

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
В ОРЕНБУРГСКОМ КРАЕ. ИСТОРИЯ
И СОВРЕМЕННОСТЬ

Сборник научных трудов

Оренбург
Издательство ОГПУ
2011

УДК 51(470.56)
ББК 22.1(2Р36)
М34

Ответственный редактор

Г. П. Матвиевская, доктор физико-математических наук,
профессор

Рецензенты

Г. М. Гузаиров, кандидат физико-математических наук,
доцент

А. Д. Сафарова, кандидат педагогических наук, старший
преподаватель

М34 **Математическое образование в Оренбургском крае.
История и современность** : сб. науч. тр. / отв. ред. Г. П.
Матвиевская ; Мин-во образования и науки РФ ; Орен-
бург. гос. пед. ун-т. — Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2011. —
232 с. : ил.
ISBN 978-5-85859-486-4

УДК 51(470.56)
ББК 22.1(2Р36)

ISBN 978-5-85859-486-4

© Оформление. Изд-во ОГПУ, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции	4
Матвиевская Г. П. О математическом образовании в Оренбурге в конце XIX — начале XX века	5
Матвиевская Г. П., Зубова И. К., Игнатушина И. В. Обучение математике в реальном училище и мужской гимназии Оренбурга (1902—1911 гг.)	31
Новак Н. М. Журнал «Записки математического кружка при Оренбургском реальном училище» как отражение уровня математического образования в Оренбургской губернии в начале XX века	95
Игнатушина И. В. Константин Александрович Торопов и математическое образование в Оренбурге	106
Зубова И. К. Д. В. Агапов — автор учебных пособий по математике, изданных в Оренбурге в конце XIX — начале XX века	130
Прояева И. В. Преподавание математики в уездных училищах Оренбургской губернии в XIX веке	145
Коротина В. А. Из истории школы № 12 г. Оренбурга	152
Коротина В. А. Петр Алексеевич Буданцев. К 100-летию со дня рождения	167
Курбатова Л. Н. П. А. Буданцев и Г. М. Щипакин об изложении теории функций в школе	174
Игнатушина И. В. О работе К. А. Торопова «Магический ряд и применение его к решению задач»	181
Приложение Торопов К. Магический ряд и его применение к решению задач	187
Краткие сведения об авторах	231

От редакции

Предлагаемый сборник посвящен истории математического образования в Оренбуржье начиная с 60-х годов XIX века. Основное внимание уделено преподаванию математики до революции в средних учебных заведениях Оренбурга — мужской гимназии, учительском институте и реальном училище. Приводятся сведения о преподавателях, о применявшихся ими методах обучения и о некоторых учебных пособиях. Статьи этого раздела сборника основаны главным образом на изучении документов Государственного архива Оренбургской области.

Кроме того, в сборник включены материалы, касающиеся преподавания математики в советской средней школе. В качестве приложения дается полный текст изданной в начале XX века брошюры К. А. Торопова «Магический ряд и применение его к решению задач», которая и в настоящее время представляет интерес с точки зрения методики преподавания геометрии.

Г. П. Матвиевская

Г. П. Матвиевская

О математическом образовании в Оренбурге в конце XIX — начале XX века

В истории народного образования в Оренбургском крае важным рубежом является 1865 год, когда произошли существенные перемены в административной структуре этого обширного региона. От края отделилась Самарская губерния, а прежняя Оренбургская губерния с центром в Уфе была разделена на Уфимскую и собственно Оренбургскую, центр которой Оренбург из уездного города превратился в губернский. Теперь у него появилось право иметь свою гимназию, тогда как раньше так называемая Оренбургская гимназия, основанная в 1804 году, находилась в Уфе.



Генерал-губернатор Н. А. Крыжановский

Как видно из хранящегося в Государственном архиве Оренбургской области (ГАОО) отчета оренбургского генерал-губернатора Н. А. Крыжановского за 1865 г. [1], им была создана особая комиссия для обсуждения вопроса о

постановке учебного дела в крае. Она констатировала, что «по количеству народонаселения ощущается большой недостаток в средних учебных заведениях», так как на весь огромный край имеется только четыре таких заведения: в Уфе — губернская мужская гимназия и женская гимназия, в Оренбурге — Неплюевский кадетский корпус и Николаевский институт благородных девиц. «Недостаток местных средних учебных заведений, — утверждает в отчете, — вынуждает жителей определять детей своих в гимназии различных губернских городов России, что всегда сопряжено с затруднениями, а потому увеличивает невольно число не получающих гимназического образования, хотя и желающих получать таковое» [2]. Комиссия пришла к выводу, что прежде всего необходимо открыть в Оренбурге одну гимназию для мальчиков и другую — для девочек. При этом отмечалось, что «разные сословия и ведомства уже изъявили готовность дать денежные средства для учреждения обеих этих гимназий».



Оренбург. Неплюевский кадетский корпус

Комиссия предложила также ряд мер по совершенствованию системы народного образования в многонациональ-

ном Оренбургском крае, которые постепенно осуществлялись в последующие десятилетия. В результате произошло значительное увеличение количества учебных заведений и общего числа учащихся. Этот процесс основательно проанализирован современными исследователями, которые особое внимание уделили средним учебным заведениям Оренбургской губернии конца XIX — начала XX века [3—7 и др.].

В настоящей статье освещается вопрос о преподавании математики в указанный период в Оренбурге — в возникших в это время мужской гимназии, учительском институте и реальном училище, т.е. в учебных заведениях, где этот предмет изучался в наибольшем объеме. Сообщаемые сведения почерпнуты в основном из документальных материалов, находящихся в ГАОО.



Оренбург. Мужская гимназия на ул. Николаевской
(ныне здание первого учебного корпуса ОГПУ на ул. Советской, 19)

Начало математического образования в Оренбурге связано с открытием в 1868 году мужской гимназии. Этому предшествовали настойчивые хлопоты Н. А. Крыжановского и большая работа, связанная с решением многих нелегких проблем [8].

Прежде всего предстояло решить, какой должна быть гимназия — классической или реальной. Эти два типа существовавших тогда средних учебных заведений различались тем, что вместо двух древних языков — латинского и греческого, которые значились в программе классической гимназии, в реальных преподавался только один — латинский. Окончившие классическую гимназию получали право поступления в университет. Несколько позже это различие было узаконено принятием в 1871 году устава гимназий, а в 1872 году — устава реальных училищ, выпускникам которых предоставлялась возможность поступать в высшие технические заведения, но не в университет. Древние языки в реальных училищах не изучались совсем.

Комиссия, созданная генерал-губернатором в 1865 году, опросив представителей горожан всех сословий, заключила, что «по заявлению большинства жителей» гимназия в Оренбурге должна быть классической. Однако и число сторонников реальной гимназии оказалось весьма значительным.

При гимназии решили открыть пансион, где должны были жить дети чиновников, находившихся на службе в Туркестане, присоединенном в это время к России, а также воспитанники из «иноверцев» — киргиз (т.е. казахов), татар, башкир, чувашей и других народностей, населявших Оренбургский край. Вообще, считалось, что гимназия «должна давать образование преимущественно иноверцам Оренбургского края с тем, чтобы они, не отрываясь впоследствии от своей среды, могли в последнюю вносить просвещение посредством распространения полезных знаний в хозяйственном и промышленном быту» [8, с. 36]. Поэтому в 1868 году была закрыта издавна существовавшая в Оренбурге и имевшая статус уездного училища киргизская школа с тем, чтобы ее ученики обучались в гимназии, где специально для них открывался приготовительный класс.

Немалые трудности представлял вопрос о помещении гимназии. По ходатайству Н. А. Крыжановского для этой цели был определен казенный дом на главной улице горо-

да, перестройка которого произведена по проекту губернского архитектора К. И. Реймерса [9, с. 98]. Закладка здания состоялась 25 мая 1868 года, а завершено строительство было в 1869 году. В настоящее время в этом здании (ул. Советская, 19), перестроенном в 1934—1936 гг., располагается первый корпус Оренбургского государственного педагогического университета.

До завершения строительства гимназию разместили в другом казенном доме на противоположной стороне улицы, на месте которого позднее построено здание пансиона гимназии. Теперь в этом доме (ул. Советская, 18) помещается губернаторский многопрофильный лицей-интернат.

Летом 1868 года все было готово к началу занятий. Попечителем Казанского учебного округа, в ведении которого находился Оренбургский край, назначены директор (С. А. Колесников) и преподаватели, главным образом выпускники Казанского университета. Жителей Оренбургского края оповестили о предстоящем открытии гимназии, обнародовав программу испытаний для поступления в первые три класса [8, с. 59—63].

От поступающих в первый класс требовалось прежде всего «умение читать внятно и плавно, с надлежащими остановками и интонациями, показывающими как раздельность мыслей, так и способность выражать их правильно по выговору слов и по употреблению ударений», а также «умение писать по крайней мере согласно с произношением».

По арифметике требовалось знание правил сложения, вычитания и таблицы умножения. Поступающие же во второй класс должны были знать четыре действия с простыми и именованными целыми числами и уметь решать задачи на эти действия «как устно, так и письменно».

17 сентября 1868 года начались приемные испытания, а к занятиям приступили 23 сентября. Официальное открытие гимназии состоялось несколько позже, 23 ноября, и прошло в высшей степени торжественно [8, с. 34—35].

Об Оренбургской гимназии в первом десятилетии существования сохранились воспоминания ее воспитанника

Н. Беккаревича, опубликованные в 1903 году в журнале «Русская старина» [10]. Он поступил в подготовительный класс в 1875 году и окончил курс через девять лет. В то время, по его словам, гимназия представляла собой «нечто весьма оригинальное и самобытное». Это объяснялось тем, что треть учащихся составляли «иностранцы». Они плохо владели русским языком, что затрудняло обучение. Как пишет автор, «их принимали невзирая на возраст и разрешали сидеть в каждом классе сколько угодно лет».

Беккаревич рассказывает о гимназической жизни и тепло отзывается о преподавателях. Так, священника Николая Каллистратовича Шильнова, преподававшего Закон Божий, он вспоминает как человека «в высшей степени симпатичного и ужасно доброго, любившего детей».

Инспектора Александра Лукича Громачевского, который преподавал греческий и латинский языки, а в старших классах — логику, он называет «светлой личностью доброго старого времени». Инспектор, «ревностный распространитель полезных книг», организовал в гимназии библиотеку и проводил литературные вечера. Благодаря ему начал выходить рукописный журнал «Часы досуга» и был выпущен сборник рассказов, стихов и рефератов. Древние языки Громачевский преподавал очень увлекательно, сообщая всевозможные сведения по мифологии и истории. Беккаревич добавляет, что «по отношению к ученикам это был истинный джентльмен», и жалеет, что в гимназии он пробыл не более двух лет.

Учитель истории Николай Емельянович Северный, по оценке бывшего воспитанника, — также «светлая личность», «как человек — единственный в своем роде». Он запомнился тем, что «всегда хотел приучить ученика рассуждать».

Математику преподавал Андрей Алексеевич Мешков, назначенный в 1878 году директором гимназии. Занятия он проводил «крайне оригинально». «Он не спрашивал никогда ученика, — пишет автор воспоминаний, — вся учебная четверть проходила в его объяснениях и решениях, но пе-

ред концом четверти он давал письменную задачу на все пройденное и по ней судил о знаниях. Сухой сам по себе предмет в его преподавании становился интересным, и мы охотно занимались им. Несмотря на свою доброту (он почти никогда не возвышал голоса и не наказывал), его почему-то беспрекословно слушались и даже боялись, что выражалось в том, что, несмотря на то, что он не требовал καθηдневных ответов урока, все же мы всегда готовили уроки и знали их» [10, с. 412].

Важную роль в развитии образования в крае сыграло открытие в 1875 году Оренбургского учебного округа с центром в Оренбурге. Он был выделен из обширного Казанского учебного округа. Вопрос об этом поднимался еще в 1865 году, но решился только через десять лет [11]. В обязанности попечителя округа входило осуществление надзора над ходом учебно-воспитательной работы в учебных заведениях Оренбургской, Уфимской, Пермской и Вятской губерний, а также Уральской и Тургайской областей. Он вместе с двумя окружными инспекторами должен был проводить ревизии гимназий и прогимназий, выявлять недостатки в постановке дела, назначать и замещать преподавателей и т.д.

Определенный на эту должность известный филолог-славист, бывший ректор Варшавского университета П. А. Лавровский в ходе ревизии учебных заведений выявил множество «нестроений» в деятельности всех шести гимназий округа — Оренбургской, Троицкой, Уральской, Уфимской и Екатеринбургской. Главным из этих «нестроений» был недостаток преподавателей. Множество свободных вакансий объяснялось отсутствием в округе университета или другого «рассадника для преподавателей гимназий». П. А. Лавровский писал: «Оренбургский учебный округ не имеет подобного рассадника и отстоит от наших университетов слишком далеко; неизвестность же условий жизни в отдаленном крае мало привлекает не только людей способных и даровитых, но и просто сносных» [11, с. 165].

В Оренбургской гимназии некоторые преподаватели оказались не на высоте положения, что выяснилось на эк-

заменах, которые посетил попечитель округа: он «вынес крайне тяжелое впечатление вследствие непростительно слабой подготовки учеников по истории, географии и русской словесности» [11, с. 167].

Однако при ревизии оказалось, что учебная работа в гимназии «находится в удовлетворительном состоянии». Преподаватели математики не заслужили никаких упреков. Посещавший их уроки окружной инспектор А. А. Залеский «в общем был доволен их деятельностью» [11, с. 181]. И в последующие годы по отношению к ним замечаний не высказывалось.

В 1880 году математику и физику в гимназии преподавали Михаил Васильевич Голубков, получивший в 1884 году звание заслуженного учителя, и Михаил Александрович Зернов. С 1881 года начал работать выпускник Казанского университета Василий Васильевич Толузаков [12]. Все они внесли большой вклад в развитие математического образования в Оренбурге.

В 1878 году произошло важное для города событие: 3 августа открыто новое среднее учебное заведение — учительский институт, который должен был готовить квалифицированных учителей для открывавшихся в то время четырехклассных городских начальных школ, фактически дававших неполное среднее образование [5].

В институт принимались молодые люди не моложе 16 лет. Обучение длилось три года, так что первый выпуск состоялся в 1881 году. Чтобы воспитанники могли по ходу обучения проходить педагогическую практику, в 1880 году при институте открыто двухклассное городское училище.

Директорами института были последовательно В. И. Филоматитский, Н. И. Раевский, В. А. Попов, Н. Е. Титков, а с 1893 года — М. А. Зернов.

Учительский институт вместе с городским училищем разместился в здании на главной улице, которое было построено в 40-х годах XIX века для управления инженерного и генерального штаба. Позже в нем располагалась главная гауптвахта, а затем 2-й эскадрон Неплюевского кадетского

корпуса [9, с. 85—87]. Сейчас в этом здании (ул. Советская, 24) находится физико-математический лицей (бывшая школа № 30).

К выпускникам института предъявлялись достаточно высокие требования. Они получали основательную подготовку по русскому языку, истории, географии, естествоведению и математике. Этому способствовало хорошее обеспечение учащихся литературой и учебными пособиями. При институте имелаась богатая библиотека, хорошо оснащенные физический и естественноисторические кабинеты, а также метеорологическая станция.

Оренбургъ.—Orenbourg. № 16.



Здание Оренбургского учительского института, позднее
реального училища на ул. Николаевской
(сейчас — физико-математический лицей, ул. Советская, 24)

Высоким требованиям удовлетворял и педагогический состав: в институт назначались преподаватели, в большинстве своем имевшие университетское образование. Так, естествоведение с 1884 года преподавал Михаил Акимович Галамиев [12], закончивший физико-математический факультет Новороссийского университета со степенью кандидата естественных наук. В 1903 году ему присвоено звание заслуженного преподавателя.

Преподавателем истории и географии в институт в 1892 году был определен Николай Михайлович Гутьяр [13], который, закончив в 1889 году историко-филологический факультет Московского университета, в течение трех лет проходил там же подготовку к профессорскому званию. В Оренбурге наряду с педагогической работой он занимался общественной деятельностью (с 1893 года являлся секретарем Оренбургского губернского статистического комитета), краеведением (например, в 1896 году подготовил издание «Истории Оренбургской» П. И. Рычкова) и литературоведением (был первым исследователем творчества И. С. Тургенева).

Русский язык преподавал Николай Васильевич Введенский [14], окончивший Нежинский историко-филологический институт князя Безбородко, а чистописание, черчение и рисование — выпускник Петербургской Академии художеств Алексей Андреевич Шостаченко [15].

Преподавателем математики в 1880 году был определен Владимир Петрович Якимов, окончивший Казанский университет со степенью кандидата [16]. Его отчет за 1881 год [17] позволяет составить представление об уровне математического образования, которое давал в это время учительский институт. В 1-м классе учащиеся проходили полный курс арифметики целых и дробных чисел и получали начальные сведения по алгебре и геометрии. При изучении арифметики, как говорится в отчете, «обращено было особое внимание на решение задач». По алгебре проходили действия с многочленами и непрерывные дроби. По геометрии программа 1-го класса включала в первом полугодии — подобие прямолинейных фигур; окружность круга и правильные многоугольники; измерение площадей; определение длины окружности и площади круга. Во втором полугодии учащимся сообщались сведения по планиметрии, включая подобие треугольников.

Во 2-м классе по алгебре осваивались правила извлечения квадратных и кубических корней из чисел, извлечение квадратных корней из многочленов, решение квадратных

уравнений с одним и многими неизвестными. По геометрии в программе первого полугодия значатся темы: объемы призм и пирамид: площади поверхностей и объемы тел вращения, а во втором сообщаются несколько более подробные сведения по стереометрии.

В 3-м классе учащиеся занимались методикой преподавания арифметики и геометрии в начальной школе и очень основательно знакомились с методической литературой.

Для развития математического образования в Оренбургском учебном округе большое значение имело назначение в 1884 году на должность окружного инспектора Константина Андреевича Чеховича, ранее преподававшего физику и математику в Белостокском реальном училище. Он приложил много стараний к тому, чтобы «поднять по возможности высоко уровень знаний по математике и физике» [11, с. 222]. В ГАОО сохранились его обстоятельные отзывы о письменных работах выпускников учебных заведений округа и указания о методах преподавания.

Большое внимание К. А. Чехович уделял метеорологической станции, учрежденной при учительском институте. Ею с 1886 года заведовал М. А. Галамиев, которого Петербургская Главная физическая обсерватория в 1889 году «во внимание к заслугам по исследованию климата России» утвердила в звании своего члена-корреспондента [12]. К. А. Чехович оказал существенную помощь в деятельности станции, содействуя ее оснащению приборами для метеорологических наблюдений [18]. Сам он серьезно занимался изучением климата Оренбуржья и опубликовал несколько статей по этой теме. В рецензии на его работу «Зима 1892—1893 гг. в Оренбургском крае» газета «Оренбургский край» писала, что «все его труды в области метеорологии основаны на точных данных науки и дают свод наблюдений, произведенных в городах Оренбурге, Уфе, Троицке, Ирбите, Екатеринбурге, Уральске и Гурьеве» [19].

В 1890-е годы в Оренбурге появился целый ряд молодых преподавателей математики и физики, имевших весьма высокую квалификацию. В учительский институт в

1892 году назначен Николай Михайлович Морозов [20], окончивший Киевский (св. Владимира) университет с дипломом 1-й степени. Он работал в Оренбурге до 1903 года, затем инспектором Кунгурского технического училища, а в 1906 году перемещен в Уфимское реальное училище. Позже вернулся в Оренбург и с 23 декабря 1911 по 1918 год занимал должность директора мужской гимназии.

В гимназии начал работать Иван Андреевич Кузменко-Кузмицкий, окончивший Московский университет в 1891 году с дипломом 1-й степени, а позднее — выпускник того же университета Михаил Гаврилович Шкамарда, также получивший диплом 1-й степени [21].

В это время продолжали преподавать математику М. В. Голубков (в 1893—1899 гг. работал инспектором гимназии, а затем переведен в Пермскую женскую гимназию) и В. В. Толузаков [22], трудившийся в Оренбурге до 1907 года, когда был перемещен в Уральское реальное училище.

Среди материалов ГАОО обращают на себя внимание документы, касающиеся И. А. Кузменко-Кузмицкого, долгие годы преподававшего в гимназии математику и физику. Из них следует, что с самого начала он был отмечен как хороший преподаватель. Так, в 1893/94 учебном году его имя значится в списке преподавателей Оренбургского учебного округа, «не пропустивших ни одного урока в течение 2-й половины года» [23].

В гимназии И. А. Кузменко-Кузмицкий заведовал физическим кабинетом и приложил много сил для оснащения его приборами [24]. Занимался он и популяризацией физических знаний. Об этом рассказывала 28 октября 1898 года «Оренбургская газета»: «Лекция г. Кузменко-Кузмицкого, состоявшаяся 25 сего октября, привлекла много публики и прослушана была с большим интересом. Опыты с X-лучами удались прекрасно. Жаль только, что помещение (один из классов гимназии) выбрано было слишком недостаточно по размерам, почему многим из интересовавшихся не хватило места. Есть основание предполагать, что эта интересная лекция будет повторена». Вторичное чтение лекции со-

стоялось 8 ноября, а сбор пошел «в пользу недостаточных учеников Оренбургской гимназии».

И. А. Кузменко-Кузмицкий читал лекции и на открывшихся в Оренбурге высших курсах А. О. Киселева, о которых будет сказано ниже.

С 1 января 1905 года И. А. Кузменко-Кузмицкий назначен на должность инспектора гимназии. О его работе красноречиво свидетельствует выдержка из отчета о состоянии гимназии за 1905 год: «Инспектор преподавал математику в одном классе и физику во всех классах, где этот предмет преподается, и состоял классным наставником VI класса. Ему принадлежат главный надзор за поведением учеников в стенах гимназии, равно как главное наблюдение за сохранением порядка и исправным содержанием воспитанников в пансионе, где он проводил ежедневно не менее 2-х часов и даже более. Инспектор принимал по поручению педагогического совета плату за учение и содержание пансионеров и, по возможности, замещал уроки отсутствующих преподавателей. Заведуя физическим кабинетом, он поместил последний, ввиду недостатка места в здании гимназии, в собственной квартире». Несколько ниже говорится о внеклассных занятиях по физике, которые «проводились в вечерние часы по субботам и состояли в том, что желающие ученики старших классов под руководством инспектора проделывали опыты, требующие вычислений» [25].

С 1 августа 1906 г. И. А. Кузменко-Кузмицкий — «согласно прошению по слабости здоровья» — был уволен с должности инспектора [26]. В это время он был казначеем Общества вспомоществования нуждающимся ученикам Оренбургской гимназии и членом Оренбургского отдела Императорского Российского общества садоводства [27].

6 сентября 1908 г. И. А. Кузменко-Кузмицкий назначен директором Челябинского реального училища. В Челябинске он оставил о себе добрую память, стал одним из инициаторов создания местного научного общества и краеведческого музея, для экспозиций которого предложил использовать здание реального училища [28].

С 27 января 1914 года И. А. Кузменко-Кузмицкий, заняв должность окружного инспектора Оренбургского учебного округа, вернулся в Оренбург. Во время отсутствия попечителя исполнял его обязанности. В 1918 году числился преподавателем 2-й мужской гимназии и состоял членом комиссии по разработке программы по математике для II и III ступеней единой школы [29].

Чрезвычайно важное значение для развития математического образования в Оренбурге имело открытие в 1894 году реального училища, созданного на базе учительского института. Средние учебные заведения этого типа отличались от гимназий тем, что в их программе отсутствовали древние языки и отдавалось предпочтение математике, физике и естествознанию. Если в гимназии курс обучения длился восемь лет, то в реальном училище — шесть, но был еще дополнительный седьмой класс, по окончании которого ученики получали право поступать в высшие технические заведения [30].

Выражая давно проявлявшееся желание жителей Оренбурга иметь свое реальное училище, губернатор В. И. Ершов и попечитель Оренбургского учебного округа И. Я. Ростовцев настойчиво добивались его открытия.хлопоты увенчались успехом: 30 мая 1894 года вышло правительственное постановление, согласно которому с начала нового учебного года Оренбургский учительский институт преобразовывался в реальное училище. Прекращался прием в первый класс института и объявлялся набор в открывшиеся приготовительный, первый и второй классы училища. В последующие годы предполагалось закрывать по одному классу института до полного его упразднения и одновременно прибавлять по одному следующему классу училища [31].

Вступительные экзамены начались 1 июля. Из более чем 140 мальчиков, желавших поступить в училище, принято 112: в приготовительный класс — 52 ученика, в первый — 46 и во второй — 14 [32].

Открытие реального училища, состоявшееся 21 августа 1894 года, прошло в торжественной обстановке в присутст-

вии представителей губернской и городской администрации, попечителя Оренбургского учебного округа, окружных инспекторов, директоров и преподавателей учебных заведений, почетных граждан Оренбурга и др. Торжество нашло отражение в местной прессе. Газета «Оренбургский край» 24 августа писала, что создана новая школа, «учреждения которой Оренбург добивался 18 лет», и «событие это для нашего края и особенно для города Оренбурга имеет громадное значение».

Директор учительского института М. А. Зернов был назначен управляющим реальным училищем, а все преподаватели института «прикомандировывались» к училищу. Попечитель учебного округа указал, что на них, «кроме исполнения обязанностей при остающихся классах института, возлагается бесплатное преподавание, соответственно специальности каждого, предметов в 1-м и 2-м классах реального училища» [33].

Согласно правительственному постановлению, следовало «находящееся в Оренбургском учительском институте движимое имущество: книги, учебные пособия и т.д. — дать в другие учебные заведения» [34]. Тем не менее значительная часть этого имущества осталась при реальном училище.

Прежде всего это касалось богатой институтской библиотеки. Её книги составили основу библиотеки училища, книжный фонд которой вскоре значительно вырос. В 1900 году она состояла из фундаментальной и ученической библиотек. Только в фундаментальной числилось 544 названия книг в 1497 томах, а «вместе с переданными книгами из библиотеки бывшего учительского института» — 1955 названий в 4222 томах [35].

Сохранились и со временем значительно обогатились физический и естественноисторический кабинеты. При последнем появился естественноисторический музей.

Продолжалась также работа метеорологической станции. В ГАОО имеются документы, рассказывающие о том, что с 1897 года ею заведовал Н. М. Морозов, преподававший

в это время математику, физику и математическую географию. Он опубликовал реферат под заглавием «1899 год в метеорологическом отношении и наблюдения в Оренбургской метеорологической станции» [36]. А 17 мая 1900 года Петербургская Академия наук утвердила Н. М. Морозова в звании члена-корреспондента Главной физической обсерватории «за оказанную науке и обсерватории пользу» [20].

Кроме Н. М. Морозова уроки математики проводил директор училища М. А. Зернов. Но 11 марта 1900 года он скончался, и на его место был переведен Иосиф Модестович Каменский, директор Уральского реального училища, также математик, выпускник Петербургского университета [37].

В 1899 году в училище был перемещен — в качестве исполняющего должность инспектора — преподаватель математики мужской гимназии В. В. Толузаков. Он занимал эту должность до 1903 г., когда его назначили инспектором гимназии.

Таким образом, в этот период в реальном училище работали высококвалифицированные преподаватели математики и физики, способные обеспечить освоение учебной программы, которая, как показывают архивные материалы, была достаточно сложна. В седьмом дополнительном классе она включала элементы высшей математики.

В 1903 году Н. М. Морозов, назначенный инспектором Кунгурского технического училища, покинул Оренбург. Позднее он вернулся и в 1911—1918 гг. являлся директором мужской гимназии.

В реальное училище в 1902 году назначен новый преподаватель математики — Александр Онуфриевич Киселев, который, окончив в 1892 году Московский университет с дипломом 1-й степени, работал в разных городах Оренбургского края и Сибири. В училище он пробыл только год и в 1904 году переведен в гимназию.

В первое десятилетие XX века в Оренбургском реальном училище появились новые преподаватели математики и физики: Николай Николаевич Шемянов, Алексей Федорович Виноградов, Владимир Александрович Гербко, Сер-

гей Витальевич Ржаницын и др. Некоторые из них работали недолго, а затем были переведены в различные учебные заведения Оренбурга и других городов.

Особенно заметный след в истории реального училища оставил Н. Н. Шемянов (1877—1959). В 1903 году он окончил физико-математический факультет Московского университета по отделению математических наук с дипломом 1-й степени и сразу был назначен преподавателем Оренбургского реального училища [38]. Судя по архивным документам, этот талантливый педагог умел организовать и увлечь учащихся. Так, будучи классным наставником в старших классах училища, он, как значится в его формулярном списке, в 1905 году получил благодарность попечителя Оренбургского учебного округа «за участие в успокоении учащихся реального училища в тревожные октябрьские дни 1905 г.».

В 1905 году Н. Н. Шемянов создал кружок «Математические вечера для учащихся», который с 1906 года начал издавать свой печатный журнал — «Записки математического кружка при Оренбургском реальном училище», который и в наши дни привлекает внимание методистов (см. статью Н. М. Новак в настоящем сборнике) и историков [39]. В январе 1906 года появился пробный выпуск «Записок», в феврале — первый выпуск, в марте — второй, в апреле-мае — третий и в сентябре-октябре — четвёртый. Из этих пяти выпусков первые три были изданы литографским способом, а в дальнейшем журнал печатался в типографии. С 1907 года начинается новая нумерация журнала: в первой половине 1907/08 учебного года вышли № 1 и № 2, во второй половине того же года — № 3, а следующий № 4—5 датирован 1908/09 годом.

В журнале помещались статьи по математике и физике, а также давался обзор погоды в Оренбурге по результатам наблюдений метеорологической станции при реальном училище. Н. Н. Шемянов опубликовал в нем свой «Конспективный курс тригонометрии для 6-го класса реального училища» (№ 1 и № 3).

В 1909 году Н. Н. Шемянов уехал из Оренбурга, так как был «перемещен на должность преподавателя математики во Владимирское реальное училище». Во Владимире работал до 1930 года, когда переехал в Ярославль, где занял должность доцента Ярославского педагогического института и заведовал кафедрой методики математики. В 1947 году ему присуждена ученая степень кандидата педагогических наук [40].

Математический кружок при реальном училище продолжал действовать и после отъезда Н. Н. Шемянова. Правда, вначале он несколько заглох, но возродился, когда в 1910 году директором училища стал талантливый математик К. А. Торопов.

Константин Александрович Торопов (1860—1933) — выпускник Петербургского университета, окончивший курс в 1883 году со степенью кандидата наук, автор ряда опубликованных научных работ — сыграл важную роль в истории математического образования в Оренбурге. Ему посвящена отдельная статья настоящего сборника. Здесь мы приведем некоторые архивные данные, позволяющие составить представление о нем как директоре реального училища и преподавателе математики.

В этом отношении показательно архивное дело, озаглавленное «Сведения о личном составе, о награждении и допущении на преподавательскую должность и ходе учебного дела в Оренбургском реальном училище за 1910—1911 г. Секретные бумаги» [41]. В нем содержатся письма К. А. Торопова к попечителю учебного округа, которого он систематически подробно информировал о положении дел в училище. Он сообщает, что «вступил в управление училищем 17 ноября 1910 г. и только во второй половине учебного года ознакомился со всеми сторонами жизни учащихся» [42], но теперь уже может дать характеристики преподавателей. Из его заметок прежде всего следует, что от преподавателя он требовал не формального исполнения обязанностей, а интереса и любви к своему делу и большое значение придавал его умению правильно организовать ра-

боту учащихся. В одном из писем К. А. Торопов признается, что является «сторонником строгого режима и требования упорного труда» [43]. Особый интерес представляют его отзывы о преподавателях математики — С. В. Ржаницыне, А. Ф. Виноградове и А. П. Токмакове.

Он пишет: «Преподаватель математики Ржаницын обладает многолетним опытом, знанием предмета и усердием, но учить не может, так как совершенно не умеет поставить надлежащим образом классной дисциплины ни в старших, ни в младших классах; классная работа его приводит лишь к отрицательным результатам: шаловливая, недисциплинированная часть класса, непрерывно нарушая порядок, совершенно парализует деятельность учителя, вследствие чего познания учеников Ржаницына по математике совсем неудовлетворительны» [44].

Относительно преподавателя математики и физики А. Ф. Виноградова Торопов, напротив, замечает, что он «при основательном знании этих предметов в то же время обладает и педагогическим тактом и необходимою настойчивостью» [45]. В упрек ему ставится то, что он «совсем не интересуется жизнью училища; в истекшем году он отказался от исполнения обязанностей классного наставника, считая их для себя трудноисполнимыми» [46].

Любопытна характеристика, которую К. А. Торопов дал молодому преподавателю, выпускнику Московского университета, недавно поступившему в реальное училище Александру Прокопьевичу Токмакову. Он пишет: «Преподаватель математики Токмаков зарекомендовал себя как способный учитель, основательно знающий математику, физику и космографию, любовно относящийся к своему делу, не отказывающийся работать для учеников и во внеклассное время. Как классный наставник он слаб и как член педагогического совета является покровителем и защитником плохих по успехам и поведению учеников, находя каждый раз какие-либо обстоятельства, извиняющие недостатки ученика. Объясняя эти недочеты Токмакова его молодостью, полагаю, что из него со временем при благопри-

ятных условиях выработается дельный работник для средней школы» [47].

В письме от 31 июня 1913 года К. А. Торопов, сообщая о деятельности классных наставников, отзывается о Токмакове неодобрительно. «Молодой преподаватель Токмаков, — пишет он, — добродушный и беспечный по натуре, считая почему-то обязанности классного наставника не соответствующими его характеру, не пожелал, мне кажется, вникнуть в свою новую роль, вследствие чего результат его деятельности оказался ничтожным. Думаю, что время исправит его в этом отношении» [48].

Коротко свое мнение об А. П. Токмакове директор выразил в письме от 6 июня 1913 года: «Преподаватель Токмаков — способный, знающий свой предмет и интересующийся своим делом, но увлекающийся и вследствие этого односторонний учитель. Как преподаватель и классный наставник малотребовательный и излишне снисходительный ко всякого рода недочетам со стороны учащихся» [49].

С приходом К. А. Торопова в реальном училище возобновилась деятельность математического кружка и продолжился выпуск его «Записок». Первой половиной 1911/12 учебного года датирован № 6 журнала, который начинается со статьи «Некоторые сведения о кружке». В ней после краткого обзора истории создания кружка с упоминанием роли Н. Н. Шемянова сообщается, что в 1910—1911 году вследствие крупных изменений в составе педагогического персонала училища кружок не функционировал в течение всего учебного года, а в начале следующего 1911/12 учебного года был принят устав кружка, избрано его правление и начались систематические заседания. В правление кружка в качестве председателя вошёл К. А. Торопов. Его заместителем избран М. А. Галамиев, секретарём — преподаватель естествознания А. А. Венстрем и казначеем — А. П. Токмаков.

В статье сказано, что к концу первой половины 1911/12 учебного года кружок насчитывал 15 действительных членов, которыми могли быть преподаватели учебных заведе-

ний Оренбурга, и 45 членов-сотрудников, учеников старших классов реального училища. Далее говорится, что за этот период состоялось шесть заседаний кружка и перечислено более 20 докладов, сделанных преподавателями и учениками V—VI классов.

Особое внимание уделялось библиотеке кружка, которая насчитывала только 48 названий и нуждалась в пополнении. Поэтому в статье специально отмечено: «Правление кружка было бы очень благодарно, если бы кружки при других учебных заведениях и математические общества пожелали обмениваться изданиями с нашим кружком».

Следующие разделы этого номера журнала составляют «Задачи, предложенные на собраниях кружка», «Задачи по специальному курсу математики на окончательных испытаниях учеников реальных училищ Оренбургского учебного округа» и решения задач, помещенных в № 4—5 журнала, с указанием имен учащихся, получивших правильные результаты.

Далее следует заметка К. А. Торопова «Геометрическое представление кратной прогрессии и предел суммы членов бесконечно убывающей прогрессии». Завершает номер статья М. А. Галамиева «Обзор погоды в Оренбурге в вегетационный период с 1 июня по 1 ноября 1911 года», в которой отмечено, что погода носила характер острой засухи, и отклонения температуры от нормы достигли наивысшего предела за последние 50 лет».

По такому же плану построены последующие номера «Записок»: № 7 — за вторую половину 1911/12 учебного года, № 8 — за первую половину 1912/13 учебного года, № 9 — за 1913 год. Вначале дается список членов кружка, в «Извлечениях из протоколов собраний кружка» перечисляются доклады, сделанные на заседаниях, сообщаются сведения о движении денежных средств кружка и приводится список книг, пополнивших его библиотеку. В каждом номере большой раздел составляют задачи, предложенные на заседаниях кружка, решения этих задач и формулировки задач, которые предлагались на письменных экзаменах в

различных реальных училищах. Дальше помещались статьи членов кружка, преподавателей и учащихся, чаще всего заслушанные ранее на заседаниях. По содержанию они были весьма разнообразны: наряду с реферативными сообщениями появлялись заметки исследовательского характера, содержавшие интересные результаты. В каждом номере публиковались данные метеорологических наблюдений.

К. А. Торопов оставался директором реального училища до 27/14 мая 1918 года, когда члены педагогического совета избрали его на должность председателя совета как руководителя учебного заведения. В протоколе заседания сказано, что К. А. Торопов «обратился к собравшимся с благодарностью за оказанное ему доверие и в дальнейшей части своей речи высказал свои взгляды на трудовую демократическую школу и на роль председателя совета; просил совет оказать ему содействие в его новой деятельности» [50].

При обзоре математического образования в дореволюционном Оренбурге нельзя не упомянуть Оренбургские высшие курсы, которые организовал в 1906 году преподаватель мужской гимназии А. О. Киселев.

Еще в 1904 году он обратился к попечителю Оренбургского учебного округа с просьбой разрешить ему «прочитать в форме лекций полный курс опытной физики и элементарной математики в объеме средних учебных заведений» для тех, кто, не получив по разным причинам среднего образования, хочет пополнить свои знания [51]. Его просьба была удовлетворена.

Несколько позже к А. О. Киселеву присоединились другие преподаватели гимназии. Н. И. Бутовский начал читать лекции по русской словесности, И. А. Кузменко-Кузмицкий — по физике, Г. А. Кастанье — по французскому и Е. Н. Ососкова — по немецкому языку.

9 июля 1905 года ими был представлен директору гимназии напечатанный в Оренбургской губернской типографии «Отчет о систематических лекциях по опытной физике, элементарной математике, истории русской литературы, немецкому и французскому языкам, читанных в

Оренбурге с 11 ноября 1904 г. по 10 апреля 1905 г.» [52]. В нем указано, что «цель лекций — дать возможность желающим за небольшую плату прослушать курсы наук, преподаваемых в средней школе».

Относительно программы обучения в отчёте говорится, что «количество сообщаемого материала не было меньше указанного в официальных программах гимназии», но «каждый лектор мог, смотря по своим силам и составу аудитории, делать разного рода дополнения и изменения».

Лекции читались в помещении мужской гимназии с 5 часов вечера, и каждая продолжалась 40 минут. В отчете приводятся подробные сведения о количестве прочитанных лекций, составе слушателей, плате за обучение, данные о пройденном материале по каждому предмету.

Занятия по математике и физике строились так, что «преподавание было не только теоретическое — оно сопровождалось и практическими упражнениями». Дается разъяснение: «Пройдя известный раздел математики, выяснив какое-нибудь правило, лектор сначала сам решал несколько примеров и задач, а затем приглашал желающих. И только тогда начинал объяснять далее, когда убеждался, что пройденное понято и желающих упражняться больше нет. По физике делались многочисленные опыты с приборами, находящимися в физических кабинетах мужской гимназии и юнкерского училища.

Физику до февраля читали двое — А. О. Киселев и И. А. Кузменко-Кузмицкий. Они помогали друг другу. Когда читал Киселев, помогал ему проводить опыты Кузменко-Кузмицкий, и наоборот. Показывались световые картины, где это было удобно. Вместо того чтобы выполнять от руки какой-нибудь сложный чертеж, его обыкновенно проецировали на экран... С 8 февраля И. А. Кузменко-Кузмицкий, к общему сожалению, вышел из состава лекторов, так как был назначен инспектором гимназии и не имел свободного времени. Освободившиеся 2 лекции взяты были Киселевым, который начал читать по 10 лекций в неделю: 4 по физике и по 2 лекции по геометрии, алгебре и тригонометрии».

В 1907 году в Оренбурге вышло отдельной брошюрой «Обозрение преподавания наук на Оренбургских высших курсах А. О. Киселева», которые здесь названы уже Оренбургским вольным университетом [51]. В нем было три отделения: 1) отделение общественных наук; 2) общеобразовательное отделение; 3) народное отделение. На первом отделении преподавание велось по университетской программе: читались лекции по истории новой русской литературы, истории философии, истории культуры и уголовной антропологии. Программа общеобразовательного отделения соответствовала программе мужских гимназий, и обучение велось два года. На первом курсе изучались русский язык и история русской литературы, французский, немецкий и латинский языки, арифметика, алгебра, геометрия, физика, история и природоведение, а на втором — алгебра, геометрия, тригонометрия, космография, логика и законоведение. Математику преподавали А. О. Киселев и И. А. Кузменко-Кузмицкий.

На народном отделении «читались в самой популярной форме лекции по различным отраслям знания».

Оренбургские высшие курсы относились к неправительственным учебным заведениям университетского типа, которые в значительном числе открылись в России в конце XIX — начале XX века [54]. Большинство из них действовало в крупных центрах (Москве, Петербурге, Казани, Киеве, Одессе и других городах), где были сконцентрированы серьезные научные силы, имелась развитая научно-исследовательская база. В Оренбурге в то время этих условий не доставало, и поэтому достичь университетского уровня здесь не удалось [54, с. 102].

Однако появление курсов А. О. Киселева показывало, что в Оренбурге уже назрела потребность в высшем учебном заведении. Идея о необходимости его открытия постепенно приобрела популярность. Она четко выражена в вышедшей в 1917 году брошюре краеведа А. А. Словохотова [55], которая была написана по инициативе президиума действовавшего тогда «Комитета по открытию в городе

Оренбурге высшего учебного заведения». Автор брошюры доказывает, что «город, где бьется сердце сказочно богатого, многообещающего, но еще не освещенного и не разработанного наукой края», имеет на это историческое право.

Список использованной литературы и архивных источников

1. ГАОО. Ф. 6. Оп. 6. № 14045/8. Л. 57—59 об.
2. Там же. Л. 57 об. — 58.
3. Болодулин В. С. Образование и педагогическая мысль в Оренбуржье. Оренбург : Оренб. кн. изд-во, 2001.
4. Злобин Ю. П. Гимназии и гимназическое образование в Оренбуржье в начале XX века // Образование в Оренбуржье: история и современность. Оренбург : Изд-во ОГПУ, 1997. С. 14—17.
5. Злобин Ю. П. Учительские институты и семинарии Оренбургской губернии во второй половине XIX — начале XX века // Вестн. Оренб. гос. пед. ун-та. 1999. № 1(11). С. 35—47.
6. Злобин Ю. П. Подготовка учителей в Оренбуржье во второй половине XIX — начале XX века // Оренбургский гос. пед. институт. История в документах, воспоминаниях, фотографиях. Оренбург : Изд-во ОГПУ, 1999. С. 8—24.
7. Злобин Ю. П. Средние учебные заведения Оренбургской губернии во второй половине XIX — начале XX века // Вестн. Оренб. гос. пед. ун-та. 2000. № 2(17). С. 49—59.
8. Белафин К. А. Историческая записка об Оренбургской мужской гимназии за первые 25 лет ее существования. Оренбург, 1893.
9. Дорофеев В. В. Архитектура Оренбурга XVIII—XX веков. Оренбург : ОАО «Южный Урал», 2007.
10. Беккаревич Н. Оренбургская гимназия старого времени // Русская старина. 1903, ноябрь. Т. 116. С. 401—417.
11. Исторический очерк народного образования в Оренбургском учебном округе за первые 25 лет его существования (1875—1899). Вып. 1. Оренбург : Типо-лит. И. И. Евфимовского-Мировицкого, 1901.
12. ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 171.
13. ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 174.
14. ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 166.
15. ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 213.
16. ГАОО. Ф. 81. Оп. 1. Д. 5. Л. 78—78 об.; Ф. 81. Оп. 1. Д. 75.
17. ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 42. Л. 17—17 об.
18. ГАОО. Ф. 81. Оп. 1. Д. 129.
19. Оренбургский край. 1894. 9 янв. (№ 152).
20. ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 191.
21. ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 210.

22. ГАОО. Ф. 79. Оп. 1. Д. 401.
23. Циркуляры по Оренбургскому учебному округу за 1894 г. № 10—11. С. 325.
24. ГАОО. Ф. 79. Оп. 1. Д. 32. Л. 71.
25. ГАОО. Ф. 79. Оп. 1. Д. 98. Л. 17 об., 33.
26. ГАОО. Ф. 79. Оп. 1. Д. 111. Л. 14.
27. ГАОО. Ф. 164. Оп. 1. Д. 195. Л. 89 об., 99.
28. Боже В. С. Школьный мир дореволюционного Челябинска. Т. 2. Челябинск, 2006. С. 105.
29. ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 144. Л. 40.
30. Россия, ее настоящее и прошедшее. СПб., 1900. С. 392.
31. ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 4. Л. 1—2 об.
32. Там же. Л. 20.
33. ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 7. Л. 9.
34. ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 4. Л. 1.
35. ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 64. Л. 3.
36. ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 72. Л. 54 об.
37. ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 64. Л. 22.
38. ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 208.
39. Сафонов Д. А. Педагогическая пресса Оренбургского края в XIX — начале XX в. // Образование в Оренбуржье: история и современность : материалы науч.-практ. конф. 13—14 марта 1997 г. Оренбург : Изд-во ОГПУ, 1996. С. 17—22.
40. Личное дело Н. Н. Шемянова из Ярославского гос. пед. института.
41. ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 135.
42. Там же. Л. 22.
43. Там же. Л. 134.
44. Там же. Л. 30 об.
45. Там же. Л. 31.
46. Там же. Л. 64 об.
47. Там же. Л. 64.
48. Там же. Л. 118.
49. Там же. Л. 135 об.
50. ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 84. Л. 102.
51. ГАОО. Ф. 79. Оп. 1. Д. 106. Л. 122—123 об.
52. ГАОО. Ф. 79. Оп. 1. Д. 108а.
53. Обзорение преподавания наук на Оренбургских Высших курсах А. О. Киселева в осеннем полугодии 1906 и в весеннем полугодии 1907 г. Оренбург, 1907.
54. Иванов А. Е. Высшая школа в России в конце XIX — начале XX века. М. : Ин-т истории АН СССР, 1991.
55. Словохотов Л. А. Исторические права Оренбурга как центра целого края на высшее учебное заведение. Оренбург, 1917. (Тр. Оренб. ученой архивной комиссии. Вып. 34).

Г. П. Матвиевская, И. К. Зубова, И. В. Игнатушина

**Обучение математике в реальном училище
и мужской гимназии Оренбурга
(1902—1911 гг.)**

Изучая историю математического образования в Оренбурге в конце XIX — начале XX века, мы исследовали большое количество документов Государственного архива Оренбургской области (ГАОО), хранящихся в фондах Оренбургской мужской гимназии (Ф. 79) и Оренбургского реального училища (Ф. 82), где преподаванию математики уделялось серьезное внимание.

Особенно интересными представляются обнаруженные в архивных делах конкретные задачи и теоретические вопросы, предлагавшиеся ученикам на выпускных испытаниях. По ним можно судить об уровне математических знаний выпускников средних учебных заведений того времени. Об этом же свидетельствуют задачи, решавшиеся членами математического кружка при Оренбургском реальном училище и публиковавшиеся в «Записках» кружка. Представляют интерес и критерии, из которых исходили преподаватели при оценке знаний учащихся. О них можно судить, например, по отзывам об экзаменационных письменных работах, которые давал инспектор Оренбургского учебного округа по окончании экзаменов. Некоторые из этих материалов мы приводим ниже.

I. Экзаменационные билеты (программы) по математике в VI и VII классах Оренбургского реального училища за 1902—1904 годы

Публикуемые документы находятся в архивном деле ГАОО «Программы по разным предметам I—VII классов Оренбургского реального училища за 1901—1904 годы» (Ф. 82. Оп. 1. Д. 65).

1) Программа по геометрии для выпускного испытания учеников VI класса Оренбургского реального училища в 1902 году (преподаватель В. Толузаков)

1 билет

1. Свойства прямой линии. Сравнение отрезков прямых линий. Сложение, вычитание, умножение и деление отрезков прямых линий. Общая мера двух отрезков прямых линий. Измерение отрезков прямых линий.

2. Определение объёмов частей шара: сектора, слоя и сегмента.

2 билет

1. Понятие об угле. Сравнение углов и действия над ними. Смежные углы; прямой угол; прямые перпендикулярные и наклонные. Доказать, что из точки, взятой на прямой, можно к этой прямой восстановить только один перпендикуляр. Свойства прямых углов; угловая единица. Свойство смежных углов; обратная теорема. Вертикальные углы и свойство их; обратная теорема.

2. Определение объёма шара.

3 билет

1. Свойство двух прямых, перпендикулярных к одной и той же третьей; следствия. Свойство перпендикуляра и наклонных, проведенных из данной точки к данной прямой; обратные теоремы.

2. Измерение шарового пояса и шарового сегмента.

4 билет

1. Понятие о параллельных прямых. Аксиома о перпендикуляре и наклонной к одной и той же прямой. Теорема о проведении через данную точку прямой, параллельной данной; следствия из этой теоремы. Условие параллельности двух прямых. Свойства параллельных прямых. Свойство углов с параллельными или взаимно перпендикулярными сторонами.

2. Измерение поверхности шара.

5 билет

1. Понятие об окружности и определение положения её. Взаимное положение прямой линии и окружности.

2. Отношение поверхностей и объёмов подобных цилиндров и конусов.

6 билет

1. Зависимость между дугами, хордами и центральными углами. Свойство радиуса, перпендикулярного к хорде.
2. Измерение конусов полного или усечённого.

7 билет

1. Зависимость между хордами и расстоянием их от центра.
2. Измерение объёма цилиндра.

8 билет

1. Свойство дуг, содержащихся между параллельными хордами.
2. Измерение поверхности цилиндра.

9 билет

1. Измерение углов. Пропорциональность углов дугам, описанным из их вершин равными радиусами. Угловые единицы.
2. Измерение поверхности конусов, полного и усечённого.

10 билет

1. Измерение углов, образованных хордами, секущими и касательными.
2. Сечение шара плоскостью. Свойство плоскости, касательной к шару.

11 билет

1. Взаимное положение двух окружностей.
2. Сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к оси, и плоскостью, проходящей через вершину.

12 билет

1. Свойства сторон и углов треугольника.
2. Сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной к оси, и плоскостью, параллельной оси.

13 билет

1. Соотношение между сторонами и углами треугольника.
2. Измерение объёма усеченной треугольной призмы.

14 билет

1. Условия равенства треугольников.

2. Измерение объёма усеченных пирамид.

15 билет

1. Свойства углов многоугольника.

2. Измерение объёма полных пирамид.

16 билет

1. Свойство углов, сторон и диагоналей параллелограмма.

2. Измерение объёма призм.

17 билет

1. Свойства диагоналей прямоугольника и ромба.

2. Отношение объёмов прямоугольных параллелепипедов.

18 билет

1. Свойство средней линии трапеции.

2. Равновеликость параллелепипедов с равными основаниями и высотами.

19 билет

1. Основная теорема для пропорциональности прямых линий. Свойство прямой, параллельной одной из сторон треугольника и пересекающей две другие стороны.

2. Равновеликость наклонной призмы некоторой прямой призмы. Деление параллелепипеда диагональной плоскостью.

20 билет

1. Свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника.

2. Измерение поверхностей призм и пирамид.

21 билет

1. Условия подобия треугольников.

2. Сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию.

22 билет

1. Условие подобия многоугольников; обратная теорема. Отношение периметров подобных многоугольников.

2. Свойство диагоналей параллелепипедов.

3. Правильные многогранники.

23 билет

1. Зависимость между перпендикуляром, опущенным из вершины прямого угла на гипотенузу, и отрезками ги-

потенузы, а также между катетом, гипотенузой и прилежащим отрезком. Зависимость между гипотенузой и катетами.

2. Условия равенства трехгранных углов.

24 билет

1. Выражения для квадрата стороны косоугольного треугольника. Выражение суммы квадратов двух сторон треугольника. Зависимость между сторонами и диагоналями параллелограмма.

2. Свойства плоских углов многогранного угла.

25 билет

1. Свойства перпендикуляра, опущенного из какой-нибудь точки окружности на диаметр, и хорды, соединяющей ту же точку с концом диаметра. Свойство хорд, пересекающихся внутри окружности. Свойство секущих, выходящих из одной точки вне окружности.

2. Условие перпендикулярности двух плоскостей. Свойство прямой, проведенной в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей перпендикулярно к линии их пересечения. Свойство линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к третьей.

26 билет

1. Свойство касательной к окружности и секущей, выходящих из одной внешней точки. Деление данной прямой в среднем и крайнем отношении.

2. Зависимость между двугранными углами и их линейными углами.

27 билет

1. О вписанном в круг и описанном около круга треугольниках.

2. Понятие о двугранных углах и сравнение их. Смежные двугранные углы; прямой двугранный угол. Линейный угол двугранного угла.

28 билет

1. Свойства углов вписанного в круг четырехугольника; обратная теорема. Теорема Птолемея. Свойство сторон описанного около круга четырехугольника; обратная теорема.

2. Свойство отрезков двух прямых, содержащихся между тремя параллельными плоскостями.

29 билет

1. Теорема: около всякого правильного многоугольника можно описать и в него вписать окружность. Апофема и центр правильного многоугольника. Отношение периметров правильных одноименных многоугольников.

2. Свойство углов с параллельными сторонами, лежащих в различных плоскостях.

30 билет

1. Вычисление стороны правильного описанного многоугольника по данной стороне правильного же, одноименного с описанным, вписанного многоугольника и по данному радиусу и обратно.

2. Условие параллельности плоскостей. Свойства параллельных плоскостей.

31 билет

1. Удвоение числа сторон правильных вписанных и описанных многоугольников. Вычисление стороны правильного вписанного многоугольника с двойным числом сторон.

2. Условие параллельности прямой с плоскостью.

32 билет

1. Вычисление по данному радиусу сторон правильных вписанных и описанных: квадрата, шестиугольника и треугольника.

2. Свойства перпендикуляра и наклонных к плоскости, проведенных из одной точки, лежащей вне плоскости.

33 билет

1. Вычисление по данному радиусу стороны правильного вписанного десятиугольника.

2. Теорема: если две прямые параллельны между собой и одна из них перпендикулярна к плоскости, то и другая перпендикулярна к той же плоскости. Обратная теорема.

34 билет

1. Отношения площадей треугольников. Вычисление площади прямоугольника.

2. Условие перпендикулярности прямой к плоскости.

35 билет

1. Вычисление площадей: параллелограмма, треугольника, трапеции и многоугольников.

2. Взаимное положение двух прямых линий в пространстве.

36 билет

1. Вычисление площади треугольника по данным сторонам его.

2. Взаимное положение двух плоскостей. Определение положения плоскости.

37 билет

1. Отношение площадей подобных треугольников и многоугольников.

2. Понятие о плоскости. Взаимное положение прямой линии и плоскости.

38 билет

1. Теорема Пифагора.

2. Понятие о вычислении π .

39 билет

1. Постоянная и переменная величины. Понятие о пределе переменной. Две теоремы о пределах.

2. Вычисление площади кругового сегмента.

40 билет

1. Окружность как предел периметров вписанных и описанных правильных многоугольников.

2. Отношение окружностей и отношение окружности к своему диаметру. Вычисление площади кругового сектора.

41 билет

1. Вычисление длины окружности и дуги её по данному диаметру.

2. Вычисление площади круга. Отношение площадей кругов.

2) Программа испытания учеников VI класса по тригонометрии (преподаватель Н. М. Морозов)

1 билет

Предмет тригонометрии. Тригонометрические линии и величины угла. Радиан, выражение углов в радианах. Соотношения между тригонометрическими величинами острого угла.

2 билет

О необходимости сопровождать тригонометрические линии знаками «+» или «-». Условия относительно направления положительных тригонометрических линий. Знаки тригонометрических величин различных углов.

3 билет

Изменение тригонометрических величин при непрерывном возрастании от 0 до 2π .

4 билет

Приведение тригонометрических функций углов $-x$, $2k\pi \pm x$, $\pi \pm x$ к тригонометрическим функциям угла x .

Вычисление углов, имеющих один и тот же синус и косеканс, по величине одного угла.

5 билет

Приведение тригонометрических функций углов $\frac{\pi}{2} + x$ и $\frac{3}{2}\pi \pm x$ к тригонометрическим функциям угла x .

Вычисление углов, имеющих один и тот же тангенс и котангенс, по величине одного угла.

6 билет

Вычисление углов, имеющих один и тот же косинус и секанс, по величине одного угла. Формула для синуса суммы двух углов.

7 билет

Периодичность тригонометрических функций. Понятие об обратных тригонометрических функциях. Формулы для косинуса и тангенса суммы двух углов.

8 билет

Формулы для синуса, косинуса и тангенса разности двух углов.

9 билет

Формулы для синуса, косинуса и тангенса двойного угла.

10 билет

Формулы для синуса, косинуса и тангенса половины угла.

11 билет

Понятие о способе вычисления тригонометрических величин.

12 билет

Тригонометрические величины углов 30° , 60° и 45° .

О таблицах логарифмов тригонометрических величин.

13 билет

Преобразование нелогарифмических формул в логарифмические.

14 билет

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника. Случаи решения прямоугольных треугольников.

15 билет

Теорема синусов. Отношение суммы двух сторон треугольника к их разности.

16 билет

Отношение суммы двух сторон треугольника к третьей стороне.

17 билет

Формулы для вычисления синуса, косинуса и тангенса половины угла треугольника по данным сторонам треугольника.

18 билет

Формулы для вычисления сторон треугольника по данным двум сторонам его и углу, лежащему между ними.

Решение косоугольных треугольников: а) по трем сторонам; б) по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них.

19 билет

Решение косоугольного треугольника: в) по двум сторонам и углу, лежащему между ними и г) по стороне и двум углам.

20 билет

Формулы для вычисления радиусов кругов, описанного около треугольника и вписанного в треугольник [при различных условиях].

21 билет

Решение тригонометрических уравнений с одним неизвестным.

22 билет

Решение определенной системы тригонометрических уравнений. [Решение системы двух уравнений с двумя неизвестными.]

3) Программа по алгебре для выпускного испытания учеников VI класса Оренбургского реального училища в 1904 г. (преподаватель А. О. Киселев)

1 билет

1. Предмет алгебры. Алгебраические действия и знаки их. Понятие об одночлене и многочлене. Подобные одночлены и приведение их.

2. Понятие об уравнении. Теоремы, на которых основано решение уравнений. Решение уравнений 1-й степени с одной неизвестной величиной.

2 билет

1. Сложение и вычитание целых одночленов и многочленов. Заключение в скобки части многочлена.

2. Исследование уравнений 1-й степени с одной неизвестной величиной. Задача о курьерах.

3 билет

1. Отрицательные числа и цель введения их в алгебру. Сложение и вычитание отрицательных чисел.

2. Умножение целых одночленов и многочленов.

3. Решение систем уравнений 1-й степени со многими неизвестными (исключение неизвестных способом сложения и вычитания, подстановки и сравнения величин неизвестных).

4 билет

1. Деление целых одночленов и многочленов.
2. Исследование системы уравнений 1-й степени с двумя неизвестными — случаи невозможности и неопределенности системы.

5 билет

1. Разложение целых алгебраических выражений на сомножители; нахождение общего наибольшего делителя и наименьшего кратного целых одночленов.
2. Решение уравнений 2-й степени с одним неизвестным (полным и неполным; число корней квадратного уравнения и условия существования их).

6 билет

1. Алгебраические дроби; основные свойства их и действия над ними. (Сложение, вычитание, умножение и деление.)
2. Зависимость между коэффициентами и корнями квадратного уравнения; определение знаков корней по знакам коэффициентов и восстановление уравнения по корням его.

7 билет

1. Возвышение в степень одночлена. Возведение многочленов в квадрат.
2. Разложение трехчлена второй степени на множители 1-й степени.

8 билет

1. Извлечение корней из одночлена.
2. Решение простейших систем уравнений 2-й степени с двумя неизвестными.

9 билет

1. Извлечение квадратного корня из чисел и многочленов.
2. Решение уравнений, содержащих неизвестные под знаком радикала.

10 билет

1. Извлечение кубического корня из чисел.
2. Решение неравенств первой степени.

11 билет

1. Действия над радикалами; уничтожение квадратных радикалов в знаменателях дробей.

2. Решение показательных уравнений.

12 билет

Количества с нулевыми и отрицательными показателями степеней и цель введения их в алгебру; действия над ними.

13 билет

Количества с дробными показателями степеней и цель введения их в алгебру; действия над ними.

14 билет

Логарифмы и свойства их. Десятичные логарифмы и свойства их. Употребление таблицы логарифмических чисел. Дополнения логарифмов. Применение логарифмов к вычислениям.

15 билет

Арифметическая и геометрическая прогрессии. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и предел суммы её.

16 билет

Вычисление сложных процентов и срочных уплат.

17 билет

Соединения: размещения, перестановки и сочетания.

18 билет

Бином Ньютона для целого и положительного показателей; свойства биномиальных коэффициентов.

19 билет

Непрерывные дроби и применение их к вычислению квадратного корня из чисел с данным приближением.

20 билет

Решение неопределенных уравнений 1-й степени с двумя неизвестными в целых и положительных числах.

21 билет

Решение неопределенного уравнения помощью непрерывных дробей.

4) Программа испытания учеников VII (дополнительного) класса по алгебре (преподаватель А. О. Киселев)

1 билет

1. Понятие о функциях. Бесконечно малая величина. Сложение и вычитание бесконечно малых величин. Умножение бесконечно малой величины на конечное число (соизмеримое). Деление бесконечно малой величины на постоянное число (соизмеримое). Бесконечно большая величина. Понятие о пределе переменной величины. Теорема 1-я: Переменная величина, стремящаяся к пределу, начиная с некоторого своего значения остается заключенною в некотором промежутке. Теорема 2-я: Переменная величина, изменяющаяся по определенному закону, не может иметь более одного предела.

2. Алгебраическое знакоположение. Главнейшие свойства первых четырех действий. Одночлен и многочлен. Приведение подобных членов. Общие начала решения уравнений. Случаи введения в уравнение посторонних корней и исчезновения корней существующих. Решение уравнений 1-й степени с одним неизвестным и исследование.

Определение истинного значения дроби, имеющей вид $\frac{0}{0}$

или $\frac{\infty}{\infty}$ при частных значениях букв.

2 билет

1. Теорема, выражающая условие, при котором две переменные величины имеют общий предел. Теорема, обратная предыдущей. Аксиомы о пределе переменной величины.

2. Задача о курьерах. Решение системы двух уравнений 1-й степени с двумя неизвестными и исследование. Система уравнений 1-й степени со многими неизвестными.

3. Алгебраическое сложение и вычитание. Отрицательное число. Сложение и вычитание отрицательных чисел.

3 билет

1. Теорема, выражающая условие, при котором переменная величина имеет предел. Теорема, обратная предыдущей.

2. Умножение целых одночленов и многочленов. Умножение отрицательных чисел.

3. Уравнение 2-й степени с одним неизвестным. Число решений. Зависимость между коэффициентами и корнями. Составление уравнения по данным корням его. Разложение трехчлена второй степени на множители первой степени.

4 билет

1. Теорема, выражающая условия, при которых две переменные величины имеют предел и притом общий. Теорема о пределе суммы переменных величин. Теорема о пределе разности переменных величин.

2. Деление целых одночленов и многочленов. Деление отрицательных чисел. Возведение уравнений в степень. Уничтожение радикалов в уравнениях, когда это уничтожение требует только возведения в степень.

3. Биквадратное уравнение. Преобразование выражения $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

5 билет

1. Понятие о несоизмеримом числе. Определение бесконечного ряда соизмеримых чисел, для которого пределом служит данное соизмеримое число. Условие равенства и неравенства чисел, рассматриваемых как пределы. Сложение и вычитание чисел, рассматриваемых как пределы. Приближенные значения несоизмеримого числа.

2. Алгебраические дроби и четыре основных действия над ними. Решение системы двух уравнений 2-й степени с двумя неизвестными. Случай, когда одно из данных уравнений есть уравнение 1-й степени. Решение указанной выше системы искусственными приемами в различных частных случаях.

6 билет

1. Умножение чисел, рассматриваемых как пределы. Возведение в целую и положительную степень чисел, рассматриваемых как пределы.

2. Возведение в степень и извлечение корня из целых и дробных одночленов. Возведение в квадрат и извлечение квадратного корня из многочлена.

7 билет

1. Лемма о разности $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$. Деление чисел, рассматриваемых как пределы. Распространение свойств произведения, частного и целой степени на числа несоизмеримые. Предел произведения, частного и степени.

2. Извлечение квадратного корня из целых и дробных чисел; употребление вспомогательного деления.

3. Приложение непрерывных дробей к извлечению квадратного корня из чисел.

8 билет

1. Значение $\sqrt[m]{A}$, когда A не есть точная m -степень. Распространение свойств радикалов на несоизмеримые их значения.

2. Извлечение кубического корня из целых и дробных чисел. Действия с радикалами. Уничтожение иррациональности в знаменателях дробей.

9 билет

1) Лемма о a^x , где x стремится к 0. Следствие о разности $a^b - a^c$. Возведение постоянного положительного числа в степень, показатель которой рассматривается как предел.

2. Действия над количествами с дробными и отрицательными показателями.

10 билет

1. Распространение свойств показателей на несоизмеримые их значения. Доказательство следующего свойства логарифмов, соизмеримых и несоизмеримых: при основании больше единицы большему логарифму соответствует и большее число.

2. Неравенство первой степени.

3. Неравенство второй степени.

11 билет

1. Теорема о пределе степени: 1-й случай, когда показатель есть число постоянное; следствие для предела корня; 2-й случай, когда основание степени есть число постоянное; следствие для предела логарифма переменного числа; 3-й случай, когда возвышаемое число и показатель степени переменные.

2. Арифметическая прогрессия. Геометрическая прогрессия.

12 билет

1. Понятие о приращении функции. Функции непрерывные. Разрыв непрерывности. Понятие о максимуме и минимуме функции. Понятие о наибольшем и наименьшем значениях функции. Крайние значения функции. Случай, когда максимум функции есть вместе с тем наибольшее значение, или минимум функции — наименьшее значение.

2. Теория соединений.

13 билет

1. Некоторые истины, облегчающие нахождение максимума и минимума. Максимум и минимум трехчлена 2-й степени.

2. Неопределенные уравнения; два способа решения неопределенных уравнений.

14 билет

1. Измерение трехчлена. Изображение хода изменения трехчлена кривою при помощи координатных осей. Задача: разложить число на два слагаемых, которых произведение было бы наибольшее.

2. Бином Ньютона для целого и положительного показателя.

15 билет

1. Неравенство Коши.

2. Общие свойства логарифмов. Логарифм произведения, степени, частного и корня.

16 билет

1. Теоремы о наибольшем значении произведений и наименьшем значении сумм.
2. Свойства десятичных логарифмов. Действия над логарифмами. Приложение непрерывных дробей к вычислению логарифмов.
3. Решение показательных уравнений.

17 билет

1. Логарифмы, рассматриваемые как члены арифметической прогрессии. Доказательство существования логарифма для всякого положительного числа (при положительном основании). Основание натуральных логарифмов. Модуль.
2. Сложные проценты и срочные уплаты.

18 билет

1. Исследование квадратного уравнения. Задача о двух источниках света.
2. Теория непрерывных дробей.

19 билет

1. Теорема о делимости целого многочлена, расположенного по убывающей степени буквы x , на двучлен $(x - a)$. Теорема Безу как частный случай предыдущей теоремы. Понижение степени уравнения.
2. Возвратное уравнение 4-й степени.
3. Решение неопределенных уравнений первой степени при помощи непрерывных дробей.

20 билет

1. Уравнения, у которых левая часть разлагается на множители, а правая есть 0. Двучленные уравнения. Различные значения корня.
2. Мнимые количества; цель введения их в алгебру. Условия, под которыми вводят мнимые количества. Различные степени количества i . Комплексное количество. Основное начало, которому должны быть подчинены комплексные количества. Действия над комплексными количествами: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение квадратных корней.

3. Модуль комплексного количества.

5) Программа для испытания учеников VII (дополнительного) класса реального училища по геометрии (преподаватель А. О. Киселев)

1 билет

1. Понятие о геометрическом теле, поверхности, линии и точке. Свойства прямой линии. Сложение, вычитание и умножение отрезков прямых линий. Определение отношения двух отрезков прямых линий. Теорема о ломаных, состоящих каждая из двух прямых и имеющих общие конечные точки.

2. Определение объема шара и его частей: сектора, сегмента и слоя.

3. Предмет приложения алгебры к геометрии. Линейные числа и формулы. Количества двух и трех измерений. Количества нулевого измерения.

2 билет

1. Понятие об угле. Основное свойство плоскости. Сравнение углов и понятие о действиях над ними. Понятие о смежных углах. Углы прямые, тупые и острые. Понятие о прямых линиях, перпендикулярных и наклонных. Свойство прямых углов. Теорема о сумме смежных углов и следствия из нее; обратная и противоположные теоремы. Теорема о вертикальных углах и обратная ей.

2. Определение поверхности шара и ее частей: сегмента и пояса.

3. Однородные одночлены; однородный многочлен. Число измерений алгебраических дробей и радикалов.

3 билет

1. Свойство двух прямых, перпендикулярных к одной и той же третьей; следствие из этой теоремы. Свойства перпендикуляра и наклонных, проведенных из одной точки; следствия и обратные теоремы. Свойство точек, находящихся на перпендикуляре, восстановленном из середины данного отрезка прямой, и точек, лежащих вне этого пер-

пендикуляра. Обратные теоремы. Понятие о геометрическом свойстве точек.

2. Определение поверхностей и объемов прямого кругового конуса. Развертывание боковой поверхности прямого цилиндра и прямого конуса. Понятие о подобных цилиндрах и конусах. Теоремы об отношении поверхностей и объемов подобных цилиндров и конусов.

3. Однородность уравнений, получаемых при решении геометрических задач. Случай нарушения алгебраической однородности геометрических формул. Восстановление однородности.

4 билет

1. Понятие о параллельных прямых. Аксиома о перпендикуляре и наклонной к одной и той же прямой. Теорема о проведении через данную точку прямой, параллельной данной прямой, и следствия из нее. Углы, образующиеся при помощи пересечения двух параллельных прямых третьей прямой. Теорема, выражающая условие параллельности двух прямых, и следствия из нее. Теорема, обратная предыдущей, и следствия из нее. Свойство углов: а) с взаимно параллельными сторонами, б) с взаимно перпендикулярными сторонами.

2. О происхождении прямого цилиндра, прямого конуса и шара от вращения фигур около неподвижных прямых линий. Понятие о цилиндрической и конической поверхностях в общем смысле. Теоремы о сечении прямого цилиндра плоскостью, перпендикулярной оси, и плоскостью, параллельной оси. Теоремы о сечении прямого конуса плоскостью, перпендикулярной оси, и плоскостью, проходящей через вершину конуса. Теорема о сечении шара плоскостью. Свойство плоскости, перпендикулярной к радиусу шара в его конечной точке; обратная теорема и следствие. Понятие о конусе, описанном около шара. Свойство касательных линий, проведенных к шару из одной внешней точки.

3. Построение рациональных формул.

5 билет

1. Понятие об окружности. Проведение окружности через одну, через две и через три данные точки; следствия. Секущая и расстояние от нее до центра окружности; касательная. Свойство радиуса, проведенного через точку касания: обратная теорема и следствия. Свойство диаметра. Зависимость между дугами, хордами и центральными углами в одной и той же или равных окружностях; обратные теоремы. Свойство радиуса, перпендикулярного к хорде. Зависимость между хордой и расстоянием ее от центра. Свойство дуг, содержащихся между параллельными хордами, между касательной и параллельной ей хордой, а также между параллельными касательными.

2. Определение объема усеченной треугольной призмы. Понятие о подобных многогранниках. Теорема о пропорциональности сходственных ребер в подобных многогранниках. Теорема о пирамиде, отсеченной от данной пирамиды плоскостью, параллельной основанию данной пирамиды. Отношение поверхностей и объемов подобных многогранников.

3. Построение иррациональных формул.

6 билет

1. Зависимость между центральными углами и дугами. Измерение углов. Транспортир и измерение углов при помощи транспортира. Измерение углов, образованных хордами, секущими и касательными. Свойство эксцентрических окружностей, имеющих общую точку на линии центров. Противоположная теорема. Зависимость между расстоянием центров и радиусами окружностей касательных, пересекающихся и не имеющих общих точек.

2. Определение объема усеченной треугольной и многоугольной пирамиды.

3. Построение корней уравнений по формулам для корней.

7 билет

1. Понятие о фигурах прямолинейных и криволинейных. Треугольник и свойство сторон его. Свойства внут-

ренных и внешних углов треугольника. Соотношения между сторонами и углами треугольника.

2. Теоремы, на которых основывается определение объема треугольной пирамиды. Определение объема треугольной и многоугольной пирамиды (полной).

3. Построение корней квадратного уравнения без вывода формулы.

8 билет

1. Понятие о равных фигурах. Первое условие равенства треугольников и следствия из него. Второе условие равенства треугольников и теоремы противоположная и обратная противоположной. Третье и четвертое условия равенства треугольников.

2. Понятие о равных и равновеликих многогранниках. Теоремы, на которых основывается определение объема пирамиды. Определение объема треугольной и многоугольной призмы. Условия равенства призм и пирамид.

3. Построение формул, содержащих тригонометрические величины.

9 билет

1. Свойство диагоналей многоугольника, проведенных из вершины одного угла к вершинам всех остальных углов. Сумма внутренних и сумма внешних углов многоугольника. Понятие о правильных многоугольниках. Понятие о параллелограмме и свойства углов и сторон его. Теоремы, обратные теореме, выражающей свойство сторон параллелограмма. Понятие о ромбе и квадрате. Свойства диагоналей параллелограмма, прямоугольника, ромба и квадрата. Условие равенства параллелограммов и следствия из него. Трапеция; свойство средней линии ее; обратная теорема.

2. Определение объема прямоугольного параллелепипеда.

10 билет

1. Понятие о пропорциональных прямых линиях. Основная теорема для пропорциональности прямых. Свойство прямой, параллельной одной из сторон треугольника, и следствие из этой теоремы; обратная теорема. Свойство

биссектрисы внутреннего угла треугольника; обратная теорема. Делительный и пропорциональный циркули¹. Масштаб. Пантограф.

2. Определение поверхности призмы. Определение поверхности правильной пирамиды полной и усеченной. Определение объема прямого и наклонного параллелепипеда.

11 билет

1. Условия подобия треугольников. Свойство высот подобных треугольников. Условие подобия многоугольников. Свойства подобных многоугольников.

2. Понятие о правильных многогранниках. Понятие о призмах вообще и о параллелепипедах. Свойство противоположных граней параллелепипеда. Свойство диагоналей параллелепипеда. Свойство сечений призмы параллельными плоскостями. Понятие о пирамиде. Свойство сечения двух пирамид, имеющих одинаковые высоты, плоскостями, параллельными основаниям пирамид и проведенными в одинаковых расстояниях от вершин; следствие из этой теоремы.

12 билет

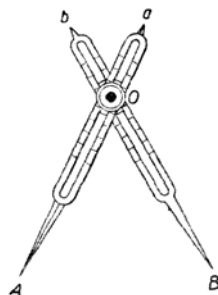
1. Соотношения между сторонами прямоугольного треугольника. Понятие о рациональных треугольниках; египетский треугольник. Соотношения между сторонами ко-соугольного треугольника. Соотношения между сторонами и диагоналями параллелограмма.

¹ Делительный (или пропорциональный) циркуль — инструмент для уменьшения (или увеличения) отрезков в некотором (ограниченном в своих пределах) отношении, а также для деления отрезков на равные части. Он состоит из двух стержней, шарнирно скрепленных между собой и несущих на себе шкалы (рис.) наиболее распространенных отношений.

На основании свойства подобия фигур имеем отношения расстояний:

$$ab : AB = Oa : OA,$$

т.е. отметка (x) — черточка будет соответствовать числу (отношению), стоящему против деления шкалы.



2. Понятие о многогранном угле. Свойства плоских углов трехгранного угла. Теорема о сумме плоских углов многогранного угла. Случаи равенства трехгранных углов.

13 билет

1. Пропорциональные линии в круге. Задача: данный отрезок прямой линии разделить в крайнем и среднем отношении.

2. Понятие о двугранном угле и о смежных двугранных углах. Понятие о линейном угле двугранного угла. Условие равенства двугранных углов; обратная теорема; следствия из этих теорем. Соотношение между двугранными и линейными углами. Теорема, выражающая условие перпендикулярности двух плоскостей; обратная теорема. Свойство линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к третьей плоскости.

14 билет

1. Понятие о многоугольниках, вписанных в круг и описанных около круга. Теоремы: а) об окружности, описанной около треугольника; б) об окружности, вписанной в треугольник. Свойство противоположных углов вписанного в круг четырехугольника; обратная теорема. Теорема Птолемея. Свойство противоположных сторон описанного четырехугольника; обратная теорема.

2. Проекция точки и прямой на плоскость. Теорема о проекции на плоскость двух параллельных прямых. Теорема о наклонной и прямой, проведенной по плоскости перпендикулярно к проекции наклонной. Понятие об угле, образуемом наклонной с плоскостью, и свойство этого угла. Свойство прямой, представляющей кратчайшее расстояние между двумя прямыми в пространстве.

15 билет

1. Вписывание и описывание окружности около правильного многоугольника. Вписывание и описывание правильного многоугольника около окружности. Соотношение между углом вписанного в окружность правильного многоугольника и центральным углом многоугольника. Удвоение числа сторон правильных вписанных и описанных много-

угольников. Формула для вычисления стороны правильного описанного многоугольника по стороне правильного одноименного вписанного в тот же круг многоугольника. Формула для вычисления правильного вписанного в круг прямоугольника по стороне правильного вписанного в тот же круг n -угольника.

2. Свойство углов с взаимно параллельными сторонами и свойство плоскостей, в которых лежат эти углы. Свойство двух параллельных прямых, заключенных между прямой и плоскостью, параллельной ей, или между двумя параллельными плоскостями; следствие. Свойство отрезков двух прямых, получаемых при пересечении этих прямых тремя параллельными плоскостями.

16 билет

1. О том, какие правильные многоугольники можно вписать в круг при помощи циркуля и линейки. Вычисление сторон правильных вписанных и описанных многоугольников: квадрата, треугольника, шестиугольника, пятиугольника и десятиугольника.

2. Условие, при котором прямая и плоскость параллельны. Теорема о плоскости, проходящей через прямую, параллельную другой плоскости; обратная теорема. Свойство прямой, параллельной двум пересекающимся плоскостям. Условие, при котором две плоскости параллельны; обратная теорема. Свойство прямых, получаемых в сечении двух параллельных плоскостей третьей плоскостью. Проведение через данную точку плоскости, параллельной другой плоскости.

17 билет

1. Понятие о равновеликих фигурах. Измерение площадей прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции и многоугольника. Превращение многоугольника в треугольник. Вывод формулы для вычисления площади треугольника по данным сторонам его.

2. Проведение через данную точку плоскости, перпендикулярной к данной прямой. Проведение через данную на плоскости точку прямой, перпендикулярной к этой плоско-

сти. Теорема о двух параллельных прямых, из которых одна перпендикулярна к плоскости; обратная теорема и следствие. Проведение через точку, лежащую вне плоскости, прямой, перпендикулярной к этой плоскости. Свойства перпендикуляра и наклонных, проведенных из этой точки к плоскости.

6) Программа по тригонометрии для испытания учеников VII (дополнительного) класса Оренбургского реального училища в 1904 году (преподаватель А. О. Киселев)

1 билет

Предмет тригонометрии. Тригонометрические линии и величины. Радиан и измерение углов при помощи радиана. Соотношение между тригонометрическими величинами острого угла.

2 билет

О необходимости сопровождать тригонометрические линии знаками «+» и «-»; условия о направлении положительных тригонометрических линий различных углов.

3 билет

Изменение тригонометрических величин при непрерывном возрастании угла от 0 до 2π .

4 билет

Формулы для приведения тригонометрических величин углов: $-x$, $2\pi k + x$, $2\pi k - x$, $\pi + x$ и $\pi - x$ к тригонометрическим величинам угла x . Формула для вычисления всех углов, имеющих один и тот же синус и косеканс.

5 билет

Формулы для приведения тригонометрических величин углов $\frac{\pi}{2} + x$, $\frac{3\pi}{2} + x$, $\frac{3\pi}{2} - x$ к тригонометрическим величинам угла x . Формула для вычисления всех углов, имеющих один и тот же тангенс и котангенс.

6 билет

$\sin(a \pm b)$; $\operatorname{tg}(a \pm b)$.

7 билет

Периодичность тригонометрических функций. Обратные тригонометрические функции. $\cos(a+b)$; $\operatorname{tg}(a+b)$.

8 билет

$\sin(a-b)$; $\cos(a-b)$; $\operatorname{tg}(a-b)$.

9 билет

$\sin 2a$; $\cos 2a$; $\operatorname{tg} 2a$.

10 билет

$\sin \frac{a}{2}$; $\cos \frac{a}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

11 билет

Понятие о вычислении тригонометрических величин.

12 билет

Тригонометрические величины углов 30° , 60° , 45° . Таблица логарифмов тригонометрических величин.

13 билет

Преобразование нелогарифмических формул в логарифмические. Способ введения вспомогательного угла.

14 билет

Формулы $\sin A \pm \sin B$, $\cos A \pm \cos B$.

15 билет

Зависимость между сторонами и углами прямоугольного треугольника. Решение прямоугольных треугольников.

16 билет

Отношение сторон косоугольного треугольника. Отношение суммы двух сторон треугольника к их разности.

17 билет

Отношение суммы или разности двух сторон треугольника к третьей.

18 билет

Формулы для вычисления площадей косоугольных треугольников.

19 билет

Синус, косинус, тангенс половинного угла. Вычисление длины высоты треугольника по трем сторонам.

20 билет

Решение косоугольных треугольников: 1) по двум сторонам и углу между ними; 2) по трем сторонам; 3) по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них.

21 билет

Решение косоугольных треугольников по стороне и двум углам. Формулы для вычисления радиусов вписанного и описанного круга.

22 билет

Решение тригонометрических уравнений с одним и двумя неизвестными. Отношение суммы синусов двух углов к их разности.

II. Темы письменных работ по математике на экзаменах в Оренбургском реальном училище и мужской гимназии в 1895—1911 гг. (ГАОО. Ф. 81. Оп. 1. Д. 191. Л. 9)

1) Темы по геометрии для письменного испытания воспитанников VII класса Оренбургского реального училища в 1895/96 учебном году

1. Радиус Солнца R , радиус Земли S , расстояние между их центрами α . Расстояние Луны от центра Земли δ . Найти: 1) длину конической тени, отбрасываемой Землей (считая от центра Земли), 2) радиус сечения, проведенного перпендикулярно к оси теневого конуса на расстоянии Луны от Земли, 3) радиус, определяющий математическую границу полутени для взятого сечения. Последнее выражение построить.

$$\text{Ответ: 1) } \frac{\alpha S}{R-S}; 2) \frac{S(\delta+\alpha) \pm R}{\sqrt{\alpha^2 - (R-S)^2}}; 3) \frac{\pm R + S(\alpha+\delta)}{\sqrt{\alpha^2 + (R+S)^2}}.$$

Директор М. Зернов

3. На диаметре AB полуокружности построить равнобедренный треугольник. Касательная к той же полуокружности,

параллельная диаметру, пересекает стороны треугольника в точках E и F . Показать, что вращение ломаной линии $AEFB$ около AB образует поверхность, равновеликую с поверхностью сферы, описываемой данной полуокружностью.

3. Боковые грани правильной треугольной пирамиды, объем которой равен $9\sqrt{3}$ куб. ед., наклонены к основанию под углом в 60° . Пирамида эта пересечена плоскостью, перпендикулярной к высоте и отстоящей на треть высоты, считая от вершины. Определить объем усеченного конуса, основаниями которого служат круги, из которых один описан около основания пирамиды, а другой — около означенного сечения. (Считать с точностью до 0,1.)

Ответ: 36,3 куб. ед.

Преподаватель Н. Морозов

ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 65. Л. 114.

2) Тема по алгебре для письменного испытания учеников VI класса Оренбургского реального училища в 1904/05 учебном году

Решить в целых положительных числах уравнение $ax + ny = c$, где a есть первый член бесконечной убывающей прогрессии, в которой знаменатель равен $2,5^{-1}$, а сумма 5; n есть число членов арифметической прогрессии, в которой крайние члены равны 1,125 и 8,875, а сумма равна 85; наконец c есть больший корень уравнения $z^2 - 74z - 935 = 0$.

Преподаватель А. Киселев

ГАОО. Ф. 79. Оп. 1. Д. 98

3) Тема по алгебре, присланная из управления учебного округа для письменного испытания учеников VII класса Оренбургского реального училища в 1904/05 учебном году

Число, равное сумме рациональных членов разложения $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})^6$, разделить на две такие целые части, чтобы одна делилась без остатка на первый, а другая на второй член возрастающей разностной прогрессии, у которой сумма десяти членов равна 255, а произведение первого члена на десятый равно 144.

4) Тема по геометрии, присланная из управления учебного округа для письменного испытания учеников VII класса Оренбургского реального училища в 1904/05 учебном году

В треугольнике даны основание $a = 10$ фут. и прилежащие к нему углы α и $90^\circ + \alpha$ ($\alpha = 38^\circ 18' 23''$). Определить объем тела, полученного в результате вращения этого треугольника около его высоты.

5) Задачи по специальному курсу математики на окончательных испытаниях учеников реальных училищ Оренбургского учебного округа в мае 1911 года

Записки математического кружка при Оренбургском реальном училище № 6 (первая половина 1911/12 учебного года). С. 18—21.

1. Уральское реальное училище

К эллипсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ провести касательную через точку, абсцисса которой равна $\frac{9}{7} \int_0^1 \sqrt{3x+1} dx$, а ордината равна максимуму функции $y = \frac{x^2 + 20x + 55}{2(3+x)}$.

2. Пермское Алексеевское реальное училище

Из лежащей в первой четверти точки M , представляющей собой точку пересечения параболы, параметр которой

$\frac{9}{4}$, с окружностью, центр которой совпадает с началом координат и которая касается прямой $y = x\sqrt{3} - 10$, описана окружность, касающаяся оси абсцисс и пересекающая данную окружность в точках P и Q .

- 1) написать уравнение общей хорды;
- 2) показать, что K , точка пересечения ординаты точки M с общей хордой, принадлежит эллипсу, большая ось которого совпадает с осью абсцисс и равна диаметру первого круга, а меньшая равна радиусу того же круга;
- 3) написать уравнение касательной к эллипсу в точке K ;
- 4) найти окружность, проходящую через точки M и L (конец абсциссы точки M) и отсекающую от означенной касательной наименьший отрезок.

3. Красноуфимское промышленное училище

Найти площадь треугольника, если стороны его определяются из следующих условий: первая есть касательная с положительным угловым коэффициентом к параболы $y = 10x^2$ в точках, в которых парабола пересекается с прямой $y = 4x - 5$; вторая — прямая, проходящая через середину прямой, соединяющей точки $(4; 3)$ и $(-2; 5)$, перпендикулярно к ней; третья — директриса гиперболы $3x^2 - y^2 = 27$, соответствующая правому фокусу.

4. Оренбургское реальное училище

К кривой $9y^2 = 20x + 4x^2$ из точки $M(-1,5; 3)$ проведены касательные MK_1 и MK_2 (K_1 и K_2 — точки касания). Вычислить угол K_1MK_2 и составить уравнение медианы стороны K_1K_2 треугольника MK_1K_2 .

5. Челябинское реальное училище

Найти вторую производную функции

$$y = \lg \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} + \arccos \frac{a}{x} \right).$$

6. Уфимское реальное училище

На эллипсе, выраженном уравнением $\frac{x^2}{1000} + \frac{y^2}{2500} = 1$, найти точки P и Q выше оси абсцисс. Абсцисса первой точки (P) равна максимуму функции $y = (2 - z)\sqrt{12 - z^2}$, сложенному с $80 - \sqrt{2}$, абсцисса второй точки (Q) равна минимуму той же функции, сложенному с $96 - \sqrt{3}$. Определить угол между касательными к эллипсу в точках P и Q .

7. Екатеринбургское Алексеевское реальное училище

Написать уравнение касательной и нормали к эллипсу в точке первой четверти, абсцисса которой равна минимуму

функции $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$, если большая полуось равна частно-

му от деления тангенсов углов между кривыми $x^2 - y^2 + 2x + 2y - 11 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$, а малая полуось представляет значение производной следующей

функции $f(x) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{\sqrt{3(x^2 - 4)}}{x}$ при

$x = \sqrt{5}$.

6) Задачи по математике, предложенные на весенних письменных испытаниях в Оренбургском реальном училище

Записки математического кружка при Оренбургском реальном училище № 7 (вторая половина 1911/12 учебного года). С. 23—25.

VII класс. Специальный курс математики

Через точку, в которой длина поднормали кривой

$$y = \sqrt{(x - 2)^4 + 24x^2(x - 6) + 16(13x - 1)}$$

имеет наименьшее значение, провести касательную к эллипсу $x^2 + 2y^2 = 12$.

VII класс. Тригонометрия

В прямой призме, основанием которой служит правильный треугольник, проведена через одну из сторон нижнего основания и противоположащую вершину верхнего основания плоскость, составляющая с основанием угол α . Зная, что площадь полученного сечения S равняется 40,5 кв. метрам и угол α есть наименьший положительный корень уравнения $3(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 \cos 2\alpha$, вычислить объем призмы.

VI класс. Алгебра

Дан квадратный многочлен $ax^2 - 2ax + a - b$, где a и b положительные числа. Требуется: 1) представить этот многочлен в виде произведения двух линейных относительно x сомножителей; 2) составить арифметическую прогрессию, в которой n -й член был бы равен большему корню многочлена, а $(n - m)$ -й — меньшему его корню; 3) приняв a равным 7 и b равным 10, разложить положительный корень многочлена в непрерывную дробь и, 4) приняв за значение этого корня четвертую подходящую дробь, вычислить точность такого приближения (в десятичных долях единицы).

VI класс. Тригонометрия

В угол A вписаны две окружности радиусов r и r_a . Вычислить углы и площадь треугольника ABC , в котором первая окружность вписанная, а вторая внеписанная, если $A = 53^\circ 7' 48''$, $r = 4$ м, $r_a = 10,5$ м.

VI класс. Геометрия

Около шара радиуса R описан конус так, что плоскость его основания пересекает поверхность шара по окружности такой же длины, как окружность касания шаровой и конической поверхности. Определить объем и боковую поверхность правильной двенадцатиугольной пирамиды, описанной около конуса, зная, что ее боковые грани наклонены к плоскости основания под углом в 60° . Для вычисления $R = 0,6$ м.

VI класс. Алгебра

1. Некто оценивал свое имущество, состоявшее из процентных бумаг и недвижимости, в 65000 рублей. Зная, что процентные бумаги давали ему 4% годового дохода, а недвижимость $7\frac{1}{2}\%$, определить, во сколько он ценил свою недвижимость, если известно еще, что годовой доход его со всего имущества равнялся 4224 рублям.

2. Преобразовать выражение:

$$\left(\frac{1}{x(a-x)} - \frac{1}{ax} + \frac{a+x}{a(a^2-ax+x^2)} - \frac{a}{a^3+x^3} \right) : \frac{a^3-ax^2}{a^2x+2ax^2-x^3}.$$

III класс. Арифметика

В настоящее время в г. Оренбурге насчитывают до 128 тысяч жителей, причем можно положить, что число мужчин относится к числу женщин, как 5,(6):5; до $5\frac{1}{4}\%$ общего числа жителей составляют учащиеся в различных учебных заведениях. Около тридцати лет тому назад в Оренбурге насчитывалось всего $72\frac{1}{2}$ тысячи жителей.

Определить, сколько в настоящее время в Оренбурге мужчин, сколько женщин, сколько учащихся обоего пола и на сколько процентов возросло население города в течение последних тридцати лет; узнать также, как велико будет приблизительно население Оренбурга ко времени двухсотлетия его существования, если число жителей будет возрастать в той же пропорции, как и в последние 30 лет, и если известно, что г. Оренбург основан Иваном Ивановичем Неплюевым (1693—1773) в 1742 году.

ГАОО. Ф. 79. Оп. 1. Д. 192

7) Тема по алгебре для письменного испытания учеников VIII класса гимназии в 1911/12 учебном году

Решить уравнение

$$\log_{10} \sqrt{x+10} - 1 = \log_{10} 3 - \frac{1}{2} \log_{10} (x-1).$$

Упятеренный корень этого уравнения разложить на два числа, из которых одно равняется сумме числителя и знаменателя третьей подходящей дроби, получаемой от разложения $\sqrt{6}$ в непрерывную дробь. Другое число требуется изобразить по пятеричной системе счисления, сумму цифр этого числа, изображенного по пятеричной системе, сделать показателем степени бинома $\sqrt{z} + \sqrt[3]{z^{-4}}$ и найти член разложения этого бинома, не зависящий от z .

8) Тема по геометрии для письменного испытания учеников VIII класса гимназии в 1911/12 учебном году

Определить объем тела, полученного в результате вращения прямоугольника около оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали, если известны угол $\alpha = 38^\circ 17' 21''$, образованный диагональю с основанием прямоугольника, и его период $2p = 48$ метрам.

ГАОО. Ф. 79. Оп. 1. Д. 155. Л. 29

9) Тема по алгебре для письменного испытания учеников VIII класса гимназии

Некоторое общество, состоящее более чем из 60 и менее 70 лиц обоего пола, собрало для благотворительных целей такую сумму денег, что если ее положить в банк на 10 сложных процентов, то через три года она обратилась бы в 1332 руб. 75 коп. Каждый мужчина пожертвовал число копеек, равное коэффициенту при x^8 члене разложения

бинома $(x + \sqrt[3]{2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{4}}})^{11}$, а каждая женщина пожерт-

вовала число рублей, равное пределу суммы бесконечно убывающей кратной прогрессии $\ddot{\cdot} 1\frac{3}{8}, \frac{11}{16}, \frac{11}{32}, \dots$

Сколько было в том обществе мужчин и женщин?

10) Тема по геометрии для письменного испытания учеников VIII класса гимназии

Диагональ прямоугольника $d = 5$ м, угол между диагоналями $\alpha = 34^\circ 17' 20''$. Определить поверхность и объем тела, полученного вращением этого прямоугольника вокруг оси, проходящей через его вершину, параллельно диагонали.

III. Задачи, предлагавшиеся на заседаниях математического кружка при Оренбургском реальном училище в 1907—1912 гг.

Записки математического кружка при Оренбургском реальном училище № 2, 1907/08 учеб. год. С. 13—23.

1. Решите уравнение $x^5 - (3 - x)^5 = 243$.

Решение. $(3 - x)^5 = 243 - 405x + 270x^2 - 90x^3 + 15x^4 - x^5$.

Уравнение примет вид:

$$x^5 - (243 - 405x + 270x^2 - 90x^3 + 15x^4 - x^5) = 243, \quad \text{или} \\ 2x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 486 = 0.$$

Понизим степень уравнения, поделив левую часть его на $x - 3$. (3 — один из корней данного уравнения, его мы нашли подстановкой.)

Получим: $2x^4 - 9x^3 + 63x^2 - 81x + 162 = 0$; после деления его на $2x^2$ будет: $x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{63}{2} - \frac{81}{2x} + \frac{81}{x^2} = 0$ или

$$\left(x^2 + \left(\frac{9}{x} \right)^2 \right) - \frac{9}{2} \left(x + \frac{9}{x} \right) + \frac{63}{2} = 0.$$

Пусть $x + \frac{9}{x} = y$, тогда $x^2 + \left(\frac{9}{x}\right)^2 = y^2 - 18$, и уравнение принимает вид: $y^2 - 18 - \frac{9}{2}y + \frac{63}{2} = 0$, или $2y^2 - 9y + 27 = 0$, откуда $y = \frac{9 \pm 3\sqrt{-15}}{4}$.

Значит, $x + \frac{9}{x} = \frac{9 + 3\sqrt{-15}}{4}$. Последнее уравнение дает нам два корня x_1 и x_2 . Корни x_3 и x_4 находим из уравнения $x + \frac{9}{x} = \frac{9 - 3\sqrt{-15}}{4}$.

2. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^3 = 7x + 3y, \\ y^3 = 7y + 3x. \end{cases}$$

Решение. Сложим и вычтем данные уравнения:

$$x^3 + y^3 = 10(x + y), \quad (\text{A})$$

$$x^3 - y^3 = 4(x - y), \quad (\text{B})$$

или $x^2 - xy - y^2 = 10$ и $x^2 + xy + y^2 = 4$.

Сложим и вычтем два последних уравнения:

$$x^2 + y^2 = 7, \quad (\text{C})$$

$$2xy = -6. \quad (\text{D})$$

Прибавим к уравнению (C) уравнение (D): $(x + y)^2 = 1$, откуда $x + y = \pm 1$. Вычтем из уравнения (C) уравнение (D): $(x - y)^2 = 13$, откуда $x - y = \pm\sqrt{13}$.

Теперь имеем

$$\begin{cases} x + y = \pm 1, \\ x - y = \pm\sqrt{13}, \end{cases}$$

и отыскание решение не представляет труда. Уравнения (A) и (B) кроме того дают: $x + y = 0$, $x - y = 0$, откуда $x = 0$ и $y = 0$.

3. Решить уравнение $\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x}$.

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\frac{x^2 - 1}{x} + \frac{x-1}{x} + 2 \frac{x-1}{x} \sqrt{x+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2} \quad (1)$$

Отсюда $x(x+1+1+2\sqrt{x+1}) = x-1$ или

$$x^2 + x + 1 = -2x\sqrt{x+1}.$$

Возведем последнее уравнение в квадрат:

$$x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x = 4x^3 + 4x^2$$

$$\text{или } x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Делим уравнение на x^2 :

$$x^2 - 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \text{ или } \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x - \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Пусть $x - \frac{1}{x} = y$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$, и уравнение примет вид: $y^2 + 2 - 2y - 1 = 0$, или $y^2 - 2y + 1 = 0$, откуда $y = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$; $y_1 = y_2 = 1$.

Значит, $x - \frac{1}{x} = 1$; $x^2 - x - 1 = 0$; $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$; $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Уравнению удовлетворяет $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Приравняв к нулю выражение, на которое мы

сокращали уравнение (1), получим $\frac{x-1}{x} = 0$, откуда найдем

еще корень данного уравнения $x = 1$.

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} = 2, \\ x^2 - 8 = 2x(2y-3). \end{cases}$$

Решение. Положим, что $\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} = z$, тогда

$\sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} = \frac{1}{z}$, и первое уравнение принимает вид:

$z + \frac{1}{z} = 2$, или $z^2 - 2z + 1 = 0$, откуда $z = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$;

$z_1 = z_2 = 1$. Значит, $\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} = 1$ или $3x - 2y = 2x$, и

$x = 2y$. Подставив $2y$ вместо x во второе уравнение, получим:

$$4y^2 - 8 = 8y^2 - 12y, \text{ или } y^2 - 3y + 2 = 0;$$

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}; \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 1.$$

Тогда $x_1 = 4$ и $x_2 = 2$.

5. Найти истинное значение дроби $\frac{\sin(\alpha - 60^\circ)}{1 - 4\cos^2 \alpha}$ при

$\alpha = 60^\circ$ (т.е. предел этой дроби при условии, что α стремится к 60°).

Решение

$$\frac{\sin(\alpha - 60^\circ)}{4\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \cos^2 \alpha\right)} = \frac{\sin(\alpha - 60^\circ)}{4\left(\frac{1}{2} + \cos \alpha\right)\left(\frac{1}{2} - \cos \alpha\right)},$$

но $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, следовательно,

$$4\left(\frac{1}{2} + \cos \alpha\right)\left(\frac{1}{2} - \cos \alpha\right) = 4(\cos 60^\circ + \cos \alpha)(\cos 60^\circ - \cos \alpha) =$$

$$= 4 \cdot 2 \cos \frac{\alpha + 60^\circ}{2} \cos \frac{\alpha - 60^\circ}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha + 60^\circ}{2} \sin \frac{\alpha - 60^\circ}{2} =$$

$$= 4 \sin(\alpha + 60^\circ) \sin(\alpha - 60^\circ).$$

Дробь примет вид:

$$\frac{\sin(\alpha - 60^\circ)}{4 \sin(\alpha + 60^\circ) \sin(\alpha - 60^\circ)} = \frac{1}{4 \sin(\alpha + 60^\circ)};$$

следовательно, предел данной дроби при $\alpha = 60^\circ$ равен

$$\left. \frac{1}{4 \sin(\alpha + 60^\circ)} \right|_{\alpha=60^\circ} = \frac{1}{4 \sin 120^\circ} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

6. Найти истинное значение дроби $\frac{\sin mx}{\sin nx}$ при $x=0$

(т.е. предел этой дроби при условии, что x стремится к 0).

Решение

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{mx \frac{\sin mx}{mx}}{nx \frac{\sin nx}{nx}}; \quad \frac{\sin mx}{mx} \text{ и } \frac{\sin nx}{nx} \text{ при } x=0 \text{ обра-}$$

щаются в единицу. Следовательно, предел данной дроби при $x=0$ равен $\frac{m}{n}$.

7. $\sin \frac{a}{3} = m$. Найти $\sin a$.

Решение. По формуле синуса тройного угла имеем:

$$\sin a = 3 \sin \frac{a}{3} - 4 \sin^3 \frac{a}{3}; \quad \sin a = 3m - 4m^3 = m(3 - 4m^2).$$

8. $\lg 2 = a$; $\lg 3 = b$. Чему равен $\log_6 27$?

Решение

$$\text{Известно, что } \log_6 27 = \frac{\lg 27}{\lg 6} = \frac{3 \lg 3}{\lg 2 + \lg 3} = \frac{3b}{a+b}.$$

9. $\lg 2 = 0,30103$; $\lg 5,74346 = 0,75918$. Найти $\sqrt[5]{0,0625}$.

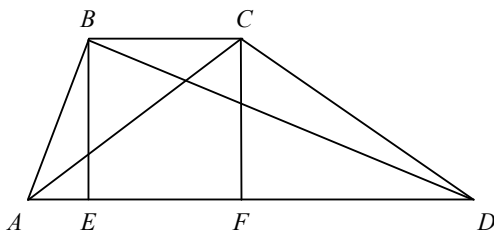
Решение

$$\text{Пусть } \sqrt[5]{0,0625} = x; \quad x = \sqrt[5]{\frac{625}{10000}} = \sqrt[5]{\frac{1}{16}} = \sqrt[5]{2^{-4}} = 2^{-\frac{4}{5}};$$

$$\lg x = -\frac{4}{5} \lg 2 = -\frac{4}{5} \cdot 0,30103 = \frac{-1,20412}{5} = -0,24082 = 1,75918,$$

следовательно, $x = 0,574346$.

10. Определить площадь трапеции, зная высоту и обе диагонали. $AC = a$; $BD = b$; $BE = CF = h$.



Решение. Из треугольника ACF : $AF = \sqrt{a^2 - h^2}$; из треугольника BED :

$$DE = \sqrt{b^2 - h^2}; \quad AF = AE + EF = AE + BC;$$

$ED = FD + EF = FD + BC$; $AF + ED = AE + BC + FD + BC$,
но $AF + ED = BC + BC + AD - BC$; $AF + AD = AD + BC$; но,
с другой стороны, мы знаем, что

$$AF + AD = \sqrt{a^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2},$$

значит,

$$AD + BC = \sqrt{a^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2},$$

$$\text{а } x = \frac{AD + BC}{2} \cdot h = \frac{h}{2} \left(\sqrt{a^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2} \right).$$

11. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x = \frac{11}{3} \sqrt{x+y}, \\ y = \frac{7}{3} \sqrt{x+y}. \end{cases}$$

Решение. Поделив первое уравнение на второе имеем:

$$\frac{x}{y} = \frac{11}{7}, \text{ откуда } x = \frac{11}{7}y, \text{ подставим выражение } x \text{ через } y$$

во второе уравнение:

$$y = \frac{7}{3} \sqrt{\frac{11}{7}y + y}, \text{ или } y = \frac{7}{3} \sqrt{\frac{18}{7}y}.$$

Возведем последнее уравнение в квадрат:

$$y^2 = \frac{49 \cdot 18}{9 \cdot 7} y, \text{ или } y^2 = 14y, \text{ откуда } y(y - 14) = 0; \text{ следова-}$$

тельно, $y_1 = 0$; $y_2 = 14$; $x_1 = 0$; $x_2 = 22$.

12. Решите уравнение: $9x^2 + 4x^3 = 1 + 12x^4$.

Решение

Имеем: $9x^2 - 1 = 12x^4 - 4x^3$, или

$$(3x + 1)(3x - 1) = 4x^3(3x - 1), \text{ откуда } 3x - 1 = 0, \text{ а } x = \frac{1}{3};$$

$3x + 1 = 4x^3$, вычтем из обеих частей последнего уравнения по $4x$: $1 - x = 4x(x^2 - 1)$, откуда $x = 1$; $1 = -4x(x + 1)$, или

$$4x^2 + 4x + 1 = 0; \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{4} = -\frac{1}{2}, \quad x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Итак, корни данного уравнения следующие: $x_1 = \frac{1}{3}$,

$$x_2 = 1, \quad x_3 = -\frac{1}{2}, \quad x_4 = -\frac{1}{2}.$$

13. Показать, что

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 1,$$

если $A + B + C = 180^\circ$.

Решение

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \\ & = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right) + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \\ & = \frac{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}, \\ & \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2} = \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}, \end{aligned}$$

следовательно,
$$\frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} =$$
$$= \frac{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = 1.$$

Записки математического кружка при Оренбургском реальном училище № 7 (вторая половина 1911/12 учебного года). С. 8—21.

1. Доказать теорему: если пучок прямых (на плоскости), выходящих из одной точки, пересечен прямою так, что отрезки секущей между лучами пучка равны между собою, то котангенсы углов, образуемых лучами с секущей, составляют арифметическую прогрессию.

Доказательство. Называя точки пересечения секущей с лучами через A, B, C и т.д. и перпендикуляр из центра S лучей на секущую через ST , получим выражения котангенсов в таком виде: $\frac{AT}{ST}, \frac{BT}{ST}, \frac{CT}{ST}, \dots$, а так как $AT - BT = AB$, $BT - CT = BC$ и т.д., где $AB, BC, \dots$ — равные отрезки секущей, то найденные дроби составляют арифметическую прогрессию, разность которой $\frac{AT}{ST}$, что и требовалось доказать.

2. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ y^2 + x = 3. \end{cases}$$

Решение. Определив x в зависимости от y из второго уравнения и подставив найденное выражение в первое, получим

$$y^4 - 6y^2 + y + 4 = 0, \text{ или } (y - 1)(y^3 + y^2 - 5y - 4) = 0,$$

откуда находим один корень ($y = 1$) и кубическое уравнение $y^3 + y^2 - 5y - 4 = 0$, которое преобразуем заменой y новой неизвестной z по уравнению $y = z - \frac{1}{3}$:

$$\left(z - \frac{1}{3}\right)^3 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 - 5\left(z - \frac{1}{3}\right) - 4 = 0, \text{ или } z^3 - 5\frac{1}{3}z - \frac{61}{27} = 0.$$

Корни этого уравнения могут быть вычислены посредством формулы Тарталья — Кардана:

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \text{ где } p = -5\frac{1}{3}$$

$$\text{и } q = -\frac{61}{27}.$$

Система имеет 4 пары решений, из которых 2 мнимых и 2 действительных.

$$3. \text{ Доказать неравенства: } \sqrt{3} > \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} > 1,$$

если a, b и c числа положительные.

Доказательство. Имеем тождество

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc), \text{ откуда, очевидно,}$$

$$\text{следует } (a+b+c)^2 > a^2 + b^2 + c^2 \text{ или } \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} > 1.$$

Далее из очевидного тождества

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 > 0$$

$$\text{получаем } 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2(ab+ac+bc) > 0,$$

$$\text{или } a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc.$$

Заметив это, получаем из первого тождества

$$(a+b+c)^2 < 3(a^2+b^2+c^2), \text{ откуда } \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} < \sqrt{3}.$$

4. Решить треугольник, если дан угол A и если стороны a, b и c удовлетворяют системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} ma + nb + lc = q, \\ m_1 a + n_1 b + l_1 c = q_1. \end{cases}$$

Решение. Заменяя в формуле $tg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ p

его значением и обозначив $tg^2 \frac{A}{2}$ через k , получим

$$(a-b+c)(a+b-c) = k(a+b+c)(b+c-a).$$

Раскрыв здесь скобки и приведя подобные, получим:

$$a^2(k+1) - b^2(k+1) - c^2(k+1) + 2bc(k-1) = 0.$$

Присоединив к этому уравнению два данных, будем иметь систему с неизвестными a , b и c . Решив ее, будем знать три стороны треугольника.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy + uz = 17, \\ xz + yu = 13, \\ xu + yz = 11, \\ x + y + z + u = 11. \end{cases}$$

Решение. Сложив первое уравнение со вторым, получим

$$(x+u)(y+z) = 30.$$

Введя обозначения $x+u=t$ и $y+z=v$, будем иметь систему $\begin{cases} vt = 30, \\ v+t = 11, \end{cases}$ после решения которой получим

$$\begin{cases} v = 5, \\ t = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} v = 6, \\ t = 5. \end{cases}$$

Сложив второе из данных в условии задачи уравнений с третьим, получим $(x+y)(u+z) = 24$.

Введя обозначения $x+y=r$ и $u+z=s$, будем иметь

систему $\begin{cases} rs = 24, \\ r + s = 11, \end{cases}$ после решения которой получим

$$\left[\begin{cases} r = 3, \\ s = 8, \\ r = 8, \\ s = 3. \end{cases} \right.$$

Таким образом, данная система уравнений может быть заменена следующей совокупностью систем:

$$\left[\begin{cases} x + u = 6, \\ y + z = 5, \\ x + y = 3, \\ u + z = 8, \\ x + u = 5, \\ y + z = 6, \\ x + y = 8, \\ u + z = 3. \end{cases} \right.$$

Вычитая второе из данных в условии уравнений из первого, получим

$$(x - u)(y - z) = 4,$$

а так как в то же время $(x - u) + (y - z) = (x + y) - (u + z) = -5$ или 5, то разности $x - u$ и $y - z$ найдем как корни уравнений $t^2 \pm 5t + 4 = 0$, откуда $t = \mp 2 \frac{1}{2} \pm 1 \frac{1}{2} = -1$, или $+1$, или -4 , или $+4$; следовательно, $x - u = 1$, или -1 , или $+4$, или -4 , $y - z = 4$ или -4 , или $+1$, или -1 .

Сопоставляя значения разностей с ранее найденными значениями суммы, получим восемь значений для каждого из неизвестных, а именно:

$$x = 5; 3 \frac{1}{2}; 2 \frac{1}{2}; 1; 4 \frac{1}{2}; 3; 2; \frac{1}{2},$$

$$y = 3; 4\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2; 3\frac{1}{2}; 5; 1; 2\frac{1}{2},$$

$$z = 2; \frac{1}{2}; 4\frac{1}{2}; 3; 2\frac{1}{2}; 1; 5; 3\frac{1}{2},$$

$$u = 1; 2\frac{1}{2}; 3\frac{1}{2}; 5; \frac{1}{2}; 2; 3; 4\frac{1}{2}.$$

6. В круг данного радиуса R вписан правильный n -угольник, в правильный n -угольник вписан второй круг, во второй круг — второй n -угольник и т.д. Определить предельное значение сумм периметров и площадей всех n -угольников и кругов.

Решение. Пусть AB будет сторона правильного n -угольника, и OD — апофема его. Обозначим радиус первого круга через R_1 , второго — через R_2 и т.д. Из треугольника AOD будем иметь: $AD = \frac{1}{2}AB = R_1 \cdot \sin \frac{1}{2}AOB$,

Но так как $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$, следовательно,

$$\frac{1}{2}AOB = \frac{180^\circ}{n}, \quad \text{то} \quad AD = \frac{1}{2}AB = R_1 \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}; \quad \text{откуда}$$

$AB = 2R_1 \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$. Из этого же треугольника имеем:

$$OD = R_2 = R_1 \cos AOD = R_1 \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Длина окружности первого круга будет $2\pi R_1$, длина окружности второго $2\pi R_1 \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}$, длина окружности

третьего $2\pi R_1 \cdot \cos^2 \frac{180^\circ}{n}$ и т.д.; следовательно,

$$\begin{aligned} C &= 2\pi R_1 + 2\pi R_1 \cdot \cos \frac{180^\circ}{n} + 2\pi R_1 \cdot \cos^2 \frac{180^\circ}{n} + \dots = \\ &= 2\pi R_1 \left(1 + \cos \frac{180^\circ}{n} + \cos^2 \frac{180^\circ}{n} + \dots \right). \end{aligned}$$

В скобках мы имеем предел суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой есть $\cos \frac{180^\circ}{n}$, следовательно,

$$\lim C = 2\pi R_1 \cdot \frac{l}{1 - \cos \frac{180^\circ}{n}} = 2\pi R_1 \cdot \frac{l}{2 \sin^2 \frac{90^\circ}{n}} = \frac{\pi R_1^2}{\sin^2 \frac{90^\circ}{n}}.$$

Теперь найдем предельное значение суммы площадей всех кругов: площадь первого круга равна πR_1^2 , второго $\pi R_1^2 \cos^2 \frac{180^\circ}{n}$, третьего $\pi R_1^2 \cos^4 \frac{180^\circ}{n}$ и т.д.

Итак,

$$\begin{aligned} K &= \pi R_1^2 + \pi R_1^2 \cos^2 \frac{180^\circ}{n} + \pi R_1^2 \cos^4 \frac{180^\circ}{n} + \dots = \\ &= \pi R_1^2 \left(1 + \cos^2 \frac{180^\circ}{n} + \cos^4 \frac{180^\circ}{n} + \dots \right). \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \lim K = \pi R_1^2 \frac{l}{1 - \cos^2 \frac{180^\circ}{n}} = \frac{\pi R_1^2}{\sin^2 \frac{180^\circ}{n}}.$$

Точно так же периметр и площадь первого n-угольника равны соответственно:

$$\begin{aligned} &2\pi R_1 \sin \frac{180^\circ}{n} \text{ и } \pi R_1^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n}, \text{ второго} \\ &2\pi R_1 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n} \text{ и } \pi R_1^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos^3 \frac{180^\circ}{n}, \text{ третье-} \\ &\text{го } 2\pi R_1 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos^2 \frac{180^\circ}{n} \text{ и } \pi R_1^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos^5 \frac{180^\circ}{n} \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

А потому имеем:

$$\begin{aligned} P &= 2\pi R_1 \sin \frac{180^\circ}{n} \left(1 + \cos \frac{180^\circ}{n} + \cos^2 \frac{180^\circ}{n} + \dots \right) \text{ и} \\ S &= \pi R_1^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n} \left(1 + \cos^2 \frac{180^\circ}{n} + \cos^4 \frac{180^\circ}{n} + \dots \right); \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned}
 \lim P &= 2\pi R_l \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot \frac{l}{1 - \cos^2 \frac{180^\circ}{n}} = \\
 &= 4\pi R_l \sin \frac{90^\circ}{n} \cos \frac{90^\circ}{n} \cdot \frac{l}{2 \sin^2 \frac{90^\circ}{n}} = 2\pi R_l \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{n} \quad \text{и} \\
 \lim S &= \pi R_l^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n} \frac{l}{1 - \cos^2 \frac{180^\circ}{n}} = \\
 &= \pi R_l^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n} \frac{l}{\sin^2 \frac{180^\circ}{n}} = \pi R_l \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}.
 \end{aligned}$$

7. В шар радиуса R вписан куб (правильный тетраэдр), в куб вписан шар, во второй шар опять куб и т.д. Определите предельное значение сумм объемов и площадей поверхностей всех кубов и шаров.

Решение. I. Обозначая радиусы шаров и ребра кубов последовательно через R_1, R_2, R_3 и т.д. и X_1, X_2, X_3 и т.д., по известной теореме стереометрии (сумма квадратов всех трех измерений прямого и прямоугольного параллелепипеда равняется квадрату его диагонали) будем иметь:

$$\begin{cases} X_1^2 + X_1^2 + X_1^2 = (2R_1)^2, \\ X_2^2 + X_2^2 + X_2^2 = (2R_2)^2, \\ X_n^2 + X_n^2 + X_n^2 = (2R_n)^2. \end{cases} \quad (1)$$

Кроме того, очевидно, что $X_1 = 2R_2, X_2 = 2R_3$ и т.д.; поэтому вместо (1) можем написать:

$$\begin{cases} (2R_2)^2 + (2R_2)^2 + (2R_2)^2 = (2R_1)^2, \\ (2R_n)^2 + (2R_n)^2 + (2R_n)^2 = (2R_{n-1})^2. \end{cases} \quad (2)$$

Из (1) и (2) имеем: $R_l = R, X_l = \frac{2}{\sqrt{3}} R_l = \frac{2}{\sqrt{3}} R,$

$$R_2 = \frac{R_1}{\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{3}}, \quad X_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} R_2 = \frac{2}{3} R, \quad R_n = \frac{R_{n-1}}{\sqrt{3}} = \frac{R}{(\sqrt{3})^{n-1}},$$

$$X_n = \frac{2}{\sqrt{3}} R_n = \frac{2}{(\sqrt{3})^n} R.$$

Теперь, обозначив пределы сумм объемов и площадей поверхностей всех шаров и кубов последовательно через V , V_1 , S и S_1 , будем иметь:

$$\begin{aligned} V &= \lim \left(\frac{4}{3} \pi R_1^3 + \frac{4}{3} \pi R_2^3 + \frac{4}{3} \pi R_3^3 + \dots + \frac{4}{3} \pi R_n^3 \right) = \\ &= \lim \frac{4}{3} \pi R^3 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{(\sqrt{3})^2} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{3})^{n-1}} \right) = \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{13} (3\sqrt{3} + 1) \pi R^3. \\ V_1 &= \lim (X_1^3 + X_2^3 + \dots + X_n^3) = \\ &= \lim 2^3 R^3 \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 + \left(\frac{1}{(\sqrt{3})^2} \right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{(\sqrt{3})^n} \right)^3 \right) = \\ &= \frac{4}{13} (3\sqrt{3} + 1) R^3. \\ S &= \lim 4\pi (R_1^2 + R_2^2 + \dots + R_n^2) = \\ &= \lim 4\pi R^2 \left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{(\sqrt{3})^{n-1}} \right)^2 \right) = 6\pi R^2. \\ S_1 &= \lim 6\pi (X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2) = \\ &= \lim 24\pi R^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} \right) = 12\pi R^2. \end{aligned}$$

II. Пересечем шар плоскостью, проходящей через одно из ребер вписанного в него тетраэдра и центр самого шара; в сечении получим равнобедренный треугольник, вписан-

ный в большой круг шара так, что основание его будет служить хордой для окружности большого круга, а вершина его расположится внутри круга, причем боковые стороны этого треугольника будут высотами граней тетраэдра. Если обозначим ребро тетраэдра через a , то основание вышеозначенного треугольника будет тоже a , а боковые его стороны b будут равны

$$\text{(по формуле } h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{):}$$

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{3} a ;$$

высоты, опущенные на боковые стороны, будут:

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{2}{3}} a ;$$

отрезок c боковой стороны от основания высоты h_b до

вершины угла при основании будет $c = \sqrt{a^2 - h_b^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} a$.

Кроме того, очевидно, что высоты этого треугольника пересекаются в центре шара, поэтому $R^2 = (h_b - R)^2 + c^2$,

откуда $a = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} R$.

Радиус R_2 второго шара очевидно будет

$$R_2 = h_b - R = \frac{\sqrt{6}}{12} a = \frac{1}{3} R .$$

Теперь, обозначив радиусы следующих друг за другом шаров через $R_1, R_2, \dots, R_n$ и ребра вписанных в соответствующие шары тетраэдров через $a_1, a_2, \dots, a_n$, будем

иметь: $R_1 = R, a_1 = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} R, R_2 = \frac{1}{3} R, a_2 = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} R_1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} R$,

$$R_n = \frac{1}{3^{n-1}} R, a_n = \frac{1}{3^{n-1}} 2 \sqrt{\frac{2}{3}} R .$$

$$\text{Откуда } V = \lim \frac{4}{3} \pi R^3 \left(1 + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{(3^{n-1})^3} \right) = \frac{18}{13} \pi R^3.$$

$$\begin{aligned} V_I &= \frac{1}{3} \lim \left(\frac{1}{4} \sqrt{3} a_1^2 h_1 + \frac{1}{4} \sqrt{3} a_2^2 h_2 + \dots + \frac{1}{4} \sqrt{3} a_n^2 h_n \right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \lim (a_1^2 h_1 + a_2^2 h_2 + \dots + a_n^2 h_n) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \lim \left(a_1^2 \sqrt{\frac{2}{3}} a_1 + a_2^2 \sqrt{\frac{2}{3}} a_2 + \dots + a_n^2 \sqrt{\frac{2}{3}} a_n \right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \lim \left(\left(2 \sqrt{\frac{2}{3}} R \right)^3 + \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} R \right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3^{n-1}} 2 \sqrt{\frac{2}{3}} R \right)^3 \right) = \\ &= \frac{4}{13} \sqrt{3} R^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \lim (4\pi R_1^2 + 4\pi R_2^2 + \dots + 4\pi R_n^2) = \\ &= 4\pi \lim \left(R^2 + \left(\frac{R}{3} \right)^2 + \dots + \left(\frac{R}{3^{n-1}} \right)^2 \right) = \frac{9}{2} \pi R^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_I &= \lim \left(4 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{3} a_1^2 + 4 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{3} a_2^2 + \dots + 4 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{3} a_n^2 \right) = \\ &= \sqrt{3} \lim \left(\left(2 \sqrt{\frac{2}{3}} R \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot 2 \sqrt{\frac{2}{3}} R \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3^{n-1}} \cdot 2 \sqrt{\frac{2}{3}} R \right)^2 \right) = \\ &= 3\sqrt{3} R^2. \end{aligned}$$

$$8. \text{ Решите уравнение } x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}.$$

Решение. Логарифмируем уравнение: $\sqrt{x} \lg x = \frac{x}{2} \lg x$,

$$\text{или } \lg x \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) = 0, \text{ откуда } \begin{cases} \lg x = 0, \\ \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) = 0. \end{cases}$$

Единица есть корень уравнения, так как она второй множитель не обращает в бесконечность. Далее находим $x_2 = 0$ и $x_3 = 4$, но x_2 не есть корень уравнения, так как 0 обращает первый множитель ($\lg x$) в бесконечность. Итак, уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$.

9. Дано уравнение равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$. Написать уравнение эллипса и гиперболы, проходящих через точку $(m; n)$ и софокусных с данной. В частном случае $a^2 = 8$, и точка $(4; 6)$.

Решение. Из условия задачи находим, что полуфокусное расстояние всех трех кривых одно и то же; отыщем его: $c^2 = a^2 + a^2$; откуда $c = a\sqrt{2}$.

Найдем сначала уравнение эллипса.

Точка M принадлежит эллипсу, следовательно, сумма радиусов-векторов ее равна действительной оси; найдем радиусы-векторы точки M :

$$r = \sqrt{(-a\sqrt{2} - m)^2 + n^2} = \sqrt{2a^2 + m^2 + n^2 + 2am\sqrt{2}};$$

$$r_1 = \sqrt{(a\sqrt{2} - m)^2 + n^2} = \sqrt{2a^2 + m^2 + n^2 - 2am\sqrt{2}}.$$

Найдем полусумму радиусов-векторов:

$$\frac{r + r_1}{2} = a_1 = \frac{\sqrt{2a^2 + m^2 + n^2 + 2am\sqrt{2}} + \sqrt{2a^2 + m^2 + n^2 - 2am\sqrt{2}}}{2};$$

найдем a_1^2 :

$$a_1^2 = \frac{2a^2 + m^2 + n^2 + \sqrt{4a^4 + m^4 + n^4 - 4a^2m^2 + 4a^2n^2 + 2m^2n^2}}{2}.$$

Так как для того, чтобы написать уравнение эллипса, надо знать еще квадрат малой полуоси, то найдем его:

$$\begin{aligned} b_1^2 &= a_1^2 - c^2 = \\ &= \frac{2a^2 + m^2 + n^2 + \sqrt{4a^4 + m^4 + n^4 - 4a^2m^2 + 4a^2n^2 + 2m^2n^2}}{2} - 2a^2 = \\ &= \frac{m^2 + n^2 - 2a^2 + \sqrt{4a^4 + m^4 + n^4 - 4a^2m^2 + 4a^2n^2 + 2m^2n^2}}{2}. \end{aligned}$$

Зная квадраты большой и малой полуосей, мы можем написать уравнение эллипса:

$$\frac{2x^2}{2a^2 + m^2 + n^2 + \sqrt{4a^4 + m^4 + n^4 - 4a^2m^2 + 4a^2n^2 + 2m^2n^2}} + \frac{2y^2}{m^2 + n^2 - 2a^2 + \sqrt{4a^4 + m^4 + n^4 - 4a^2m^2 + 4a^2n^2 + 2m^2n^2}} = 1.$$

Найдем теперь уравнение гиперболы.

Точка M принадлежит гиперболы; радиусы-векторы ее мы нашли при решении первой части задачи; для гиперболы мы имеем то, что разность радиусов-векторов каждой точки, принадлежащей ей, равна действительной оси, а потому имеем:

$$\frac{r - r_l}{2} = a = \frac{\sqrt{2a^2 + m^2 + n^2 + 2am\sqrt{2}} - \sqrt{2a^2 + m^2 + n^2 - 2am\sqrt{2}}}{2},$$

следовательно,

$$a^2 = \frac{2a^2 + m^2 + n^2 - \sqrt{4a^2 + m^2 + n^2 - 4a^2m^2 + 4a^2n^2 + 2m^2n^2}}{2}.$$

Найдем b^2 :

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 - a^2 = \\ &= 2a^2 - \frac{2a^2 + m^2 + n^2 + \sqrt{4a^4 + m^4 + n^4 - 4a^2m^2 + 4a^2n^2 + 2m^2n^2}}{2} = \\ &= \frac{2a^2 - m^2 - n^2 + \sqrt{4a^2 + m^2 + n^2 - 4a^2m^2 + 4a^2n^2 + 2m^2n^2}}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение гиперболы представится в таком виде:

$$\frac{2x^2}{2a^2 + m^2 + n^2 + \sqrt{4a^4 + m^4 + n^4 - 4a^2m^2 + 4a^2n^2 + 2m^2n^2}} - \frac{2y^2}{2a^2 - m^2 - n^2 + \sqrt{4a^4 + m^4 + n^4 - 4a^2m^2 + 4a^2n^2 + 2m^2n^2}} = 1.$$

Уравнение эллипса в частном случае будет:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1; \text{ уравнение гиперболы: } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

10. Доказать теорему: если в треугольнике две биссектрисы равны, то треугольник равнобедренный.

Доказательство. Зная формулу, выражающую длину биссектрисы в зависимости от сторон треугольника a , b и c , можем написать:

$$b_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)} \text{ и } b_c = \frac{2}{b+a} \sqrt{bap(p-c)}.$$

По условию дано, что b_a и b_c равны, следовательно, имеем:

$$\frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)} = \frac{2}{b+a} \sqrt{bap(p-c)}, \text{ или, по сокращении,}$$

$$\frac{\sqrt{c(p-a)}}{b+c} = \frac{\sqrt{a(p-c)}}{a+b}. \quad (1)$$

Отсюда уже ясно видно, что равенство (1) может обратиться в тождество только при $a = c$, что и требовалось доказать. Но доказательство этой теоремы можно сделать еще более убедительным, если: 1) возвести обе части уравнения (1) в квадрат; 2) перенести все его члены в одну сторону от знака равенства; 3) привести все члены его к общему знаменателю; 4) подставить значение p и 5) вынести $(c - a)$ за скобку, тогда будем иметь:

$$(c-a) \frac{cb^2 + c^2a + ab^2 + ca^2 + b^3 + 3abc}{(b+c)^2 c(b+c-a)} = 0,$$

откуда при положительных a , b и c следует $c - a = 0$, или $c = a$.

IV. Отзывы инспектора Оренбургского учебного округа К. А. Чеховича об экзаменационных работах учеников VI и VII (дополнительного) классов Оренбургского реального училища (ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д 88. Л. 12 об. — 17)

1. Частная характеристика работ по математике, исполненных на выпускном экзамене за шесть классов реальных училищ

Оренбургское реальное училище

Алгебра. Общий недостаток работ — слишком краткое объяснение, страдающее недомолвками; у некоторых учеников изложение почти отсутствует (Милев, Щербаков). Чаще других встречается отсутствие указания на непригодность отрицательного корня уравнения (Милев, Вошинин, Бутырин, Сиднев, Кутин, Исаев, Волженцов), а причину непригодности этого корня указывает лишь один Тарасов. При нахождении 4-го члена разложения степени бинома многие не указывают формулы общего члена разложения, а некоторые (Милев, Никуленков, Либенау, Шнелль, Кутин) вычисляют вместо одного 4-го все члены разложения начиная с 1-го. Неудовлетворительно исполненных работ только одна — работа Шнелля; этот ученик делает целый ряд ошибок, свидетельствующих о малом навыке в решении задач и слабых знаниях некоторых вопросов курса. Так, он при делении дроби на число обращает это последнее в дробь с одинаковым знаменателем с делимым, неверно находит разность и члены арифметической прогрессии, неискусно преобразует уравнение, пытается радикальное уравнение решить логарифмированием и, наконец, получив для искомого числа (которое по смыслу должно быть целым и положительным) рациональное, не смущается этим, ограничивает извлечение квадратного корня приближением до единицы; из полученных двух решение выбирает отрицательное, отсекая в нем дробь и знак минус, так как «здесь знак минус не имеет смысла». Ввиду таких важных промахов и какого-то бесцеремонного обращения с числами и знаками, работу Шнелля нельзя признать удовлетворительной, и комиссии следовало бы согласиться с мнением г. Морозова и директора.

Высоко оценены также работы Ковешникова (баллом 5) и Либенау (баллом 4). В первой из этих работ, исполненной небрежно, в беловом листе находится неверное и не зачеркнутое выражение, что в формуле сумме суммы членов арифметической прогрессии последний член есть 10,

тогда как число членов автор и намерен найти. Либенау

пишет $\sqrt[3]{x^{-l}} = \left(\sqrt[3]{\frac{l}{x}} \right)^3$; формулу суммы членов прогрессии

представил сначала неверно: $s = \frac{2a + d(n-1)}{2}$, вместо

$s = \frac{(2a + d(n-1))n}{2}$, потом исправил, но после переписки

набело, куда было переписано неверное решение; вместо одного 4-го члена разложения степени бинома находит все члены; в изложении встречаются неправильные выражения. Работа может быть признана лишь удовлетворительной.

Работы исполнены вообще торопливо и без должного внимания, поэтому и в лучших работах встречаются недомолвки в изложении, описки, помарки и неверности в белых работах. Так, в работе Щербакова, кроме отмеченных испытательной комиссией, можно указать еще на следующее: Щербаков не указывает, в какой из двух прогрессий третий член равен -27 , не объясняет значения букв в приводимых формулах, главная часть изложения, состоящая из 9 строк, до такой степени изобилует словами «их, он, его, в котором, которые» и пр., что трудно понять, к чему относится то или другое; описки автора: «эмементами, подставимым».

Испытательная комиссия весьма тщательно проверяла работы, и из недосмотров можно указать лишь один: у Ежкова: «определим 4-й член арифметической прогрессии» (должно быть: третий).

Средний балл 4,1 — успеваемость хорошая.

Геометрия. Слабая сторона работ и по геометрии та же, как и по алгебре, т.е. недостаточно полное изложение, в котором встречаются также неточные выражения; так, многие пишут: «поверхность пояса равна окружности большего круга на высоту» (Бутырин, Никуленков, Либенау, Сиднев, Ковешников, Рыбаков), другие прямо приводят формулы, не указывая, однако, значения букв, входящих сюда (Во-

щинин, Ежкин, Волженцов, Исаев); некоторые не приводят нужных теорем словами, а пишут: «по известной теореме» (Вощинин), «известное алгебраическое правило» (Бутырин). Сухарев называет шаровой пояс слоем, Либенау формулу — уравнением и выражает поверхность в линейных мерах. При решении квадратных уравнений берут один корень без оговорки (Вощинин, Кутин, Исаев и др.). Относительно точности вычисления произведения 240π следует заметить, что ученики на это обратили мало внимания, вычисляли лишние десятичные знаки, иногда в большем числе (например, при $\pi = \frac{22}{7}$ у Сухнова найдено 13 десятичных знаков. Значение π брали с различной степенью точности: Архимедово $\frac{22}{7}$ приняли 9 учеников, 3,14 — 2 ученика, а остальные пять учеников взяли 3,1415, неправильно откидывая следующие знаки (9265). Черновые работы Сухарева и Рыбакова указывают, что эти ученики неясно понимают термин «равновелик», так как приняли сначала, что равновеликими телами называются тела с равными поверхностями.

Работы все исполнены удовлетворительно и задача никого не затрудняла.

Общий балл 3,6.

Тригонометрия. Работы по тригонометрии производят весьма хорошее впечатление; видно, что ученики вполне усвоили курс тригонометрии и имеют достаточный навык в решении задач. Большинство учеников (за исключением 4) преобразовали формулу площади в простейший вид и произвели вычисления безошибочно, за весьма малым исключением, где авторы (6 случаев) допустили незначительные погрешности при делении $\angle \alpha$ на 4 и при вычитании $32 - 29,4$ (Сухарев), $\lg \sin \frac{\alpha}{2} = \bar{1},5946014$ (вместо $\bar{1},5946103$)

(Шнелль); $\lg \cos \frac{\alpha}{2}$ неверно сделано вычитание разности и

$N \lg 1,7738373 = 59,4696$, вместо $59,40696$ (Ежкин), неверно найден $\lg \sin \alpha$ и $N \lg x$ (Кутин), но точно найден $\lg \sin 33^\circ 25' 24'', 1$ (Ковешников).

Неудовлетворительно работу исполнил только один ученик — Исаев, аттестованный и за год по тригонометрии баллом 2. Из прочих работ слабее других работа Милеева, который сделал в самом начале ошибку, неправильно заменив угол O при центре углом A треугольника, почему получил окончательную формулу и численный ответ неверными, хотя кроме указанной ошибки все остальное преобразование и все вычисления правильны. Ученик Сиднев применяет к прямоугольному треугольнику формулу косогоугольного треугольника, означая прямой угол буквой M ; впрочем окончательную формулу привел в простой вид.

Работы Вошинина, Никуленкова, Тарасова и Рыбакова по толковому изложению, безошибочному и быстрому счету, аккуратному расположению действий и чистой внешности — лучшие из всех.

Всех отлично и хорошо исполненных работ 12, или 75%, — успех весьма хороший.

2. Общая характеристика письменных работ по математике учеников VII (дополнительного) класса реальных училищ Оренбургского учебного округа в 1903 г.

Задачи для письменных испытаний выбраны были г. директором из числа представленных преподавателями.

Порядок производства испытания и обстановка были согласны с правилами, и во всех училищах велись протоколы испытаний, вполне достаточные и подробные. Время начала испытаний колеблется между 9 час. утра и 9 час. 30 мин. На диктовку и записывание темы употреблено время от 5 до 20 минут. Продолжительность испытаний колеблется между 2 час. 55 мин. (Екатеринбургское — по геометрии) и 7 час. 54 мин. (Оренбургское — по приложению алгебры к геометрии). Долше всего продолжался экзамен в

Оренбургском училище и по прочим предметам (4 час. 1 мин. — алгебра и 6 час. — геометрия).

В общей сложности на испытание по всем предметам употреблено: в Оренбургском училище 17 час. 55 мин., в Красноуфимском — 14 час. 25 мин., Уральском — 11 час. 47 мин., Пермском — 11 час. 45 мин., в Екатеринбургском — 9 час. 45 мин., тогда как по правилам полагается 8 часов. Удлиненное время обуславливается отчасти сложностью задач, а по приложению алгебры к геометрии, кроме того, исполнением чертежа, иногда довольно сложного...

По трудности задачи в настоящем году были более одинаковы, нежели в предыдущем. Потруднее и сложнее была задача по приложению алгебры к геометрии в Оренбургском училище, а наиболее простой — задача по геометрии в Екатеринбургском.

Испытательные комиссии отнеслись к просмотру работ с должным вниманием. Аттестация работ вообще правильная, но в Красноуфимском училище снисходительная и значительная слабее, чем в остальных...

3. Частная характеристика письменных работ по математике, исполненных на окончательном испытании VII (дополнительного) класса Оренбургского реального училища

Алгебра. Работы учеников указывают на достаточные знания курса алгебры и дополнительных ее статей. Ошибки вообще незначительные и по большей части относятся к решению неопределенных уравнений, причем ученик Лысов не успел его решить; неудовлетворительно решает его Ишков, указывая своей работой на плохое понимание смысла всех преобразований. Николаев, Петров, Семушкин и Урсати неправильно указывают пределы для t и по найденным пределам неправильно находят значение t . Леднев, Назаров и Семушкин решают это уравнение с помощью подстановки, но не пользуются возможными упрощениями. Другой вопрос, затрудняющий учеников, — это преобразо-

вание $\sqrt{7+4\sqrt{-2}}$ в комплексный вид; так, делают при этом ошибки Гринев, Назаров, Николаев и экстерн Иванов; правда, что допущенные ими ошибки не имели влияния на результат, но это произошло потому, что ошибочные числа уничтожаются, как противоположные. Ученики Ишков, Князев и Лысов полагают, что $a^2 + b^2$ есть точный квадрат. Решение задач сопровождается достаточным объяснением; несколько хуже изложение у Петрова и Приббо; этот последний ученик для нахождения суммы квадратов корней уравнения $q^2 - 3q - 5 = 0$ пользуется не вполне удобным способом, хотя и основанным на свойстве корней квадратного уравнения.

Экстерн Иванов исполнил работу неудовлетворительно. Он, кроме неверного преобразования $\sqrt{7+4\sqrt{-2}}$, делает еще ошибки при решении неопределенного уравнения, и это решение не довел до конца, а именно не находит пределов для t , и дает ему «произвольные значения» (на самом деле ограничивается целыми) от $-\infty$ до $+1$ и из полученных чисел выбирает одну пару положительных.

При тщательной проверке работ испытания комиссия не заметила, однако, несколько мелких ошибок. Так, у Гринева $(3 \pm \sqrt{29})^2 = 9 + 2\sqrt{29} + 29$ (должно быть $6\sqrt{29}$). Ошибка, впрочем, не имела влияния на дальнейший ход решения, так как $6\sqrt{29}$ и $-6\sqrt{29}$ взаимно уничтожаются.

Работа Сокурова исполнена грязно: в белой помимо мелких помарок зачеркнуто неверное решение неопределенного уравнения. Очевидно, что Сокуров заметил ошибку уже по окончании всей работы, так как исправленное решение (которое, кстати сказать, он получил не сразу) в черновой работе сделано после отметки, что работа окончена в 11 час. 55 мин. Для этого решения потребовался даже добавочный лист.

Оценка работ вполне правильная; средний балл 3,8, следовательно, результат можно признать хорошим.

Геометрия. Ход решения задачи верен у всех учеников, за исключением лишь Ишкова, работа которого крайне слабая и указывает не только малый навык ее автора в решении задач, но и в плохом знании геометрии. Ишков пытается между прочим доказать, что основание перпендикуляра из вершины прямого угла на гипотенузу (который он называет «высотой гипотенузы»), центр круга, вписанного в треугольник, и точка прикосновения этого круга с одним из катетов лежат на одной прямой, и при этом употребляет крайне нелогичный способ. В высшей степени нелогично и все изложение его работы; формул он не умеет привести к логарифмическому виду, в вычислениях много ошибок; логарифмы подысканы с ошибками. Впрочем, ошибки в счете встречаются почти во всех работах, за исключением работ Князева и Петрова, но эти ученики не вполне упростили окончательную формулу, и Петров выражает объем в линейных футах.

При составлении формул Приббе допустил грубую ошибку, приняв, что площадь треугольника равна произведению катетов. Назаров положил, что $\frac{90^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Обухов ошибочно принял $\sin \alpha = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$, т.е. пропустил множитель 2. Лысов исполнил задачу торопливо, не написал объяснения, а лишь голый счет, причем пишет $lg 41^\circ 12' 49'', 12$ (несколько раз). Лежнев при хорошем изложении вообще пишет $lg 2 = 9,8361481$ (должно быть 0,3010299) и называет данную призму пирамидой.

Оценка работ иногда снисходительна; так, не заслуживают высшего балла указанные работы Назарова, Леднева и еще Урсати, который допустил следующие ошибки:

$$2r^2 = KO^2 \text{ получает } r = KO\sqrt{2} \quad (\text{вместо } \frac{KO}{\sqrt{2}}), \quad \text{угол}$$

$$2\alpha = 41^\circ 12' 49'', 52 \quad (\text{вместо } 49', 12) \quad \text{и неверно подыскал } lg \sin 2\alpha \quad (\bar{1},8188007 \text{ вместо } \bar{1},8187997).$$

Работа Сокурова,

признанная комиссией удовлетворительной, исполнена грязно, с помарками в белой, ошибками в счете и крайне небрежно: решение ограничивается отысканием $lg v$ и, следовательно, не отвечает вопросу задачи.

Работа экстерна Иванова неудовлетворительна. Она изобилует ошибками в вычислениях, в подыскивании логарифмов, решении пропорций и составлении формул.

Средний балл класса 3,9 (по оценке комиссии) — успех хороший.

Приложение алгебры к геометрии. Задача была предложена слишком сложная и потребовала для испытания значительного количества времени: быстрее всех исполнил ее Леднев, употребив на полное ее решение с перепиской 5 час. 45 мин. времени; испытание же закончилось в 5 час. 10 мин. по полудни, т.е. продолжалось всего 7 час. 54 мин., причем у экстерна Иванова работа была взята неоконченной.

Исполнение работ удовлетворительное (средний балл 3,4). Изложение анализа задачи и исследование в большинстве случаев хорошее, хотя у немногих полные; особенно хорошо исполнены работы у Князева и Назарова. Ошибки, встречающиеся в других работах, касаются прежде всего неправильного решения неравенства $(l - 2r)^2 > 0$, из которого Николаев, Обухов, Приббе и Семушкин неправильно выводят $l > 2r$; точно такое неравенство $\frac{l^2}{5} > 0$, $l^2 > 0$ у

Приббе и Семушкина дают решение $l > 0$, а Обухов рассуждает так: $l - r > 5(l - r)$, откуда $-5(l - r)^2 > 0$ и $l < r$, т.е. допускает ряд ошибок; он же ошибается и в знаке неравенства $x_1 + x_2 > 2(l - r)$; построение производит с ошибкой. Работа Обухова справедливо поэтому аттестована баллом 2. Неудовлетворительно также исполнены работы Петрова и Сокурова.

Экстерн Иванов совершенно не справился с задачей и в своей работе не пошел дальше решения квадратного уравнения. Г. преподаватель оценил эту работу баллом единица.

V. Записки директора Оренбургского реального училища К. А. Торопова к работам по специальному курсу математики, исполненным на окончательных испытаниях в 1912/13 учебном году (ГАОО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 135. Л. 127—127 об.)

Задача, предложенная по специальному курсу математики в текущем году, охватывая как вопросы аналитической геометрии, так и приложения анализа бесконечно малых, давала абитуриентам возможность довольно широко раскрыть как свои познания, так и навык в решении задач. Судя по занятиям и успехам учеников VII класса в течение года, можно было ожидать, что предложенная задача не составит затруднения даже слабейшим ученикам, так как они хотя и были ниже общего уровня класса, но разницу в знаниях составляли главным образом последние отделы. Ввиду этого я не решился аттестовать их за год неудовлетворительно, полагая, что они успеют догнать класс на Пасхе; и действительно, последние отделы, как, например, отыскание интегралов и пр., не составили затруднения никому, кроме Горюнова, о работе которого приходится говорить отдельно. Тем не менее не все работы я могу аттестовать удовлетворительно. Главными решающими качество работы являлись ошибки, которые можно объяснить или непростительным невниманием к работе (например, произвольно взятые пределы интеграции), частью утомлением и природной рассеянностью (ошибки в нахождении $\min$ функции). Особенно плохой является работа Горюнова, но вполне объясняло его неуспех то, что Горюнов мальчик весьма нервный, так что его ответы весьма бывали в тесной связи с состоянием его здоровья; бывали случаи, когда Горюнов, зная урок, не мог вымолвить слова только вследствие его нервности, так что приходилось давать время для того, чтобы он мог успокоиться.

Померанцев, работа которого тоже представляет особенность, испортил совершенно свою работу тем, что воспользовался схваченным со стороны значением, хотя сам дальше справился с нахождением этого значения.

Наличие ошибок не позволяло признать работы удовлетворительными, но не могло служить бесспорным доказательством неподготовленности абитуриентов.

В самом деле, абитуриенты делали ошибки в таких вопросах, решение которых, без сомнения, было им известно, например, делались ошибки в нахождении 2 производных, тогда как до Рождества ученики исполняли работы, где требовалось нахождение производных для 4—5 сложных функций, и эта работа исполнялась в течение 40 мин. Кроме того, все ученики проделывали задачи на доске, причем затруднений не встречали.

Это доказательство и создавало во мне убеждение, что ученики, исполнившие задачу неудовлетворительно, на самом деле обладают большими познаниями, чем это кажется при рассмотрении только экзаменационных работ. Ввиду того я решил войти в педагогический совет с ходатайством о допущении абитуриентов, исполнивших работу неудовлетворительно, к устным испытаниям в целях проверить еще раз подготовку учеников и выяснить, почему ученики делали ошибки такого рода, какие трудно было ожидать.

VI. Предложение директора Оренбургской гимназии Н. А. Синицына по методике преподавания математики (ГАОО. Ф. 79. Оп. 1. Д. 155. Л. 17 об. — 18 об.)

Директор Н. А. Синицын поднял вопрос об улучшении учебно-воспитательных дел в гимназии. Принимая во внимание факты за прошлый учебный год, по мнению директора, следует прежде всего остановиться на математике. На выпускном экзамене 50% получили неудовлетворительные отметки по тригонометрии. Очевидно, у учеников VIII класса не было выработано достаточных навыков по самостоятельному решению задач.

Чтобы приучить учеников данные работы выполнять действительно самостоятельно, необходимо, по крайней мере на первое время, никаких баллов не выставять, чтобы таким образом из опасения получить дурную отметку у

учащихся не было стремления пользоваться чужим трудом. При незначительном количестве времени (5—20 минут) большинство, разумеется, не будут в состоянии доводить решение данных задач до конца, но зато у учеников постепенно выработается привычка к быстрому определению общего хода и плана решения задач, что, несомненно, и имеет особенно важное значение; механические выкладки уже дело второстепенное.

Изложив в общих чертах свои замечания, господин директор просил преподавателя математики Чеснокова, если он найдет возможным, представить свои соображения по данному вопросу к одному из ближайших заседаний педагогического совета.

Н. М. Новак

**Журнал «Записки математического кружка
при Оренбургском реальном училище»
как отражение уровня математического образования
в Оренбургской губернии в начале XX века**

Благодаря сохранившимся в научной библиотеке им. Н. К. Крупской Оренбурга выпускам журнала «Записки математического кружка при Оренбургском реальном училище» мы можем судить о реальном уровне математического образования в Оренбургской губернии в начале XX века.

Приведем некоторые материалы, опубликованные в 4-м выпуске, состоявшемся в 1906/07 учебном году. Обложку этого журнала вы видите на рисунке 1. Из него выбраны небольшие заметки членов кружка Ф. Сачкова и В. Ильина и решение задачи, помещенной в предыдущем выпуске.

Мы позволили себе изложить материал современным русским языком, стараясь сохранить стиль и смысл, вложенный в него авторами. Воздержимся от каких-либо ком-

ментариев по поводу методики решения задач, не будем обсуждать математическую строгость доказательств. (Это-му посвящены другие наши работы.) Дадим возможность читателю самому сделать некоторые выводы, поразмышлять, погрузившись в мир оренбургских математиков, от которых нас отделяет целый век.

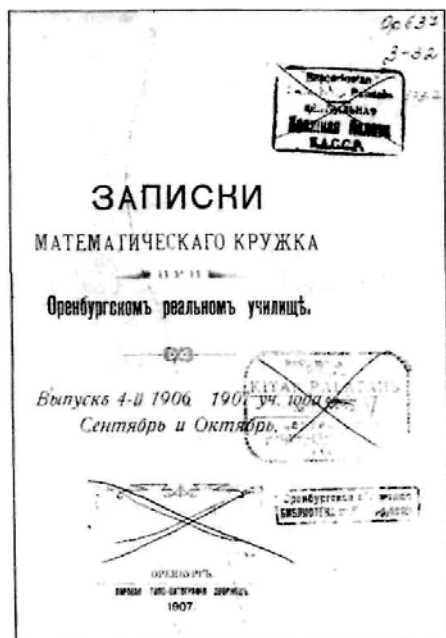


Рис. 1

Ф. Сачков. Прибор Малассиса для измерения высот

Для измерения высоты какого-либо предмета, например башни, существует несколько элементарных способов. (См. «Сборник геометрических задач» Минина. Зад. № 82—85).

Для этой же цели недавно придуман Малассисом особый инструмент весьма несложной конструкции. Он состо-

ит из двух взаимно перпендикулярных линейек AB и CD (см. рис. 2), причем $BD=CD$ и $AD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}CD$.

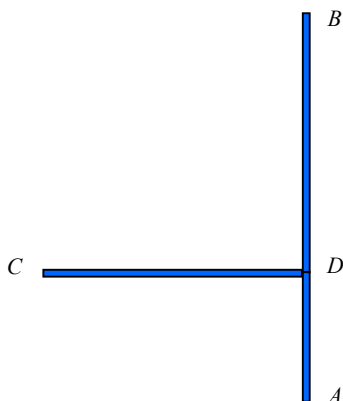


Рис. 2

Чтобы определить с помощью такого прибора высоту, скажем, башни, следует поступить так: находят с какой-нибудь стороны башни ровное место и от основания башни провешивают прямую SN (рис. 3).

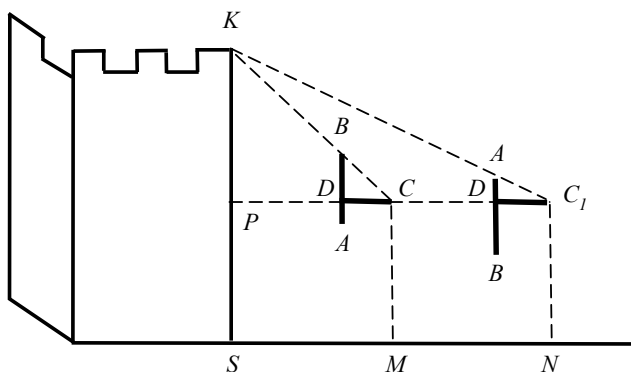


Рис. 3

Далее, держа прибор так, чтобы линейка AB была обращена вверх концом BD , а $CD \parallel SN$, находят на прямой SN

такое место, чтобы точки C , B и вершина K башни находились на одной прямой.

Тогда $\triangle CBD \simeq \triangle CKP$. Раз $BD = CD$, то $CP = PK$. Из точки C опустим перпендикуляр на SN и заметим его основание — точку M .

Затем, повернув прибор вверх концом A , и, расположив линейку CD в той же горизонтальной плоскости, отходят по линии SN дальше, пока точки C , A и K не будут находиться на одной и той же прямой.

Теперь $\triangle C_1AD \simeq \triangle KC_1P$, $C_1D = 2AD$. Следовательно, $C_1P = 2KP$. Но мы уже нашли, что $CP = PK$. Поэтому $CC_1 = KP$. Из точки C_1 опустим перпендикуляр на SN и отметим его основание — точку N . Измерив расстояние $MN = CC_1$ и прибавив к нему $C_1N = PS$, найдем высоту башни KS .

Произведенные мною измерения с помощью описанного прибора дали хорошие результаты.

Ф. Сачков

В. Ильин. Одно из доказательств теоремы о пределе частного

В. Ильин предлагает доказательство теоремы о пределе частного, которое, несмотря на его простоту и изящество, нам удалось найти лишь в записках по дифференциальному и интегральному исчислению П. Рощина.

Заметим, что эта книга представляет собой в настоящее время библиографическую редкость.

Редакция

Предел частного двух переменных величин равен частному их пределов.

Возьмем переменные величины $\frac{a}{b}$ и b и на основании теоремы о пределе произведения переменных величин напишем:

$\lim\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) = \lim \frac{a}{b} \cdot \lim b$, но ведь $\frac{a}{b} \cdot b = a$, следовательно,

$$\lim a = \lim \frac{a}{b} \cdot \lim b, \text{ откуда } \lim \frac{a}{b} = \frac{\lim a}{\lim b}.$$

Решение задач

№ 12 $x + y = 72$
 $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6$

Решаем систему уравнений способом подстановки.

$$x = 72 - y; \sqrt[3]{72 - y} + \sqrt[3]{y} = 6; \sqrt[3]{72 - y} = 6 - \sqrt[3]{y}.$$

Возведем последнее уравнение в куб:

$$72 - y = 6^3 - 3 \cdot 6^2 \cdot \sqrt[3]{y} + 3 \cdot 6 \cdot \sqrt[3]{y^2} - y, \text{ или}$$

$$\sqrt[3]{y^2} - 6\sqrt[3]{y} + 8 = 0.$$

Обозначим $\sqrt[3]{y}$ через z , получим $z^2 - 6z + 8 = 0$.

Отсюда $z = 3 \pm \sqrt{9 - 8} = 3 \pm 1$; $z_1 = 4$; $z_2 = 2$, иначе

$$\left(\sqrt[3]{y}\right)_1 = 4; \left(\sqrt[3]{y}\right)_2 = 2; y_1 = 64; y_2 = 8;$$

$$x_1 = 8; x_2 = 64.$$

Второе решение

Пусть $\sqrt[3]{x} = z$, а $\sqrt[3]{y} = u$, тогда $x = z^3, y = u^3$.

Данные уравнения примут вид:

$$z^3 + u^3 = 72 \quad (1) \text{ и } z + u = 6 \quad (2).$$

Делим уравнение (1) почленно на уравнение (2), получим: $z^2 - zu + u^2 = 12$.

Прибавим к обеим частям последнего уравнения по $3zu$: $z^2 + 2zu + u^2 = 12 + 3zu$, или $(z + u)^2 = 12 + 3zu$, или, наконец, $36 = 12 + 3zu$, откуда $zu = 8$. Решаем это уравнение

совместно с уравнением (2), рассматривая z и u как корни квадратного уравнения:

$$\begin{aligned}t^2 - 6t + 8 &= 0, \\t &= 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1, \\t_1 &= 4; \quad t_2 = 2, \\z &= 4, u = 2 \text{ или } z = 2, u = 4.\end{aligned}$$

Следовательно: $\sqrt[3]{x} = 4$; $\sqrt[3]{y} = 2$, а $x = 64$; $y = 8$, или же $\sqrt[3]{x} = 2$; $\sqrt[3]{y} = 4$, тогда $x = 8$; $y = 64$.

Верные решения прислали: А. Кондратьев, «Радикал», А. Батурин, Ф. Сачков, Куфтин, «Гамаль».

В этом выпуске содержатся и другие задачи, а также обзор погоды за весну 1906 года.

Создание математического кружка, имеющего свой печатный орган, стало возможным лишь благодаря подвижной деятельности преподавателей. Главным организатором и вдохновителем был преподаватель математики Н. Н. Шемянов. Под его руководством с конца 1905 года в Оренбургском реальном училище начали проводиться заседания под названием «Математические вечера для учащихся». В феврале 1906 года было получено разрешение попечителя Оренбургского учебного округа Н. А. Бобровникова на издание ученического журнала «Записки математического кружка при Оренбургском реальном училище».

Известно, что журнал печатала «Паровая типо-литография Дворжець». В течение пятилетнего периода, с 1906 по 1910 год, кружок издал девять выпусков ученического журнала (первые три литографированные, а остальные шесть — печатные).

В 1909/10 учебном году не издано ни одного выпуска «Записок», хотя кружок функционировал. В 1910/11 году,

вследствие крупных изменений в составе педагогического персонала училища, кружок не функционировал в течение всего учебного года.

С начала 1911/12 учебного года педагогический совет училища, озабоченный судьбою математического кружка, как учреждения, в высокой степени полезного в деле развития в учащихся любви к научным занятиям, и желая урегулировать деятельность кружка, разработал устав кружка.

1. Математический кружок при Оренбургском реальном училище имеет целью возбудить в учениках реального училища интерес к физико-математическим наукам и природоведению вообще, развить в них любознательность и желание работать научно, для чего кружок: а) устраивает собрания, на которых членами кружка делаются сообщения по отдельным вопросам этих наук, читаются рефераты, решаются наиболее интересные задачи и пр., б) печатает труды своих членов в форме «Записок кружка», в) приобретает научные сочинения для образования библиотеки и т.п.

2. Членами кружка могут быть только преподаватели учебных заведений г. Оренбурга в качестве действительных членов и ученики старших классов Оренбургского реального училища в качестве членов-сотрудников.

3. Из числа членов, преподающих в Оренбургском реальном училище, действительные члены избирают в общем собрании правление в составе председателя, его заместителя, секретаря и казначея, а также и редакторов издания кружка. Председатель правления есть главный руководитель делами кружка, он председательствует как в правлении, так и вообще во всех собраниях кружка. Секретарь составляет протоколы всех заседаний, годовой отчет и исполняет всю канцелярскую работу кружка. Казначей заведует денежными суммами и имуществом кружка, а также по истечении учебного года представляет отчет о состоянии имущества и о движении сумм.

4. Каждое лицо из числа поименованных в п. 2, желающее поступить в члены, вносит в кассу кружка два рубля в год, ученики же вносят по одному рублю в год, за что

они получают издания кружка за текущий год и пользуются библиотекой кружка, которая находится в помещении реального училища на руках казначея.

5. В собраниях кружка могут присутствовать только члены его. По поводу прочитанных рефератов могут происходить прения, которыми руководит председатель правления. Дни и часы заседаний назначаются правлением кружка, которое составляет также и программы заседаний.

6. Член кружка, желающий сделать доклад на собрании, сообщает конспект доклада секретарю, который доставляет его правлению для внесения в программу ближайшего собрания. В случае предложения нескольких докладов правление распределяет их по очереди и имеет право совершенно отказать в сообщении доклада собранию, если найдет доклад неудобным в каком-либо отношении. При обсуждении вопросов о допущении докладов правление может приглашать специалистов по своему выбору.

В областной научной библиотеке им. Н. К. Крупской сохранилось только несколько выпусков «Записок». Однако и они дают представление о деятельности оренбургских математиков, от которых нас отделяет столетие, о работе, проводимой ими с одаренными учащимися. Ученический математический журнал, печатавшийся в глубокой провинции в начале XX века, — явление поистине уникальное.

В заключение представим несколько страниц журнала, скопированных с выпуска «Записок математического кружка при Оренбургском реальном училище» № 6 за 1911 год.

Нѣкоторыя свѣдѣнія о кружкѣ.

Математическій кружокъ при Оренбургскомъ реальномъ училищѣ существуетъ съ конца 1905 года, когда онъ носилъ названіе „Математическіе вечера для учащихся“. Главнымъ организаторомъ этихъ вечеровъ былъ преподаватель математики *Н. Н. Шемяновъ*.

Въ февралѣ 1906 года послѣдовало разрѣшеніе г. Попечителя Оренбургскаго Учебнаго Округа *Н. А. Бобровникова* на изданіе при реальномъ училищѣ ученическаго журнала подъ названіемъ „Записки математическаго кружка при оренбургскомъ реальномъ училищѣ“.

Подробныхъ свѣдѣній о дѣятельности кружка за періодъ времени съ 1906 г. по 1910 годъ не сохранилось въ дѣлахъ училища, вслѣдствіе чего не имѣется перечня всѣхъ докладовъ и рефератовъ, прочитанныхъ въ засѣданіяхъ кружка за это время.

Въ теченіе пятилѣтняго періода съ 1906 по 1910 г. кружокъ издалъ *девять* выпусковъ ученическаго журнала (первые *три* литографированные и остальные *шесть* печатные).

Приводимъ содержаніе этихъ выпусковъ.

І. Выпускъ пробный. Январь 1906 года.

К. Калабугинъ. Способъ вычисленія діагонали пятиугольника.

Н. Банькинъ Новое доказательство теоремы о биссектрисѣ внутреннего угла треугольника. *К. Калабугинъ*. О гармоническомъ дѣленіи прямой по известному среднему отрезку.—Краткій обзоръ погоды за январь 1906 года (нов. ст.) для г. Оренбурга, по наблюденіямъ метеорологической станціи при училищѣ.

II. Выпускъ первый. Февраль 1906 года.

Д. Фроловъ. Замѣна однихъ геометрическихъ тѣлъ другими, какъ весьма полезный приемъ при рѣшеніи задачъ.

Н.Н. Веняминъ Франклинъ (по поводу 200 лѣтія со дня рожденія). *К. Калабугинъ*. Электрическія явленія въ атмосферѣ.—Краткій обзоръ погоды за январь 1906 г. Библиографія. Задачи.

III. Выпускъ второй. Мартъ 1906 года.

Д. Бѣлявскій. Новое въ „Новой тригонометріи Агапова“.

К. Калабугинъ. Электрическія явленія въ атмосферѣ (продолженіе).

И. Свѣшниковъ. Поверхность блока.—Краткій обзоръ погоды за февраль 1906 г.—Задачи—Рѣшеніе задачъ.

IV. Выпускъ третій. Апрель и май 1906 года.

Л. Лосевъ. Трисекція угла и удвоеніе куба. *К. Калабугинъ*. Электрическія явленія въ атмосферѣ (окончаніе). *Д. Калабугинъ*. Краткій обзоръ погоды за мартъ 1906 г.—Рѣшеніе задачъ. Задачи.—Марсово поле въ г. Оренбургѣ. *Д. Барботкинъ*. Краткій геологическій очеркъ Марсова поля.

V. Выпуск четвертый. Сентябрь и октябрь 1906 года.

Ф. Сачковъ. Приборъ Малассиаса для измѣренія высотъ. *В. Ильинъ.* Теорема о предѣлѣ частнаго.—Рѣшеніе задачъ—Задачи.—Весна 1906 года. *Н.Н.* Библиографія.

VI. № 1. Первая половина 1907—1908 учебного года.

С. Компанейцъ. Объ очень большихъ числахъ. *А. Батуриный.* Замѣтка, касающаяся области примѣненія теоремы Птолемея.—Рѣшенія задачъ. Задачи. К. Весна 1907 г. въ г. Оренбургѣ. *И. Шемяновъ.* Конспективный курсъ тригонометріи. Выпускъ I.

VII. № 2. Первая половина 1907—1908 учеб. года.

Радикаль. Нѣсколько словъ о теоремѣ Агапова. *И. Кайзеръ.* Вычисленіе поверхности и объема шара. Рѣшенія задачъ. Задачи.—Лѣто 1907 г. въ г. Оренбургѣ.

VI. № 3 Вторая половина 1907—1908 года.

Н. Денисенко. Астрономическіе инструменты до изобрѣтенія зрительной трубы.—Рѣшенія задачъ—Задачи, служившія темами для письменныхъ испытаній въ Московскомъ Сельско-хозяйственномъ Институтѣ осенью 1908 года. *Н. Шемяновъ.* Конспективный курсъ тригонометріи. Выпускъ II.

IX. № 4—5 1908—1909 годъ.

П. Кирюшинъ. Солнечныя пятна и явленія, съ ними связанныя. *Берсенева.* Форма земли.—Рѣшеніе задачъ—Задачи. *С. Ржаницынь.* Дополненіе къ теоріи соединеній.

И. В. Игнатушина

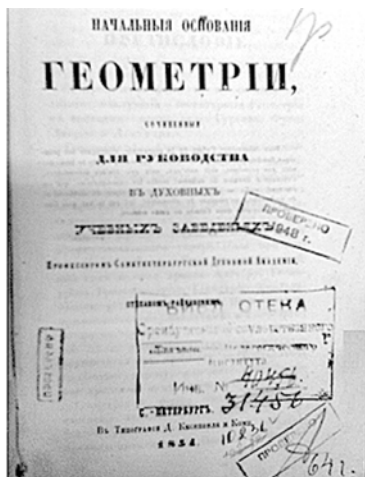
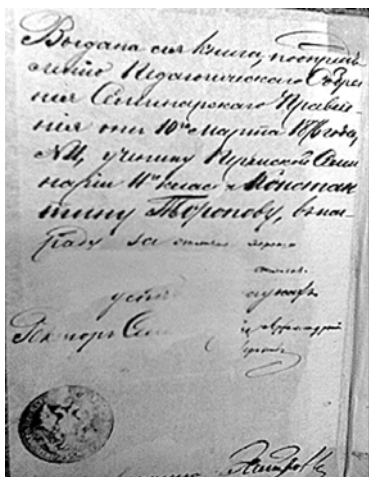
**Константин Александрович Торопов
и математическое образование в Оренбурге**

В мае 2010 года исполнилось 150 лет со дня рождения Константина Александровича Торопова — замечательного математика и педагога, первого профессора Оренбургского института народного образования (ныне Оренбургский государственный педагогический университет), автора ряда работ по вопросам преподавания математики, оригинальных учебников и исследований по математическому анализу.



Константин Александрович родился в семье священника 12 мая 1860 г. в селе Калиновском Камышенского уезда, Пермской губернии [1]. О годах его детства, к сожалению, известно очень мало. По дарственной надписи, сделанной на книге «Начальные основания геометрии, сочиненные для руководства в духовных учебных заведениях» [2], принадлежавшей К. А. Торопову (сейчас находится в фонде редкой книги библиотеки Оренбургского государственного педагогического университета), удалось установить, что Константин Александрович обучался в Пермской духовной

семинарии. Благодаря упорству, целеустремленности и обладая хорошими способностями, он стал одним из лучших ее учеников.



Форзац книги «Начальные основания геометрии, сочиненные для руководства в духовных учебных заведениях» с дарственной надписью:

«Выдана сия книга по одобрению Педагогического Собрания Семинарского Правления от 10 марта 1876 года №11 ученику Пермской Семинарии 11 класса Константину Торопову в награду за отличн... и за отличные успехи в науках. Ректор Семинарии»

В 1878 г. Константин Александрович поступил в Петербургский университет на физико-математический факультет. Большое влияние на формирование его как математика-педагога оказала знаменитая Петербургская математическая школа, возглавляемая Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821—1894). В Петербургском университете тогда преподавали видные ученые профессора Пафнутий Львович Чебышев, Андрей Андреевич Марков (1856—1886), Александр Николаевич Коркин (1837—1908), Константин Александрович Поссе (1847—1928), Иосиф Иванович Сомов (1815—1876), Юлиан Васильевич Сохоцкий (1842—1929), Егор Иванович Золотарев (1847—1878) и др.



Профессора физико-математического факультета. 1868 г. Слева направо сидят: Л. В. Советов, П. Л. Чебышев, К. Ф. Кесслер, Л. Н. Савич, Н. Л. Пузыревский, Ф. В. Овсянников, А. Н. Бекетов; стоят: Р. Э. Ленц, Н. Л. Ментушкин, А. С. Фамицын, И. И. Сомов, Ф. Ф. Петрушевский, Д. И. Менделеев, А. Н. Коркин

К. А. Торопов уже с третьего курса университета включился в научную работу. Его интерес сосредоточился в основном на вопросах, связанных с интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений. В 1883 г. Константин Александрович окончил университет со степенью кандидата математических наук за сочинение «Интегрирование алгебраических иррациональных дифференциалов в конечном виде (частный случай)». Указанную выпускную работу К. А. Торопов выполнял под руководством профессора математики К. А. Поссе, который 11 февраля 1883 г. дал на нее следующее заключение: «Диссертацию г. Торопова признаю вполне удовлетворительной и заслуживающей большого одобрения» [3, с. 70].

Ввиду выдающихся успехов в математике К. А. Торопов был оставлен при университете для подготовки к про-

фессорскому званию. Два года он работал при университете, сдал магистерские экзамены и опубликовал ряд работ. Среди них «Интегрирование некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений» (1884) и «Об интегрировании в конечном виде одного класса дифференциалов» (1885) [4], опубликованные математическим обществом при Харьковском университете.

Так, во второй из них было рассмотрено несколько видов алгебраических иррациональных дифференциалов, интегрирующихся в конечном виде. Дифференциалы эти содержат под знаком корня полиномы третьей или четвертой степени, или отношение квадратных полиномов, а следовательно, не интегрируются в логарифмических и алгебраических функциях.

Один из таких дифференциалов принадлежит классу, который характеризуется тождеством: $f(x)dx = f\left(\frac{I}{x}\right)d\left(\frac{I}{x}\right)$, другие приводятся посредством простейших преобразований к дифференциалам этого класса.

Здесь Торопов последовательно доказывает, что в конечном виде интегрируются дифференциалы следующих видов:

$$1) f\left(x, \sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}\right)dx;$$

$$2) f\left(x, \sqrt[3]{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}\right)dx;$$

$$3) F\left(\sqrt[n]{\frac{ax^2 + bx + a}{\alpha x^2 + \beta x + \alpha}}, \sqrt[m]{\frac{ax^2 + bx + a}{\alpha x^2 + \beta x + \alpha}}, \dots\right)f(x)dx, \text{ где } F —$$

знак рациональной функции и $m, n, \dots \in \mathbb{Q}$;

$$4) F\left(\sqrt[m]{A + \sqrt[n]{B + \sqrt[p]{C + \dots + \sqrt[s]{\frac{ax^2 + bx + a}{\alpha x^2 + \beta x + \alpha}}}}}\right)f(x)dx, \quad \text{где}$$

F — знак рациональной функции и $m, n, p, \dots, s \in \mathbb{Q}$;

$$5) F \left(\frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{I + x}, \frac{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \alpha}}{I + x} \right) f(x) dx, \text{ где } F —$$

знак рациональной функции.

В эти годы Константин Александрович увлекся политической деятельностью, его волновали вопросы общественной жизни. Тогда же министр народного просвещения Делянов начал беспощадную борьбу с революционным движением. Поэтому, несмотря на то, что магистерская диссертация К. А. Торопова была высоко оценена оппонентами, он не был допущен к защите и отчислен из университета ввиду полученного отзыва о его политической неблагонадежности.

После этого К. А. Торопов не мог получить место работы в средней школе и был вынужден поступить на службу в качестве счетовода в контору Пермской железной дороги.

Только 18 декабря 1886 г. он наконец получил место сверхштатного преподавателя математики в Пермской мужской гимназии и с этого времени непрерывно преподавал математику в разных учебных заведениях:

- вначале в г. Перми (с 1886 по 1888 г. — в Пермской мужской гимназии, а с 1888 по 1890 г. — в Мариинской женской гимназии) [5];

- потом по неизвестным обстоятельствам он покидает Пермь и преподает математику в Красноуфимском реальном училище (1890—1892);

- в 1892 г., вернувшись в Пермь, получает место преподавателя математики в Пермском Алексеевском реальном училище и работает в нем до лета 1901 г., после чего навсегда уезжает из Перми;

- с 1901 по 1908 г. преподает в Таганрогском техническом училище;

- с 1908 по 1910 г. — в Белебеевском реальном училище;

- с 1910 до июня 1933 г. — в г. Оренбурге.



Здание правления Пермской железной дороги



Здание Пермской мужской гимназии

Отдавая всего себя педагогической деятельности, Константин Александрович продолжал свои научные изыскания. Так, в 1887 г. он опубликовал работу «О приведении гиперэллиптических интегралов к эллиптическим» [6], на-

печатанную в Перми в типографии губернской земской управы.

Напомним, что гиперэллиптическим интегралом называется интеграл вида $\int R(x, \omega) dx$, где R — рациональная функция от переменных x , ω , связанных алгебраическим уравнением $\omega^2 = P(x)$. Здесь $P(x)$ — многочлен степени $n \geq 5$ без кратных корней. В случае, когда n равно 3 или 4, получаются эллиптические интегралы.

В указанной работе представлен подробный анализ литературы, имеющейся на тот момент по данной проблеме, и рассмотрен еще один возможный случай сведения гиперэллиптических интегралов к эллиптическим.

К. А. Торопов немало сделал в педагогике и методике преподавания математики. Как человек большой эрудиции, он был хорошо знаком с различными методическими идеями того времени и постоянно находил новые пути в преподавании математики. Свой педагогический опыт Константин Александрович отразил в журнальных статьях и учебниках. Так, в 1894 г. в Перми им был опубликован «Краткий курс прямолинейной тригонометрии» [7], в котором была предложена интересная теория решения треугольников. Отзывы об этом учебнике были напечатаны в журналах «Педагогический сборник» (1894, № 12), «Журнал Министерства народного просвещения» (1893, № 1), а также в газете «Русские ведомости» (1904).

Впоследствии Константин Александрович развил дальше общую теорию решения треугольников и результаты исследования опубликовал в 1908 г. в своей книге «Магический ряд и применение его к решению задач»* [8], вышедшей из печати в Таганроге. Второе издание этой книги [9] вышло в 1911 г. в Оренбурге, а затем еще раз было переиздано в 1922 г. под названием «Конспективный курс прямолинейной тригонометрии» [10]. Предложенный им

* В сборнике приведен полный текст этой работы [см. приложение] и имеется отдельная статья о ней.

метод решения треугольников вошел в полный курс тригонометрии С. И. Новоселова [11, с. 387] под названием «Общий принцип Торопова решения треугольников».

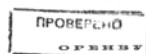
К. Тороповъ.

Магическій рядъ

и примѣненіе его къ рѣшенію задачъ.



Изданіе второе, исправленное и дополненное.



ОБЪЕМЪ
ТИПО-ЛИТОГРАФИЯ С. И. ТРОФИМОВЪ, КУСАНОВЪ И К-О.

1911.

К. А. Торопов неоднократно выступал с предложениями по улучшению существующих учебных программ средних учебных заведений. В частности, при анализе программы по алгебре для реальных училищ он обращает внимание на неравномерность распределения материала: «...курс алгебры III класса очень велик, курс IV класса — очень мал, курс V класса — очень обширен и разнообразен, курс VI класса очень краток» [11, л. 25]. Константин Александрович предлагает следующую перестройку курса алгебры: «В III классе проходят четыре отдела над целыми и дробными рациональными выражениями, отделы о решении пропорций и решении уравнений первой степени с одним неизвестным. В IV классе проходят статьи: об извлечении

квадратных корней с предварительной статьей о возведении в квадрат многочленов и чисел, о квадратных уравнениях с одним неизвестным и о решении уравнений первой и второй степени. В V классе проходят отделы: о действиях над иррациональными выражениями, о количествах с отрицательными и дробными показателями, о логарифмах и предварительной статьей о прогрессиях. Если в VII классе в большинстве случаев только повторяют, то в VI классе проходят статьи: исследование различных задач, приводящих к рациональным выражениям в виде второй степени, включая сюда решение неравенств первой и второй степени, нахождение наибольших и наименьших значений трехчлена второй степени, статьи о непрерывных дробях и решение в целых числах неопределенных уравнений. Что касается статей о соединениях и биноме Ньютона, то это, по моему мнению, можно выкинуть из курса средних учебных заведений» [12, л. 25].

Такое изложение материала было отражено в «Элементарной алгебре» [13], предназначенной для учеников реальных училищ, которую К. А. Торопов опубликовал в 1900 г. Интересно отметить, что раздел «Соединения и бином Ньютона» здесь присутствует в п. 13. Кроме того, имеется раздел «Уравнения высших степеней» (п. 15), в котором рассматриваются следующие вопросы: биквадратные и трехчленные уравнения, симметрические уравнения, теорема Безу, понижение степени уравнения, преобразование уравнений.

В 1910 г. Константин Александрович вместе с женой Клавдией Матвеевной переехал в Оренбург. О его семье почти никаких сведений не сохранилось. Известно только, что в семье Тороповых было четверо детей: три дочери (Эмилия, 1887 г. р.; Татьяна, 1891 г. р.; Ирина, 1894 г. р.) и сын Александр (1888 г. р.) [14, с. 26]. Все дети получили достойное образование. Об этом можно судить, опираясь на текст из прошения, которое К. А. Торопов подавал, находясь в Оренбурге: «В заключение осмеливаюсь беспокоить Ваше Превосходительство просьбой pro domo sua (личная

просьба) — о представлении моим двум дочерям мест преподавательниц в младших классах местных гимназий, одной — русского языка и другой — арифметики. Просьба вызывается материальными соображениями, так как мне приходится содержать семейного сына студента и двух дочерей, обучающихся в Петербурге» [15, л. 34]. Его вторая дочь Татьяна Константиновна Торопова (1891—1933) окончила Таганрогскую женскую гимназию, имела звание домашнего учителя. В 1913 г. была преподавателем чистописания и рисования Ирбитской Мариинской женской гимназии [14, с. 256]. Не позднее 1919 г. переехала в Оренбург.

В Оренбурге педагогическая деятельность К. А. Торопова продолжилась в реальном училище, куда он был назначен на должность директора. В то время здесь успешно работал математический кружок. На его заседаниях выступали как преподаватели, так и учащиеся. Лучшие доклады печатались в журнале «Записки математического кружка при Оренбургском реальном училище» (1906—1913). Константин Александрович на протяжении нескольких лет был председателем этого кружка и выступал с различными докладами перед его членами. Так, в 1911—1913 гг. им сделаны сообщения на следующие темы:

1. Роль математики в естествознании.
2. Памяти отца русской науки М. В. Ломоносова.
3. О Фермате (1601—1665) и его трудах.
4. Извлечение кубических корней и решение кубических уравнений по способу П. И. Свешникова (с историческим очерком вопроса о решении уравнений с одной неизвестной).
5. О решении одной системы неопределенных уравнений и о составлении таблицы для вычисления дня празднования Пасхи (с изложением сведений из пасхалий).
6. Доказательство великого предложения Фермата, предлагаемое М. И. Буниним.
7. Об исключении неизвестных из двух уравнений, когда одно из этих уравнений линейное или квадратное, а другое какой угодно степени.

8. О брошюре Вл. Молчанова «Нет в арифметике тройных правил! Долой способ приведения к единице!».



Здание Оренбургского реального училища на ул. Николаевской
(ныне физико-математический лицей на ул. Советской, 24)

В номерах 6—10 «Записок математического кружка при Оренбургском реальном училище» за 1911—1913 гг. Константин Александрович опубликовал ряд работ по математике и методике ее преподавания, например:

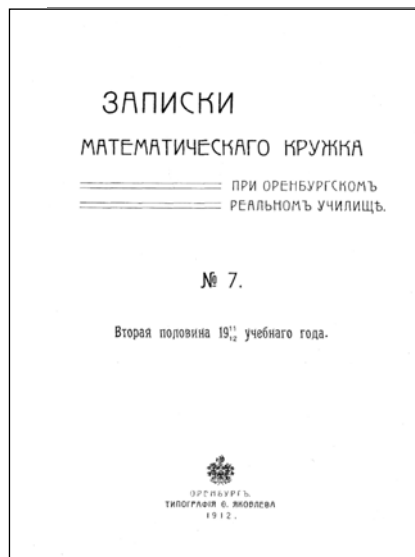
1. Геометрическое представление кратной прогрессии и предела суммы членов бесконечно убывающей прогрессии [16].

2. К вопросу о вычислении корней кубического уравнения [17].

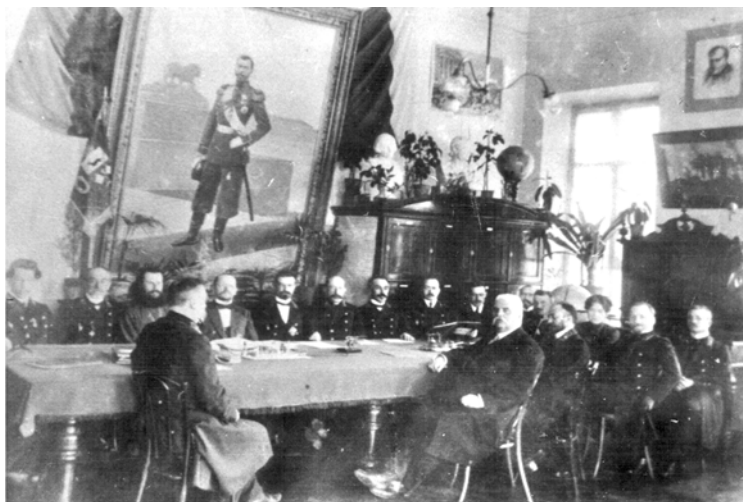
3. О вычислении дня празднования Пасхи по юлианскому календарю [18].

4. Из архивной пыли [19].

5. О преобразовании алгебраической дроби в сумму дробей [20].



Журнал «Записки математического кружка при Оренбургском реальном училище»



Заседание педагогического совета Оренбургского реального училища. 1913 г. Слева направо: А. П. Токмаков, А. С. Лазов, К. С. Добро-

вольский, св. В. Евфарицкий, К. А. Торопов, С. И. Трухин, Пенкин, З. А. Линне, Сперанский, С. А. Зубарев, В. А. Иванов, Никольская, В. П. Виноградов, А. А. Венстрем, А. Ф. Виноградов, Богачев, Л. Л. Курашкевич.

К. А. Торопов вел большую общественную работу, выступал на различных совещаниях учителей, был руководителем Оренбургского педагогического общества, читал публичные лекции по педагогике и методике преподавания математики. Первого января 1912 г. Константин Александрович произведен в чин действительного статского советника [14, с. 26]. После революции возглавлял комиссию по составлению новой программы по математике для средних учебных заведений.

При этом он продолжал свои научные изыскания. Так, в 1916 г. вышла в свет его работа «Об одном линейном дифференциальном уравнении второго порядка» [21], которая была посвящена уравнению:

$$y'' = \frac{y' f'(x)}{f(x)} + y f^2(x).$$

Его общее решение К. А. Торопов представил в следующем виде:

$$y = M \int f(x) dx + N^{-1} \int f(x) dx,$$

где M и N — произвольные постоянные ($M = \frac{1}{2} e^{c_1}$,

$$N = \frac{1}{2} C e^{-c_1}).$$

В 1919 г. был создан Оренбургский институт народного образования (ОИНО), на базе которого в дальнейшем организован педагогический институт (ныне Оренбургский государственный педагогический университет) [22, с. 26].

Преподавателями физико-технического отделения института стали квалифицированные педагоги, ранее работавшие в учебных заведениях Оренбурга. Среди них был К. А. Торопов, его сын Александр Константинович (1888 г. р., преподавал в ИНО высшую математику), Алексей Федорович Вино-

градов (1876 г. р., преподавал в ИНО физику, заведовал физическим кабинетом и лабораторией), Иван Михайлович Чубинский (1887 г. р., в ИНО вел лекции и практические занятия по введению в математический анализ), Александр Прокопьевич Токмаков (1881 г. р., в ИНО вел занятия по элементарной математике, астрономии и методике преподавания математики) [23—25]. В этом же году Народный комиссариат просвещения Киргизской ССР присвоил К. А. Торопову звание профессора математики. Помимо чтения лекций и ведения практических занятий по математике, высшей алгебре и тригонометрии Константин Александрович заведовал факультетской физико-математической библиотекой, большую часть которой составляли его личные книги.



Здание Института народного образования на ул. Кривцовской (современный Дворец бракосочетания на ул. Пионерской, 11)

Весной 1919 г. по инициативе группы инженеров в Оренбурге был открыт политехнический техникум. Через год он преобразован в институт [26]. С 1919 г. и до закры-

тия в 1923 г. К. А. Торопов являлся ректором этого учебного заведения [3, с. 71].



Здание мужской гимназии, которое в 1932 г. было предоставлено
Институту народного образования
(ныне здание I учебного корпуса ОГПУ, ул. Советская, 19)

В 1930 г. была организована кафедра математики в составе физико-технического отделения Татаро-Башкирского педагогического института г. Оренбурга (заменившего Оренбургский ИНО). Её возглавил первый штатный профессор института К. А. Торопов [27, с. 3].



Первый выпуск студентов ОГПИ физико-математического
факультета, 1933 г.

В последнее десятилетие своей жизни Константин Александрович опубликовал ряд интересных работ по методике преподавания математики в «Вестнике просвещения Оренбургского губернского отдела народного образования» [3, с. 71].

Константин Александрович скончался 26 июня 1933 г.

Около полувека К. А. Торопов преподавал математику. Тысячи учителей получили математическую и методическую подготовку под его руководством.

О нем сохранились воспоминания как о прекрасном преподавателе и бескорыстном человеке. Так, К. А. Степанова рассказывала, что ее мать Раиса Васильевна Овчинникова (преподаватель математики в Оренбурге в 1920-х годах) в детстве брала уроки у К. А. Торопова. Константин Александрович определил большие способности девочки, рекомендовал продолжать заниматься математикой и, учитывая тяжелое материальное положение ее матери-вдовы, отказался от вознаграждения за уроки. Р. В. Овчинникова впоследствии окончила курсы при Московском университете и стала учителем математики.

Роль К. А. Торопова в жизни Оренбургского педагогического вуза была охарактеризована в юбилейной речи директора института А. А. Чарышева «Пять лет работы Татаробашкирского пединститута», произнесенной 1 июня 1935 г.: «Торопов много работал по организации кафедры математики, и много помогал своим опытом и знаниями в разрешении научных проблем. Он любил институт и, несмотря на свои преклонные годы, усердно работал на благо института. Свою богатую библиотеку он перед своей смертью завещал институту. И доньине знавшие его студенты вспоминают его с большим уважением» [28, с. 2—3].

Среди ближайших сотрудников К. А. Торопова были Александр Прокопьевич Токмаков (1881—1962), Анна Александровна Зырянова (1886—1957), Иван Михайлович Чубинский (1887—?) и др.



Александр Прокопьевич Токмаков (1949 г.)

Александр Прокопьевич Токмаков родился в 1881 г. в деревне Крещеная Ялтань Чистопольского уезда [29, л. 1]. Семья была большая — отец Прокопий, мать Татьяна и двенадцать детей.



Братья Токмаковы Александр и Георгий со своей матерью

В возрасте семи-восьми лет Александр стал посещать церковно-приходскую школу. В то время правительство регулярно посылало в эти районы учителей и чиновников для набора наиболее способных детей в возрасте 10—11 лет для зачисления в пансионы при учительских и духовных семинариях, в которых учащиеся содержались за счет государства. В результате специальных испытаний в 1867 г. в пансион был принят старший брат Александра Прокопьевича — Георгий, а в 1892 г. — и сам Александр.

В пансионе при подготовке к поступлению в семинарию занимались по программе, близкой к гимназической. Оба брата успешно окончили учительскую семинарию.

В 1878 г. Георгий Прокопьевич был назначен заведующим школой для детей кочевников в г. Илеке. За лето с рабочими и будущими школьниками Г. П. Токмаков построил кирпичную школу и пансион. В этой школе он проработал около тридцати лет.

После окончания духовной семинарии в 1903 г. Александр Прокопьевич был направлен в духовную академию. Затем в 1910 г. он окончил, согласно «Памятной книге Оренбургского учебного округа на 1915 г.», «Императорский Московский университет [14, с. 22], а по воспоминаниям его сына — Казанский университет [29, л. 5].

После окончания университета А. П. Токмакова направили в Красноуфимск, потом определили место жительства Шадринск, затем — Оренбург. В Красноуфимске и Шадринске Александр Прокопьевич работал преподавателем математики в гимназии. В Шадринске он познакомился со своей супругой — Анной Антоновной (1892—1923).

Не позднее 1913 г. молодая семья переехала в Оренбург, куда А. П. Токмаков был назначен преподавателем реального училища. В 1916 г. у Александра Прокопьевича появился сын Георгий.

С 1918 по 1921 г. семья Александра Прокопьевича жила в Шадринске и Кокчетаве, где Токмаков работал преподавателем. В 1921 г. А. П. Токмаков с семьей вернулся в Оренбург. Вскоре после приезда его назначили заведую-

щим школой № 6. Параллельно с этим его пригласили в качестве преподавателя мироведения, математики и методики преподавания математики в Институт народного образования.

В 1926 г. А. П. Токмаков был назначен директором индустриального техникума, который в то время располагался на улице Советской, через один дом от бульвара на берегу Урала [29, л. 8]. Днем Токмаков вел занятия по математике в техникуме, а вечером читал лекции в педагогическом институте (ИНО).



Александр Прокопьевич Токмаков со студентами
третьего курса физико-математического факультета на практике
в школе № 12 (1955 г.)

Лабораторные занятия по методике преподавания математики и астрономии А. П. Токмаков организовал следующим образом. В присутствии студентов он проводил уроки в средней школе сам. Затем студенты анализировали их, отмечая достоинства и недостатки.

Проводя такие занятия, постоянно общаясь с учениками и их учителями, Александр Прокопьевич выявлял наиболее способных ребят и рекомендовал поступать им в педагогический институт или в индустриальный техникум.

Не позднее 1927 г. Александр Прокопьевич женился во второй раз. Его женой стала Ольга Ивановна Коршунова (впоследствии известный врач-педиатр). Вскоре у них появилась дочь Татьяна.

В 1932—1933 гг. А. П. Токмаков работал в Москве. Он читал курсы высшей математики в различных технических вузах (Станлине, Институте связи, Государственном электромеханическом институте).

С 1934 г. и практически до самой смерти А. П. Токмаков работал в Оренбургском педагогическом институте.

Анна Александровна Зырянова родилась в Оренбурге 13 ноября 1886 г. [30]. Когда ей было шесть лет, умер ее отец — Зырянов Александр Николаевич. Чтобы прокормить шестерых детей, ее мать — Мяснинова Александра Львовна — приняла решение переехать в деревню, где устроилась учительницей в сельскую школу. В эту же школу пошла учиться и Анна. После окончания сельской школы она поступила в первую Оренбургскую женскую гимназию, которую окончила в 1908 г. с золотой медалью.

В том же году она стала преподавать математику и физику в частной второклассной школе им. Ивановых в Оренбурге. В 1910 г. Анна Александровна перешла учительницей в Оренбургское приходское училище.

Через пять лет она уехала учиться в Москву на физико-математический факультет при Московских Высших женских курсах. Перейдя на третий курс, Анна Александровна из-за тяжелого материального положения была вынуждена вернуться в Оренбург.

С 1917 по 1922 г. А. А. Зырянова преподавала в школах № 8 и № 2 г. Оренбурга. Одновременно вела занятия на подготовительном курсе в сельскохозяйственном институте.

В 1922 г. Кирнаркомпрос командировал Анну Александровну в Первый Московский Государственный уни-

верситет для завершения высшего образования. В 1924 г. А. А. Зырянова окончила физико-математический факультет 1-го МГУ по специальности математика.



Анна Александровна Зырянова,
50-е годы XX века

С 1924 по 1930 г. Анна Александровна преподавала в школе № 1 второй ступени им. Т. Г. Шевченко г. Оренбурга. С 1930 по 1932 г. вела занятия на рабфаке. В то же время А. А. Зырянова была приглашена в институт усовершенствования учителей для работы в математической секции. Она держала тесную связь с учителями города и области, выступала с докладами на городской секции учителей математики, оказывала им помощь.

В 1931 г. Анна Александровна принята преподавателем на кафедру математики в пединститут (тогда Оренбургский татаро-башкирский госпединститут). Здесь она читала курс методики преподавания математики, а также вела занятия по элементарной математике и руководила педагогической практикой студентов. После смерти К. А. Торопова Анна Александровна некоторое время исполняла обязанности заведующего кафедрой [30, с. 3—4]. С 1934 по 1938 г. работала в Высшей сельскохозяйственной школе.

С 1938 г. и до конца жизни Анна Александровна трудилась в Оренбургском педагогическом институте. Тысячи учителей нашей области считают себя воспитанниками А. А. Зыряновой и с благодарностью вспоминают ее.

Иван Михайлович Чубинский родился 18 мая 1887 г. в г. Короча Курганской губернии [31]. Его отец Михаил Афанасьевич Чубинский в то время был преподавателем математики в Корочанской гимназии. В 1892 г. отца перевели на ту же должность в г. Воронеж.

В 1891 г. четырехлетнего Ивана отдали в частную школу для приготовления к поступлению в Воронежскую гимназию. Когда мальчику было семь лет, умерла его мать Вера Ивановна. Его отец был переведен инспектором в Новочеркасскую гимназию. Отец женился вторично в 1899 г.

Окончив в 1905 г. Новочеркасскую гимназию с серебряной медалью, Иван поступил в Петербургский университет на физико-математический факультет.

В 1911 г. И. М. Чубинский получил из университета выпускное свидетельство. Государственные экзамены он держал зимой 1913/14 г. при Харьковском университете. В 1915 г. окончил годичные курсы при Юрьевском университете для подготовки учителей средней школы.

С первого ноября 1915 г. Иван Михайлович начал работу в качестве преподавателя математики первой мужской гимназии г. Оренбурга.

В 1919 г. его приглашают в открывшийся Институт народного образования. Здесь он в основном читал лекции и вел практические занятия по введению в математический анализ. Был первым заведующим физико-технического отделения института [22, с. 28].

С 1921 по 1927 г. Иван Михайлович преподавал в техникуме железной дороги г. Оренбурга, с 1927 по 1929 г. — в школе № 1 второй ступени им. Т. Г. Шевченко г. Оренбурга, в 1929—1931 гг. являлся преподавателем индустриального техникума г. Оренбурга.

Получив назначение на должность доцента кафедры математики Уральского энергетического института, в 1931 году И. М. Чубинский переехал в г. Свердловск. С 1933 по 1934 г. заведовал этой кафедрой. В 1934 г. Уральский энергетический институт как самостоятельное учебное заведе-

ние был закрыт. В том же году умерла жена Ивана Михайловича — Ершова Клавдия Максимовна (преподаватель техникума Оренбургской железной дороги). Детей у них не было. И. М. Чубинский переехал в г. Кунгур (Пермской области), где до 1939 г. преподавал в машиностроительном техникуме.

В 1939 г. Иван Михайлович вернулся в Оренбург и до 1948 г. работал преподавателем математики в государственном педагогическом институте им. Чкалова, затем перешел в зенитно-артиллерийское училище.

Благодаря работе К. А. Торопова и его коллег в математическом образовании Оренбурга был накоплен уникальный педагогико-методический опыт, который остается актуальным и в настоящее время.

Список использованной литературы и архивных источников

1. Бородин, А. И. Выдающиеся математики: Биогр. слов.-справ. / А. И. Бородин, А. С. Бугай. 2-е изд., перераб. и доп. Киев : Рад. шк., 1987. С. 505.
2. Начальные основания геометрии, сочиненные для руководства в духовных учебных заведениях. СПб., 1854.
3. Столяров, Н. А. Константин Александрович Торопов / Н. А. Столяров // Мат. в шк. 1955. № 1. С. 70—71.
4. Торопов, К. А. Об интегрировании в конечном виде одного класса дифференциалов / К. А. Торопов. Харьков : Университетская типография, 1885.
5. Рябухин, В. И. Пермский период жизни и творчества К. А. Торопова / В. И. Рябухин // Внеклассная работа по математике : [учеб. пособие]. Пермь, 1976. С. 124—128.
6. Торопов, К. А. О приведении гиперэллиптических интегралов к эллиптическим. Исследования К. Торопова, преподавателя Пермской гимназии / К. А. Торопов. Пермь : Тип. губ. земской управы, 1887.
7. Торопов, К. А. Краткий курс прямолинейной тригонометрии / К. А. Торопов. Пермь : Тип. губ. земской управы, 1894.
8. Торопов, К. А. Магический ряд и применение его к решению задач / К. А. Торопов. Таганрог : Тип. П. Ф. Каменева, 1908.
9. Торопов, К. А. Магический ряд и применение его к решению задач / К. А. Торопов. 2-е изд., испр. и доп. Оренбург : Типо-лит. т-ва Каримов, Хусаинов, 1911. 50 с.

10. Торопов, К. А. Конспективный курс прямолинейной тригонометрии / К. А. Торопов. Оренбург : Киргосиздат, 1922.
11. Новоселов, С. И. Специальный курс тригонометрии / С. И. Новоселов. М. : Высш. шк., 1967. С. 387.
12. Мнение преподавателя Торопова по вопросу о желательных изменениях программ, распределения учебного материала и числа уроков по математике // Государственный архив Пермского края. Ф. 185. Оп. 1. Д. 141.
13. Торопов, К. А. Элементарная алгебра. Курс средних учебных заведений / К. А. Торопов. Пермь : Тип. губ. земской управы, 1900.
14. Памятная книга Оренбургского учебного округа на 1915 г. Уфа, 1915. С. 22—26.
15. Государственный архив Оренбургской области (ГАОО). Ф. 82. Оп. 1. Д. 135.
16. Торопов, К. А. Геометрическое представление кратной прогрессии и предела суммы членов бесконечно убывающей прогрессии / К. А. Торопов // Записки математического кружка при Оренбургском реальном училище. Оренбург, 1912. № 6 (первая половина 1911—1912 уч. года). С. 32—34.
17. Торопов, К. А. К вопросу о вычислении корней кубического уравнения / К. А. Торопов // Записки математического кружка при Оренбургском реальном училище. Оренбург, 1912. № 7 (вторая половина 1911—1912 уч. года). С. 31—32.
18. Торопов, К. А. О вычислении дня празднования Пасхи по юлианскому календарю / К. А. Торопов // Там же. С. 39—49.
19. Торопов, К. А. Из архивной пыли / К. А. Торопов // Там же. С. 51—54.
20. Торопов, К. А. О преобразовании алгебраической дроби в сумму дробей / К. А. Торопов // Записки математического кружка при Оренбургском реальном училище. Оренбург, 1913. № 8 (первая половина 1912—1913 уч. года). С. 44—49.
21. Торопов, К. А. Об одном линейном дифференциальном уравнении второго порядка / К. А. Торопов. Казань : Типо-лит. Имп. Казанского ун-та, 1916.
22. Оренбургский государственный педагогический университет. История в документах, воспоминаниях и фотографиях / отв. ред. В. С. Болодурин. Оренбург : Оренб. кн. изд-во, 1999. 256+[8] с. ил.
23. Уставы института и штат ИНО (1 октября 1919 г. — 1 декабря 1919 г.) // ГАОО. Ф. 1775. Оп. 1, св. 2. Д. 16.
24. Материалы физико-математического факультета (15 октября 1919 г. — 27 декабря 1919 г.) // ГАОО. Ф. 1775. Оп. 1, св. 2. Д. 18.
25. Список студентов и служащих ИНО за 1919 г. (1 октября 1919 г. — 1 декабря 1919 г.) // ГАОО. Ф. 1775. Оп. 1, св. 2. Д. 25.
26. До столетия ОГУ осталось бы немного... // Университет : газ. Оренбург : ОГУ, 2010. № 33 (1039).

27. Игнатушина, И. В. Кафедра математического анализа и методики преподавания математики Оренбургского государственного педагогического университета (очерк истории) / И. В. Игнатушина. Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2006. 32 с.

28. Кауфман, Б. Л. Из истории кафедр математики Оренбургского государственного педагогического института. Рукопись. Оренбург, 1980. 32 с. // Музей ОГПУ.

29. Воспоминания Токмакова Георгия Александровича о его отце Александре Прокопьевиче Токмакове // Учебно-методический кабинет истории народного образования Оренбургской области при ОГПУ. Ф. 9. Оп. 1. Д. 15. 12 с.

30. Личное дело Анны Александровны Зыряновой. Архив Оренбургского государственного педагогического университета. Ф. 971. Оп. 23. Д. 321.

31. Личное дело Чубинского Ивана Михайловича. Архив Оренбургского государственного педагогического университета. Ф. 971. Оп. 23. Д. 1095.

И. К. Зубова

**Д. В. Агапов — автор учебных пособий
по математике, изданных в Оренбурге
в конце XIX — начале XX века**

Говоря о преподавании математики в Оренбурге в конце XIX — начале XX века, следует обратить внимание на изданный здесь в 1908 году серьёзный библиографический труд Дмитрия Васильевича Агапова «Алфавитный каталог русских книг по математике, вышедших в России с начала книгопечатания до последнего времени» [1]. Автор имеет в виду период с 1682 по 1908 год. Каталог включает 1678 названий учебников, задачников, справочников, научно-популярных изданий для учащихся средних и высших учебных заведений. Он, несомненно, полезен для преподавателя математики и в наши дни [10].

Можно утверждать, что эта работа выходит за рамки учебной литературы и говорит о широкой математической эрудиции автора. Интерес к этому изданию вызвал естест-

венный интерес и к самому Д. В. Агапову, так как он и сам составил 25 пособий по элементарной математике, выпущенных до 1908 года и включенных в его каталог. Большая часть этих книг представляет собой учебники и руководства к решению задач для средних и старших классов и по программе выпускных экзаменов, а также вступительных конкурсных экзаменов в высшие специальные учебные заведения.

В первом разделе каталога, названном «Арифметика», содержится девять названий книг Агапова, во втором — «Алгебра» — пять, в третьем — «Геометрия» — также пять, в четвёртом — «Тригонометрия» — три, и в пятом — «Математика элементарная и высшая» — вновь три названия. Выясняется, что Д. В. Агапов с 1891 по 1927 год активно издавал в Оренбурге математическую литературу. Ниже приводим список его трудов. Сохраняя предложенную им классификацию работ, мы дополняем список названиями, найденными в каталоге Российской государственной библиотеки (РГБ), а также в недавно изданном Оренбургской областной универсальной научной библиотекой им. Н. К. Крупской библиографическом указателе «Оренбургская книга: XIX—XXI вв.» [12].

Арифметика

1. Подробное решение и объяснение наиболее трудных арифметических задач сборника А. Малинина и К. Буренина. Оренбург, 1891. 42 с.

2. Подробное решение и объяснение типических задач по арифметике : для ст. классов сред. учеб. заведений. Оренбург : Типо-лит. Б. А. Бреслина, 1894. 84 с.

3. Подробное решение и объяснение типических задач по арифметике : для ст. классов сред. учеб. заведений. 2-е изд., доп. Оренбург : [скл. изд. у авт.], 1898. 132 с.

4. Подробное решение и объяснение типических задач по арифметике : для ст. классов сред. учеб. заведений. 3-е изд. Оренбург : [гл. скл. изд. у авт.], 1900. 93 с.

5. Подробное решение и объяснение наиболее трудных арифметических задач сборников А. Малинина, К. Буренина и И. Верещагина. Оренбург : [гл. скл. изд. у авт.], 1900. 273 с.

6. Ответы на все вопросы по арифметике и из приложений алгебры к геометрии, помещенные в экзаменационных программах конкурсных испытаний в высшие специальные учебные заведения. Оренбург, 1901. 63 с.

7. Арифметические действия и применение их к решению задач. Оренбург : Типо-лит. Б. А. Бреслина, 1902. 61 с.

8. Подробное решение и объяснение арифметических задач, помещенных в систематическом сборнике В. Арбузова, А. Минина, В. Минина, Д. Назарова. Оренбург : [гл. скл. изд. у авт.], 1902. 142 с.

9. Основы арифметики. Оренбург : [гл. скл. изд. у авт.], 1902. 45 с.

10. Различные способы решения типичных и наиболее употребительных задач по арифметике. Оренбург : [гл. скл. изд. у авт.], 1902. 72 с.

11. Руководство к решению и объяснению арифметических задач на тройные правила. Оренбург : [гл. скл. изд. у авт.], 1902. 120 с.

12. Образцы письменных экзаменационных работ по арифметике. Оренбург : [гл. скл. изд. у авт.], 1902. 79 с.

Алгебра

13. Подробное решение и объяснение наиболее трудных задач алгебры Давидова. Оренбург : [изд. авт.], 1891. 43 с.

14. Подробное решение и объяснение наиболее трудных задач алгебры Малинина и Буренина. Оренбург : [изд. авт.], 1892. 38 с.

15. Искусственные способы решения уравнений второй степени со многими неизвестными. Для старших классов средних учебных заведений / сост. Д. В. Агапов. Оренбург : изд. авт., 1894. IV, 52 с.

16. Искусственные способы решения уравнений второй степени со многими неизвестными. Для старших классов средних учебных заведений. 2-е изд., доп. / сост. Д. В. Агапов. Оренбург : [скл. изд. у авт.], 1899. 64 с.

17. Подробное решение и объяснение наиболее трудных алгебраических задач сборника Ф. Бычкова. Оренбург : Типо-лит. Б. Бреслина, 1900. 105 с.

18. Искусственные способы решения уравнений второй степени со многими неизвестными. Для старших классов средних учебных заведений / сост. Д. В. Агапов. 3-е изд., доп. Оренбург : [гл. скл. изд. у авт.], 1901. 55 с.

19. Подробное решение и объяснение наиболее трудных алгебраических задач сборника Н. А. Шапошникова и Н. К. Вяльцева. Оренбург : [гл. скл. изд. у авт.], 1902. 107 с.

20. Пособие к решению алгебраических задач на составление уравнений. Оренбург : [гл. скл. изд. у авт.], 1902. 78 с.

21. Приложение логарифмов к вычислению сложных процентов и срочных уплат. Оренбург : [гл. скл. изд. у авт.], 1902. 62 с.

22. Новая формула для возведения бинома. Оренбург, 1927.

Геометрия

23. Подробное решение и объяснение наиболее трудных численных задач геометрии А. Давидова. Оренбург : [изд. авт.], 1891. 41 с.

24. Решение некоторых геометрических задач помощью теоремы Агапова: во всяком прямоугольном треугольнике произведение катетов равно произведению полупериметра треугольника на разность между суммой катетов и гипотенузы : для ст. классов сред. учеб. заведений. 2-е изд. Оренбург : [скл. изд. у авт.], 1898. 20 с. : черт.

25. Методы решения треугольников. Для старших кл. ср. учебн. завед. Оренбург : [скл. изд. у авт.], 1899. 96 с.

26. Подробное решение и объяснение 50 геометрических теорем и задач на построение, помещённых в про-

граммах вступительного конкурсного экзамена в высшие специальные учебные заведения. Оренбург : [гл. скл. изд. у авт.], 1901. 35 с., 1 л. черт.

27. Подробное решение и объяснение всех численных задач геометрии А. Давидова. Оренбург : [гл. скл. изд. у авт.], 1902. 180 с.

28. Подробное решение и объяснение наиболее трудных задач геометрии А. Киселёва. Оренбург : Типо-лит. Б. А. Бреслина, 1902. 76 с.

29. Сборник наиболее употребительных геометрических задач на построение и методы их решения. Оренбург : [гл. скл. изд. у авт.], 1902. 92 с., 2 л. черт.

30. Измерение углов линейными мерами и решение треугольников по новой системе Д. В. Агапова. Оренбург : [скл. изд. у авт.], 1908. 43 с. с прибавлением: черт., 1 л. ил.

31. Новые угломеры линейной системы для чертёжных, межевых и других технических работ с объяснением основания их устройства и с указанием употребления. 2-е прибавление к брошюре «Измерение углов линейными мерами». Оренбург : Типо-лит. Б. А. Бреслина, 1908. 8 с., 3 л. черт.

32. Геометрия на новых началах. Без параллельных: система Д. В. Агапова: решение треугольников. Оренбург : Типо-лит. Б. А. Бреслина, 1909. 92 с.

33. Деление данного отрезка прямой на произвольное число равных или пропорциональных частей, с указанием устройства и применения делительной и пропорциональной линейки. Оренбург : Типо-лит. Б. А. Бреслина, 1909. 14 с., 1 л. черт.

34. Измерение углов с помощью угломера линейной системы Д. В. Агапова. Прибавление к брошюре «Геометрия на новых началах». Оренбург : Типо-лит. Б. А. Бреслина, 1909. 22 с., 1 л. черт.

35. Основное понятие об углах. Оренбург : Типо-лит. Б. А. Бреслина, 1909. 15 с., 1 л. черт.

36. Угловой, или копировальный, циркуль: полное описание циркуля с указанием его применений. Оренбург : Типо-литогр. Бреслина, 1911. 12 с.

Тригонометрия

37. Подробное решение и объяснение наиболее трудных задач тригонометрии А. Малинина. Оренбург : [изд. авт.], 1892. 44 с., 1 л. черт.

38. Новая тригонометрия. Решение треугольников с помощью теоремы Агапова. Оренбург : Типо-лит. Б. А. Бреслина, 1894. 124 с.

39. Новая тригонометрия. Решение треугольников помощью одной теоремы. 45 случаев. Для старших классов средних учебных заведений. 2-е изд. Оренбург : [скл. изд. у авт.], 1898. 96 с.

40. Тригонометрические теоремы, формулы и применение их к решению задач: темы для письмен. испытаний с образцами решения их. Оренбург : [скл. изд. у авт.], 1899. 144 с., 3 л. черт.

41. Приложение теории круговых функций к тригонометрии. Методы решения треугольников. Оренбург, 1899.

42. Тригонометрический транспорт с переменной и постоянной степенями точности и с показателем величин тангенсов половин определяемых углов: его теория и применение: тригонометрия на новых началах. Оренбург : [б. и.], 1918. 73 с.

Математика

43. Собрание наиболее трудных задач по математике, служивших темами на испытаниях зрелости во всех учебных округах России, с подробным решением и объяснением их: Вып. 1—4. Оренбург : Тип. Б. А. Бреслина, 1890—1893.

Вып. 1 : Арифметика. 1890. 80 с.

Вып. 2 : Алгебра. 1890. 67 с.

Вып. 3 : Геометрия. 1891. 93 с., 2 л. черт.

Вып. 4 : Тригонометрия. 1893. 88 с., 2 л. черт.

44. Собрание наиболее трудных задач по математике, служивших во всех округах России темами на испытаниях

зрелости в гимназиях и на выпускных экзаменах в реальных училищах, с подробным решением и объяснением их: арифметика, алгебра, геометрия и тригонометрия. 2-е изд. Оренбург : [скл. изд. у авт.], 1898. 132 с., 3 л. черт.

45. Конспект и справочная книжка по математике: формулы, необходимые при решении задач по арифметике, алгебре, геометрии и тригонометрии: темы для письменных испытаний с образцами решения их. Оренбург : Типо-лит. Б. А. Бреслина, 1892—1893.

Вып. 1 : Арифметика. 1892. 50 с.

Вып. 3 : Геометрия. 1892. 52 с.

Вып. 4 : Тригонометрия. 1893. 80 с.

46. Конспект и справочная книжка по математике: формулы, необходимые при решении задач по арифметике, алгебре, геометрии и тригонометрии: темы для письменных испытаний с образцами решения их. 2-е изд. Оренбург : [скл. изд. у авт.], 1898 . VIII, 116 с., 1 л. черт.

47. Конспект и справочная книжка по математике: формулы, необходимые при решении задач по арифметике, алгебре, геометрии и тригонометрии: темы для письменных испытаний с образцами решения. 3-е изд. Оренбург : [гл. скл. изд. у авт.], 1900. VIII, 118 с. 1 л. черт.

48. Собрание задач по математике, служивших темами на испытаниях зрелости в гимназиях и на выпускных экзаменах в реальных училищах, с подробным решением и объяснением их: арифметика, алгебра, геометрия и тригонометрия. 3-е изд. Оренбург : [гл. скл. изд. у авт.], 1900. 176 с., 5 л. черт.

49. Сборник типичных и наиболее трудных задач по арифметике, алгебре, геометрии, тригонометрии и физике, предлагавшихся на конкурсных экзаменах во всех высших специальных учебных заведениях, с подробными решениями и объяснениями. Оренбург : Типо-лит. Б. А. Бреслина, 1901. 196 с.

50. Ответы на все вопросы об арифметике и из приложений алгебры к геометрии, помещённые в экзаменацион-

ных программах конкурсных испытаний в высшие учебные заведения. Оренбург : [гл. скл. изд. у авт.], 1901. 63 с.

51. 1. Новая формула для возведения биномов с производительными коэффициентами в любую степень; 2. Чисто-элементарная формула для определения кривой эллипса; 3. Теорема тангенсов, объединяющая решение треугольников во всевозможных основных и особых случаях: система Д. В. Агапова. Оренбург : [б. и.], 1927. 12 с.

Кроме того, в каталоге РГБ неожиданно встретилось ещё одно произведение Д. В. Агапова: Кто виноват? Драма из современной жизни в 3-х действиях (Оренбург : Типо-литогр. Б. А. Бреслина, 1895. 97 с.). Это небольшая пьеса на морально-нравственные темы, волновавшие городское общество того времени.

Возникло предположение, что Д. В. Агапов был преподавателем математики. Присутствие среди его трудов драматического произведения этому предположению нисколько не противоречит: среди преподавателей довольно часто увлечение художественной литературой, а эта пьеса, возможно, могла найти постановщиков и исполнителей в самодельном домашнем или школьном театре.

Естественно было предположить, что работал такой преподаватель в одном из трёх средних учебных заведений Оренбурга, в которых математика преподавалась на высоком уровне: в Неплюевском кадетском корпусе (до 1844 года — Неплюевское военное училище, открытое в январе 1825 года), классической мужской гимназии, которая открылась в 1868 году, или Оренбургском реальном училище, открытом в 1892 году.

Однако поиски фамилии Д. В. Агапова в адрес-календарях среди фамилий преподавателей учебных заведений города и в делах Государственного архива Оренбургской области (ГАОО) никакого результата не дали. Зато, как это ни удивительно, в адрес-календаре Оренбургской губернии за 1914, а потом и за 1915 год обнаружен титулярный советник Дмитрий Васильевич Агапов, член Оренбургской

губернской контрольной палаты. Остаётся думать, что человек, несомненно, имевший как математическое образование, так и определённую склонность к преподаванию математики, по каким-то причинам в средних учебных заведениях Оренбурга не преподавал. Познакомившись со списком трудов Д. В. Агапова, можно предположить, что он давал частные уроки, например, помогал выпускникам средних учебных заведений готовиться к поступлению в университет.

Следует упомянуть о том, что во 2-м номере «Записок математического кружка при Оренбургском реальном училище» за 1907—1908 учебный год опубликована критическая заметка, касающаяся одной из работ этого автора [11]. Здесь, скорее всего, идёт речь о небольшой (20 страниц) книжке «Решение некоторых геометрических задач помощью теоремы Агапова: “во всяком прямоугольном треугольнике произведение катетов равно произведению полупериметра треугольника на разность между суммой катетов и гипотенузы”». Она предназначалась для старших классов средних учебных заведений и в 1898 году выпущена в Оренбурге уже вторым изданием.

Редактор «Записок математического кружка...» выражает удивление, что эта брошюра переиздаётся, и говорит, что она «может служить ярким образчиком произведения, лишённого тех достоинств, которые склонен приписывать ему автор». Далее приводятся выдержки из статьи, вероятно, одного из преподавателей училища, писавшего под псевдонимом «Радикал», который, разбирая решения задач, предложенных Агаповым, утверждает, что их можно решить и без его теоремы, и даже более рационально, чем с ней. Эта заметка показывает, что преподаватели реального училища не особенно серьёзно относились к методическим находкам Д. В. Агапова.

По документам ГАОО удалось установить, что оренбургские казаки Агаповы были большой и уважаемой семьёй, а её представители — довольно известными в городе и губернии людьми. В опубликованном в 2007 году биогра-

фическом справочнике А. В. Ганина и В. Г. Семёнова «Офицерский корпус Оренбургского казачьего войска» [10] упоминается генерал-майор Василий Васильевич Агапов (1827—1902) из дворян станицы Нижнеозёрной. Он был дважды женат, и Дмитрий Васильевич, родившийся 20 октября 1865 года, — его второй сын от второго брака.

Нам удалось познакомиться с некоторыми работами Д. В. Агапова, находящимися в Государственной научной педагогической библиотеке им. К. Д. Ушинского в Москве. Одна из них — пособие для старших классов средних учебных заведений «Новая тригонометрия. Решение треугольников помощью одной теоремы» [2]. Эта книга была выпущена в 1894 году и переиздана в 1898 году. Речь идёт о следующей теореме:

Произведение разности между полупериметром и стороной треугольника на тангенс половины угла, противолежащего этой стороне, есть величина постоянная для каждого треугольника, равная радиусу круга, вписанного в этот треугольник.

Эта теорема, как следует из текста, была доказана Д. В. Агаповым ранее и уже использовалась им в других работах. В рассматриваемом пособии он приводит её доказательство и выводит из него формулы для решения прямоугольных и косоугольных треугольников. Для прямоугольного треугольника используется уже упоминавшаяся выше теорема:

Во всяком прямоугольном треугольнике произведение катетов равно произведению полупериметра треугольника на разность между суммой катетов и гипотенузой.

Этой теоремой можно воспользоваться, когда требуется определить гипотенузу треугольника по его катетам. Такой путь, по мнению автора, может оказаться предпочтительнее использования теоремы Пифагора, когда приходится работать с большими числами и для упрощения вычислений применять логарифмирование. В предлагаемых Агаповым задачах делать это приходится постоянно. Теоретические сведения занимают всего четыре страницы и представляют собой введение к пособию. Само же оно содержит

86 страниц, на которых изложен подробный разбор 45 случаев решения различных треугольников с помощью выведенных формул. Вместо предисловия в книге помещён отрывок из рецензии, опубликованной в «Журнале Министерства народного просвещения» в 1894 году. К сожалению, отрывок невелик и автор рецензии неизвестен. В ней говорится, что способов решения треугольников без применения формул тригонометрии, а только с применением таблиц синусов, тангенсов или их логарифмов существует немало, и способ Агапова — один из них, довольно рациональный и тщательно разработанный.

Вторая работа называется «Измерение углов линейными мерами и решение треугольников по новой системе Д. В. Агапова» [3]. Она издана в 1908 году. На её титульном листе имеется надпись: «Склад издания у автора: Д. В. Агапова, Оренбург, Институтская ул.». Подобные надписи встречаются и на титульных листах других книг Агапова, из чего можно сделать вывод, что у него имелся свой книжный склад и, возможно, он сам занимался продажей своих изданий.

Что касается содержания этой работы, то оно довольно неожиданно. Автор предлагает ввести новый способ измерения углов, «заменить градусную систему измерения углов линейною, что даст возможность установить точную, вполне определённую связь между углами и всеми остальными частями треугольника, пользуясь которою мы будем в состоянии определить все неизвестные части треугольника путём вычисления с произвольною степенью точности при достаточном, конечно, числе данных». Таким образом, в этой работе также представлен способ решения треугольников, но уже другой, совсем не использующий тригонометрию. Если рассмотреть угол $\angle MAN$ и провести перпендикуляры BC , DE , FK к одной из его сторон, мы получим три подобных треугольника: ABC , ADE , AFK (рис. 1).

Из подобия этих треугольников следует равенство отношений высот построенных таким образом прямоугольных треугольников к их основаниям. Это отношение, таким

образом, остаётся постоянным. Его величину предлагается считать длиной некоего отрезка, измеряющего угол.

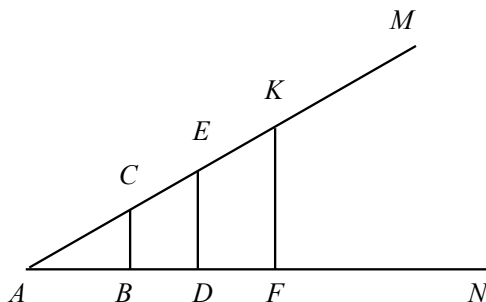


Рис. 1

За единицу меры угла тогда принимается половина прямого угла. «Измеряющая» прямого угла считается равной бесконечности. Вместо транспортира применяется «угломер», представляющий собой бумажную ленту, согнутую в трёх местах, под прямым углом, затем под углом в 45 градусов, а затем опять под прямым углом (см. рис. 2).

Вводятся правила сравнения, сложения, вычитания углов, умножения и деления угла на число, определения дополнительного угла по данному острому углу. Затем автор переходит к решению треугольников. Он рассматривает 15 задач на решение прямоугольных и десять — на решение «косоугольных», т.е., остроугольных или тупоугольных треугольников. В следующих параграфах выводятся две формулы площади треугольника с применением понятия «измеряющих линий» его углов, формулы, позволяющие отделить от треугольника линией, параллельной одной из его сторон, треугольник заданной площади, а также отыскиваются площади произвольного четырехугольника, параллелограмма и трапеции, также с использованием «линейного» представления угла и понятия его измеряющей линии.

Третья работа, изданная в 1909 г., называется «Геометрия на новых началах. Без параллельных. Система Д. В. Агапова. Решение треугольников» [5]. Здесь рассматрива-

ются задачи, в которых требуется найти величины всех сторон и углов треугольника, а также его площадь. Автор показывает, что для решения треугольника необходимо и достаточно знать три известные величины (например, две стороны и угол между ними, два угла и величину стороны).

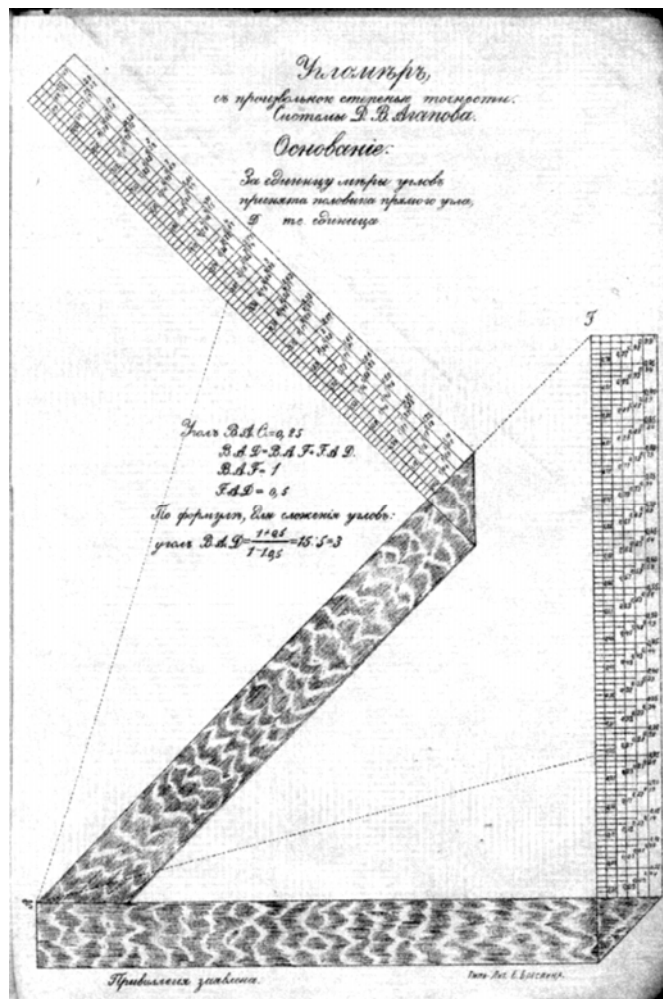


Рис. 2

В этой книге, как и в предыдущих, рассматривается решение прямоугольных и косоугольных треугольников. Измерение углов производится по системе, изложенной в работе [3]. Отдельные два параграфа посвящены выводу формул, связывающих элементы треугольников в обоих случаях. В них выводятся различные соотношения между сторонами треугольника, величинами его углов, биссектрисами, высотами, медианами, полупериметром и площадью треугольника.

Рассматриваются также задачи, в которых даны сумма гипотенузы и катета прямоугольного треугольника, их разность, сумма или разность катетов (для косоугольных треугольников сумма и разность двух сторон треугольника). Все эти объекты используются для решения треугольников, в то же время ни теорема косинусов, ни теорема синусов здесь не используются.

Автор считает, что предложенные им методы должны найти применение в практической геометрии, при проведении измерительных работ, связанных со многими вычислениями, в которых приходится встречаться с большими числами. Вот, например, одна из его задач:

«Решить прямоугольный треугольник *ВАС* по гипотенузе его $a = 627$ и величине острого угла $B = 2,29984$ » [5, с. 43].

В 1908—1911 гг. в качестве «прибавления» к упомянутым работам были изданы разработки различных измерительных инструментов [6—8]. Это были «угломеры линейной системы для чертёжных, межевых и других технических работ», «делительная и пропорциональная линейка», «угловой, или копировальный, циркуль». Было среди «прибавлений» и дополнительное руководство по применению «угломера» [4].

Следует заметить, что эта серия брошюр, возможно, и сейчас интересна для любознательного школьника.

Список использованной литературы

1. Агапов, Д. В. Алфавитный каталог русских книг по математике, вышедших в России с начала книгопечатания до последнего времени. 1682—1908 / Д. В. Агапов. Оренбург : Типо-лит. Б. А. Бреслина, 1908. 99 с.

2. Агапов, Д. В. Новая тригонометрия. Решение треугольников помощью одной теоремы... 45 случаев. Для старших классов средних учебных заведений / Д. В. Агапов. 2-е изд. Оренбург : [скл. изд. у авт.], 1898. 96 с.

3. Агапов, Д. В. Измерение углов линейными мерами и решение треугольников по новой системе Д. В. Агапова / Д. В. Агапов. Оренбург : [скл. изд. у авт.], 1908. 43 с., с прибавл.: черт., 1 л. ил.

4. Агапов, Д. В. Новые угломеры линейной системы для чертёжных, межевых и других технических работ, с объяснением основания их устройства и с указанием употребления. 2-е прибавление к брошюре «Измерение углов линейными мерами» / Д. В. Агапов. Оренбург : Типо-лит. Б. А. Бреслина, 1908. 8 с., 3 л. черт.

5. Агапов, Д. В. Геометрия на новых началах. Без параллельных: система Д. В. Агапова: решение треугольников / Д. В. Агапов. Оренбург : Типо-лит. Б. А. Бреслина, 1909. 92 с.

6. Агапов, Д. В. Измерение углов помощью угломера линейной системы Д. В. Агапова. Прибавление к брошюре «Геометрия на новых началах» / Д. В. Агапов. Оренбург : Типо-лит. Б. А. Бреслина, 1909. 22 с., 1 л. черт.

7. Агапов, Д. В. Деление данного отрезка прямой на произвольное число равных или пропорциональных частей, с указанием устройства и применения делительной и пропорциональной линейки / Д. В. Агапов. Оренбург : Типо-лит. Б. А. Бреслина, 1909. 14 с., 1 л. черт.

8. Агапов Д. В. Угловой, или копировальный, циркуль: полное описание циркуля с указанием его применений / Д. В. Агапов. Оренбург : Типо-лит. Бреслина, 1911. 12 с.

9. Бусев, В. М. О библиографической работе в области преподавания математики / В. М. Бусев // Труды пятых Колмогоровских чтений. Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2007. С. 334—346.

10. Ганин, А. В. Офицерский корпус Оренбургского казачьего войска. Биографический справочник / А. В. Ганин, В. Г. Семёнов. М. : Русский путь : Б-ка-фонд «Русское зарубежье», 2007. С. 78.

11. Записки математического кружка при Оренбургском реальном училище. № 2. Первая половина 1907—1908 учебного года. Оренбург : Типолиотгр. Б. А. Бреслина, 1908. С. 5—10.

12. Оренбургская книга: XIX—XXI вв. : библиогр. указ. : в 3 ч. / Мин-во культуры Оренбургской обл., Оренбургская обл. универ. науч. б-ка им. Н. В. Крупской ; рук. проекта Н. В. Никитина ; сост.: О. В. Федосова, В. М. Коломацкая, Н. В. Колыхалова, А. В. Толстова. Оренбург : Издат. центр ОГАУ, 2009. С. 7—8, 36, 41, 44, 53.

**Преподавание математики в уездных училищах
Оренбургской губернии в XIX веке**

Развитие образования в Оренбургской губернии в конце XVIII века, как и в целом в России, шло крайне медленно, но в начале XIX века образовательная политика высшего руководства Российской империи стала чрезвычайно активной. Согласно указу 1803 года «для нравственного образования граждан, соответственно обязанностям и пользам каждого состояния, определяются четыре рода училищ», а именно приходские (одно училище на два прихода, один год обучения), уездные (в каждом городе, два года), гимназии (в губернских городах, четыре года), университеты [1, с. 15]. Главной особенностью этой системы образования, по мнению Ю. М. Калягина, «было обеспечение единства и преемственности» [2, с. 37].

В 1804 году принят устав учебных заведений, который определял перечень предметов и количество выделяемых на них учебных часов. Математические дисциплины занимали очень достойное место среди учебных предметов, превышая подавляющее их большинство по объему часов и количеству лет обучения.

Так, на первой ступени (приходское училище) изучались первые действия арифметики, на второй (уездные училища) — арифметика, начальные сведения из геометрии, на третьей (гимназии) вводилась чистая и прикладная математика и опытная физика (18 часов в неделю или по 6 недельных часов в первых трех классах), статистика (6 часов в неделю или 2 недельных часа в третьем и четвертом классах) [3, с. 24].

Подробных предметных программ тогда не было. О содержании обучения можно судить по рекомендуемым учебникам. Учебная литература регулярно обновлялась и ориентировалась теперь уже окончательно на отечественных авторов. С 1805 г. в качестве основного руководства по

математике для гимназий был рекомендован «Курс математики» Т. Ф. Осиповского [4—6].

Учебные планы были разработаны так, что приходское училище являлось подготовительной ступенью к уездному, уездное — к гимназии, гимназия — к университету. Преемственность и единство системы учебных заведений выражались, в частности, в том, что в уездном училище не учили тому, чему учили в приходском; в гимназии предполагалось известным то, чему учили в уездном училище. В то же время училище каждого рода должно было давать законченное образование для тех, кто не имел возможности продолжать его далее.

Для управления учебными заведениями было решено разделить территорию России на шесть учебных округов (Петербургский, Белорусский, Литовский, Дерптский, Казанский, Харьковский). В каждом округе управление учебными заведениями осуществляли попечитель и местный университет. Гимназии подчинялись университету, уездные училища — директорам гимназий, приходские училища — смотрителям уездных училищ. Территория Оренбургской губернии относилась к Казанскому учебному округу. Местом пребывания попечителя Казанского учебного округа был определен город Казань, там же в 1804 году открылся Казанский университет.

В соответствии с вновь утвержденным уставом учебных заведений начальной ступенью образования становились приходские училища. С этого момента в Оренбургской губернии начинается период открытия начальных школ в различных населенных пунктах, прежде всего по программам приходских училищ. Эти программы предполагали обучение Закону Божьему, чтению, письму, первым действиям арифметики.

В 1817 году статус уездных училищ получили Бузулукское и Мензелинское народные училища, в 1818 году аналогичный статус получило Уфимское училище. Оренбургское народное училище также было преобразовано в 1822 году в уездное. В 1830 году в пяти уездных училищах гу-

бернии обучалось 515 учеников [7]. В 1833 и 1835 гг. открыты Челябинское и Троицкое уездные училища.

Уездные училища находились в ведении Министерства народного просвещения. Обучались только мальчики. Учебный год в уездных училищах длился одиннадцать месяцев. Срок обучения составлял два года в самом училище и год в подготовительном классе. Программа училища включала Закон Божий, русский язык с грамматикой, историю, географию, арифметику, геометрию (планиметрию с элементами стереометрии), элементы черчения с рисованием.

Состав учителей, работавших в учебных заведениях губернии в первой половине XIX века, был крайне разнороден по уровню общеобразовательной и профессиональной подготовки. Лишь незначительная часть учителей имела университетское образование. Но именно педагоги играли главную роль в системе образования. Среди педагогов-математиков были люди разных судеб, национальностей, попавшие в Оренбургский край по разным обстоятельствам [8]. Ярким примером может служить М. А. Серебровский, о жизни которого рассказывают материалы Государственного архива Оренбургской области (ГАОО).

Согласно архивным данным [9, л. 1], 14 января 1872 года на место уволенного учителя Галкина в Троицкое уездное училище для преподавания арифметики и геометрии был временно принят Митрофан Алексеевич Серебровский. Формулярный список о его службе [11, с. 200—207] содержит следующие данные. М. А. Серебровский обучался в Нижегородском Александровском дворянском институте, где и окончил полный курс с золотой медалью. Затем поступил в Казанский университет, но выбыл, не окончив полного курса.

7 октября 1861 года назначен учителем арифметики и геометрии в Макарьевское уездное училище; там же с 25 октября 1861 по 25 июня 1862 года преподавал географию.

17 марта 1862 года М. А. Серебровский перемещен в этой же должности в Чистопольское уездное училище. Состоял также преподавателем арифметики и геометрии в

Чистопольском женском училище второго разряда с 24 августа 1862 по 27 июня 1865 года. Удостоен единовременной премии в 100 рублей от имени Государя Императора 19 ноября 1865 года, а 18 февраля 1866 года ему объявлена благодарность за научные труды.

27 июня 1866 года М. А. Серебровский переведен в должности учителя арифметики и геометрии в Казанское уездное училище, где преподавал еще и бухгалтерию. Кроме того, он преподавал арифметику в Мариинском женском училище первого разряда до 12 сентября 1868 года, когда был уволен согласно прошению. Указом Правительствующего Сената от 22 апреля 1868 года М. А. Серебровский произведен в губернские секретари, 27 ноября 1868 года — в коллежские секретари, а 16 июля 1869 года — в титулярные советники. 19 декабря 1869 года удостоен премии в 100 рублей.

Согласно прошению 27 апреля 1870 года М. А. Серебровский назначен экспедитором Пермской губернской почтовой конторы. Однако вскоре он вернулся к учительской работе, и приказом попечителя Казанского учебного округа от 9 августа 1871 года перемещен сверхштатным учителем арифметики и геометрии в Казанское уездное училище. Затем приказом попечителя Казанского учебного округа от 2 октября 1871 года назначен на должность штатного смотрителя Троицкого уездного училища. В это время ему было 35 лет.

М. А. Серебровский был женат на Анне Андреевой, имел четверых детей: сына Сергея (род. 1 июня 1864 г.), дочерей Зою (род. 2 мая 1866 г.), Ольгу (род. 9 июля 1868 г.), Зинаиду (род. 2 октября 1870 г.). В формулярном списке указано, что жена и дети православного вероисповедания.

Вступив в должность штатного смотрителя Троицкого уездного училища, М. А. Серебровский обращается к директору с просьбой разрешить преподавать геометрию по изданным им в 1868 и 1870 гг. руководствам «Опыт популярного изложения планиметрии» и «Популярное изложе-

ние стереометрии». Он пишет, что делает это «не из-за авторского тщеславия, а истинного желания принести наибольшую пользу учащимся». Как видно из текста прошения, в продолжение девятилетней педагогической деятельности М. А. Серебровский убедился, что «ни одно из существовавших в то время в русской педагогической литературе руководство по геометрии не могло быть применено к курсу уездного училища» [9, л. 2, 2 об.]. Даже учебник А. Буссе «Руководство к геометрии для уездных училищ» (1831), ставший в то время общепризнанным, по его мнению, не мог удовлетворить насущной потребности преподавания.

С мнением Серебровского соглашалась и преподаватель алгебры и геометрии И. Гобростовская. В объяснительной записке к программе, составленной для учеников третьего класса Верхнеуральского уездного училища по геометрии на 1876/77 учебный год, она отмечала: «Сначала до конца геометрия представляет конспект, в котором в систематическом порядке перечислены геометрические теоремы. Практических задач нет. Но и без учебника в конце года, когда весь материал пройден, тяжело повторять. Поэтому учебник должен быть», и автор рекомендует «популярный курс стереометрии и планиметрии Серебровского». По её мнению, книга Серебровского содержит много практических задач. «Изложение учебника самое понятное. При изложении Серебровский употребляет метод, понятно доводя учеников до решения и усвоения теорем» [11, л. 8—9].

Работы Серебровского 10 февраля 1872 года были отданы на рецензию преподавателям математики Оренбургской гимназии Генкелю и Мальцеву (согласно приказу № 104 от 5 февраля 1872 г.). Генкель представил докладную записку: «Руководство по геометрии для уездных училищ», так как этот предмет проходится только в течение одного года, не может задаваться обширной программой. Оно должно знакомить только с основными отделами, которые находят себе всюду применения в практической жизни. Отделы эти должны быть изложены ясно, языком

понятным, избегая всякое многословие и излишнее отступление от темы. Он должен быть сейчас же выяснен практическими задачами и классическими чертежами, ибо ничто не может развить так геометрическую умозаключительность в ученике, как постоянное решение разнообразных задач с помощью циркуля, линейки и других чертежных принадлежностей. Эти задачи должны быть выбраны из обыденной жизни для возбуждения интереса в учениках и для пользы их в будущем.

Принимая все сказанное во внимание, сочинения Серебровского изложены общедоступным языком. Эти сочинения можно было скорее назвать популярной беседой по геометрии. А на уроке в 60 минут с 30—40 учениками нет времени для бесед.

Различия и неточности в математических терминах ставят планиметрию ниже стереометрии, в которой проявляется большая тщательность разработки» [9, л. 6—7].

«Журнал Министерства народного просвещения» (октябрьская книжка, 1868 г.) отзывался не в пользу первого из трудов Серебровского. Тем не менее Серебровский пишет, что рецензия, помещенная в «Циркулярах» учебных округов Казанского, Харьковского, Кавказского и в «Педагогическом сборнике», издаваемом при Главном Управлении военно-учебных заведений (вторая февральская книжка, 1869 г.), а также рекомендации об этом сочинении «Циркуляров» Одесского и Варшавского учебных округов, и «точно так же подобная рекомендация этих учреждений и о втором из упомянутых трудов были положительными. Они, — продолжает он, — дали мне смелость в бытность мою учителем арифметики и геометрии в Казанском уездном училище преподавать этот предмет по собственным моим руководствам» [9, л. 2 об.].

Из архивных материалов видно, что учитель Троицкого училища М. А. Серебровский творчески относился к преподаванию математики и искал новые подходы к изучению программного материала. 30 января 1872 г. он предложил решение двух геометрических задач:

1) разделить трапецию на несколько равномерных частей прямыми, параллельными параллельным сторонам, не продолжая непараллельных сторон;

2) всякая усеченная треугольная пирамида состоит из трех пирамид, имеющих одинаковые с ней высоты, а основания: у первой нижнее, у второй — верхнее, у третьей — среднее пропорциональное между обоими основаниями.

По мнению автора, предложенное им решение проще изложенного в существовавших в то время курсах геометрии. Серебровский обратился с просьбой рассмотреть их на педагогическом совете и рекомендовать к печати в «Циркуляре по Казанскому учебному округу».

Отзыв был дан положительный: рекомендовать к печати, если будут исправлены замечания. Затем рукопись была отправлена в канцелярию Казанского учебного округа. При возвращении ее обратно в Оренбург ошибочно вместо нее отправили «Сборник практических задач по арифметике» М. Серебровского. В архиве хранятся запросы-просьбы на ее возвращение в Казанский учебный округ, так как сборник необходим для преподавания в Казанской первой гимназии.

На этом упоминания о М. Серебровском в рассмотренных архивных делах заканчиваются. Возможно, дальнейшие исследования позволят обнаружить новые материалы о нём и познакомиться с другими преподавателями алгебры и геометрии, внесшими вклад в развитие математического образования Оренбургской губернии XIX века.

Список использованной литературы и архивных источников

1. Юшкевич, А. П. Математика и ее преподавание в России XVIII—XIX вв. / А. П. Юшкевич // Мат. в шк. 1948. № 1. С. 15.
2. Калягин, Ю. М. Русская школа и математическое образование / Ю. М. Калягин. М. : Просвещение, 2001.
3. Ланков, А. В. К истории развития передовых идей в русской методике математики / А. В. Ланков. М. : Учпедгиз, 1951.
4. Осиповский, Т. Ф. Курс математики. Т. 1 / Т. Ф. Осиповский. СПб., 1802.
5. Осиповский, Т. Ф. Курс математики. Т. 2 / Т. Ф. Осиповский. СПб., 1820.

6. Осиповский Т. Ф. Курс математики. Т. 3 / Т. Ф. Осиповский. СПб., 1823.

7. Мирсаитова, С. Г. Народное образование на Южном Урале в первой половине XIX в. : в 2 ч. / С. Г. Мирсаитова. Екатеринбург : Уралнаука, 2000.

8. Болодулин, В. С. Образование в Оренбуржье (XVIII—XX века) / В. С. Болодулин. Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2008.

9. ГАОО. Ф. 73. Оп. 1. Д. 18. «Дирекция народных училищ Оренбургской губернии», 1872.

10. ГАОО. Ф. 73. Оп. 1. Д. 320. «Формулярный список о службе штатного смотрителя Троицкого уездного училища Титулярного Советника Митрофана Серебровского», 1858—1913.

11. ГАОО. Ф. 73. Оп. 1. Д. 64. «Планы и программы преподавания в классах уездных училищ», 1876.

В. А. Коротина

Из истории школы № 12 г. Оренбурга

Предлагаемая статья представляет собой одну из первых попыток кратко осветить историю создания и развития школы № 12 г. Оренбурга. Интерес к этой теме объясняется следующим. Автор этих строк окончил школу № 12 г. Чкалова (ныне Оренбурга) в 1956 году. Это значит, что в июне 2011 года состоится юбилей выпуска 1956, а именно 55 лет со дня окончания школы.

В связи с юбилейной датой естественно отдать дань глубочайшего уважения родным стенам школы, администрации и педагогическому коллективу школы начала шестидесятых годов XX века. В то время директором школы № 12 г. Чкалова была Елена Ивановна Шварева (21 мая 1921 г. р.).

Более половины выпускников поступили в высшие учебные заведения на специальности, связанные с физико-математическим профилем. На все эти специальности были вступительные экзамены по математике и физике.

Удивительно дружный был выпуск. По сей день в основном регулярно, каждые 5 лет, в стенах родной 12-й шко-

лы проходит встреча выпускников. Главным организатором этих встреч является Ортенберг (ныне Табакова) Светлана Вячеславовна, которая окончила физико-математический факультет Оренбургского пединститута, учитель математики. Как правило, на этих встречах бывают бывшие директор школы Елена Ивановна Шварева и учитель физики и астрономии Петр Алексеевич Поднебесов. Выпускники приносят искренние слова благодарности своим школьным учителям.

Математику в школе нам преподавал замечательный учитель Григорий Михайлович Щипакин, который творчески сотрудничал со старшим преподавателем кафедры математики и методики преподавания математики Оренбургского (тогда Чкаловского) педагогического института Петром Алексеевичем Буданцевым. После окончания школы я поступила в пединститут на физико-математический факультет, на отделение математики и стала студенткой П. А. Буданцева.

Классным руководителем нашего 10 «В» класса была Тамара Степановна Глушак, преподававшая нам немецкий язык, который она знала в совершенстве и давала блестящие уроки. Позже её пригласили на работу в пединститут на кафедру немецкого языка. Наши встречи продолжились в стенах пединститута.

Юбилею выпуска 1956 года предшествуют следующие юбилейные даты:

15 октября 2010 г. — 95 лет со дня рождения Г. М. Щипакина;

23 января 2011 г. — 95 лет со дня рождения П. А. Поднебесова;

24 июня 2011 г. — 100 лет со дня рождения П. А. Буданцева;

21 мая 2011 г. — 90 лет со дня рождения Е. И. Шваревой.

Об истории школы № 12 г. Оренбурга свидетельствует выдержка из отчета о состоянии Оренбургской 12-й Советской трудовой школы I ступени за 1919/1920 уч. год [1].

«Местонахождение школы — 3 часть, угол Детской (бывшей Кадетской) улицы и Безымянного (ныне Саракташская улица, 2-й Оренбург [2]) переулка, дом № 10-8. Здание двухэтажное. Весь верхний этаж [занимают] 3 классные комнаты, учительская, 2 раздевалки и помещение для сторожихи. В нижнем этаже помещаются 1 классная комната и квартира заведующего школой, состоящая из трех комнат, передней и кухни.

С точки зрения школьной гигиены школьное помещение имело следующие недостатки: теснота двух классных комнат, отсутствие зала для репетиций и занятий физическими упражнениями, отсутствие коридора между классными комнатами (3 классные комнаты проходные).

История школы. Школа открыта 11 марта 1851 г. по уставу приходских училищ [от] 8 декабря 1828 года. До 1917/18 уч. года имела название Оренбургское 2-е мужское приходское училище. Наконец, с 1 октября 1919 г. получила свое постоянное звание. Таким образом, день рождения школы № 12 — 1 октября 1919 г.

Состав школы на 1919/1920 уч. г.

1. Малый Петр Григорьевич — окончил курс Оренбургской Киргизской учительской школы 13 мая 1898 года, в 1914 г. прослушал шестинедельные педагогические курсы (министерские), летом 1916 г. — земские педагогические, а летом 1917 г. — земские политехнические, в 1917/18 уч. г. — вечерние курсы при Оренбургском институте (физико-математического отделения); с 22 июня по 3 августа 1919 г. — музыкально-учительские курсы общества хороших деятелей.

2. Купцова Зинаида Кузьминична — окончила курс Саратовского Епархиального училища в 1888 г. и краткосрочные педагогические курсы.

3. Андреева Лидия Федоровна — окончила курс (8 классов) Оренбургской I женской гимназии в 1910 г.

4. Пономарева Валентина Дмитриевна — окончила курс (8 классов) Оренбургской I женской гимназии в 1912 г.

5. Каюкова Матрона Викторовна — окончила курс Леушинской учительской семинарии.

6. Аветисянц Нина Семеновна — окончила курс Оренбургского женского института в 1916 г. и 8-й класс Оренбургской женской гимназии в 1917 г.

7. Ерасова Надежда Федоровна — окончила курс Орловского женского института в 1918 г.

8. Барановский Андрей Яковлевич — окончил курс Петроградского художественного училища в 1915 г.

9. Шимановский Михаил Ипполитович — сведений об образовательном цензе не имеется, состоял в должности преподавателя ручного труда.

Ученики и их социальное положение

Дети	служащих — 48 (40%),
	рабочих — 35 (29%),
	дом. хозяев — 10 (8%),
	крестьян — 5 (4%),
	ремесленников — 12 (10%),
	красноармейцев — 2 (1,6%).

Организационно-учебная сторона школы

Учащиеся по степени умственного развития и познаний разделялись на 6 групп: 1-й год обучения — 1 группа; 2-й год обучения — 2 группы (а, б), 3-й год обучения — 2 группы (а, б), 4-й год обучения — 1 группа.

Распределение школьных работников по группам

В 1-й группе преподавание общеобразовательных предметов вела Л. Ф. Андреева, в 2^а — В. Д. Пономарева, в 2^б — в разные сроки В. А. Лебедева, М. В. Каюкова, В. Д. Пономарева, в 3^а группе — Н. С. Аветисянц, в 3^б группе — З. К. Купцова. В 4^а группе общеобразовательные предметы преподавали П. Г. Малый, М. В. Каюкова, Н. Ф. Ерасова. Физику в 4 группе преподавали Л. Ф. Андреева, П. Г. Малый.

Специальные предметы преподавали во всех группах: пение — П. Г. Малый, рисование — А. Я. Барановский, ручной труд — М. И. Шимановский.

Методы и программы преподавания

Велись записи проработанного материала на уроках. Например, 1 группа: по русскому пройден букварь, по арифметике — письмо цифр и четыре действия в пределах 10. За весь учебный год пройдены сложение и вычитание в пределах 100 и часть таблицы умножения (произведение больше 50). По ручному труду — составление гербария из материала, собранного на осенних экскурсиях, лепка, вырезание и наклеивание.

2 группа. По русскому языку — гласные и согласные. По арифметике — четыре действия в пределах 100 и 1000. По географии — горизонт, страны света, движение Земли вокруг себя и вокруг Солнца.

3 группа. По арифметике — все действия над числами любой величины и раздроблению именованных чисел.

4 группа. По родному языку. Устная речь — чтение и разбор «Лесной царь», «Из жизни уличного мальчика», «Самоеды», «Сходство собаки с волком», «Две собаки». Письменная работа: а) орфография, правописание наречий; б) стилистические упражнения, изложение прочитанного, свободный диктант, сочинение по картинам, сочинение на заданную тему по разработанному плану. По математике — все действия над дробями простыми и десятичными. Выводы делались на основании работы над черновиками и рисунками, над полосками бумаги, кругами, прямоугольниками длины в фут. Понятие о проценте как сотой части, процентное отношение (например, число инородческого населения в Оренбургской губернии к общему числу жителей; число выбывших к концу года учащихся к числу учащихся в начале учебного года и пр.), метрическая система мер. По истории — от начала русского государства, кончая Алексеем Михайловичем, опричнина. Природоведение. Ботаника. Строение листа, цветка, жизнь растения. Прививка. Дуб, береза, орешник, ольха, хвойные деревья.

Распределение занятий по времени, предметам и группам (очевидно, здесь представлена недельная нагрузка)

№	Наименование предмета	Год обучения				Всего
		1	2	3	4	
1.	Русский язык	8	6	4	4	22
2.	Новый язык (французский)	—	—	—	3	3
3.	Математика	3	4	4	4	15
4.	Естествознание	—	3	3	3	9
5.	Физика	—	—	—	2	2
6.	История	—	—	2	2	4
7.	География	—	—	2	2	4
8.	Рисование и лепка	4	3	2	2	11
9.	Пение	2	2	2	2	8
10.	Ручной труд	2	2	2	4	10
	Итого	10	20	21	26	88

Способы оценки усвоенного учениками. Собеседование и самостоятельная работа. Форма занятий — классная. Поощрения существовали лишь в словесной форме, наказание — в виде воззвания к совести (пристыжение) и выговоров.

Индивидуальное обучение существовало, но без разделения учащихся на обособленные группы».

Этот отчет дает представление о проделанной учебной работе за первое полугодие 1919/20 учебного года [3—5].

Говоря об истории школы № 12 более позднего времени, мы должны вспомнить ее замечательных преподавателей, работавших в 50-е годы XX века. Ниже приводятся краткие биографические очерки Г. М. Щипакина и П. А. Поднебесова.

Щипакин Григорий Михайлович

Григорий Михайлович родился 13 октября 1915 года в поселке Холодный ключ Тюльганского района в многодетной крестьянской семье. Детей было семеро — четыре дочери (Таисия, Вера, Раиса, Зоя) и три сына (Григорий, Юрий, Александр). Жизнь была трудной. В 1927 году семья переехала в Оренбург.



Григорий Михайлович Щипакин

Григорий Михайлович в Оренбурге окончил семилетнюю школу, три года работал водителем, а затем поступил в учительский институт. В институте он учился и дружил с П. А. Буданцевым и А. И. Становым. В дальнейшем А. И. Становов работал журналистом в Москве, а Г. М. Щипакин и П. А. Буданцев остались в Оренбурге на педагогической работе.



П. А. Буданцев и А. И. Становов

После института до начала Великой Отечественной войны Г. М. Щипакин работал учителем в Кувандыке, от-

куда в 1941 году был призван в армию. Прошел всю войну, дошел до Кенигсберга, после чего сразу был направлен в Манчжурию, где воевал с японцами. В армии он служил по 1947 год и вернулся в звании капитана. Награжден двумя орденами Красного Знамени, медалями за Победу над Германией в Великой Отечественной войне и юбилейными медалями.

После войны Г. М. Щипакин работал учителем математики в Оренбурге: сначала в вечерней школе, затем в школе № 3 продленного дня и наконец — в школе № 12 г. Оренбурга, где трудился до 1975 года, когда в возрасте 60 лет ушел на пенсию. Скончался Г. М. Щипакин 7 июня 1992 года.

Жена Григория Михайловича, Щипакина Полина Федоровна, экономист облпотребсоюза. У них трое детей — две дочери — Ольга и Надежда и сын Александр.

Старшая дочь Ольга Григорьевна Щипакина (Анохина) окончила физико-математический факультет Оренбургского пединститута в 1970 году, после чего работала два года в Елшанской средней школе Бузулукского района учителем математики. Затем переехала в Оренбург, где один год работала в вечерней школе № 8, потом три года — в вечерней железнодорожной школе и более 20 лет — в профессиональном училище № 46. Вышла на пенсию в 2006 году.

Младшая дочь Надежда Григорьевна Щипакина окончила естественно-географический факультет пединститута, в школе преподает географию и биологию.

Сын Александр Григорьевич окончил Оренбургский политехнический институт, инженер.

В роду Щипакиных преобладает профессия педагога. Сестра Григория Михайловича — Таисия Михайловна была учительницей начальных классов в школах № 30 и № 64 г. Оренбурга. Другая сестра — Вера Михайловна Щипакина работала преподавателем русского языка и литературы в педагогическом училище. Она подготовила обзор учительской династии Щипакиных, насчитывающий 16 человек. К 2010 году, очевидно, список расширился.



Выпуск 10 «В» класса школы № 12, весна 1956 г. Второй ряд снизу: Нина Седякина (ныне Маренкова) — староста класса; учитель математики Григорий Михайлович Щипакин; зав. роно; классный руководитель Тамара Степановна Глушак; учитель литературы Сергей Васильевич Кузнецов; учитель физики и астрономии Петр Алексеевич Поднебесов. В третьем ряду, третьей слева стоит автор этой статьи — Валентина Пухова (ныне Коротина).

Остановимся подробнее на педагогической деятельности Г. М. Щипакина. Как учитель Григорий Михайлович отличался высоким педагогическим мастерством. Свои научно-методические разработки он активно внедрял в практику обучения в системе школа — педвуз. При этом он сотрудничал со старшим преподавателем кафедры математики пединститута Петром Алексеевичем Буданцевым, который активно пропагандировал новые идеи в преподавании математики.

Г. М. Щипакин, обучая математике, особое внимание обращал на сознательное овладение основными понятиями, идеями и методами математики, в особенности идеей функции и ее графическим изображением.

В 1956 г. в Москве вышло в свет учебное пособие П. А. Буданцева и Г. М. Щипакина «Квадратные и иррациональные уравнения» [6]. Эта работа представляет собой описание опыта преподавания квадратных и иррациональных уравнений в курсе VIII класса передовыми учителями ряда школ г. Чкалова и, в частности, описание опыта преподавания этой темы Г. М. Щипакиным. Наш класс являлся одной из экспериментальных площадок по проверке эффективности разработанных новых методик преподавания математики, что пошло нам на пользу.

В соответствии с разработанными авторами поурочными планами в 1955/56 учебном году было проведено изложение темы «Квадратные и иррациональные уравнения» в ряде школ г. Чкалова (школы № 7, 12, 30, 36, 40) и получены положительные отзывы от учителей этих школ как о поурочных планах, так и о работе в целом. Таким образом, данная работа в достаточной степени проверена на практике.

Все, кто знал и помнит Григория Михайловича Щипакина, могут отметить, что в нем сочетались, казалось бы, трудно совмещаемые качества: твердость и скромность, смирение и бескомпромиссность, широкая профессиональная эрудиция, неиссякаемый интерес к педагогическим проблемам и математическому образованию.

Поднебесов Петр Алексеевич

Петр Алексеевич Поднебесов родился 23 января 1916 года в Оренбурге. Его отец Поднебесов Алексей Иванович — слесарь Оренбургского депо, командир красногвардейского отряда, погиб в 28 лет. Маленькому Петру тогда было 4 года. Мать — домохозяйка.

Петр Алексеевич окончил школу № 2 (позже эта школа будет носить № 12), затем учился два года в фабрично-заводском училище при Паровозоремонтном заводе, получил специальность токаря. Работал токарем один год и одновременно посещал вечерние курсы по подготовке в институт. В 1934 году поступил в педагогический институт на

физико-математический факультет. В 1938 году окончил институт, получив специальность учителя математики, и был направлен на работу в Троицкую среднюю школу Троицкого (ныне Тюльганского) района Оренбургской области, где работал два года (1938/39, 1939/40 уч. г.).



Петр Алексеевич Поднебесов



Петр Алексеевич Поднебесов, 1940 г.

В 1940 году П. А. Поднебесов призван в ряды Красной Армии. Будучи в кадровой армии, встретил Великую Отечественную войну и находился в армии все военные годы. Демобилизовался в 1946 году и поступил на работу в школу № 12, которая находилась в здании по ул. Орской, 19 (ныне Пушкинская, 19).

В школе № 12 П. А. Поднебесов преподавал математику и физику до 1960 года, а затем перешел в железнодорожный техникум, где работал с 1960 по 1976 год. Далее работал в вечерней очно-заочной школе № 1 г. Оренбурга. С 1976 по 1986 год — в филиале школы Понкратовского ПТУ. Затем была работа в Пригородной школе поселка Чкаловский Оренбургского района. В 75 лет П. А. Поднебесов вышел на пенсию, имея общий трудовой стаж 56 лет.



Выпуск 10 «А» класса школы № 12, весна 1950 г. Второй ряд снизу: Г. А. Хотяновская, П. А. Поднебесов, А. П. Зарембо, С. В. Кузнецов, Т. М. Марсакова, Е. С. Попова.

Участие Петра Алексеевича Поднебесова в Великой Отечественной войне, его трудовая деятельность отмечены правительственными наградами. Он награжден орденом

Отечественной войны, медалью «За оборону Одессы», медалью «За победу над Германией в Великой Отечественной войне», всеми юбилейными медалями за победу над Германией, знаком «Отличник просвещения СССР», «Отличник народного просвещения РСФСР».

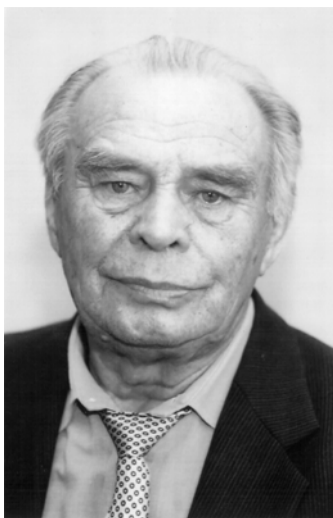


Фронтник Петр Алексеевич Поднебесов на праздновании 65-й годовщины со Дня Победы в Великой Отечественной войне (май 2010 г.)

Жена Петра Алексеевича — Поднебесова Анна Николаевна (род. 10 декабря 1926 г.) окончила школу № 7 г. Оренбурга, затем Оренбургское педучилище. Работала в разные годы учителем начальных классов Оренбурга. За добросовестный труд имеет правительственную награду «Отличник народного просвещения СССР». В семье Поднебесовых двое детей — сын Виктор (физик) и дочь Людмила (Акимова, окончила финансово-экономический институт); три внука, одна внучка, одна правнучка и правнук.



Анна Николаевна Поднебесова, жена
П. А. Поднебесова, 2010 г.



Петр Алексеевич Поднебесов, 2010 г.

Учитель Петр Алексеевич Поднебесов обладал рядом замечательных качеств — глубоким знанием своего предмета (физики и астрономии), стремлением к постоянному совершенствованию методов обучения и умением органи-

зовать обучение четко и продуманно. Эти качества позволили ему снискать славу прекрасного педагога, умеющего излагать физические теории на разных уровнях сложности, стараясь сделать изучаемый материал доступным для учащихся. Уроки, проводимые Петром Алексеевичем, — образцовая, строгая школа физико-математического мышления. За такое обучение мы, его ученики, особенно ему благодарны. Он никогда не снижал требования к оценке знаний, полагая, что его ученики должны четко уяснить, что занятие математикой, физикой, астрономией требует тяжелого и самоотверженного труда.

Наши замечательные педагоги — математик Григорий Михайлович Щипакин и Петр Алексеевич Поднебесов пытались научить нас рациональной организации труда, показать нам лес за деревьями, преподнести физико-математические знания в компактном, целостном виде. Многие из нашего школьного выпуска 1956 года обязаны им своим интересом к точным и естественным наукам.

П. А. Буданцев, Г. М. Щипакин, П. А. Поднебесов — люди одного поколения; в одно время они учились, работали, строили свою жизнь. Получив высшее образование, они стали прекрасными преподавателями. В беседе, которая состоялась 15 декабря 2010 года, П. А. Поднебесов выразил озабоченность и тревогу за современное состояние школьного образования. Он полагает, что начиная с 1990—1991 гг. мы потеряли многое из лучших традиций организации и постановки школьного образования: снизили качество теоретической подготовки и требования к контролю знаний, ослабили воспитательную работу в школе. Жизнь постоянно ставит новые проблемы, существенно отличные от тех, которые стояли десять и более лет тому назад.

С этим трудно не согласиться.

Список использованной литературы и архивных источников

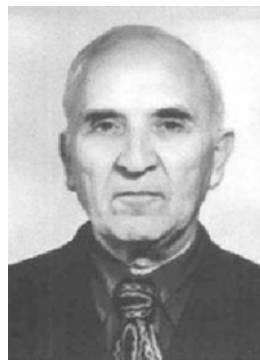
1. ГАОО. Ф. Р-450. Оп. 1. Д. 387. Отчеты и доклады о состоянии школ г. Оренбурга за 1919—1920 г.

2. Улицы Оренбурга : справочник. Оренбург : Оренб. кн. изд-во, 1996.
3. ГАОО. Ф. Р-452. 1 пр. Отдел народного образования исполнительного комитета Оренбургского городского Совета депутатов трудящихся (за 1940—1967—1977 г.). Школьный сектор 1940—1967 гг. Л. 72—159.
4. ГАОО. Ф. Р-452. 1 пр. Д. 649. Паспорт средней школы № 12 1946/47 — 1949/50 гг.
5. ГАОО. Ф. Р-452. 1 пр. Д. 788. Паспорт средней школы № 12 за 1950—1952 уч. годы.
6. Буданцев П. А., Щипакин Г. М. Квадратные и иррациональные уравнения. М. : Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения, 1956. 117 с.

В. А. Коротина

**Петр Алексеевич Буданцев. К 100-летию
со дня рождения**

Петр Алексеевич Буданцев родился 24 июня (11 июня по старому стилю) 1911 года в городе Туринске, Свердловской области. В 1929 году поступил в Оренбургский техникум механизации сельского хозяйства, который успешно окончил в 1932 году, и начал работать в совхозе в должности техника. Осенью этого же года он поступил в Оренбургский пединститут на второй курс физико-математического факультета, на вечернее отделение. Окончил институт в 1935 году с похвальной грамотой.



Петр Алексеевич
Буданцев, 1980-е годы

С июля 1941 по ноябрь 1945 года был в Советской Армии по мобилизации, где проходил службу последовательно: курсантом Оренбургского училища зенитной артиллерии, командиром взвода, помощником начальника штаба полка, заместителем начальника штаба дивизии Москов-

ского фронта ПВО. В ноябре 1945 года демобилизован из Советской Армии как специалист с высшим образованием.



Петр Алексеевич Буданцев —
курсант Оренбургского училища
зенитной артиллерии



Петр Алексеевич Буданцев,
1945 г.

Участие Петра Алексеевича в Великой Отечественной войне, его трудовая деятельность отмечены правительственными наградами. Он награжден орденом Красной Звезды, Отечественной войны II степени, медалью «За победу над Германией в Великой Отечественной войне», знаками «Отличник просвещения СССР» и «Отличник народного просвещения РСФСР».



Петр Алексеевич Буданцев — старший преподаватель
Оренбургского пединститута

После демобилизации Петр Алексеевич продолжил работать старшим преподавателем кафедры математики в Оренбургском пединституте. Здесь он вел элементарную математику и методику преподавания математики.

П. А. Буданцев сыграл огромную роль в истории кафедры математики и всего института. На протяжении многих лет Петр Алексеевич систематически работал над практическим разрешением многих вопросов, имеющих важное значение для успешного преподавания математики в школах. Он оказал громадную помощь учителям г. Оренбурга и области в деле освоения и внедрения новых методических положений, способствующих развитию учащихся. П. А. Буданцев был широко известен как специалист по методике преподавания математики не только в Оренбурге, но и в других городах нашей страны.

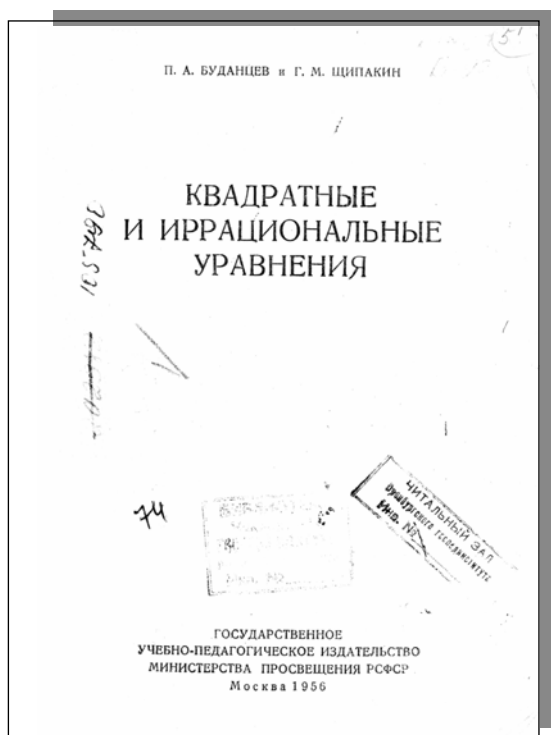
Учителям математики хорошо известны статьи П. А. Буданцева, печатавшиеся в журнале «Математика в школе». Он являлся автором более 50 работ.

Некоторые из работ П. А. Буданцева посвящены основному разделу школьного курса алгебры — уравнениям и неравенствам [2, 4, 8, 10, 14, 15, 20, 21, 22, 24, 27]. В этих работах теория и практика решения уравнений и неравенств построена на новом, нетрадиционном определении равносильности уравнений, позволившем значительно упростить практику решения уравнений. П. А. Буданцевым введен ряд новых теорем о равносильности уравнений, «неуравнений» (т. е. неравенств, содержащих неизвестные) и их систем, а также новых приемов их решений. При изучении указанных вопросов в школе П. А. Буданцев рекомендовал конкретно-индуктивный метод изложения, обеспечивающий активизацию процесса изучения, доступность и сознательность усвоения материала.

В ряде работ [2, 5, 14, 21] рассматриваются вопросы методики изложения тем, касающихся тождественных преобразований математических выражений.

В работе «О методике изложения теории измерения поверхностей тел вращения» [9] рассматривается методика

изложения теории измерения геометрических величин в средней школе. При построении теории измерения объемов и площадей плоских фигур используется единый подход, основанный на общем конструктивном понятии площади и объема, исключающий введение многочисленных и произвольных определений.



Петром Алексеевичем был разработан для школы новый методический вариант изложения теории измерений поверхностей тел вращения. Экспериментальная проверка этого метода изложения дала положительный результат.

Буданцев широко использовал конкретно-индуктивный метод, включающий большое количество экспериментальных (лабораторных) работ, предшествующих формально-логическому изложению материала.

Работы [6, 7, 9, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 26] посвящены обсуждению школьных учебников и программ по математике, а также других учебно-методических пособий.

П. А. Буданцев ежегодно участвовал в работе по подготовке учителей математики, проводимой Институтом усовершенствования учителей Оренбургской области. Он уделял большое внимание постановке преподавания математики в школе. В 1936—1955 гг. по совместительству заведовал кабинетом математики Оренбургского института усовершенствования учителей. Являясь депутатом (двух созывов) Оренбургского областного Совета депутатов трудящихся, возглавлял комиссию Совета по народному образованию. Петр Алексеевич вел большую методическую работу среди учителей города, пропагандируя новое и передовое в методике, занимался изучением и распространением опыта лучших учителей города и области.

Учитывая плодотворную педагогическую и большую научно-исследовательскую работу П. А. Буданцева, дирекция Оренбургского пединститута ходатайствовала о присвоении ему звания доцента без защиты кандидатской диссертации, но эта просьба была отклонена [31].

С 1 февраля 1961 года П. А. Буданцев начал работать в Тульском государственном педагогическом институте им. Л. Н. Толстого. Он прибыл туда опытным методистом и преподавателем с 25-летним стажем работы. По совокупности печатных работ Высшая аттестационная комиссия присвоила П. А. Буданцеву звание доцента.

Как преподаватель П. А. Буданцев отличался высоким педагогическим мастерством. Свои научно-методические изыскания он активно внедрял в практику обучения студентов в системе спецкурсов и спецсеминаров, которые он вел ежегодно на выпускных курсах [29].

П. А. Буданцев — непременный участник многочисленных межвузовских научно-методических конференций и семинаров в пединститутах Урала, Поволжья и Центра, на которых он выступал с сообщениями, руководил работой секций, принимал активное участие в обсуждении док-

ладов и сообщений. Постоянно оказывал помощь авторам методических статей, пособий и диссертаций. Петр Алексеевич энергично трудился на посту председателя Бюро секции математики Тульского областного отделения Педагогического общества РСФСР [32].

Активное участие принимал П. А. Буданцев в проводившейся в нашей стране реформе среднего математического образования. Он являлся участником многих обсуждений проекта новой программы по математике для средней школы.

Скончался П. А. Буданцев в 1990 г.

Список использованной литературы

1. Буданцев, П. А. Вопросы, решение которых не терпит отлагательства. Письмо в редакцию от группы учителей г. Чкалова / П. А. Буданцев [и др.] // Мат. в shk. М., 1949. № 5. С. 30—31.

2. Буданцев, П. А. О функциональной трактовке уравнений, равенств и тождественных преобразований / П. А. Буданцев // Мат. в shk. М., 1951. № 2. С. 70—77.

3. Буданцев, П. А. Сборник задач и упражнений по элементарной математике / П. А. Буданцев [и др.]. Чкалов : Чкал. кн. изд-во, 1951.

4. Буданцев, П. А. О преподавании систематического курса уравнений в 7 классе / П. А. Буданцев // Мат. в shk. М., 1952. № 1. С. 50—65.

5. Буданцев, П. А. Тождественное преобразование иррациональных выражений в курсе VIII класса / П. А. Буданцев // Мат. в shk. М., 1953. № 3. С. 69—77.

6. Буданцев, П. А. О книге «Планы уроков по алгебре в 7 классе» / П. А. Буданцев // Мат. в shk. М., 1956. № 1. С. 84—88.

7. Буданцев, П. А. О книге «С. И. Шварцбург «Системы уравнений» / П. А. Буданцев // Мат. в shk. М., 1956. № 3. С. 78—80.

8. Буданцев, П. А. Квадратные и иррациональные уравнения / П. А. Буданцев, Г. М. Щипакин // Ученые зап. Чкалов. пед. ин-та. Сер. физико-математических наук. Чкалов : Учпедгиз, 1956. Вып. 9. С. 323—426.

9. Буданцев, П. А. О методике изложения теории измерения поверхностей тел вращения / П. А. Буданцев // Там же. С. 427—445.

10. Буданцев, П. А. Квадратные и иррациональные уравнения / П. А. Буданцев, Г. М. Щипакин. М. : Гос. учеб.-пед. изд-во Мин-ва просвещения, 1956. 117 с.

11. Буданцев, П. А. Функции и их графики в курсе 8 класса / П. А. Буданцев, Г. М. Щипакин // Ученые зап. Чкалов. пед. ин-та. Сер. физико-математических наук. Чкалов : Учпедгиз, 1957. Вып. 11. С. 3—50.

12. Буданцев, П. А. О новом учебнике алгебры А. Н. Барсукова, ч. 1 / П. А. Буданцев // Ученые зап. Чкалов. пед. ин-та. Сер. физико-математических наук. Чкалов : Учпедгиз, 1957. Вып. 11. С. 93—121.
13. Буданцев, П. А. О новом школьном учебнике тригонометрии С. И. Новоселова / П. А. Буданцев // Там же. С. 123—134.
14. Буданцев, П. А. К вопросу о равносильности уравнений / П. А. Буданцев // Там же. С. 135—145.
15. Буданцев, П. А. К вопросу о теории и практике решения систем неуравнений / П. А. Буданцев // Там же. С. 147—165.
16. Буданцев, П. А. Об учебнике алгебры А. Н. Барсукова, ч. 1, для VI—VII классов семилетней средней школы / П. А. Буданцев // Мат. в shk. M., 1957. № 5. С. 85—87.
17. Буданцев, П. А. Обсуждение содержания новых программ по математике / П. А. Буданцев // Мат. в shk. M., 1959. № 2. С. 8—10.
18. Буданцев, П. А. Обсуждение проектов программ. О вступительной и объяснительной записках / П. А. Буданцев // Мат. в shk. M., 1960. № 1. С. 7—10.
19. Буданцев, П. А. О пробном учебнике алгебры. Обсуждение книги А. Н. Барсукова. Ч. 2. Обзор отрывков, полученных редакцией (сост. Д. М. Маергойз) / П. А. Буданцев // Мат. в shk. M., 1959. № 4. С. 70—85.
20. Буданцев, П. А. О свойствах систем уравнений / П. А. Буданцев // Мат. в shk. M., 1960. № 6. С. 56—58.
21. Буданцев, П. А. К методике изучения рациональных выражений в курсе алгебры VI—VII классов / П. А. Буданцев // Мат. в shk. M., 1966. № 2. С. 40—48.
22. Буданцев, П. А. Системы уравнений / П. А. Буданцев // Ученые зап. кафедры элементарной математики и методики математики. Тула : Приокское кн. изд-во, 1967. С. 203—233.
23. Буданцев, П. А. Методика изложения теории измерения геометрических величин в курсе геометрии средней школы / П. А. Буданцев // Там же. С. 3—48.
24. Буданцев, П. А. Уравнения с одним неизвестным / П. А. Буданцев // Там же. С. 234—245.
25. Буданцев, П. А. Об одной теореме алгебре и ее применение / П. А. Буданцев // Там же. С. 246—249.
26. Буданцев, П. А. О книге Е. Н. Ермолаевой и З. Я. Квасниковой «Уравнения в курсе алгебре 8—10 классов средней школы» / П. А. Буданцев // Там же. С. 250—254.
27. Буданцев, П. А. К методике решения задач с помощью уравнений / П. А. Буданцев // Мат. в shk. M., 1976. № 3. С. 20—22.
28. Буданцев, П. А. Владимир Яковлевич Саннинский / П. А. Буданцев, Ю. М. Колягин // Мат. в shk. M., 1977. № 1. С. 91.
29. Стародубцев, И. М. О научно-педагогической деятельности Буданцева Петра Алексеевича [Электронный ресурс] / И. М. Стародубцев. URL: <http://www.tspu.tula.ru/content/faculties/math/articles/list/art1>.

30. Саннинский, В. Я. Петр Алексеевич Буданцев (К 60-летию со дня рождения) / В. Я. Саннинский, П. С. Попов // Мат. в shk. М., 1971. № 4. С. 89.

31. Архив ОГПУ. Д. 85. Буданцев П. А.

32. Саннинский, В. Я. П. А. Буданцев / В. Я. Саннинский, А. Е. Ус-
тян, И. А. Баранов // Мат. в shk. М., 1990. № 5. С. 77.

Л. Н. Курбатова

П. А. Буданцев и Г. М. Щипакин об изложении теории функций в школе

Понятие функции в математике является одним из важнейших, оно прошло в истории развития человечества непростой путь. Различные определения этого понятия могут быть разделены на два класса. Первый из них включает определения, возникавшие по мере развития понятия функции и опирающиеся на понятия переменной величины, аналитического выражения, закона (правила) нахождения значений выражения. Подобные определения принято называть классическими (историческими). Ко второму классу логических (современных) определений функции принято относить те из них, которые опираются на понятия отображения, соответствия, отношения, множества пар, не содержащих пар с одинаковыми первыми компонентами, т.е. имеющие теоретико-множественную основу.

В большинстве российских школьных учебников математики до 60-х годов XX века понятие функции давалось с помощью классического определения. Так, в знаменитом учебнике алгебры для 8—10 классов средней школы А. П. Киселева читаем:

«Та из двух связанных между собой переменных величин, которой можно придавать произвольные числовые значения, называется независимой переменной или аргументом.

Та переменная величина, числовые значения которой изменяются в зависимости от числовых значений другой,

называется зависимой переменной или функцией этой другой переменной величины» [4, с. 25].

Уже в 50-е годы XX столетия российское методическое сообщество стало склоняться к возможности и даже необходимости замены классической трактовки понятия функции в школе на логическую. Все настойчивее раздавались голоса, критикующие традиционное изложение материала в школе. Так, учебник А. П. Киселева упрекали, подчас справедливо, за полное отсутствие функциональной пропедевтики в первой части учебника, за ограниченность определения функции ($y = c$, где c — постоянная, по данному определению нельзя считать функцией) и даже за то, что «...в этом определении не упоминается о соответствии между значениями двух величин, т.е. не отражен тот признак, который входит в современное научное определение» [5, с. 157].

В учебнике алгебры для 6—8 классов А. Н. Барсукова, пришедшем в 1956 году на смену учебнику А. П. Киселева, сначала определялось понятие функциональной зависимости и лишь затем функции:

«Если две переменные величины связаны между собой так, что каждому значению одной из них соответствует определенное значение другой, то говорят, что между этими переменными существует функциональная зависимость...» [2, с. 255].

«...Если две переменные находятся в функциональной зависимости, то та из них, которая может принимать произвольные (допустимые) значения, называется независимой переменной или аргументом.

Другая переменная, значения которой зависят от значений аргумента, называется зависимой переменной или функцией этого аргумента» [2, с. 256].

Переход школы на обучение по новому учебнику алгебры вызвал необходимость оказать методическую помощь школьному учителю. Такая помощь учителям Оренбуржья была оказана П. А. Буданцевым в соавторстве с Г. М. Щипакиным.

В статье «Функции и их графики в курсе 8 класса» авторы дают следующее определение понятия функции:

«Функциональным соответствием или функцией называется такое соответствие между значениями двух величин, когда каждому допустимому значению одной величины (аргумента) соответствует одно вполне определенное значение другой величины» [1, с. 7].

Итак, авторы трактуют функцию как функциональное соответствие. Следует согласиться с Г. В. Дорофеевым, что *«безусловное достоинство теоретико-множественного подхода к понятию функции — в его математической, логической строгости; ...представляется, однако, что это чисто логическое достоинство теоретико-множественного подхода является фактически его единственным более или менее существенным преимуществом перед остальными подходами к определению функции...» [3, с. 166].* Заметим, что в статье талантливого педагога П. А. Буданцева в дальнейшем, когда элементарные функции становятся объектом исследования, их теоретико-множественная трактовка практически исчезает.

Авторы считают необходимым напомнить учителю, что в курсах математики 5—7 классов разбросаны сведения о функциях пропедевтического характера. При изучении прямой и обратной пропорциональности величин, при нахождении числовых значений алгебраических выражений и т.п. необходимо подчеркивать зависимость одной переменной величины от изменений других.

Работу над понятием «функция», по мнению авторов, надо начинать с понятий постоянных, переменных величин и соответствия каждому допустимому значению одной переменной величины единственного вполне определенного значения другой переменной величины. В качестве примеров рассматривается зависимость:

- 1) количества теплоты, выделяемой при сгорании какого-либо топлива, от его веса и теплотворности;
- 2) стоимости товара от его количества;

3) суммы внешних углов выпуклого многоугольника от числа его сторон;

4) числа общих точек прямой и окружности от расстояния между центром окружности и прямой;

5) между квадратами целых чисел и самими числами.

Рассмотрев такого рода примеры, авторы дают определения:

«Постоянной величиной в данных условиях рассматриваемого явления (процесса) называется такая величина, которая имеет одно и то же значение в этих условиях.

Переменной величиной называется такая величина, которая в данных условиях может принимать различные допустимые значения (из области вещественных чисел).

Таким образом, постоянная величина может рассматриваться как такая переменная, которая принимает одни и те же значения» [1, с. 6—7].

Замечательно то, что в разобранных зависимостях соответствие в пятом примере — не функция; в третьем — постоянная функция; в четвертом — функция, принимающая в промежутках $(0; R)$ и $(R; \infty)$ постоянные значения 2 и 0 соответственно, и лишь когда аргумент достигает значения R , непрерывно возрастаая или убывая, функция, изменяясь скачкообразно, принимает свое третье возможное значение 1.

На этапе закрепления введенных определений авторы советуют наряду с примерами функций одного аргумента, предложенных учителем и приведенных самими учащимися, обязательно привести примеры функций двух и более аргументов (площадь прямоугольника как функция его сторон; путь при равномерном движении как функция скорости и времени; объем прямоугольного параллелепипеда как функция трех его измерений и т.п.).

Область определения функции трактуется как множество допустимых значений аргумента, а область значений функции — как множество соответствующих значений другой переменной. При этом напоминает, что сама вторая переменная также именуется условно функцией.

Из способов задания функций для восьмиклассников выделены: табличный, аналитический и графический.

Среди функций, заданных аналитически, авторы выделяют те, которые задаются с помощью нескольких аналитических выражений, подводя учащихся к ним через анализ задач.

Задача. Автомобиль из пункта A движется в пункт B , отстоящий от A на расстояние 10 км. Первый километр своего пути автомобиль двигался равномерноускоренно. Следующие 9 километров автомобиль двигался с постоянной скоростью в 20 км, которой он достиг в конце первого километра от A . Достигнув B , автомобиль резко затормозил и быстро остановился. Выразить скорость движения автомобиля v в зависимости от расстояния x между автомобилем и пунктом A .

Данная задача, проанализированная и решенная в классе, приведет к функции $y = \begin{cases} 20x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 20, & 1 < x < 10, \\ 0, & x = 10. \end{cases}$

Четвертый пример из рассмотренных выше дает функцию $y = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < R, \\ I, & x = R, \\ 0, & x > R. \end{cases}$

Методический интерес имеет точка зрения авторов на изображение графиков функций. Определение они предлагают дать только после построения по точкам нескольких графиков, причем определение звучит так: «...*графиком функции называется множество всех тех и только тех точек плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента, а ординаты — соответствующие значения функции*» [1, с. 12].

Школьникам предлагаются задачи, приводящие к функциям, заданным одним и тем же аналитическим выражением, но на различных числовых множествах:

1. Цена одной чернильницы 2 руб. Выразить зависимость между количеством чернильниц, купленных для

школы, и их стоимостью. Построить график этой зависимости.

2. Основание прямоугольника равно 2 см. Выразить зависимость между высотой x и площадью y прямоугольника.

3. Пусть задана функция $y = 2x$, где x — любое действительное число. Построить график этой функции.

Во всех трех случаях зависимость выразится формулой $y = 2x$, но если в третьем случае графиком является прямая линия, проходящая через начало координат, то во втором — полупрямая (луч), не имеющая начальной точки, а в первом — дискретное множество точек с целочисленными неотрицательными координатами.

Решение таких задач позволяет учителю сделать важный вывод о том, что функция считается заданной, если заданы область ее определения, область ее значений и закон, по которому для каждого числа из области определения функции ставится в соответствие ему единственное число из области значений.

Заметим, что в таком дидактическом комплексе связываются воедино все три способа задания функции.

Схема изучения функции в средней школе, по мнению П. А. Буданцева и Г. М. Щипакина, должна включать в себя следующие пункты:

1. Определение данной функции.
2. Область определения функции.
3. Область значения функции, наибольшее и наименьшее значения функции.
4. Ограниченность и неограниченность функции.
5. График функции.
6. Возрастание и убывание функции (монотонность).
7. Четность и нечетность функции.
8. Периодичность функции.
9. Выпуклость и вогнутость функции.

При этом каждый пункт сопровождается определением, пояснением и графической иллюстрацией. Например, *«...функция называется ограниченной, если абсолютное значение ее при любых значениях аргумента не превосхо-*

дит какого-либо положительного числа, или иначе $f(x)$ — ограниченная функция, если $|f(x)| < M > 0$ при любом x .

...график ограниченной функции **целиком** расположен в полосе между прямыми $y = M$ и $y = -M$ » [1, с. 14—15].

Авторы настаивают на том, что, изучая с детьми элементарные функции, необходимо учить их «читать» графики, выдвигать гипотезы, но затем их обязательно доказывать. Показателен в этом смысле пример исследования функции $y = ax^2$ на выпуклость и вогнутость, приведенный в работе:

«...Графики показывают, что функция $y = ax^2$ выпуклая при $a < 0$ и вогнутая при $a > 0$.

Доказательство

Так как $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 < \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$, то при $a < 0$

$$a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 > \frac{ax_1^2 + ax_2^2}{2}, \text{ а при } a > 0$$

$$a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 < \frac{ax_1^2 + ax_2^2}{2}.$$

Следовательно, интуитивное заключение из графиков о выпуклости и вогнутости функции $y = ax^2$ верно...» [1, с. 28].

Приведенная методическая концепция «через целесобразно подобранные задачи перейти к наглядным графическим образам, выдвинуть гипотезы и обосновать их с помощью логических доказательств» позволяла учителю развивать у детей функциональное мышление, так необходимое при изучении математики в дальнейшем.

Список использованной литературы

1. Буданцев, П. А. Функции и их графики в курсе 8-го класса / П. А. Буданцев, Г. М. Щипакин // Ученые записки Чкалов. гос. пед. ин-та им. В. П. Чкалова. Сер. физико-математических наук. Чкалов, 1957. Вып. 11. С. 3—50.

2. Барсуков, А. Н. Алгебра. Учебник для VI—VIII кл. / А. Н. Барсуков ; ред. С. И. Новоселов. 9-е изд., доп. и перераб. М. : Гос. уч.-пед. изд-во Мин-ва просвещения РСФСР, 1964. 296 с.

3. Дорофеев, Г. В. Понятие функции в математике и школе / Г. В. Дорофеев // Математика для каждого / предисл. Л. Д. Кудрявцева. М. : Аякс, 1999. С. 145—177.

4. Киселев, А. П. Алгебра : учебник для 8—10 кл. ср. шк. Ч. 2 / А. П. Киселев. 27-е изд. М. : Гос. уч.-пед. изд-во Мин-ва просвещения РСФСР, 1950. 232 с.

5. Ляпин, С. Е. Методика преподавания математики : пособие для учит. математики 8—10 кл. ср. шк. Ч. 2 / С. Е. Ляпин, С. А. Гастева, З. Я. Квасникова, Б. И. Крельштейн. Л. : Гос. уч.-пед. изд-во Мин-ва просвещения РСФСР, Ленингр. отд., 1956. 654 с.

И. В. Игнатушина

О работе К. А. Торопова «Магический ряд и применение его к решению задач»

В 1894 году в Перми Константин Александрович Торопов опубликовал «Краткий курс прямолинейной тригонометрии», в котором предложил интересную теорию решения треугольников. Впоследствии Константин Александрович развил дальше общую теорию решения треугольников и результаты исследования опубликовал в 1908 году в своей книге «Магический ряд и применение его к решению задач», вышедшей из печати в Таганроге. Второе издание этой книги [см. приложение] вышло в 1911 году в Оренбурге, а затем еще раз было переиздано в 1922 году под названием «Конспективный курс прямолинейной тригонометрии».

Работа «Магический ряд и применение его к решению задач» интересна с методической точки зрения, поскольку в ней описан очень простой для понимания принцип решения треугольников. Исходными являются две теоремы, которые должны быть известны учащимся:

1) теорема синусов $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (рис. 1);

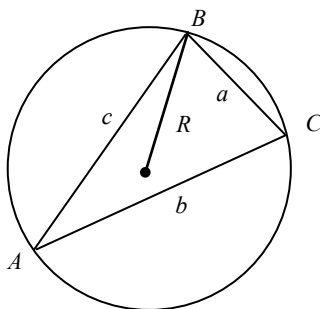


Рис. 1

2) теорема о том, что алгебраическая сумма, составленная из числителей равных отношений, относится к такой же сумме из знаменателей, как один из этих числителей относится к своему знаменателю.

Например, если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{f}{g}$, то $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$

и $\frac{a-c+f}{b-d+g} = \frac{a}{b}$.

Отсюда получается:

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B} = \frac{a-b}{\sin A - \sin B} = \\ &= \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a+b-c}{\sin A + \sin B - \sin C} = \dots \end{aligned}$$

Эта цепочка равенств и есть «магический ряд», который фигурирует в названии работы.

Далее показано, как получить аналогичные соотношения для нахождения высот, биссектрис и медиан треугольника.

1. Поскольку высоты (рис. 2) треугольника h_a , h_b , h_c удовлетворяют соотношениям:

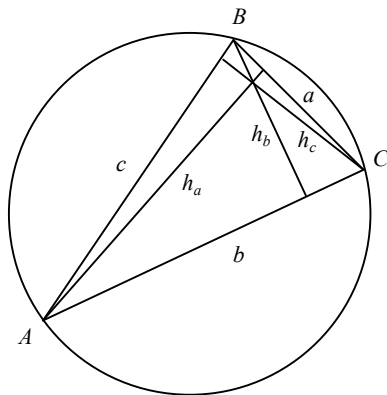


Рис. 2

$$a = \frac{h_c}{\sin B}, \quad b = \frac{h_a}{\sin C}, \quad c = \frac{h_b}{\sin A},$$

$$\text{то } 2R = \frac{h_c}{\sin A \sin B} = \frac{h_b}{\sin A \sin C} = \frac{h_a}{\sin B \sin C}.$$

2. Пусть $BL = l_b$ — биссектриса треугольника (рис. 3).

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \angle LBC &= \frac{1}{2} \angle B; \angle DBC = 90^\circ - \angle C \quad \text{и} \quad \angle LBD = \\ &= \frac{1}{2} \angle B - (90^\circ - \angle C) = \frac{\angle B + 2\angle C - 180^\circ}{2} = \frac{\angle C - \angle A}{2}. \end{aligned}$$

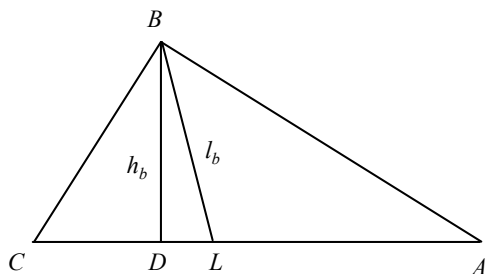


Рис. 3

Пусть $BD = h_b$ — высота треугольника, тогда

$$BD = BL \cdot \cos \frac{\angle C - \angle A}{2} \quad \text{или} \quad h_b = l_b \cdot \cos \frac{\angle C - \angle A}{2}.$$

Учитывая полученные ранее соотношения для высот треугольника, имеем:

$$2R = \frac{l_a \cdot \cos \frac{\angle B - \angle C}{2}}{\sin B \sin C} = \frac{l_b \cdot \cos \frac{\angle C - \angle A}{2}}{\sin C \sin A} = \frac{l_c \cdot \cos \frac{\angle A - \angle B}{2}}{\sin A \sin B}.$$

3. Пусть $BM = m_b$ — медиана треугольника (рис. 4).

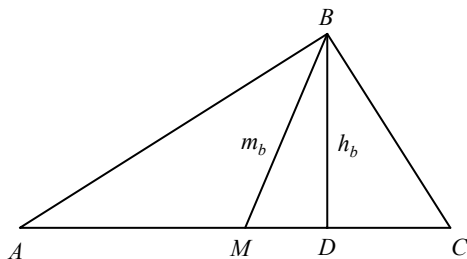


Рис. 4

Обозначим $\angle BMD$ через ω , тогда $h_b = m_b \sin \omega$. Угол ω можно найти из соотношения $\operatorname{ctg} \omega = \frac{\sin(B - C)}{2 \sin B \sin C}$, которое Торопов здесь же выводит. Тогда, учитывая полученные ранее соотношения для высот треугольника, имеем:

$$2R = \frac{m_b \sin \omega}{\sin A \sin C}.$$

Затем Торопов дает свою классификацию задач на нахождение элементов треугольника по трем данным элементам, однозначно определяющим этот треугольник. Он выделяет пять основных групп таких задач:

- 1) даны два угла и один какой-нибудь линейный элемент;
- 2) даны один угол и два линейных элемента;
- 3) даны три линейных элемента;
- 4) известно отношение линейных элементов;
- 5) даны некоторые соотношения, содержащие известные углы, которые составляют стороны треугольника с каким-нибудь направлением.

Их решение дается на конкретных примерах.

В заключение своей работы Торопов излагает все полученное в более общей форме. Он рассматривает однородную функцию n -го порядка $f(a, b, c)$, связывающую стороны треугольника a, b, c . Тогда для этой функции справедливо равенство: $f(ka, kb, kc) = k^n f(a, b, c)$.

Положив здесь $k = \frac{l}{2R}$, он получает

$$f\left(\frac{a}{2R}, \frac{b}{2R}, \frac{c}{2R}\right) = \frac{l}{(2R)^n} f(a, b, c).$$

Отсюда, учитывая теорему синусов, имеем:

$$f(a, b, c) = (2R)^n f(\sin A, \sin B, \sin C).$$

$$\text{Следовательно, } 2R = \frac{\sqrt[n]{f(a, b, c)}}{\sqrt[n]{f(\sin A, \sin B, \sin C)}}.$$

Таким образом, получается ряд равных отношений

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt[n]{f(a, b, c)}}{\sqrt[n]{f(\sin A, \sin B, \sin C)}},$$

который Торопов назвал магическим.

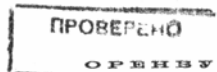
В этом ряду заключаются все возможные соотношения между линейными элементами треугольника a, b, c и некоторым отрезком l , зависящим от них, поскольку l всегда можно выразить через a, b, c с помощью некоторой однородной функции f : $l = f(a, b, c)$.

М. Морозовъ.

Магическій рядъ
и примѣненіе его къ рѣшенію задачъ.



Изданіе второе, исправленное и дополненное.



ТИПО-ЛИТОГРАФІЯ Т-ВА НАРИМОВЪ, ХУСАИНОВЪ И К-О.

1911.

К. Торопов

Магический ряд и его применение к решению задач

Предисловие к первому изданию

В 1894 году мною был издан «Краткий курс тригонометрии», где, между прочим, была предложена теория решения треугольников вместе с общим способом получения всех формул, необходимых для решения задач. Курс не имел широкого распространения. В 1900 году в журнале «Вестник опытной физики и математики» С. Шатуновским была помещена статья «О некоторых методах решения задач тригонометрии на плоскости», где автором в несколько иной форме указан тот же способ получения всех тригонометрических формул. После моего письма в редакцию г. Шатуновский заметкою от себя в № 288 восстановил мой приоритет в этом вопросе.

Хотя отзывы о моей книжке были напечатаны в журналах «Педагогический сборник» и «Журнал Министерства народного просвещения», тем не менее через 10 лет после выхода ее, в 1904 году, в газете «Русские ведомости» А. К. Иванов — по-видимому инженер — в заметке о конкурсных испытаниях высказывает между прочим удивление, что как экзаменаторам, так и экзаменующимся неизвестен простой способ решения тригонометрических задач при помощи «магического ряда». Этим именем он называет тот ряд равных отношений, который мною дан как основа для теории решения треугольников, причем г. Иванов указывает, что он познакомился с этим рядом в моем «Курсе».

Со слов моих бывших учеников, подвергавшихся конкурсным испытаниям как в прежние, так и в последние годы, я знаю, что как раньше, так и теперь ответы их по тригонометрии вызывают удивление экзаменаторов. Один из учеников последнего выпуска, экзаменовавшийся в 1907 г.

в С.-Петербургских институтах, пишет мне: «Ваш ряд оказывает неоценимые услуги при решении задач, только необходимо уметь ясно его вывести, потому что профессора обыкновенно удивляются тем готовым формулам, которые получаются из Вашего ряда, и поэтому требуют объяснения, после чего остаются довольны». Другой ученик раньше писал, что экзаменаторы знакомы с моим рядом не дальше первых пяти его формул, «так как они из готовых формул спрашивают только формулы Мольвейде».

Желая положить конец такому странному неведению, я решил выпустить в виде отдельной брошюры поименованную в начале главу своего «Курса», упростить несколько способов вывода формул и расширив ее решенными и нерешенными задачами.

Таганрог

Март 1908 года.

Предисловие ко второму изданию

Так как первое издание разошлось без остатка, а спрос на книжку продолжается, я нашел нужным выпустить настоящее второе издание, несколько измененное и дополненное задачами.

Оренбург

Декабрь 1911 года. К. Торопов

1. Вывод формул

1. Основной теоремой в учении о решении треугольников служит теорема синусов: ***стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов.***

Обозначив стороны треугольника через a , b и c , противолежащие им углы через A , B и C и радиус окружности, описанной около этого треугольника, через R , можем представить эту теорему в следующем равенстве:

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Применив к этим равенствам доказываемую в алгебре теорему о ряде равных отношений: **алгебраическая сумма предыдущих членов равных отношений относится к такой же сумме последующих, как один из предыдущих относится к своему последующему**, — получим новые отношения, каждое из которых равняется каждому из данных отношений.

Напишем некоторые из этих отношений:

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B} = \frac{a-b}{\sin A - \sin B} = \\ &= \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a+b-c}{\sin A + \sin B - \sin C} = \\ &= \frac{a-b+c}{\sin A - \sin B + \sin C} = \frac{b+c-a}{\sin B + \sin C - \sin A}. \end{aligned}$$

Новые отношения представим в ином виде, пользуясь тождествами

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2},$$

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} = 2 \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \text{ и условным обо-}$$

значением $a+b+c=2p$, откуда $a+b-c=2(p-c)$, $a+c-b=2(p-b)$, $b+c-a=2(p-a)$.

Произведя в равных отношениях эти замены, получим:

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b}{2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \\ &= \frac{a-b}{2 \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{p}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p-a}{2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{p-b}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \\
&= \frac{p-c}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}. \quad (1)
\end{aligned}$$

2. Кроме отношений, составленных указанным способом, можем получить еще много новых, равных предыдущим, на основании следующего соображения: каждое из отношений равняется $2R$, следовательно, произведение двух отношений равно $(2R)^2$, трех — $(2R)^3$ и т.д., а потому $2R$ равняется корню квадратному из произведения двух отношений, или кубическому из произведения трех отношений и т.д.

Пользуясь этим и тождествами вида

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2},$$

введем в ряд равных отношений такие:

$$\begin{aligned}
2R &= \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin A \sin B}} = \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C}} = \\
&= \frac{\sqrt{ap}}{2 \cos \frac{A}{2} \sqrt{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}} = \frac{\sqrt{a(p-a)}}{2 \cos \frac{A}{2} \sqrt{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}} = \\
&= \frac{\sqrt{a(p-b)}}{2 \sin \frac{A}{2} \sqrt{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}} = \frac{\sqrt{p(p-a)}}{\cos \frac{A}{2} \sqrt{\sin B \sin C}} = \\
&= \frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{\sin \frac{A}{2} \sqrt{\sin B \sin C}} = \frac{\sqrt{2pR}}{\sqrt{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}} = \\
&= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{\sin C \sin(A-B)}}. \quad (2)
\end{aligned}$$

3. В найденные равные отношения входят линейные элементы треугольника: стороны, R и p , но так как при решении треугольников в число данных или искомых могут входить и другие элементы, например площадь, биссектрисы углов, радиусы вписанных треугольников и прочее, необходимо в ряд равных отношений ввести и эти элементы. Для этого достаточно знать выражения этих элементов в зависимости от какого-нибудь другого элемента и углов треугольника.

Если обозначим **высоты** треугольника через h_a , h_b , h_c , то $h_a = b \sin C$, $h_b = c \sin A$, $h_c = a \sin B$, откуда $a = \frac{h_c}{\sin B}$, $b = \frac{h_a}{\sin C}$, $c = \frac{h_b}{\sin A}$.

Заменяя в равенствах $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ стороны найденными значениями, получим

$$2R = \frac{h_c}{\sin A \sin B} = \frac{h_b}{\sin A \sin C} = \frac{h_a}{\sin B \sin C}.$$

Площадь треугольника можем ввести при помощи равенства

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C,$$

откуда $ab = \frac{2S}{\sin C}$. Заменяя в формуле (2) ab его выражением, получим

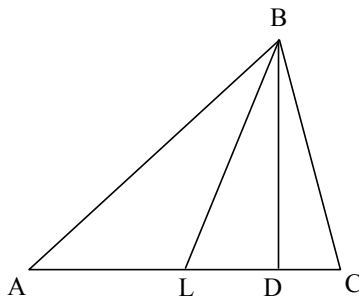
$$2R = \frac{\sqrt{2S}}{\sqrt{\sin A \sin B \sin C}}.$$

Для проведения **биссектрис** заметим, что каждая биссектриса составляет с высотой, выходящей из той же вершины, угол, равный полуразности при основании (черт. 1).

В самом деле, $\angle LBC = \frac{1}{2} B$ и $\angle DBC = 90^\circ - C$, следовательно, $\angle LBD = \frac{1}{2} B - (90^\circ - C) = \frac{B + 2C - 180^\circ}{2} = \frac{C - A}{2}$, так

как $180^\circ = A + B + C$. Поэтому $BD = BL \cos \frac{C-A}{2}$, или

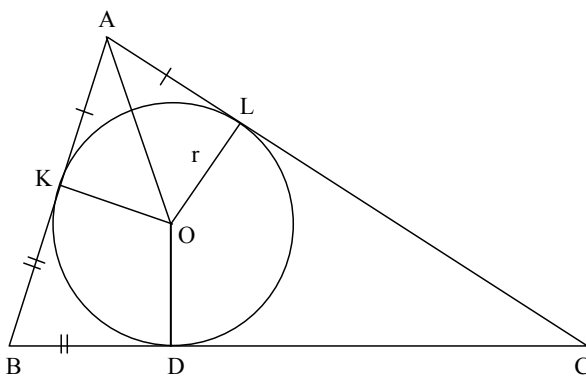
$h_b = l_b \cos \frac{C-A}{2}$, где l_b есть биссектриса угла B .



Черт. 1

Заменяя в только что выведенных отношениях h_a , h_b и h_c их значениями, получим

$$2R = \frac{l_a \cos \frac{B-C}{2}}{\sin B \sin C} = \frac{l_b \cos \frac{C-A}{2}}{\sin C \sin A} = \frac{l_c \cos \frac{A-B}{2}}{\sin A \sin B}.$$



Черт. 2

Для введения радиуса *описанности*, *вписанной* в треугольник, заметим, что (черт. 2) $OL = AL \operatorname{tg} \frac{A}{2}$,

где $OL = r$ — радиусу вписанного круга. Так как $AK = AL$, $BD = BK$, $CL = CD$ и в то же время сумма всех отрезков равна $2p$, то $AL + BK + CD = p$, откуда

$$AL = p - (BK + CD) = p - (BD + CD) = p - a.$$

Следовательно, имеем $r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, а отсюда

$$p - a = \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}.$$

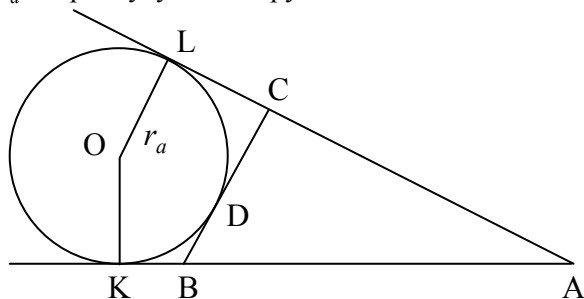
Заменяя в равенстве из (1) $2R = \frac{p - a}{2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$

его значением, получим $2R = \frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$.

Введем попутно и **радиусы вневписанных окружностей**, обозначив их через r_a , r_b , r_c .

Пусть окружность (черт. 3) касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC , тогда $OL = AL \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, где

$OL = r_a$ — радиусу этой окружности.



Черт. 3

В то же время имеем $OK = AK \operatorname{tg} \frac{A}{2}$, где тоже $OK = r_a$.

Сложив эти два равенства, получим

$$2r_a = (AK + AL) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \text{ или } 2r_a = (AB + BK + AC + CL) \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

$$2r_a = (AB + BD + AC + DC) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = (AB + AC + BC) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 2p \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

откуда $p = \frac{r_a}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}.$

Точно таким же способом могли бы получить $p = \frac{r_b}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}}$

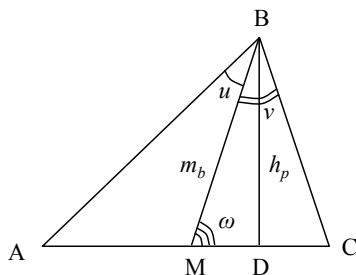
и $p = \frac{r_c}{\operatorname{tg} \frac{C}{2}}.$ Заменяя в равенстве из (1)

$$2R = \frac{p}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \quad p \text{ его значениями, получим:}$$

$$2R = \frac{r_a}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{r_b}{2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{r_c}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$$

Пусть BM (черт. 4) будет **медиана** стороны AC .



Черт. 4

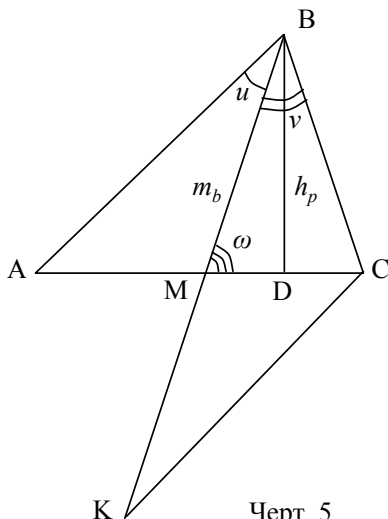
Обозначив ее через m_b и угол BMD через ω , получим $h_b = m_b \sin \omega$, так что в ряде равных отношений будет такое:

$$2R = \frac{m_b \sin \omega}{2 \sin A \sin C}.$$

Угол ω может быть определен в зависимости от углов треугольника следующим образом. Продолжим медиану (черт. 5) до пересечения с $CK \parallel AB$ и, обозначив угол ABM через u и угол CBM через v , получим из треугольника BCK

$$\frac{BC}{\sin u} = \frac{CK}{\sin v},$$

или $\frac{a}{\sin u} = \frac{c}{\sin v}$, и в то же время $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$.



Черт. 5

После разделения этих равенств найдем $\frac{\sin u}{\sin A} = \frac{\sin v}{\sin C}$, а так как $u = w - A$ и $v = 180^\circ - \omega - C$, то последнее равенство может быть представлено в таком виде:

$$\frac{\sin(\omega - A)}{\sin A} = \frac{\sin(\omega + C)}{\sin C}.$$

Раскрыв числители, получим:

$$\sin \omega \operatorname{ctg} A - \cos \omega = \sin \omega \operatorname{ctg} C + \cos \omega,$$

откуда после деления на $\sin \omega$

$$2 \operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} C = \frac{\sin(C - A)}{\sin A \sin C}.$$

Это равенство дает возможность вычислить угол ω по данным углам треугольника.

Если бы мы пожелали ввести в ряд равных отношений какие-нибудь элементы треугольника, то применили бы указанные здесь способы.

Ограничившись пока найденными отношениями, имеем кроме (1) и (2) еще отношения

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{h_a}{\sin B \sin C} = \frac{\sqrt{2S}}{\sqrt{\sin A \sin B \sin C}} = \frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \\ &= \frac{r_a}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{l_a \cos \frac{B-C}{2}}{\sin B \sin C} = \frac{m_a \sin \omega}{\sin B \sin C}, \end{aligned} \quad (3)$$

где угол ω определяется по формуле $2 \operatorname{ctg} \omega = \frac{\sin(B-C)}{\sin B \sin C}$.

4. Применив к новым отношениям свойство ряда равных отношений (сумма предыдущих и т.д.), получим еще новые отношения, например,

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{r + r_a}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \frac{r_a - r}{2 \sin^2 \frac{A}{2}} = \\ &= \frac{r_b + r_c}{2 \cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{r_b - r_c}{2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2}} = \frac{h_a + r_a}{2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{h_a - r}{2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \frac{h_a - 2r}{4 \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}} = \frac{2h_a + r_a - r}{2 \cos^2 \frac{B-C}{2}}, \quad (4)$$

так как $\sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}$ и $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$.

5. Отметим здесь одно соотношение, известное из геометрии.

Из равенств

$$\begin{aligned} \frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} &= \frac{r_a}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \\ &= \frac{r_b}{2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{r_c}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \text{ получим:} \end{aligned}$$

$$\frac{r}{r_a} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}, \quad \frac{r}{r_b} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}, \quad \frac{r}{r_c} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2},$$

откуда $\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$, или

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r},$$

откуда следует, что из четырех радиусов вписанных окружностей только три являются независимыми между собою, четвертый же есть функция прочих трех.

6. Из равных отношений (4) и предыдущих можно еще составить новые отношения при помощи умножения отношений, как это было указано в § 2.

Составим несколько таких отношений.

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{\sqrt{(r_a - r)(r_b + r_c)}}{\sin A} = \frac{\sqrt{rr_a}}{\sin \frac{A}{2} \sqrt{\sin B \sin C}} = \\ &= \frac{\sqrt{r_b r_c}}{\cos \frac{A}{2} \sqrt{\sin B \sin C}} = \frac{\sqrt{pr_a}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \sqrt{2 \sin A}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{(p-a)r_a}}{\sqrt{\frac{1}{2} \sin A \sin B \sin C}} = \frac{\sqrt{(p-c)r_b}}{\cos \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2} \sqrt{2 \sin A}} = \\
&= \frac{\sqrt{(p-a)r}}{\sin \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2} \sqrt{2 \sin A}}. \tag{5}
\end{aligned}$$

Сравним эти отношения с (2) и (1), получим между прочим такие соотношения между линейными элементами треугольника

$$\begin{aligned}
a^2 &= (r_a - r)(r_b + r_c), \quad p(p-a) = r_b r_c, \\
(p-b)(p-c) &= r r_a.
\end{aligned}$$

7. Очевидно, что составленный такими приемами ряд равных отношений путем различных комбинаций элементов треугольника может быть продолжен неограниченно.

Этот ряд называли *магическим рядом*, вероятно, на том основании, что из этого бесконечного ряда формул при решении задач немедленно выделяются те формулы, которые нужны для решения именно предложенной задачи.

Полезно запомнить главнейшие из равных отношений:

$$\begin{aligned}
2R &= \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b}{2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \\
&= \frac{a-b}{2 \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A-B}{2}} = \frac{p}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \\
&= \frac{p-a}{2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{h_a}{\sin B \sin C} = \frac{l_a \cos \frac{B-C}{2}}{\sin B \sin C} = \\
&= \frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{r_a}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2S}}{\sqrt{\sin A \sin B \sin C}} = \frac{m_a \sin \omega}{\sin B \sin C}^*, \quad (6)$$

где ω определяется из уравнения $\operatorname{ctg} \omega = \frac{\sin(B-C)}{2 \sin B \sin C}$.

$$\text{Так как } \sin \omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \omega}},$$

то после замены получим

$$\sin \omega = \frac{2 \sin B \sin C}{\sqrt{4 \sin^2 B \sin^2 C + \sin^2(B-C)}}$$

и, следовательно, последнее отношение ряда может быть

$$\text{представлено в виде } 2R = \frac{2m_a}{\sqrt{4 \sin^2 B \sin^2 C + \sin^2(B-C)}}.$$

2. Основная группа задач

8. В задачах на решение треугольников задаются три элемента, по которым должны быть определены другие элементы треугольника. Необходимо, чтобы эти три элемента были независимы между собой, так как в противном случае данными являются только два элемента, а два не определяют треугольника. Например, элементы: сторона, противолежащий ей угол и радиус описанной окружности — не определяют треугольника, между ними существует зависимость ($a = 2R \sin A$), вследствие чего по этим данным нельзя решить треугольник.

* Равенства $\frac{c}{\sin C} = \frac{a+b}{2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \frac{a-b}{2 \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A-B}{2}}$, пре-

образованные в простейший вид $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}, \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}},$

носят названия первой и второй *формул Мольвейде*.

Точно так же нельзя решить треугольник по трем его углам ($A + B + C = 180^\circ$).

Под основную группой задач на решение треугольников мы подразумеваем задачи, к решению которых сводится решение всех других задач.

Таковыми задачами являются те, в которых данным будут *два угла треугольника и один какой-нибудь линейный элемент*.

Решение такого рода задач при помощи магического ряда не представляет решительно никаких затруднений.

Пример 1. Определить площадь треугольника, зная его углы и периметр.

Из ряда берем отношения, из которых одно содержит площадь, а другое — периметр:

$$\frac{\sqrt{2S}}{\sqrt{\sin A \sin B \sin C}} = \frac{p}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}, \text{ откуда}$$

$$S = \frac{p^2 \sin A \sin B \sin C}{8 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}} \text{ или } S = p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

Пример 2. Определить радиус круга, вписанного в треугольник, зная его углы и одну из биссектрис l_a .

Из ряда берем отношения, из которых одно содержит r , а другое — l_a :

$$\frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{l_a \cos \frac{B-C}{2}}{\sin B \sin C}, \text{ откуда}$$

$$r = \frac{2 l_a \cos \frac{B-C}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin B \sin C},$$

$$\text{или } r = \frac{l_a \cos \frac{B-C}{2} \sin \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

Пример 3. Вычислить радиусы вневписанных окружностей r_a , r_b , r_c , зная углы треугольника и его площадь.

Берем отношения

$$\frac{r_a}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\sqrt{2S}}{\sqrt{\sin A \sin B \sin C}}, \text{ откуда}$$

$$r_a = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \sqrt{2S}}{\sqrt{\sin A \sin B \sin C}}, \text{ или } r_a = \sqrt{\operatorname{Stg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}};$$

точно так же найдем

$$r_b = \sqrt{\operatorname{Stg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}} \text{ и } r_c = \sqrt{\operatorname{Stg} \frac{C}{2} \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2}}.$$

9. Из приведенных примеров видно, что для решения этого рода задач магический ряд доставляет немедленно уравнение, из которого определяется искомый элемент треугольника.

Тот же характер имеет решение задач, в которых даются углы треугольника и требуется вычислить отношение двух каких-нибудь линейных элементов треугольника.

Пример 4. Определить $r : r_a$.

Берем отношения, из которых одно содержит r , а другое — r_a :

$$\frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{r_a}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}};$$

переставив средние члены пропорции, получим

$$\frac{r}{r_a} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

Пример 5. Определить $h_a : (b - c)$.

Берем отношения
$$\frac{h_a}{\sin B \sin C} = \frac{b - c}{2 \sin \frac{B - C}{2} \sin \frac{A}{2}},$$

откуда

$$\frac{h_a}{b-c} = \frac{\sin B \sin C}{2 \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{A}{2}}.$$

Пример 6. Определить $S : r^2$.

Берем отношения

$$\frac{\sqrt{2S}}{\sqrt{\sin A \sin B \sin C}} = \frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}, \text{ откуда}$$

$$\frac{S}{r^2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

10. Задачи

№	Даны:	Вычислить:
1.	r, A, B	S и p
2.	h_a, B, C	S и r_u
3.	r_c, A, B	p и $\sqrt{ab}$
4.	$a-b, A, B$	S и r_c
5.	$p-c, A, B$	m_c и $\sqrt{pc}$
6.	p, A, B	$r_a - r$ и $\sqrt{h_a h_b}$
7.	$h_a + h_b, A, B$	$r_a + r_b$ и $\sqrt{pR}$
8.	$h_a + r_a, A, B$	$\sqrt{ap}$ и $h_a - r_a$
9.	$r + r_a, B, C$	$p - a$ и $b + c$
10.	$\sqrt{rr_a}, B, C$	$b + c$ и m_a
11.	$\sqrt{pr}, A, B$	$a + b$ и l_a
12.	$\sqrt{h_a l_a}, B, C$	S и p
13.	A и B	$r : p$
14.	A и B	$S : r_a r_b$
15.	A и B	$rr_a : r_b r_c$
16.	A и B	$(r_a - r) : (r_a + r)$

17.	A и B	$r : m_a$
18.	A и B	$S : pr_a$
19.	A и B	$(p-a) : (p-b)$
20.	A и B	$r^2 : h_a l_a$

3. Вторая группа задач

11. Ко второй группе мы отнесем задачи, в которых данными будут **один угол и два линейных элемента**.

Задачу как этой группы, так и следующих будем считать решенной, когда сведем ее к одной из задач основной группы.

Для решения задач второй группы берем из магического ряда два отношения, предыдущие члены которых даны, и если из полученного таким образом уравнения определяется один из неизвестных углов, то задача этим самым уже сводится к основной. Если же из полученного уравнения трудно или неудобно определить второй угол, то следует в магическом ряде поискать два таких отношения, предыдущие члены которых представляли бы комбинации данных элементов, и вместе с тем из полученного уравнения легко было бы определить второй угол.

В случаях, когда таких более удобных отношений в магическом ряде не оказывается, иногда определяют третий линейный элемент и после этого уже получают уравнение, из которого легко определяется второй угол.

12. Поясним сказанное примерами.

Пример 7. Решить треугольник, когда даны $a + c$, c и C .

$$\text{Берем отношения: } \frac{a+b}{2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\text{откуда } \cos \frac{A-B}{2} = \frac{(a+b) \sin \frac{C}{2}}{c}.$$

Вычислив по этой формуле $\frac{A-B}{2} = \omega$ и зная, что $\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$, получим после сложения и вычитания этих равенств

$$A = \omega + 90^\circ - \frac{C}{2} \text{ и } B = 90^\circ - \omega - \frac{C}{2}.$$

Задача сведена к основной.

Пример 8. Решить треугольник, когда даны $a+b$, c и A .

Если взять те же отношения, что и в предыдущем примере, то получится уравнение, из которого неудобно определить второй угол. Комбинации данных линейных элементов $a+b$ и c показывают, что при настоящем задании следует считать известными элементами такие:

$$a+b+c = 2p \text{ и } a+b-c = 2(p-c).$$

Поэтому можем взять отношения:

$$\frac{p}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{p-c}{2 \cos \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}},$$

откуда $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{(p-c) \operatorname{ctg} \frac{A}{2}}{p}.$

Угол B отсюда определяется, и задача сводится к основной.

Пример 9. Решить треугольник, когда даны a , b и C .

Если взять уравнение $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ или, так как

$$\sin B = \sin(A+C), \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin(A+C)},$$

то для определения угла A получится уравнение, неудобное для решения. Вследствие этого, составляем комбинации данных элементов a и b :

$$a+b \text{ и } a-b$$

и берем равенство

$$\frac{a+b}{2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \frac{a-b}{2 \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A-B}{2}},$$

откуда $\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$, после чего, как в примере 7, задача сводится к основной.

Пример 10. Решить треугольник, когда даны R , $2p$ и A .

$$\text{Берем равенство } 2R = \frac{p}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

Из этого уравнения возможно определить прочие углы следующим образом:
имеем

$$2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{p}{2R \cos \frac{A}{2}},$$

или

$$\cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{B+C}{2} = \frac{p}{2R \cos \frac{A}{2}},$$

но, так как

$$\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2},$$

$$\text{находим } \cos \frac{B-C}{2} = \frac{p}{2R \cos \frac{A}{2}} - \sin \frac{A}{2} = \frac{p - R \sin A}{2R \cos \frac{A}{2}}.$$

Определим отсюда $\frac{B-C}{2}$ и, зная угол A , найдем углы B и C порознь.

Можно поступить иначе: определим a из равенства $2R = \frac{a}{\sin A}$, после чего известно будет $b+c = 2p - a$ и для определения углов можно взять равенство:

$$\frac{b+c}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = 2R.$$

Пример 11. Решить треугольник, когда даны r , a и A .

$$\text{Взяв равенство } \frac{a}{\sin A} = \frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}},$$

можем определить, как в предыдущем примере, угол $\frac{B-C}{2}$, но можно поступить и так: здесь легко определяется новый линейный элемент $p-a$ из уравнения

$$\frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{p-a}{2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}, \text{ откуда}$$

$$p-a = r \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

После этого будем знать $2p$ и $b+c$, вследствие чего для вычисления углов можем взять равенство

$$\frac{b+c}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \frac{a}{\sin A}, \text{ откуда } \cos \frac{B-C}{2} = \frac{(b+c) \sin \frac{A}{2}}{a}.$$

Пример 12. Решить треугольник, когда даны r , a и B .

$$\text{Берем равенство } \frac{a}{\sin A} = \frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$$

Полученное уравнение неудобно для решения.

Определяем $p-b$ из уравнения

$$\frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{p-b}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}},$$

$$\text{откуда } p-b = r \operatorname{ctg} \frac{B}{2}.$$

Таким образом, мы знаем a и $p - b = \frac{1}{2}(a + c - b)$, т.е. знаем и $c - b$, а вследствие этого знаем и $a - (c - b) = a + b - c = 2(p - c)$.

Теперь имеем равенство:

$$\frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{p - c}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}},$$

откуда $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p - c}$.

Задача сведена к основной.

Пример 13. Решить треугольник, когда даны S , p и A .

Равенство $\frac{\sqrt{2S}}{\sqrt{\sin A \sin B \sin C}} = \frac{p}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$

дает уравнение, неудобное для решения. Можем определить $p - a$ из уравнения

$$\frac{\sqrt{2S}}{\sqrt{\sin A \sin B \sin C}} = \frac{\sqrt{p(p - a)}}{\cos \frac{A}{2} \sqrt{\sin B \sin C}},$$

откуда $p - a = \frac{S}{\operatorname{ptg} \frac{A}{2}}$; зная $p - a$, определим a , а следова-

тельно, и $b + c$.

Таким образом, задача приведена к решенной в примере 7.

Пример 14. Решить треугольник, когда даны r , $a - b$ и $A - B = D$.

Берем равенство $\frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{a - b}{2 \sin \frac{A - B}{2} \sin \frac{C}{2}}$.

Воспользуемся этим не вполне удобным уравнением для определения углов.

Помня, что

$$2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} = \cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{C}{2},$$

можем представить наше уравнение в таком виде:

$$\frac{r}{\cos \frac{A-B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{a-b}{2 \sin \frac{A-B}{2}},$$

откуда $\sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A-B}{2} - \frac{2r}{a-b} \sin \frac{A-B}{2}.$

Определив отсюда угол C и зная, что $A+B=180^\circ-C$, $A-B=D$, найдем все углы треугольника.

Пример 15. Решить треугольник, когда даны r_a , h_a и A .

Берем равенство $\frac{r_a}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{h_a}{\sin B \sin C}.$

Представив $\sin B \sin C$ в таком виде

$$\sin B \sin C = 4 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2},$$

получим

$$\frac{r_a}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{h_a}{2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}},$$

откуда

$$2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{h_a \sin \frac{A}{2}}{r_a},$$

а так как

$$2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{C-B}{2} - \cos \frac{C+B}{2} = \cos \frac{B-C}{2} - \sin \frac{A}{2},$$

то

$$\cos \frac{B-C}{2} = \sin \frac{A}{2} + \frac{h_a}{r_a} \sin \frac{A}{2} = \frac{h_a + r_a}{r_a} \sin \frac{A}{2}.$$

После этого будут известны все углы треугольника.

Последнее равенство мы получили бы прямо, если бы сообразили, что в ряду равных отношений существуют два таких (см. § 4):

$$\frac{r_a}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{h_a + r_a}{2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{B-C}{2}},$$

откуда $\cos \frac{A-B}{2} = \frac{h_a + r_a}{r_a} \sin \frac{A}{2}$.

Пример 16. Решить треугольник, когда даны r , $a-b$ и $A-B$.

Из равенства
$$\frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{a-b}{2 \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{C}{2}},$$

или, после упрощения
$$\frac{r}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} = \frac{a-b}{\sin \frac{A-B}{2}},$$
 можем оп-

ределить угол C , если представим это равенство в виде

$$\frac{2r}{\cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{C}{2}} = \frac{a-b}{\sin \frac{A-B}{2}}$$

и затем определим отсюда отдельно углы A и B .

Можно дать и другое решение.

Из магического ряда выбираем отношения

$$\frac{a-b}{2 \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{r_c + r}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}},$$

откуда

$$r_c + r = (a-b) \operatorname{ctg} \frac{A-B}{2},$$

т.е. определим r_c и затем возьмем отношения

$$\frac{r_c + r}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \frac{r_c - r}{2 \sin^2 \frac{C}{2}},$$

откуда $\sin \frac{C}{2} = \frac{r_c - r}{r_c + r} \cos \frac{A - B}{2}$, т.е. определим угол C .

13. Задачи. Решить треугольник, когда даны:

21. $a - b, c, C$	22. $a - b, c, B$	23. $R, b - c, C$
24. R, S, A	25. $R, p - a, B$	26. $R, p - a, A$
27. $R, h_a, C - B$	28. r, S, A	29. r, h_a, A
30. $r, a + b, C$	31. $r, a - b, A$	32. $r, 2p, A$
33. $r, h_a - h_b, C$	34. a, r_a, A	35. a, r_b, A
36. $r_a, 2p, B$	37. $r_a, b + c, A$	38. $r_a, a + b, A$
39. $r_a, h_b + h_c, C - B$	40. r, R, A	41. r, r_a, A
42. r, r_a, B	43. r_a, r_b, B	44. r_a, r_b, A
45. $r_a - r_b, 2p, A$	46. $r_a + r_b, h_c, C$	47. $r_a + r_b, c, C$
48. $r - r_a, h_b, A$	49. $R, r_a - r_b, C$	50. $r - r_a, a, A$
51. $S, r_a + r_b, C$	52. h_a, m_a, A	53. h_a, m_a, B
54. $a, h_a, B - C$	55. $a, B, h_a + h_c$	56. $2p, h_a, B$
57. a, l_a, A	58. $a, m_a, B - C$	59. $a + b, b + c, A$
60. $a + b, b - c, C$	61. $S, p - a, A$	62. $a + b, b - 2c, A$
63. $a + 2b, c + \frac{l}{2}b, B$	64. $a^2 - b^2, c, A$	65. $2p, h_b, B$
66. h_a, h_b, C	67. R, l_a, A	68. $a, A, b(b + c)$
69. $a, A, b(b - c)$	70. R, h_a, A	71. $r, a - b, C$

4. Третья группа задач

14. К третьей группе задач отнесем задачи, в которых данными будут **три линейных элемента треугольника**.

Для решения таких задач магический ряд немедленно доставляет два уравнения, из которых должны быть определены углы треугольника. Успех решения задачи зависит от степени трудности решения этих двух тригонометриче-

ских уравнений, вследствие чего иногда полезно бывает найти комбинации данных элементов и уже после этого брать из ряда отношения для вычисления углов.

15. Пример 17. Решить треугольник, когда даны R , a и h_b .

$$\text{Берем из ряда отношения: } 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{h_b}{\sin A \sin C},$$

откуда определяем $\sin A = \frac{a}{2R}$ и $\sin C = \frac{h_b}{a}$; задача приведена к основной.

Пример 18. Решить треугольник, когда даны a , b и c .

В этом случае предыдущие члены всех отношений как комбинации сторон треугольника известны и потому следует из них выбрать равенство, наиболее удобное для вычисления какого-нибудь угла. Одним из таких равенств бу-

$$\text{дет } \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)}}{\sin \frac{C}{2} \sqrt{\sin A \sin B}} = \frac{\sqrt{p(p-c)}}{\cos \frac{C}{2} \sqrt{\sin A \sin B}},$$

$$\text{откуда } \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Для вычисления прочих углов имеем такие же формулы

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \text{ и } \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}.$$

Пример 19. Решите треугольник, когда даны r , h_a и S .

Зная эти элементы, можем определить еще $p = \frac{S}{r}$,

$a = \frac{2S}{h_a}$ и $p - a$. Тогда угол определится из равенства

$$\frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{p - a}{2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}, \text{ откуда } \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p - a}.$$

Второй и третий углы определим так:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}},$$

откуда $\cos \frac{B-C}{2} = \frac{(b+c) \sin \frac{A}{2}}{a}$, после чего определяем углы B и C порознь.

Пример 20. Решить треугольник, когда даны r , a и $b-c$.

Здесь можно считать известными $a + (b-c) = 2(p-c)$ и $a - (b-c) = 2(p-b)$.

Углы определяем из равенств

$$\frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{p-b}{2 \cos \frac{B}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{p-c}{2 \cos \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}},$$

откуда $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}$ и $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$.

Пример 21. Решить треугольник, когда даны r_a , $2p$ и h_a .

Берем отношения

$$\frac{r_a}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{p}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{h_a}{2 \sin B \sin C},$$

откуда $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r_a}{p}$ и $\frac{\sin B \sin C}{2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{h_a \cos \frac{A}{2}}{p}$.

Из первого определяем угол A ; из второго могли бы определить разность углов $\frac{B-C}{2}$, но для последнего лучше взять добавочное отношение

$$\frac{h_a + r_a}{2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \frac{p}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}},$$

откуда $\cos \frac{B-C}{2} = \frac{(h_a + r_a) \cos \frac{A}{2}}{p}$.

Пример 22. Решить треугольник, когда даны r_a , r_b и r_c .

Можно считать известным и r на основании соотношения

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

Тогда берем равенства

$$\begin{aligned} \frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} &= \frac{r_a}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \\ &= \frac{r_b}{2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{r_c}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} \end{aligned}$$

и составим из них новые отношения (см. § 5):

$$\frac{\sqrt{rr_a}}{\sin \frac{A}{2} \sqrt{\sin B \sin C}} = \frac{\sqrt{r_b r_c}}{\cos \frac{A}{2} \sqrt{\sin B \sin C}}, \text{ откуда } \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{rr_a}{r_b r_c}}.$$

Таким же способом найдем формулы $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{rr_b}{r_a r_c}}$ и

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{rr_c}{r_a r_b}}.$$

Решение аналогичное тому, которое мы видели для данных a , b и c .

Можно также для решения этой задачи взять из магического ряда отношения

$$\frac{r_a - r}{2 \sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{r_b + r_c}{2 \cos^2 \frac{A}{2}},$$

откуда $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{r_a - r}{r_b + r_c}}.$

Пример 23. Решить треугольник, когда даны b , h_b и m_b .

Из равенства $h_b = m_b \sin \omega$ определим угол ω ; тогда в треугольнике MBC (черт. 5) будут известны две стороны MC и MB и угол между ними.

Пример 24. Решить треугольник, когда даны m_a , h_a и l_a .

Берем отношения

$$\frac{h_a}{\sin A \sin C} = \frac{m_a \sin \omega}{\sin B \sin C} = \frac{l_a \cos \frac{B-C}{2}}{\sin B \sin C},$$

откуда $\cos \frac{B-C}{2} = \frac{h_a}{l_a}$ и $\sin \omega = \frac{h_a}{m_a}$.

По этим формулам определим углы ω и $B-C$.

Так как (§ 3) $\operatorname{ctg} \omega = \frac{\sin(B-C)}{2 \sin B \sin C}$,

откуда $2 \sin B \sin C = \frac{\sin(B-C)}{\operatorname{ctg} \omega}$,

или $\cos(B-C) - \cos(B+C) = \frac{\sin(B-C)}{\operatorname{ctg} \omega}$,

определяем $\cos(B+C) = \cos(B-C) - \frac{\sin(B-C)}{\operatorname{ctg} \omega}$,

или, после упрощений, $\cos(B+C) = \frac{\cos(\omega + B-C)}{\cos \omega}$,

после чего углы B и C будут определены порознь.

Пример 25. Решить треугольник, когда даны m_a , m_b и m_c .

Можем воспользоваться геометрическими равенствами

$$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2,$$

$$4m_b^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2,$$

$$4m_c^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2 \text{ для вычисления сторон треуголь-$$

ника. Сложив эти равенства, получим:

$$4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Помножив новое равенство на 2 и сложив результат с первым равенством, умноженным на -3 , найдем $8m_b^2 + 8m_c^2 - 4m_a^2 = 9a^2$, откуда $a = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}$.

Найдя стороны треугольника, вычислим его углы, как в примере 17.

Пример 26. Решить треугольник, когда даны p , R и h_a . Возьмем отношения

$$2R = \frac{h_a}{\sin B \sin C} = \frac{p}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}},$$

из которых получим для определения углов такие уравнения:

$$2 \sin B \sin C = \frac{h_a}{R} \text{ и } 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{p}{R}.$$

Представим их в виде $\cos(B - C) + \cos A = \frac{h_a}{R}$

и $2 \cos \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B - C}{2} + \sin \frac{A}{2} \right) = \frac{p}{R}$, откуда

$$\cos(B - C) = \frac{h_a}{R} - \cos A \text{ и } \cos \frac{B - C}{2} = \frac{p}{2R \cos \frac{A}{2}} - \sin \frac{A}{2}.$$

Найденные выражения подставляем в тождество $\cos(B - C) = 2 \cos^2 \frac{B - C}{2} - 1$.

После некоторых преобразований результат будет таков:

$$p^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} - 4pR \operatorname{tg} \frac{A}{2} + p^2 - 2Rh_a = 0,$$

откуда определяется угол A .

Затем определяем a из уравнения $2R = \frac{a}{\sin A}$.

После находим разность углов $\frac{B-C}{2}$ из уравнения

$$2R = \frac{b+c}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}}.$$

Пример 27. Решить треугольник, когда даны a , b и l_c .
Берем отношения

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{l_c \sin \frac{A-B}{2}}{\sin A \sin B} = \frac{a+b}{2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}}.$$

Составляем производные отношения

$$\frac{\sqrt{(a+b)l_c \cos \frac{A-B}{2}}}{\sqrt{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{A-B}{2} \sin A \sin B}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin A \sin B}}.$$

Из последнего равенства получаем $\frac{\sqrt{(a+b)l_c}}{\sqrt{2 \cos \frac{C}{2}}} = \sqrt{ab},$

откуда $\cos \frac{C}{2} = \frac{(a+b)l_c}{2ab}.$

После этого определим $\frac{A-B}{2}$ из равенства

$$\frac{a+b}{2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \frac{a-b}{2 \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A-B}{2}}.$$

16. Если в равных отношениях заменим стороны треугольника числами, им пропорциональными, то равенство отношений не нарушится, так как от этого предыдущие члены этих отношений умножаются на одно и то же число; геометрически такое изменение обозначает переход от данного треугольника к другому, ему подобному. Вследствие такого перехода углы треугольника не изменяются и пото-

му новыми формулами можно пользоваться для вычисления углов.

Этим свойством ряда можно пользоваться для решения треугольников в некоторых случаях.

Например, если в треугольнике дан угол A и отрезки b_I и c_I стороны a , отсекаемые на ней биссектрисой, то для вычисления углов можно взять уравнения:

$$\frac{b_I + c_I}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \frac{b_I - c_I}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2}},$$

откуда $\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b_I - c_I}{a \operatorname{tg} \frac{A}{2}}.$

Еще пример. Имеем: $S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c,$

откуда $a : b = h_b : h_a, b : c = h_c : h_b,$ или

$a : b : c = h_b h_c : h_a h_c : h_b h_a,$ т.е. стороны треугольника пропорциональны числам $h_b h_c, h_a h_c, h_a h_b.$

Вследствие этого по данным высотам треугольник можно решить следующим образом. В формулах

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

заменяем стороны треугольника пропорциональными им числами $h_b h_c, h_a h_c$ и $h_a h_b,$ тогда p заменится через

$$\frac{1}{2}(h_b h_c + h_b h_a + h_a h_c) \text{ и формулы примут вид}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(h_b h_c + h_a h_b - h_a h_c)(h_a h_c + h_b h_c - h_a h_b)}{(h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c)(h_a h_b + h_a h_c - h_b h_c)}},$$

при помощи которых вычисляем углы A, B и $C.$

Далее, мы знаем формулы

$$S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c,$$

которые можно переписать так:

$$S = \frac{p}{r^{-1}} = \frac{p-a}{r_a^{-1}} = \frac{p-b}{r_b^{-1}} = \frac{p-c}{r_c^{-1}}.$$

Составляя производные этих отношений, получим между прочим

$$S = \frac{a}{r_b^{-1} + r_c^{-1}} = \frac{b}{r_a^{-1} + r_c^{-1}} = \frac{c}{r_b^{-1} + r_a^{-1}},$$

т.е. стороны треугольника пропорциональны суммам $r_b^{-1} + r_c^{-1}$ и пр., которыми можно заменить эти стороны в магическом ряде. Приведа такую замену в формуле

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin A \sin B}} = \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)}}{\sin \frac{C}{2} \sqrt{\sin A \sin B}},$$

откуда $\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$, получим

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{r_a^{-1} r_b^{-1}}{(r_b^{-1} + r_c^{-1})(r_a^{-1} + r_c^{-1})}}, \text{ или } \sin \frac{C}{2} = \frac{r_c}{\sqrt{(r_c + r_a)(r_c + r_b)}}.$$

Этими формулами можно пользоваться для вычисления углов по данным r_a , r_b и r_c .

17. Задачи. Решить треугольник, когда даны:

72. R, a, h_u	73. $R, a+b, h_c$	74. $R, a+b, h_a+h_b$
75. R, h_a-h_b, c	76. r, p, h_a	77. r, a, h_b
78. $r, a, b+c$	79. $r_a, p-c, S$	80. $r_a, a+b, c$
81. r_a, a, S	82. h_a, h_b, r_a	83. a, r, r_b
84. R, r, h_c	85. $R, r+r_a, b+c$	86. $r_a+r_b, a+b, r+r_c$
87. r, r_a, r_b	88. a, h_b, m_b	89. a, h_b, m_c
90. $h_a, h_b, a+b$	91. a, b, h_a-h_b	92. a, b, m_c
93. p, R, a	94. a, m_b, m_c	95. $a, h_b, c+2b$
96. $a+b, c, S$	97. Вычислить углы, удовлетворяющие условиям: $x+y+z=\pi$, $\sin x : \sin y : \sin z = k : l : m$	

5. Четвертая группа задач

18. Иногда в число данных задачи входит отношение линейных элементов треугольника; в этих случаях магический ряд также немедленно доставляет тригонометрические уравнения для вычисления углов треугольника.

Пример 28. Решить треугольник, когда даны R , $h_c - h_b$ и $\frac{a}{b-c} = m$.

Берем отношения

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b-c}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2}} = \frac{h_c - h_b}{2 \sin A \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2}},$$

откуда
$$\frac{a}{b-c} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B-C}{2}} = m.$$

Кроме того, имеем
$$\sin A \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2} = \frac{h_c - h_b}{4R}.$$

Перемножая эти уравнения, получим

$$\sin^2 A = \frac{(h_c - h_b)m}{2R},$$

откуда определим угол A и после этого полуразность $\frac{B-C}{2}$ из уравнения $\sin \frac{B-C}{2} = \frac{1}{m} \cos \frac{A}{2}.$

Пример 29. Решить треугольник по данным $a : b = m$, S и $h_a + h_b$.

Берем отношения

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{\sqrt{2S}}{\sqrt{\sin A \sin B \sin C}} = \frac{h_a + h_b}{\sin C (\sin A + \sin B)},$$

откуда имеем
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = m.$$

Подставляя отсюда $\sin A = m \sin B$ в равенство

$$\frac{\sqrt{2S}}{\sqrt{\sin A \sin B \sin C}} = \frac{h_a + h_b}{\sin C (\sin A + \sin B)},$$

получим $\frac{\sqrt{2S}}{\sin B \sqrt{m \sin C}} = \frac{h_a + h_b}{(m+1) \sin B \sin C},$

откуда $\sin C = \frac{m(h_a + h_b)^2}{2(m+1)^2 S}.$

Зная угол C , из уравнения $\frac{\sin A}{\sin B} = m$, представленного

в виде $\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{m+1}{m-1}$, или $\frac{\operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}} = \frac{m+1}{m-1}$, опреде-

лим $\frac{A-B}{2}.$

Пример 30. Решить треугольник, когда даны a , A и $(b-c): h_a = m$.

Имеем равенства

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b-c}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2}} = \frac{h_a}{\sin B \sin C},$$

откуда $\frac{b-c}{h_a} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{\sin B \sin C} = m.$

Для решения этого уравнения представляем его в виде

$$\frac{\cos(B-C) + \cos A}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2}} = \frac{2}{m}.$$

Заменяя здесь $\cos(B-C)$ через $1 - 2 \sin^2 \frac{B-C}{2}$, получим квадратное уравнение

$$1 - 2 \sin^2 \frac{B-C}{2} + \cos A = \frac{4}{m} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2},$$

или $\sin^2 \frac{B-C}{2} + \frac{2}{m} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C}{2} - \cos^2 \frac{A}{2} = 0$, откуда

$$\sin \frac{B-C}{2} = \frac{1}{m} \sin \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{1}{m^2} \sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2}}; \text{ предполагая } m$$

числом положительным, имеем $b > c$, т.е. $B > C$, и потому перед знаком радикала берем только знак +.

Зная A и $\frac{B-C}{2}$, легко определим углы B и C .

Пример 31. Решить треугольник, когда даны r_a , r_b и $a : c = m$.

Берем отношения

$$\frac{r_a}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{r_b}{2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

откуда получим два уравнения для определения углов:

$$\frac{\sin A}{\sin C} = m \text{ и } \frac{r_a}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} = \frac{r_b}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}}, \text{ или}$$

$$\sin A = m \sin C = m \sin(A+b) \text{ и } \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{r_b}{r_a} = k.$$

Для решения этой (довольно трудной) системы придется воспользоваться тригонометрическими тождествами:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \text{ и } \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Тогда первое уравнение представляется в таком виде

$$\frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} = \frac{2 m \operatorname{tg} \frac{A}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \right)}{\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \right) \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \right)} + \frac{2 m \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \right) \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \right)},$$

или

$$tg \frac{A}{2} \left(1 + tg^2 \frac{B}{2} \right) = m tg^2 \frac{A}{2} \left(1 - tg^2 \frac{B}{2} \right) + m \left(1 - tg^2 \frac{A}{2} \right) tg \frac{B}{2}.$$

Заменяя здесь $tg \frac{B}{2}$ из второго уравнения через $ktg \frac{A}{2}$ и сокращая на $tg \frac{A}{2}$, получим

$$1 + k^2 tg^2 \frac{A}{2} = m \left(1 - k^2 tg^2 \frac{A}{2} \right) + mk \left(1 - tg^2 \frac{A}{2} \right),$$

или $k(k + mk) tg^2 \frac{A}{2} = m + mk - 1,$

откуда $tg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{m + mk - 1}{k(m + mk + k)}},$ или

$$tg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(mr_a + mr_b - r_a)r_a}{r_b(mr_a + mr_b + r_b)}}.$$

Определим отсюда угол A , найдем затем угол B по уравнению

$$tg \frac{B}{2} = k tg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(mr_a + mr_b - r_a)r_a}{r_b(mr_a + mr_b + r_b)}}.$$

Пример 32. Решить треугольник, когда даны a , A и $\frac{b(b+c)}{h_b} = d$.

Берем отношения

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{h_a}{\sin B \sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b+c}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}}$$

и составляем производные

$$\frac{\sqrt{b(b+c)}}{\sqrt{2 \cos \frac{A}{2} \sin B \cos \frac{B-C}{2}}} = \frac{\sqrt{ah_a}}{\sqrt{\sin A \sin B \sin C}},$$

откуда

$$\frac{b(b+c)}{ah_a} = \frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sin A \sin C} \quad \text{или} \quad \frac{d \sin\frac{A}{2}}{a} = \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin C}.$$

Для решения этого уравнения поступаем так:

$$\frac{B-C}{2} = \frac{180^\circ - A - 2C}{2};$$

$$\cos\frac{B-C}{2} = \sin\left(C + \frac{A}{2}\right) \quad \text{и потому}$$

$$\frac{d \sin\frac{A}{2}}{a} = \frac{\sin\left(C + \frac{A}{2}\right)}{\sin C} = \cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2} \operatorname{ctg} C,$$

$$\text{откуда } \operatorname{ctg} C = \frac{d \sin\frac{A}{2} - a \cos\frac{A}{2}}{a \sin\frac{A}{2}} = \frac{d}{a} - \operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

Задача приведена к основной.

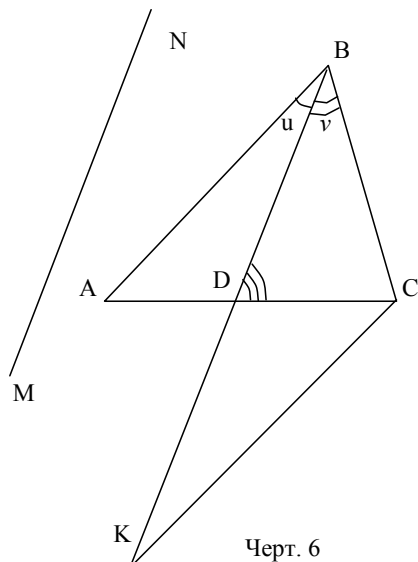
19. Рассмотрев несколько задач этой группы, заключаем, что, по существу, эти задачи не отличаются от задач первой и второй групп. Различие между ними состоит только в том, что там углы треугольника задаются непосредственно, а здесь в виде системы тригонометрических уравнений.

20. **Задачи.** Решить треугольник, когда даны:

98. $r : r_a, B, h_b$	99. $r : r_a, A, b$	100. $2p, A, b : c$
101. $r_a : r_b, a + b, c$	102. $a, A, r_b : r_c$	103. $a, A, b : c$
104. $a, b : c, C$	105. $R, r, \frac{h_b + h_c}{b + c}$	

6. Пятая группа задач

21. К этой группе отнесем те задачи, в которых между данными или искомыми входят углы, составляемые сторонами треугольника с каким-нибудь направлением.



Черт. 6

Имеем треугольник ABC (черт. 6) и направление MN ; проведем через вершину B прямую BD параллельно MN и обозначим углы, составляемые ею со сторонами треугольника $\angle ABD$ через u , $\angle CBD$ через v и $\angle BDC$ через ω ; отношение отрезков стороны AC $CD:AD$ обозначим через k .

Проведя CK параллельно AB , получим подобные треугольники ABD и CDK , из которых следует:

$$\frac{CD}{AD} = \frac{CK}{AB} \text{ или } k = \frac{CK}{c}, \text{ откуда } CK = kc;$$

$$\frac{KD}{BD} = \frac{CD}{AD} \text{ или } \frac{KD}{l} = k, \text{ откуда } KD = kl.$$

Из треугольника CBK имеем $\frac{BC}{\sin u} = \frac{CK}{\sin v}$, или

$$\frac{a}{\sin u} = \frac{kc}{\sin v}; \text{ в то же время из треугольника } ABC \text{ мы знаем}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Разделив эти пропорции почленно, получим

$$\frac{\sin A}{\sin u} = \frac{k \sin C}{\sin v}.$$

Если заменим здесь A через $\omega - u$ и C через $180^\circ - \omega - v$, то последовательными преобразованиями получим $\frac{\sin(\omega - u)}{\sin u} = \frac{k \sin(\omega + v)}{\sin v}$,

или $\sin \omega \operatorname{ctgu} - \cos \omega = k \sin \omega \operatorname{ctgv} + k \cos \omega$,

или $\operatorname{ctgu} - \operatorname{ctg} \omega = k \operatorname{ctgv} + k \operatorname{ctg} \omega$, откуда

$$(1 + k) \operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctgu} - k \operatorname{ctgv}. \quad (7)$$

Если в той же пропорции заменим u через $\omega - A$ и v через $180^\circ - \omega - C$, то будем иметь

$$\frac{\sin A}{\sin(\omega - A)} = \frac{k \sin C}{\sin(\omega + C)},$$

или $\frac{1}{\sin \omega \operatorname{ctg} A - \cos \omega} = \frac{k}{\sin \omega \operatorname{ctg} C + \cos \omega}$,

или $\operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} \omega = k \operatorname{ctg} A - k \operatorname{ctg} \omega$, откуда

$$(1 + k) \operatorname{ctg} \omega = k \operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} C. \quad (8)$$

Если к отношениям (7) и (8) присоединим еще пропорцию $\frac{\sin A}{\sin u} = \frac{k \sin C}{\sin v}$, представленную в таком виде

$$\sin A \sin v = k \sin C \sin u, \text{ или}$$

$$\cos(A - v) - \cos(A + v) = k \cos(C - v) - k \cos(C + u),$$

то мы получим три равенства, при помощи которых из шести углов A, B, C, u, v и ω всегда можно определить четыре угла, когда два остальных угла даны (при данном k).

Таким образом, если в задаче будут даны один линейный элемент треугольника и два из шести названных углов, то она немедленно сводится к основной при помощи найденных соотношений между углами (при данном k).

Число k , если оно неизвестно, может быть определено только в случае, когда направление всех сторон относительно MN известно, т.е. когда известны углы u, v и ω .

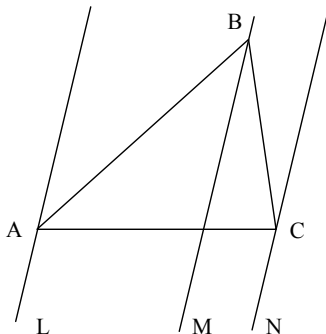
При решении задач этой группы нередко приходится прежде всего решить один из вспомогательных треугольников: ABD , BDC и BKC и затем уже данный треугольник ABC .

22. Пример 33. Решить треугольник, зная углы u , v и $BD = l$ при $k = 2$. В этом случае $KD = 2l$, $BK = 3l$ и $CK = 2c$. Можем решить треугольник BKC по данным: стороне $BK = 3l$ и двум углам u , v . Определив a и $KC = 2c$, будем знать в треугольнике ABC две стороны a и c и угол между ними $B = u + v$.

Пример 34. Решить треугольник, зная l , b и ω при данном k .

Так как $AD = \frac{b}{1+k}$ и $DC = \frac{kb}{1+k}$, то в треугольнике BDC будут известны две стороны BD и DC и угол ω . Решив этот треугольник, узнаем a и угол C , т.е. в треугольнике ABC будут известны две стороны и угол между ними.

Пример 35. Решить треугольник, когда даны углы и известно, что вершины его лежат на трех параллелях, расстояние между которыми известны (черт. 7) $LM = m$ и $MN = n$.



Черт. 7

При помощи соотношения (8) определяем угол ω , так как $k = \frac{m}{n}$. После этого определим сторону b по формуле $m + n = b \sin \omega$.

Пример 36. Решить треугольник, когда известны a , c и l при данном k (например, $k = 3$). В этом случае $DK = 3l$ и $KC = 3c$, т.е. в треугольнике BCK известны все три стороны и потому углы u и v могут быть определены. После этого решение задачи не представит затруднений.

7. Теория решения треугольников

23. Резюмируя сказанное в предыдущих главах, изложим все в более или менее общей форме.

Тригонометрия дает нам три равных отношения:

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Из этих трех отношений можем получить бесчисленное множество новых, равных этим, пользуясь следующими соображениями. Составим какое-нибудь однородное выражение n -го измерения из сторон треугольника a , b и c , которое обозначим через $f(a, b, c)$, тогда по свойству однородных выражений, будем иметь

$$f(ka, kb, kc) = k^n f(a, b, c),$$

где k — какой угодно множитель.

Положив здесь $k = \frac{l}{2R}$, получим

$$f\left(\frac{a}{2R}, \frac{b}{2R}, \frac{c}{2R}\right) = \frac{l}{(2R)^n} f(a, b, c),$$

откуда $f(a, b, c) = (2R)^n f(\sin A, \sin B, \sin C)$,

откуда $2R = \frac{\sqrt[n]{f(a, b, c)}}{\sqrt[n]{f(\sin A, \sin B, \sin C)}}.$

Таким образом, мы будем иметь

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt[n]{f(a, b, c)}}{\sqrt[n]{f(\sin A, \sin B, \sin C)}}, \quad (9)$$

где $f(a, b, c)$ однородная функция n -го измерения, произвольно составленная из сторон треугольника.

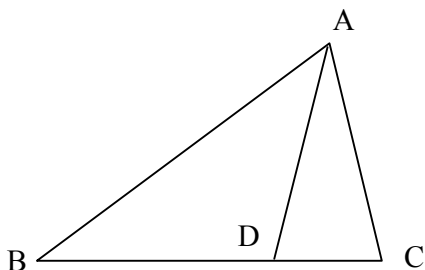
Ряд равных отношений (9), в котором $f(a, b, c)$ может обозначать какую угодно однородную функцию a , b и c , назван *магическим рядом*.

В этом ряде заключаются все возможные характеристические линии треугольника, так как по закону однородности геометрических формул всякое соотношение между линейными элементами треугольника a , b , c и l , где l — какой угодно отрезок, зависящий от сторон треугольника, может быть представлено однородной функцией $\omega(a, b, c, l) = 0$, откуда $l = f(a, b, c)$, где f также однородная функция элементов a , b и c .

24. Заметим, что наиболее общим соотношением между линейными элементами треугольника считают формулу Стюарта

$$c^2 b_l + b^2 c_l - ab_l c_l = al^2,$$

где l — отрезок, соединяющий вершину A с какой-нибудь точкой D противоположной стороны BC , $b_l = DC$ и $c_l = BD$ (черт. 8).



Черт. 8

Формулу Стюарта для наших целей удобно представить в несколько ином виде, введя обозначение

$$\frac{DC}{DB} = \frac{b_l}{c_l} = k, \text{ откуда } b_l = k c_l, \text{ и так как } b_l + c_l = a, \text{ то}$$

$$c_l = \frac{a}{1+k} \text{ и } b_l = \frac{ak}{1+k};$$

тогда формула Стьюарта принимает вид:

$$\frac{kac^2}{l+k} + \frac{ab^2}{l+k} - \frac{ka^3}{(l+k)^2} = al^2,$$

$$\text{или } k(l+k)c^2 + (l+k)b^2 - ka^2 = (l+k)^2 l^2.$$

Таким образом, в магическом ряде будет отношение

$$2R = \frac{(l+k)l}{\sqrt{k(l+k)\sin^2 C + (l+k)\sin^2 B - k\sin^2 A}}.$$

25. Все задачи на решение треугольников могут быть разбиты на несколько групп, причем магический ряд дает определенные указания для решения задач каждой группы.

Задача I группы (основной). Решить треугольник, когда даны его углы и какая-нибудь однородная функция n -го измерения его сторон $f(a, b, c)$, причем n не равно нулю.

Решение задач этой группы особенно просто при помощи магического ряда, так как этот ряд немедленно доставляет формулу для определения какой угодно однородной функции сторон треугольника.

Пусть требуется, например, определить однородную функцию n -го измерения $\omega(a, b, c)$.

Берем из магического ряда формулу

$$\frac{\sqrt[n]{\omega(a, b, c)}}{\sqrt[n]{\omega(\sin A, \sin B, \sin C)}} = \frac{\sqrt[n]{f(a, b, c)}}{\sqrt[n]{f(\sin A, \sin B, \sin C)}}$$

$$\text{откуда } \omega(a, b, c) = \frac{\omega(\sin A, \sin B, \sin C) \sqrt[n]{f^m(a, b, c)}}{\sqrt[n]{f^m(\sin A, \sin B, \sin C)}}.$$

Так определяются все элементы треугольника.

Задача II группы. Решить треугольник, когда даны: угол A и две каких-нибудь однородных функции сторон $f(a, b, c)$ n -го измерения и $f_1(a, b, c)$ — n_1 -измерения.

Из магического ряда берем отношения

$$\frac{\sqrt[n]{f(a, b, c)}}{\sqrt[n]{f(\sin A, \sin B, \sin C)}} = \frac{\sqrt[n_1]{f_1(a, b, c)}}{\sqrt[n_1]{f_1(\sin A, \sin B, \sin C)}}.$$

Имеем таким образом тригонометрическое уравнение с неизвестными B и C ; присоединяя уравнение $B + C = 180^\circ - A$, получим систему двух тригонометрических уравнений с двумя неизвестными, решив которую, будем знать все углы треугольника, т. е. приведем задачу к основной.

Задача III группы. Решить треугольник, когда даны три однородные функции сторон его: $f(a, b, c)$ n -го измерения, $f_1(a, b, c)$ — n_1 -измерения и $f_2(a, b, c)$ — n_2 -измерения.

Из магического ряда берем отношения

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[n]{f(a, b, c)}}{\sqrt[n]{f(\sin A, \sin B, \sin C)}} &= \frac{\sqrt[n_1]{f_1(a, b, c)}}{\sqrt[n_1]{f_1(\sin A, \sin B, \sin C)}} = \\ &= \frac{\sqrt[n_2]{f_2(a, b, c)}}{\sqrt[n_2]{f_2(\sin A, \sin B, \sin C)}}. \end{aligned}$$

Присоединяя к этим двум тригонометрическим уравнениям третье

$$A + B + C = 180^\circ,$$

получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными A , B и C .

Задачи IV и V групп не имеют общности, как задачи первых трех групп, и представляют из себя некоторые видоизменения задач первых трех групп, как видно из изложенного в §§ 16—20.

Краткие сведения об авторах

Зубова Инна Каримовна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Оренбургского государственного университета.

Игнатушина Инесса Васильевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики Оренбургского государственного педагогического университета.

Коротина Валентина Александровна — кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры и истории математики Оренбургского государственного педагогического университета.

Курбатова Людмила Николаевна — старший преподаватель кафедры математического анализа и методики преподавания математики Оренбургского государственного педагогического университета.

Матвиевская Галина Павловна — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и истории математики Оренбургского государственного педагогического университета.

Новак Наталия Михайловна — кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики Оренбургского государственного педагогического университета.

Прояева Ирина Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии Оренбургского государственного педагогического университета.

Научное издание

**Математическое образование
в Оренбургском крае. История и современность**

Сборник научных трудов

Ответственный редактор Г. П. Матвиевская

Редакторы И. Н. Рожков, Е. С. Рожкова
Компьютерная верстка Е. С. Рожковой

Подписано к печати 22.02.2011 г.

Усл. печ. л. 13,4

Тираж 500 экз.

Издательство Оренбургского государственного педагогического
университета. 460844, г. Оренбург, ул. Советская, 19