемостью от преобразований главной группы»*.

Поскольку главная группа является подгруппой проективной группы, Клейн установил принцип *«присоединения групп преобразований, из которых одна объемлет*

[1]) Клейн неявно предполагает, что в упомянутых им группах каждое преобразование имеет обратное, что действительно так для *конечных* групп преобразований.

другую», основанный на способе, позволившем ему интерпретировать метрические свойства некоторой фигуры F как проективные свойства фигуры F', включающей в себя фигуру F и *абсолют* Кэли.

«*Если главную группу заменим более обширной группой, то сохранится только часть геометрических свойств. Остающиеся представляются свойствами уже не пространственных вещей в себе, но свойствами системы, получаемой присоединением к ним особенного образа. Этот особенный образ (поскольку он вообще определен) определяется тем, что при закреплении его для пространства остаются возможными только преобразования главной группы*».

Благодаря этому принципу устанавливается порядок на группах преобразований и, следовательно, на геометриях, поскольку каждой группе соответствует геометрия — система теорем, описывающих свойства фигур и остающихся справедливыми, когда фигуры подвергаются преобразованию из данной группы.

Так, в проективной геометрии изучаются инварианты относительно группы проективных преобразований (см. табл. 8), среди которых — коллинеарность, двойное отношение, свойство быть коническим сечением и т. д.

Аффинные преобразования образуют подгруппу проективной группы — это Клейн не выразил в явном виде. Эту подгруппу можно определить как подгруппу, оставляющую инвариантной бесконечно удаленную прямую. Преобразования аффинной группы сохраняют колинеарность и параллельность, но изменяют углы и длины.

Метрические (плоские) геометрии соответствуют подгруппам проективной группы, которые оставляют неизменными конические сечения проективной плоскости.

«*Свойства в смысле элементарной геометрии*» (на плоскости) рассматриваются как проективные отношения, при которых циклические точки переходят в себя «*при тех только преобразованиях проективной группы, которые суть именно преобразования главной группы*». Мы указали в табл. 12 основные подгруппы проективной группы и их инварианты.

В своей программе Клейн рассматривал геометрии, более общие, чем проективная. Например, он характеризовал алгебраическую геометрию, которая выделялась в то время как самостоятельная дисциплина, как исследование инвариантов бирациональных преобразований. (Рациональных биективных преобразований, обратными

12. Инварианты главных подгрупп проективной группы

Группы	Положение	Направление	Ориентация	Расстояние	Угол	Параллельность	Коллинеарность двойное отношение
Единичная группа							
Группа параллельных переносов							
Группа движений							
Группа изометрий							
Группа подобий.							
Аффинная группа							
Проективная группа							

к которым являются также рациональные преобразования.) Под влиянием Римана Клейн даже ввел группу непрерывных преобразований, инварианты которой изучает топология.

Классификация Клейна не ограничивалась группами преобразований плоскости и пространства, но более абстрактным образом применялась к группам преобразований многообразий произвольных размерностей. Именно для многообразий он сформулировал общую проблему, центральную проблему Эрлангенской программы:

«Дано многообразие и в нем группа преобразований; нужно исследовать те свойства образов, принадлежащих многообразию, которые не изменяются от преобразований группы, т. е. развить теорию инвариантов этой группы».

Сравнительное изучение положило конец оказавшемуся бесплодным расколу аналитической и проективной геометрии; понятие группы объединило различные точки зрения. Цели и результаты программы объединили алгебру и геометрию. Так, «*теория бинарных форм и проективная геометрия плоскости, которую изучаем, полагая в основу некоторое коническое сечение, эквивалентны между собой*», или же «*теория бинарных форм равнозначна с проективной геометрией плоскости, на которой лежит фундаментальное коническое сечение*».

Отождествление конических сечений — кривых, порожденных пересечением двух пространственных фигур, конуса и плоскости — с бинарными квадратичными формами взаимно обогатили геометрию и алгебру. Теория инвариантов форм получила благодаря геометрии удобное и элегантное представление, алгебра же придала методам геометрии общность. Границы между этими двумя областями математики сгладились, и в этом можно видеть одну из основных тенденций современной математики.

15. Выход за рамки классификации

Но вскоре оказалось, что рамки классификации, полученной с помощью групп преобразований, слишком тесны. Но и с самого начала они были нарушены более фундаментальным подходом Римана. Действительно, проективная геометрия, построение которой было завершено в Эрлангенской программе, занимается глобальным изучением плоскости или пространства. Так, эллиптическая геометрия характеризуется преобразованиями, оставляющими инвариантным мнимый эллипсоид, внутри которого справедливы те или иные свойства фигур. Локальная точка зрения Римана позволила выявить более тонкие отношения, справедливые лишь в малых частях пространства, из которых можно составить более сложные структуры при соблюдении некоторых условий согласованности.

Локальное исследование явлений требует инфинитезимальных методов и техники, заимствованной из дифференциальной геометрии. Однако Эрлангенская программа не смогла вместить достижения дифференциальной геометрии. Действительно, Клейн описывал ее при помощи группы преобразований, оставляющей инвариантными линейные элементы ds^2, но эти инварианты не алгебраические, а дифференциальные — их нельзя выразить как квадратичную форму от dx_i и dx_j, они содержат также и производные. Примером может служить гауссова кривизна поверхности, выражающаяся при помощи функций E, F и G, определяющих метрику на этой поверхности.

И в несколько ином отношении идеи Римана опережали Эрлангенскую программу. Ключом Эрлангенской программы была идея группы преобразований. В основе ее построений, таким образом, лежали преобразования. Но они действуют над фигурами, и даже если не полностью отвлечься от пространства, оно все же служит не более чем «вместилищем», где происходят преобразования, образующие группы. Риман же, как мы видели, ставил вопрос о природе самого пространства, и сущностью геометрии сделал исследование пространств.

Эта точка зрения была впоследствии подтверждена развитием двух областей математики: общей топологии, уровень абстракции которой не позволяет нам коснуться ее истории, и аксиоматического метода.

Колоссальное развитие геометрии в XIX в. поставило вопрос о перестройке ее оснований, поколебленных открытием неевклидовых геометрий, которые внезапно выявили неполноту евклидовых аксиом и отсутствие определений *«первичных понятий»*. Это привело к аксиоматизации евклидовой геометрии, которое осуществил Давид Гильберт (1862—1943) в «Основаниях геометрии» («Grundlagen der Geometrie»). Исходя из неопределенных объектов, от природы которых он полностью абстрагировался, Гильберт определил в своем построении отношения между ними при помощи перечня аксиом.

Таким образом, выявилась возможность аксиоматически определить абстрактные пространства, элементы которых получили названия «точек». При этом не имело значения, что под ними понимается — числа, кривые, поверхности, функции и т. д. С конца XIX в. установился обычай описывать свойства этих абстрактных пространств на языке классической геометрии. Этот образный язык позволил перенести геометрическую интуицию с конкретных тел физического пространства или плоских фигур и эпюр на более общие и универсальные объекты, определяемые последовательностями слов и символов (аксиомы). Этот скачок к абстракции означал конец геометрии как изолированной ветви математики, понимаемой как наука о пространственных фигурах; однако ее методы оставались действенными.

Оригинальные работы [1])

Desargues G. Œuvres réunies et analysées par M. Poudra.— Paris, 1864.

Анализ трудов Дезарга содержится также в работе:

Taton R. L'Œuvre mathématique de Desargues.— PUF, Paris, 1951.

Декарт Р. Геометрия. Пер. с франц.— М.—Л.: ГТТИ, 1938.

Начала Евклида. Пер. с греч.— М.—Л.: ГИТТЛ, 1948—1950. 3 т. (т. 1: книги I—VI; т. 2: книги VII—IX; т. 3: книги X—XII).

Гаусс К. Ф. Общие исследования о кривых поверхностях. Пер. с нем. В сб.: Об основаниях геометрии.— М.: ГТТИ, 1956, с. 123—161.

Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований. (Эрлангенская программа). Пер. с нем. В сб.: Об основаниях геометрии.— М.: ГТТИ, 1956, с. 399—434.

Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений. Т. 1—5.— М.—Л., 1946—1951.

Монж Г. Начертательная геометрия. Пер. с франц.— М.: Изд-во АН СССР, 1947.

Poncelet J.-V. Traité des propriétés projectives des figures. 2-e éd.— Gauthier-Villars, Paris, 1865.

Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании геометрии. Пер. с нем. В кн.: Сочинения.— М.—Л.: Гостехиздат, 1948, с. 279—293; 500—526 или в кн.: Об основаниях геометрии.— М.: ГТТИ, 1956, с. 309—341.

Гильберт Д. Основания геометрии. Пер. с нем.— М.—Л., 1948.

Работы по истории, которым мы особенно следовали

Шаль М. Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. Пер. с франц.— М., 1871 и 1883.

Dieudonné J. L'Œuvre mathématique de C. F. Gauss.— Conférence donnée au Palais de la découverte le 2 decembre 1961.

Godeaux L. Les Géométries.— Collection Armand Colin № 206, Paris, 1937.

Hauser G. Geometrie der Griechen von Thales bis Euklid. Haag Luzern, 1955.

Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Пер. с нем.— М.—Л.: ОНТИ, 1937.

---

[1]) См. также переведенные на русский язык работы арабских математиков, указанные в литературе к предыдущей главе.— *Прим. ред.*

Peiffer J. Espace et multiplicité d'espaces. Dupé, № 8/9, novembre 1980.
Russo F. Groupes et géométrie. La genèse du programme d'Erlangen de Félix Klein. Conférence donnée au Palais de la découverte le 4 mai 1968, publiée comme postface à l'édition du programme d'Erlangen par Gauthier-Villars, Paris, 1974.
Стройк Д. Очерк истории дифференциальной геометрии. Пер. с англ. — М.—Л., 1941.
Taton R. Histoire de la géométrie descriptive. La Géométrie projective en France de Desargues à Poncelet. Conférence du Palais de la découverte, serie D, № 32 et № 4, Paris, 1954 et 1951.
Taton R. L'Œuvre scientifique de Gaspard Monge.—Paris, 1951.
Юшкевич А. П. История математики в средние века.— М., 1961.

Работы, добавленные редактором перевода

Розенфельд Б. А. История неевклидовой геометрии.— М.: Наука, 1976.
Каган В. Ф. Основания геометрии. Ч. 1 и 2.— М., 1949, 1956.
Математика XIX в. (Геометрия, Теория аналитических функций). Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича.— М.: Наука, 1981.
Каган В. Ф. Лобачевский.— М.—Л., 1948.

Глава 5

ПРЕДЕЛ: ОТ НЕМЫСЛИМОГО К ПОНЯТИЮ

Исчисление бесконечно малых ведет свое начало от интуитивного представления греков о *непрерывности*, *математической бесконечности* и *пределе*, а также от тех трудностей, с которыми они столкнулись при попытках явно определить эти понятия. Эти три понятия были корректно определены лишь в XIX в., когда математики захотели систематизировать достижения своей науки, и им пришлось пересмотреть основания, чтобы подвести под математическое здание прочный фундамент.

1. Числа и геометрические величины

Понятие числа — и тем более вещественного числа — прошло долгий путь, прежде чем оно освободилось от своих конкретных носителей. Пифагорейцы (585—400 гг. до н. э.) первыми признали необходимость такого понятия и встали на путь его выделения. Мы видели, что пифагорейцы уподобляли числа геометрическим точкам: единицу — одной точке, некоторое другое число — группе точек, образующих некоторую геометрическую фигуру. Каждое число у них было дискретным набором единиц; таким образом, пифагорейская арифметика ограничивалась изучением положительных целых чисел и отношений целых чисел, которые не считались числами.

Всякая непрерывная величина — линия, поверхность, тело — могла быть отождествлена с некоторым соответствующим ей числом — «*количеством*» (длина, площадь, объем). Подобно тому как единица была общей мерой целых чисел, величины должны были иметь общую единицу измерения — быть *соизмеримыми* — и каждая величина отождествлялась с целым числом составляющих ее единиц. Эта попытка отождествить целые числа с непрерывными величинами, интерпретировать непрерывное в терминах дискретного ни к чему не привела и быстро провалилась.

Решающую роль в этом сыграло открытие иррациональных чисел. В квадрате со стороной 1 отношение диагонали к стороне равно $\sqrt{2}$; оно не выражается в виде отношения целых чисел и, значит, вообще не имеет

1. Открытие иррациональных чисел

Согласно Проклу, Евклид будто бы комментировал легенду о том, что первый, кто обнародовал иррациональность $\sqrt{2}$, утонул при кораблекрушении:

«Авторы легенды пожелали прибегнуть к аллегории. Они хотели сказать, что все иррациональное и лишенное формы должно оставаться тайным. Что если душа захочет проникнуть в эту тайную область и оставить ее открытой, то будет вовлечена в море становления и утонет в непрестанном движении его течений».

статуса в пифагорейской арифметике [1]). Сторона и диагональ не имеют общей единицы измерения и называются *несоизмеримыми*. Взаимное соответствие между величиной и числом, знакомое пифагорейцам, оказалось нарушенным. Если каждому числу соответствует некая длина, то какие числа нужно сопоставить несоизмеримым величинам? (См. табл. 1.)

2. Вторжение бесконечности: парадоксы Зенона

Именно в связи с открытием несоизмеримых величин в греческую математику проникло понятие бесконечности. В своих поисках общей единицы измерения для всех величин греческие геометры могли бы рассмотреть бесконечно делимые величины, но идея бесконечности приводила их в глубокое смятение. Если даже рассуждения о бесконечном проходили успешно, греки в своих математических теориях всегда пытались его обойти и ис-

---

[1]) Пифагорейцы доказали, что отношение диагонали квадрата к стороне не может быть выражено отношением p/q ни при каких целых p и q. По свидетельству Аристотеля, это было «доказательство от противного» — вероятно, первое такое доказательство в математике.— *Прим. ред.*

ключить. Их затруднения перед явным выражением абстрактных понятий бесконечного и непрерывного, противоположных понятиям конечного и дискретного, ярко проявились в *парадоксах Зенона Элейского*.

В эпоху Зенона (вторая половина V в. до н. э.) произошло столкновение двух концепций: *континуалистской*, трактовавшей число, пространство, время и материю как бесконечно делимые, и *атомистской*, провозглашающей существование первичных неделимых элементов. Доводами Зенона были «апории» (тупики); они должны были продемонстрировать, что оба предположения заводят в тупик.

Апория «Ахилл и черепаха» противостоит идее бесконечной делимости пространства и времени. Быстроногий Ахилл соревнуется в беге с черепахой и благородно предоставляет ей фору. Пока он пробежит расстояние, отделяющее его от точки отправления черепахи, последняя проползет дальше; расстояние между Ахиллом и черепахой сократилось, но черепаха сохраняет преимущество. Пока Ахилл пробежит расстояние, отделяющее его от черепахи, черепаха снова проползет еще немного вперед, и т. д. Если пространство бесконечно делимо, Ахилл никогда не сможет догнать черепаху. Этот парадокс построен на трудности суммирования бесконечного числа все более малых величин и невозможности интуитивно представить себе, что эта сумма равняется конечной величине.

Еще более явным этот момент становится в апории «Дихотомия»: прежде чем пройти целиком некоторый отрезок, движущееся тело должно вначале пройти половину этого отрезка, затем половину половины, и так далее до бесконечности. Зенон мысленно строит ряд $1/2+(1/2)^2+(1/2)^3+\ldots$, сумма которого равна 1, но ему не удается интуитивно постичь содержание этого понятия. Современные представления о пределе и сходимости ряда позволяют утверждать, что начиная с некоторого момента расстояние между Ахиллом и черепахой станет меньше любого заданного числа ε, выбранного сколь угодно малым (см. табл. 2) [1]).

---

[1]) Авторы дают весьма поверхностное истолкование парадоксов Зенона. Между тем эти парадоксы привлекают внимание математиков

2. Определение предела

Последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ вещественных чисел

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

имеет *предел* a, если для всякого вещественного $\varepsilon > 0$ существует такое целое $N(\varepsilon)$, что при всех n, больших N, разность $a - a_n$ по абсолютной величине меньше ε.

Ряд с общим членом u_n:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

является *сходящимся* и сходится к S, если последовательность частных сумм S_n, определенных равенством

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n,$$

сходится и ее предел равен S.

(вплоть до Д. Гильберта и Г. Вейля) и философов. В частности, Г. Вейль писал по поводу «Дихотомии»: представим себе вычислительную машину, которая выполняла бы первую операцию за $^1/_2$ минуты, вторую — за $^1/_4$ минуты, третью — за $^1/_8$ минуты и т. д. Такая машина могла бы к концу первой минуты «пересчитать» весь натуральный ряд (написать, например, счетное число единиц). Ясно, что работа над конструкцией такой машины обречена на неудачу. Так почему же тогда тело, вышедшее из точки A достигает конца отрезка B, «отсчитав» счетное множество точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$? Аналогичные аргументы можно высказать и относительно «Ахилла и черепахи». Д. Гильберт и П. Бернайс в книге «Основания математики» пишут: «Обычно этот парадокс (т. е. «Диохотомию») пытаются обойти рассуждением о том, что сумма бесконечного числа этих временны́х интервалов все-таки сходится и, таким образом, дает конечный промежуток времени. Однако это рассуждение абсолютно не затрагивает один существенно парадоксальный момент, а именно парадокс, заключающийся в том, что некая бесконечная последовательность следующих друг за другом событий, последовательность, завершаемость которой мы не можем себе даже представить, ...на самом деле все-таки должна завершиться» (М.: Наука, 1979, с. 40). И далее: «...на самом деле мы вовсе не обязаны считать, что математическое пространственно-временно́е представление о движении является физически осмысленным также и в случае произвольно малых пространственных и временны́х интервалов. Более того, у нас есть все основания предполагать, что, стремясь иметь дело с достаточно простыми понятиями, эта математическая модель экстраполирует факты, взятые из определенной области опыта, а именно из области движений в пределах того порядка величин, который еще доступен нашему наблюдению, подобно тому как совершает определенную экстраполяцию механика сплошной среды, которая кладет в основу своих рассмотрений представление о непрерывном заполнении пространства материей.» (там же, с. 40—41).— *Прим. ред.*

Парадокс «Стрела» основан на предположении, что пространство и время составлены из неделимых элементов, скажем «точек» и «моментов». В некий «момент» своего полета стрела находится в некоторой «точке» пространства в неподвижном состоянии. Поскольку это верно в каждый момент ее полета, стрела вообще не может находиться в движении.

Здесь затронут вопрос о мгновенной скорости. Какое значение следует придать отношению $\Delta x/\Delta t$ пройденного расстояния Δx к интервалу времени Δt, когда величина Δt становится очень малой? Неспособные представить себе минимум, отличный от нуля, древние придали ему значение нуль. Ныне при помощи понятия предела правильный ответ находится немедленно: мгновенная скорость есть предел отношения $\Delta x/\Delta t$ при Δt, стремящемся к нулю.

Таким образом, все эти парадоксы связаны с понятием предела; оно стало центральным понятием исчисления бесконечно малых.

Парадоксы Зенона известны нам благодаря Аристотелю, который привел их в своей «Физике», чтобы подвергнуть критике. Он различает бесконечность относительно сложения и бесконечность относительно деления и устанавливает, что континуум бесконечно делим. Время тоже бесконечно делимо, и в конечный интервал времени можно пройти бесконечно делимое расстояние. Парадокс «Стрела», который *«является следствием предположения, что время составлено из моментов»*, становится нелепым, если принять, что время бесконечно делимо [1]).

3. Метод исчерпывания: отрицание бесконечности

Открытие несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной повлекло за собой открытие многих других несоизмеримых величин. Теория пропорций Евдокса (род.

[1]) В своих первых двух парадоксах, направленных против движения («Дихотомия» и «Ахилл и черепаха»), Зенон предполагает, что пространство и время бесконечно делимы, а в двух других («Стрела» и «Стадион») — что они состоят из неделимых. При обоих предположениях он показывает противоречивость принятого в его время представления о движении.— *Прим. ред.*

около 408 г. до н. э.), изложенная в книге V «Начал» Евклида, была попыткой ввести в рассмотрение несоизмеримые величины и свидетельствовала о том, что иррациональные числа все-таки каким-то образом были допущены в греческую математику. На этой теории основан метод исчерпывания, который позволил грекам решать задачи, ставшие впоследствии предметом исчисления бесконечно малых: находить длины кривых, площади или объемы фигур, ограниченных кривыми линиями или искривленными поверхностями, определять цент-

3. Следствие аксиомы Архимеда

Вот как сформулировано предложение 1 в книге X «Начал» Евклида:

«*Если даны две неравные величины и из большей вычитается часть, большая половины, а из остатка — снова часть, большая половины, и это повторяется постоянно, то когда-нибудь остается величина, которая меньше, чем меньшая из данных величин*».

На современном языке:

Если a и b — положительные вещественные числа и $a > b$, то всегда существует такое натуральное число m, что $mb > a$.

ры тяжести, строить касательные и т. д. Для применения этого метода нужно было еще опираться на какую-нибудь аксиому об измеримости. Так как после открытия иррациональных чисел стало невозможно пользоваться соответствием между геометрическими величинами и рациональными числами, то в ход пошла аксиома Архимеда, а точнее ее следствие, сформулированное в книге X как предложение 1 (см. табл. 3).

Что же означало измерение для греческих геометров? Евдокс опасался приписывать какие-нибудь числа длинам криволинейных дуг, площадям криволинейных фигур и т. д. Неспособные найти общую единицу измерения для несоизмеримых величин греки не измеряли геометрические величины, а только сравнивали их между собой и вычисляли их отношения. Они сравнивали длины дуг кривых с длинами прямолинейных отрезков — спрямляли кривые, а площади криволинейных фигур сравнивали с площадями прямолинейных фигур. *Квадратура* некоторой фигуры этимологически как раз и означала построение квадрата, или, если не быть буквальными, треугольника, или другого многоугольника, имеющего площадь, равную площади рассматриваемой криволинейной фигуры. *Кубатура* — это обобщение квадратуры на пространственный случай, причем все построения в соответствии с греческой традицией должны были выполняться лишь циркулем и линейкой. Для греков задача вычислить площадь какой-нибудь фигуры была некорректной, но зато найти отношение двух площадей

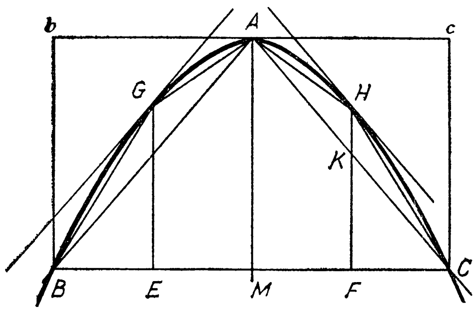


Рис. 5.1.

было вполне допустимой задачей в рамках греческой математики. Развитый Евдоксом, Евклидом и Архимедом метод исчерпывания как раз и позволял сравнить площадь фигуры A (например, параболического сегмента) с известной площадью какой-нибудь фигуры S (например, квадрата или треугольника).

Метод исчерпывания состоит в построении двух фигур U и V, между которыми заключены одновременно фигура A, площадь которой неизвестна, и данная фигура S известной площади. При этом U и V выбираются так, чтобы разность $V—U$ была сколь угодно мала. Затем от противного доказывается, что площадь A равна площади S.

В работе «О квадратуре параболы» Архимед (287—212 гг. до н. э.) строго доказал, что «*произвольный сегмент, ограниченный прямой и параболой, равен учетверенной трети треугольника, имеющего с сегментом общее основание и равную высоту*». (Предложение 17.) Вот как он действовал (см. рис. 5.1).

Пусть BAC — данный параболический сегмент, A — точка, в которой касательная параллельна секущей BC, а Bb и Cc — прямые, параллельные диаметру AM, который пересекает все хорды, параллельные BC, в их середине, так что M — середина BC. Архимед показал, что площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $bBCc$ и, следовательно, превышает половину площади параболического сегмента. Затем он построил треугольник в сегменте, отсеченном секущей AC, диаметром которого является HK. Простые геометрические рассуждения показывают, что площадь треугольника AHC составляет $^1/_8$ площади треугольника ABC, а сумма площадей треугольников BGA и AHC составляет $^1/_4$ площади треугольника ABC. Кроме того, оба треугольника занимают более половины площади параболических сегментов, в которые они вписаны. Далее Архимед мог итерировать этот процесс и, применяя аксиому об измеримости, построить многоугольник, сколь угодно хорошо приближающий параболический сегмент. «*После доказанного ясно, что в данный сегмент можно вписать такой многоугольник, чтобы остающиеся (по краям) сегменты были меньше всякой наперед заданной площади; действительно, если отнимать все время больше половины, то на основании доказанного ясно, что, постоянно уменьшая остающиеся по краям сегменты, мы можем сделать их меньше всякой наперед заданной площади*». (Следствие из предложения 20.)

Для вычисления площади вписанного в параболический сегмент многоугольника Архимед должен был просуммировать площади вписанных треугольников, т. е. вычислить сумму геометрической прогрессии со знаменателем $^1/_4$, первым членом которой являлась площадь A треугольника ABC. Архимед избегал вычисления суммы бесконечной прогрессии, но вычислял сумму n первых членов, прибавлял к ней остаток $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} A$ и пользовался тождеством

$$A + \frac{1}{4} A + \frac{1}{4^2} + A + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}} A + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} A = \frac{4}{3} A.$$

Когда число сторон вписанного многоугольника, т. е. число членов прогрессии, растет, остаток $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} A$ становится сколь угодно малым, и потому площадь S

сегмента равна $^4/_3A$. Архимед не высказывал мысли, что остаток исчезает и сумма бесконечной прогрессии равна $^4/_3A$: он доказывал от противного, что площадь S параболического сегмента не может быть ни меньше, ни больше $^4/_3A$.

Вначале он предположил, что площадь S параболического сегмента больше $^4/_3A$. Тогда должно существовать n таких треугольников, что сумма

$$U = A\left(1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)$$

их площадей меньше S и больше $^4/_3A$. Поскольку U равно $^4/_3A - {^1/_3}\cdot\frac{A}{4^{n-1}}$, то U меньше $^4/_3A$, что противоречит предположению $S > {^4/_3A}$, и оно отбрасывается.

Далее Архимед предположил, что S меньше $^4/_3A$, и обозначил через D разность $^4/_3A - S$. Тогда по аксиоме Архимеда должен найтись такой индекс m, что площадь $A_m = A/4^{m-1}$ меньше данной величины D.

С другой стороны,

$$A_m > \frac{1}{3}A_m = \frac{4}{3}A - A\left(1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4^{m-1}}\right)$$

$$\text{и}\quad \frac{4}{3}A - S > A_m > \frac{4}{3}A - A\left(1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4^{m-1}}\right),$$

откуда следует, что

$$S < A\left(1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4^{m+1}}\right),$$

а это противоречит геометрической очевидности, поскольку $A\left(1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4^{m-1}}\right)$ есть площадь многоугольника, вписанного в параболический сегмент.

Мы видим, что при конкретном применении метода Архимед избегал такого весьма смутного понятия, как многоугольник с бесконечным числом сторон, который бы совпадал в пределе с параболическим сегментом. Он увеличивал число сторон многоугольника до тех пор, пока величина остатка не становилась сколь угодно малой, но остаток всегда имелся. Таким образом, приближающие площади *не исчерпывали* искомую площадь. Однако этим отличались методы XVII в., навеянные античным методом. Именно поэтому последний и получил название «метод исчерпывания», которое дал ему Григорий де Сен-Венсан (1647 г.).

Античный метод со своим двойным рассуждением от противного мастерски избегает каких бы то ни было рассуждений о бесконечно малых, хотя его подоплекой служит именно анализ бесконечно малых. Нельзя отрицать присутствие здесь идеи предела, даже если она всегда остается неявной. Для строгого определения обязательно понадобилась бы общая теория иррациональных чисел. Во всех применениях метода исчерпывания греки формулировали и доказывали то свойство, что искомая величина A сколь угодно мало отличается от приближающей ее величины U, т. е., в современной терминологии, что A является пределом величин U. Они повторяли одну и ту же форму доказательства в каждом частном случае, не замечая аналогии между всеми такими задачами. Никакого общего метода не было.

Между прочим метод исчерпывания не предназначен для открытий [1]). Он позволяет строго установить результаты, выведенные из других соображений. Письмо Архимеда к Эратосфену (найденное лишь в начале XX в.) позволяет понять эвристический метод, использованный Архимедом. Этот метод основан на идее, что всякая фигура составлена из заполняющих ее «линий» (отрезков), и позволяет сравнить площадь параболического сегмента с площадью треугольника при помощи механических соображений, например «взвешивания» «линий», составляющих параболический сегмент, и «линий», составляющих треугольник. При этом использовался принцип рычага: веса обратно пропорциональны расстояниям от неподвижной точки рычага в положении равновесия. Эти расстояния и помогали установить отношение площадей, которое затем доказывалось геометрически методом исчерпывания.

[1]) Авторы повторяют здесь ходячее мнение о методе исчерпывания, которое не разделяют многие историки науки, считающие, что этот метод был не менее эффективен, чем современный метод пределов. К методу исчерпывания Евдокса (который описывают авторы) Архимед добавил метод верхних и нижних интегральных сумм, с помощью которого и получил новые результаты (объемы эллипсоидов, сегментов гиперболоидов и параболоидов вращения, площадь витка спирали и т. д.) Эти методы были выделены впоследствии арабскими и европейскими математиками.— *Прим. ред.*

4. И снова арабская математика

Несмотря на большую оригинальность своих работ — а может быть, именно по этой причине,— у Архимеда нашлось очень мало последователей в античном мире и не было прямых учеников.

Начиная с IX в. методами гениального александрийца заинтересовались арабские ученые. Впервые в арабоязычной литературе метод исчерпывания был применен

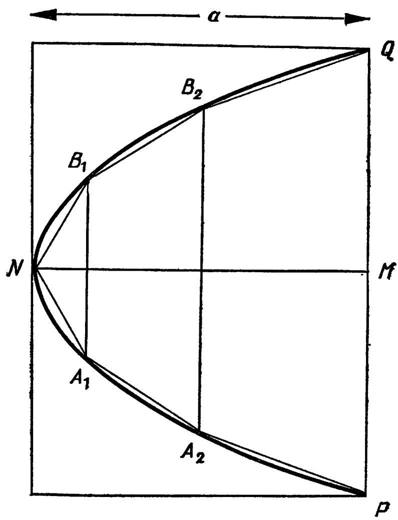


Рис. 5.2.

братьями Бану Муса. Их ученик Сабит ибн Корра (836—901) перевел на арабский язык сочинение Архимеда «О шаре и цилиндре» и в своей «Книге об измерении конического сечения, названного параболическим» проявил мастерское владение греческим методом. Он решил задачу квадратуры параболического сегмента при помощи интегральных сумм, которые Архимед использовал при квадратуре спирали, кубатуре параболоида вращения и т. д., но не применял при квадратуре параболы. Вначале ибн Корра вычислил сумму n первых нечетных чисел

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

и сумму квадратов n первых нечетных чисел

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{2}{3}\cdot 2n\sum_{k=1}^{n}(2k-1)-\frac{n}{3}.$$

Последнюю формулу он применил к сегментам $a_k=(2k-1)a$ и $b_k=2k\cdot b$, пропорциональным нечетным и четным числам, и доказал в конце концов, что при достаточно большом целом n отношение

$$n:\left[\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right]\cdot 2n$$

меньше любого данного отношения A/B (это эквивалентно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n^2)=0$). Этим результатом он воспользовался при квадрировании параболического сегмента с площадью S (мы выбрали его здесь симметричным, с хордой, перпендикулярной оси), причем парабола определялась свойством, которое мы теперь записываем в виде $y^2=px$ (см. рис. 5.2).

Ибн Корра делил ось сегмента на n частей, пропорциональных нечетным числам q, $3q$, $5q$, ..., $(2n-1)q$, где $q=a/n^2$, a — длина отрезка оси. Хорды, проходящие через точки деления (т. е. ординаты), тогда пропорциональны четным числам $2\sqrt{pq}$, $4\sqrt{pq}$, $6\sqrt{pq}$, ..., $2n\sqrt{pq}$.

Площадь вписанного многоугольника S_n, вершинами которого служат вершина N параболы и концы хорд, равна сумме площадей треугольника $\Delta_n=A_1NB_1$ и трапеций $A_2A_1B_1B_2$, ...:

$$S_n=\frac{1}{2}q\cdot 2\sqrt{pq}+\frac{1}{2}3q(2\sqrt{pq}+4\sqrt{pq})+\ldots+$$
$$+\frac{1}{2}(2n-1)q\left[(2n-2)\sqrt{pq}+2n\sqrt{pq}\right].$$

Вычислив несколько первых сумм, ибн Корра показал, что S_n отличается от $2/3$ площади R прямоугольника, в который вписан данный сегмент, меньше чем на $(n/3)\Delta_n$, т. е. что $(2/3)R-S_n<(n/3)\Delta_n$. Чтобы установить, что разность $S-S_n$ можно сделать меньше любой заданной площади, взяв число n достаточно большим, использовалась аксиома Архимеда. Точно так же и разность $(2/3)R-S_n$

меньше всякой заданной площади, если n достаточно велико. И наконец, ибн Корра доказывал от противного, что $S=(2/3)R$, ибо с учетом полученных неравенств предположения $S>(2/3)R$ и $S<(2/3)R$ приводили к противоречию.

На самом деле ибн Корра вычислил величину, эквивалентную $\int_0^a \sqrt{px}\,dx$, т. е. впервые получил интеграл вида $\int_0^a x^n dx$ с дробным показателем $n=1/2$. Это был значительный вклад в возрождение инфинитезимальных методов Архимеда.

Применив эти методы к вычислению объема параболоида вращения, полученного вращением произвольного параболического сегмента, арабские ученые воспроизвели результаты Архимеда и сделали новые открытия. В другой период, в конце X в. ал-Кухи и ал-Хайсам изобрели новые методы кубатуры, в которых, однако, чувствовалось греческое влияние. Ибн ал-Хайсам, определяя объем некоторого параболоида вращения, впервые вычислил величину, эквивалентную $\int_0^a x^4 dx$.

В это же время астроном ал-Бируни изучал неравномерное движение и пришел к понятиям мгновенной скорости и ускорения.

5. Средние века: шаг к «респектабельности»

В то время как арабы овладели греческим методом исчерпывания еще в IX в. и разработали собственные сходные методы, в западном средневековом мире работы Архимеда были почти совсем неизвестны. Однако схоластические рассуждения о бесконечном, бесконечно малом и природе непрерывного оживили интерес к проблеме бесконечности и подготовили почву для восприятия идей анализа бесконечно малых, появившихся в XVII в.

Дискуссии о несоизмеримых величинах, неделимых и бесконечности велись вокруг *атомистики*. Томас Брадвардин (XIV в.), настроенный против всех форм атомистики, изучал природу континуума и утверждал, что непрерывные величины состоят из бесконечного числа неделимых, которые являются не атомами, а непрерывными величинами той же разновидности. Ричард Суайнсхед (прозванный Вычислителем, XIV в.) изучал природу бесконечного и оспаривал различие между актуальной и потенциальной бесконечностью, которое делал Аристотель. Но эти схоластические рассуждения ни в коей мере не были направлены на выделение и построение математических концепций; обсуждался лишь метафизический вопрос о реальном существовании неделимых или бесконечности. Однако они способствовали поддержанию интереса к проблеме бесконечного и приданию методам бесконечно малых большей «респектабельности».

Самым крупным теоретическим достижением в средние века было количественное исследование изменчивости, введение понятия функциональной зависимости и ее графического представления (см. гл. 6, с. 294). Николай Орем (1323—1382) утверждал, в духе старой греческой традиции, что измеримые величины могут быть представлены точками, линиями и фигурами, и графически исследовал изменение скорости в зависимости от времени. Пробужденный распространением античных, и в частности архимедовых, инфинитезимальных методов и питаемый схоластическими спекуляциями о бесконечности мало-помалу у математиков развивался вкус к рассуждениям, использующим бесконечно малые величины. Вначале их применяли по архимедову образцу, а затем освободили от старых схем, и начались поиски замены метода исчерпывания, признанного слишком тяжеловесным.

6. Ослабление строгости: Стевин, Валерио

Фламандский инженер С. Стевин уже в 1586 г. свободно пользовался методом Архимеда для определения центров тяжести плоских криволинейных фигур. При помощи последовательных все более мелких разбиений границы он находил приближение этих фигур вписанными (или описанными) многоугольниками и строил геометрические ряды подобно тому, как Архимед в задаче о квадратуре параболы получал ряд $1+{}^1/_4+{}^1/_{16}+\ldots$. Но в то время как Архимед останавливался на n-м члене и добавлял остаток, Стевин рассматривал бесконечные ряды в духе схоластической традиции потенциальной бесконечности, унаследованной от Аристотеля: ряд можно было продолжать до тех пор, пока разность между криволинейной фигурой и ее прямолинейным приближением не станет сколь угодно малой. Стевин считал эту часть доказательства достаточной и опускал — несомненно, с колебаниями и большими предосторожностями — двойное доказательство от противного, необходимое по греческим канонам строгости. При этом метод исчерпывания стал гораздо более удобным.

Лука Валерио (1552—1618), ученик венецианского издателя трудов Архимеда Федериго Коммандино, видоизменил античный метод, обобщив его. Вместо двойного доказательства от противного он сформулировал общую теорему, на которую достаточно было сослаться, а не проводить каждый раз подробное доказательство.

7. Инфинитезимальные методы И. Кеплера

Хотя Стевин и Валерио ослабили строгость архимедовых рассуждений, они все еще оставались в плену греческой традиции. Классические методы были отброшены Иоганном Кеплером (1571—1630), который обратился к более интуитивным приемам, навеянным чтением трудов Николая Кузанского. Он уподобил окружность правильному многоугольнику с бесконечным числом сторон и вычислял его площадь как сумму площадей бесконечно малых треугольников, основаниями которых служили стороны многоугольника, а вершиной — центр окружности. Он не дал никаких обоснований законности своих действий. В общем случае Кеплер разбивал площади и объемы на бесконечное множество бесконечно малых элементов одной с ними размерности, но порой пользовался языком неделимых. Он не делал различия между бесконечно малой площадью и линией и между окружностью и правильным многоугольником с бесконечным числом сторон. Свой метод Кеплер применял к вычислению объема тел вращения (шара, конуса, тора и т. д.).

Влияние Кеплера было очень велико, и его работа «Стереометрия винных бочек» (1615 г.), в которой он указал способ вычисления объема винных бочек, в течение полувека служила образцом для решения подобных задач. В этой работе были рассмотрены также *задачи на максимум и минимум.* Для их решения Кеплер составил специальные таблицы, позволявшие сравнивать объемы тела при изменении его размеров. Так, он показал, что куб — это самый большой прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием, вписанный в сферу, и что из всех прямых цилиндров с одной и той же диагональю наибольший объем имеет тот, высота и диаметр которого находятся в отношении $1/\sqrt{2}$. Изучая свои таблицы, Кеплер заметил, что при данном изменении размеров самое слабое изменение объема наблюдается в окрестности наибольшего объема. Эта мысль снова появилась в XVII в. в работах Пьера де Ферма.

8. Метод неделимых

Кавальери

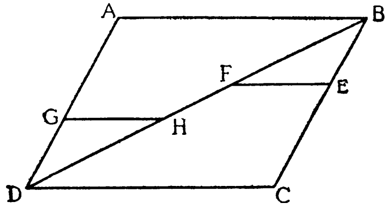
Бонавентура Кавальери (1598—1647), ученик Галилея, знакомый со схоластическими представлениями о движении, бесконечном, бесконечно малом и природе непрерывного, в своей работе «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного», опубликованной в 1635 г., разработал метод неделимых. В ней не было определения неделимых: так называл Кавальери бесконечно малые элементы, составляющие площади и объемы. Плоскую фигуру он рассматривал как множество заполняющих ее «линий» (прямолинейных отрезков), а пространственное тело — как состоящее из «неопределенного» числа параллельных «плоскостей». Он говорил, что линия образована из точек, как ожерелье из жемчужин, площадь — из линий, как ткань из нитей, а тело — из плоскостей, как книга из страниц.

Кавальери отдавал себе отчет в трудностях, возникающих при суммировании бесконечного числа элементов. В противоположность своему учителю Галилею он не рассуждал о природе бесконечного, но и не пытался вычислять площадь фигуры как сумму всех составляющих ее неделимых элементов. Вместо этого он определял отношение площадей фигур, неделимые которых находятся в постоянном отношении, как в примере, рассмотренном

4. Метод неделимых

Пример доказательства

Кавальери собирался доказать, что площадь параллелограмма равна удвоенной площади каждого из треугольников, на которые разбивает параллелограмм его диагональ.



Если G и E — две такие точки, что $GD = BE$, и если GH и FE проведены параллельно DC, то отрезки GH и FE равны.

Сумма всех «линий» треугольника ADB, таким образом, равна сумме всех «линий» треугольника DBC, и эти треугольники имеют равные площади. Сумма всех «линий» параллелограмма $ABCD$ равна удвоенной сумме «линий» одного из двух треугольников.

нами в табл. 4, где это отношение равно 1. Метод Кавальери вызвал много критических нападок, но и много восторгов.

Эванджелиста Торричелли (1608—1647), ученик Галилея и друг Кавальери, усовершенствовал этот метод

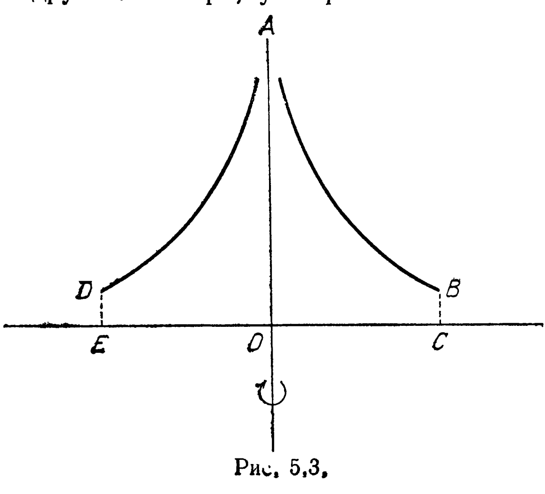


Рис. 5.3.

и с его помощью установил, например, что объем бесконечно длинного тела, полученного вращением части равнобочной гиперболы вокруг ее асимптоты, конечен (рис. 5.3). При этом Торричелли рассматривал цилиндрические неделимые, в то время как у Кавальери неделимые всегда были только плоскими.

Роберваль

Жиль Персон де Роберваль (1602—1675) независимо от Кавальери разработал метод неделимых, но в отличие от Кавальери он не пользовался геометрическим подходом, а опирался на более «арифметические» рассуждения Стевина и Валерио, которые рассматривали бесконечные ряды. В противоположность Кавальери, утверждавшему, что площадь состоит из «линий», Роберваль исходил из предположения, что она состоит из площадей: «*Можно считать, что бесконечное множество точек принимается за бесконечное множество малых линий и составляет целую линию. Бесконечное множество линий представляет бесконечное множество малых площадей, составляющих всю площадь. Бесконечное множество площадей представляет бесконечное множество малых тел, которые все вместе составляют все тело*». («Трактат о неделимых».)

Роберваль использовал неделимые для определения площади, заключенной внутри дуги циклоиды. Циклоида — это кривая, которую описывает точка окружности, катящейся без скольжения по прямой; она «*является не чем иным, как путем, который описывает в воздухе заклепка колеса, когда оно катится в своем обычном движении*»,— писал Паскаль. Это была самая «модная» кривая в XVII в., она позволила геометрам выработать новую методику, ставшую основой исчисления бесконечно малых.

Предположим, что окружность $AHBF$ диаметра d (рис. 5.4) катится по прямой (l) и после полуоборота диаметр AB оказался в положении DC. Отрезок AC должен равняться длине полуокружности AFB; пусть APD — циклоида, описанная точкой A. Если P — произвольная точка циклоиды, а Q — такая точка, что отрезок PQ равен $EF=HE$, то точка Q опишет кривую AQD, которую Роберваль назвал *спутницей циклоиды*. Оказалось, что это не что иное, как синусоида.

Роберваль доказал при помощи неделимых, что эта кривая делит прямоугольник $ABDC$ на две равные части.

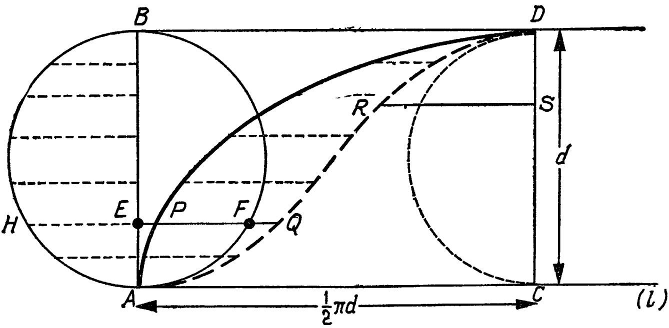


Рис. 5.4.

Действительно, каждому отрезку EQ части $AQDB$ соответствует равный ему отрезок RS части $ACDQ$, и поскольку обе фигуры составлены из равных неделимых элементов, они должны иметь равные площади. Но основание AC прямоугольника $ABDC$ равно полуокружности AFB, а высота AB равна диаметру d. Таким образом, площадь прямоугольника равна

$$\frac{1}{2}(d \cdot \pi d) = \frac{1}{2}\pi d^2 = 2 \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

т. е. удвоенной площади круга. Следовательно, площадь $AQDC$ равна площади исходного круга. По построению площадь $APDQ$ равна площади полукруга и, следовательно, площадь $APDC$, будучи суммой площадей $APDQ$ и $AQDC$, в полтора раза превышает площадь исходного круга. Так как дуга APD составляет половину циклоиды, отсюда нетрудно найти искомую площадь.

В то время как метод неделимых Кавальери сочетал в себе архимедовскую модель со средневековыми веяниями, в методе Роберваля, а в особенности в методе Григория Сен-Венсана (1584—1667), за образец взяты изменения, внесенные Стевином и Валерио в метод исчерпывания. Григорий Сен-Венсан рассматривал бесконечное множество прямолинейных фигур, *исчерпывавших* данную криволинейную фигуру, в отличие от его предшественников, которые увеличивали число сторон вписанных или описанных многоугольников до тех пор, пока разность между этими многоугольниками и фигурой не становилась меньше любой заданной величины. По всей вероятности, именно он впервые явно высказал мысль, что бесконечный ряд определяет некоторую величину, «*терминус*», которой этот ряд, даже если его продолжать бесконечно, не достигает, но приближается к ней столь близко, что разница меньше любого заданного интервала.

9. Расцвет инфинитезимальных методов в XVII в.

Вовсе не случайно, что в начале XVII в. появилось так много исследований, посвященных бесконечно малым. Ведь методы с использованием бесконечно малых создавались для решения насущных задач той эпохи.

Изучение движения, начатое еще в средние века, требовало понятия *мгновенной скорости*. Когда требовалось вычислить скорость снаряда в некоторый момент его полета, больше нельзя было делить пройденное расстояние на время, как привыкли поступать математики для вычисления средней скорости, потому что обе рассматриваемые величины равны нулю, а частное от деления нуля на нуль не имеет смысла.

Для определения направления движения тела в некоторой точке его траектории необходимо было понятие *касательной*.

Изучение кривой, по которой летит снаряд, например пушечное ядро, и исследование движения планет ставили *задачи на максимум и минимум*.

В небесной механике важно было уметь вычислять *длину траекторий* планет, т. е. уметь спрямлять эти кривые.

При оптических исследованиях прохождения света сквозь линзу возникал вопрос об угле, который образует световой луч с *нормалью* (перпендикуляром к касательной) этой кривой. Но все эти понятия — мгновенная скорость, касательная, максимумы и минимумы, длина кривой, нормаль — атрибуты исчисления бесконечно малых (дифференциального и интегрального исчисления), центральными понятиями которого являются производная и интеграл.

Мы видели, что греческий метод исчерпывания предвосхитил интегральное исчисление и позволил находить квадратуры, объемы тел вращения и центры тяжести. Методы квадратур XVII в. очень широко использовали античный метод, освободив его от двойного доказательства от противного (которое греки считали необходимым для установления того, что искомая площадь действительно равна площади приближенной фигуры). В то время как древние приближали криволинейные фигуры произвольными многоугольниками, некоторые геометры XVII в. начали систематически пользоваться вписанными прямоугольниками.

Квадратуры Ферма и Паскаля

Пьер де Ферма (1601—1665) решил вычислить площадь, заключенную между параболой и осью x от точки O до x. Он выбрал на оси точки с абсциссами x, ex, e^2x, e^3x, . . .,

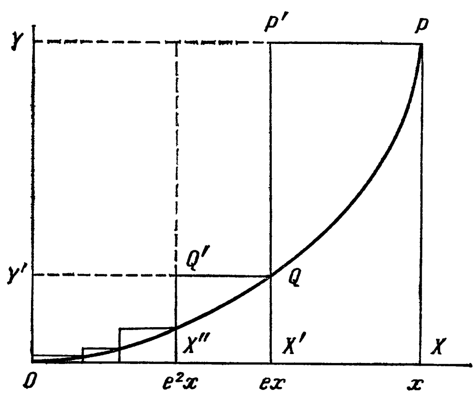


Рис. 5.5.

где e — некоторое число, меньшее 1 (рис. 5.5). В этих точках он провел прямые, параллельные оси y, отложил на них ординаты и построил прямоугольники, площади которых вычислил, пользуясь, как он говорил, «специ-

фическим свойством» параболы, т. е., в современной терминологии, ее уравнением $y=x^2$. Площадь первого прямоугольника $X'XPP'$ равна разности площадей прямоугольника $OXPY$ с основанием x и высотой x^2 и прямоугольника $OX'P'Y$ с основанием ex и высотой x^2 и составляет, таким образом,

$$x\cdot x^2-ex\cdot x^2=x^3-e\cdot x^3=x^3(1-e).$$

Точно так же площадь второго прямоугольника $X''X'QQ'$ равна

$$ex\cdot(ex)^2-e^2x\cdot(ex)^2=e^3x^3-e^4x^3=e^3x^3(1-e).$$

Следовательно, площади рассматриваемых прямоугольников образуют бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем e^3, т. е. площадь любого такого прямоугольника равна площади предыдущего, умноженной на e^3. Средневековые ученые Оксфордской и Парижской школ, и в особенности Григорий Сен-Венсан, умели находить сумму бесконечных прогрессий [1]). Руководствуясь их достижениями, Ферма определял сумму площадей прямоугольников:

$$\begin{aligned}S&=x^3(1-e)+e^3x^3(1-e)+e^6x^3(1-e)+\ldots=\\&=x^3(1-e)(1+e^3+e^6+\ldots)=\\&=\frac{x^3(1-e)}{1-e^3}=\frac{x^3(1-e)}{(1-e)(1+e+e^2)}=\frac{x^3}{1+e+e^2}.\end{aligned}$$

Чтобы найти площадь, заключенную под кривой, недостаточно вписать в нее бесконечное число прямоугольников; надо еще, чтобы площадь каждого из них была бесконечно малой. Ферма добился этого, положив $e=1$. Тогда каждый прямоугольник имеет бесконечно малую толщину и сумма их площадей равна

$$S=\frac{x^3}{1+e+e^2}=\frac{x^3}{3}.$$

Это и есть искомая площадь. В наше время мы записали бы этот результат так:

$$\int_0^x t^2\,dt=\frac{x^3}{3}.$$

[1]) Сумма геометрической прогрессии $1+q+q^2+q^3+\ldots$ со знаменателем $q<1$ равна $1/(1-q)$.

Около первой трети XVII в. такие геометры, как Кавальери, Торричелли и Роберваль, различными методами доказали результат, эквивалентный равенству $\int_0^a x^n dx = a^{n+1}/(n+1)$, для рациональных n, отличных от 1 (при $n=1$ и 2 это было известно Архимеду, а при $n=1/2$ и 4 — арабам). Они выражали его в геометрической форме на языке неделимых: сумма «линий» треугольника равна половине квадрата самой большой «линии» (при $n=1$). Описанный выше метод Ферма является более общим и содержит все основные элементы, нужные

5. Определенный интеграл

Определенным интегралом непрерывной вещественной функции f, заданной на отрезке $[0, a]$ прямой $\mathbb{R}$, называется предел сумм

$$\sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(t_i), \quad \text{где } x_i \leqslant t_i \leqslant x_{i+1},$$

а x_i, $i=0, 1, 2, \ldots, n+1$, определяют разбиение

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = a$$

отрезка $[0, a]$, когда n стремится к бесконечности, а наибольшее из вещественных чисел $x_{i+1} - x_i$ стремится к нулю. Он обозначается $\int_0^a f(x)\, dx$.

для введения понятия *определенного интеграла* от непрерывных функций, однако Ферма не был знаком с операцией «*интегрирования*» — фактической подоплекой его действий (см. табл. 5); он лишь вычислял конкретную площадь. Он не пользовался и понятием предела, хотя суммирование бесконечного числа прямоугольников эквивалентно предельному переходу.

Однако метод Ферма означал шаг вперед по сравнению с другими методами, потому что в нем систематически проводился подход с точки зрения аналитической геометрии, создателем которой был Ферма наряду с Декартом (см. гл. 4, с. 187). В аналитической геометрии было введено понятие системы координат и каждой кривой поставлено в соответствие некоторое уравнение, отражающее свойства этой кривой. Буквенная символика, введенная Франсуа Виетом, позволила выразить геометрические задачи в терминах алгебраических уравнений. Ферма, хорошо знакомый с работами Виета, пытался и задачи квадратуры поставить в алгебраической форме, что придало его методам более общий характер и позволило развить арифметическую сторону анализа бесконечно малых.

Блез Паскаль (1623—1662), усовершенствуя методы квадратур, созданные предшественниками, недооценил важность новых аналитических методов. Его работы следуют геометрической традиции (Архимед, Кавальери, Торричелли) и представляют собой в некотором роде ее наивысшую точку. Однако Паскаль резко возражал против концепции Кавальери, тоже геометрической, и вместо интуитивных доводов Кавальери использовал арифметические рассуждения о прогрессиях. Так, при квадратуре параболы Паскаль строил прямоугольники на абсциссах, выбранных в арифметической прогрессии (с разностью d), вычислял их площади $d\cdot(nd)^2$ и определял их сумму S:

$$\begin{aligned} S &= d\cdot d^2 + d\cdot(2d)^2 + d\cdot(3d)^2 + \ldots + d\cdot(nd)^2 = \\ &= d^3 + 4d^3 + 9d^3 + \ldots + n^2d^3 = \\ &= d^3(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \\ &= d^3\left[\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right] = \\ &= d^3\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right). \end{aligned}$$

Когда число прямоугольников бесконечно возрастало, Паскаль пренебрегал членами $n^2/2$ и $n/6$ по сравнению с первым членом, и сумма площадей прямоугольников получалась равной $S=\frac{d^3n^3}{3}=\frac{(nd)^3}{3}=\frac{x^3}{3}$. Это отбрасывание членов было подсказано параллелью, которую Паскаль установил между арифметическим и геометрическим подходом, сравнивая неделимые в геометрии с арифметическим нулем. Эта параллель постоянно возникала в инфинитезимальных методах во второй половине XVII в.

Задача о касательных

В то время как задачи о квадратурах пришли из древности, касательные стали изучаться лишь в середине XVII в. В древности понятие касательной — прямой, касающейся некоторой кривой только в одной точке,— имело ограниченную практическую применимость и, за исключением нескольких отдельных задач на построение (например, построение касательных к архимедовой спирали и к коническим сечениям Аполлония), не нашло выхода в каком-нибудь общем методе.

Разработанный Архимедом метод построения касательной к спирали основан на кинематических соображениях. В XVII в. в работах Торричелли и Роберваля он был распространен на траектории движущихся точек. Архимед определял спираль как кривую, описываемую точкой, движущейся с постоянной скоростью вдоль луча, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своего начала. По аналогии с этим Роберваль и Торричелли также рассматривали кривые, порожденные сочетанием двух движений с известными скоростями. Результирующая скорость находится как диагональ параллелограмма скоростей этих двух движений, порождающих кривую (рис. 5.6). Прямая, на которой лежит диагональ, и будет касательной к кривой в точке P. Этот *динамический метод* позволял найти касательные ко многим кривым, но такое определение касательной основано на физических соображениях и применимо не ко всем кривым. К середине XVII в. все больше ученых за-

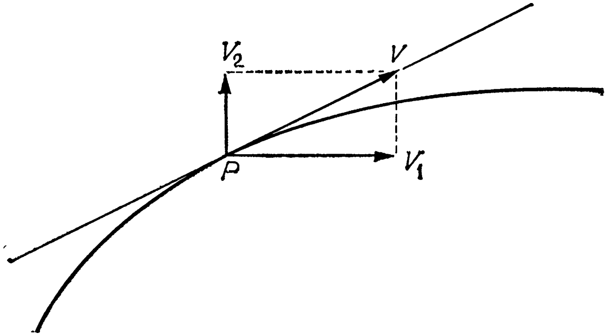


Рис. 5.6.

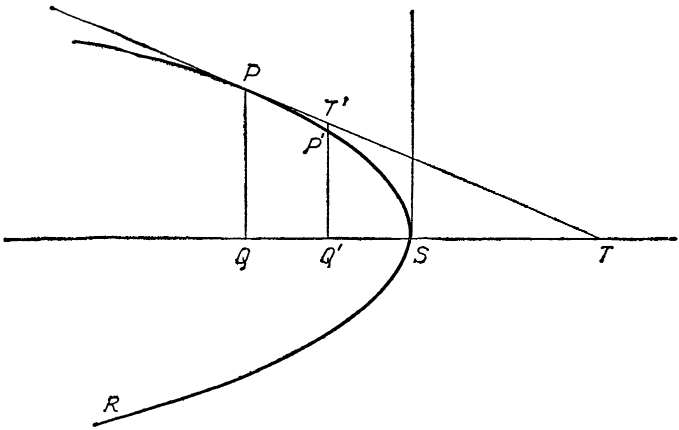


Рис. 5.7.

нималось поисками *общего метода* определения касательной.

В методе Ферма (1629 г.) определялась длина «подкасательной» TQ (рис. 5.7) с использованием «*специфического свойства*» кривой. Пусть PSR — парабола с вершиной S и осью SQ, и пусть P — точка, «*через которую требуется провести прямую PT, касательную к параболе и пересекающую ось в точке T*». «*Специфическое свойство*» (соответственно уравнение) параболы записывается как $QS/Q'S=PQ^2/P'Q^2$ (соответственно $y^2=2px$). Поскольку точка T — внешняя по отношению к параболе, $P'Q'<T'Q'$ и $QS/Q'S>PQ^2/T'Q'^2$. Но $PQ/T'Q'=QT/Q'T$ в силу подобия треугольников PTQ и $T'TQ'$. Следовательно, $QS/Q'S>QT^2/Q'T^2$. Но точка P задана, следовательно, заданы ее ордината PQ, точка Q и абсцисса QS. Пусть $QS=d$. Если положить, что искомая величина QT равна a, а приращение QQ' равно e, то имеет место неравенство

$$\frac{d}{d-e}>\frac{a^2}{a^2-2ae+e^2}.$$

Умножая средние члены на крайние и вычитая общие члены, получаем неравенство $-2aed+e^2d>-ea^2$. Затем Ферма делил это неравенство на e и получал

$$-2ad+ed>-a^2, \quad \text{или} \quad de+a^2>2ad.$$

Если опустить член, содержащий e, то неравенство превратится в равенство и даст искомый результат $a=2d$; поскольку a известно, можно найти T и провести касательную PT.

Определение, лежащее в основе этого метода, описывает касательную как предельное положение секущей, когда ее точки пересечения с кривой приближаются друг к другу. Именно это определение используется в наши дни для нахождения касательных к кривым. Чтобы найти касательную в точке x_0 к кривой, заданной некоторой функцией f, переменной x придают приращение Δx, которое затем устремляют к нулю. Ферма мыслил не в терминах функций и пределов, а на языке уравнений и бесконечно малых. Он первым рассмотрел числовые, а не геометрические бесконечно малые, но, вместо того чтобы устремлять их к нулю, полагал их все равными нулю [1]).

Рене Декарт (1596—1650) подверг суровой критике слишком вольное обращение Ферма с бесконечно малыми элементами [2]), и между двумя учеными разразился ожесточенный спор. В ходе этого спора Ферма яснее изложил свой метод и обобщил его. Около 1640 г. он заявил: *«допускается замена ординат кривых ординатами их*

---

[1]) Метод Ферма, как, впрочем, видно из приведенного выше примера, заключался в том, что аргументу функции $f(x)$ давалось приращение h, а затем $f(x+h)$ «приравнивалась» к расстоянию MP до касательной (см. рис. 5.8). Тогда $\frac{f(x+h)}{S_t+h}=\frac{f(x)}{S_t}$, где S_t — подкасательная. Отсюда $f(x+h)=\left(1+\frac{h}{S_t}\right)f(x)$; разлагая $f(x+h)$ по степеням h, получаем

$$f(x)+A(x)h+B(x)h^2+\ldots=\left(1+\frac{h}{S_t}\right)f(x).$$

Отбрасывая одинаковые члены, сокращая на h и приравнивая после этого h нулю, получаем

$$A(x)=\frac{f(x)}{S_t},\text{ или } S_t=\frac{f(x)}{A(x)}.$$

Поскольку Ферма оперировал с многочленами, разложение $f(x+h)$ по степеням h было конечным, и все действия Ферма можно было обосновать с помощью строгих неравенств, что он и сделал в одной из своих заметок (см. об этом в «Хрестоматии по истории математики».— М.: Просвещение, 1977, т. II).— *Прим. ред.*

[2]) Декарт просто не понял метода Ферма, но, после того как Ферма дал разъяснения, полностью его принял.— *Прим. ред.*

касательных», а в 1660 г. установил эквивалентность двух бесконечно малых величин: элемента дуги и элемента касательной. Благодаря общности этого принципа Ферма смог проводить касательные ко многим кривым, не только алгебраическим, но и трансцендентным — таким, как циклоида.

Около 1637 г. Декарт разработал метод, применимый лишь к алгебраическим кривым. В 1638 г. он определил касательную к циклоиде на основе понятия мгновенного центра вращения, избежав обращения к бесконечно малым.

Большой успех выпал на долю аналитических методов Декарта и Ферма в Англии, где использование бесконечных рядов было широко распространено; благодаря этим методам усилилась *тенденция к арифметизации*,

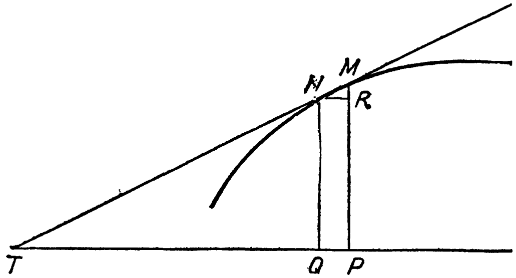


Рис. 5.8. Треугольник NMR называется *характеристическим треугольником*.

характерная в основном для работ Джона Валлиса (1616—1703) и Джеймса Грегори (1638—1675).

Предшественник Исаака Ньютона в Кембриджском университете Исаак Барроу (1630—1677), противясь этой тенденции, желал в своих лекциях вернуться к геометрической точке зрения и к евклидовой строгости. Он разработал способ нахождения касательных «*при помощи исчисления*», более общий, чем метод Ферма, и еще более близкий к современным методам. Он использовал уравнение кривой ($y^2=px$ для параболы) (см. рис. 5.8), заменив в нем x на $x+e$, а y на $y+a$, откуда

$$y^2+2ay+a^2=px+pe.$$

Затем он освободился от всех членов, содержащих высокие степени a и e или их произведения, и получил

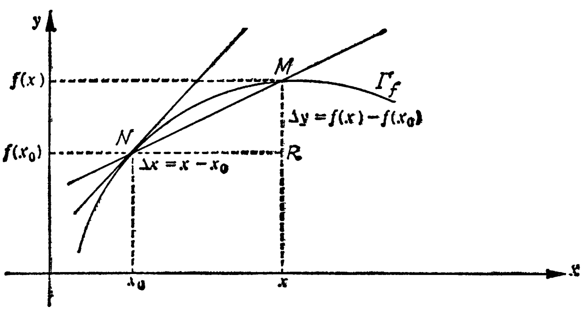
$$2ay = pe \quad \text{и} \quad \frac{a}{e} = \frac{p}{2y}.$$

Но $a/e = MP/TP$ в силу подобия треугольников MRN и MPT. Поскольку MP — ордината точки M, из пропорции $MP/TP = p/2y$ можно вычислить длину подкасательной TP.

Аналогия с современным дифференцированием налицо. Барроу придал переменной $x\,(=TQ)$ приращение e, переменной $y\,(=QN)$ приращение a, с помощью уравнения кривой $y=f(x)$ выразил a как функцию от e и затем опу-

6. Производная

Пусть f — функция, определенная в некотором интервале I прямой $\mathbb{R}$. *Производной* функции f в точке x_0 интервала I называется предел, если он существует, отношения $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, когда x стремится к x_0, $x \neq x_0$. Она обозначается $f'(x_0)$ или $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.



При $x \neq x_0$ отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ определяет наклон секущей NM. Когда M стремится к N, секущая NM имеет предельное положение, которое является *касательной* в точке N к графику Γ_f функции f. Наклон касательной равен

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

стил все члены, содержащие степени a и e и их произведения. Если дуга MN бесконечно мала, он отождествлял ее с небольшим кусочком касательной, и треугольник MRN на соответствующих приращениях был подобен треугольнику MPT (см. табл. 6). Но заменить e на Δx и a на Δy — значит отступить от рассуждений Барроу, приверженного геометрическим терминам и не желавшего применять понятия переменной и функции, необходимые для введения приращений Δx и Δy.

Связь между квадратурами и касательными

К середине XVII в. математики достигали все большего мастерства в обращении с понятиями, лежащими в основе исчисления бесконечно малых. Новые приемы, которые они изобретали и совершенствовали, становились все более действенными. Так, при вычислении криволинейных площадей постепенно складывался метод квадратуры, содержащий все элементы, необходимые для определения интеграла как предела сумм. Изучение движения, при котором требовалось вычислять мгновенные скорости при известной зависимости пройденного расстояния от времени, и поиск касательных к кривым содержали в зародыше вычисления приращений и производных. Выделение этих понятий позволило также решать задачи на максимум и минимум и подойти к задаче спрямления кривых.

До 1650 г. никто не думал, что длина дуги кривой может в точности равняться длине прямолинейного отрезка [1]). Однако чуть позже Уильям Нейл, Кристофер Рен (архитектор, создавший план реконструкции Лондона после большого пожара 1666 г.) и Роберваль сумели вычислить длину дуги циклоиды. Вслед за этим первым успехом были выполнены спрямления некоторых других кривых.

---

[1]) На самом деле Архимед не сомневался в существовании отрезка, равного по длине окружности. Он дал метод вычисления длины этого отрезка с любой степенью точности. Ферма нашел отрезок, равный дуге параболы $y^2=2px$, сведя его вычисление к нахождению площади, ограниченной гиперболой $x^2=y^2+p^2$, осью ординат и двумя параллелями к оси абсцисс.— *Прим. ред.*

Все эти задачи, относящиеся к дифференциальному и интегральному исчислению, изучались отдельно друг от друга, даже если в некоторых частных случаях связь между ними и была подмечена. Торричелли и Ферма смутно почувствовали связь между задачей о квадратурах и задачей о касательных. Эту связь выявил Дж. Грегори в своей «Геометрии» (1668 г.), однако этот труд не получил широкого распространения и не мог оказать заметного влияния. Первым, кто ясно осознал, что задача о касательных является *обратной* по отношению к задаче о квадратурах, и наоборот, был И. Барроу. Но ни один из этих ученых не понял общности и важности этой связи, которая ныне является содержанием основной теоремы дифференциального и интегрального исчисления. Именно она позволяет вычислять интегралы (пределы сумм) при помощи отыскания первообразных [1]), т. е. при помощи операции, обратной к дифференцированию. Эквивалент этой теоремы был у Барроу, но его громоздкая геометрическая формулировка, старательно избегающая какого бы то ни было обращения к аналитическим методам Декарта и Ферма, делала ее совершенно неприменимой.

Ферма и Барроу совсем близко подошли к открытию общих методов, благодаря которым исчисление бесконечно малых стало самостоятельной ветвью математики. В то время как Ферма владел аналитическими методами, эквивалентными дифференцированию и интегрированию, Барроу сумел разглядеть фундаментальную связь между этими двумя задачами, но принятый им геометрический язык не позволил ему выявить все возможности. Порой тяжеловесные, порой туманные многочисленные предвестники понятия предела, возникшие в XVII в., позволили тем не менее накопить множество результатов дифференциального и интегрального исчисления.

---

[1]) Функция F, дифференцируемая на отрезке $I=[a, b]$ в $\mathbb{R}$, называется *первообразной* по отношению к функции f, непрерывной на отрезке I, если производная F равна f. Основная теорема дифференциального и интегрального исчисления выглядит так:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

10. Создание исчисления бесконечно малых

С начала XVII в. инфинитезимальные методы стали разрастаться; появлялось все больше и больше полученных с их помощью результатов, и возникла необходимость собрать их и как-то упорядочить. Этот труд по систематизации взяли на себя английский ученый Исаак Ньютон (1643—1727) и немецкий юрист, философ и политический деятель Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716). Независимо друг от друга они изобрели удобные алгоритмические процедуры и выявили связь между, казалось бы, изолированными задачами. Благодаря достигнутой ими общности анализ бесконечно малых превратился в самостоятельную ветвь математики, независимую от геометрии, и Ньютон и Лейбниц по праву считаются творцами дифференциального и интегрального исчисления.

Исаак Ньютон

По окончании учебы Ньютона в Тринити-колледже Кембриджского университета, где он познакомился с трудами Декарта, Галилея, Валлиса и Барроу, вспыхнула эпидемия чумы, свирепствовавшая в лондонской округе в 1665 и 1666 гг. Эти два года вынужденного отдыха — занятия в университете прекратились — оказались очень плодотворными. Именно в это время Ньютон заложил основы механики и оптики и продумал ключевые моменты *теории флюксий*. Вскоре после возвращения в Кембридж Ньютон занял (в 1669 г.) кафедру математики, сменив на ней Барроу, и оставил ее лишь много лет спустя, после того как в 1695 г. был назначен смотрителем, а позднее директором Лондонского монетного двора.

Ньютон написал всего три работы об исчислении бесконечно малых. Они были опубликованы только в начале XVIII в., а до публикации имели ограниченное влияние. Всю жизнь Ньютон, болезненно относившийся к критике, не решался опубликовать результаты своих исследований. Первое краткое упоминание о его теории флюксий появилось в 1687 г. в работе по механике «Математические начала натуральной философии», которая имела большой резонанс. Предложения о скоростях, ускорениях, касательных и кривизнах, установленные в этой работе в геометрических терминах, послужили для Ньютона мощным толчком к исследованиям в области исчисления бесконечно малых. Еще по крайней мере целый век они стимулировали создание новых аналитических методов, необходимых для решения общих задач, за которые взялся Ньютон в этой книге.

В трудах Ньютона мы находим три различные концепции исчисления бесконечно малых.

Инфинитезимальная концепция

Первоначальная концепция [1]), сложившаяся под влиянием Барроу и Валлиса, была *инфинитезимальной.* Ньютон оперировал с бесконечно малыми величинами,

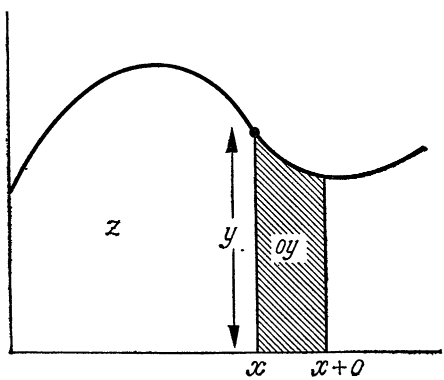


Рис. 5.9.

которые он называл *моментами* и которые были эквивалентны бесконечно малым приращениям у Ферма. Таким же образом он использовал моменты площади и построил на их основе свой метод квадратуры. Ньютон полагал, что задана площадь части плоскости, ограниченной графиком функции f, осями координат и ординатой y некоторой точки с абсциссой x, и рассматривал момент

---

[1]) В том виде, как она появилась в работе «Анализ при помощи уравнений с бесконечным числом членов», написанной в 1669, а опубликованной в 1711 г.

площади, т. е. ее приращение oy, когда абсцисса x возросла на бесконечно малую величину o (см. рис. 5.9). Он вычислил мгновенную скорость изменения площади в точке с абсциссой x, т. е. производную, и установил, что она равна ординате y точки кривой с абсциссой x.

Таким образом, если данная площадь может быть выражена как $z=\frac{n}{m+n}a^{(m+n)/n}$, то ее скорость изменения равна $y=ax^{m/n}$.

И наоборот, Ньютон определил площадь под кривой с заданным уравнением $y=f(x)$, обратив операцию *дифференцирования*, т. е. вычислив неопределенный интеграл от f. Он более не суммировал бесконечно малые площади, как это делали его предшественники, но сосредоточил все свои исследования вокруг производной. Он отдавал предпочтение неопределенному интегралу перед определенным. В 1669 г. Ньютон установил четкую связь между квадратурами и производными. Но тщетно мы стали бы искать у Ньютона явные определения производной и интеграла или даже моментов и бесконечно малых приращений («призраки исчезающих величин», как их называли некоторые наиболее ожесточенные критики — современники).

Метод флюксий

Несколько лет спустя (в 1671 г.) Ньютон отказался от бесконечно малых величин и в работе «Метод флюксий и бесконечные ряды» (опубликованной в 1736 г.) ввел свой наиболее известный метод. В этой работе он рассматривает математические величины как *«порождаемые посредством непрерывного возрастания, подобно пути, который описывает тело или какая-нибудь движущаяся вещь»*, и вводит *«скорости порождающих их движений»*. Эти скорости были названы *«флюксиями»*. Чтобы подвести под свой метод солидное основание, Ньютон взял за образец теоретическую механику и ввел время как универсальную переменную для всех функциональных соответствий. Время как таковое его не интересовало, он рассматривал только его равномерное течение. Он ввел понятия флюэнт и флюксий в следующих выражениях:

«Я буду называть флюэнтами, *или текущими вели-*

чинами, величины, которые рассматриваю как постепенно и неопределенно возрастающие; обозначать я их буду последними буквами алфавита v, x, y и z... Скорости, с которыми возрастают вследствие порождающего их движения отдельные флюэнты (и которые я называю флюксиями, *или просто скоростями или быстротами), я буду обозначать теми же буквами, но пунктированными, например $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$*».

Ньютон четко сформулировал основные задачи исчисления: «*По данному соотношению между флюэнтами определить соотношение между флюксиями. И обратно*».

Ньютон пояснял свое решение прямой задачи на различных примерах. В применении к уравнению $y=x^n$ его действия были таковы. Если o — «*бесконечно малый интервал времени*», то $\dot{x}o$ и $\dot{y}o$ — бесконечно малые приращения x и y. Чтобы найти соотношение между $\dot{x}$ и $\dot{y}$, Ньютон заменял в уравнении $y=x^n$ переменную x на $x+\dot{x}o$, а y на $y+\dot{y}o$. Таким образом,

$$y+\dot{y}o=(x+\dot{x}o)^n.$$

Ньютон разлагал правую часть в бесконечный ряд при помощи *формулы бинома* [1])

$$y+\dot{y}o=x^n+no\dot{x}x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}o^2\dot{x}^2x^{n-2}+\ldots,$$

затем вычитал $y=x^n$ и делил на o:

$$\dot{y}=nx^{n-1}\dot{x}+\frac{n(n-1)}{2}o\dot{x}^2x^{n-2}+\ldots.$$

Далее он пренебрегал всеми членами, содержащими o, и получал

$$\dot{y}=nx^{n-1}\dot{x}.$$

Введение понятия флюксии только в малой степени изменило первоначальную инфинитезимальную концепцию.

---

[1]) Приводим формулу разложения $(x+y)^n$, где $n\in\mathbb{N}$, $(x, y)\in\mathbb{R}^2$:

$$(x+y)^n=x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\ldots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+y^n,$$

где

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Метод первых и последних отношений

В «Рассуждении о квадратуре кривых», написанном в 1676 г., опубликованном в 1704 г., Ньютон попытался устранить малейший след бесконечно малых величин, сначала рассматривая лишь их отношения, а затем разработав свой третий метод, «*метод первых и последних отношений*». Он действовал следующим образом: обозначив на этот раз через o момент, ранее обозначаемый $\dot{x}o$, Ньютон, вместо того чтобы без достаточного обоснования пренебречь содержащими o членами, образовал отношение изменения x к изменению y, а затем избавлялся от o в этом отношении. В результате получилось отношение 1 к nx^{n-1}, которое Ньютон назвал «*последним отношением исчезающих приращений*». Он положил его равным первому отношению возникающих приращений, и это было отношение флюксий.

Чтобы объяснить свое «*последнее отношение*» — грубо говоря, предел — Ньютон прибегнул к аналогии с механикой и принял за образ последнего отношения конечную скорость тела, пришедшего в некоторое положение. Под конечной скоростью он понимал не ту скорость, которая была у тела до того, как оно достигло конечного положения и движение прекратилось, и не его скорость после этого момента, а в точности ту, с которой тело приходит в конечное положение и с которой движение останавливается.

Различные шаги предложенной Ньютоном процедуры соответствуют образованию производной

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(см. табл. 7). Следующий отрывок из «Математических начал натуральной философии» поясняет связь ньютоновского метода и нашего понятия производной: «*Предельные отношения исчезающих количеств не суть отношения пределов этих количеств, а суть те пределы, к которым при бесконечном убывании количеств приближаются отношения их и к которым эти отношения могут подойти ближе, нежели на любую наперед заданную разность, но которых перейти или достигнуть не могут ранее, чем эти количества уменьшатся бесконечно*».

7. Метод флюксий и вычисление производной

Здесь на примере функции $f\colon x \longrightarrow x^n$ проведена параллель между методом флюксий Ньютона и вычислением производной

Ньютон	Вычисление производной
$y=x^n$.	$y=f(x)$.
x, изменяясь, превращается в $x+o$.	h — приращение переменной x.
$y=x^n$ переходит в $(x+o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2}+\ldots$ по формуле бинома.	$f(x+h)$ — новое значение функции.
Приращение y равно $(x+o)^n - x^n = nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2}+\ldots$,	Изменение f равно $f(x+h)-f(x)$.
Приращение o относится к $nox^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2}+\ldots$, как 1 к $nox^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2}+\ldots$.	Скорость изменения равна $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
Если эти приращения исчезают, их отношение равно $1 : nx^{n-1}$.	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$.

Но метод флюксий, даже основанный на методе первых и последних отношений, оставался недостаточным, чтобы подвести строгий фундамент под дифференциальное исчисление. Этот метод всегда опирается на какой-нибудь другой — либо метод бесконечно малых, либо метод пределов. В ньютоновской идее предельного отношения отразилось влияние Барроу, который ратовал за возврат к евклидовой модели; на ней заметен отпечаток концепции числа как абстрактного отношения некоторой величины к другой величине того же рода, принятой за единицу. Чтение книги V Евклида проявилось здесь в том, что Ньютон никогда не рассматривал флюксию какой-нибудь величины, но только отношение двух флюксий.

Новаторство Ньютона заключалось в том, что у него применение бесконечных рядов стало как общим методом, так и техническим приемом интегрирования. Он разлагал функции в бесконечные ряды и интегрировал их почленно, распространив законность почленного интегрирования на бесконечные суммы, хотя доказал ее лишь для конечных сумм. Тщетно мы стали бы искать у него соображения сходимости, но следует отметить, что в этой области Ньютон проявил недюжинную интуицию. Так, для функции $(1+x^2)^{-1}$ он пользовался при достаточно малых x разложением

$$y=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\dots,$$

а при больших x — разложением

$$y=\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^8}+\dots.$$

Вклад Лейбница

Хотя достижения Лейбница были несколько иного характера, его вклад в исчисление бесконечно малых очень важен. Изучив философию и право, Лейбниц отправился ко двору герцога в Майнц, где выполнял работу юриста. В 1672 г. он был послан в Париж с дипломатическим поручением к Людовику XIV. В Париже он познакомился с Христианом Гюйгенсом (1629—1695), который был членом недавно созданной Академии наук. Беседы с Гюйгенсом показали Лейбницу всю глубину собственного невежества в области математики, и он усердно занялся изучением работ Кавальери, Роберваля, Паскаля, Декарта, Грегори и Валлиса. В 1676 г. Лейбниц уехал из Парижа в Ганновер для продолжения своей политической карьеры и принял на себя обязанности библиотекаря и советника герцога.

Слишком поглощенный разнообразной деятельностью, чтобы находить свободное время для писания длинных математических трактатов, Лейбниц опубликовал свое дифференциальное исчисление в серии коротких статей, выходивших начиная с 1684 г. в научном журнале *Acta* *eruditorum* (Труды ученых), основанном при его поддержке в 1682 г. в Лейпциге. Многие свои результаты он так никогда и не опубликовал, и они накапливались в его тетради, в которую он записывал свои открытия по мере их получения. Поскольку его записи неполны и сбивчивы, трудно проследить эволюцию идей Лейбница о дифференциальном исчислении.

Спустя тридцать лет после выхода этих статей Лейбниц утверждал, что первым толчком к открытию было для него чтение того места «Трактата о синусах четверти круга» Паскаля, где говорится о характеристическом треугольнике (см. рис. 5.8). Он понял, что поиск касательной к кривой связан с отношением «*разностей*» ординат и абсцисс, когда они становятся бесконечно малыми, и что квадратура зависит от суммы ординат или бесконечно тонких прямоугольников, построенных на бесконечно малых интервалах оси абсцисс. С 1673 г. Лейбниц отождествлял задачу, обратную нахождению касательных, с задачей квадратур.

Разности и суммы

Начало систематическому изложению идей Лейбница было положено заметкой 1675 г., где он использовал комбинаторные соображения. В диссертации, озаглавленной «О комбинаторном искусстве» (1666 г.), он рассматривал последовательность квадратов и составил первые разности, а также вторые, которые оказались постоянными:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0, & & 1, & & 4, & & 9, & & 16, & & 25, & & 36, \\
& 1, & & 3, & & 5, & & 7, & & 9, & & 11, & \\
& & 2, & & 2, & & 2, & & 2, & & 2 & &
\end{array}$$

Он констатировал, что сумма первых разностей равна последнему члену последовательности квадратов.

Чтобы установить связь с исчислением бесконечно малых, Лейбниц интерпретировал числовую последовательность как последовательность значений некоторой функции, а разность между двумя числами как разность между соседними значениями функции; эту разность он обозначил символом l. Для обозначения суммы использовалось сокращение omn. от латинского слова omnia. Сформулированное выше свойство можно записать тогда как omn. $l=y$. В дальнейшем Лейбниц предпочел вместо l писать dy, а вместо omn. ввел обозначение $\int$ — стилизованное написание буквы S, первой буквы слова summa. Тогда написанное выше равенство приняло вид $\int dy=y$. Это удобное и элегантное обозначение, сохранившееся до наших дней, позволило ему разработать формальный метод вычисления сумм и разностей бесконечно малых.

В первой публикации Лейбница о дифференциальном исчислении, озаглавленной «Новый метод для максимумов и минимумов...» (1684 г.), задача о касательных привела его к рассмотрению треугольника, так поразившего его при чтении трудов Паскаля. Этот треугольник образован бесконечно малой частью касательной и бесконечно малыми отрезками прямых, параллельных абсциссе и ординате. Лейбниц принял его за характеристический элемент кривой (см. рис. 5.8). Все три бесконечно малые стороны этого треугольника полностью определяются подобием бесконечно малого треугольника NRM треугольнику TNQ, который образован подкасательной TQ, ординатой QN и отрезком касательной TN. Даже если величины dy и dx становятся произвольно малыми, их отношение dy/dx имеет конечную величину, равную отношению NQ/QT ординаты к подкасательной. Отсюда получается определение дифференциала: если dx — произвольная величина, то дифференциал dy определяется соотношением $dy/dx=y/$подкасательная. Чтобы это определение стало строгим, надо найти выражение подкасательной. Однако лейбницево определение касательной как прямой, соединяющей две бесконечно близкие точки, является недостаточным.

Затем Лейбниц указал правила нахождения $d(x+y)$, $d(xy)$, $d(x/y)$, $d(x^n)$ в том же порядке, как обычно приводятся алгебраические правила, выразив тем самым свое намерение создать подлинную *«алгебру бесконечно малых»*. Он применил эти правила для нахождения касательных, максимумов и минимумов и точек перегиба. Позднее Лейбниц добавил дифференциалы логарифмических и показательных функций и исследовал кривизну при помощи соприкасающейся окружности. Он ввел также дифференциалы высших порядков (например, $d^n x$) и в вычислениях пренебрегал дифференциалами порядка выше 1 — это было характерной чертой его метода.

Итак, Лейбниц положил в основу своего «исчисления» понятие дифференциала. Подобный прием, без сомнения, не был чужд его философским поискам «*монад*», простых и неделимых субстанций. Таким образом, фундаментальной операцией исчисления Лейбница было вычисление разностей. *Суммирование* — это обратная операция, и иногда простым сопоставлением можно вывести таблицу интегралов из таблицы дифференциалов. Лейбниц представлял себе площади и объемы как суммы бесконечно малых элементов, но вычислял значение этих сумм путем обращения операции дифференцирования. В противоположность Ньютону, который рассматривал *неопределенный интеграл* и вычислял площади и объемы, исходя из их скорости изменения, Лейбниц ввел *определенный интеграл* [1]). Впрочем, оба эти различные понятия интеграла сохранились в элементарном интегральном исчислении.

Формализм Лейбница

Сильными сторонами метода Лейбница были простота алгоритма, элегантные обозначения и хорошо продуманный формализм действий, позволявший почти автоматически совершать вычисления, отвлекаясь от конкретной природы рассматриваемых объектов. Хотя Лейбниц и прибавил к системе обычных величин бесконечно малые, их статус все еще оставался весьма неопределенным. Лейбниц колебался между формальным подходом и обращением к геометрическим аналогиям.

Стараясь избавиться от метафизической природы бесконечно малых, он рассматривал их просто как некое вспомогательное средство, наподобие мнимых чисел. Не имея строгого определения бесконечно малых, он ин-

---

[1]) До 1690 г. Лейбниц говорил о «сумматорном исчислении». По совету Якова Бернулли он впоследствии предпочел название *интегральное исчисление*, указывающее на то, что ищется целое, исходя из разности, части.

терпретировал их иногда, подобно Ньютону, как мгновенные изменения.

Основной идеей была идея несравнимости. Для Лейбница точки, линии, поверхности несравнимы: например, мы ничего не прибавляем к прямой, добавляя к ней точку. Таким образом, dx «ведет себя» по отношению к x, как точка по отношению к прямой. Отметим, что Лейбниц рассматривал множество величин, не являющееся архимедовым: в него входят вещественные числа, пополненные дифференциалами.

Лейбниц высказал мысль, что бесконечно малые количества меньше любого заданного количества, что они лишены величины и что в силу какого-то неясного принципа непрерывности они сохраняют характер соотношений между конечными величинами, из которых произошли. Как и Ньютон, он тоже старался не рассматривать бесконечно малые элементы, а только их отношения. Узкая концепция числа, не допускавшая отождествления некоторых отношений с числами, была отчасти причиной того, что ни в ньютоновской, ни в лейбницевой теориях не смогло «прорезаться» понятие предела. Определение дифференциалов как пределов бесконечных последовательностей чисел появилось лишь после того, как были построены вещественные числа [1]).

Несмотря на универсальность методов, алгебраизацию вычислений, дифференциальное и интегральное исчисление все еще не имело прочного фундамента. Такие основополагающие понятия, как предел, производная и интеграл, еще не были определены.

11. Рывок вперед

Поскольку исчисление бесконечно малых появилось в последней трети XVII в. под видом *метода флюксий* Ньютона, с одной стороны, и *дифференциального исчисления* Лейбница — с другой, неудивительно, что эти две концепции были противопоставлены друг другу и современники двух этих математиков разделились на две школы — английскую и континентальную. Спор,

[1]) Определение предела, дифференциала и интеграла было дано в начале XIX в. (Больцано, Коши) до построения теории действительных чисел (70-е гг.).— *Прим. ред.*

разгоревшийся между Ньютоном и Лейбницем за приоритет в этом открытии, усилил страсти и принудил ученых принять ту или иную сторону.

Английская школа, в которую входили Беркли, Маклорен, Тейлор, Симпсон, Ланден, упорно пыталась прояснить понятия, лежащие в основе метода флюксий, избавиться от философских затруднений, связанных с непонятным статусом бесконечно малых элементов, которые были то нулевыми, то неопределимыми, а часто путались с флюксиями и считались несовместимыми с геометрической интуицией, которой английские аналитики всегда отдавали предпочтение.

Для континентальной школы характерна скорее тенденция связать дифференциальное исчисление с идеей функции, которая благодаря Эйлеру стала основным понятием математики (см. гл. 6). Хотя математики все еще пытались искать философское обоснование понятия бесконечно малой величины, формальная точка зрения Эйлера дала толчок почти автоматическому развитию дифференциального исчисления. Этому благоприятствовали компактность обозначений Лейбница и эффективность его алгоритмов.

Быстрому распространению дифференциального исчисления отчасти способствовала обширная переписка Лейбница с его современниками, в особенности с семейством Бернулли. Эта семья базельских математиков внесла большой вклад в развитие нового исчисления, обогатив его новыми результатами и усовершенствовав обозначения. Значительную роль в популяризации методов лейбницева исчисления сыграла работа маркиза де Лопиталя «Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий» (1696 г.), навеянная небольшим сочинением Иоганна Бернулли о дифференциальном исчислении.

Отсутствие прочного обоснования дифференциального исчисления не лишало математиков веры в справедливость результатов, полученных с его помощью в различных областях, особенно в механике. Математики XVIII в. расширяли методы дифференциального и интегрального исчисления и применяли его ко все более сложным функциям, исследования которых требовали стоявшие перед учеными трудные физические задачи.

Постепенная математизация физики и результаты, достигнутые в изучении природных явлений с помощью исчисления бесконечно малых, способствовали возникновению новых ветвей математики. Общее изучение механических и физических явлений привело к установлению описывающих их *дифференциальных уравнений*, интегрирование которых стало предметом новой области анализа.

Математизация механики, гидродинамики и теории упругости стала основным стимулом развития *вариационного исчисления*.

Исследование кривых и поверхностей дифференциальными методами породило *дифференциальную геометрию*.

Все эти ветви выросли из одного ствола — исчисления бесконечно малых; их развитие стало главной заботой математиков XVIII в. Исчисление бесконечно малых расширялось за счет все более разнообразных приложений, однако его основополагающие понятия все еще не были определены. Преодолеть эту трудность пытались почти все математики века, но их усилия оставались тщетными.

12. Попытки обоснования

Леонард Эйлер

Самым уязвимым моментом исчисления бесконечно малых была природа бесконечно малых. Математики XVII в. пытались узаконить существование этих исчезающих величин, прибегая к метафизическим аргументам. Ведущий математик века Леонард Эйлер (1703—1783) отказался принять за основу нового исчисления метафизику, как, впрочем, и геометрию. Эйлер посвятил ему «Дифференциальное исчисление» (1755 г.) и «Интегральное исчисление» (1768 — 1770 гг.) — настоящие своды всех исследований и результатов в этой области. Проникнутый верой в символы, он избрал формальный подход к бесконечно малым, который склонял его скорее к уяснению правил действия, чем к выявлению природы объектов, к которым они применялись.

С точки зрения Эйлера, бесконечно малая — это величина исчезающая, а значит, актуально равная нулю. Как обосновать тогда, что отношение двух исчезающих величин dy/dx, означавшее для него 0/0, может иметь вполне определенное значение? Ответ Эйлера прост и наивен: из свойства $n \cdot 0 = 0$ для любого n он вывел, что $n = 0/0$ [1]).

Вот как Эйлер вычислял отношение приращений функции $y = x^2$ и переменной x:

если x увеличивается на ω, y возрастает
на $(x+\omega)^2 - x^2 = 2x\omega + \omega^2$,

и отношение приращений равно $2x+\omega$. Таким образом, когда приращение величины x исчезает, приращение величины x^2 тоже исчезает, но тем не менее отношение этих нулевых величин имеет определенное значение, равное $2x$. Эйлер провел систематическое изучение элементарных функций и нашел для них подобным образом отношение приращений функции к приращениям переменной. Таким образом, по Эйлеру, их определение или нахождение значений выражений 0/0 составляет предмет дифференциального исчисления, в котором систематизированы правила вычисления дифференциалов функций, и хотя сами они равны нулю, их взаимные отношения вполне определены.

Эйлер рассматривал интегрирование как обратную операцию к дифференцированию и пользовался методами интегрирования Ньютона (разлагал функции в бесконечные ряды, а затем интегрировал их почленно).

Он успешно применял исчисление бесконечно малых к исследованию многих физических задач. Для этого часто требовалась сложная техника, в развитие которой Эйлер внес значительный вклад. Занятия механикой

---

[1]) Эйлер действительно считал бесконечно малые нулями. Но отношению dy/dx он придавал то значение, которое будет иметь отношение конечных разностей $\Delta y/\Delta x$, если положить $\Delta x = 0$. Об эйлеровом исчислении нулей существует большая литература. Читателю, заинтересовавшемуся вопросом, можно рекомендовать книгу А. П. Юшкевича «История математики в России» (М.: Наука, 1968).— *Прим. ред.*

заставили его решать дифференциальные уравнения второго порядка, а задачи теории упругости потребовали решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Жан Лерон Даламбер

Даламбер описал свой подход к исчислению бесконечно малых главным образом в статьях, которые он составлял для «Энциклопедии, или Толкового словаря наук, искусств и ремесел», как научный редактор этого издания. Это был грандиозный проект упорядочения знаний, занимавший умы мыслителей Просвещения. Даламбер окончательно порвал с атомистской идеей существования статичных бесконечно малых и интерпретировал дифференциал — «*бесконечно малую величину, или меньшую, чем любая определенная величина*» — как «*бесконечно малую разность двух конечных величин, одна из которых бесконечно мало превосходит другую*». Предмет дифференциального исчисления определялся как «*способ дифференцировать величины, т. е. находить бесконечно малую разность конечной переменной величины*». Даламбер попытался обосновать его при помощи метода пределов. Так он называл ньютоновский метод первого и последнего отношений. «*Итак, этот знаменитый автор никогда не дифференцировал величины, но только уравнения; потому что всякое уравнение заключает в себе отношение между двумя переменными, а дифференцирование уравнений состоит только в нахождении пределов отношения между конечными разностями двух переменных, содержащихся в уравнении*». Мы видим, что производная — это больше не отношение бесконечно малых величин, а предел отношения конечных величин. В статье «Предел» Даламбер утверждал, что «*теория пределов составляет основу истинной метафизики и дифференциального исчисления*», и попытался дать удовлетворительное представление о понятии предела: одна величина является пределом другой, когда эта вторая величина может приблизиться к первой сколь угодно близко. Но ему не удалось построить логически связного учения о пределах.

Жозеф-Луи Лагранж

Лагранж (1736—1813) тоже предпринял попытку развить «*истинную метафизику принципов дифференциального и интегрального исчисления*». Этому он посвятил две работы, явившиеся итогом его преподавательской деятельности в незадолго до того созданных Нормальной школе и Политехнической школе: «Теория аналитических функций» (1797 г.) и «Лекции о функциональном исчислении» (1808 г.).

В них Лагранж критикует и отвергает метод бесконечно малых Лейбница, метод отношений двух нулей Эйлера, метод пределов Даламбера и метод флюксий Ньютона. Целью Лагранжа было сведение исчисления бесконечно малых к алгебре, о чем он и объявил в подзаголовке работы 1797 г., полное название которой таково: «Теория аналитических функций, содержащая начала дифференциального исчисления, освобожденные от какого-либо рассмотрения бесконечно малых, исчезающих, пределов и флюксий, и сведенная к алгебраическому анализу конечных величин».

В ход пущены понятия функции — главным образом непрерывной функции в смысле Эйлера (см. гл. 6, с. 310)— и ряда. Для Лагранжа бесконечные ряды — простые обобщения многочленов — принадлежат к области алгебры, и он оперирует с ними как с алгебраическими выражениями.

Разложение функций в ряд позволило Лагранжу чисто алгебраически и формально строить, исходя из данной функции (названной *первообразной*), другие функции (названные *производными*). Термин «производная» прочно вошел в математическую литературу, так же как и обозначения f', f'' и т. д. для последовательных производных функции f.

Лагранж исходил из того, что любая функция $f(x)$ некоторой переменной x, если вместо x подставить $x+i$, где i — некоторая неопределенная величина, может быть разложена в ряд

$$f(x+i)=f(x)+pi+qi^2+ri^3+\ldots .$$

Коэффициенты p, q, r, ... при степенях i будут новыми функциями от x, а именно производными первообразной $f(x)$, не зависящими от i.

Желая установить существование этого разложения для функций самого общего вида, Лагранж полагал, что доказал его априори, но его доводы оказались недостаточными. Он ограничился тем, что отбросил некоторые случаи, которыми можно пренебречь (когда некоторые производные функции становятся неограниченными в изолированной точке, или когда этим свойством обладают и производная и сама функция). Но Лагранж ошибался относительно сходимости такого ряда: он считал, что «*можно всегда взять i настолько малым, чтобы любой член его был более суммы всех следующих за ним членов*».

Для Лагранжа «*дифференциальное исчисление, рассматриваемое во всей его общности, состоит в непосредственном нахождении, с помощью простых и легких процедур, функций p, q, r, ..., производных функции f; интегральное же исчисление состоит в восстановлении функции f по этим последним функциям*».

Лагранж указал правила нахождения производных, показав сначала, что можно получить $2q$ из p, $3r$ из q и т. д. применением такого же алгоритма, что и при нахождении p из $f(x)$. Его доказательство основано исключительно на алгебраических манипуляциях со степенными рядами, и взятие производной от функции становится «*новой алгебраической операцией*».

Чтобы вычислить p, Лагранж пренебрегает всеми членами разложения, начиная с третьего. Он находит $f(x+i)-f(x)=pi$, откуда $p=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}=f'(x)$. Подобным же образом получаются $q=\frac{f''(x)}{2!}$, $r=\frac{f'''(x)}{3!}$ и т. д. Отсюда вытекает, что

$$f(x+i)=f(x)+f'(x)i+\frac{f''(x)}{2!}i^2+\ldots \text{ (формула Тейлора).}$$

С помощью своего исчисления функций Лагранж нашел производные элементарных функций (x^m, a^x, $\log_a x$, $\cos x$, $\sin x$).

В случае когда надо было не просто найти производные, а использовать разложение в ряд для вычисления значения функции, Лагранж сознавал необходимость доказательства сходимости ряда. Благодаря оценкам остаточного члена, которым пренебрегают, Лагранж нашел способ определения, в каких пределах заключена допущенная ошибка. Это определение пределов, как писал Лагранж, «*имеет огромное значение в приложении теории функций к исследованию кривых и к механике*».

Удалось ли Лагранжу избавиться от метафизики бесконечного? Встав на чисто формальную точку зрения,— а это в точности соответствовало эйлерову понятию о строгости,— он исключил из рассмотрения понятия бесконечно малой и предела. Но, чтобы перейти от формального к числовому — от формальных рядов к сходящимся рядам,— «*как раз достаточно присоединить к этому подходу* (формальных рядов) *понятие предела*» (Оверт).

Упомянем еще «Трактат о дифференциальном и интегральном исчислении» (1797 г.) Сильвестра Франсуа Лакруа (1765—1843), в котором был осуществлен синтез работ XVIII в. в области анализа и который ознаменовал уже возврат к строгости, столь характерный для XIX в.

13. Выяснение основных понятий

В начале XIX в. желание подвести под математику прочное основание стало почти всеобщим, и необходимость пролить свет на основные понятия [1]) анализа сделалась неотложной. Так, по мнению аналитиков, вполне обоснованными были шаги Лагранжа, направленные на построение теории, что их выделяло из многочисленных попыток его предшественников. Несмотря на то что многие не одобряли выбор разложения функций в ряд Тейлора в качестве основы дифференциального и интегрального исчисления, трактат Лагранжа вместе с работами Эйлера способствовал тому, что центральным понятием анализа становится функция. Вопрос о природе функции вообще и непрерывной функции в частности все более волновал математиков. Ньютон избежал его обращением к интуитивному понятию равномерного движения. Лейбниц предложил свое определение функции (см. гл. 6, с. 305), выдвинул некий принцип непрерывности.

Впервые ясная концепция основных понятий исчисления бесконечно малых (непрерывность, производная, связь между непрерывностью и дифференцируемостью)

[1]) См. также § 13 гл. 6.

появилась у чешского логика и математика Бернарда Больцано (1781—1848), но его работы почти полвека оставались незамеченными.

Главным «проводником» строгости в исчисление бесконечно малых стал французский математик Огюстен-Луи Коши (1789—1857). Этому были посвящены три его работы, появившиеся между 1821 и 1829 гг.: «Курс анализа» (1821 г.), «Краткое изложение лекций по исчислению бесконечно малых» (1823 г.) и «Лекции о дифференциальном исчислении» (1829 г.). За основное понятие Коши принял понятие предела. Развив идею Даламбера, но отказавшись окончательно от геометрического подхода, с которым она еще была тесно связана, он определил предел как чисто арифметическое понятие. Вот его определение: «*Если значения, последовательно приписываемые одной и той же переменной, неограниченно приближаются к фиксированному значению, так что в конце концов отличаются от него сколь угодно мало, то последнее называют пределом всех остальных*». В свете концепций предела, переменной и функции Коши разъяснил понятие бесконечно малой величины, которая является не чем иным, как сходящейся последовательностью с пределом нуль: «*Если последовательные числовые значения переменной неограниченно убывают, так что становятся меньше любого данного числа, эта переменная становится тем, что называют бесконечно малой или бесконечно малым количеством. Переменная этого рода имеет пределом нуль*». Производная непрерывной функции $y=f(x)$ также определяется через предел. Это предел, если он существует, отношения $[f(x+i)-f(x)]/i$, когда i стремится к пределу нуль.

Уточним, что функция, дифференцируемая в точке, непрерывна в ней, но обратное неверно. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью не была выяснена в работах Коши. Эта проблема была четко сформулирована лишь в мемуаре Дирихле (1829 г.), посвященном разложению функций в тригонометрические ряды (см. гл. 6, с. 320).

Определив производную, Коши установил ее связь с дифференциалами Лейбница: если dx — некоторая конечная величина, дифференциалом dy функции $y=f(x)$ будет просто $f'(x)dx$. Таким образом, величины dx и

dy определены одним только свойством, что их отношение равно производной $f'(x)$.

Чтобы выяснить связь между отношением $\Delta y/\Delta x$ приращений и производной $f'(x)$, он доказал формулу конечных приращений: $\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$, где $0<\theta<1$. В его доказательстве использована непрерывность производной $f'(x)$ в интервале Δx.

14. Первая теория интегрирования

Ньютон и Лейбниц разработали две различные концепции интеграла. Ньютон использовал в основном неопределенный интеграл и рассматривал интегрирование как операцию, обратную к дифференцированию. В течение всего XVIII в. этот подход был преобладающим. Лейбниц интерпретировал площади и объемы как суммы прямоугольников и цилиндров, что привело его к понятию определенного интеграла; Коши, первым давший точное определение интеграла (1823 г.), придерживался этой второй концепции.

Коши считал, что необходимо доказать существование интегралов, «*прежде чем изучать их разнообразные свойства*». Он рассматривает непрерывную вещественную функцию f на отрезке $[x_0, X]$. Точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n=X$ этого отрезка разбивают его на n промежутков. Коши строит сумму

$$S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

и затем доказывает, что ее предел, когда длина самого большого промежутка стремится к нулю, для непрерывной функции f существует [1]): «*предел, который будет зависеть единственно от функции $f(x)$ и граничных значений x_0, X переменной x. Этот предел и называется определенным интегралом*». Для его обозначения Коши пользуется символом $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, «*придуманным г-ном Фурье*».

[1]) Строгое доказательство требует введения понятия равномерной непрерывности, которого у Коши не было. Но вещественная функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$ (a и b вещественны), равномерно непрерывна на этом отрезке.

Коши определяет $F(x)=\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, где x принадлежит отрезку $[x_0, X]$, и показывает при помощи теоремы о конечных приращениях, что $F'(x)=f(x)$ для всех x из отрезка $[x_0, X]$. Это утверждение установило связь между интегрированием и дифференцированием, и, таким образом, опять-таки у Коши появилось первое доказательство основной теоремы исчисления бесконечно малых.

Интеграл Коши распространяется на кусочно непрерывные функции (ограниченные функции, имеющие конечное число разрывов в промежутке интегрирования). В самом деле, пусть f — функция, ограниченная на отрезке $[a, b]$ и имеющая разрыв в точке c этого отрезка. Коши определяет обобщенный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

В качестве одного из приложений определенного интеграла Коши доказывает формулу Тейлора. Он рассматривает последовательность

$$f(x),\ \frac{h}{1!}f'(x),\ \ldots,\ \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x),\ \ldots$$

и утверждает, что она сходится и имеет суммой функцию

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\ldots$$

всякий раз, когда интеграл

$$\int\limits_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x+z)\,dz=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),\quad 0<\theta<1,$$

при возрастающих значениях n сходится к пределу, равному нулю.

Коши совершенно ясно говорит о том, какое место он отводит теореме Тейлора: «...*я вынужден был отнести к интегральному исчислению формулу Тейлора, потому что она может считаться общей лишь постольку, поскольку входящий в нее ряд сводится к конечному числу членов и дополняется определенным интегралом. Мне небезыз-*

вестно, что знаменитый автор «Аналитической механики» (Лагранж) *взял вышеупомянутую формулу за основу своей теории производных функций. Но, несмотря на все уважение к столь большому авторитету, большинство геометров сошлись теперь во мнении о недостоверности результатов, к которым может привести использование расходящихся рядов...»*

Вслед за Коши большинство аналитиков приняли предел за основу исчисления бесконечно малых.

Вспомним теперь, что методы бесконечно малых были введены отчасти для вычисления криволинейных площадей, длин дуг кривых, объемов и т. д.— интуитивно ясных для геометров понятий. Верный своему идеалу строгости, Коши счел необходимым определить их и сделал это на языке интегралов, что значительно сузило эти понятия. В самом деле, ведь интегральные формулы накладывают на рассматриваемые функции некоторое число ограничительных условий. Так, длина s дуги графика функции $y=f(x)$ определяется как

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

что предполагает дифференцируемость функции f. Задача обобщения понятий длины, площади и объема была поставлена несколько позже (см. гл. 6, с. 292).

15. Строгость у Вейерштрасса

Дальнейший шаг на пути к строгости, вслед за Больцано и Коши, сделал немецкий аналитик Карл Вейерштрасс (1815—1897). Он еще уменьшил роль интуитивных соображений в определениях предшественников, введя для них численное представление. Задавшись вопросом о том, какой смысл вкладывается в выражение вроде «*переменная неограниченно приближается к некоторому фиксированному значению*», где неявно присутствуют время и движение, он попытался перевести их в арифметические неравенства. Так для описания бесконечно малых изменений переменной и функции был создан «язык ε и δ»: «*Если возможно определить такую границу δ, что для всякого значения h, меньшего δ по абсолютной* *величине, $f(x+h)-f(x)$ будет меньше некоторой величины ε, сколь угодно малой, то будем говорить, что бесконечно малому изменению переменной соответствует бесконечно малое изменение функции».* За этим сразу же проступают современные определения предела и непрерывности. Для прояснения аналитических методов Вейерштрасс ратовал за введение точной арифметической символики (см. табл. 8 в гл. 6). Он сумел придать анализу форму, очень близкую к современной.

16. Построение вещественных чисел

Реформа анализа, начатая в работах Больцано и Коши и оформившаяся у Вейерштрасса, предполагала строительство здания анализа на базе арифметики, т. е. на базе числа. Однако теории вещественных чисел в это время, т. е. во второй половине XIX в., все еще не было. С тех пор как Евклид в своей теории пропорций в книге V попытался определить статус несоизмеримых величин, никто не ощущал необходимости в определении числа, и это несмотря на постепенные расширения этого понятия.

В своих лекциях о дифференциальном исчислении в Берлинском университете Вейерштрасс, стремясь придать анализу строгое обоснование, первым заметил отсутствие логического обоснования у арифметики и попытался исправить это положение. Около 1863 г. он разработал теорию вещественных чисел, которая была опубликована в 1872 г. Коссаком по записям лекций Вейерштрасса.

Вейерштрасс исходил из множества положительных целых чисел и нуля, существование которых он принял на веру. Далее он рассмотрел «аликвотные части единицы» $1/n$, что позволило определить положительные рациональные числа как конечные линейные комбинации с целыми коэффициентами «аликвотных частей единицы» при условии, что для них определено отношение равенства (являющееся отношением эквивалентности).

Всякое рациональное число представляется *«агрегатом»* — конечным множеством единиц и аликвотных частей единицы. Так, $\{{}^1/_4, {}^1/_4, {}^1/_4, {}^1/_4\}$ является представлением числа 1, $\{{}^1/_7, {}^1/_7\}={}^2/_7$, $\{{}^3/_{10}, {}^1/_{10}, {}^1/_{10}, {}^1/_{10}\}={}^3/_5$ и т. д.

Следующим шагом Вейерштрасса было составление агрегатов с бесконечным числом элементов и введение для них отношения равенства на основе идеи включения. Согласно Вейерштрассу, вещественное число — это класс эквивалентности (по отношению эквивалентности, определенному введенным равенством) агрегатов, удовлетворяющих следующему условию конечности: «*Говорят, что число a имеет конечное значение, если существует число b, большее a и состоящее из конечного числа элементов*». Он показал, что элементарные арифметические действия

8. Канторова теория вещественных чисел

Г. Кантор строит вещественные числа исходя из рациональных чисел, которые он предполагал определенными. Центральным понятием является понятие *фундаментальной последовательности* $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$, т. е. последовательности рациональных чисел, удовлетворяющей критерию Коши: для любого положительного ε найдется такое целое N, что при всех $n \geqslant N$ и всех целых m выполняется неравенство $|x_{n+m} - x_n| \leqslant \varepsilon$. Фундаментальная последовательность «*имеет определенный предел b, где b — просто условный символ, связанный с последовательностью*».

Если $\{y_n\}_{n \geqslant 1}$ — вторая фундаментальная последовательность, имеющая определенный предел b', то могут представиться три случая:

существуют рациональное число $\alpha > 0$ и целое N, такие, что при всех $n \geqslant N$ имеет место неравенство $y_n - x_n \geqslant \alpha$;

существуют рациональное число $\alpha > 0$ и целое N, такие, что при всех $n \geqslant N$ имеет место неравенство $-\alpha \geqslant y_n - x_n$;

для всякого рационального числа $\alpha > 0$ существует целое N, такое, что при всех $n \geqslant N$ имеет место неравенство $|y_n - x_n| \leqslant \alpha$.

В первом случае $b' \geqslant b$, во втором случае $b \geqslant b'$, а в третьем b и b' эквивалентны. Тогда Кантор полагает $b = b'$, и это равенство определяет отношение эквивалентности на множестве фундаментальных последовательностей. Класс эквивалентности фундаментальных последовательностей и есть вещественное число порядка 1. Это определение включает рациональные числа: фундаментальная последовательность $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$, где x_n равно некоторому рациональному числу a при всех n, определяет рациональное число a (вещественное число порядка 0).

Вещественным числом порядка 2 Кантор называет класс эквивалентности фундаментальных последовательностей для вещественных чисел порядка 1, а затем показывает, что множество вещественных чисел порядка 2 — это снова $\mathbb{R}$, или, другими словами, что последовательность Коши вещественных чисел имеет в качестве предела вещественное число. Это важное свойство множества $\mathbb{R}$ на современном языке называется *полнотой*.

определены для этих новых чисел, которые образуют множество $\mathbb{R}^+$ положительных вещественных чисел.

Эта конструкция не была единственной: в 1872 г. были опубликованы две другие теории иррациональных чисел: теория Георга Кантора и Эдуарда Гейне (см. табл. 8) и теория Рихарда Дедекинда, построенная в 1858 г. и опубликованная в работе «Непрерывность и иррациональные числа» («Stetigkeit und irrationale Zahlen»). Им предшествовала конструкция Шарля Мере (1869 г.), близкая к канторовой.

«Создание» иррациональных чисел Дедекиндом

Как и в случае с Вейерштрассом, необходимость изложения перед студентами дифференциального и интегрального исчисления заставила Дедекинда (1831—1916) размышлять, «*пока он не нашел чисто арифметических и совершенно строгих обоснований принципов анализа бесконечно малых*». Дедекинд исходил из множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. В 1876 г. он писал: «*Я полагаю в качестве основы, по поводу которой, естественно, следует договориться, арифметику рациональных чисел, которая предполагается хорошо обоснованной, и ничего другого; я показываю в моей работе, что, не вмешивая посторонних элементов, можно обнаружить в области рациональных чисел некий феномен, который может быть использован для пополнения этой области однозначным построением иррациональных чисел*».

«Феномен», о котором говорит Дедекинд,— это сечение. Исходя из интуитивного геометрического представления о том, что точка M на прямой разбивает ее точки на два класса — класс точек, расположенных справа от M, и класс точек, расположенных слева от M, Дедекинд называет «*сечением*» (C_1, C_2) множества $\mathbb{Q}$ такое разбиение $\mathbb{Q}$ на два непустых и непересекающихся класса C_1 и C_2, что всякое число из первого класса C_1 строго меньше любого числа из второго класса C_2.

Сечения, определенные рациональным числом (например, (C_1, C_2), где C_1— множество рациональных чисел, меньших 7, а C_2— множество рациональных чисел, больших или равных 7), обладают следующим свойством: либо в классе C_1 существует наибольший элемент, либо в классе C_2 существует наименьший элемент (в вышеприведенном примере число 7). Обратно, сечение, обладающее этим свойством, определяет рациональное число.

Однако быстро выясняется, что есть и сечения, не обладающие этим свойством. Дедекинд приводит знаменитый пример: C_1 содержит все отрицательные рациональные числа и положительные рациональные числа, квадрат которых меньше 2, а C_2 — все остальные рациональные числа. Наибольший элемент в C_1 (или наименьший элемент в C_2) должен был бы удовлетворять условию $x^2=2$, что невозможно в $\mathbb{Q}$, и, значит, в C_1 нет наибольшего элемента (а в C_2 нет наименьшего элемента). Далее, Дедекинд пишет: «*мы создаем при помощи такого сечения новое иррациональное число* a, *которое вполне определено этим сечением. Мы скажем, что число* a *соответствует сечению* (C_1, C_2), *или что оно порождает это сечение*». В приведенном примере $a=\sqrt{2}$ соответствует сечению (C_1, C_2). «*Отныне каждому определенному сечению соответствует одно и только одно рациональное или иррациональное число*».

Дедекинд определил отношение порядка для сечений и доказал несколько свойств, делающих $\mathbb{R}$ линейно упорядоченным полем.

Затем он показал, что область вещественных чисел «нерасширяема», т. е. что повторение этой операции (которая позволила получить $\mathbb{R}$ из $\mathbb{Q}$) не дает ничего, кроме $\mathbb{R}$. Это свойство (в котором мы узнаем полноту $\mathbb{R}$ — см. табл. 8) можно выразить следующим образом: если C_1 и C_2 — два непустых непересекающихся подмножества $\mathbb{R}$, объединение которых равно $\mathbb{R}$, причем каждый элемент из C_2 строго больше любого элемента из C_1, то существует одно и только одно вещественное число, не большее никакого элемента из C_2 и не меньшее никакого элемента из C_1.

Дедекинд воспользовался этим свойством, чтобы охарактеризовать непрерывную (линейно упорядоченную) область величин: «*Если разбить все величины какой-то области, устроенной непрерывным образом, на два таких класса, что каждая величина первого класса меньше любой величины второго класса, то либо в первом классе существует наибольшая величина, либо во втором классе существует наименьшая величина*».

Исторически это было первое определение непрерывности; именно в этом проявилась необыкновенная самобытность Дедекинда.

Однако построение теории вещественных чисел, основанной на теории целых и рациональных чисел, было завершено лишь после аксиоматического определения множества $\mathbb{N}$, данного Ж. Пеано в 1889 г.

Эволюция математического понятия бесконечности, которая прослеживается на страницах данной главы, завершилась в рамках теории бесконечных множеств, с которой мы встретимся в следующей главе [1]).

[1]) Некоторые библиографические указания даны в конце гл. 6.

Глава 6

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ И РАЗВИТИЕ АНАЛИЗА

Идея *соотношения* между величинами так же стара, как и сама математика. Но каков был путь, который от очень туманного представления привел к современному теоретико-множественному понятию *функции — отображения*, которое каждому элементу одного множества ставит в соответствие элемент другого множества? И каковы были различные представления понятия функции — понятия, определяющего развитие анализа?

1. Античный период

Впервые идея функции зародилась в античности. Мы уже говорили о том, что вавилонские математики широко пользовались шестидесятеричными таблицами обратных величин, квадратных корней, кубов, кубических корней и некоторыми другими. Использовались таблицы и в астрономии, в частности при составлении эфемерид Солнца, Луны и планет.

В Древней Греции приписываемые пифагорейцам попытки определения простейших законов акустики весьма типичны для поисков количественной зависимости между различными физическими величинами, например между высотой звука, издаваемого колеблющейся струной, и длиной струны. Позднее, в александрийскую эпоху, с помощью геометрических теорем и правил интерполяции астрономы составили таблицы длин хорд кругов фиксированного радиуса, что эквивалентно таблицам синусов. Самая древняя из дошедших до нас таблиц такого рода находится в «Альмагесте» Птолемея.

Если рассматривать функцию как *соответствие* очень общего вида между некоторым числом значений, например представляющих время, и другими величинами, например угловыми положениями в системе планет, можно ли сказать, что у Птолемея или в таблицах вавилонских астрономов присутствует идея функции? Такое утверждение было бы по меньшей мере поспешным. Разумеется, некоторое сходство между античными табличными соответствиями и современной концепцией бросается в глаза. Но прежде чем в теории множеств интуитивная идея переменной величины свелась к идее множества заданных заранее постоянных величин, понадобилось еще, чтобы переменная величина и закон изменения были выделены как математические объекты. А это случилось лишь в XVII в.

Античные астрономические таблицы понимались как соотношения между дискретными конечными множествами постоянных величин, рассматриваемых изолированно, и имели в основном практическую цель выяснить их числовые значения.

Естественно подумать, что идея количественного изменения и идея местного движения, присутствующие в «Физике» Аристотеля, могли бы получить общее представление в более абстрактном понятии переменной величины. Но у греков они не были предметом математического исследования. Впрочем, греческие механика и астрономия на самом деле не вышли за рамки изучения равномерного движения.

Что же касается чисто кинематических идей, сыгравших важную роль в развитии понятия функциональной зависимости, они имеются, в частности, в определении архимедовой спирали или аполлониевой винтовой линии в цилиндре и т. п., но не с ними оперировали в дошедших до нас доказательствах свойств этих кривых. Архимед, например, обходил их при помощи метода исчерпывания, когда определял касательную к спирали.

Если рассматривать греческую математику в целом, то, как мы уже указывали, применявшиеся в ней методы определения и вычисления некоторых отдельных пределов, даже у Архимеда, не привели к явным формулировкам понятий последовательности, переменной, бесконечно малой и т. п. Надо признать, что в античной математике не было общей идеи функциональной зависимости.

Еще не полностью изученные арабские рукописи не позволяют оценить, какое развитие получил этот вопрос в арабской математике. Число используемых функций возросло, и, в частности, были введены тригонометрические линии. Методы исследования стали разнообразнее, таблицы были усовершенствованы и дополнены при помощи новых методов интерполяции. Мы уже указывали, что геометры-алгебраисты, в частности Шараф ад-Дин ат-Туси, продвинулись в изучении некоторых кривых 3-й степени и пытались определить их максимумы, используя выражения, аналогичные первой производной многочленов (см. гл. 3).

2. Оксфордская и Парижская школы

Говоря о процессе приобретения математикой зрелости, следует особо остановиться на школах натурфилософии Оксфорда и Парижа. В этих школах, которые процветали в XIV в., зародилось отношение к математике как специальному инструменту познания природных явлений.

Большой заслугой этих школ можно считать попытки найти количественное выражение некоторых качеств или явлений, таких, как теплота, плотность, скорость и т. д. Им сопоставляли «*степени* (или градусы) *интенсивности*», «непрерывно» изменявшиеся в некоторых пределах, и проявляли замечательное стремление свести эту интенсивность качеств и форм к некоторой шкале измеримых величин. Так, Николай Орем (1320—1382) писал: «*Всякая измеримая вещь, за исключением чисел, может мыслиться как непрерывная величина*».

У Роджера Бэкона (1214—1294) возникла идея представлять шкалу интенсивности, отвечающую некоторому качеству, в виде вертикальной линии. Но сложность заключалась именно в том, что на уровне придания законам численного выражения эти теоретики интенсивности форм могли производить вычисления лишь с целыми числами, а не с мерами. Ведь как и во времена древних греков, целые числа все еще рассматривались как составленные из единиц. Чтобы описать непрерывную шкалу измеримых величин, к которой они пришли интуитивно, они должны были бы строго придерживаться языка пропорций книги V «Начал» Евклида.

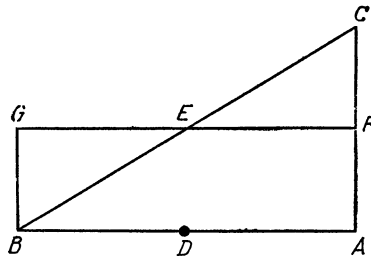
Так, Томас Брадвардин (1290—1349) в своем «Трактате о пропорциях» (1328 г.) искал удовлетворительное соотношение между скоростью движения, силой, его вызывающей, и сопротивлением, стремящимся его затормозить. Прежде всего он отклонил закон типа $V=F/R$ на том основании, что если сила равна или несколько меньше сопротивления, то движения не происходит, хотя V остается больше нуля. Он отверг также и $V_2/V_1=$ $=(F_2—R_2)—(F_1—R_1)$, и $V_2/V_1=(F_2—R_2)/(F_1—R_1)$, а предложил следующий закон: скорость следует пропорции силы к сопротивлению. Заметим, что со времен древних греков и до XVIII в. терминология, касавшаяся отношений, была, так сказать, в «логарифмической» связи с тем, что мы понимаем под отношением теперь. Например, если r_1— отношение A к B, а r_2— отношение B к C, то отношение A к C называлось суммой двух предыдущих отношений, тогда как для нас оно равно произведению r_1r_2. Согласно закону Брадвардина, при увеличении скорости в n раз отношение сила/сопротивление не умножалось на n, а возводилось в n-ю степень. В наше время это можно было бы записать в виде $nV=\log (F/R)^n$.

Оксфордская и Парижская школы разработали понятия движения (motus), скорости (latitudo motus или velocitadis), ускорения (latitudo acquisitionis latitudinis motus), мгновенной скорости и различали местное равномерное движение (единственно мыслимое в рамках аристотелевского учения) и «равномерно искаженное движение», т. е. равномерно ускоренное. Уильям Хейтсбери и Ричард Суайнсхед установили между 1330 и 1350 гг., что *«всякое качество, равномерно изменяющееся, соответствует своей средней степени»*.

В случае когда этим качеством является скорость, Николай Орем дал геометрическое доказательство этого результата: за всякое данное время движущееся тело проходит в равномерно ускоренном движении то же расстояние, что и второе тело, движущееся с постоянной скоростью, равной среднему арифметическому начальной и конечной скорости первого тела. Для этого он обратился к графическому представлению — одному из первых в истории — функционального соотношения, связывающего время и скорость (см. табл. 1).

Таким образом, это был важный в теоретическом отношении момент, знаменовавший начало подхода к зако-

1. Представление равномерно ускоренного движения. Николай Орем (между 1348 и 1362 гг.)



Он наносил время на горизонтальную линию AB (longitudo), а мгновенные скорости — параллельно перпендикуляру AC над соответствующими точками прямой AB.

Если D — середина AB, а F — середина AC, то площадь прямоугольника $AFGB$ измеряет расстояние, пройденное вторым движущимся телом, поскольку $DE \times AB$ есть произведение скорости на время.

Площадь треугольника BAC дает расстояние, пройденное первым движущимся телом. Но она равна площади $BAFG$.

нам природы как к законам функционального типа; при этом происходило взаимное проникновение математических теорий и кинематических соображений. В самом деле, как отметил Бурбаки, *«всякая кинематика основана на интуитивной идее величины, изменяющейся со временем, т. е. функции времени»*.

3. От изучения движений к исследованию траекторий

Но в конце концов, каково бы ни было значение этих натурфилософских школ, поистине обогащенная и расширенная интерпретация функциональной зависимости сложилась в начале XVII в.

В этом превращении, в ходе которого возобладало новое представление функциональной зависимости — представление с помощью *формулы*, а все прежние способы отошли на второй план, решающую роль сыграли два момента.

Первый — это создание буквенной символики в алгебре, что позволило, наконец, вслед за Виетом (1591 г.), записывать в сжатой и удобной форме алгебраическое выражение, включающее в себя неизвестные величины и произвольные коэффициенты. Хотя символика Виета претерпела многие поправки и изменения (Декарт, Ньютон, Лейбниц, позднее Эйлер и др.), она почти сразу сильно продвинула математическое исчисление.

Вторым моментом было новое представление о математике как об универсальном языке, позволяющем выражать физические реальности природы; эту мысль в сжатом виде сформулировал Галилей в своей работе «Пробирных дел мастер» (1623 г.): «*Величайшая книга... Вселенная... написана на языке математики*».

Действительно, в начале XVII в. формулировка законов Кеплера об эллиптических траекториях планет направила интерес тех, кто занимался математикой, к проблеме вычисления и исследования траекторий. Законы Кеплера, хотя они постепенно были приняты, рассматривались лишь как приближенные: в них не учитывались возмущения, вызванные влиянием планет друг на друга. Развитие астрономии имело также практические цели, связанные с мореплаванием: нужно было хорошо знать видимое движение Луны, уметь определять координаты и т. д. Другая очень важная область, которая сильно продвинулась благодаря Галилею — это исследование траекторий брошенных тел при движении к поверхности Земли, которая предполагалась неподвижной.

Приведем формулировку закона падения тел, данную в работе Галилея «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки»: «*Если тело, выйдя из состояния покоя, падает равномерно-ускоренно, то расстояния, проходимые им за определенные промежутки времени, относятся между собою, как квадраты времени*». Итак, отношение между расстоянием и временем выражено здесь на языке теории пропорций: рассматривается обобщенная область величин, которая объединяет в себе и временны́е и пространственные интервалы. Таким образом, это отношение определенно понимается как функциональная зависимость.

Тот факт, что изучение движений стало главной проблемой, интересующей ученых, привел к следующему результату: большинство функций, введенных в XVII в., сначала изучались как кривые, которые в свою очередь рассматривались как траектории движущихся точек.

4. Пример логарифмической функции

Остановимся подробнее на логарифмической функции. Это первая трансцендентная функция, если не считать тригонометрических линий, известных еще арабам; ее вводили многие математики, занятые астрономическими вычислениями. Она знаменовала собой переломный момент в различных представлениях понятия функции.

Соотношение между геометрической прогрессией, составленной из последовательных степеней некоторого члена (например, q, q^2, q^3, . . .), и арифметической прогрессией их показателей было известно еще во времена Архимеда. Оно было заново открыто Штифелем в 1544 г., который также отметил, что если перемножить два члена геометрической прогрессии, то показатель произведения будет равен сумме соответствующих членов арифметической прогрессии.

Джон Напьер (1550—1617), он же Непер, воспользовался этой идеей, чтобы упростить тригонометрические вычисления. В работах, вышедших в 1614 и 1619 гг., он дал определение логарифма синуса. Для этого сравнивались два прямолинейных движения: точки M, скорость которой предполагалась пропорциональной расстоянию, отделяющему ее от фиксированной точки Z, и точки M', перемещающейся равномерно. В этом случае расстояние, пройденное точкой M', равно логарифму в смысле Непера расстояния между точками M и Z (см. табл. 2).

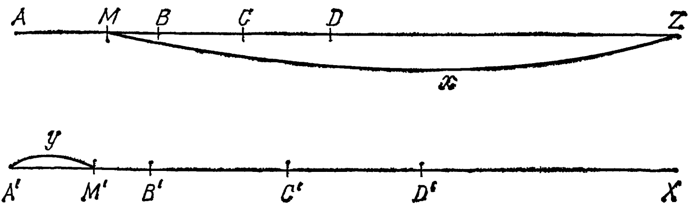
Он писал: «*Логарифмом всякого синуса называется число, определяющее с наибольшим приближением линию, возрастающую равномерно, между тем как линия полного синуса сокращается пропорционально до величины данного синуса, причем оба движения синхронны и вначале имеют одинаковую скорость*». (Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, 1614.)

2. Логарифм Непера

Пусть M и M' — два движущихся тела, которые перемещаются по параллельным траекториям: отрезку AZ и прямой $A'X$.

Скорость тела M пропорциональна его расстоянию до точки Z с коэффициентом пропорциональности k.

Если предположить, что за малый отрезок времени t расстояния AB, BC, CD и т. д. пробегаются с постоянной скоростью на каждом из этих отрезков,



то $DZ = CZ - CD = CZ - kCZt = (1-kt)\,CZ$.

Точно так же

$$CZ = (1-kt)\,BZ = (1-kt)^2\,AZ,$$

$$DZ = (1-kt)^3\,AZ.$$

Получается геометрическая прогрессия со знаменателем $1-kt$.

В момент начала движения тела M по $A'X$ начинает двигаться тело M' с постоянной скоростью, равной начальной скорости тела M, т. е. $v = k \cdot AZ$.

Расстояния $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$, проходимые телом M' за интервалы времени t, $2t$, $3t$, ..., составляют, таким образом, арифметическую прогрессию

$$A'B' = k\,(AZ \cdot t), \qquad A'C' = 2k\,(AZ \cdot t) \qquad \text{и т. д.}$$

По Неперу $A'B'$ равно логарифму BZ, а $A'C'$ — логарифму CZ.

В обозначениях, использованных на рисунке, y = логарифм x. Непер брал такие значения:

$$k = 1, \quad AZ = 10^7 \quad \text{и} \quad A'B' = 1, \quad A'C' = 2, \quad A'D' = 3, \; \ldots .$$

Он получил следующий результат: логарифмы синусов, находящихся в убывающей геометрической прогрессии, начиная с полного синуса (равного 10^7), находятся в арифметической прогрессии, возрастающей от нуля.

Здесь также рассуждения ведутся в терминах евклидовых отношений, и вначале логарифм был, собственно говоря, целым или дробным числом, потому что вычисления в те времена производились лишь с такими числами. Но в действительности он является наиболее близкой мерой непрерывной величины, представленной здесь «линией». Основной заслугой Непера и было то, что благодаря глубокой интуиции он осознал непрерывность этой линии.

Чтобы еще более упростить вычисления, Бриггс подсказал Неперу за основание логарифма выбрать число 10 и составил таблицу этих новых логарифмов, очень близкую к современной таблице десятичных логарифмов (1615 г.).

Независимо от Непера швейцарец Бюрги, работавший в Праге ассистентом Кеплера, вычислил между 1603 и 1611 гг. таблицу антилогарифмов, напечатанную в Праге в 1620 г. Таблицы логарифмов, насущно необходимые астрономам и вычислителям, заслужили немедленное признание.

Таким образом, логарифмическая кривая была открыта сравнительно древними методами: с помощью таблиц соответствия и непосредственных кинематических соображений. Сама по себе функция Log x, определенная для всех x, пока еще не появилась. Не был придуман и символ для ее обозначения, который позволил бы ей войти в новую алгебру Виета.

Только через 20 лет Ферма и Декарт при применении этой новой алгебры к геометрии ввели аналитический метод исследования функций, открывший новую эру в математике.

5. Декарт: геометрические кривые и алгебраические функции

Основной целью Декарта, изложенной им в «Геометрии» (1637 г.), было сведение решения всех алгебраических задач, являющихся задачами решения уравнений, к нескольким стандартным процедурам построения их вещественных корней, являющихся координатами точек пересечения соответствующих плоских кривых возможно более низкой степени.

Декарт различал геометрические кривые и механические кривые и в своих исследованиях ограничивался *«геометрическими кривыми»*, т. е. такими, у которых координаты x и y связаны между собой алгебраическим уравнением $P(x, y)=0$ (в наше время их называют алгебраическими кривыми).

Декарт писал по этому поводу: «*Придавая линии y последовательно бесконечное количество различных значений, мы найдем также бесконечное количество значений x и, таким образом, получим бесконечное количество различных точек, вроде той, которая обозначена C; они опишут требуемую кривую линию*».

В этом отрывке, несомненно, впервые столь ясно высказана мысль о том, что *уравнение*, связывающее y и x, есть способ введения отношения функциональной зависимости между переменными величинами, так что одна из них позволяет определить другую.

Негеометрические кривые не поддаются изучению аналитическими методами Декарта. Он не умел исследовать их систематически и не включил в свою «Геометрию», что помешало ему постичь всю глубину понятия функции. Действительно, как показал Ж. Вильемин, «*функциональным* [для Декарта] *являлось отношение, позволяющее данной длине поставить в соответствие другую длину, полученную из первой конечным числом алгебраических операций. Только такое соотношение, согласно Декарту, допускает построение, при помощи которого можно получить все без исключения точки кривой. Эта возможность обеспечивает соединение точек и интуитивную непрерывность этой кривой, не требуя введения соображений, связанных с бесконечностью*».

Эта необходимость получения одной длины из другой конечным числом алгебраических операций обусловливалась декартовой теорией точных пропорций, связанной с его метафизикой. Здесь (в который раз!) можно убедиться, сколь велико было значение книги V Евклида и вообще греческой математики. Трансцендентные кривые не попадали под это точное определение, а соотношение, связывающее координаты точек таких кривых, Декарт не относил к функциональным.

Тем не менее, побуждаемый вызовом своих научных противников (Ферма, Роберваля, Флоримона де Бона и др.), Декарт иногда изобретал новые способы для исследования трансцендентных кривых, исключенных им из «Геометрии».

Именно так, в ответ на задачу, поставленную Флоримоном де Боном, возникла декартова теория логарифмической кривой, использующая метод, очень близкий к методу Непера. Но, поскольку кривая была *«механическая»* и не входила в его систему, Декарт не дал ее уравнения.

Введение функциональной зависимости при помощи уравнения составляло очень важный этап в развитии математики. Этому методу представления функций суждено было сразу же покинуть свой «отчий дом» — аналитическую геометрию и распространиться в другие области математики, и прежде всего в анализ бесконечно малых.

6. Бесконечные алгоритмы

Мысль Декарта ограничить понятие функции лишь алгебраическими выражениями недолго удерживала математиков следующего поколения (Дж. Валлиса, Н. Меркатора, Дж. Грегори, И. Ньютона и др.) от важного открытия — разложения функций в бесконечные степенные ряды.

Николай Меркатор пустил в ход этот метод в своей работе «Logarithmotechnia» в 1668 г. Он нашел площадь гиперболы, разложив сначала в геометрический ряд $1/(1+x)$, а затем почленно проинтегрировав его по методу Валлиса. Метод имел ошеломляющий успех и позволил отличиться очень многим математикам. Пальма первенства здесь, несомненно, принадлежит И. Ньютону, который нашел ряды для рациональных степеней $(1+x)^{-1}$, для функций $\sin x$, $\cos x$, аналогичные ряды для дуг эллипса и т. д. Ньютон исследовал также обратные тригонометрические функции и нашел их разложения в ряды. Так благодаря квадратурам и суммированию рядов были открыты и изучены новые трансцендентные функции.

Лучшее по тому времени явное определение понятия функции дал Джеймс Грегори в 1667 г. («Vera circuli et hyperbolae quadratura»). Он определил функцию как величину, полученную из других величин с помощью последовательности алгебраических операций или, как он говорит, любой иной мыслимой операции. Но из контекста ясно, что к пяти алгебраическим операциям (сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корня) следует добавить шестую операцию, определяемую примерно как переход к пределу.

Подобная мысль о возможности обращения к *бесконечным* алгоритмам для определения функции, и в особенности представление функции степенным рядом, оказались источником расширения понятия функции.

7. Новый математический объект: закон изменения

Методы исчисления бесконечно малых были созданы в процессе решения механических и геометрических задач, волновавших умы с начала века, и новые концепции функции и переменной величины не кажутся слишком далекими от более ранних.

Ньютон

Ньютон выразил две основные задачи исчисления бесконечно малых непосредственно в механических терминах [1]):

«1. *Длина проходимого пути постоянно (т. е. в каждый момент времени) дана, требуется найти скорость движения в предложенное время.*» (Дифференцирование.)

«2. *Скорость движения постоянно дана; требуется найти длину пройденного в предложенное время пути.*» (Интегрирование дифференциальных уравнений и функций.)

В 1797 г. Лагранж писал по этому поводу: «*Но, с одной стороны, ввести движение в исчисление, предметом которого были только алгебраические величины,— это значит ввести в него чуждую идею, которая заставляет рассматривать эти величины как линии, проходимые движущимся телом...*» В течение всего XVII в. идея

---

[1]) «Метод флюксий и бесконечные ряды». Текст приводится по изданию: Ньютон И. Математические работы. Пер. с лат., вступительная статья и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского.— М.— Л.: ОНТИ, 1937.— *Прим. перев.*

движения была не только не чуждой, но самой «ходовой» идеей, вокруг которой происходило уточнение понятий анализа. Как и его учитель Барроу, Ньютон в качестве универсального аргумента избрал время в следующем смысле: «*Но так как мы здесь привлекаем к рассмотрению время лишь в той мере, в какой оно выражается и измеряется равномерным местным движением, и так как, кроме того, сравнивать друг с другом можно только величины одного рода, а также скорости, с которыми они возрастают или убывают, то я в нижеследующем рассматриваю не время как таковое, но предполагаю, что одна из предложенных величин, однородная с другими, возрастает благодаря равномерному течению, а все остальные отнесены к ней как ко времени. Поэтому по аналогии за этой величиной не без основания можно сохранить название времени.*» (Там же.)

Иными словами, Ньютон интерпретировал все переменные x, y, v и т. д. как «*флюентные* (*текущие*) *величины*», имеющие некоторые скорости изменения. Далее он разделил флюентные величины на одну «*соотнесенную величину*» — это наша независимая переменная, которую можно уподобить времени,— и «*отнесенные величины*»: «*Можно представить себе, что соотнесенная величина есть время или, лучше, какая-либо равномерно текущая величина, с помощью которой выражается и измеряется время, а другая, именно отнесенная, величина есть пространство, проходимое за это время вещью или точкой, обладающей некоторым ускоренным или замедленным движением*». (Там же).

Если x — соотнесенная переменная, а y — отнесенная переменная, то функциональная зависимость y от x является априори весьма общей, ибо описывает абсолютно произвольное движение. Но, поскольку основные понятия были введены при помощи кинематических соображений, метод флюксий был развит для флюент, определенных аналитически — либо в конечном виде, либо как сумма бесконечных степенных рядов.

Лейбниц

Что касается Лейбница, то он разработал основные понятия дифференциального и интегрального исчисления исходя из геометрии кривых (см. гл. 5). Именно в этой области впервые появился термин «функция» — в рукописи 1673 г., оставшейся неизданной, под названием «*Обратный метод касательных или* [рассуждения] *по поводу функций*». В ней Лейбниц использовал слово *соотношение* (relatio) между координатами, а при решении обратной задачи, в которой требовалось определить координаты, исходя из заданного свойства касательных к кривой, он писал: «*Я называю функциями всякие части прямых линий, которые получают, проводя бесконечные прямые, соответствующие неподвижной точке и точкам кривой, каковы: абсцисса, ордината, хорда, касательная, нормаль, подкасательная, поднормаль... и бесконечное множество других, какие можно себе представить и построение которых более сложно...*»

В действительности Лейбниц называл функцией любую линию (длина которой зависит от положения некоторой точки на данной кривой), которая в общепринятом смысле слова «выполняет свою *функцию*» в фигуре: иначе говоря, играет роль касательной, нормали, подкасательной и т. д. и которая таким образом «функционирует».

Подобное соглашение о смысле слова функция было принято и в некоторых других его статьях, опубликованных в 1692 и 1694 гг., и в том же смысле это слово появилось в 1697 г. в работе Иоганна Бернулли (1667—1748).

Может показаться, что такое определение Лейбница не отражает сущности понятия, и, действительно, оно не охватило всей полноты математического наследия XVII в. И все же контекст, в котором оно появилось, заслуживает разъяснения: решить задачу, обратную к нахождению касательной,— это значит найти кривую, которая теперь необязательно входит в *данные* задачи, как это было в аналитической геометрии до исчисления бесконечно малых, а сама является *неизвестной*. Но в аналитической геометрии линия или кривая есть синоним «одновременного изменения». Таким образом, в математику вошла задача нахождения неизвестных законов изменения, называемых в наше время функциями.

С другой стороны, дальнейшее изучение, в частности Ньютоном, физических законов природы, и в первую очередь законов движения, лишь подтвердило правильность этой перемены ориентации: в этой области тоже нельзя было оставлять единственным предметом рассмотрения только определенные числа либо их геометрические эквиваленты (точка, прямая, окружность и т. д.).

Положение, создавшееся после изобретения исчисления бесконечно малых, Ж. Адамар охарактеризовал следующим образом: «*Одним словом, число перестало быть главным математическим объектом; им стал закон изменения, функция. Математика не только обогатилась благодаря новым методам, был преобразован сам ее предмет*».

И наконец, в ходе переписки между Лейбницем и Иоганном Бернулли последний дал в 1718 г. следующее определение функции: «*Функцией переменной величины здесь называется количество, составленное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных*». Он предложил обозначение φx.

Таким образом, была дописана еще одна страница в истории этого понятия.

8. Алгебраический анализ в XVIII в.

Рождение исчисления бесконечно малых было встречено с большим энтузиазмом. Вот что пишет по этому поводу Лопиталь в предисловии к своему трактату «Анализ бесконечно малых»: «*Область применения этого исчисления колоссальна: оно годится как для механических, так и для геометрических кривых; его нисколько не смущают знаки радикала, оказавшиеся часто даже очень удобными; его можно применить к какому угодно количеству неопределенных; для него представляется одинаково легким сравнение бесконечно малых всех родов. Это дает начало бесконечному множеству поразительных открытий...*»

Хотя основные принципы и понятия нового исчисления еще не прояснились и обращение с бесконечно малыми вызывало много споров, это исчисление уже продемонстрировало эффективность своих методов. Оно помогло росту новых ветвей математики, что значительно расширило в XVIII в. область анализа.

Началом XVIII в. в математике можно считать появление около 1730 г. первых работ Эйлера (1707—1783), этого титана XVIII в., и Даниила Бернулли (1700—1782). В истории математики наступила новая эпоха: ученые стали в меньшей степени философами, чем во времена Декарта или Лейбница, в науке усилилась специализация.

Не сумев оценить понятие предела и проблемы, вызванные использованием бесконечных алгоритмов, Эйлер, как и другие математики XVIII в., рассматривал исчисление бесконечно малых как простое расширение алгебры: к давно известным алгебраическим операциям добавились две новые основные операции — дифференцирование и интегрирование, и отличать анализ от алгебры нет нужды. Чтобы освободить исчисление бесконечно малых от геометрии и от всяких метафизических соображений по поводу бесконечности, Эйлер задался целью положить в основу нового исчисления арифметику и алгебру.

В своем первом объемистом руководстве «Введение в анализ бесконечных» («Introductio in analysin infinitorum»), вышедшем в 1748 г., Эйлер излагает предварительные сведения из алгебры, необходимые, по его мнению, для изучения исчисления бесконечно малых, которому посвящены два других его трактата. Во «Введении» Эйлер исследовал свойства элементарных функций путем систематического привлечения средств алгебры. Он применял алгебраические выкладки к бесконечным выражениям (рядам, бесконечным произведениям, непрерывным дробям и т. д.), рассматривая это как чисто *формальные* действия по обычным алгебраическим законам и нисколько не заботясь о сходимости. Эйлер обращался с рядами как с многочленами, имеющими бесконечное число членов, а бесконечные произведения выводил путем разложения на линейные множители по аналогии с разложением многочленов. Многие вычисления, которые в наши дни проводятся в алгебре формальных рядов, восходят к Эйлеру. Именно это исследование неограниченных алгоритмов над вещественными и комплексными числами, а также специальные методы, позволяющие представлять при помощи этих алгоритмов элементарные функции, называются *алгебраическим анализом*; они стали центральной темой изысканий математиков XVIII в.

Благодаря невероятной изобретательности и уверенному владению техническими приемами Эйлер получил обильный урожай разнообразных новых результатов. Прежде чем мы подробнее познакомимся с «Введением» и поймем, какое место занимало понятие функции в математике Эйлера, сделаем небольшое отступление и расскажем об одном эпизоде в развитии алгебраического анализа, который выявил один аспект понятия функции, до тех пор остававшийся скрытым.

9. Феномен «многозначных» функций

В период 1712—1713 гг. завязался памятный эпистолярный спор между Лейбницем и Иоганном Бернулли по поводу логарифмов отрицательных и мнимых чисел.

Комплексные числа, введенные итальянскими алгебраистами для получения некоторых вещественных корней алгебраических уравнений, все увереннее использовались в выкладках на протяжении всего XVII в. Благодаря *«принципу перманентности»*, сформулированному Альбером Жираром в работе «Новое изобретение в алгебре» (1629 г.), к комплексным числам применялись алгебраические операции и тождества, полученные для вещественных чисел, но сами комплексные числа рассматривались как промежуточные этапы вычислений и не должны были фигурировать в окончательном ответе. Затем и при алгебраических выкладках с бесконечными рядами стали вместо вещественного x подставлять комплексное z.

После признания функции $\log x$ не возникало сомнений и в существовании функции $\log z$, удовлетворяющей равенству $e^{\log z}=z$, функциональному уравнению для логарифма ($\log zz'=\log z+\log z'$) и дифференциальному уравнению

$$d\log z=\frac{dz}{z}.$$

Но определение *«значений»* логарифмов от -1 и i приводило к неразрешимым противоречиям.

И. Бернулли отстаивал точку зрения, что $\log(-x)=\log x$ и, следовательно, $\log(-1)=0$; при этом он опирался на то, что

1) дифференциалы $\frac{-dx}{-x}$ и $\frac{dx}{x}$ этих функций равны или

2) поскольку $(-x)^2=x^2$, то $2\log(-x)=2\log x$, а потому равны и половины этих выражений.

Лейбниц, со своей стороны, утверждал, что логарифмы всех отрицательных чисел и «*тем более логарифмы мнимых чисел*» являются мнимыми; один из его доводов состоял в том, что он записывал ряд [1]) для $\log(1+x)$ при $x=-2$, а именно

$$\log(-1)=-2-\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}-\ldots.$$

Этот ряд расходящийся и, следовательно, не имеет вещественной суммы, поэтому Лейбниц пришел к естественному заключению, что его сумма представляет мнимое число.

Это несогласие по такому важному вопросу между двумя крупнейшими математиками того времени вызвало чувство тревоги и недоверия. Эти трудности и противоречия были разрешены в 1749 г. Эйлером, который объяснил, что надо отказаться от представления об *однозначности* логарифма и считать, что всякое число имеет бесконечно много логарифмов. Для всякого положительного вещественного числа имеется бесконечно много комплексных логарифмов, лишь один из которых веществен, вот почему это явление так долго оставалось скрытым.

Точнее, если z — комплексное число и записывается в виде

$$z=r(\cos t+i\sin t),$$

то имеется общее решение

$$\log z=\log r+it+2k\pi i,$$

где $\log r$ — обычный логарифм положительного числа r. При положительном вещественном z имеем $t=0$ и $\log z=$ $=\log r+2k\pi i$.

Если условиться называть логарифмом от z всякое полученное выше число, то функциональное логарифми-

---

[1]) $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots.$

ческое уравнение имеет место лишь при подходящем выборе значений логарифма.

Хотя современный читатель нашел бы мемуар Эйлера вполне понятным, математикам XVIII в. было очень трудно смириться с *многозначностью* логарифма. Отметим, что в наше время под *функциями* понимаются лишь *однозначные* функции

10. «Введение в анализ бесконечных» Эйлера

«Введение» — это первый трактат, в котором в основу математических построений положено понятие функции. Ему посвящены первые главы этой работы.

Эйлер определяет «*функцию переменного количества*» как «*аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств*». Слово «*аналитическое*» больше не уточняется. Действительно, для Эйлера функция — это произвольная комбинация операций из употреблявшихся в его время и применимых к числам; к ним относились классические операции алгебры, возведение в степень, логарифмирование, переход от дуги к ее тригонометрическим линиям и т. д.; некоторые из этих операций предполагались повторенными неограниченное число раз. Таким образом, именно на способе составления аналитических выражений Эйлер основывает свою классификацию функций (см. табл. 3). Он различает функции по трем главным признакам: алгебраические — трансцендентные, однозначные — многозначные, явные — неявные.

Первый признак самый важный: «*Прежде всего я разделил их на алгебраические и трансцендентные. Первые составлены из комбинаций переменных количеств при помощи обычных алгебраических операций, а вторые связаны с другими операциями либо составлены из тех же комбинаций, что и предыдущие, но повторенных бесконечное число раз...*»

Способ Эйлера определения трансцендентных функций слишком расплывчат и неполон, и он не был принят в математике. Изучение разложения функций в бесконечные ряды показало, что общее определение трансцендентности можно сформулировать только в отрица-

3. Формальная классификация функций по Эйлеру

- Алгебраические функции (алгебраические операции плюс общее решение алгебраических уравнений)
  - рациональные (4 арифметических действия)
    - целые (многочлены)
    - дробные (рациональные дроби)
  - иррациональные (4 арифметических действия плюс извлечение корней)
    - явные
    - неявные
- Трансцендентные функции (тригонометрические, логарифмические, показательные, степенные с иррациональным показателем и некоторые интегралы)

тельном виде: функция трансцендентна в некотором интервале, если она не является алгебраической в этом интервале; заменить это определение более прямым невозможно. Действительно, существуют аналитические в смысле Эйлера функции [1]), которые в одних интервалах изменения x являются алгебраическими, а в других — трансцендентными. Пример:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2(n+1)}+\log x^2+1}{x^{2n}+1};$$

имеем

$$\begin{aligned} f(x)&=\log x^2+1 &&\text{при}\quad |x|<1,\\ f(x)&=1 &&\text{при}\quad x=\pm 1,\\ f(x)&=x^2 &&\text{при}\quad |x|>1. \end{aligned}$$

Наконец, некоторые выражения, полученные бесконечным повторением четырех арифметических действий, являются тем не менее алгебраическими и даже иногда

[1]) Вряд ли Эйлер признал бы функцию, определенную через предел, аналитической в его смысле.— *Прим. ред.*

рациональными. Таким образом, всегда надо еще *доказывать*, что полученная таким способом функция является трансцендентной. Аналитики XIX в. (Эйзенштейн, Гейне и др.) установили признаки, по которым можно определить, имеет ли данный сходящийся степенной ряд в качестве суммы трансцендентную или алгебраическую функцию.

Заметим, что если функциональная зависимость между x и y задается алгебраическим уравнением $f(x, y)=0$, где f — многочлен степени n по y, то Эйлер называет y многозначной неявной функцией от x. Впрочем, он полагал, что лишь недостаточное развитие алгебры не позволяет превратить всякую неявную алгебраическую функцию в явную при помощи элементарных алгебраических операций. Однако из работ Абеля и Галуа стало известно, что не каждое алгебраическое уравнение разрешимо в радикалах.

Функции, рассмотренные во «Введении», т. е. определенные одним конечным или бесконечным аналитическим выражением, были названы Эйлером, а вслед за ним и другими математиками XVIII в., *«непрерывными функциями»*. Основываясь на опыте рассмотренных им функций, Эйлер полагал, что каждая функция допускает разложение в бесконечный ряд по целым степеням, за исключением, быть может, изолированных точек, что, впрочем, верно для функций, которые употреблялись в то время. Не имея средств для доказательства этого результата, он писал: «*Но, для большей общности, кроме степеней z, имеющих положительные целые показатели, следует допустить и произвольные показатели. Так не останется никакого сомнения, что любая функция от z может быть разложена в бесконечный ряд вида $Az^{\alpha}+$ $+Bz^{\beta}+Cz^{\gamma}+Dz^{\delta}+\ldots$, где показатели α, β, γ, δ и т. д. являются произвольными числами*».

Затем Эйлер рассматривает приложения понятия функции в геометрии (книга II «Введения»). Он вводит также *«смешанные»* или *«неправильные»* функции, которые требуют различных аналитических выражений в различных областях. Таким образом, *«непрерывность»* у Эйлера означает незыблемый характер формулы, определяющей функцию для всех значений переменной (см. табл. 4).

4. Непрерывность по Эйлеру

«Непрерывная» по Эйлеру функция (одно аналитическое выражение)	«Прерывная» (или смешанная) по Эйлеру функция (два или несколько аналитических выражений)

11. Уравнение колебаний струны

На самом деле Эйлер обладал настолько глубоким математическим мышлением и настолько богатым практическим опытом, что вскоре вышел за рамки им же созданной классификации и обобщил понятие функции. Среди новых трансцендентных функций, исследованных Эйлером и другими математиками (Даниил Бернулли, Стирлинг, Гольдбах, Фаньяно и др.), назовем гамма-функцию, появившуюся в одной задаче интерполяции, где требовалось придать смысл выражению $n!$ при нецелом [1]) n, эллиптические интегралы, определенные как первообразные иррациональных функций, и т. д.

Но то, что действительно заставило Эйлера пересмотреть свое формальное определение функций, пришло из физики. Имеется в виду задача о колебаниях струны, решить которую пытались Эйлер, Д. Бернулли, Даламбер, а чуть позже Лагранж. Даламбер первым нашел ее решение, которое сводится к интегрированию уравнения с частными производными

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

где α — постоянная. Решение содержало две произвольные функции, подчиненные некоторым ограничениям

[1]) При целом n через $n!$ обозначается произведение $n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1$.

(1747 г.). Пытаясь найти *все* решения этого уравнения с частными производными, Эйлер ввел функции, зависящие от переменной так, как ордината точки плоской кривой, свободно проведенной произвольным образом, зависит от абсциссы этой точки. Эйлер называет такие произвольные функции *«механическими»* и указывает, что они соответствуют *«начертанным свободным движением руки»* кривым. Отметим, что эта терминология не совпадает с терминологией Декарта, который называл *«механическими»* трансцендентные кривые.

Позднее Даниил Бернулли, вернувшись к этой задаче, утверждает, что для рассматриваемого уравнения в частных производных с заданными начальными и граничными условиями всегда можно подобрать удовлетворяющий ему тригонометрический ряд, т. е. выражение вида $a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots + \frac{b_0}{2} + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \ldots$. У него возникла гениальная идея *суперпозиции*, согласно которой самое общее колебание струны разлагается на составляющие его *«собственные колебания»*,— поэтому и происходит разложение в ряд.

При сравнении решения Д. Бернулли и решения Эйлера напрашивается вывод, что произвольная механическая в смысле Эйлера функция допускает представление тригонометрическим рядом. Следовательно, это должно выполняться и для его *«прерывных кривых»*, составленных из примыкающих друг к другу дуг различных кривых. Но эта идея представления произвольной заданной кривой периодическим выражением отпугивала геометров XVIII в., которые скорее сочли, что решение Даниила Бернулли было менее общим, чем решение Эйлера. Прошло еще около пятидесяти лет, прежде чем эта тема, ставшая одной из главных в анализе XIX в., получила новое освещение.

12. Взлет исчисления функций

О том, что, как отмечал Адамар, главным математическим объектом стала функция, а не число, свидетельствует также имеющее большое значение развитие в XVIII в. теории дифференциальных уравнений и вариационного исчисления, на котором мы не можем здесь подробно остановиться.

В самом деле, дифференциальные уравнения — это, по существу, аналоги обычных алгебраических уравнений для определения неизвестных чисел. Однако на этот раз к неизвестной функции применены основные операции исчисления бесконечно малых, и в первую очередь дифференцирование, и результат этих операций должен иметь заданное значение. Эта эволюция, апостериори вполне логичная, была стимулирована изучением ряда вопросов, возникших в механике (условия равновесия, теория деформируемых сред, уравнения движения, принцип наименьшего действия и т. д.), которое привело к обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям с частными производными, а также к задачам на максимумы и минимумы величин, зависящих от произвольных функций. Последние задачи стали предметом вариационного исчисления. Самая древняя задача, которую можно отнести к вариационному исчислению, формулируется следующим образом: ограничить веревкой заданной длины участок земли наибольшей возможной площади. Неизвестным в этой задаче является уже не число, а форма кривой, которую должна принять веревка (решением является окружность).

Итак, Эйлер, а за ним и другие геометры XVIII в. отказались от языка, выбора тем и устройства математики предыдущих веков и в фундамент ее здания заложили понятие функции. После Эйлера порядок изложения основных понятий анализа стал приблизительно таким, какой принят в наше время: краткое напоминание начал алгебры и свойств чисел, исследование функций, последовательностей, рядов, затем дифференциальное и интегральное исчисление и только после этого приложения к геометрии, к механике и т. д. Произошло полное изменение точки зрения по сравнению с XVII в.

Такую же формальную позицию, как у Эйлера, мы находим и у Лагранжа, который сделал попытку дать математической науке строгое обоснование, систематизируя всю практику алгебраического анализа XVIII в. Эта попытка была основана на теории разложения функций в степенные ряды (см. также гл. 5). Под функцией Лагранж по-прежнему понимал «непрерывную функцию» в смысле Эйлера. Но в то время как его предшественники считали существование разложения функции в степенной ряд экспериментальным фактом и не подвергали его сомнению, Лагранж был более *догматичным* и хотел получить априорное доказательство существования, которое годилось бы для функций самого общего вида. Предпринятый им демарш не мог увенчаться успехом, поскольку для этого требовалось обосновать сходимость рядов, а Лагранж с самого начала исключил из своей теории понятие предела. Тема функций, разложимых в степенные ряды, разрабатывалась в течение всего XIX в. и, претерпев глубокие изменения, стала составной частью исследований Мере и Вейерштрасса. С аналогичными препятствиями Лагранж столкнулся в связи с задачей о колебаниях струны; он сомневался в возможности разложить ее решение в тригонометрический ряд. В это последнее десятилетие XVIII в. математики пессимистически смотрели на будущее своей науки. Лагранж писал, что *«остается мало способов добиться большого прогресса в анализе в том состоянии, в котором он сейчас находится»*.

Итак, формальная и алгебраическая концепция функции, которая долгое время стимулировала развитие анализа, превратилась теперь в *тормозящий фактор*. Новый подъем анализа произошел благодаря работам математиков следующего поколения. Они шли в двух основных направлениях, которые, впрочем, не были совершенно независимыми. К первому относились работы Гаусса, Коши, Больцано, Абеля; для них характерен новый подход к строгости и к основаниям, что привело к полному выяснению основных понятий анализа как самостоятельной области математики: бесконечно малого, предела, непрерывности, сходимости и т. д. Ко второму направлению относились работы Фурье, Дирихле, Римана, источником которых были задачи физики и представление функций тригонометрическими рядами.

13. Стремление к строгости

Одной из причин стремления к строгости была преподавательская деятельность математиков XIX в. В самом деле, длительный процесс становления, за ходом которого мы смогли проследить на примере понятий предела, функции, а также практики алгебраического анализа, вступил в начале XIX в. в стадию зрелости. Желание подвести под математику прочный фундамент было всеобщим. Особенно живо оно проявлялось в отношении употребления бесконечных рядов. Требовалось корректно определить понятие числовой последовательности, стремящейся к пределу, понятие сходящегося ряда.

Этой теме были посвящены многочисленные работы Гаусса, Коши, Больцано и Абеля. В 1813 г. Гаусс опубликовал большой мемуар, посвященный гипергеометрическому ряду — степенному ряду, зависящему от трех параметров. Это была первая работа, в которой с такой тщательностью рассматривались условия сходимости ряда. В 1821 г. вышел «Курс анализа», прочитанный Коши в Политехнической школе. Он замечателен своей строгостью, ясностью и изяществом стиля. Во введении Коши выступает против формального подхода Эйлера и Лагранжа и пишет: «*Что касается методов, то я пытался придать им всю строгость, требуемую в геометрии, с тем, чтобы никогда не прибегать к доводам, исходящим из общности алгебры*». Чуть дальше: «*...я должен был допустить многие предложения, которые, быть может, сперва покажутся несколько жесткими. Например, ... что расходящийся ряд не имеет суммы... Так, прежде чем приступить к суммированию каких-либо рядов, я должен был рассмотреть, в каких случаях ряды можно суммировать, или, другими словами, каковы условия их сходимости; и в этом вопросе я установил общие правила, которые, на мой взгляд, заслуживают некоторого внимания*». В книге содержалось систематическое исследование сходимости рядов, вывод *признаков сходимости*, проводились различия между простой и абсолютной сходимостью и т. д.

Абель также заявил, что «*расходящиеся ряды являются изобретением дьявола, и осмеливаться основывать на них малейшее доказательство позорно. Из них при желании можно извлечь все что угодно, и именно они породили столько неудач и парадоксов*» (1826 г.). Он опубликовал важный мемуар о биномиальном ряде с общим членом $[m(m-1)\dots(m-n+1)x^n]/n!$ и исследовал его для вещественных и комплексных значений переменной x при комплексном параметре m.

У Коши и Больцано можно найти определение *непрерывности* (однозначной) функции на отрезке, близкое к современному. Вот определение Коши: «...*функция* $f(x)$ *остается непрерывной относительно* x *между данными пределами, если между этими пределами бесконечно малое приращение переменной порождает всегда бесконечно малое приращение самой функции*». Определение Больцано еще точнее: «...*разность* $f(x+\omega)-f(x)$ *может быть сделана меньше, чем любая заданная величина, если можно принять* ω *столь малым, сколько мы хотим*». Это очень важные определения, потому что в них непрерывность выступает как *локальное свойство*; тем самым происходит

5. Современное определение непрерывности

В настоящее время непрерывность функции f из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ в точке x_0 определяется следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0: |x-x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

Функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в любой точке x_0, принадлежащей $[a, b]$.

отказ от терминологии Эйлера, про которую можно сказать, что она выражала в некотором роде глобальную непрерывность, поскольку непрерывная по Эйлеру функция определялась единственным аналитическим законом; эта терминология вышла из употребления.

Однако эти определения, еще не переведенные на «язык ε и δ» (ср. с современным определением в табл. 5), продолжали сохранять двусмысленность: сложился обычай определять непрерывную функцию как такую, которая не может перейти от одного значения к другому, не пройдя через все промежуточные значения. Это определение рассматривалось как эквивалентное определениям Коши и Больцано, что не точно. Наконец, у Коши было очень хорошее определение производной. Но и здесь математики долгие годы не ставили под сомнение *существование* производной у непрерывных функций, и эта ошибка была источником многих трудностей Коши при исследованиях функций комплексного переменного. Мы увидим, что в XIX в. история понятия функции неотделима от истории непрерывности.

14. Разложение функций в тригонометрические ряды

Около 1805 г. Фурье занялся широко обсуждавшейся в то время задачей о распространении тепла. При физических исследованиях возможность заменить некоторую задачу относительно непрерывных величин другой задачей, в которой рассматривается конечное число объектов, позволяет дать математическое описание физического явления. Именно так Гюйгенсу удалось найти уравнение цепной линии, даже не пользуясь методами анализа бесконечно малых, а Даниил Бернулли применил этот метод при исследовании колебаний упругой струны. У него возникла мысль заменить струну, имеющую некоторую известную плотность, конечным числом точек, обладающих массой и расположенных на невесомой струне, и изучать колебания этой системы. Затем он перешел к пределу, устремив число таких точек к бесконечности, так чтобы струна стала однородной, и вывел таким способом уравнение колебаний струны.

Таким образом, подход Фурье был вполне естественным: он хотел изучить распространение тепла в системе конечного числа изолированных тел, а затем, увеличивая число этих тел и уменьшая их размеры, прийти к формуле, описывающей распространение тепла в сплошном теле.

В своей работе «Аналитическая теория теплоты», вышедшей в 1822 г., Фурье рассматривал температуру v бесконечно тонкой твердой пластинки, произвольная точка которой имеет координаты x и y. Эти координаты удовлетворяют уравнению с частными производными $\partial^2 v/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial y^2 = 0$. С помощью суперпозиции частных решений он получил общее решение для v в виде

$$v = a_0 e^{-x} \cos y + a_3 e^{-3x} \cos 3y + \ldots$$
$$\ldots + a_i e^{-(2i+1)x} \cos (2i+1) y + \ldots .$$

Чтобы определить коэффициенты a_i, Фурье использовал граничные условия, бесконечное число раз дифференцировал бесконечные ряды, а затем, положив $y=0$ в полученных уравнениях, приходил к решению бесконечного числа линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных — и все это без достаточного математического обоснования, руководствуясь лишь интуитивным пониманием исследуемого физического явления.

Отметим, что этот метод перехода от конечного к бесконечному в XIX в. оставался несколько в тени, но снова появился в работах Фредгольма и Вольтерра, посвященных интегральным уравнениям, которые рассматривались этими авторами как пределы систем линейных уравнений, а затем в работах Гильберта.

В разделе VI своей «Аналитической теории», названном «Разложение произвольной функции в тригонометрические ряды», Фурье рассматривал функцию f, определенную в интервале $]-\pi/2, +\pi/2[$, разложение которой в тригонометрический ряд имело вид

$$f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\ldots+a_k\sin kx+\ldots .$$

Задача состоит в вычислении коэффициентов в том самом случае, когда, как он говорит, «*функция $f(x)$ представляет последовательность значений или ординат, каждая из которых произвольна... Не предполагается, что эти координаты подчинены общему закону; они следуют друг за другом произвольным образом и каждая из них задана так, как была бы задана одна-единственная величина*». Фурье вступил, таким образом, на новый путь: умножая предыдущее выражение на $\sin kx$ и почленно интегрируя полученный ряд — без всякого обоснования,— он пришел к следующему замечательному результату:

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

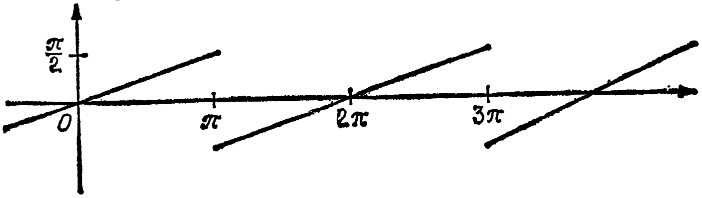
Фурье заметил, что во всех рассмотренных случаях эти интегралы имеют смысл, и заключил из этого, что *всякая* функция одного переменного может быть представлена тригонометрическим рядом. Этот вывод, хотя и нестрогий, на этот раз был принят сообществом математиков.

Мемуар Дирихле

И только в 1829 г. Дирихле в своем мемуаре «О сходимости тригонометрических рядов, которые служат для представления произвольной функции между заданными пределами», который ознаменовал важный момент в истории математики, сделал решающий шаг в развитии этой теории. При помощи исследования, о котором Ж. Дьедонне писал, что *«оно послужило образцом для бесчисленных исследований* XIX в.», Дирихле доказал предложение, сформулированное Фурье, уточнив, при каких условиях тригонометрический ряд, имеющий в качестве коэффициентов коэффициенты Фурье, сходится

6. Разложение функции в ряд Фурье

Пример непрерывной кусочно монотонной функции и ее разложения в ряд Фурье:



Ряд

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots$$

равен $x/2$ при $x \in [0, \pi[$ и 0 при $x = \pi$.

Этот контрпример был дан Абелем к неточной «теореме» Коши.

и представляет на заданном конечном интервале некоторую заданную функцию. Эти условия, названные условиями Дирихле, можно сформулировать так:

1) функция f однозначна и ограничена;

2) функция f имеет конечное число разрывов на протяжении каждого периода (т. е. кусочно непрерывна);

3) функция f обладает лишь конечным числом максимумов и минимумов на протяжении каждого периода (т. е. кусочно монотонна).

В точках разрыва ряд Фурье этой функции сходится к значению $^1/_2\ (f(x+0)+f(x-0))$ (см. пример в табл. 6).

Эти исследования оказали глубокое влияние не только на понятие функции, но также и на понятия интеграла, равномерной сходимости, точечного множества. Действительно, в условиях теоремы Дирихле важную роль играют понятия непрерывности, дифференцируемости, «числа» точек, в которых функция не является непрерывной или в которых она не дифференцируема или ее производная обращается в нуль [1]).

К этому моменту оставались открытыми следующие проблемы: построить функции, не удовлетворяющие условиям Дирихле; четко отделить понятие непрерывности от понятия дифференцируемости, а затем охарактеризовать множество точек разрыва, множество максимумов или минимумов и т. д. (если мы позволим себе употребить слово «множество», предвосхищая соответствующее понятие). Впрочем, в конце своего мемуара Дирихле дал пример функции совершенно новой природы — а именно функции, разрывной во всех своих точках: $f(x)$ равно постоянной c, если x — рациональное число, и равно другой постоянной d, если x иррационально.

Теория Римана

Все эти новые проблемы разрабатывал дальше Риман, главный продолжатель исследований Дирихле. В своей имевшей большой резонанс работе, представленной в 1854 г. в качестве диссертации в Гёттингенском университете и напечатанной в 1867 г. («О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда»), он развил более общую теорию интегрирования, чем у Коши (см. гл. 5), позволявшую представлять рядами Фурье и функции, имеющие бесконечное число разрывов (вспомним, что коэффициенты Фурье равны определенным интегралам от выражений, содержащим саму функцию). Риман привел пример ограниченной функции, имеющей счетное [2]) множество разрывов и интегрируемой в смысле его теории интегрирования.

---

[1]) Общее определение понятия функции как соответствия было дано в 1834 г. в мемуаре Н. И. Лобачевского «Об исчезании тригонометрических строк».— *Прим. ред.*

[2]) Множество называется счетным, если можно перенумеровать его элементы, т. е. расположить их в последовательность a_1, a_2, $\ldots$, a_n, $\ldots$, индексы которой суть натуральные числа. Всякое счетное множество можно поставить во взаимно однозначное соответствие с $\mathbb{N}$. Например, множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно.

Если обозначить через φ_E характеристическую функцию подмножества E вещественной прямой $\mathbb{R}$ (она равна 1, когда x принадлежит E, и 0, когда x не принадлежит E), то интегрирование φ_E сводится к *«измерению»* подмножества E. Первая формализованная теория интеграла, принадлежавшая Коши, позволяла определить интеграл от непрерывных функций или от функций с «дискретными» разрывами (т. е. конечным числом разрывов

7. Определение интеграла по Риману

Пусть f — вещественная функция, определенная на отрезке $[a, b]$, и пусть последовательность точек (x_i), $0 \leqslant i \leqslant n$, такова, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Пусть $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ и $S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$, где $0 \leqslant \leqslant \delta_i \leqslant 1$. *«Если эта сумма обладает тем свойством, что, как бы ни были выбраны δ и ε, она стремится к определенному пределу A, когда все δ становятся бесконечно малыми, то этот предел и обозначается через* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$».

Пусть $D_i = \sup\limits_{x,\, y \in [x_{i-1},\, x_i]} |f(x) - f(y)|$ — колебание функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ и $d = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \delta_i$ — диаметр разбиения.

Тогда необходимым и достаточным условием существования A является выполнение равенства $\lim\limits_{d \to 0} (\delta_1 D_1 + \ldots + \delta_n D_n) = 0$.

Риман заменил это условие интегрируемости другим: «*Для того чтобы сумма S сходилась к пределу, когда все δ становятся бесконечно малыми, кроме конечности функции $f(x)$, еще требуется, чтобы сумма всех тех промежутков, в которых колебание $> \sigma$, каково бы ни было σ, при надлежащем выборе d могла быть сделана как угодно малой*».

На современном языке этот критерий формулируется так: для того чтобы ограниченная функция была интегрируема (в смысле Римана), необходимо и достаточно, чтобы множество ее точек разрыва имело меру нуль.

на каждом отрезке). Таким образом, она позволяла измерять интервалы или объединения интервалов. Теория Римана впервые дала возможность измерить множество точек, которое не обязательно было интервалом (см. табл. 7).

Используя результат Римана о существовании интегрируемых разрывных функций, Дарбу доказал в 1875 г., что существуют непрерывные функции, не имеющие производной. Но уже после появления диссертации Римана (1854 г.) свойства непрерывности и дифференцируемости стали четко различать.

15. Понятие произвольной функции и его следствия

После Фурье, Коши, Дирихле, Римана общее понятие (однозначной) функции y независимого переменного x как произвольного соответствия было установлено. Означает ли это, что практика геометров XVIII в., их вычисления с аналитическими выражениями отжили свой век? Какие преобразования внесла эта новая концепция в развитие анализа?

Знание и исследование произвольной функции теоретически требует составления идеальной таблицы, в которой рассматривается каждое значение x наряду с соответствующим значением y. Но, поскольку эта идеальная таблица должна была бы содержать бесконечное число элементов (за исключением очень частных случаев, когда множество значений x конечно), нет и речи о ее эффективной реализации. Если подобную таблицу можно превратить в способ вычисления, позволяющий получить для каждого значения x соответствующее значение y, то это приведет нас к более знакомой практике, даже если вообразить сколь угодно сложный способ вычисления. Например, он может оказаться различным для разных классов чисел, среди которых по какому-то заданному закону распределяются значения x, а этих классов чисел может быть бесконечное, но счетное множество.

Но очень скоро выяснилось, что в силу большой общности понятия функции нельзя получить более или менее важные результаты в теории функций, оставаясь в рамках эйлеровой классификации только по виду аналитического выражения и способу его вычисления. Надо различать среди возможных функций некоторые определенные типы, характеризуемые достаточным числом *данных свойств*. Началось изучение различных классов функций: непрерывных, разрывных (в отдельных точках или всюду), дифференцируемых, с ограниченной вариацией, интегрируемых и т. д. Эти классы вводились установлением основного свойства, определяющего структуру класса. Такое свойство могло быть подсказано исследованием естественных явлений либо желанием систематизировать уже полученные результаты об известных функциях. Как резюмировал Рене Бэр, каждое из таких свойств приводит к частному исследованию, и все эти исследования имеют следующую общую черту: они выясняют, не влечет ли за собой введение того или иного ограничения на самую общую функцию, которое выражается некоторым точным свойством, других ограничений.

Поэтому углубление понятий функции и непрерывности сопровождалось построением все более патологических функций по сравнению с теми более простыми первоначальными представлениями, которые были о них у математиков; эти функции играли роль контрпримеров для ложных предположений. Например, Вейерштрасс построил функцию, непрерывную на некотором отрезке и не дифференцируемую ни в одной его точке. Ясно, что такое продвижение с помощью примеров и контрпримеров заставляло обращаться к сложным аналитическим процедурам, включая ряды, бесконечные произведения, предельные переходы и т. д.

Наконец, естественным средством перехода от старой концепции функции к новой, благодаря которому появилась надежда приблизиться к прежнему положению дел, были бесконечные алгоритмы для представления и приближения функций все более общего вида. В XIX в. самыми важными такими алгоритмами были ряд Тейлора и ряд Фурье. Именно поэтому мы так подробно остановились на их истории.

16. Ряды непрерывных функций и равномерная сходимость

В своем «Курсе анализа» Коши «доказал», что если ряд непрерывных функций сходится в окрестности некоторой точки x_0, то его сумма есть непрерывная функция в той же окрестности. Абель первым в 1826 г. обратил внимание математиков на неточность этого результата и в качестве контрпримера привел ряд

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots,$$

который равен $x/2$ при $x \in [0, \pi[$ и нулю при $x=\pi$. Таким образом, функция, к которой сходится этот ряд, разрывна в точке $x=\pi$ (см. табл. 6).

На самом деле сформулированная Коши «теорема» противоречит также теореме Дирихле о том, что кусочно непрерывная кусочно монотонная функция разлагается в ряд (Фурье) непрерывных функций; на это указал Зейдель в 1847 г. В процессе работы нескольких математиков (Зейделя, Стокса, Гудермана, самого Коши и, наконец, Вейерштрасса) выкристаллизовалось понятие *равномерной сходимости* ряда функций. Вейерштрасс дал корректные формулировки и доказательства теорем о

8. «Арифметизация анализа»

Иллюстрация «арифметизации анализа» на примере «теоремы» Коши (современное доказательство).

Предположим, что функции f_n непрерывны на отрезке $[a, b]$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на этом отрезке, т. е. последовательность $S_n=(f_1+f_2+\ldots+f_n)$ частных сумм этого ряда равномерно сходится на $[a, b]$ к некоторой функции S. Требуется доказать, что S непрерывна.

Пусть x и x_0 — два произвольных числа из отрезка $[a, b]$. Для всякого целого числа n можно написать равенство

$$S(x)-S(x_0)=S(x)-S_n(x)+S_n(x)-S_n(x_0)+S_n(x_0)-S(x_0),$$

откуда вытекает неравенство

$$|S(x)-S(x_0)| \leqslant |S(x)-S_n(x)|+|S_n(x)-S_n(x_0)|+|S_n(x_0)-S(x_0)|.$$

Благодаря равномерной сходимости для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\nu \in \mathbb{N}$, что при всех $n > \nu$

$$|S(x)-S_n(x)| < \varepsilon/3 \quad \text{и} \quad |S_n(x_0)-S(x_0)| < \varepsilon/3$$

(тот факт, что одно и то же ν отвечает обоим неравенствам, вытекает из предположения о равномерной сходимости).

Таким образом, при $n > \nu$ из первого неравенства получаем

$$|S(x)-S(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3}+|S_n(x)-S_n(x_0)|.$$

Но функция S_n непрерывна, поэтому найдется такое $\eta > 0$, что при всех x из $|x-x_0| < \eta$ следует $|S_n(x)-S_n(x_0)| < \varepsilon/3$.

Итак, для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что

$$\text{если } |x-x_0| < \eta, \quad \text{то } |S(x)-S(x_0)| < \varepsilon,$$

т. е. функция S непрерывна.

непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости суммы ряда функций, для которых необходимо это понятие.

На современном языке под равномерной сходимостью ряда в некотором интервале I понимается следующее: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что если $n \geqslant N(\varepsilon)$, то $|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| \leqslant \varepsilon$ при всех $x \in I$. Слова «N зависит только от ε и не зависит от x из рассматриваемого интервала» выражают тот факт, что данный ряд функций сходится одинаково во всем интервале. Доказательство Вейерштрасса, которое почти не отличается от современных доказательств (см. табл. 8), позволяет продемонстрировать здесь на этом простом примере созданный Вейерштрассом стиль рассуждений, ставший образцом математической строгости: выделение «эпсилона», систематическое использование неравенств и оценок — словом, все то, что является «хлебом насущным» современного анализа и составляет часть движения, которое Ф. Клейн назвал «*арифметизацией анализа*».

17. Теория функций комплексного переменного

Параллельно обогащению и расширению понятия функции вещественного переменного на протяжении XIX в. шло развитие теории функций комплексного переменного. Ее подлинным основоположником был Коши, а двумя главными зодчими — Риман и Вейерштрасс [1]).

Некоторые результаты этой теории были получены еще в предшествующем веке. Так, в 1752 г. Даламбер рассмотрел комплексную функцию $u(x, y) + iv(x, y)$ (где $i^2 = -1$) двух вещественных переменных и вывел условия, при которых эта функция имеет производную, когда точка с координатами x, y стремится к некоторой заданной точке, причем эта производная единственна, т. е.

[1]) К. Ф. Гаусс изложил основы теории функций комплексного переменного в письме к Бесселю от 19 декабря 1811 г. В нем содержались: геометрическая интерпретация комплексных чисел, определение интеграла в комплексной области, теорема о вычетах. Здесь же впервые дано полное объяснение многозначности логарифма.— *Прим. ред.*

не зависит от пути, по которому достигается заданная точка. Эти условия имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Теперь их называют условиями Коши — Римана, ибо благодаря серии работ этих авторов выяснилось, что функцию $u(x, y)+iv(x, y)$ двух вещественных переменных x и y можно рассматривать как функцию $f(z)$ комплексного переменного $z=x+iy$, и тогда эти условия выражают дифференцируемость по z, или, как ее называют в настоящее время, $\mathbb{C}$-дифференцируемость.

Для Коши исходной точкой послужила довольно простая теорема об определенном интеграле с комплексными пределами от функции комплексного переменного z. Коши показал (1825), что этот интеграл для заданной «*конечной непрерывной функции* $f(z)$» не зависит от выбранного пути интегрирования, а зависит только от его концов. Таким образом, произвольную функцию достаточно общего вида можно выразить в виде интеграла и предоставить аналитику удобную формулу для дальнейшего исследования. Отсюда Коши вывел теорему о возможности представления функции $f(z)$ ее разложением в ряд Тейлора, однако долго не мог точно сформулировать условия, которым должна удовлетворять такая функция. Как мы теперь знаем, для этого достаточно существования комплексной производной. На самом деле Коши всегда рассматривал только разложения в окрестности регулярной точки функции и только для однозначных функций.

Для Римана, гениального провидца XIX в., главным был геометрический образ. Риман рассматривал многозначные $\mathbb{C}$-дифференцируемые функции, т. е. функции, которые могут принимать в одной и той же точке различные значения, в зависимости от пути, по которому достигается эта точка, и занимался построением для них подходящего геометрического представления. О подробном изложении здесь теории Римана не может быть и речи; отметим только, что его идея сводилась к тому, чтобы восстановить однозначность функции, заставляя ее значения пробегать не просто комплексную плоскость, а систему наложенных плоскостей, образующих «листы» римановой поверхности [1]).

Аналитические функции по Вейерштрассу

Что же касается более арифметической точки зрения Вейерштрасса, то на ней мы остановимся подробнее, так как она служит прямым продолжением подхода

9. Ряд Тейлора некоторой функции

Геометры XVII и XVIII вв., говоря о ряде Тейлора некоторой функции, подразумевали формальное выражение $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, которое они приравнивали к $f(x)$.

Нам понятно, что если функция f не является бесконечно дифференцируемой в некоторой окрестности точки 0, то это бесконечное выражение не имеет смысла. Но и в том случае, когда рассматриваемая функция бесконечно дифференцируема в окрестности нуля, этот ряд необязательно сходящийся.

Сегодня всякому степенному ряду $\sum a_n x^n$ (с вещественным или комплексным x) сопоставляют его *радиус сходимости* l — положительное вещественное число, такое, что ряд расходится при $|x| > l$ и сходится при $|x| < l$. *Кругом сходимости* степенного ряда называется круг на комплексной плоскости с центром 0, радиус которого равен радиусу сходимости данного ряда.

Это позволяет говорить о круге сходимости (степенного) ряда Тейлора $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Кроме того, неверно утверждение, что (для бесконечно дифференцируемой функции) ряд Тейлора $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ обязательно сходится к $f(x)$ в круге сходимости положительного радиуса. Первые контрпримеры к нему построены Коши и Вейерштрассом.

Для того чтобы исследовать сходимость ряда Тейлора функции f в точке 0 (f предполагается бесконечно дифференцируемой в окрестности этой точки), нужно рассмотреть *предел* разности $f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ при $n \to \infty$.

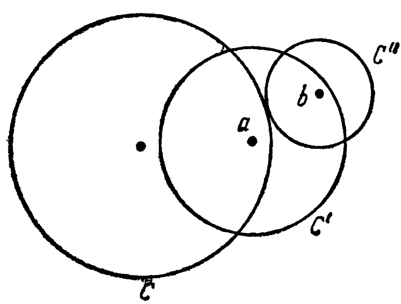
---

[1]) Мы следуем здесь весьма прозрачному объяснению Жан-Люка Верлея, приведенному в книге: Verley J.-L. Abrégé d'histoire des mathématiques.

Лагранжа, и даже Эйлера, которые рассматривали разложение функций в степенной ряд Тейлора. На этом примере хорошо виден путь, проделанный анализом на протяжении почти целого столетия (см. табл. 9). В самом деле, вся картина полностью изменилась: понятие сходимости приобрело точный смысл, и уже нет речи о том, чтобы рассматривать степенные ряды вне их *круга сходимости*. Таким образом, подход Вейерштрасса — это *локальное* исследование функций.

Кроме того, стали рассматривать функции *комплексного* переменного. Ведь однозначная комплексно дифференцируемая функция является *аналитической* в том смысле (который был с тех пор окончательно принят), что она представима в виде степенного ряда в окрестности каждой точки своей области определения. В этом суть теоремы Коши. В случае вещественного переменного даже функция, дифференцируемая бесконечное число раз, необязательно представима в виде ряда Тейлора. Таким образом, комплексные переменные гораздо лучше подходят для изучения аналитических функций.

Функцию вещественного переменного, заданную в некотором интервале выражением, которое вне этого



интервала не имеет смысла, трудно *продолжить* за пределы интервала. Напротив, для функций комплексного переменного это не так. Существует развитый Вейерштрассом метод *аналитического продолжения*, позволяющий (по крайней мере теоретически) получить значение функции в любой точке, где она определена, исходя из элемента функции, заданного в некотором круге сходимости.

В чем заключается принцип аналитического продолжения? Пусть функция $f(z)$ задана в виде степенного ряда по z, сходящегося в своем круге сходимости C. Тогда, по Коши, эта функция равна также сумме степенного ряда по степеням $(z-a)$, который сходится в круге C' с центром a. Если C' выходит за пределы C (случай, когда точка a регулярная), этот ряд по $(z-a)$ задает аналитическое продолжение функции $f(z)$ во внешнюю относительно C часть круга C'. Так мы и действуем шаг за шагом при помощи цепочки кругов (если понадобится, до бесконечности) и находим в результате нашу функцию во всей ее естественной области существования. Ясно, что при этом разные цепочки кругов могут привести к разным значениям функции в одной и той же точке комплексной плоскости. Так возникает проблема многозначных функций, для разрешения которой служат идеи Римана.

Итак, благодаря Вейерштрассу идея разложения функций в ряд Тейлора достигла своего высшего расцвета. Она позволила выделить отныне твердо установленный класс *аналитических функций*. Позднее были изучены другие бесконечные алгоритмы: бесконечные произведения, ряды многочленов и т. п. Они понадобились для получения более общих классов функций либо для перехода к менее локальным исследованиям.

Примерно в то же самое время Вейерштрасс доказал теорему, которая просто ошеломила современников: всякая непрерывная функция на ограниченном интервале является пределом равномерно сходящейся последовательности многочленов. Теорема справедлива для функций вещественного переменного, а при одном дополнительном условии — и комплексного. Она дала толчок к предпринятому в последней трети XIX в. систематическому изучению понятия равномерной сходимости и связанных с ним вопросов, в частности нахождению условий, необходимых для того, чтобы предел последовательности непрерывных функций был непрерывной функцией (см. табл. 10). Этому посвящены особенно работы представителей итальянской школы: Дини, Асколи, Вольтерра.

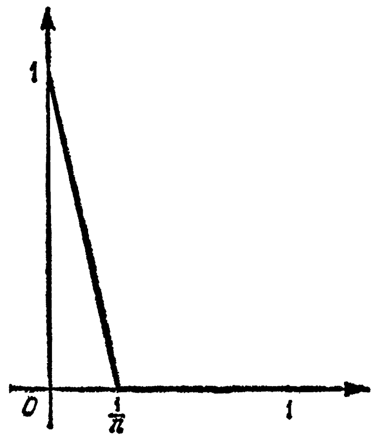
Развитые Вейерштрассом методы оказались уже не столь плодотворными, когда аналитики обратились к

10. Равномерная сходимость последовательности функций

Пример последовательности функций f_n, определенных и непрерывных на отрезке $[0, 1]$, сходящейся неравномерно к разрывной функции на $[0, 1]$:

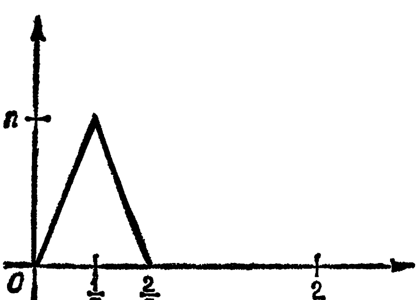
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [1/n, 1], \\ -nx + 1 & \text{при } x \in [0, 1/n]; \end{cases}$$

эта последовательность сходится к функции f, определенной так: $f(x) = 0$ при $x \in]0, 1]$; $f(0) = 1$.



Пример последовательности функций f_n, определенных и непрерывных на $[0, 2]$, сходящейся к непрерывной функции на $[0, 2]$, но неравномерно:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{при } x \in [0, 1/n], \\ -n^2 x + 2n & \text{при } x \in [1/n, 2/n], \\ 0 & \text{при } x \in [2/n, 2]. \end{cases}$$



Последовательность f_n сходится к функции f, такой, что

$f(x) = 0$ при $x \in [0, 2]$,

но сходимость неравномерна, так как

$$\sup_{x \in [0, 2]} |f_n(x) - f(x)| = n,$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = +\infty.$$

общим свойствам функций, не зависящим от выбранного конкретного представления. В 1898 г. Борель поставил следующий вопрос: «*Если заданы две функции комплексного переменного, определенные одна в одной области, а другая в другой, то когда можно сказать, что это одна и та же функция?*» Но этот вопрос относится уже к дискуссии о существовании и приемлемых определениях математических объектов, разгоревшейся в конце века между французскими аналитиками (Бэром, Борелем, Лебегом, Адамаром). Мы вернемся к этому в связи с вещественным переменным.

18. Зарождение теории множеств и общей топологии

К тому моменту, когда Дедекинд ввел (к 1871 г.) понятия, связанные с множествами, в теорию алгебраических чисел и теорию полей, созданные им для решения задач из алгебры и теории чисел (см. гл. 8), в недрах анализа было два направления, особенно важных для его развития, которые непосредственно привели к теории множеств.

Первое направление составляли исследования, связанные с разложением функций в тригонометрические ряды, которое сводилось к техническим задачам интегрирования функций. Главными представителями этого направления были Фурье, Дирихле, Риман. Мы уже отмечали, что в теории интегрирования по Риману, созданной прямо в связи с формулировкой условий Дирихле, рассматривались множества точек прямой $\mathbb{R}$, не образующих интервала, что предвосхищало идею «множества меры нуль».

Второе направление, развиваемое в работах Больцано, Коши, Дедекинда, Вейерштрасса, Кантора, относилось скорее к основным принципам анализа, определению его предмета и методологии. Характерные проявления этого процесса — усиленное внимание к строгости, «арифметизация» анализа, разработка различных теорий вещественных чисел для подкрепления геометрической интуиции. Впрочем, новоявленные «монстры» анализа (нигде не дифференцируемая непрерывная функция Вейерштрасса и открытая чуть позже кривая Пеано, заполняющая квадрат) подтвердили недостаточность геометрической интуиции и еще раз убедили математиков в необходимости других принципов.

Работы Георга Кантора стали составной частью обоих направлений. К теоретико-множественным понятиям его привели исследования тригонометрических рядов и его работы по теории иррациональных чисел (см. гл. 5).

В 1871 г. Кантор показал, что если тригонометрический ряд $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ сходится (при $n \to \infty$) к равной нулю функции $f(x)$ в каждой точке x некоторого интервала на прямой $\mathbb{R}$, то коэффициенты a_n и b_n равны нулю. Затем ему удалось ослабить предположения и доказать, что утверждение теоремы сохраняет силу и тогда, когда в конечном числе точек интервала рассматриваемый тригонометрический ряд не сходится к нулю.

Это привело Кантора к изучению множеств точек на вещественной прямой, называемых «*исключительными множествами*»: если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду на интервале, кроме точек такого множества, то все его коэффициенты равны нулю.

Понятие мощности множества

В 1872 г. Кантор встретился в Швейцарии с Дедекиндом; между ними завязалась многолетняя дружба и началась почти ежедневная переписка — весьма поучительное свидетельство о сомнениях, предубеждениях и восторге, сопровождавших первые шаги теории множеств.

Кантор показал, что множество рациональных чисел можно расположить в виде последовательности, занумерованной натуральными числами; иначе говоря, он установил взаимно однозначное соответствие (биекцию) между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$ (см. табл. 11). Дедекинд доказал тот же результат для множества алгебраических чисел. Затем Кантор обратился к понятию множеств равной мощности: «*Если два вполне определенных множества M и N можно поэлементно поставить в соответствие друг с другом однозначно и полностью ... то да позволено будет в дальнейшем употреблять выражение, что эти множества имеют равную мощность, или еще что они эквивалентны*».

Отношение равномощности, основанное на существовании биекции между двумя множествами, действительно определяет отношение эквивалентности между множест-

11. Множество Q счетно

Чтобы «занумеровать» рациональные числа p/q, на Q вводится отношение порядка.

Предполагается, что рациональные дроби записаны в несократимом виде. Тогда

$$p/q \text{ предшествует } p'/q',$$

если
$$p+q < p'+q'$$
или
$$p+q=p'+q' \quad \text{и} \quad p < p'.$$

Таким образом, элементы множества Q располагаются в следующую последовательность:

0, 1, 1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, 2/3, 3/2, 4, 1/5, 5, ...
a_1, a_2, a_3 a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, ...

вами; говорят, что равномощные множества имеют одно и то же кардинальное число. Б. Больцано в своей работе «Парадоксы бесконечного», вышедшей в 1851 г., уже продемонстрировал, что два бесконечных подмножества прямой $\mathbb{R}$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие. Он рассмотрел соответствие $x \mapsto y = (12/5)x$ и показал, что при этом каждой точке отрезка $[0, 5]$ отвечает единственная точка отрезка $[0, 12]$, и обратно. Эта работа, обнаруженная Ганкелем, произвела огромное впечатление на Кантора.

Кантор доказал, что не существует взаимно однозначного соответствия между множеством $\mathbb{N}$ и интервалом $]0, 1[$, откуда сразу вытекает, что его нет и между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ (мощность $\mathbb{R}$ называется мощностью *континуума*). Он различал два основных типа бесконечных множеств: *счетные* множества, имеющие ту же мощность, что и $\mathbb{N}$, и все остальные множества. (Кардинальное число счетных множеств обычно обозначается буквой «алеф» с индексом нуль.) С большим удивлением Кантор нашел биекцию между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$ — одномерным и двумерным континуумами. Это настолько противоречило его интуиции, что он писал Дедекинду: «*Я это вижу, но я этому не верю*». Дедекинд настаивал тогда на том, что между $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^p$ (где $n \neq p$) не существует взаимно однозначного и взаимно непрерывного (т. е. непрерывного вместе со своим обратным) отображения (оно называется *гомеоморфизмом*).

12. Кантор: конструкция множества, мощность которого больше некоторой заданной мощности

Требуется показать, что для всякого множества M множество $\mathcal{P}(M)$ его подмножеств имеет строго большую мощность, чем M.

Существует каноническое инъективное отображение M в $\mathcal{P}(M)$, которое всякому элементу x ставит в соответствие подмножество, состоящее из одного этого элемента, т. е. $\{x\}$.

Нужно показать, что не существует инъективного отображения $\mathcal{P}(M)$ в M. Предположим противное, и пусть f — такое отображение:

$$f\colon \mathcal{P}(M) \longrightarrow M.$$

Тогда существует сюръективное отображение g множества M на $\mathcal{P}(M)$. Действительно,

$$\text{если } x \notin f(\mathcal{P}(M)), \quad \text{полагаем} \quad g(x) = \{x\};$$
$$\text{если } x \in f(\mathcal{P}(M)), \quad \text{полагаем} \quad g(x) = f^{-1}(x).$$

Определим множество $N = \{x \in M\colon x \notin g(x)\}$. Оно является подмножеством в M и, следовательно, $N \in \mathcal{P}(M)$.

Так как g сюръективно, найдется такое $x_0 \in M$, что $g(x_0) = N$.

Предположим, что $x_0 \in N$; тогда, по определению N, $x_0 \notin g(x_0) = N$ и, значит, наше предположение неверно. Если $x_0 \notin N$, то $x_0 \in \in g(x_0) = N$ и это предположение тоже неверно.

Итак, мы пришли к противоречию: инъективного отображения $\mathcal{P}(M)$ в M не существует. Значит, мощность $\mathcal{P}(M)$ больше мощности M.

Однако это доказательство, весьма характерное для канторовской теории, принадлежит как раз к тому типу доказательств, которые вне рамок строгой аксиоматики приводят к парадоксальным противоречиям. В нем участвует класс объектов, содержащий объект, который требуется определить.

Подобные парадоксы весьма чувствительно сотрясали теорию множеств. Кризис удалось преодолеть лишь благодаря точной аксиоматизации, предложенной Цермело и затем Френкелем в начале XX в.

Этот факт установил Нетто в 1879 г., а Пеано построил свою знаменитую кривую, заполняющую квадрат — непрерывную и сюръективную функцию из отрезка $[0, 1]$ на $[0, 1] \times [0, 1]$, которая, однако, не является инъективной. Здесь мы входим в область топологической теории размерности.

Кантор показал также, что для всякого множества E можно всегда построить множество строго большей мощности, например $\mathcal{P}(E)$ (см. табл. 12). Легко проверить, что $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ и $\mathbb{R}$ равномощны: достаточно задать каждое положительное вещественное число его десятичным представлением $k, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$, где k — некоторое целое, а $x_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ при всяком n. Кантор был убежден, что среди бесконечных множеств точек в $\mathbb{R}^n$ встречаются лишь два типа — равномощные $\mathbb{N}$ и равномощные $\mathbb{R}$,— и всю жизнь пытался доказать эту «гипотезу континуума». Сегодня благодаря работам П. Коэна (1963 г.) мы знаем, что эта гипотеза «*не доказуема*» в рамках аксиоматики Цермело — Френкеля теории множеств. Все эти неожиданные результаты заставили Кантора попытаться выделить абстрактную форму обнаруженных им явлений.

Кантор и арифметизация бесконечности

Между 1879 и 1884 гг. в серии статей «О бесконечных множествах точек на прямой» Кантор дал синтетическое изложение своих идей, касающихся подмножеств прямой $\mathbb{R}$, с использованием понятия *производного множества*, которое уже встречалось в его работах 1870—1872 гг. о тригонометрических рядах.

Построенная Кантором теория иррациональных чисел, определяемых при помощи фундаментальных последовательностей рациональных чисел, привела его (вслед за Вейерштрассом) к понятию точки накопления подмножества в $\mathbb{R}$. Точка $x \in \mathbb{R}$ есть точка накопления подмножества E, если каждый открытый интервал, содержащий x, содержит бесконечное множество точек E. Первым производным множеством для E (обозначается E' или $E^{(1)}$) называется множество его точек накопления. Точка, не являющаяся точкой накопления, называется изолированной точкой. Можно определить E'' — второе производное множество для E — как производное множество для E', и т. д. Затем Кантор вводит понятие множества E, всюду плотного в интервале I прямой $\mathbb{R}$: всякий открытый подынтервал интервала I пересекается с E. В этом случае E' содержит I, и не существует такого n, при котором n-е производное множество $E^{(n)}$ пусто. Обратно, множество E, для которого $E^{(n)}$ пусто при некотором n, не является всюду плотным ни в каком интервале в $\mathbb{R}$. Таким образом, здесь Кантор устанавливает первые топологические свойства вещественной прямой.

Далее Кантор определяет производное множество порядка ∞ (которое обозначается иногда через ω): $E^{(\infty)} = \bigcap E^{(n)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Его идея состоит в том, чтобы продолжить этот процесс и получить производные множества порядка $\infty+1$ $(E^{(\infty+1)} = (E^{(\infty)})')$, $\infty+2$ и т. д. до порядка 2∞ $(E^{(2\infty)} = \bigcap E^{(\infty+n)}$ для всех $n \in \mathbb{N})$, затем $2\infty+1, \ldots, \infty^2$ $(E^{(\infty^2)} = \bigcap E^{(n\infty)}$ при всех $n \in \mathbb{N})$, $\infty^2+1, \ldots$. В результате Кантор строит настоящую *трансфинитную арифметику*.

Эта конструкция привела к теории трансфинитных порядковых чисел. В то время как понятие кардинального числа есть абстракция идеи количества элементов, не зависящего от их порядка, понятие порядкового числа обобщает понятия упорядочения и последовательности, тесно связанные со всеми размышлениями о непрерывности; оно вводит в действие отображения, сохраняющие отношение порядка.

По мысли Кантора, теория абстрактных множеств и исчисление мощностей, а также теория трансфинитных порядковых чисел (о которой подробнее мы здесь говорить не можем) были предназначены для того, чтобы охватить непрерывное и разрывное с единой точки зрения, «*измерить их одной меркой*», и тем самым получить возможность трактовать математическую бесконечность не только как процесс образования (потенциальную бесконечность), но и как непосредственно арифметизуемый объект, подобный другим численным величинам (актуальную бесконечность).

Начиная с 80-х гг. Кантор стал придавать теории множеств унифицирующую и объединяющую роль для всей математики в целом. И действительно, она стала исполнять эту роль, но лишь позднее, после того как благодаря подходящей аксиоматике ей удалось преодолеть логические противоречия, вдруг возникавшие в некоторых теоретико-множественных рассуждениях (всегда в связи с понятием множества всех множеств), и разрушить предубеждение многих математиков, с ужасом взиравших на ее появление в «стройной картине» их науки.

19. Разрывные функции. Споры вокруг понятия функции

В теории функций вещественного переменного на первый план постепенно выдвинулось изучение *разрывных* функций. Долгое время преобладал *конструктивный подход*. В соответствии с ключевыми теоремами Дирихле и Вейерштрасса изучались в основном разрывы простых (т. е. неравномерных) пределов непрерывных функций, а также суммы рядов непрерывных функций, не являющиеся непрерывными.

С появлением работ Бэра задачи стали намного более общими. В своих «Лекциях о разрывных функциях» Бэр априори задавал функции с некоторыми определенными разрывами и пытался представить их как пределы непрерывных функций. Здесь взял верх *аппроксимационный подход*, и основное внимание было перенесено на множества точек разрыва функции.

Бэр разработал свою знаменитую классификацию: к нулевому классу Бэра относятся все непрерывные функции; первый класс составляют пределы непрерывных функций, не вошедшие в нулевой класс; второй класс содержит пределы функций первого класса, не относящиеся к первому классу, и т. д. Классификация продолжается и дальше, на трансфинитные порядковые числа. Бэр широко пользовался только что созданной тогда теорией множеств и канторовскими трансфинитами. Многие математики все еще считали ее весьма спорной, и Бэр способствовал тому, чтобы она получила права гражданства. Кроме того, он применял в своих работах топологию подмножеств прямой $\mathbb{R}$ (замкнутые множества, всюду плотные и нигде не плотные множества, совершенные множества и т. п.).

Разгоревшаяся в связи с этой классификацией полемика имела большое значение. Имеются ли элементы в каждом классе Бэра? И если да, то должны ли математические объекты, о которых можно доказать их существование, но нельзя их эффективно определить (в том смысле, как, например, вычисляют значение функции для каждого заданного значения переменного с некоторым выбранным приближением), входить в математические теории? Между Бэром, Борелем, Лебегом и Адамаром возникли разногласия. В центр внимания попали множества, мощность которых превышает континуум, и общее понятие функции: допустимо ли пользоваться соответствиями, о которых *«констатируется»* их существование, но которые невозможно *«описать точка за точкой»*?

Так, Борель писал по поводу множества (рассмотренного Кантором) разрывных функций, принимающих только значения 0 и 1: *«Это множество логически определено, однако я спрашиваю себя, имеем ли мы о нем какое-либо представление? Можем ли мы представить себе самую общую разрывную функцию одного вещественного переменного (по-прежнему предполагая, что значениями функции служат только* 0 *и* 1*)? Для того чтобы задать такую функцию, нужно задать ее значение для всех вещественных значений переменного. Но это множество значений несчетно, поэтому нельзя указать процедуру, которая позволяла бы получить их все, т. е. добраться до произвольного значения по прошествии некоторого ограниченного времени»*.

В узких рамках анализа споры вокруг *конструктивных* методов теории функций довольно быстро были оставлены позади. Они нашли отражение в другой дисциплине, сложившейся в течение XX в.,— математической логике, и в частности в теории рекурсивных функций.

Проблемы, возникшие в связи с комплексным переменным, а также при систематическом исследовании разрывных функций вещественного переменного, привели к новому этапу теории функций: перейдя от «глобальной» фазы (Эйлер) к «локальной» (от Коши до Вейерштрасса), изучение функций к 1900 г. становится главным образом «интегральным».

20. Интегральный подход

Вслед за мемуаром Римана начинает развиваться подход, связанный с теорией меры, который был введен Кантором, а позднее Камиллом Жорданом. Нужно было найти обобщение понятий длины, площади и объема на более широкие классы множеств, так чтобы сохранялись основные свойства этих величин—аддитивность и непрерывность.

В 1898 г. Борель ввел понятие меры точечного множества, рассмотрев для этого счетную сумму его компонент — открытых попарно не пересекающихся интервалов.

В 1902 г. Лебег (1875—1941) в своей диссертации, главной темой которой была теория интегрирования, выдвинул совершенно новые идеи обращения с разрывными функциями. Он воспользовался некоторыми указаниями Бореля в сочетании с неконструктивными методами и разработал мощное аналитическое средство, применимое к ограниченным «весьма» разрывным функциям (введенным Бэром) и способное уладить большую часть теоретических трудностей, возникших после теории Римана (см. табл. 13).

Первая серьезная трудность такова: если некоторая ограниченная функция может быть представлена тригонометрическим рядом, обязательно ли он будет рядом Фурье этой функции? Близкий вопрос: всегда ли возможно почленное интегрирование ряда? Фурье отвечал на оба вопроса утвердительно. Однако к концу XIX в. стало известно, что почленное интегрирование не всегда возможно даже для равномерно сходящихся рядов, потому что их суммы необязательно интегрируемы по Риману. Эти исследования увенчались изящным доказательством теоремы Лебега: почленное интегрирование всегда возможно для равномерно ограниченных рядов интегрируемых по Лебегу функций.

Вторая серьезная трудность связана с основной теоремой дифференциального и интегрального исчисления, которую можно записать в виде соотношения

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a),$$

выражающего тот факт, что дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные операции. Начиная с 1870 г. были выявлены функции, имеющие ограниченную производную, не интегрируемую по Риману. Для таких функций эта теорема не имела смысла.

Теория Лебега прекрасно объяснила трудности, с которыми столкнулись аналитики XIX в. (особенно все то, что касалось свойств дифференцируемости непрерывных

13. Определение интеграла по Лебегу

Для произвольного множества V Лебег определяет

a) его внешнюю меру $\overline{m}(V)$, равную точной нижней грани мер открытых множеств, содержащих V:

$$\overline{m}(V) = \inf \overline{m}(O) \text{ для всех открытых } O \supset V;$$

b) его внутреннюю меру $m(V)$, равную точной верхней грани мер замкнутых множеств, содержащихся в V:

$$m(V) = \sup m(F) \text{ для всех замкнутых } F \subset V.$$

Множество V называется измеримым в том и только том случае, если $\overline{m}(V) = m(V)$.

Согласно геометрическому определению, интеграл положительной функции f, определенной при $a \leqslant x \leqslant b$, есть двумерная мера множества $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant f(x), a \leqslant x \leqslant b\}$, если оно измеримо.

Лебег дал также и аналитическое определение интеграла. Пусть f — ограниченная вещественная функция, определенная на $[a, b]$. Предположим, что $m \leqslant f(x) \leqslant M$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Для любых ξ, η, таких, что $\xi \leqslant \eta$, положим по определению

$$V_{\xi, \eta} = \{x \in [a, b] : \xi \leqslant f(x) \leqslant \eta\}.$$

Если $V_{\xi, \eta}$ измеримо при всех ξ, η, функция f называется измеримой.

Далее он рассматривает разбиение

$$m = \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n < \xi_{n+1} = M$$

и полагает

$$V_i = \{x \in [a, b] : \xi_i \leqslant f(x) \leqslant \xi_{i+1}\}.$$

Затем Лебег рассматривает суммы

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i m(V_i) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_{i+1} m(V_i),$$

и интеграл Лебега — это общий предел этих сумм, который, как можно доказать, всегда существует, когда f измерима.

Существенная разница между методами Лебега и Римана заключается в том, что Лебег рассматривает разбиения не области определения $[a, b]$ функции f, а области ее значений.

Вот как сам Лебег образно объяснял характер своего интеграла: «*Я должен заплатить определенную сумму; я достаю из карманов монеты и купюры разного достоинства и отдаю их моему кредитору в том порядке, как они появляются, пока не выплачу весь долг. Это интеграл Римана. Но я могу действовать иначе. Рассортировав все свои деньги, я разложу на кучки купюры одного достоинства и одинаковые монеты и внесу платеж, объединяя денежные знаки одного достоинства. Это мой интеграл*». (Из «Биографии Лебега», написанной А. Данжуа, мадам Феликс и П. Монтелем.)

Полученное таким способом понятие интеграла является более общим, чем интеграл Римана: всякая функция, интегрируемая по Риману, интегрируема по Лебегу, причем оба ее интеграла совпадают. Придуманная Дирихле функция, равная 1 в рациональных точках и 0 в иррациональных, неинтегрируема по Риману; зато она интегрируема по Лебегу и ее интеграл равен нулю.

функций), и позволила упростить формулировки многих теорем, в то время как в теории Римана приходилось принимать все новые гипотезы и ограничительные условия. Вот один из примеров формулировки Лебега: «непрерывная функция ограниченной вариации обладает конечной производной *почти всюду*» (т. е. всюду, за исключением, быть может, некоторого множества нулевой меры Лебега). Процитируем еще ставшую краеугольным камнем теории Лебега теорему о *мажорированной сходимости*, которая при довольно широких предположениях устанавливает, что

$$\int \lim f_k(x)\,dx = \lim \int f_k(x)\,dx.$$

Чуть позднее была доказана теорема Фубини — Лебега о связи между кратным и повторным интегралом интегрируемых по Лебегу функций, которую можно выразить в виде равенства

$$\int\limits_{\mathbf{R}^m} dx \int\limits_{\mathbf{R}^p} f(x,\ y)\,dy = \int\int\limits_{\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^p} f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Теория Лебега с большим успехом стала применяться к тригонометрическим рядам, интегральным уравнениям, функциональным пространствам и т. д. (Фату, Рисс, Фишер и др.).

Это развитие основывалось на идее рассматривать функции как самостоятельные математические объекты — точки новых пространств, так называемых *функциональных пространств*. Наряду с распространением в эту область языка теории множеств естественно было употреблять в связи с такими пространствами геометрическую терминологию.

Затем точки функционального пространства стали рассматривать как переменное, а выделение различных типов сходимости последовательности функций к пределу привело к общему понятию топологии на функциональном пространстве.

Далее, начиная с 1900 г., в анализ мощно вторглись алгебраические методы. Принципы линейной алгебры постоянно применяются для изучения некоторых множеств функций, нормированных пространств (в частности, пространств L^p) и т. д.

Но это уже другая история — история функционального анализа XX в.

Оригинальные работы

d'Alembert J. Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers (особенно статья «Limite»).
Архимед. Квадратура параболы.— В кн.: Сочинения.— М.: Физматгиз, 1962.
Бэр Р. Теория разрывных функций. Пер. с франц.— М.—Л.: ГТТИ, 1932.
Коши О.-Л. Алгебраический анализ. Пер. с франц.— Лейпциг, 1864.
Коши О.-Л. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении. Пер. с франц.— Спб., 1831.
Cauchy A.-L. Leçons sur le calcul différentiel.— Paris, 1829 (ou Œuvres complètes, 2-e s., t. IV).
Дедекинд Р. Что такое числа и для чего они служат? Пер. с нем.— Казань, 1905.
Декарт Р. Геометрия. Пер. с франц.— М.—Л.: ГТТИ, 1938.
Начала Евклида. Пер. с греч. Т. 1 (кн. I—VI).— М.—Л., 1948.
Cauchy A.-L. Équations différentielles ordinaires. Cours inédit. Introduction C. Gilain. Coll. «Academic Press», Études Vivantes, Paris, 1981.
Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Т. 1—2.—М.: Физматгиз, 1961.
Эйлер Л. Дифференциальное исчисление.— М.—Л., 1949.
Fourier J.-B. Théorie analytique de la chaleur. Œuvres, t. I., Paris, 1888.
Галилей Г. Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки.— В кн.: Избранные труды в 2-х томах. Т. 2.— М.: Наука, 1964.
Lacroix S.-F. Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. Paris, 1791.
Largange J.-L. Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel.— Paris, 1797 (ou Œuvres, t. IX).
Lagrange J.-L. Leçons sur le calcul des fonctions.— Paris, 1808 (ou Œuvres, t. X).
Лебег А. Интегрирование и отыскание примитивных функций. Пер. с франц.— М.: ГТТИ, 1934.
де Лопиталь Г. Ф. Анализ бесконечно малых. Пер. с франц.— М.—Л., 1935.
Ньютон И. Метод флюксий и бесконечных рядов.— В кн.: Математические работы. Пер. с лат.— М.—Л.: ОНТИ, 1937.
Риман Б. Сочинения. Пер. с нем.— М.—Л.: Гостехиздат, 1948.

Работы по истории, которым мы особенно следовали

Boyer C.-B. The History of the Calculus and its Conceptual Development.— Dover, New York, 1949.
Cavailles J. Philosophie mathématique.— Hermann, Paris, 1962.

Dhombres J. Nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire.— Publication de l'IREM de Nantes. Cedic, Paris, 1978.
Dugac P. Les Fondements de l'analyse de Cauchy à Baire.— Thèse, Paris, 1978.
Hadamard J. Le Calcul fonctionnel.— Œuvres, t. IV.
Houzel C., Ovaert J.-L., Raymond P., Sansuc J. J. Philosophie et calcul de l'infini.— F. Maspero, Paris, 1976.
Itard J. Fermat, précurseur du calcul différentiel.— Archives internationales d'histoire des sciences, 1948.
Le Rest E. Le Concept de tangente d'Euclide à Newton et à Leibniz. Recueil de textes. U. V. Enseignement des mathématiques. Université de Haute-Normandie.
Monna A.-F. The Concept of Function in the 19th and 20th centuries in particular with regard to the Discussion between Baire, Borel and Lebesgue.— Archive for History of Exact Sciences. Vol. 9, № 1, 1972.
Peiffer J. Les Premiers Exposés globaux de la théorie des fonctions de Cauchy. Thèse, Paris, 1978.
Van Dalen, Monna A.-F. Sets and Integration. An outline of the development. Ed. Woltersnoord, Vill Grommugen.
Verley J.-L. La Controverse des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires.— «Bulletin de l'A. P. M.», № 34, septembre 1975.
Vuillemin J. Mathématiques et métaphisyque chez Descartes.— PUF, Paris, 1960.
Юшкевич А. П. The Concept of function up to the middle of the 19 th century. Archive for History of Exact Sciences, vol. 16, № 1, 1976.
Юшкевич А. П. Remarques sur la méthode antique d'exhaustion in Melanges Koyré I. Hermann, Paris, 1964.
Юшкевич А. П. Les Mathématiques arabes (VIII—XV siècles). Vrin, Paris, 1976.
Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века.— М.—Л., 1938.

Работы, добавленные редактором перевода

История математики с древнейших времен до начала XIX в. Т. I, II.— М.: Наука, 1970—1972.
Математика XIX в. (Геометрия, Теория аналитических функций). Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича.— М.: Наука, 1951.
Медведев Ф. А. Развитие понятия интеграла.— М.: Наука, 1974.
Медведев Ф. А. Очерки истории теории функций действительного переменного.— М.: Наука, 1975.

Глава 7

НА СТЫКЕ АЛГЕБРЫ, АНАЛИЗА И ГЕОМЕТРИИ: КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексные числа — простой математический объект, встречающийся во многих разделах математики. Мы решили подробнее остановиться на истории этого понятия, так как в ходе нее возникли глубокие проблемы, относящиеся к теории познания. Мнимые числа стали, по существу, первым объектом, полученным в результате абстрактной конструкции, и перед геометрами возник вопрос об их существовании и о том, какое место они занимают. Как обосновать их «реальность»?

В поисках ответа на этот вопрос на свет появились новые алгебраические объекты и новые теории, затрагивающие как алгебру, так и анализ.

Материал этой главы можно рассматривать как введение к гл. 8.

1. Основная теорема алгебры

Невозможные числа (квадратные корни из отрицательных чисел) не только позволили решить уравнения 3-й и 4-й степеней, но и привели к появлению новых методов вычисления, которые, несмотря на свою полную необъяснимость, позволяли получить осмысленные результаты. По этим чисто эмпирическим причинам математики пользовались ими все более уверенно. С другой стороны, Виет благодаря своим усовершенствованиям алгебраических обозначений установил (1646 г.) соотношения, связывающие коэффициенты и корни алгебраического уравнения. Он построил уравнение 5-й степени, имеющее пять корней, и знал, что таким же образом можно построить уравнение n-й степени, имеющее n корней — различных или совпадающих.

Альбер де Жирар в 1629 г. в своей работе «Новое изобретение в алгебре» («Invention nouvelle en l'algèbre») первым сформулировал утверждение, что всякое уравнение n-й степени имеет в точности n корней, при условии что считаются невозможные корни и каждый уровень учитывается столько раз, какова его кратность. Но это было не более чем утверждение, и прошел еще целый век, прежде чем математики ощутили необходимость в доказательстве этого результата.

Так, например, Декарт в 1637 г. в своей «Геометрии» писал: «*Наконец, как истинные, так и ложные корни не всегда бывают действительными, оказываясь иногда лишь воображаемыми (imaginaires). Другими словами, хотя всегда можно вообразить себе у каждого уравнения столько корней, сколько я сказал, но иногда не существует ни одной величины, которая соответствует этим воображаемым корням...*» Заметим, что здесь впервые употреблен термин *imaginaire* (воображаемый, мнимый). Декарт понимает мнимые корни как идеальные элементы, которые он формально присоединяет к действительным корням, побуждаемый желанием обобщить случай, когда уравнение задано в форме $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)=0$, т. е. когда корни заранее известны.

С появлением термина «мнимый» в его употреблении возникает двусмысленность: с одной стороны, существует «идеальное» толкование Декарта или даже Альбера де Жирара, а с другой — мнимыми числами стали называть числа вида $a+b\sqrt{-1}$ с вещественными a и b, введенные итальянскими алгебраистами при решении уравнений низких степеней. Эта двусмысленность присуща всем предпринятым в XVIII в. попыткам доказать утверждение, названное основной теоремой алгебры, т. е. найти разложение произвольного вещественного многочлена на множители первой и второй степени, а затем разложение всякого комплексного многочлена степени n на n множителей первой степени.

Чтобы понять, почему этой теореме было присвоено название основной теоремы алгебры, нужно вспомнить, что вплоть до середины XIX в. алгебра была не чем иным, как «*анализом уравнений*», и занималась исключительно методами их явного решения, методами приближения и оценивания корней в случаях, когда было неизвестно, как их вычислить, установлением правил, позволяющих узнать число вещественных корней, их знак, и т. д. В этих условиях важность такого рода теоремы более понятна. Впрочем, основополагающий характер теоремы подтверждается еще двумя обстоятельствами:

1) количество ее доказательств свидетельствует о большом интересе, который проявили к ней математики, включая таких крупных, как Даламбер, Эйлер, Лагранж, Гаусс и др.;

2) широкое разнообразие связанных с ней методов, теорий, понятий, о которых мы даем здесь лишь слабое представление, указывает на огромную роль, которую она сыграла в развитии математических исследований.

Попытки доказательства в XVIII в.

Вначале пытались установить общие формулы для корней, а не доказать *существование* корней без их явного вычисления. На этом пути встретились очень большие трудности: ведь со времен Абеля и Галуа известно, что уравнения пятой и более высоких степеней в общем случае неразрешимы в радикалах. В результате проблема была заброшена — внимание математиков привлекли успехи аналитической геометрии и исчисления бесконечно малых. Именно в связи с одной задачей анализа проблема существования корней зазвучала вновь. Действительно, для интегрирования рациональных дробей методом Лейбница и Иоганна Бернулли требовалось разложить эти дроби на простейшие элементы, т. е. фактически найти разложение многочлена на множители первой и второй степени (см. табл. 1). Даламбер первым (1746 г.) заявил, что утверждение о существовании такого разложения должно быть *доказано*, т. е. что его следует рассматривать на правах *теоремы*.

Даламбер не занимался в то время теорией уравнений, его целью было получение аналитического результата, и его доказательство было аналитическим: оно опиралось на рассмотрение кривых и бесконечных последовательностей. Однако этот общепринятый ныне подход, когда методы, взятые из одной области математики, применяются для доказательства результатов совсем другой области, не удовлетворял современников Даламбера.

1. Пример разложения рациональной дроби на простейшие

Пусть задана рациональная дробь

$$F = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}.$$

Имеем $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1) = (x-1)(x-i)(x+i)$. Разложение F на простейшие дроби записывается в виде

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{в } \mathbb{R}(x),$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+i} + \frac{1}{x-i} \quad \text{в } \mathbb{C}(x).$$

Для Эйлера, Фонсене, а позднее Лагранжа эта теорема оставалась алгебраической и требовала рассуждений, которые проистекали бы из самого характера уравнений. Все трое предложили свои доказательства алгебраического типа соответственно в 1749, 1759 и 1771 гг. Но чисто алгебраическое доказательство этой теоремы невозможно, поскольку приходится использовать свойство *«непрерывности»* вещественной прямой. Эта часть доказательства, которую математики XVIII в. называли «трансцендентной», описывалась, как правило, вскользь. Ее можно свести к минимуму, а именно к предложению: *«Всякое алгебраическое уравнение нечетной степени с вещественными коэффициентами всегда имеет по крайней мере один вещественный корень»*,— которое в то время считалось геометрически очевидным (см. табл. 2).

Алгебраическая часть доказательства заключается в том, что уравнение произвольной степени n сводится к уравнению нечетной степени. Для этого Эйлер записывает степень n многочлена $P(x)$ в виде $2^m q$, где q нечетно, и далее проводит индукцию по убывающим m, ибо при $m=0$ результат считается верным.

Его идея состоит в том, чтобы разложить многочлен P на два множителя P_1, P_2 степеней $2^{m-1}q$, что и позволит сделать нужный вывод, однако доказательство лишь намечено [1]). Лагранж проводит доказательство более систе-

---

[1]) Эйлер провел доказательство для $n=4, 8, 16$ и 2^m. В последнем случае доказательство было неполным. Уже в этом доказательстве

2. Трансцендентная часть основной теоремы алгебры

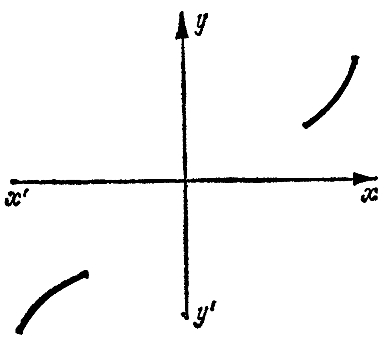
Рассматривается многочлен $P(x)$ нечетной степени; предполагается, что коэффициент при члене наибольшей степени равен 1:

$$P(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \ldots + a_0.$$

При очень больших по абсолютной величине значениях x многочлен $P(x)$ ведет себя как член наибольшей степени:

$$\text{если } x \longrightarrow +\infty, \quad \text{то} \quad x^{2n+1} \longrightarrow +\infty,$$
$$\text{если } x \longrightarrow -\infty, \quad \text{то} \quad x^{2n+1} \longrightarrow -\infty.$$

Геометры XVIII в. ссылались на некий принцип «непрерывности», утверждая, что, поскольку представляющая многочлен $P(x)$ кривая при $x \longrightarrow +\infty$ лежит выше оси $x'x$, а при $x \longrightarrow -\infty$ ниже этой оси, она должна пересечься с ней по крайней мере в одной точке.



Сегодня нам достаточно применить теорему о промежуточных значениях, доказанную Больцано в 1817 г., которая опирается на топологическое свойство непрерывности вещественной прямой.

Если существуют такое x_1, что $P(x_1) > 0$, и такое x_2, что $P(x_2) < 0$, то между x_1 и x_2 найдется такое x_3, что $P(x_3) = 0$.

матично и применяет здесь результаты о подобных функциях корней, а именно о рациональных функциях корней, инвариантных относительно одних и тех же пере-

---

Эйлер оперировал теоремой о симметрических функциях корней уравнения и теоремой о том, что рациональная функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ корней уравнения, которая принимает при всевозможных перестановках корней ровно k различных значений, удовлетворяет уравнению степени k с коэффициентами, рационально выражающимися через коэффициенты исходного уравнения.— *Прим. ред.*

становок (см. гл. 3, с. 104 и табл. 13). Эти результаты Лагранж установил в знаменитом мемуаре 1771 г.; их можно считать зачатками теории групп.

Критика Гаусса

Не вдаваясь в подробности перечисленных методов доказательства основной теоремы, отметим, что все они, как показал позднее Гаусс, опирались на следующий неявный постулат: всякое уравнение степени n с вещественными коэффициентами действительно имеет n корней, с этими корнями при вычислениях можно обращаться, как с числами, и единственное, что требуется доказать,— это то, что корни имеют вид $a+b\sqrt{-1}$ (где a и b вещественны).

Гаусс, опубликовавший начиная с 1799 г. четыре различных доказательства основной теоремы алгебры, подверг такой подход острой критике. В своей диссертации 1799 г. он заявил, что рассуждения его предшественников приводят к порочному кругу, и проанализировал эти рассуждения следующим образом: «*В основе доказательства лежит предположение — аксиома — о том, что всякое уравнение действительно имеет n корней, возможных или невозможных. Если под возможными понимаются вещественные, а под невозможными — «комплексные», то такая аксиома недопустима, ибо это раз как то, что требуется доказать. Но если под возможными понимаются вещественные и комплексные величины, а под невозможными все те, которых не хватает для того, чтобы было ровно n корней, то эта аксиома приемлема. Тогда невозможная величина — это величина, не существующая во всей области величин*». В этом последнем случае Гаусс не позволяет себе *вычислений* с такими величинами и, в частности, исключает использование соотношений между коэффициентами и корнями. В самом деле, чтобы пользоваться этими идеальными корнями и проводить вычисления, нужно сначала убедиться, что они образуют поле, т. е. что четыре арифметических действия над ними приводят к результатам из той же области величин. Именно этот момент ускользал от современников Эйлера. Но апостериори доказательства XVIII в. были спасены от порочного круга, указанного Гауссом, благодаря тому, что эта гипотеза оказалась справедливой: можно показать, причем независимо от основной теоремы алгебры, что корни действительно лежат в некотором поле. Оно называется полем разложения данного многочлена и представляет собой наименьшее поле, содержащее его коэффициенты, в котором многочлен разлагается на линейные множители (см. табл. 3). Во втором доказательстве Гаусса (1815 г.) говорится о построении такого поля, но совсем подробно оно проведено Кронекером (1882 г.).

3. Примеры полей разложения многочленов

Многочлен x^2-2 неприводим над полем рациональных чисел. Его корнями являются $+\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$. Его поле разложения есть наименьшее поле, содержащее рациональные числа и $\sqrt{2}$. Оно обозначается $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; элементы этого поля имеют вид $a+b\sqrt{2}$ с рациональными a и b.

Многочлен x^4-4 разлагается следующим образом:

$$(x^2+2)(x^2-2)=(x+i\sqrt{2})(x-i\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}).$$

Его поле разложения—это наименьшее поле, содержащее $\mathbb{Q}$, $\sqrt{2}$ и i. Оно обозначается $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$. Его элементы имеют вид $a+b\sqrt{2}+ci+di\sqrt{2}$ с рациональными a, b, c, d.

Итак, эта теорема действительно была основной теоремой алгебры, ибо сосредоточила в себе все проблемы, которые ставились тогда в теории уравнений, а ее различные доказательства были связаны со всеми алгебраическими исследованиями XVIII в. и нашли отражение во многих других теориях. Здесь впервые вышли на поверхность элементы, ставшие основой создания теории групп (у Лагранжа) и теории полей (у Гаусса).

Сейчас эта теорема уже не выглядит основной, поскольку указанные теории развиваются самостоятельно, вне связи с теорией уравнений. Из утверждения, которое пришло ей на смену, а именно *«поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто»*, ясно, что речь идет о строении поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел, а не о каком-то специфическом свойстве математического объекта *«уравнение»*. На этом частном примере хорошо видно, как другая формулировка того же результата ставит совсем другие проблемы и открывает новую эпоху.

2. Обращение с символом $\sqrt{-1}$ в XVII и XVIII вв.

Начиная со второй половины XVII в. геометры все более уверенно пользовались символом $\sqrt{-1}$, причем не только в алгебраических тождествах и в исследованиях по теории уравнений, но и в аналитических формулах для функций. Выражениями вида

$$\sqrt[n]{a+\sqrt{-b}}+\sqrt[n]{a-\sqrt{-b}},$$

по форме мнимыми, но на самом деле равными вещественному числу, аналогичными примеру Бомбелли, самому древнему из известных:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=4,$$

занимался Лейбниц. Он успешно освобождался от мнимости путем разложения в ряд. Математикам этого периода уже был хорошо известен тот факт, что корень n-й степени из вещественного числа имеет n значений, из них не более двух вещественных. Ролль недвусмысленно указывал на это в 1690 г. Все яснее становится связь между извлечением корней из мнимых чисел и делением дуги, хотя геометрической интерпретации пока нет. В 1738 г. А. де Муавр (1667—1754) показал, что

$$\sqrt[n]{\cos a+\sqrt{-1}\sin a}$$

принимает n значений, все они имеют вид $p+q\sqrt{-1}$ и получаются при делении дуги a на n равных частей. (Можно обратиться к табл. 4 гл. 8.)

Формальные действия с рядами и подстановка мнимых чисел в буквенные выражения все больше входили в обиход. Но тут вмешалось в игру лежащее в их основе неявное предположение о том, что на комплексные числа распространяются правила действий над вещественными числами: возник спор о логарифмах мнимых чисел (см. гл. 6). Этот спор стимулировал изучение других трансцендентных функций мнимого аргумента. Начиная с

1740 г. Эйлер рассматривал степенные выражения вида x^y, где x вещественное, а y чисто мнимое. Он получил формулу

$$\cos x = {}^1/_2\left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right),$$

а в 1748 г. вывел формулу

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$

носящую теперь его имя. При $x=\pi$ она дает $e^{\pi\sqrt{-1}}=-1$.

Тем самым Эйлер некоторым образом свел тригонометрические функции к экспонентам. Благодаря Эйлеру тригонометрия перестала быть независимой ветвью математики. Позднее Тобиас Данциг скажет о формуле Эйлера, что она содержит «*самые важные символы: таинственное единение, в котором арифметика представлена посредством* 0 *и* 1, *алгебра — посредством* $\sqrt{-1}$, *геометрия — посредством* π, *а анализ — посредством* e».

Итак, кроме уже общепризнанных применений и важного значения в алгебре символ $\sqrt{-1}$ позволил установить некое единообразие между функциями анализа. Он стал необходимым промежуточным элементом вычислений, хотя те, кто пользовались этой техникой (Эйлер, Лаплас и др.), относились к ней без особого доверия и рассматривали ее как простое средство делать новые открытия, а не получать неопровержимые доказательства.

Положение мнимых чисел все еще было далеко не ясным и допускало двусмысленные истолкования. Проследим теперь за различными попытками обоснования комплексных чисел, которые предлагались в начале XIX в., и за тем, как каждое из определений — интерпретаций этих чисел — оплодотворяло новую мощную математическую теорию.

3. Геометрическое представление мнимых чисел

Вначале процитируем, в качестве предыстории этой идеи, соображения, высказанные Дж. Валлисом в его «Трактате по алгебре» (1685 г.): он предлагал интерпретировать мнимые корни квадратного уравнения как «*лежащие вне линии, на которой они измерялись бы, если бы были вещественными*». Валлис привел построение решений квадратного уравнения, в котором вещественные решения лежали на прямой, а мнимые — вне этой прямой. Позднее, в начале XVIII в., Стирлинг использовал скорее графическое, чем геометрическое, представление вида $\underset{a}{\underline{\quad}}\!\uparrow b$ для $a+b\sqrt{-1}$, но не рассматривал концевую точку этого графика. Понадобился еще почти целый век, чтобы перейти от этой стадии к истинному геометрическому представлению.

Напомним, в чем оно состоит. Всякому комплексному числу $z=a+bi$ ставится в соответствие точка M плоскости с заданными на ней двумя перпендикулярными осями. В этой прямоугольной декартовой системе координат точка M имеет абсциссу a и ординату b. Вещественные числа a изображаются точками оси Ox, а чисто мнимые числа b — точками оси Oy. В частности, числу i отвечают координаты 0 и 1.

В полярных координатах точка M задается длиной радиуса-вектора OM, обозначим ее ρ ($\rho \geqslant 0$), и одним из значений угла θ, который OM составляет с осью Ox. Число ρ называется модулем комплексного числа z, а θ — его аргументом. Таким образом, $z=a+ib=\rho(\cos\theta+ +i\sin\theta)$.

Сумма двух комплексных чисел z, z' представляется векторной суммой двух соответствующих векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM'}$. Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент— сумме аргументов (рис. 7.1). Умножить комплексное число z на другое комплексное число z' — это значит применить к отвечающему z вектору $\overrightarrow{OM}$ сохраняющее ориентацию преобразование подобия с центром O, определяемое величинами ρ' и θ', где ρ' — его коэффициент растяжения, а θ' — угол поворота. В частности, умножение на мнимое число i сводится к повороту вектора $\overrightarrow{OM}$ на угол $\pi/2$, а коэффициент растяжения в этом случае равен 1. Таким образом, символ i получает смысл оператора перехода к перпендикулярному вектору. Разумеется, вначале не принципы векторного исчисления и не понятие взаимно однозначного соответствия лежали в основе геометрического представления мнимых чисел;

наоборот, когда вырабатывалось это представление, складывались эти принципы и понятия.

Открытие геометрического представления мнимых чисел отличают две особенности:

1) большое число независимых, но сходных попыток, предпринятых главным образом математиками-любите-

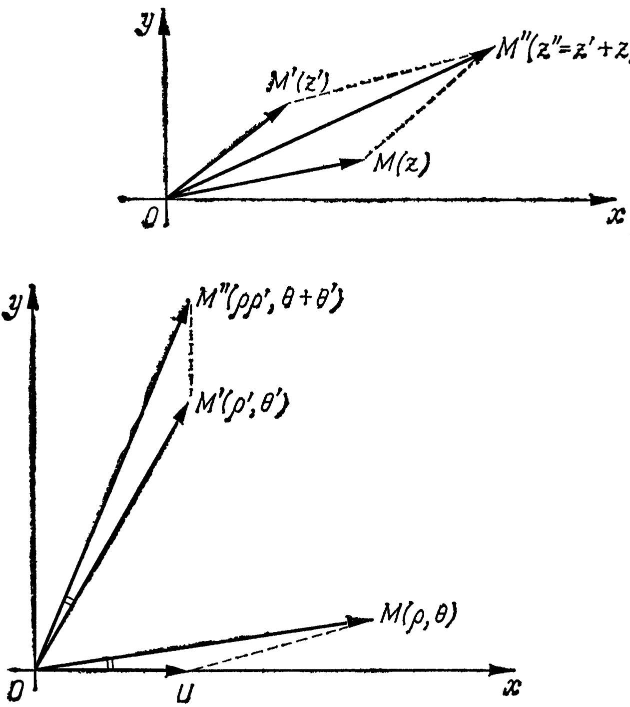


Рис. 7.1.

лями, не имевшими контактов с математическими кругами;

2) весьма сдержанное отношение к этим попыткам определенной части математиков, включая самых великих; в частности, заслуживает внимания мнение Гаусса, на котором мы остановимся подробнее.

Первый мемуар на эту тему принадлежит датчанину Каспару Весселю. Написанный в 1797 г., он стал известен лишь век спустя. В 1806 г. швейцарец из Женевы

Робер Арган опубликовал свою работу «Essai sur une matière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques» и независимо англичанин аббат Бюэ — менее важную статью, содержащую аналогичные идеи.

Книга Аргана получила известность лишь в 1813—1814 гг. в связи со статьей Франсэ в Annales de Gergonne. Арган настаивал на своем авторстве, и на страницах *Анналов* разгорелась дискуссия между Франсэ, Сервуа и Жергонном. К сожалению, несмотря на обсуждение в известном и широко читаемом математиками журнале, высказанные идеи остались незамеченными. В 1828 г. Уоррен в Англии и Муре во Франции — независимо друг от друга и, по-видимому, вне связи с работой Аргана — снова изобрели принцип представления и снова не удостоились внимания крупных математиков. Только после того как его принял Гаусс в 1831 г. и, с большим опозданием, Коши в 1847 г., он стал действительно общепризнанным.

Чем объяснить, что столь новое и важное открытие, имевшее решающее значение для новой теории функций комплексного переменного, создателем которой был Коши, так долго оставалось незамеченным?

4. Геометрический реализм против формализма символической алгебры

Помимо того что Арган и его соперники не принадлежали к числу авторитетных математиков, глубокая причина неприятия их идей лежала в другом: эти первые изложения, где в явном виде выступает идея соответствия между комплексными числами и точками плоскости, рассматривают геометрическое представление как несущее в себе то, что С. Башляр [1]) назвала «*интуитивным субстратом*», которого пока еще не хватало лишенным смысла и немного подозрительным символам, каковыми до тех пор были мнимые числа. Тем самым им придавалось право законного существования. Вот как предваряет Муре свою работу: «... *что нужно сказать о мнимых числах? Ум, который старается видеть ясно, разве не*

[1]) В этой части мы следуем анализу С. Башляр (точную ссылку см. в литературе к гл. 8).

сочтет некоторые вещи в них отталкивающими?... Нужно согласиться, что наука стала бы намного более удовлетворительной, если бы все ее части можно было основывать на строгих рассуждениях, на непосредственной очевидности, на простых идеях, осязаемых, как первые понятия геометрии».

Вот в чем суть метода Аргана. Он начинает с представления отрицательных чисел, в которых заложена идея абсолютной величины и направления. Далее он ищет «*род величины, в которой идея направления воплощалась бы таким образом, что если приняты два противоположных направления: одно для положительных значений, другое для отрицательных значений, существовало бы еще третье направление, такое, что положительное направление относилось бы к нему так, как оно само к отрицательному направлению*». В качестве этого третьего направления Арган предлагает перпендикулярное: «*Всякая линия, параллельная этому первоначальному направлению, выражается вещественным числом, а те, которые перпендикулярны к нему, выражаются мнимыми числами вида* $\pm a\sqrt{-1}$, *и, наконец, те, которые находятся на другом направлении, отличном от двух предыдущих, относятся к виду* $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, *который состоит из вещественной части и мнимой части*». Таким образом, вещественные и мнимые числа — объекты одной и той же природы, и употребление термина «мнимый» более неуместно: «*Эти линии столь же реальны, как первоначальная единица*». Своими «*направленными линиями*» Арган оперирует как векторами. Сложение двух направленных линий выполняется как сложение векторов. То же относится к умножению: перемножаются модули и складываются углы относительно некоего исходного направления, соответствующего вещественным числам. Для обоснования своего метода Арган выводит с его помощью обычные тригонометрические формулы.

Так же как и Вессель, Арган пытается обобщить свой метод и выйти в пространство, добавляя третье направление, перпендикулярное плоскости, образованной двумя предыдущими (вещественной и мнимой осями), однако безуспешно. Одним из главных достоинств этого представления казался его «*ощутимый для глаз*» характер.

Однако такая точка зрения — ее можно было бы назвать геометрическим реализмом — шокировала, например, Сервуа, который присоединялся к алгебраистам Кембриджской школы. Их первейшим требованием была *чистота* алгебры — науки символов и их комбинаций, независимой даже от арифметики и *тем более от любых геометрических формулировок* (см. гл. 8). Так, в одном письме 1813 г., опубликованном в Annales de Gergonne, Сервуа выдвигает следующее возражение против метода Аргана: «*Что касается меня, признаюсь, что не вижу в этих обозначениях ничего кроме геометрической маски, надетой на аналитические формы, непосредственное применение которых представляется мне более простым и более быстрым*».

Коши, возглавлявший французскую математическую школу первой половины XIX в., усиленно занимался установлением статуса мнимых чисел начиная со своего «Курса анализа» в Политехнической школе 1821 г. Он считал, что теория мнимых чисел покоится на «*принципах, которым недостает ясности*».

Коши принимает в высшей степени *формальное* представление этих чисел. Для него мнимое число есть некое «*символическое выражение*», само по себе не имеющее смысла, но подчиненное некоторым «*фиксированным правилам*» по неким «*установленным соглашениям*». Тем не менее эта символическая и формальная концепция Коши не имеет ничего общего с концепцией английской школы, в которой считались допустимыми любые действия над символами по определенным заранее законам, не связанным со свойствами вещественных или комплексных чисел. Коши всегда беспокоился о законности формул и о природе тех математических объектов, с которыми он оперировал.

Коши сделался явным сторонником геометрического представления только в 1847 г. В это время он прочитал, в частности, мемуар Барре де Сен-Венана, где излагались принципы векторного исчисления, и пришел к выводу, что «*понятие геометрической величины* — а комплексное число и есть пример такой величины размерности два — *включает в себя как частный случай понятие алгебраической величины*». Коши убежден, что подлинное *геометрическое исчисление* еще впереди (см. гл. 8). Таким образом, аналитик, которому претило использование «нечистых» геометрических средств, тогда сможет признать геометрическое представление как основополагающую теорию.

5. Истинный зачинатель — Гаусс

Как мы уже видели, когда шла речь об основной теореме алгебры, первым математиком, имевшим совершенно четкое представление о статусе мнимых чисел, был Гаусс.

По-видимому, идея их геометрического представления появилась у него в 1799 г., когда в своей диссертации он провел очень красивое чисто топологическое рассуждение, примененное в доказательстве основной теоремы алгебры. Нужно было показать, что многочлен P от комплексного переменного z имеет по крайней мере один корень z_0.

Гаусс пишет $P(z)=P(x+iy)=R(x, y)+iS(x, y)$, где R и S — многочлены от двух переменных x, y, и замечает, что точки (x_0, y_0) на плоскости, такие, что x_0+iy_0 есть корень P, лежат на пересечении кривых $R=0$ и $S=0$. Путем качественного изучения этих кривых он показывает, что непрерывная дуга одной из них соединяет точки двух различных областей, разграниченных второй кривой, и заключает отсюда, что кривые пересекаются. Но пока еще Гаусс не определил явно соответствия между точками плоскости и комплексными числами.

В своем знаменитом письме Бесселю, датированном 1811 г., Гаусс высказывается об этом соответствии со всей определенностью. Говоря о конечных интегралах с мнимыми пределами, он пишет: «*Так же как совокупность всех действительных величин можно мыслить в виде бесконечной линии, так и совокупность всех величин, действительных и мнимых, можно сделать зримой посредством бесконечной плоскости, каждая точка которой, определяемая абсциссой a и ординатой b, будет как бы представлять величину $a+bi$. Непрерывный переход от одного значения x к другому $a+bi$ совершается поэтому по линии и, следовательно, возможен бесконечно многими способами*».

Изучение переписки Гаусса и его заметок, опубликованных лишь после его смерти, приводит к выводу, что Гаусс хорошо понимал ценность геометрического представления с педагогической точки зрения и что его можно причислить к сторонникам определенного геометрического реализма. Гаусс, бесспорно, первым предвидел ту роль, которую должно было сыграть в дальнейшем геометрическое представление комплексных чисел как *методическое* средство в области анализа, и предугадал, какую пользу сумеют извлечь из него математики XIX в.

Однако Гаусс никогда не спешил публиковать полученные им результаты, особенно тогда, когда предчувствовал богатство теории, которой он еще недостаточно овладел. Он излагает свои идеи, касающиеся геометрического представления комплексных чисел, начиная с 1830 г. и особенно ясно говорит о них в мемуаре «Теория биквадратичных вычетов» (Theoria Residuorum Biquadraticorum) 1831 г. В нем Гаусс подробно изучает числа вида $a+ib$, где a и b целые рациональные; их называют теперь целыми *гауссовыми числами*. Хотя все изложение чисто арифметическое, предлагается наглядное изображение в виде целочисленной решетки на плоскости [1]). Геометрическое представление комплексных чисел завоевало право гражданства.

К концу 40-х гг. оно было принято повсеместно и привело к бурному развитию теории функций комплексного переменного, комплексного интегрирования и т. д., которое увенчалось гениальным обобщением Римана, заставившего комплексное переменное пробегать не плоскость, а поверхность, состоящую из налагающихся друг на друга листов.

6. Арифметический подход Гамильтона

Геометрическая теория комплексных чисел все же казалась неудобной, ибо связывала любые их алгебраические свойства с какими-то геометрическими рассмотрениями, как будто бы не относящимися к делу. Например, именно такой упрек ставил теории Гаусса Я. Бойяи.

Ирландский математик Уильям Р. Гамильтон (1805—1866), который занимался проблемами оснований ариф-

---

[1]) Выделение Гауссом *целых* комплексных чисел и построение их арифметики сыграло решающую роль в признании выражений $a+bi$ *числами*.—*Прим. ред*.

метики и алгебры и пытался вернуть их к рассмотрению «чистого времени» — времени, столь важного для англичан после Ньютона,— к 1835 г. разработал арифметическую теорию комплексных чисел. В этой теории они рассматриваются как пары вещественных чисел, а сумма и произведение пар определяются явными формулами

$$(a, b)+(a', b')=(a+a', b+b'),$$
$$(a, b)\times(a', b')=(aa'-bb', ab'+ba').$$

Вещественные числа отождествляются с парами вида $(a, 0)$, и имеют место соотношения

$$(a, b)=(a, 0)+(0, b)=(a, 0)(1, 0)+(b, 0)\times(0, 1).$$

Пару $(1, 0)$ Гамильтон называет первичной единицей, а пару $(0, 1)$ — вторичной единицей. Тогда можно отождествить (a, b) с $a+b\sqrt{-1}$. По поводу уравнения с двумя неизвестными $(x, y)^2=(-1, 0)$, решением которого является пара $(0, 1)$, Гамильтон пишет: «*В теории обычных чисел символ* $\sqrt{-1}$ *абсурден, но в теории пар тот же символ* $\sqrt{-1}$ *имеет смысл и указывает на возможность извлечения или на вещественную пару, а именно главное значение квадратного корня из пары* $(-1, 0)$. *В этой последней теории, следовательно, вполне можно пользоваться знаком* $\sqrt{-1}$, *что было бы невозможно в первой*». Итак, Гамильтон удовлетворен тем, что удалось *обойти* препятствие, каким была запись квадратного корня из отрицательного числа, и избавиться от таинственного символа $\sqrt{-1}$.

Такой подход привел Гамильтона к попыткам определить операции сложения и умножения для троек вещественных чисел, причем так, чтобы эти операции обладали свойствами сложения и умножения самих вещественных чисел (т. е. были ассоциативны и коммутативны, а умножение было дистрибутивно относительно сложения). В течение нескольких лет все попытки Гамильтона разработать алгебраическое исчисление трехмерных комплексных чисел оставались тщетными.

Однако вопреки своим исходным установкам Гамильтон придавал большое значение геометрической интерпретации этого алгебраического исчисления в трехмерном пространстве. Впрочем, почти в то же самое время над этой же проблемой работали и многие другие математики, те же Вессель, Гаусс, Сервуа, Мёбиус. Основываясь на том, что комплексные числа и действия над ними соответствовали действиям над векторами на плоскости, они искали подобные аналоги в трехмерном пространстве.

После многолетних усилий Гамильтону пришлось сделать две уступки: во-первых, его новые числа были

4. Описание кватернионов

Кватернионы можно рассматривать как четверки (a, b, c, d) или как линейные комбинации четырех единиц e, i, j, k с вещественными коэффициентами.

Произвольный кватернион записывается в виде $q = ae + bi + cj + dk$, где e — единица, равная 1, а i, j, k — единицы, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{gathered}i^2 = j^2 = k^2 = -1,\\ ij = k, \quad ji = -k,\\ jk = i, \quad kj = -i,\\ ki = j, \quad ik = -j;\end{gathered}$$

a, b, c, d — вещественные числа; 1, i, j, k не складываются между собой.

Можно определить

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk$$

и проверить, что

$$q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Обратным к кватерниону q является кватернион

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{-1} \cdot \bar{q}.$$

Кватернионы образуют некоммутативное тело, содержащее в качестве подполя поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Они образуют также четырехмерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Таким образом, мы имеем здесь алгебру над $\mathbb{R}$ размерности 4.

четверками, т. е. состояли не из трех, а из четырех компонент, и, во-вторых, он был вынужден отказаться от коммутативности умножения. Гамильтон назвал свои новые числа *кватернионами* (см. табл. 4).

С геометрической точки зрения можно объяснить, почему у новых чисел четыре компоненты: рассматриваемые как операторы в пространстве $\mathbb{R}^3$ они должны подвергать каждый вектор из $\mathbb{R}^3$ повороту вокруг некоторой заданной оси и затем умножению на скаляр. Именно это было бы аналогом того факта, что комплексные числа определяют *подобия* на плоскости $\mathbb{R}^2$. Но тогда требуются два параметра (два угла), чтобы задать ось вращения, один параметр для указания угла поворота и один параметр для умножения на скаляр.

Что же касается свойства некоммутативности умножения, то его признание в то время было настоящим переворотом и в идейном плане явилось важным шагом на пути к общему понятию *закона композиции*. Между прочим, как раз в работе Гамильтона о кватернионах впервые употреблен термин «ассоциативность», означающий, что некая операция, обозначаемая символом $\times$, удовлетворяет соотношению

$$x\times (y\times z)=(x\times y)\times z.$$

Позднее Кэли, отбросив требование ассоциативности умножения, построил обобщение кватернионов — *октавы Кэли* — наборы, состоящие из восьми компонент, с двумя операциями. Вслед за Гамильтоном, Кэли и др. к концу XIX в. появилось много работ, посвященных более широким системам чисел, названных *гиперкомплексными*; теперь такие системы называют алгебрами конечного ранга.

Открытие кватернионов было опубликовано в 1843 г., и остаток жизни Гамильтон посвятил развитию этой темы и поискам приложений в различных областях математики и физики. Известный вклад внесли кватернионы в зарождение векторного исчисления.

7. Алгебраический подход Коши — сравнения

В 1847 г., уже совсем было готовый принять, наконец, геометрическое представление, Коши продолжает беспокоиться по поводу мнимых чисел. Он выдвигает новую теорию, где говорится об «*алгебраических эквивалентностях*», и во вступлении к ней пишет: «*Однако очевидно, что теория мнимых чисел стала бы еще намного более ясной и намного легче постижимой, что она могла бы находиться в пределах досягаемости любого рассудка, если* *бы удалось свести мнимые выражения, да и саму букву i не к чему иному, как к вещественным величинам».*

Коши ссылается на недавний мемуар немецкого математика Куммера и напоминает введенное им обозначение: $P(x) \equiv Q(x)$ $[\bmod\, \omega(x)]$, если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ дают один и тот же остаток при делении (алгебраическом) на многочлен $\omega(x)$. Это пример того, что мы сегодня называем отношением эквивалентности. Рассматривая случай, когда $\omega(x) = x^2+1$, Коши *«принимает в качестве основного соглашения то, что символическая буква i, подставленная вместо x в целую функцию $f(x)$ — т. е. многочлен — указывает на значение, которое принимает не $f(x)$, а остаток от алгебраического деления $f(x)$ на x^2+1, когда x придается конкретное значение i».*

Таким образом, подход Коши состоит в том, чтобы сводить вычисления с комплексными числами к вычислениям с многочленами от переменного i по обычным алгебраическим правилам, заменяя всякий раз, когда это возможно, выражение i^2+1 нулем. Это означает, что два многочлена эквивалентны, т. е. определяют одно и то же комплексное число, если их разность делится на x^2+1.

На современном языке можно сказать, что Коши установил изоморфизм между полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и полем классов вычетов многочленов с вещественными коэффициентами по модулю x^2+1.

Куммер и Кронекер в свою очередь встали на эту точку зрения [1]) и рассмотрели классы вычетов по модулю других неприводимых многочленов, отличных от x^2+1. Это стало отправным моментом теории полей разложения многочленов, теории алгебраических чисел и других весьма плодотворных более общих построений новых алгебраических объектов, развитых в основном немецкой алгебраической школой начиная со второй половины XIX в. (см. гл. 8).

Так на протяжении прошлого века за контурами лишь одного математического объекта постепенно проступало

---

[1]) Следует отметить, что метод функциональных сравнений (т. е. по модулю, являющемуся не числом, а функцией) восходит к Гауссу, который применил его в своем втором доказательстве основной теоремы алгебры. По свидетельству самого Кронекера, он «вычитал» построение поля разложения из мемуара Гаусса.— *Прим. ред.*

гигантское здание математики во всем своем великолепии и немыслимом разнообразии.

Немного о терминах

Мнимый: Декарт, 1637

Модуль: Арган, 1806

Аргумент: Коши, 1838

Комплексное число: Гаусс, 1831

Число $N(z)$ (квадрат модуля): Гаусс, 1831

Обозначение $|z|$ для модуля: К. Вейерштрасс

Обозначение i: Эйлер, 1777, возобновлено Гауссом

Глава 8

НОВЫЕ ОБЪЕКТЫ. НОВЫЕ ЗАКОНЫ ВЫДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Теоретико-множественные понятия и простые алгебраические структуры (группа, кольцо, поле, векторное пространство) входят теперь, в конце XX в., в математический багаж школьника-старшеклассника и студента на самых первых порах высшего математического образования. Некоторые из этих структур являются абсолютно основополагающими для всей математики, но как медленно шло их выделение на протяжении XIX в.! Часто исходным пунктом для того или иного понятия были весьма сложные примеры по сравнению с теми, с которыми знаком наш читатель.

В предыдущей главе мы показали, ценой каких трудностей и колебаний математики приняли расширение традиционной числовой области — введение комплексных чисел. Тем более *исчисления* величин совсем иной природы, чем числа, а именно исчисления множеств или отображений, сложились не сразу и не сами собой. Впрочем, главным препятствием здесь было, по-видимому, отсутствие теоретико-множественных понятий и языка, которые сформировались лишь к 1900 г.

А теперь мы проследим, как происходило исследование некоторых из этих новых математических объектов. В течение первой половины XIX в. математики были склонны видеть в них обособленные явления; но вскоре они обнаружили тесные аналогии в поведении разных объектов и пытались выразить (позднее будут говорить «аксиоматизировать») то общее, что свойственно многим конкретным ситуациям.

Так, постепенно целью алгебры стало абстрактное изучение алгебраических структур независимо от их различных реализаций, и эта тенденция была неотделима от общего процесса аксиоматизации математики в целом.

Мы не будем подробно изучать математические работы, которые упоминаются в этой главе, но попытаемся пролить свет на то, каким образом они участвовали в общем процессе, который мы только что описали. Мы часто вынуждены будем пользоваться очень точной современной терминологией, которая, конечно, сложилась позднее, но в ней проявился труд математиков следующих поколений: уточнение, разграничение введенных понятий и постановка новых задач на основе уточненных определений.

1. «Арифметические исследования» Гаусса

Замечательный труд «Disquisitiones arithmeticae» («Арифметические исследования»), написанный Гауссом в юности и опубликованный в 1801 г., ознаменовал рождение современной теории чисел. Он определил ее основные направления вплоть до наших дней. В нем Гаусс классифицировал задачи, которые требовалось решить в этой области, и методы их решения, известные со времен Эйлера и Лагранжа; кроме того, он ввел мощные новые методы.

Три основные составляющие работы Гаусса — это теория сравнений, алгебраические числа и теория форм. Все три теории оказались невероятно богаты заключенными в них неявными структурами.

Теория форм

Третья из упомянутых тем широко развита в «Арифметических исследованиях»; теория форм стала главной идеей диофантова анализа. Именно в ней Гаусс очень четко применил законы композиции к множествам и, таким образом, впервые изложил исчисление абстрактных объектов, не являющихся больше числами. Именно по этой причине мы рассмотрим ее в первую очередь.

Выражение $ax^2+2bxy+cy^2$ (где, a, b, c — целые рациональные) является бинарной квадратичной формой. Первая задача состоит в нахождении множества целых чисел M, представимых данной формой (a, b, c фиксированы). Обратная задача состоит в том, чтобы по данным

M, a, b, c или классу чисел a, b, c найти значения x и y, представляющие M.

В этой области Лагранж доказал ключевой результат: если число M представимо некоторой формой, то оно представимо и многими другими формами, которые Лагранж называл *эквивалентными*; каждая из этих форм получается из исходной формы с помощью замены переменных

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y',$$

где α, β, γ, δ — целые рациональные, удовлетворяющие соотношению $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ (это преобразование называется унимодулярным преобразованием с целыми коэффициентами).

Кроме того, Лагранж разбил формы с данным дискриминантом $b^2 - ac$ на конечное число классов, каждый из которых состоит из эквивалентных между собой форм.

Из этих результатов Гаусс извлек понятие эквивалентности форм и подчеркнул его важность. Он рассмотрел форму

$$F = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

которая преобразованием

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y'$$

приводится к новой форме

$$F' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2.$$

Затем Гаусс показал, что

$$b'^2 - a'c' = (b^2 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

Если $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1$, то дискриминанты обеих форм равны, и в этом случае существует обратное преобразование с целыми коэффициентами, позволяющее перейти от F' к F. Тогда говорят, что F и F' *эквивалентны*, и это отношение действительно является отношением эквивалентности в обычном современном смысле (т. е. рефлексивно, симметрично и транзитивно).

По определению две эквивалентные формы имеют один и тот же дискриминант. Но не все формы, имеющие один и тот же дискриминант D, эквивалентны между собой. Гаусс доказал, что их можно разбить на конечное число классов эквивалентности и в каждом классе любая форма может быть выбрана в качестве представителя этого класса. Затем он определил произведение форм.

Если форма $F=AX^2+2BXY+CY^2$ при помощи подстановки $X=p_1xx'+p_2xy'+p_3x'y+p_4yy'$ и $Y=q_1xx'+$ $+q_2xy'+q_3x'y+q_4yy'$ преобразуется в произведение двух форм

$$f=ax^2+2bxy+cy^2 \text{ и } f'=a'x'^2+2b'x'y'+c'y'^2$$

(при этом удовлетворяется некоторое дополнительное условие), то Гаусс писал, что F есть *композиция* f и f'; обозначим это так: $F=f*f'$.

Затем он доказал следующую важную теорему: если f и g — две формы, принадлежащие одному и тому же классу эквивалентности C_1, а f' и g' — две формы, принадлежащие другому классу C_2, то $f*f'$ и $g*g'$ — эквивалентные формы, принадлежащие одному и тому же классу C_3. И Гаусс писал: $C_3=C_1+C_2$.

Здесь он сделал решительный шаг — обозначил одной-единственной буквой класс эквивалентных форм, которым он смог манипулировать как *одним* объектом. Кроме того, закон композиции для этих новых объектов записан Гауссом аддитивно, в то время как более естественно было бы его записывать мультипликативно. Это свидетельствует о глубоком понимании Гауссом этого понятия вне зависимости от обозначений, которыми оно выражается. При помощи этого закона композиции множество классов эквивалентности форм с заданным дискриминантом было наделено структурой нециклической абелевой конечной группы [1]). Гаусс использовал эту композицию форм, чтобы показать, что если x и y — решения уравнения $f(x, y)=n_1$, а x' и y' — решения уравнения $f'(x', y')=n_2$, то они дают при помощи рассмотренной выше подстановки решения X и Y уравнения $F(X, Y)=n_1n_2$. Он получил множество новых результатов, в частности связанных с теоремой Ферма.

---

[1]) Группа называется циклической, если она порождена единственным элементом.

Теория сравнений

Два числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если их разность делится на m. Сравнения по модулю фиксированного числа можно складывать, вычитать, перемножать. С давних времен они использовались при проверке правильности умножения на 7, 9 или 11.

Можно даже решать сравнения, содержащие неизвестное. Например, сравнение $3x \equiv 17 \pmod{12}$ не имеет решения, а сравнение $x^2 \equiv 4 \pmod 5$ имеет два различных несравнимых по модулю 5 решения $x=2$ и $x=3$. Все это уже было известно, и доказанная Лагранжем основная теорема гласила, что сравнение

$$Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Mx+N\equiv 0 \pmod p,$$

где p — простое число, не делящее A, имеет не более n несравнимых по модулю p корней.

Обозначение Гаусса $a\equiv b \pmod m$ стало стандартным; его принял Куммер и вся немецкая школа, хотя Коши предпочитал термин алгебраическая эквивалентность (см. гл. 7).

Отношение сравнения является отношением эквивалентности; оно разбивает множество целых чисел на конечное число классов. В первый класс входят все числа, делящиеся на m, т. е. сравнимые с 0 по модулю m, во второй класс входят все числа, сравнимые с 1 по модулю m, . . ., в m-й класс входят все числа, сравнимые с $m-1$ по модулю m.

Эти m классов (классы вычетов по модулю m) можно обозначить символами $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, . . ., $\overline{m-1}$ и перенести на них операции сложения и умножения. Тем самым на этом множестве, обозначаемом $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, вводится структура кольца. Если m — простое число p, то каждый элемент кольца $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ имеет обратный и $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ является полем. Мы приводим таблицы сложения для $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ (см. табл. 1).

Эйлер исследовал первообразные корни сравнения по модулю p: если g является таким корнем, то всякое целое число сравнимо по модулю p с некоторой степенью g (т. е. мультипликативная группа поля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ с исключенным нулем циклична, порождена g и ее элементы могут быть записаны в виде $g^0=1$, g, g^2, . . ., g^{p-1}). Гаусс расширил эти результаты. Он определил «квадратичные вы-

1. Исчисление сравнений

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

Таблица сложения

	$\bar0$	$\bar1$	$\bar2$	$\bar3$	$\bar4$
$\bar0$	$\bar0$	$\bar1$	$\bar2$	$\bar3$	$\bar4$
$\bar1$	$\bar1$	$\bar2$	$\bar3$	$\bar4$	$\bar0$
$\bar2$	$\bar2$	$\bar3$	$\bar4$	$\bar0$	$\bar1$
$\bar3$	$\bar3$	$\bar4$	$\bar0$	$\bar1$	$\bar2$
$\bar4$	$\bar4$	$\bar0$	$\bar1$	$\bar2$	$\bar3$

Таблица умножения

	$\bar0$	$\bar1$	$\bar2$	$\bar3$	$\bar4$
$\bar0$	$\bar0$	$\bar0$	$\bar0$	$\bar0$	$\bar0$
$\bar1$	$\bar0$	$\bar1$	$\bar2$	$\bar3$	$\bar4$
$\bar2$	$\bar0$	$\bar2$	$\bar4$	$\bar1$	$\bar3$
$\bar3$	$\bar0$	$\bar3$	$\bar1$	$\bar4$	$\bar2$
$\bar4$	$\bar0$	$\bar4$	$\bar3$	$\bar2$	$\bar1$

Каждый элемент имеет обратный: $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ — поле; 2 — первообразный корень сравнения по модулю 5. Действительно, 2 порождает мультипликативную группу поля $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ с исключенным нулем.

Имеем: $\bar2^1=\bar2$, $\bar2^2=\bar4$, $\bar2^3=\bar3$, $\bar2^4=\bar1$.

$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

Таблица умножения

	$\bar0$	$\bar1$	$\bar2$	$\bar3$	$\bar4$	$\bar5$	$\bar6$	$\bar7$
$\bar0$	$\bar0$	$\bar0$	$\bar0$	$\bar0$	$\bar0$	$\bar0$	$\bar0$	$\bar0$
$\bar1$	$\bar0$	$\bar1$	$\bar2$	$\bar3$	$\bar4$	$\bar5$	$\bar6$	$\bar7$
$\bar2$	$\bar0$	$\bar2$	$\bar4$	$\bar6$	$\bar0$	$\bar2$	$\bar4$	$\bar6$
$\bar3$	$\bar0$	$\bar3$	$\bar6$	$\bar1$	$\bar4$	$\bar7$	$\bar2$	$\bar5$
$\bar4$	$\bar0$	$\bar4$	$\bar0$	$\bar4$	$\bar0$	$\bar4$	$\bar0$	$\bar4$
$\bar5$	$\bar0$	$\bar5$	$\bar2$	$\bar7$	$\bar4$	$\bar1$	$\bar6$	$\bar3$
$\bar6$	$\bar0$	$\bar6$	$\bar4$	$\bar2$	$\bar0$	$\bar6$	$\bar4$	$\bar2$
$\bar7$	$\bar0$	$\bar7$	$\bar6$	$\bar5$	$\bar4$	$\bar3$	$\bar2$	$\bar1$

Из таблицы видно, что в этом кольце имеются «делители нуля» (например, $\bar2\cdot\bar4=\bar0$).

Отметим, что $\bar3$ порождает циклическую аддитивную группу $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, поскольку

$\bar3\cdot\bar0=\bar0$, $\bar3\cdot\bar1=\bar3$, $\bar3\cdot\bar2=\bar6$, $\bar3\cdot\bar3=1$, $\bar3\cdot\bar4=\bar4$, $\bar3\cdot\bar5=\bar7$, $\bar3\cdot\bar6=\bar2$, $\bar3\cdot\bar7=\bar5$.

То же самое верно для $\bar5$ и $\bar7$. Гаусс доказал, что это происходит потому, что 3 взаимно просто с 8 (так же как 5 и 7). См. также табл. 4 этой главы.

четы» поля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: a является квадратичным вычетом по модулю p, если существует такое x, что $x^2 \equiv a \pmod p$ (иными словами, если у a имеется квадратный корень в поле $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). Благодаря своей теории квадратичных вычетов [1]) он получил два доказательства знаменитого квадратичного закона взаимности Лежандра (см. табл. 2).

2. Квадратичный закон взаимности

В 1798 г. Лежандр определил символ *), носящий его имя:

$\left(\frac{n}{m}\right) = +1$, если n является квадратичным вычетом по модулю m,

$\left(\frac{n}{m}\right) = -1$, если n не является квадратичным вычетом по модулю m.

Тогда квадратичный закон взаимности формулируется следующим образом:

$$\left(\frac{n}{m}\right)\cdot\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}.$$

Гаусс дал восемь доказательств этого закона. Впрочем, по числу ее опубликованных доказательств эта теорема занимает одно из первых мест. В 1963 г. появилось 152-е доказательство квадратичного закона взаимности!

*) Лежандр определил символ $\left(\frac{n}{m}\right)$ для нечетных простых чисел m и n. Впоследствии Якоби распространил его на случай, когда m и n — любые нечетные числа. — *Прим. ред.*

Чтобы решить уравнение $x^{17}-1=0$, Гаусс использовал «изоморфизм» аддитивной группы G_1 и мультипликативной группы G_2 (где G_1 — аддитивная группа целых по модулю 16, а G_2 — мультипликативная группа классов вычетов по модулю 17), т. е. взаимно однозначное соответствие f между G_1 и G_2, такое, что $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$. Этот изоморфизм определяет порядок (подходящий для данной задачи) (см. табл. 12 гл. 3), в котором расположены элементы G_2.

[1]) Теорию квадратичных вычетов также развил Эйлер. Он же открыл квадратичный закон взаимности. Однако ни он сам, ни Лежандр не смогли его доказать. Первое доказательство этого «золотого закона» принадлежит Гауссу. — *Прим. ред.*

Хотя в этой части Гаусс не проводил вычислений непосредственно над классами эквивалентности — элементами поля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, а по обычаю своего времени манипулировал с алгебраическими соотношениями, его результаты можно перевести на современный язык алгебраических структур.

Приведение в систему теории сравнений сыграло очень важную роль: благодаря этому в последующие десятилетия были окончательно выяснены понятия классов эквивалентности, фактормножества, структур конечных колец и конечных полей.

Кроме того, в случае когда рассматриваются сравнения по модулю простого числа p, очень велика аналогия между сравнениями и уравнениями; при этом теорема Лагранжа становится аналогом основной теоремы алгебры. Но мы видели (гл. 3 и 7), что именно для решения алгебраических уравнений было «создано» поле комплексных чисел. Отметим, что в подобных же целях — для решения сравнений — французский математик Эварист Галуа ввел в 1829 г. свое гениальное изобретение — новые «воображаемые». Он изучал сравнения $F(x)\equiv 0$ $(\mathrm{mod}\ p)$. В случае когда это сравнение не имеет решения (для того чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, что p целых чисел $0, 1, \ldots, p-1$, если их последовательно подставить вместо x в многочлен $F(x)$, не дадут числа, кратного p), Галуа писал: «*Но тогда корни этого сравнения нужно рассматривать как род воображаемых символов, так как они не удовлетворяют требованиям, предъявляемым к целым числам; роль этих символов в исчислении будет часто столь же полезной, как роль воображаемого* $\sqrt{-1}$ *в обычном анализе*...», и к этим символам применимы те же четыре действия, что и к обычным числам.

Идеи Галуа открыли путь к построению новых полей — алгебраических расширений гауссовых полей классов вычетов $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (подобно тому как поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ является квадратичным алгебраическим расширением поля $\mathbb{R}$ вещественных чисел). Но лишь к 1870 г. идеи Галуа были усвоены математиками.

Позднее удалось даже доказать, что *всякое конечное коммутативное поле обязательно является полем Галуа* (т. е. того типа, который открыл Галуа). Но чтобы прийти к такой формулировке, надо было, по словам Жана

Итара, *«встать на абстрактную и аксиоматическую точку зрения, постулировать требуемые свойства, принять существование поля, наделенного этими свойствами, и с помощью точного исследования найти объекты, изобретенные их творцом»*. Подобный подход в начале XIX в. был немыслим. Когда же в начале XX в. он стал преобладающим, математики смогли абстрактно исследовать последствия каждого из свойств; так, Веддербёрн в 1905 г. доказал, что нет необходимости постулировать коммутативность, так как *всякое конечное поле коммутативно*, т. е. является полем Галуа (алгебраическим расширением поля классов вычетов $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

Гауссовы целые числа

Желая обобщить свою теорию квадратичных вычетов, Гаусс в «Арифметических исследованиях» ввел *«комплексные целые»*, которые называются теперь гауссовыми целыми. Это числа вида $a+bi$, где a и b — целые рациональные, а $i=\sqrt{-1}$. Эту теорию Гаусс развил в мемуаре «Теория биквадратичных вычетов» («Theoria residuorum biquadraticorum»), опубликованном в 1832 г.

Множество этих чисел, обозначаемое $\mathbb{Z}[i]$, образует кольцо, обладающее следующими простыми арифметическими свойствами, вполне аналогичными свойствам кольца целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$: существование алгоритма Евклида для деления, тождественного алгоритму деления в случае $\mathbb{Z}$, а значит, и подобной теории делимости; существование обратимых элементов или «единиц» (их четыре: ± 1 и $\pm i$), «простых» элементов, т. е. элементов, которые не могут быть записаны в виде произведения двух гауссовых чисел, ни одно из которых не является единицей. Так, $5=(1+2i)(1-2i)$ не является простым в $\mathbb{Z}[i]$, в то время как 3 является простым. Кроме того, в $\mathbb{Z}[i]$ любое гауссово целое однозначно разлагается на простые гауссовы делители.

Наконец, $\mathbb{Z}[i]$ является кольцом целых поля $\mathbb{Q}(i)$ в том же смысле, в каком кольцо $\mathbb{Z}$ является кольцом целых поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (т. е. существует вложение $\mathbb{Z}[i]$ в $\mathbb{Q}(i)$, и каждое гауссово целое число имеет обратный элемент в $\mathbb{Q}(i)$ вида $r+is$, где r и s — рациональные числа).

Гаусс доказал все эти результаты, ставшие зародышем теории алгебраических чисел, развитием которой в дальнейшем занимались Куммер и Дедекинд [1]); эти результаты легли в основу коммутативной алгебры.

Гаусс и глубокое единство математики

В «Арифметических исследованиях», как и во всех других трудах Гаусса, развиты очень мощные алгебраические методы. В этих работах обнажились многие абстрактные понятия, образующие костяк новой алгебры: отношение и класс эквивалентности, факторможество, сравнения, кольцо и поле классов вычетов, поле расширения, абелевы группы и т. д. Например, теория конечных абелевых групп встречается в «Арифметических исследованиях» в четырех разных контекстах: при изучении аддитивной группы целых по модулю n; при рассмотрении мультипликативной группы вычетов по модулю n чисел, взаимно простых с n; при исследовании мультипликативной группы корней n-й степени из единицы и, наконец, в связи с группами классов бинарных квадратичных форм.

К тому же, точка зрения Гаусса очень современна: «*Математик совершает полную абстракцию от природы объектов и смысла их отношений: ему надо только перечислить эти отношения и сравнить их между собой*». Но, как ни богаты труды Гаусса этими новыми структурами, они находятся там в скрытом виде, как бы замаскированными. Интересно задаться вопросом, почему Гаусс рассматривал классы эквивалентности для бинарных квадратичных форм и не рассматривал их для сравнений по модулю n. Ж. Дьедонне видит в этом нежелание вводить обозначения без действительной необходимости. При сложных вычислениях композиции квадратичных форм переход к классам эквивалентности действительно удобен как в теоретическом, так и в вычислительном отношении, чего нет, как полагал Гаусс, в случае сравнений.

Гаусс глубоко ощущал внутреннее единство математики, он прекрасно осветил иногда очень неожиданные

[1]) Наряду с Дедекиндом и одновременно с ним арифметику полей алгебраических чисел построил Е. И. Золотарев (1847—1878). — *Прим. ред.*

взаимосвязи отдельных ее областей. Так, он предложил восемь доказательств квадратичного закона взаимности, четыре доказательства основной теоремы алгебры, относящихся к разным ветвям математики, показал связь между комплексными числами и геометрией, между вращениями сферы и гомографическими преобразованиями плоскости комплексного переменного и т. д.

Но эта глубокая прозорливость Гаусса не опиралась, как в XX в., на явные определения общих структур; напротив, она послужила импульсом для их выявления.

2. Группы подстановок и теория Галуа

Труды Коши

В 1815 г. О.-Л. Коши опубликовал в «Журнале Политехнической школы» два мемуара, в которых исследовал задачу, возникшую в теории уравнений (см. гл. 3: анализ

3. Подстановка, не изменяющая функцию многих переменных (Коши, 1815 г.)

Пусть дана функция $f(x, y, z) = x + y + z + x^2$.

Она не изменяется при тождественной подстановке и подстановке

$$T = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & z & y \end{pmatrix},$$

меняющей местами y и z.

Таким образом, порядок группы подстановок, оставляющей эту функцию инвариантной, равен 2.

Функция может принимать три $(3 = 3!/2)$ следующих различных значения:

$$x + y + z + x^2;$$
$$x + y + z + y^2;$$
$$x + y + z + z^2.$$

мемуара Лагранжа 1770—1771 гг.): найти *число значений, которые может принимать некоторая функция при всевозможных перестановках входящих в нее величин.* Формулировка этой задачи и вошла в название первого мемуара.

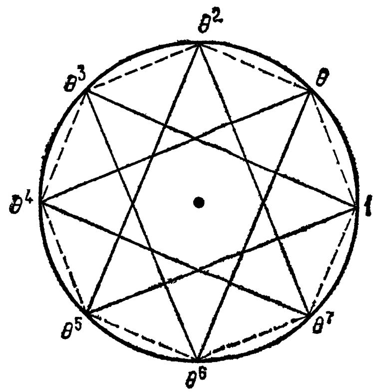
В нем Коши обрисовал контуры системы понятий, в которой развивается теория подстановок, а затем и теория групп. Если некоторая функция зависит от n переменных, то число M различных значений, которые она может принимать при перестановке переменных, является делителем $n!$, а число подстановок, оставляющих эту функцию инвариантной, равно $n!/M$, и они образуют группу (см. пример в табл. 3).

Этот результат уже был доказан Лагранжем, но Коши пошел значительно дальше. Он изобрел двустрочное обозначение для подстановок: образ каждого символа располагался во второй строке под этим символом. Это обозначение он сократил до $\binom{A}{B}$ и оперировал с произведениями подстановок, а также определил порядок подстановки как наименьшую степень подстановки $\binom{A}{B}$, такую, что $\binom{A}{B}^n$ есть тождественная подстановка. Коши изучал то, что сейчас называется циклической группой, порожденной данной подстановкой S порядка n. (Однако Коши еще не пользовался для обозначения подстановки одним-единственным символом, как это сделал Галуа.) Но очевидно, что две циклические группы одного и того же порядка изоморфны. Итак, Коши доказал, что если r и n — взаимно простые числа, то S^r порождает ту же циклическую группу, что и S. Он пришел к этому результату с помощью рассуждения, которое применял Гаусс в «Арифметических исследованиях» при доказательстве того, что если α_i — первообразный корень n-й степени из единицы, то α_i^r тоже является первообразным корнем n-й степени из единицы (см. табл. 4).

Но даже такая тривиальная для нас «аналогия структур» не была в то время выявлена и стала очевидной лишь через несколько десятков лет.

Эти мемуары Коши были прочитаны Абелем и Галуа в 1826—1832 гг., но сам Коши потерял интерес к этим вопросам почти на тридцать лет. Лишь в 1844—1846 гг., за несколько месяцев до публикации Лиувиллем наследия Галуа (см. ниже), Коши вернулся к этой теме и опубликовал большой мемуар «О размещениях, которые можно составить из данных букв», а также многочисленные за-

4. Пример циклической группы порядка 8



Восемь вершин многоугольника могут изображать восемь корней 8-й степени из единицы; эту группу порождает элемент $\theta = e^{2i\pi/8} = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)$.

Они могут также представлять подстановку S порядка 8 (S^8 — тождественная подстановка) и ее последовательные степени.

Если отправляться от элемента θ^r (например, θ^3), то, как заметил Коши, для вычисления его последовательных степеней надо соединить вершины многоугольника через каждые r вершин, и если r взаимно просто с 8, то полученный звездчатый многоугольник имеет те же вершины, что и исходный выпуклый многоугольник. В этом случае

θ^r также является порождающим элементом группы,
θ^r также называется первообразным корнем 8-й степени из единицы.

метки в «Отчетах» Академии. Эти работы вместе составили систематическое исследование корректно определенной структуры — группы подстановок n букв; эта группа имеет порядок $n!$ и называется ныне симметрической группой S_n.

Здесь впервые изучение подстановок выходит за рамки теории уравнений. Группы подстановок — Коши называл их *«системами сопряженных подстановок»* — стали самостоятельным объектом, им и посвящен «Мемуар о размещениях...» Тем самым Коши бесспорно внес вклад в обновление алгебры, наметившееся во второй половине

XIX в.: исследование алгебраических структур как самостоятельных объектов и осознание роли операций.

Коши в этой своей работе основал настоящее *исчисление подстановок*, используя при этом все направления и возможности разработанных им операторных методов (манипуляции с группами букв, на которых определены подстановки, для установления общих условий коммутативности, запись подстановок в виде произведения циклов, обозначение одной буквой и т. д.).

В действительности это исчисление подстановок Коши не имело определенной цели, и понадобился толчок со стороны теории уравнений, чтобы проявилось все богатство теории подстановок. К. Жордан воспользовался некоторыми методами Коши для восстановления фрагментарных доказательств Галуа.

Новый алгебраический формализм, введенный Коши для подстановок, и в частности обозначение подстановки одной-единственной буквой, привел его в восторг. Он сравнивал свое открытие с изобретением лейбницевой символики в исчислении бесконечно малых. Построение других исчислений, например теории сравнений Гаусса или барицентрического исчисления Мёбиуса, вызывало у их творцов не меньший энтузиазм. Казалось, что они открывают путь для исследования новых математических объектов без затраты дополнительных усилий и воображения.

На одном примере Коши осветил понятие гомоморфизма группы подстановок G_1 на другую такую группу G_2 и показал, что его ядро является подгруппой группы G_1. Этот пример очень важен, поскольку он открыл дорогу новой идее *переноса* определенных свойств с одной структуры на другую при помощи гомоморфизма.

Случай Коши интересен тем, что этот крупный математик, особенно плодовитый в области анализа, чутко уловил тогда еще неясные тенденции новой алгебры. Он возлагал большие надежды на формализм, понимая, что одни и те же процедуры символического исчисления могут быть применимыми в самых разных теориях. Однако его практика была более скромной, и эти надежды понастоящему еще не опирались на действительно выявленные аналогии между структурами.

Яркая и трагическая жизнь Эвариста Галуа

Эварист Галуа (1811—1832) — это, без сомнения, самая волнующая и необычная фигура среди всех математиков, известных в истории науки. Он прославился как глубиной своих работ и идей, лежащих у самых истоков современной алгебры, так и своей мятежной, полной страстей жизнью, трагически оборвавшейся в возрасте двадцати лет и семи месяцев.

В пятнадцать лет Галуа почувствовал призвание к математике. Он буквально поглощал труды крупных ученых той эпохи: Лежандра, Лагранжа, Гаусса, Коши. С чрезвычайной легкостью он усваивал новые понятия и методы, в частности те, которые ввели Гаусс и Коши.

Начиная с 1829 г. его жизнь полна тяжелых испытаний: его отец покончил с собой в результате политической травли реакционеров, а сам Эварист два раза проваливался при поступлении в Политехническую школу, не пожелав ответить на вопрос, который показался ему лишенным интереса. Он был принят в Подготовительную школу, но был исключен из нее в 1831 г. из-за своей очень резкой статьи, в которой он разоблачал «*реакционные взгляды директора Нормальной школы*» во время Июльской революции 1830 г. Представленные им статьи в Академии два раза были отклонены — в 1829 и 1830 гг. Его третий мемуар «Об условиях разрешимости уравнений в радикалах» был отвергнут Пуассоном в 1831 г., так как показался ему непонятным. В нем Галуа разработал основные понятия теории групп для решения до тех пор нерешенных проблем теории уравнений.

Галуа страстно поддерживал движение за дело прогресса и революции, возглавляемое Франсуа Распаем и Огюстом Бланки. Все его друзья были убежденными республиканцами. В 1831 г. он был арестован, за то что на многолюдном банкете произнес тост за Луи Филиппа, держа в руке нож. Он был оправдан, но вскоре снова арестован как один из организаторов демонстрации. Заключенный в тюрьму Сен-Пелажи, он продолжал свои исследования, очень много работал над интегралами от алгебраических функций. Там он написал резкое предисловие, в котором заклеймил академические власти и их «*тупое чванство*», а также критиковал работу научных учреждений. Он выступил против риторических ухищрений дидактических «опусов», в которых создавалась иллюзия совершенной упорядоченности и сглаживались все трудности. «*Тщетно хотят аналитики скрыть это от самих себя: они не доказывают, а комбинируют, составляют...*»

В предисловии, написанном в Сен-Пелажи, Галуа также с замечательным бесстрашием и уверенностью в правоте своего дела и нового пути, который благодаря его работам открывался в анализе, утверждал: «*Стать обеими ногами на почву выкладок; группировать операции, сортировать их по трудности, а не по форме — такова, по-моему, миссия будущих геометров; таков путь, на который я выхожу в этой работе...*» Галуа питал неприязнь к длинным вычислениям, затемнявшим суть дела. Его стремление группировать задачи в соответствии с их глубокими структурными аналогиями, а не по внешним признакам — разве не в этом состоит программа современной математики, сформулированная, оказывается, со столетним опережением событий!

Затем Галуа был переведен в лечебницу Фольтрие, где он пользовался некоторой свободой. Он снова упорно работал и пережил короткую и печальную любовь. Вследствие какой-то весьма темной любовной истории он был вынужден драться на дуэли, хотя и приложил все усилия, чтобы добиться примирения. В ужасную последнюю ночь перед дуэлью Галуа лихорадочно перечитал все свои статьи и написал свое знаменитое «*Письмо к Огюсту Шевалье*», ставшее его научным завещанием. В нем он вверял своему другу все свои работы (два мемуара, наброски, черновики), всю эту, по его словам, «*кашу, в которой надо разобраться*». В письме содержится также классификация абелевых интегралов, к которой заново пришел Риман двадцать пять лет спустя.

Лишь в 1843 г. благодаря усилиям его друга и его брата Лиувилль наконец объявил на заседании Академии о публикации работ Галуа. Она состоялась в 1846 г. Однако подлинный смысл теории Галуа во всей полноте был раскрыт только в 1870 г. Камиллом Жорданом в его «Трактате о подстановках и алгебраических уравнениях».

Этот процесс продолжался и дальше сменяющими друг друга фазами вплоть до работ Артина 1930 г.[1]).

Эварист Галуа полагал, что научная истина не должна рассматриваться как нечто законченное и незыблемое; он считал, что она проявляется в вечно незавершенном движении открытий, в постоянном процессе усовершенствования. По крайней мере в одном пункте этот призыв был услышан: полное критическое издание его сочинений (которое осуществили Р. Бурнь и Ж.-П. Азра) позволило вступить в исключительный контакт с этим живым творением молодого математика в том виде, в каком оно возникло после расшифровки его рукописей, с недоговорками, движением на ощупь, сопутствующими рождению нового, колебаниями,— творением, отмеченным печатью безжалостных обстоятельств его жизни.

Это уникальный пример математического труда, тесно переплетенного с личностью автора, который не захотел и не смог отделить себя от своих произведений.

Теория Галуа

Основная проблема, рассмотренная Галуа,— это проблема разрешимости в радикалах общих алгебраических уравнений, причем не только в случае уравнений 5-й степени, рассмотренном Абелем (см. гл. 3); целью Галуа было найти критерий разрешимости для всех алгебраических уравнений. Мы попробуем обрисовать в общих чертах эту теорию, не придерживаясь строго мемуаров Галуа, но в том виде, как она выявилась в последовательных фазах своего развития до XX в.

Прежде всего Галуа прояснил понятие величины, рациональной относительно других величин. Он определил его в «Мемуаре об условиях разрешимости уравнений в радикалах» (1831 г.): «...*можно условиться рассматривать как рациональности все рациональные функции от некоторого числа определенных количеств, предположенных* a priori *известными. Например, можно выбрать некоторый корень из целого числа и рассматривать как рациональности все рациональные функции от этого радикала.*

[1]) Исследования, связанные с теорией Галуа, продолжались и после этого! Так, в 1954 г. советский математик И. Р. Шафаревич решил обратную задачу Галуа.— *Прим. ред.*

Тогда, когда мы уславливаемся рассматривать как известные некоторые количества, мы говорим, что мы их присоединяем *к уравнению, о решении которого идет речь. Мы говорим, что эти количества* присоединены *к уравнению.*

Положив это, мы будем называть рациональным *всякое количество, которое будет выражаться рациональной функцией от коэффициентов уравнения и некоторого числа произвольно выбранных присоединенных количеств.*

Когда мы будем пользоваться вспомогательными уравнениями, они будут рациональными, если их коэффициенты рациональны в нашем смысле».

Эти понятия рациональной величины и присоединения, уже намеченные в мемуаре Вандермонда, и в особенности у Гаусса (см. о решении уравнения $x^{17}-1=0$ в конце гл. 3), были на этот раз выражены явно, и Галуа вплотную подошел к понятию поля, порожденного множеством алгебраических чисел. Уточним это на одном примере, приведенном самим Галуа. Уравнение деления круга $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1=0$ (где p — простое число) неприводимо над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Но если к этому полю *присоединить* первообразный корень p-й степени из единицы ($\theta=e^{2i\pi/p}$), то это уравнение можно разложить в произведение $(x-\theta)(x-\theta^2)\ldots(x-\theta^{p-1})=0$, и, следовательно, оно приводимо над полем $\mathbb{Q}(\theta)$.

Затем Галуа ввел свое ключевое понятие «*группы уравнения*»: «*Пусть дано уравнение и a, b, c... суть m его корней. Существует всегда группа перестановок букв a, b, c, ..., обладающая следующими свойствами*:

1) *Всякая функция от корней, инвариантная относительно подстановок этой группы, рационально известна.*

2) *Обратно, всякая рационально определяемая функция от корней инвариантна относительно этих подстановок*».

Группа некоторого уравнения степени n над данным полем, являющимся наименьшим полем, содержащим его коэффициенты, не будет, таким образом, группой *всех* перестановок n его корней — т. е. симметрической группой S_n порядка $n!$, — но будет подгруппой этой группы, образованной подстановками, сохраняющими все соотношения между корнями и, следовательно, все многочлены от корней, значения которых принадлежат основному полю.

Например, если рассматривается уравнение $x^4-x^2-2=0$, то его можно записать в виде $(x^2-2)(x^2+1)=0$; эти множители уже нельзя дальше разложить над полем $\mathbb{Q}$. У этого уравнения четыре корня:

$$x_1=\sqrt{2}, \quad x_2=-\sqrt{2}, \quad x_3=i, \quad x_4=-i.$$

Они связаны соотношениями $x_1x_2=-2$, $x_1+x_2=0$, $x_3x_4=+1$, $x_3+x_4=0$.

Группа этого уравнения состоит всего из четырех подстановок: тождественной подстановки; подстановки S, переставляющей x_1 и x_2 и оставляющей на месте x_3 и x_4; подстановки T, переставляющей x_3 и x_4 и оставляющей на месте x_1 и x_2, и подстановки $U=ST$, которая одновременно меняет местами x_1 с x_2 и x_3 с x_4. Поле разложения этого уравнения получается присоединением к $\mathbb{Q}$ элементов $\sqrt{2}$ и i; оно записывается $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Можно показать, что это же поле получается присоединением к $\mathbb{Q}$ одного элемента, в данном случае $i+\sqrt{2}$, т. е. что

$$\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})=\mathbb{Q}(i+\sqrt{2}).$$

(Это теорема о примитивном элементе.)

Элементы поля $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})=\mathbb{Q}(i+\sqrt{2})$ записываются в виде $a+b\sqrt{2}+ci+di\sqrt{2}$, где a, b, c, d — рациональные числа.

Элементы i и $-i$ называются, как известно, сопряженными комплексными числами; они являются корнями уравнения $x^2+1=0$, неприводимого над полем вещественных чисел. По аналогии $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ называются сопряженными над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, так как они являются корнями неприводимого над полем $\mathbb{Q}$ уравнения $x^2-2=0$. Вообще, два элемента u и v поля разложения N называются *сопряженными* над $\mathbb{Q}$ в том и только том случае, когда u и v оба являются корнями одного и того же многочлена, неприводимого над $\mathbb{Q}$.

На современном языке идея Галуа заключалась в том, чтобы выявить соответствие между подстановками из группы уравнения и теми *«автоморфизмами»* поля разложения N (т. е. взаимно однозначными отображениями поля N на себя, сохраняющими сложение, умножение и единицу), которые оставляют на месте элементы поля коэффициентов; таким образом, эти автоморфизмы отображают корень многочлена в один из его сопряженных. В наше время группа Галуа некоторого уравнения рассматривается как группа автоморфизмов поля N, оставляющих неподвижными элементы поля коэффициентов.

Теория Галуа предполагает совместное использование двух процедур: разложения группы уравнения на вложенные подгруппы и последовательного присоединения величин (определенных первой процедурой), расширяющие область рациональности уравнения в том порядке, который определен процессом редукции группы (см. табл. 5).

Таким образом, каждому полю K, промежуточному между полем коэффициентов (Галуа имел в виду поле $\mathbb{Q}$) и полем N, порожденными корнями уравнения, эта теория ставит в соответствие подгруппу группы уравнения (образованную перестановками, оставляющими инвариантными элементы поля K), и тем самым свойствам промежуточных полей отвечают эквивалентные свойства подгрупп.

В частности, Галуа показал, что при решении в радикалах и последовательных редукциях, которым в ходе вычислений подвергается группа уравнения, каждая новая группа является тем, что сейчас называется *нормальной подгруппой* предыдущей группы, и при соответствии подгруппа $\to$ подполе это свойство отвечает свойству подполя быть порожденным всеми корнями вспомогательного уравнения.

Напомним, что подгруппа H некоторой группы G называется *нормальной* в G (говорят также *нормальный делитель*, или *инвариантная подгруппа*, в G), если для всякого x из G мы имеем $xH=Hx$, т. е. $xHx^{-1}=H$. Но этого определения не было в работах Галуа [1]), и понятие нормальности было полностью осознано только Жорданом.

Теория Галуа устанавливает необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять группа уравнения, чтобы уравнение было разрешимо в радикалах: эта группа должна быть «*разрешимой*» (термин Ар-

---

[1]) Галуа определил нормальный делитель (в его терминологии — подгруппа, дающая *собственное* разложение группы) в письме к Шевалье.— *Прим. ред.*

5. Пример применения теории Галуа

Пусть дано уравнение $x^4-3=0$; оно неприводимо над полем $\mathbb{Q}$ и имеет четыре различных корня r, ir, $-r$, $-ir$, где $i=\sqrt{-1}$ и $r=\sqrt[4]{3}$. Поле разложения этого уравнения получается присоединением к $\mathbb{Q}$ двух величин r и i; обозначим его $N=\mathbb{Q}(r, i)$; иначе можно записать $N=\mathbb{Q}(r+ir)$. Всякий элемент поля N есть линейная комбинация восьми следующих элементов: 1, r, r^2, r^3, i, ir, ir^2, ir^3. (После проникновения в теорию полей идеи линеаризации поле N стали рассматривать как 8-мерное векторное пространство над $\mathbb{Q}$; N называется расширением степени 8 поля $\mathbb{Q}$.)

Элементы группы данного уравнения определены, если известны образы i и r; i может отображаться только в один из сопряженных элементов: либо сам i, либо $-i$. Точно так же r может отображаться только в один из четырех сопряженных: r, $-r$, ir, $-ir$.

Объединяя эти условия, получаем восемь элементов группы Галуа G (восемь автоморфизмов поля N). Покажем, как они определяются своим действием на порождающие элементы i и r:

	I	S	S^2	S^3	T	ST	S^2T	S^3T
Образ i	i	i	i	i	$-i$	$-i$	$-i$	$-i$
Образ r	r	ir	$-r$	$-ir$	r	ir	$-r$	$-ir$

Можно доказать, что эти автоморфизмы сохраняют соотношения $i^2=-1$, $r^4=3$.

Группа G содержит подгруппу $H=\{I, S, S^2, S^3\}$, порожденную S, которая сама содержит меньшую подгруппу $L=\{I, S^2\}$, порожденную S^2.

Каждый автоморфизм группы H оставляет на месте i, следовательно, он оставляет на месте всякий элемент подполя $\mathbb{Q}(i)$.

Меньшая подгруппа L состоит из автоморфизмов, которые оставляют неподвижными все элементы большего подполя $\mathbb{Q}(i, r^2)$.

Таким образом, убывающей цепочке подгрупп

$$G \supset H \supset L \supset I$$

соответствует возрастающая цепочка подполей

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{Q}(i, r^2) \subset \mathbb{Q}(i, r) \subset N.$$

Возрастающая цепочка подполей дает метод решения данного уравнения последовательными присоединениями корней более простых уравнений: $x^2=-1$, $y^2=3$, $z^2=\sqrt{3}$.

тина), т. е. должна существовать последовательность вложенных подгрупп

$$(1)=G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n = G,$$

такая, что каждая подгруппа G_i является нормальной в G_{i+1} и все факторгруппы G_{i+1}/G_i коммутативны.

Теперь понятно, почему теорема Абеля о неразрешимости в радикалах общего уравнения степени n является приложением теории Галуа. «Общее» уравнение степени n: $a_0x^n+\ldots+a_n=0$ имеет независимые буквенные коэффициенты. Таким образом, его группа Галуа является группой *всех* перестановок корней уравнения, т. е. симметрической группой S_n (поскольку между корнями нет никаких специальных соотношений). Но можно показать, что при $n>4$ группа S_n имеет только одну нормальную подгруппу — знакопеременную группу A_n порядка $n!/2$, а эта последняя «*проста*», т. е. не имеет других нормальных подгрупп. Таким образом, условие теории Галуа не выполнено и группа S_n не является «разрешимой».

С точки зрения Галуа, разрешимость некоторого уравнения перестала быть абсолютной проблемой, требующей готового определенного ответа. Он рассматривал ее как *связь* между определенным алгебраическим объектом — уравнением и его «средой» — полем или областью рациональности, к которой оно относится. Таким образом, разрешимость связана с этой областью. Как только изменяется область рациональности уравнения, изменяется и его группа Галуа.

Таким образом, понятие группы в теории Галуа становится мощным и гибким средством — Коши, например, и не думал приписывать понятию группы подобную роль. Для Коши, даже в поздних его работах 1844—1846 гг. «*система сопряженных подстановок*» была неразложимым понятием, весьма жестким; он пользовался ее свойствами, но никогда не выявлял понятия подгруппы и нормальной подгруппы.

Эта идея относительности, собственное изобретение Галуа, позднее проникла во все математические и физические теории, ведущие свое происхождение от теории групп. Эту идею в действии мы видим в «Эрлангенской программе» (см. гл. 4).

Так уже в 1832 г. мысль Галуа несла в себе основные понятия современной алгебры и осознала глубокие связи между ними. Но, как писали его издатели (Бурнь и Азра): «*Парадоксальная в своей краткости, его мысль была* *не из тех, от которых отталкиваются, но из тех, до которых нужно еще дорасти»*.

Слава Галуа росла по мере того, как в алгебре происходили изменения, за которые он ратовал.

3. Английская алгебраическая школа

Символическая алгебра

Итак, на европейском континенте многие математики (Гаусс, Галуа, Коши, Абель) накапливали обширные познания, касающиеся все более разнообразных объектов, включая теорию подстановок, композицию классов квадратичных форм и др., и готовили почву для расширения области алгебры. Однако эти объекты появлялись, строго говоря, вне рамок алгебры, которая традиционно продолжала оставаться наукой об алгебраических уравнениях, чем-то вроде *«универсальной арифметики»* с теми законами, что и в обычной числовой области. О них говорили как об «общих законах алгебры» без дальнейших уточнений.

В эту же эпоху группа английских математиков сформулировала абстрактно учение, которое должно было дать новое понимание этой науки. Англичане оставались в стороне от общего развития математики XVIII в. вследствие полемики между Ньютоном и Лейбницем. Преобладание ньютоновской традиции привело к некоторому застою в науке. В начале XIX в. после распространения лейбницевой символики для исчисления бесконечно малых небольшая группа математиков из Кембриджа задумалась над ролью и значением этой символики.

Вначале внимание было сосредоточено на анализе: пытались формально классифицировать функции по тем соотношениям, которым они удовлетворяют. Затем задумались об алгебре. Чтобы обосновать операции над буквенными выражениями, Пикок ввел в 1833 г. различие между арифметической и символической алгеброй. Арифметическая алгебра — это буквенная арифметика, или logistica speciosa, известная со времен Виета. А символическая алгебра — это *«чистая»* наука о символах; символы могут представлять совершенно произвольные объекты, над которыми априори считаются возможными любые операции. Единственным ограничением было то, что законы комбинаций этих символов должны совпадать с законами арифметической алгебры, когда символы представляют арифметические величины. Пикок считал, что произвольный выбор фундаментальных соотношений между символами открывает возможность различных интерпретаций этих символов.

Таким образом, коль скоро начальные правила фиксированы, другой целью символической алгебры становится нахождение подходящей модели, в рамках которой символы имеют смысл и начальные правила справедливы.

Принцип перманентности

Основываясь на том факте, что некоторые свойства сохраняются при переходе от вещественных чисел к комплексным (обычные операции, разложение на простые делители и т. д.), Пикок счел возможным сформулировать «принцип перманентности». Этот неоднократно подтвержденный принцип, согласно Пикоку и его ученикам Де Моргану и Грегори, должен был привести к построению формальной алгебры — столь же дедуктивной науки, сколь дедуктивной им казалась геометрия. Аксиоматическое построение алгебры должно было проводиться аналогично аксиоматическому построению геометрии, так чтобы все теоремы опирались на некоторые исходные принципы, правила и определения, выражающие основные соотношения между символами.

К сожалению, принцип перманентности оказался неким произвольным *«предписанием»* и не мог служить солидным фундаментом алгебры. Например, разложение целого числа в произведение простых делителей нельзя было относить к свойствам символической алгебры, хотя оно и выражено в символическом виде. Действительно, если это свойство верно в $\mathbb{Z}$, оно остается верным в кольце $\mathbb{Z}[i]$ (т. е. когда символы являются гауссовыми целыми числами), но не имеет места в некотором другом кольце, например в $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, что и было вскоре обнаружено многими математиками (см. ниже). С другой стороны, все попытки Де Моргана построить *«алгебру триплетов»* (*«алгеброй дублей»* он назвал алгебру комплексных чисел) — систему с тремя базисными единицами и законами, аналогичным законам обычной алгебры, оканчивались неудачей, и мы уже знаем почему (см. гл. 7).

Кроме того, открытие кватернионов Гамильтона с некоммутативным законом композиции, а затем октав Кэли с неассоциативным законом окончательно показали несостоятельность «предписаний» принципа перманентности.

Можно сказать, что английские алгебраисты настаивали на столь жесткой аналогии между арифметикой и алгеброй, что если бы эта аналогия была принята, то законным было бы изучение лишь таких числовых областей, структура которых полностью подобна структуре традиционных числовых областей $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$, и зарождающейся общности алгебры был бы положен конец. По-видимому, они не осознали, что соотношение, истинное при одной конкретной интерпретации символов, может перестать быть истинным при другой. Но, без сомнения, спектр алгебраических соотношений, на которые они опирались, был слишком ограничен.

Тем не менее подход представителей Кембриджской школы открыл путь к более абстрактному мышлению в алгебре. Работы Кэли и Сильвестра, посвященные определителям и матрицам, а также работы Гамильтона несут на себе печать их идей и требований.

Математическая логика Буля

Абстрактный алгебраический подход породил другую ветвь математики: математическую логику. Символическая алгебра занималась законами комбинирования символов, но когда логические выражения записаны с помощью символов, можно исследовать правила комбинирования самих этих выражений, неразрывно связанные с основными законами мышления. Уже Де Морган очень интересовался логикой отношений. Но решающий шаг в этом направлении сделал Джордж Буль (1815—1864), который впервые явно определил исчисление классов (или множеств) и ввел обозначения для их объединения, пересечения и т. д. Он заметил, что исчисление классов можно интерпретировать как исчисление высказываний, но не пошел далеко в этом направлении, которое продолжил впоследствии Чарльз С. Пирс (см. табл. 6).

6. Булева алгебра

x, y, z представляют собой классы объектов.

Буль обозначил универсальный класс символом 1, а нулевой, или пустой, класс — символом 0.

xy — пересечение двух классов;
$x+y$ — объединение двух классов;
$1-x$ — дополнение x;
$x-y$ — класс элементов, принадлежащих классу x и не принадлежащих классу y;
отношение включения, обозначаемое теперь $x \subset y$, Буль записывал как $xy=x$.

За аксиомы приняты следующие соотношения, рассматриваемые как очевидные:

$$x(1-x)=0;$$
$$xy=yx;$$
$$xx=x;$$
$$x+y=y+x;$$
$$x(u+v)=xu+xv.$$

Закон исключенного третьего записывается следующим образом:

$$x+(1-x)=1.$$

Если x и y являются высказываниями, то
xy — соединенное высказывание — конъюнкция высказываний x и y;
$x+y$ — высказывание, обозначающее x или y или оба вместе;
$x=1$ означает, что x — истинное высказывание;
$x=0$ означает, что x — ложное высказывание;
$1-x$ — отрицание x.

Можно сказать, что английские математики середины XIX в. имели ясное и широкое представление о понятии закона композиции. В 1847 г. Буль писал: «*Математика имеет дело с операциями, рассматриваемыми сами по себе, независимо от разных материй, к которым они могут применяться*».

Посмотрим теперь, как эти операции применяются к другим объектам, таким, как векторы и матрицы.

4. Линейные структуры

От определителей...

Понятия определителя и матрицы исторически тесно связаны между собой, поскольку оба они возникли в XVIII в. при исследовании систем линейных уравнений, которые в наше время записываются в виде

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

где x_i — известные, а y_j — неизвестные величины (см. пример с $n=m=3$ в табл. 7).

7. Система Крамера трех уравнений с тремя неизвестными

$$a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3=x_1;$$
$$a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3=x_2;$$
$$a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3=x_3.$$

Главный определитель D этой системы равен

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Его можно разложить по элементам одного столбца или одной строки; например, разложив по элементам первого столбца, получим:

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})+a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}).$$

Стоящие здесь определители размера 2×2 называются «минорами» D.

Если D не равен нулю, то решение системы получается по формулам:

$$y_1=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad y_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 & a_{13} \\ a_{21} & x_2 & a_{23} \\ a_{31} & x_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad y_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & x_3 \end{vmatrix}}{D}.$$

Изучение таких систем было начато Лейбницем около 1678 г.; он использовал индексы в случае системы трех уравнений с двумя неизвестными. Лейбниц исключал обе неизвестные и получал определитель, обращение которого в нуль было условием разрешимости системы. В 1748 г. Маклорен дал явные формулы для решения при $n=m=2$ и $n=m=3$.

Общее решение линейных уравнений со многими неизвестными в виде частного двух выражений, являющихся полилинейными многочленами относительно коэффициентов системы, написал Крамер в 1754 г. Мысль ввести определитель порядка n индукцией по n, разлагая его по строке или столбцу, пришла Вандермонду, а затем Лапласу.

С другой стороны, занимаясь композицией тернарных квадратичных форм, Гаусс в своих «Арифметических исследованиях» ввел очень интересное понятие, которое можно считать «матричным». Для обозначения линейной «*подстановки*» (в наше время это называется линейным преобразованием), при которой x, y, z заменяются соответственно на

$$x'=\alpha x+\beta y+\gamma z, \quad y'=\alpha' x+\beta' y+\gamma' z$$
$$\text{и} \quad z'=\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z,$$

Гаусс использовал квадратную таблицу

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{matrix}$$

которую затем обозначил одной буквой S.

Гаусс заметил, что если сделать подстановку S, а затем подстановку S_1 с таблицей коэффициентов

$$\begin{matrix} \delta & \varepsilon & \xi \\ \delta' & \varepsilon' & \xi' \\ \delta'' & \varepsilon'' & \xi'' \end{matrix}$$

то результат будет таким же, как если бы мы сделали подстановку с таблицей коэффициентов

$$\begin{matrix} \alpha\delta+\beta\delta'+\gamma\delta'' & \alpha\varepsilon+\beta\varepsilon'+\gamma\varepsilon'' & \alpha\xi+\beta\xi'+\gamma\xi'' \\ \alpha'\delta+\beta'\delta'+\gamma'\delta'' & \alpha'\varepsilon+\beta'\varepsilon'+\gamma'\varepsilon'' & \alpha'\xi+\beta'\xi'+\gamma'\xi'' \\ \alpha''\delta+\beta''\delta'+\gamma''\delta'' & \alpha''\varepsilon+\beta''\varepsilon'+\gamma''\varepsilon'' & \alpha''\xi+\beta''\xi'+\gamma''\xi'' \end{matrix}$$

Таким образом, он получил в этом случае правило умножения двух матриц. Должно быть, это место у Гаусса навело Коши на мысль об общем правиле умножения двух определителей, которое он опубликовал в своем мемуаре 1815 г.

В этом мемуаре, озаглавленном «О функциях, которые могут принимать лишь два равных вещественных значения с противоположными знаками в результате транспозиций, произведенных над входящими в них переменными», Коши выступил как законодатель нарождающейся теории определителей (именно он настоял на принятии этой терминологии). Он придал этой теории строгую дедуктивную форму, в которой все результаты выводятся из основного свойства определителя как полилинейной знакопеременной функции определенного вида от n^2 величин [1]).

Обобщив запись в виде квадратной таблицы элементов с двойными индексами, заимствованную из теории линейных уравнений, Коши смог дать автоматическое описание свойств определителей (соотношение между минорами различных порядков данного определителя, формула произведения определителей и т. д.). Таким образом, использование определителей при решении систем линейных уравнений стало лишь одним из их возможных применений.

Для развития алгебры выделение понятия определителя и описание основных свойств определителей означали не только овладение новыми техническими приемами для решения классических задач. В самом деле, ведь определитель — это не просто число, но связанное известным образом с n^2 другими числами. И перемножение определителей, введенное Гауссом и в общем виде представленное Коши, дает не просто произведение двух чисел, но представляет особую композицию двух систем чисел, расположенных в двух квадратных таблицах, которая приводит к третьей таблице такого же вида. Итак, с одной стороны, определитель — это число, а с другой, не число. Для него требуется особый статус, и он играет роль в создании новых областей, не являющихся чисто числовыми.

---

[1]) Знакопеременная функция принимает лишь два противоположных значения $\pm k$ при произвольной перестановке ее переменных.

...к матрицам

Хотя теория определителей к 1820 г. была создана и в основе ее лежала идея о расположении элементов в квадратную таблицу, прогресса в выяснении понятия матрицы не наблюдалось. Несмотря на пример, построенный Гауссом, разделения понятий матрицы и определителя в то время еще не произошло. Бесполезно искать у Гаусса, Коши или Бине следы какой-нибудь общей формулировки о некоммутативности произведения двух матриц. Несомненно, этот факт затемнен тем, что произведение двух определителей как произведение двух скалярных величин коммутативно.

Начиная с 40-х гг. определители стали универсальным инструментом в алгебре и анализе. Им посвящены многочисленные статьи, часто отяжеленные внушительными вычислениями. Важнейшими из них были работы Якоби, который пользовался определителями в теории функций многих переменных.

Тем не менее число математиков, знакомых с квадратными таблицами чисел, растет. Эти таблицы начинают появляться не только в исследованиях, связанных с прямым вычислением определителей. Самой важной областью была общая теория форм от m переменных степени $\geqslant 2$. Их изучение стимулировалось исследованиями не только в теории чисел, но и в алгебраической геометрии.

В 1826 г. Коши занялся задачей определения главных осей поверхности второго порядка (квадрики) с центром в начале координат:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy=K.$$

Он пришел к уравнению, которое выражало, что некоторый определитель

$$\begin{vmatrix} A-s & F & E \\ F & B-s & D \\ E & D & C-s \end{vmatrix}$$

равен нулю, т. е. нашел так называемый характеристический многочлен симметричной матрицы билинейной формы, ассоциированной с квадратичной формой, стоящей в левой части уравнения (см. гл. 4). Коши доказал, в частности, что все корни этого многочлена, т. е. собственные значения этой матрицы, являются вещественными. Затем Коши показал, что характеристический многочлен не меняется при замене прямоугольных систем координат (на матричном языке: подобные преобразования имеют одни и те же собственные значения). Впоследствии этот результат оказался очень важным при классификации проективных преобразований.

Вообще изучение форм, их классификации, их преобразований, их инвариантов сильно способствовало разделению понятий матрицы и определителя.

Окончательное разделение произошло благодаря Кэли и Сильвестру. Эти английские математики почти тридцать лет совместно работали в алгебре и алгебраической геометрии, а также вместе с Эрмитом в теории инвариантов. Сам термин матрица был введен Сильвестром в 1850 г. для обозначения *прямоугольной* таблицы чисел, которую он уже не мог называть определителем. Основной работой, в которой матрицы представлены абстрактно как особые объекты, хотя они уже широко применялись, был мемуар Кэли 1858 г. «Мемуар о теории матриц».

Под влиянием результатов Гамильтона о кватернионах (см. гл. 7) Кэли обсуждает характеристические свойства операций над матрицами, проверяет ассоциативность умножения и его дистрибутивность по отношению к сложению и исследует условия коммутативности. Он рассматривает также прямоугольные матрицы и в тех случаях, когда возможно их перемножение, вводит их произведение как композицию преобразований. Между прочим, Кэли замечает, что матрица является всего лишь кратким обозначением для линейной «подстановки», подобно тому как Гаусс обозначал форму

$$aX^2+2bXY+cY^2$$

тройкой (a, b, c).

Таким образом, Кэли формально построил новую систему элементов, не являющихся в обычном смысле числами — квадратные матрицы образуют алгебру, но не поле — и обладающих совсем другими свойствами; однако эта система содержала числа и в нее можно было перенести задачи из числовой области. Так, в своем мемуаре Кэли занимался решением уравнений в области матриц.

В этой теории также вырисовывалось обобщение известных числовых областей, которое могло дать новые возможности для абстрактных построений.

Понятие *n*-мерного векторного пространства

По мере того как росло знакомство математиков с определителями и матрицами, рассуждения, справедливые при любом числе n переменных, довольно быстро подсказали им понятие *«пространства n измерений»*. Правда, нужно было выработать соответствующий геометрический язык, несмотря на то, что наглядная интерпретация на плоскости или в пространстве в случае $n>3$ была невозможна.

С другой стороны, желание разработать настоящее *исчисление* геометрических величин, давняя и весьма неясная мечта некоторых геометров со времен Лейбница, проснулось вновь после введения геометрического представления комплексных чисел, которое давало модель исчисления векторов на плоскости. Теория кватернионов породила многочисленные попытки найти «исчисления», возможные в пространствах $\mathbb{R}^n$.

Независимо друг от друга Кэли в Англии и Грассман в Германии около 1843—1845 гг. сделали этот шаг и заговорили об n-мерном пространстве. Для Кэли исходным пунктом была аналитическая геометрия — метод координат; вектором в пространстве n измерений является система n вещественных или комплексных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Сложение двух векторов и умножение на скаляр определялись естественным образом по аналогии с трехмерным пространством. Кэли говорил, что это всего лишь удобный язык.

Но в своем пространстве размерности n Кэли рассматривал только одномерные векторы. Чтобы прийти к фундаментальному понятию векторного пространства (даже конечной размерности), надо было четко выделить понятие векторного подпространства и его размерности, понятие линейной независимости системы векторов и т. д. К этому привел более оригинальный и непосредственно геометрический подход Грассмана.

Школьный учитель, самоучка, не имеющий контактов с математическими кругами, Грассман решил разработать *геометрический анализ*, который позволял бы проводить выкладки с ориентированными величинами внутренним образом, т. е. независимо от выбора координат. Своим геометрическим исчислением он хотел преодолеть конфликт между аналитической геометрией, использующей лишь координаты и уравнения, и синтетической геометрией, претендующей на то, чтобы обходиться вообще без всякой алгебры. Свои взгляды он изложил в 1844 г. в работе «Учение о линейной протяженности» («Die lineale Ausdehnungslehre»), в которой математика переплеталась с метафизикой, и читать ее было очень трудно.

Вот как в своем письме к Коши от 18 апреля 1847 г. Грассман резюмировал свою книгу: «*Я изложил в ней принципы поистине геометрического исчисления, при помощи которого можно вычислять точки, линии, площади и углы почти как числа, без необходимости прибегать к координатам или другим произвольным предположениям... К тому же я нашел, что этот анализ можно распространить на вещи, не подчиняющиеся воображению, и что он составляет основы новой науки, которую я назвал учением о протяженности*».

Исходной точкой теории было геометрическое сложение ориентированных отрезков — операция, взятая из механики (сложение сил, скоростей и т. д.); эта операция характерна и для других исчислений, таких, как барицентрическое исчисление Мёбиуса, разработанное им в 1827 г., или исчисление эквиполентности Беллавитиса (1830 г.).

Но Грассман намеревался ввести ориентированные величины произвольной размерности. Поскольку в размерности 1 «величина» вектора — это его длина, для размерности 2 надо было иметь ориентированную площадь. Простейшим типом площади является параллелограмм, построенный на двух векторах a, b, поэтому Грассман определил его как «внешнее произведение» двух векторов и записал $[a, b]$. (В наше время так определяется векторное произведение $\vec{a} \wedge \vec{b}$.) Как обобщение этих бивекторов Грассман рассматривает внешнее произведение p векторов, представляющее ориентированный p-мерный объем.

Но у него возникли большие сложности при сложении таких величин, поскольку, например, сумма двух бивекторов $a\wedge b$ и $c\wedge d$ для четырех независимых векторов неединственна.

Построение Грассмана

В 1862 г. вышло новое издание «Учения о линейной протяженности». На этот раз Грассман принял точку зрения Гамильтона и исходил из базиса (e_j) некоторой области S^1, которая на самом деле была n-мерным векторным пространством над $\mathbb{R}$. Элементами этой области (мы бы назвали их ее «векторами») были гиперчисла с n компонентами $x_1e_1+\ldots+x_ne_n$.

Грассман определил внешнее произведение на элементах (e_j) и продолжил его по линейности на всякое гиперчисло. Здесь Грассман действовал не так, как Гамильтон. Он не пытался превратить S^1 в кольцо (т. е. определить произведение двух величин из S^1 так, чтобы оно было величиной, принадлежащей S^1), а вместо этого присоединил к S^1 область величин второго порядка, полученных как внешние произведения двух элементов базиса S^1. Эта область, обозначенная S^2, является векторным пространством размерности[1] C_n^2; ее единицы обозначены e_{ij} и удовлетворяют соотношениям

$$e_{ij}=e_i\wedge e_j=-e_j\wedge e_i \quad (\text{при } i<j) \text{ и } e_i\wedge e_i=0.$$

Далее Грассман продолжил это построение. При $1\leqslant r\leqslant n$ область S^r является векторным пространством размерности C_n^r, элементы которого — величины r-го порядка, а базис состоит из внешних произведений $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_r}$, которые обозначены $e_{i_1\ldots i_r}$ (где $1\leqslant i_1\ldots<i_r\leqslant n$).

Наконец, он отождествил $e_{1,2,\ldots,n}$ со скаляром, т. е. S^n с полем скаляров $\mathbb{R}$. Присоединив формально все единицы произвольного порядка, Грассман получил по существу базис (e_h) из 2^n элементов, где h пробегает множество подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. (В совре-

---

[1] $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ — число сочетаний из n элементов по 2, а $C_n^r=\dfrac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}$ — число сочетаний из n элементов по r.

менной терминологии это внешняя алгебра ранга 2^n над S^1.)

При помощи сведе́ния к базисным единицам, пользуясь ассоциативностью, Грассман смог определить внешнее произведение величин из двух разных областей S^p и S^q. Когда $p+q$ больше n, оно равно нулю. На самом деле Грассман показал, что если V и W — векторные подпространства в $\mathbb{R}^n$, порожденные соответственно p векторами $a_1, \ldots, a_p$ и q векторами $b_1, \ldots, b_q$, и если $p+q$ векторов a_i и b_j линейно независимы (т. е. $V \cap W=0$), то векторное подпространство $V+W$ соответствует $(p+q)$-вектору $(a_1 \wedge \ldots \wedge a_p) \wedge (b_1 \wedge \ldots \wedge b_q)$. В случае, когда пересечение V и W не равно нулю (например, когда $p+q$ больше n), Грассман хотел с помощью вычислений получить мультивектор, соответствующий этому пересечению. Он пытался построить «регрессивное» произведение, однако безуспешно. Но Грассман дал определение линейной независимости системы векторов, определение размерности пространства и доказал следующее соотношение для двух векторных подпространств одного и того же пространства:

$$\dim V + \dim W = \dim (V + W) + \dim (V \cap W).$$

Далее Грассман ввел дополнение величины A^r из S^r как величину из S^{n-r}; обозначим его доп A^r. Это позволило ему определить второе произведение, называемое *внутренним произведением* двух величин A^r и B^r из S^r. Он положил $A^r/B^r = A^r \wedge \text{доп}\, B^r$, что позволило ему отождествить эту величину со скаляром, поскольку это элемент из S^n. Внутреннее произведение удовлетворяет соотношениям $e_i/e_i=1$ и $e_i/e_j=0$ при $i \neq j$.

Подчеркнем два новшества в определении этого произведения. Грассман порвал с обычаем, который требовал, чтобы произведение двух величин некоторого типа было величиной того же типа — внутреннее произведение не является более внутренним законом композиции, так как не позволяет определить частное. Но оно послужило Грассману для введения понятий ортогональности и позволило ему дать геометрические приложения своего учения о протяженности.

Хотя построенное Грассманом алгебро-геометрическое здание покоится на весьма абстрактной концепции

n-мерного векторного пространства, работы Грассмана, очень многословные, не имели непосредственного резонанса. Далее можно отметить три основных направления развития: обобщение геометрической концепции пространства, которым занимались Кэли и Риман, разработка векторного анализа, особенно в работах Гиббса, на которую сильное влияние оказал Грассман; наконец, у Грассмана встречаются мысли, предвосхитившие некоторые важнейшие разделы современной алгебры. То, что теперь называют «внешней алгеброй» Грассмана, вышло из забвения в начале XX в., когда А. Пуанкаре и особенно Эли Картан обнаружили его важность для дифференциальной геометрии.

В 1888 г. Пеано дал аксиоматическое определение векторных пространств над вещественным полем и линейных отображений одного такого пространства в другое. Вплоть до 1930 г. господствовал матричный и координатный подход — в отличие от более внутреннего подхода, использующего векторные пространства.

В результате работ Гамильтона и Грассмана и соперничества между сторонниками кватернионов и сторонниками векторов некоторые физики-теоретики (Максвелл, Гиббс, Хевисайд) разработали к 1880 г. главные инструменты так называемого «векторного исчисления» в $\mathbb{R}^3$: скалярное, векторное и смешанное произведения, дифференциальный оператор, обозначаемый символом набла, и т. п.

5. Подъем теории групп

Абстрактное определение Кэли

К 1850 г. были выявлены два типа законов композиции: один применялся к перестановкам, другой к классам эквивалентности, но никто не пытался их сопоставить. Первым, кто понял, что понятие группы независимо от объектов, к которым оно применяется, был, по-видимому, Кэли. Он изложил свою концепцию в мемуаре, опубликованном в 1854 г.: «О теории групп, зависящих от символического уравнения $\theta^n=1$».

В этом мемуаре Кэли привел абстрактное определение группы в духе символической алгебры Кембриджской школы: «*Множество символов* 1, α, β, ..., *различных между собой и таких, что произведение двух из них (в произвольном порядке) либо произведение одного из них на себя принадлежит этому множеству, называется группой*». Таким образом, Кэли строго придерживался кон-

8. Кэли: возможные таблицы умножения для группы из 6 элементов 1, α, β, γ, δ, ε (1854 г.)

Первый случай

	1	α	β	γ	δ	ε
1	1	α	β	γ	δ	ε
α	α	β	γ	δ	ε	1
β	β	γ	δ	ε	1	α
γ	γ	δ	ε	1	α	β
δ	δ	ε	1	α	β	γ
ε	ε	1	α	β	γ	δ

Это циклическая группа из шести элементов, которую можно рассматривать, например, как группу корней 6-й степени из единицы, или же как группу вращений вокруг некоторой точки O, оставляющих инвариантным правильный шестиугольник с центром в O. Образующей этой группы служит поворот вокруг O на 60°.

Второй случай

	1	α	β	γ	δ	ε
1	1	α	β	γ	δ	ε
α	α	β	1	ε	γ	δ
β	β	1	α	δ	ε	γ
γ	γ	δ	ε	1	α	β
δ	δ	ε	γ	β	1	α
ε	ε	γ	δ	α	β	1

Здесь образующие удовлетворяют соотношениям $\alpha^3=1$, $\gamma^2=1$, $\gamma\alpha=\alpha^2\gamma$. Группа состоит из элементов 1, α, α^2, γ, $\alpha\gamma$, $\alpha^2\gamma$. Это группа S_3 перестановок трех элементов.

цепции конечной группы. Действительно, в этом случае нет необходимости постулировать существование обратного для каждого элемента, поскольку среди всех степеней одного элемента x найдется по крайней мере одна, скажем x^n, равная 1, и тогда из $x^n=1$ следует, что $x^{-1}=x^{n-1}$.

Для фиксированного целого числа n Кэли рассматривал возможные таблицы умножения для групп порядка n. Он перечислил две группы порядка 6 (см. табл. 8), пять групп порядка 8 (три коммутативные и две некоммутативные). Кэли не делал абсолютно никаких предположений относительно символов и описывал структуру конечных групп с помощью таблиц умножения и соотношений между образующими.

Кэли указал примеры групп в самых разных областях, рассмотрев с этой точки зрения теорию матриц (тогда еще совсем не формализованную), тело кватернионов, композицию квадратичных форм, а также множество корней n-й степени из единицы. Таким образом, его новаторство заключается еще и в том, что до тех пор понятие группы, как его сформулировал Галуа, относилось к теории подстановок, и элементами или символами всегда были отображения (на современном языке — морфизмы), но элементы группы сами никогда не рассматривались как величины — несомненно, потому, что если считать их величинами, то надо было бы определять две операции и рассматривать то, что мы теперь называем структурой поля. Выделять лишь один закон композиции было неестественно. Мемуар Кэли добрых двадцать лет оставался в стороне от внимания математиков, и даже сам Кэли при изложении теории матриц не упоминал ни аддитивную, ни мультипликативную группы обратимых матриц.

От конечных групп Камилла Жордана...

Понятие группы долгое время предназначалось лишь для групп перестановок. Непререкаемым авторитетом в этой области сделался Камилл Жордан (1838—1922). Можно сказать, что он предпринял научное воссоздание трудов Эвариста Галуа, дополнил его доказательства, использовал и развил все его краткие указания. Труд Жордана «Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях» остается до наших дней непревзойденным во многих отношениях. Работая над этой теорией, Жордан отказался от узких рамок теории групп перестановок и рассматривал более абстрактное понятие конечной группы. В 1868 г. он провел классификацию всех групп движений трехмерного евклидова пространства. Затем он занялся изучением линейных представлений группы, действующей на векторном пространстве, т. е. поиском гомоморфизмов этой группы в группу обратимых линейных преобразований векторного пространства на себя (очевидно, тождественную группе обратимых квадратных $n \times n$-матриц с вещественными или комплексными элементами, которая обозначается $GL(n, \mathbb{R})$ или $GL(n, \mathbb{C})$). Жордан провел систематическое изучение классических групп и их конечных подгрупп, затем он попытался определить все разрешимые конечные группы, чтобы найти все уравнения данной степени, разрешимые в радикалах.

С одной стороны, Жордан ввел основные понятия теории групп (факторгруппа, гомоморфизм, последовательность нормальных подгрупп некоторой группы, которую мы называем теперь последовательностью Жордана — Гёльдера, и т. д.). С другой стороны, при исследовании линейной группы он пришел к очень важным результатам о приведении матриц (так называемые жордановы формы).

...к бесконечным группам

Однако даже в работах Жордана еще не появилось общее понятие группы в том виде, в котором оно существует сейчас. Хотя идея *преобразования*, примененного ко всему пространству, а не только к отдельным пространственным фигурам, была уже знакома геометрам благодаря развитию проективной геометрии в работах Понселе (см. гл. 4), связь между этой идеей и идеей «перестановки» конечного множества еще не усматривалась.

В 1870 г. Софус Ли (1842—1899) и Феликс Клейн вместе были в Париже и, ознакомившись там с работами Жордана и Галуа, начали размышлять над группами преобразований. Впервые в рамках одной концепции были поставлены рядом понятия конечного множества и некоего «пространства», наподобие пространства евклидовой геометрии. Итогом этих размышлений стала предложенная в 1872 г. «Эрлангенская программа» Клейна, в которой центральное место при изучении геометрий отводится понятию группы (см. гл. 4). Тем самым был дан толчок к изучению бесконечных групп; одним из главных творцов этой теории стал Софус Ли.

Удивительно, что многие математики, из которых самым «современным», без сомнения, был Дедекинд, постоянно пользовались всякого рода группами, не формулируя это явным образом. Нечеткое использование термина группа, бытовавшее в математике, долгое время сосуществовало с точным математическим понятием. В частности, в тривиальных математических ситуациях никто до 1890 г. не испытывал необходимости писать, что целые числа образуют аддитивную группу, а отличные от нуля рациональные числа образуют мультипликативную группу, причем обе группы бесконечны.

Лишь в 1898 г. в «Трактате по алгебре» Вебера было дано весьма общее аксиоматическое определение, относящееся без каких бы то ни было ограничений и к конечным, и к бесконечным группам.

6. Немецкая школа и истоки коммутативной алгебры

Истоки того, что в наше время называется коммутативной алгеброй, в которую входят, в частности, теория колец, идеалов, полей, весьма многообразны. Эта наука сложилась главным образом под влиянием трех разделов математики: теории чисел, алгебраической геометрии и теории алгебраических функций. Не отступая от темы этой главы и рассматриваемых в ней проблем, попытаемся кратко изложить начала первого из них, так как соответствующие объекты мы уже ввели, когда говорили об «Арифметических исследованиях» Гаусса.

Труд Гаусса оказался богатым источником новых идей и уникальной моделью для арифметических теорий XIX в., выработанных представителями немецкой школы алгебры и теории чисел. После смерти Гаусса были опубликованы его заметки, которые он намеревался включить в качестве восьмого раздела в новое издание «Арифметических исследований».

В них Гаусс рассматривал сравнения сразу по двум модулям: по модулю простого числа p и неприводимого многочлена $\varphi(x)$. Таким образом, он оперировал классами многочленов с коэффициентами из поля $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, считая два таких многочлена эквивалентными, если их разность делится на $\varphi(x)$. Эти работы, должно быть, оказали самое большое влияние на Куммера, Дедекинда и Кронекера.

С давних пор были установлены аналогии в обращении с целыми числами, с одной стороны, и многочленами, с другой (понятие кольца должно было как раз абстрактно формализовать эти аналогии), но кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ всегда рассматривалось как основной объект арифметики, а кольцо $\mathbb{Q}[x]$ многочленов с рациональными коэффициентами — как основной объект алгебры.

Исследования Гаусса показали, что это различие является поверхностным. Действительно, ведь можно спросить: а к какому разделу математики относится кольцо $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\,[x]$, элементы которого получаются сравнением по двум модулям? Какая область математики должна заниматься изучением арифметики этого кольца? Здесь границы между областями стираются и происходит взаимное проникновение и обогащение разных дисциплин, столь характерное для новой нарождающейся математики.

Идеальные числа Куммера

Гаусс исследовал «комплексные целые» и арифметику их кольца $\mathbb{Z}[i]$, очень похожую на арифметику кольца $\mathbb{Z}$. Эти исследования открыли путь для развития обширной темы — теории алгебраических чисел и теории алгебраических целых, которые были связаны с попытками доказать теорему Ферма (невозможность решения в целых числах уравнения $x^n+y^n=z^n$ при $n>2$)[1].

Куммер рассматривал выражение x^p+y^p (при простом p) и разлагал его на множители вида $(x+y)(x+\alpha y)\ldots$ $\ldots(x+\alpha^{p-1}y)$, где α — первообразный корень p-й степени из единицы; $\alpha=e^{2i\pi/p}$ удовлетворяет соотношению $1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{p-2}+\alpha^{p-1}=0$.

---

[1]) Как выяснил недавно О. Нейман (ГДР), Куммер обратился к арифметике полей деления круга главным образом для того, чтобы доказать законы взаимности для вычетов высших степеней.— *Прим. ред.*

Куммер ввел числа $a_0+a_1\alpha+\ldots+a_{p-2}\alpha^{p-2}$, где a_i — некоторые произвольные рациональные целые. Он называл их «комплексными числами», следуя терминологии Гаусса. При фиксированном α сумма, разность, произведение двух таких чисел являются числами того же вида и, следовательно, образуют кольцо, которое называется теперь кольцом целых чисел поля деления круга и обозначается $\mathbb{Z}[\alpha]$. В 1843 г. он дал соответствующие определения понятий единицы, простого целого числа, делителя в этом кольце (аналогичные тем, которые ввел Гаусс для элементов $\mathbb{Z}[i]$, как говорилось выше). Куммер предполагал, что всякий элемент кольца $\mathbb{Z}[\alpha]$ имеет однозначное разложение на простые делители из этого кольца, как и в случае кольца $\mathbb{Z}[i]$. Это предположение должно было позволить ему доказать теорему Ферма для любого целого n.

Этот предмет внезапно попал в центр внимания математиков Франции и Германии. Он обсуждался в Парижской академии наук. Многие математики (Дирихле, Коши и сам Куммер) обнаружили, что однозначность разложения на простые делители не только не очевидна, но и не имеет места в некоторых кольцах полей деления круга в зависимости от значения p [1]). Аналогия между $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}[i]$ оказалась, таким образом, счастливой случайностью. И чтобы восстановить в некотором смысле однозначность разложения на «простые» элементы, Куммер создал в 1844 г. свою теорию идеальных чисел [2]).

Рассмотрим подробнее случай кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, в принципе идентичный случаю кольца целых поля деления круга, но более простой для изложения. Элементы этого кольца записываются как $a+b\sqrt{-5}$, где a и b — целые рациональные. В этом кольце имеет место равенство

$$6=2\times 3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}),$$

---

[1]) Неоднозначность разложения на простые делители в кольцах целых чисел полей деления круга впервые обнаружил Куммер (1844 г.). Коши пытался ввести в эти кольца алгоритм Евклида (работы 1847 г.), что ему, разумеется, не удалось.— *Прим. ред.*

[2]) Теория идеальных чисел Куммера была изложена в его работе 1847 г., опубликованной им в журнале Крелле и в журнале Лиувилля.— *Прим. ред.*

и можно убедиться, что все четыре делителя 2, 3, $1+\sqrt{-5}$, $1-\sqrt{-5}$ являются «простыми» элементами кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Таким образом, число 6 разлагается на простые делители в этом кольце двумя разными способами.

Путь Куммера заключался во введении в этой области «идеальных чисел»

$$\alpha=\sqrt{2},\quad \beta_1=\frac{1+\sqrt{-5}}{\sqrt{2}},\quad \beta_2=\frac{1-\sqrt{-5}}{\sqrt{2}};$$

тогда $6=\alpha^2\beta_1\beta_2$, т. е. выражается как произведение четырех делителей, являющихся *«идеальными числами»* кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Если включить в разложение идеальные числа наряду с другими простыми числами, оно становится однозначным. Таким образом, в некоторых кольцах понятие простого числа утрачивает смысл, и некоторые числа, неразложимые в произведение двух различных делителей, отличных от единицы, которые естественно было бы рассматривать как простые, ведут себя на самом деле как составные числа. Так, произведение двух таких чисел может делиться на третье число, отличное от двух первых.

Подход Куммера и выбранная им терминология с неизбежностью заставляют вспомнить о создании в XVI в. других *фиктивных* сущностей, мнимых чисел, призванных сохранить некоторые вычисления или свойства, с риском совершить обходный маневр в весьма нечетко определенную область.

Благодаря своей теории *«идеальных делителей»* Куммеру удалось быстро доказать великую теорему Ферма для простых чисел, меньших 100 [1]). Но его определение идеальных чисел не обладало достаточной общностью. Идеальные числа Куммера сохранились в современной математике под названием «дивизоров»; они вошли в более мощную теорию Дедекинда, выросшую из теории Куммера.

---

[1]) Куммер доказал великую теорему Ферма для всех регулярных простых показателей λ, т. е. таких, которые не являются делителями числа классов идеалов в поле $\mathbb{Q}(\zeta)$, где $\zeta^\lambda=1$, $\zeta\neq 1$. (Они могут быть также охарактеризованы как не делящие числители первых $\lambda-3$ чисел Бернулли.) — *Прим. ред.*

Теория алгебраических чисел Дедекинда

Рихард Дедекинд (1831—1916) подошел к проблеме однозначности разложения совсем иначе, чем Куммер. Мы изложим его главные идеи и определения, потому что именно они лежат в основе современной теории алгебраических чисел.

Дедекинд обобщил понятие «*целого числа*» по Гауссу и по Куммеру следующим образом: ... число r, являющееся корнем неприводимого уравнения вида

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

где a_i — целые рациональные, называется *алгебраическим числом* степени n. Если коэффициент a_0 равен 1, соответствующие алгебраические числа называются *алгебраическими целыми* степени n. Например, первообразный корень p-й степени из единицы является алгебраическим целым степени p—1, поскольку он удовлетворяет уравнению

$$x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1=0.$$

С другой стороны, число $^1/_2+\sqrt{-5}$ — корень уравнения $4x^2-4x+21=0$ — является алгебраическим числом второй степени, но не является алгебраическим целым. Заметим, что алгебраическое число или алгебраическое целое могут быть вещественными (например, $\sqrt{2}$).

Затем Дедекинд определил для всякого алгебраического числа θ степени n множество $\mathbb{Q}(\theta)$ чисел $a_0\theta^{n-1}+$ $+a_1\theta^{n-2}+\ldots+a_{n-1}$, где a_i — рациональные числа. Легко показать, что эти числа образуют поле — говорят, что оно получено присоединением к $\mathbb{Q}$ элемента θ; это *числовое поле*. Например, круговое поле получается присоединением к $\mathbb{Q}$ первообразного корня из единицы, квадратичное поле получается присоединением к $\mathbb{Q}$ иррационального корня многочлена второй степени.

Таким образом, мы возвращаемся к понятию поля, полученного присоединением к $\mathbb{Q}$ одного элемента, уже встречавшемуся в теории Галуа. Явная форма, которую Дедекинд использовал для записи элементов поля $\mathbb{Q}(\theta)$, а именно в виде *линейной комбинации* элементов 1, θ, θ^2, ..., θ^{n-1} с коэффициентами из $\mathbb{Q}$, подсказала мысль рассматривать числовое поле (алгебраическое расширение поля $\mathbb{Q}$) как *векторное пространство* над полем $\mathbb{Q}$.

(Например, квадратичное поле является векторным пространством размерности 2 над $\mathbb{Q}$.) Затем Дедекинд исследовал подмножество поля $\mathbb{Q}(\theta)$, состоящее из алгебраических целых, и установил, что они образуют кольцо.

Дедекинд показал, что в поле $\mathbb{Q}(\theta)$ алгебраических чисел существуют такие целые $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, что любое другое алгебраическое целое записывается как линейная комбинация θ_i с коэффициентами из $\mathbb{Z}$. Таким образом, кольцо алгебраических целых является *$\mathbb{Z}$-модулем* размерности n.

Понятие модуля получено заменой полей кольцами в определении векторного пространства (в упомянутой линейной комбинации коэффициенты — целые, а не рациональные числа); оно принесло с собой идею *линеаризации* в область, казавшуюся до тех пор более приспособленной для других методов. Значение линейной алгебры в теории колец и полей возрастало.

Теоретико-множественная интерпретация. Понятие идеала

Вводя общее понятие алгебраического числа, Дедекинд также хотел сохранить однозначность разложения в полях алгебраических чисел. Вместо идеальных чисел Куммера он ввел классы алгебраических чисел, которые он назвал *идеалами* (отдав дань терминологии Куммера). Идеал кольца — это аддитивная подгруппа кольца, такая, что произведение произвольного элемента кольца на элемент идеала принадлежит идеалу. Дедекинд определил композицию идеалов как их произведение. Если I и J — два идеала, их произведение IJ есть множество конечных сумм с произвольным числом членов $x_1y_1+ +x_2y_2+\ldots+x_ky_k$, где x_i принадлежит I, а y_j принадлежит J. (Вообще говоря, при таком законе композиции идеал необратим, но при помощи «симметризации» вводятся дробные идеалы, и Дедекинд доказал, что они образуют группу относительно этого закона композиции.)

Дедекинд определил понятие простого идеала как такого, который не содержится ни в каком другом [1]).

---

[1]) В наше время такой идеал называется максимальным, а простым называют такой идеал P, что если xy принадлежит P, то либо x, либо y принадлежит P. Но в кольцах, рассмотренных Дедекиндом, максимальные и простые идеалы совпадают.

Главная теорема Дедекинда формулируется так: «*Всякий идеал (отличный от всего кольца) может быть представлен единственным образом как произведение простых идеалов*».

Теперь понятно, что идеалы Дедекинда являются обобщением обычных целых чисел и были задуманы для получения понятий и свойств, которые помогли бы полностью выяснить проблему однозначности разложения на простые делители в кольцах алгебраических целых.

В 1871 г. Дедекинд опубликовал новое издание работы Дирихле «Лекции о теории чисел» («Vorlesungen über Zahlentheorie»), к которой он присоединил свое знаменитое *Добавление*, ставшее поворотным моментом в истории алгебры. В нем Дедекинд явным образом ввел фундаментальные понятия поля, кольца, модуля, идеала. Все эти понятия определялись с помощью системы аксиом, что, несомненно, было первым примером применения аксиоматического метода в алгебре. Четко вырисовывалась теоретико-множественная интерпретация: идеал определялся как множество элементов кольца, обладающих явно сформулированными свойствами, закон композиции оперировал с этими же множествами, понятие «делится на» заменялось теоретико-множественным «содержится в» и т. д.

Расширение теории полей Кронекером [1])

Рихард Дедекинд интересовался в основном числовыми полями, полученными присоединением алгебраического числа к полю рациональных чисел. В тот же период Кронекер (1823—1891), любимый ученик Куммера и его преемник в Берлинском университете, создал другую теорию полей — теорию областей рациональности, которую он опубликовал в 1882 г.

Отождествив понятие присоединения, существующее в теории Дедекинда, с аналогичным понятием, выделенным из работ Галуа, и, с другой стороны, зная, что Лиу-

[1]) Авторы ничего не говорят о третьем создателе теории алгебраических чисел — Егоре Ивановиче Золотареве (1847—1878), работы которого были опубликованы *до* работ Кронекера. В работах Золотарева были развиты локальные методы, которые сыграли в XX в. большую роль в коммутативной алгебре.— *Прим. ред.*

вилль, Кантор и др. различали алгебраические и трансцендентные числа, Кронекер ввел понятие *абстрактного неопределенного элемента, присоединенного* к некоторому полю.

Кронекер рассматривал случай, когда неопределенный элемент α является трансцендентным числом над $\mathbb{Q}$, т. е. не удовлетворяет никакому алгебраическому уравнению с коэффициентами из $\mathbb{Q}$.

Многочлены от α вида $a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots$ находятся во взаимно однозначном соответствии с многочленами от одной переменной с коэффициентами из этого поля: достаточно заменить α на x. Это взаимно однозначное соответствие является изоморфизмом колец $\mathbb{Q}[\alpha]$ и $\mathbb{Q}[x]$.

Если теперь рассмотреть наименьшее поле, содержащее $\mathbb{Q}$ и α, скажем $\mathbb{Q}(\alpha)$, то надо симметризовать операцию умножения, чтобы многочлены $P(\alpha)$ имели обратные, т. е. надо рассмотреть рациональные дроби $P(\alpha)/Q(\alpha)$. Кронекер доказал, что поле $\mathbb{Q}(\alpha)$ изоморфно полю рациональных дробей от одной переменной с коэффициентами в $\mathbb{Q}$. Поля $\mathbb{Q}(\alpha)$ и $\mathbb{Q}(x)$ отождествляются той же заменой x на α.

Затем в 1887 г. Кронекер вернулся к случаю, когда присоединенный неопределенный элемент является алгебраическим числом θ — корнем неприводимого многочлена $P(x)$. Обратившись к идее Коши, который отождествлял комплексные числа $\mathbb{C}=\mathbb{R}(i)$ с классами многочленов с вещественными коэффициентами по отношению сравнения по модулю многочлена x^2+1 (см. гл. 7), Кронекер показал, что в этом случае $\mathbb{Q}(\theta)$ имеет те же алгебраические свойства, что и множество классов эквивалентности многочленов с рациональными коэффициентами по отношению сравнения по модулю $P(x)$. Множество кратных многочлена $P(x)$ образует так называемый «идеал» многочленов, порожденный $P(x)$, который обозначается $(P(x))$. Два многочлена эквивалентны по отношению сравнения по модулю $P(x)$, если их разность кратна $P(x)$, т. е. если она принадлежит идеалу $(P(x))$.

Рассмотрение классов эквивалентности по модулю $P(x)$ — это «факторизация» кольца $\mathbb{Q}[x]$ по идеалу $(P(x))$. Когда $P(x)$ неприводим, факторкольцо $\mathbb{Q}[x]/(P(x))$ является полем.

Если говорить современным языком, Кронекер тем самым доказал, что существует изоморфизм между полем $\mathbb{Q}[x]/(P(x))$ и полем $\mathbb{Q}(\theta)$ алгебраических чисел.

После исследований немецкой школы эти «методы» современной алгебры (гомоморфизмы структур, факторизации и т. п.) распространялись все шире.

Таким образом, теория Кронекера в рамках одного и того же формализма охватила числовые поля Дедекинда и поля рациональных дробей; теперь можно было присоединять любое число неопределенных элементов. Чтобы теория полей стала совсем общей, оставалось только включить в нее расширения конечных полей $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: алгебраические расширения, элементами которых являются знаменитые «воображаемые» Галуа, и трансцендентные расширения по Кронекеру. Это было проделано в конце века Дедекиндом и Вебером, изложившим общую теорию.

В 1910 г., после работ Гильберта, Штейниц подвел подробный итог всех алгебраических понятий, появившихся в предыдущем веке. Вслед за этим появилась книга ван дер Вардена «Современная алгебра», отметившая начало собственно современной алгебры.

7. Новый облик математики

Таким образом, менее чем за один век алгебра полностью изменила свое лицо. В конце XVIII в. это была довольно узкая дисциплина, занимавшаяся почти исключительно теорией уравнений в обычной числовой области. С появлением разнообразных новых объектов, о котором мы смогли дать лишь очень беглое представление, сама природа этих объектов до некоторой степени потеряла интерес. Например, как мы видели, элементами циклической группы могут быть вращения, подстановки, корни n-й степени из единицы — и сам характер элементов не имеет значения при изучении этой группы. Были созданы и развиты формализмы, позволяющие отвлечься от конкретных объектов, к которым они применяются. Излюбленной темой алгебраистов стали *отношения*.

Отношения — это и различные операции или законы композиции, которые действуют на этих объектах, и способ, каким эти законы композиции сочетаются между собой и определяют алгебраические структуры, наконец, отношения между самими этими структурами — «морфизмы», которые можно определить между структурами.

Таким образом, с открытием алгебраических структур разрозненные, но важные математические понятия были собраны воедино, приведены во взаимодействие и сложены в обширные теоретические блоки.

Что касается прежних математических объектов — целых, рациональных, вещественных чисел и т. д.— они обычно не были у истоков открытия новых алгебраических структур, поскольку они слишком тесно переплетены с этими, а также с другими структурами, которые мы здесь не рассматривали — структурами, связанными с понятием порядка, или топологическими структурами, которые абстрактно формализуют интуитивные понятия окрестности, предела и непрерывности (они были аксиоматизированы в начале XX в.).

В процессе абстракции очищаются и выделяются различные скрытые в них внутренние структуры, чтобы исследовать их по-отдельности. Самый поразительный пример — то как Кантор рассматривал множество вещественных чисел, совершенно обнажив его, сведя его к числу элементов, освободив его как от алгебраической, так и от топологической структуры («континуум» вещественной прямой).

Преобразование алгебры повлекло за собой преобразование всей математики. Исследование фундаментальных структур (Бурбаки называет их «порождающими структурами»), их подструктур (например, в теории групп — конечных групп, коммутативных групп и т. д.), изучение их основных комбинаций (таких, как структуры алгебраической топологии, в которых алгебраические комбинации обладают дополнительными свойствами непрерывности, дифференцируемости и т. д.) нарушили архитектуру математики, древняя схема которой (алгебра, арифметика, геометрия, анализ) устарела. Взаимопроникновение дисциплин, о котором мы упомянули только на нескольких примерах, стало в наши дни глубоким и всеобщим.

Однако на страницах этой книги мы видели, что математика функционировала — и с большим успехом — еще до открытия ее фундаментальных структур.

Изучение этих больших «теоретических машин» — мощных инструментов, позволяющих ориентироваться в бурном потоке математических результатов — не заменит интуитивного исследования точно определенных объектов; оно одно лишь может подсказать аналогии и дать ход активной и независимой мысли.

Оригинальные работы

Argand J. R. Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires par les constructions géométriques. 1-e éd., Paris, 1806; 2-e éd., suivie d'un appendice contenant des extraits des Annales de Gergonne, Paris, 1877.

Saint-Venant Barré de. Mémoire sur les sommes et différences géométriques et sur leur usage pour simplifier la Mécanique, 1844, C. R. Académie, t. XXI, p. 621—625. (Одно из первых во Франции изложений принципов векторного исчисления.)

Cauchy A.-L. Mémoire sur la Théorie des Équivalences algébriques substituée à la théorie des imaginaires. O. C. 2-e s., t. XIV, pp. 93—120.

Cauchy A.-L. Mémoire sur les Quantités géométriques. O. C. 2-e s., t. XIV, p. 175—202.

Cayley A. On the Theory of Groups, as depending on the Symbolic Equation $\theta^n=1$. Collected Mathematical Papers. University Press Cambridge, 1889—98, t. II, № 125—126 et t. IV, № 243.

Галуа Э. Сочинения. Пер. с франц.— М.—Л.: ГОНТИ, 1936.

Гаусс К. Ф. Арифметические исследования.— В кн.: Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел.— М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1959.

Работы по истории, которым мы особенно следовали

Bachelard S. La représentation géométrique des quantités imaginaires au début du XIX s.— Conf. Palais de la Découverte ND 113, 1967.

Башмакова И. Г. Sur l'histoire de l'algebre commutative, Revue de Syntèse. 3e s., № 49—52, Paris, 1968.

Crowe M. J. A History of Vector Analysis. The evolution of the Idea of a Vectorial System.— Notre Dame, London, 1967.

Dahan A. Les recherches algébriques de Cauchy. Thèse.— Paris, 1979.

Dahan A. Les travaux de Cauchy sur les substitutions. Étude de son approche du concept du groupe.— Archive for History of Exact Sciences. Vol. 23, № 4, 1980.

Dieudonné J. La génèse de la théorie des groupes. La Recherche, septembre 1979.

Itard J. Matérieux pour l'histoire des nombres complexes.— Brochure de la bibliothèque d'Information sur l'enseignement mathématique.

Itard J. La théorie des nombres et les origines de l'algèbre moderne. XII congrès international d'Histoire des Sciences, Paris, 1968.

Kiernan B. M. The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin.— Archive for History of Exact Sciences, vol. 8, № 1—2, 1971.

Novy L. Origins of Modern Algebra.— Prague, 1973.
Vignant D. Les démonstrations algébriques du théorème fondamental de l'algèbre.— D. E. A., Paris, 1979.
Vuillemin J. La philosophie de l'Algèbre.— PUF, Paris, 1962.

Работы, добавленные редактором перевода

Башмакова И. Г. О методе введения новых понятий у Дедекинда.— История и методология естественных наук. Вып. XXV.— М.: Изд-во МГУ, 1980, с. 34—44.
Чеботарев Н. Г. Теория Галуа.— М.—Л., 1936.
Чеботарев Н. Г. Об обосновании теории идеалов по Золотарёву.— УМН, 2 : 6 (22) (1947).
Математика XIX в. (Математическая логика, алгебра, теория вероятностей). Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича.— М.: Наука, 1978.

ГЛОССАРИЙ

Говорят, что на множестве E определена **алгебраическая структура**, если определен **закон (операция) композиции** f, который любым двум элементам x, y множества E ставит в соответствие третий его элемент, обозначаемый $f(x, y)$.

Если этот закон ассоциативен, обладает нейтральным элементом e из E, таким, что $f(e, x)=f(x, e)=x$ для всякого x из E, и если всякий элемент x из E имеет обратный, обозначаемый $s(x)$, такой, что $f(x, s(x))=f(s(x), x)=e$, то говорят, что множество E, на котором задан этот закон, является **группой**.

Порядок группы есть число ее элементов.

Группа называется **абелевой**, если она коммутативна.

Подгруппа H группы G — это группа H'(с тем же законом композиции, что и в G), принадлежащая группе G.

Циклическая группа порождается одним своим элементом.

Кольцо — это множество, на котором заданы два внутренних закона композиции. Закон $+$ (сложение) делает его абелевой группой, а закон $\cdot$ (умножение) ассоциативен и дистрибутивен по отношению к сложению.

Поле K — это такое кольцо, что вдобавок $K^*=K-\{0\}$ является абелевой мультипликативной группой.

Говорят, что поле K является **расширением** поля K', если K' — поле, содержащееся в K.

Поле N является **полем разложения** многочлена $f\in K[x]$, если оно является наименьшим расширением поля K, содержащим все корни f.

Векторное пространство E над полем K — это аддитивная группа, на которой определено отображение (внешний закон умножения) $K\times E$ в E, такое, что для всякой пары (α, β) элементов из K и всякой пары (x, y) элементов из E имеют место соотношения

$$\begin{gathered}(\alpha+\beta)\,x=\alpha x+\beta x,\\ \alpha\,(x+y)=\alpha x+\alpha y,\\ \alpha\,(\beta x)=(\alpha\beta)\,x,\\ 1\cdot x=x.\end{gathered}$$

Векторное подпространство F векторного K-пространства E — это подмножество F множества E, инвариантное относительно всех операций в E, которое, таким образом, само является векторным пространством и принадлежит E.

Модуль M (над унитарным коммутативным кольцом A) получается при замене поля K кольцом A в приведенном выше определении векторного пространства.

Алгебра E над полем K — это векторное K-пространство E, обладающее сверх того внутренним мультипликативным законом, дистрибутивным по отношению к сложению. Если этот закон ассоциативен, говорят, что алгебра E ассоциативна; тогда E обладает структурой векторного пространства и структурой кольца.

Гомоморфизм f **относительно двух внутренних законов композиции.** Пусть $\top$ (соответственно $\perp$) — внутренний закон композиции на множестве E (соответственно E'); f является гоморфизмом $(E, \top)$ в $(E', \perp)$, если для всякой пары (x, y) элементов из E имеет место соотношение

$$f(x \top y) = f(x) \perp f(y).$$

Гомоморфизм относительно двух внешних законов композиции. Пусть $*$ (соответственно $\cdot$) — внешний закон композиции на множестве E (соответственно E') и Ω — общая область их действия; f является гомоморфизмом $(E, *)$ в $(E', \cdot)$, если для всякой пары (α, x), принадлежащей $\Omega \times E$, имеет место соотношение

$$f(\alpha * x) = \alpha \cdot f(x).$$

Гомоморфизмы групп, колец, полей, векторных пространств, модулей и т. д.— это гомоморфизмы относительно каждого из внутренних или внешних законов, определяющих эти структуры (говорят также морфизмы).

Изоморфизм — это биективный гомоморфизм.

Общепринятые обозначения:

$\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел;
$\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел;
$K[x]$ — кольцо многочленов с коэффициентами из поля K;
$K(x)$ — поле рациональных функций с коэффициентами из поля K.

РАБОТЫ ОБЩЕГО ХАРАКТЕРА

Abrégé d'histoire des Mathématiques 1700—1900, sous la direction de J. Dieudonné.— Paris, 1978.

Бурбаки Н. Очерки по истории математики. Пер. с франц.— М.: ИЛ, 1963.

Brunschvicg L. Les étapes de la philosophie mathématique.— Alain, Paris, 1912, ou Rééd. Blanchard, Paris, 1972.

Dictionnaire des Mathématiques. A. Bouvier et M. George (sous la direction de F. Le Lionnais).— PUF, Paris, 1979.

Cantor M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.

Dictionary of Scientific Biography. Ed. Ch. C. Gillispie.— Charles Scribner's Sons, New York, 1970—1980.

Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées. Éd. francaise rédigée et publiée d'aprês l'édition allemande sous la direction de J. Molk.

Encyclopaedia Universalis.

Histoire Générale des Sciences, publ. sous la direction de R. Taton.— PUF, Paris, 1958.

Itard J., Dedron P. Mathématique et mathématiciens.— Magnard, Paris, 1960.

Kline M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.— Oxford University Press, New York, 1972.

Le Lionnais F. Les grands courants de la pensée mathématique.— Rééd. Blanchard, Paris, 1962.

Montucla J. F. Histoire des mathématiques. 2-e éd. 4 vol., 1799—1802. — Rééd. Blanchard, Paris, 1960.

Работы, добавленные редактором перевода

Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. Пер. с англ.— М.: Наука, 1969.

История математики с древнейших времен до начала XIX в. Т. 1—3.—М.: Наука, 1970—1972.

Математика XIX в. (математическая логика, алгебра, теория чисел, теория вероятностей). Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича.— М.: Наука, 1978.

Математика XIX в. (геометрия, теория аналитических функций). Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича.— М.: Наука, 1981.

Кантор Г. Теория множеств. Пер. с нем.— М.: «Наука», 1985.

Пуанкаре А. О науке. Пер. с франц. —М.: Наука, 1983.

Рыбников К. А. История математики. 2-е изд.— М.: изд-во МГУ, 1974.

Юшкевич А. П. История математики в России.— М.: Наука, 1968.

Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Пер. с нем.— М.-Л.: ОНТИ, 1937.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, издательство «Мир».

Научно-популярное издание

Ами Даан-Дальмедико, Жанна Пейффер

ПУТИ И ЛАБИРИНТЫ

Очерки по истории математики

Ст. научный редактор Н. И. Плужникова
Мл. научный редактор Т. А. Денисова
Художник А. В. Шипов
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор И. И. Володина
Корректор С. А. Денисова

ИБ № 5689

Сдано в набор 20.05.86.
Подписано к печати 14.10.86.
Формат $84 \times 108^{1}/_{32}$.
Бумага кн. журн. имп.
Гарнитура литературная. Печать высокая.
Объем 6,75 бум. л. Усл. печ. л. 22,68.
Усл. кр.-отт. 22,90. Уч.-изд. л. 22,15. Изд. № 1/4736.
Тираж 50 000 экз. Зак. 2567. Цена 1 р. 20 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28

1 р. 20 к.

Изложение истории математики, написанное Ами Даан-Дальмедико и Жанной Пейффер, обладает тремя важными достоинствами. Во-первых, оно верно — потому что опирается на первоисточники. Во-вторых, оно конкретно — потому что в нем учитывалась специфика трудов, тем и эпох. И, наконец, оно многое проясняет — потому что в нем стала осязаемой связь идей и возникновение проблем.

Из предисловия
к французскому изданию

Издательство «Мир»