РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова

ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Вторая серия

Выпуск 15(50)
Основаны в 1948 году
Г.Ф.Рыбкиным и А.П.Юшкевичем

«Янус-К»
Москва
2014

УДК 51(091)
ББК 22.1г
И 902

Историко-математические исследования. Вторая серия. Выпуск 15(50). М.: «Янус-К», 2014. 360 с.

ISBN 978-5-8037-0620-5

ISBN 978-5-8037-0620-5

Содержание

Contents

От редакции

Настоящий выпуск юбилейный – пятидесятый. Первый, под редакцией Г.Ф.Рыбкина и А.П.Юшкевича, увидел свет в 1948 году. За свою более чем 65-летнюю историю сборник переживал разные периоды – в какие-то годы он выходил достаточно регулярно, иногда издание на некоторое время прерывалось. В первые десятилетия существования «Исследований» их тираж доходил до 4 тысяч экземпляров, последние же выпуски выходили в количестве 300–400 экземпляров. В настоящее время стараниями нашего коллеги из Ростова-на-Дону В.Е.Пыркова все выпуски «Историко-математических исследований» были выложены в интернет и таким образом стали доступны широкой аудитории. На этот раз сборник выходит с трехлетним перерывом, что вызвано отсутствием финансирования. За возможность его издания выражаем нашу искреннюю признательность спонсору, пожелавшему остаться неизвестным. В портфеле редакции скопилось еще немало интересного материала, который, мы надеемся, удастся опубликовать в недалеком будущем.

Выпуск открывает традиционный раздел нашего сборника, посвященный истории отечественной математики. В этом году исполняется 150 лет со дня основания одного из старейших в мире математических обществ – Московского математического общества (ММО), которое по своему значению для развития математики в России, как писал А.П.Юшкевич в своем известном труде «История математики в России до 1917 года» (М.: Наука, 1968; с.317), уступало только Академии наук. Заметка Т.А.Токаревой посвящена непростому периоду истории Общества – после реорганизации, произведенной в связи с арестом и смертью его президента Д.Ф.Егорова (1869–1931), и до конца Великой Отечественной войны. И хотя это единственный в выпуске материал, связанный непосредственно с историей Общества, результаты деятельности ММО, буквально пронизывающие всю историю российской математики последней трети XIX–XX вв., представлены практически во всех статьях раздела: в его деятельность были, хотя и в разной мере, вовлечены все герои приводимых ниже исследований – Л.В.Канторович, С.Н.Бернштейн, Н.В.Ефимов, А.Я.Хинчин. Две публикации посвящены 100-летию со дня рождения нобелевского лауреата академика Канторовича. Это статьи известного математика В.М.Тихомирова о математическом творчестве Канторовича и А.Л.Андрианова о развитии линейного программирования в работах Канторовича 1930–1950-х гг. Исследование В.С.Виденского посвящено открытию С.Н.Бернштейном многочленов, названных впоследствии его именем, и приурочено к 100-летию открытия. Работа Е.В.Шикина содержит живо написанный портрет выдающегося советского геометра члена-корреспондента АН СССР Н.В.Ефимова и описание его математических результатов. Завершается раздел статьей Н.Г.Мощевитина, в которой приводится анализ одной работы А.Я.Хинчина 1920-х гг. (теорема о системах Чебышева).

Другой традиционный для нашего издания раздел «Математика античности и средних веков» также разнообразен по содержанию. Он представлен статьями: о методах решения задачи об удвоении куба в античности (А.И.Щетников); о проблемах развития средневековой арабской алгебры (М.М.Рожанская); о некоторых особенностях арабских обработок «Начал» Евклида (И.О.Лютер) и об истоках нумерационных знаний в Древней Руси (Р.А.Симонов). Раздел замыкает исследование об интерпретации логарифмов тригонометрических функций в работах Дж.Непера (А.В.Кузьмин), стоящих на пороге математики Нового времени.

Раздел «Европейская математика Нового и Новейшего времени» содержит статьи, посвященные становлению итальянского математического сообщества после объединения Италии (С.С.Демидов), интернационализации математических журналов (В.И.Харламова, А.А.Харламов, Х.Р.Малонек), истории теории фракталов (П.Н.Антонюк) и научной стажировке в Европе одного из наиболее ярких представителей московской философско-математической школы Н.В.Бугаева (О.А.Саввина).

В четвертый раздел «Статьи различного содержания» включены: публикация М.И.Монастырского, содержащая оригинальные взгляды автора на математику и ее историю; две заметки, посвященные неклассической интерпретации логики Аристотеля (Н.П.Брусенцов); а также исследование по истории и методологии применения вероятностных методов в медицине (В.Н.Тутубалин, Ю.М.Барабашева, Г.Н.Девяткова, Е.Г.Угер).

Раздел «Наши публикации» составлен из комментированных переводов: трактата средневекового индийского математика Махавиры «Собрание основных положений науки о вычислениях (гл.0 и 1)» (введение, пер. с санскрита и комментарии Г.Г.Хмуркина) и главного труда Ф.Виета по символической алгебре «Введение в аналитическое искусство» (пер. с латинского и комментарии Е.А.Зайцева). Завершает раздел письмо академика Л.С.Понтрягина к филологу Е.Ф.Пуриц (публикация В.М.Тихомирова).

***

В 2011 году исполнилось 80 лет нашему автору известному российскому историку математики Эльвире Ивановне Березкиной. Осуществленный ею перевод на русский язык древнекитайской

«Математики в девяти книгах» был опубликован в 1957 году в десятом выпуске «Историко-математических исследований». Это первый в истории перевод данного трактата на европейский язык. Появившиеся впоследствии немецкий, французский и английский переводы в той или иной мере учитывали перевод Березкиной, ставший важной вехой в изучении математической культуры Древнего Китая. Ее дальнейшие исследования китайской математической традиции, включая переводы трактатов Сунь Цзы (1963), Лю Хуэя (1974), Ван Сяо Туна (1975) и пяти ведомств (1968), были подытожены в монографии «Математика Древнего Китая» (М.: Наука, 1980, 2-е изд. М.: УРСС, 2013). Редколлегия поздравляет Эльвиру Ивановну с юбилеем и желает ей крепкого здоровья, благополучия и дальнейших творческих успехов.

***

В 2013 году исполнилось 80 лет члену редакционного совета нашего издания известному российскому историку математики, действительному члену Международной академии истории науки Светлане Сергеевне Петровой. Ее работы по истории функционального анализа, истории теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными), в частности, по истории символических методов их интегрирования, о первых доказательствах основной теоремы алгебры, об истории метода многоугольника Ньютона, истории асимптотических методов и теории конечных разностей пользуются широкой известностью. В последние годы она успешно работает над вопросами истории преподавания математики в высшей школе России и СССР, в частности, в Московском университете. Светлана Сергеевна – наш постоянный автор. Редколлегия поздравляет Светлану Сергеевну с юбилеем и желает ей крепкого здоровья, благополучия и дальнейших творческих успехов.

***

Редколлегия с прискорбием извещает о смерти нашего автора – известного немецкого историка математики, одного из крупнейших деятелей международного историко-научного сообщества, действительного члена Международной академии истории науки Ганса Вуссинга (Вальдхайм, Саксония; 15 октября 1927 – Лейпциг; 26 апреля 2011).

***

Редколлегия с прискорбием сообщает о смерти ее многолетнего члена – известного историка математики Александра Ильича Володарского.

АЛЕКСАНДР ИЛЬИЧ ВОЛОДАРСКИЙ
(11 июня 1929 – 13 февраля 2012)

Александр Ильич родился в Баку в семье рабочего. В 1960 году окончил механико-математический факультет Бакинского государственного университета и по распределению был направлен на работу в одно из оборонных предприятий в подмосковное тогда Кунцево. Поступил в аспирантуру Института истории естествознания и техники АН СССР, где его научным руководителем стал выдающийся советский историк математики Адольф Павлович Юшкевич. В 1967 году Александр Ильич защитил кандидатскую диссертацию «Математические трактаты Шридхары». С тех пор математика древней и средневековой Индии стала основной областью его научных исследований, отмеченных такими трудами, как глава «Индия» в первом томе «Истории математики с древнейших времен до начала XIX столетия», вышедшем в 1970 в издательстве «Наука», выполненный совместно с О.Ф.Волковой перевод «Патиганиты» Шридхары (1966), монография «Очерки истории средневековой индийской математики» (М.: Наука, 1977; 2-е изд. М.: УРСС, 2009), научная биография Ариабхаты (М.: Наука, 1977; 2-е изд. М.: УРСС, 2009). Научные результаты Александра Ильича получили широкую известность и стали основанием для его избрания членом-корреспондентом Международной академии истории науки. Последние годы он работал над проблемами истории советской математики.

Вся творческая жизнь Александра Ильича была связана с Институтом истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова РАН. На протяжении длительного времени он выполнял обязанности ученого секретаря Российского национального комитета по истории и философии науки и техники. Особо отметим его вклад в издание новой серии «Историко-математических исследований», где Александром Ильичом был создан и направлялся раздел «Научной хроники». Его роль в жизни отечественного историко-научного сообщества трудно переоценить.

Человек редкого трудолюбия, доброжелательности, готовый всегда придти на помощь – таким запомнят его коллеги и друзья.

***

Редколлегия с прискорбием извещает о смерти известного немецкого историка математики, одного из крупнейших деятелей международного историко-научного сообщества, действительного члена Международной академии истории науки, члена редакционного совета нашего издания Кристофа Скрибы (Дармштадт; 6 октября 1929 – Гамбург; 26 июня 2013).

***

Редколлегия с прискорбием извещает о смерти члена редколлегии нашего издания выдающегося российского математика академика Юрия Васильевича Прохорова (Москва; 15 декабря 1929 – Москва; 16 июля 2013).

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО ПОСЛЕ РЕОРГАНИЗАЦИИ И ВО ВРЕМЯ ВЕЛИКОЙ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ВОЙНЫ

Т.А.Токарева

2014 год – юбилейный для Московского математического общества. 15 сентября 1864 г. состоялось первое заседание Кружка любителей математических наук, ставшего впоследствии Московским математическим обществом. Историография Общества обширна, она включает и юбилейные публикации [1–3], и обзорные статьи [4–7], и исследования различных периодов существования Общества [8; 9], включая кризисный (конец 1930 – начало 1931 гг.), и 1931 г. [10; 11], в течение которого «Общество практически бездействовало» [1, с.61].

1. Реорганизованное Общество приступило к работе весной 1932 г. Был принят новый устав ММО и избрано его руководство: П.С.Александров (1896–1982; президент), М.Я.Выгодский (1898–1965; вице-президент), В.Л.Гончаров (1896–1955; секретарь); начали развиваться различные новые виды его деятельности; возобновились научные заседания (на первом заседании – 21 мая – выступил А.Я.Хинчин с докладом «Математическая теория стационарной очереди», на второе – 28 мая – был поставлен доклад М.Я.Выгодского «Архимед, его эпоха и методология» [5, с.37]).

Первый публичный отчет о деятельности Московского математического общества после реорганизации был представлен его президентом на пленарном заседании Второго Всесоюзного математического съезда 28 июня 1934 г. «Московское математическое общество – старейшее из математических обществ Советского Союза и одно из самых старых математических обществ Европы и всего мира». Такими словами начал свое выступление Павел Сергеевич. «Оно сейчас, естественно в значительных направлениях перестроило свою работу, стремясь удовлетворить тем новым требованиям, которые выдвинулись за последнее время» [12, с.46].

Далее докладчик отметил, что работа Общества протекает в тесной связи с деятельностью Математического института АН СССР. В научном плане «Московское математическое общество стремится, с одной стороны, вести работу объединения наиболее крупных отдельных проблем. Поэтому мы приглашаем ряд крупных ученых деятелей делать доклады о наиболее выдающихся открытиях. В этом плановая сторона научной деятельности. С другой стороны, Математическое общество отражало, наоборот, сверхплановую работу ученых Москвы, ту работу, которая не вкладывается в заранее составленные планы Института. Таким образом, Математическое общество, с одной стороны, отражало все наиболее крупные математические открытия. С другой стороны, в значительной степени отражало всю ту текущую работу, которая иногда несколько неожиданно принимает новый, непредвиденный оборот» [там же].

При анализе международной деятельности Общества было отмечено, что заботы по организации приезда «многочисленных и первоклассных иностранных гостей в значительной степени падали на Общество» [там же]. На его заседаниях выступали: Ж.Адамар, Э.Картан, В.Бляшке, С.Лефшетц и другие. «Эта сторона деятельности играла большую роль в нашей научной жизни» [там же].

Особое внимание выступающий уделил образованию Обществом в начале 1934 г. ряда секций (что в наибольшей степени характеризовало его обновление):

1) секция научно-реферативная;

2) секция философии и методологии математики;

3) секция научной популяризации;

4) секция повышения квалификации работников втузов и педвузов;

5) элементарная научно-педагогическая секция.

Кроме того, ММО в 1935 г. планировало организацию ряда дискуссий по преподаванию математики в технической школе, а также конкурсов и олимпиад, «направленных в сторону привлечения молодых дарований к математике» [там же, с.47].

30 июня 1934 г. была принята Резолюция Съезда, где в разделе, посвященном математическим обществам, отмечалась широкая работа, развернутая обществами, а также формулировались задачи перед ними стоящие.

«1. Организация научных заседаний с научными докладами и дискуссиями.

2. Широкая постановка философско-методической работы в направлении внедрения в математические исследования методов диалектического материализма.

3. Организация научно-реферативной деятельности.

4. Широкая организация научно-популяризационной работы в области математики.

5. Специальная работа по повышению квалификации преподавателей математики втузов и педвузов.

6. Вовлечение работников средней школы в научную работу путем организации специальной (элементарно-научной) тематики.

7. Организация методико-педагогической помощи в области преподавания математики в средней школе.

8. Работа по выявлению математических дарований среди школьной молодежи, их поддержка и продвижение» [12, с.83–84].

И в качестве «наказа» в Резолюции говорилось, что только «планомерная работа математических обществ может и должна играть большую роль в математической жизни Советского Союза» [там же, с.83].

2. Начавшаяся Великая Отечественная война не прервала деятельности Московского математического общества. «Многие члены Общества оказались призванными в ряды Красной Армии, многие пошли добровольцами в народное ополчение, огромное большинство других было вовлечено в работу оборонного характера» [4, с.237]. После летнего перерыва состоялось 3 его заседания: 17 сентября, 1 и 15 октября. Ввиду того, что большинство членов Общества были связаны с Московским университетом и Академией наук, которые эвакуировались в Казань и Среднюю Азию соответственно. На заседании Московского математического общества 15 октября 1941 г., по предложению президента Общества П.С.Александрова, было принято решение организовать в его составе Ташкентское и Казанское отделения, «которые будут функционировать до тех пор, пока Общество в полном составе вновь сможет собираться в Москве» [5, с.44].

В Ташкентском (последовательно Ашхабадском и Свердловском) отделении заседания были заменены научными конференциями Института математики Московского университета, которые собирались регулярно по месту эвакуации Университета. Специальные заседания Отделения были посвящены: представлению работ И.Г.Петровского на соискание Сталинской премии (8 января 1942 г., Ашхабад); чествованию Д.Е.Меньшова по случаю его 50-летия (23 апреля 1942 г., Ашхабад); выдвижению кандидатов в действительные члены и члены-корреспонденты Академии наук СССР (апрель 1943 г., Свердловск). К октябрю 1943 г. Отделение влилось в Московское.

Первое заседание Казанского отделения Московского математического общества (совместно с Казанским физико-математическим обществом) состоялось уже 22 ноября 1941 г., на котором с докладами выступили Л.С.Понтрягина «Классификация непрерывных отображений» и Н.Г.Чеботарев «Проблема Гурвица для трансцендентных уравнений». Всего же состоялось 31 заседание Казанского отделения, в рамках которых было обсуждено 54 доклада. Неоднократно на заседаниях выступали: Н.Г.Чеботарев (председатель Казанского физико-математического общества с 1943 г.) – 4 раза, Ю.В.Линник – 4, А.Д.Александров – 3, В.В.Морозов – 3, Д.К.Фаддеев – 3, П.С.Александров – 2, А.Н.Крылов – 2, Л.А.Люстерник – 2, Л.С.Понтрягин – 2, А.Я.Хинчин – 2. (Заметим, что приезд в Казань московских и ленинградских математиков способствовал развитию совместных исследований. Так над проблемой Гурвица для трансцендентных функций в Казани во время войны работали Н.Г.Чеботарев, Л.С.Понтрягин, Д.К.Фаддеев и др., а полученные результаты обсуждались на заседаниях Отделения).

Особый интерес для историографов Московского математического общества представляет заседание 9 февраля 1942 г., посвященное 75-летию со дня его основания. С докладами выступили: П.С.Александров «Очерк истории Московского математического общества» (текст выступления был опубликован в том же году в «Вестнике Академии наук СССР», см.: [1]); А.Я.Хинчин «Великий русский математики П.Л.Чебышев»; А.Н.Крылов «Замечания о приложении одной работы П.Л.Чебышева в кораблестроительном деле»; Л.Н.Сретенский «Великий русский механик Н.Е.Жуковский». Почетными членами на этом заседании были избраны: О.Ю.Шмидт, С.Н.Бернштейн, Н.М.Гюнтер (посмертно) и С.А.Чаплыгин.

Завершился казанский период деятельности Московского математического общества заседанием 17 апреля 1943 г. докладами Д.К.Фаддеева «О подполях, принадлежащих абелеву нормальному делителю группы Галуа данного поля» и В.В.Морозова «Максимальные неполупростые подгруппы простых групп Ли».

Московское отделение Общества просуществовало с октября 1942 г. по июль 1943 г. За это время было организовано 11 заседаний, на которых были заслушаны 18 докладов в основном прикладного характера.

К октябрю 1943 г. все Отделения влились в Московское, и 6 октября состоялось первое заседание Общества после реэвакуации. На нем было сделано два доклада: О.Ю.Шмидт «О бесконечных разрешимых группах»; И.М.Гельфанд и Д.А.Райков «Представления локально-бикомпактных групп». С октября 1943 по май

1945 гг. состоялось 45 заседаний Общества, на которых было сделано 62 доклада. Учитывая то, что военное время не позволяло проводить общесоюзные собрания математиков (не говоря уже о международных), Московское математическое общество предоставило свою трибуну математикам из других городов: Н.Н.Боголюбову и М.А.Лаврентьеву (Киев); Д.К.Фаддееву (Ленинград); Н.П.Романову (Томск); Т.А.Самырсакову (Ташкент), а сразу после войны и иностранным ученым: Э.Картану (Франция) «Об ориентации в геометрии» и Э.Борелю (Франция) «Ортогональные множества и понятие трансфинитного» (22 июня 1945 г.); Дж.Александеру (США) «О гомологиях в топологических пространствах» (23 июня 1945 г.). Кроме того, широко стала использоваться практика постановки «обзорных докладов»: Н.Н.Боголюбов «Динамические системы и случайные процессы» (29 декабря 1943 г.); Л.А.Люстерник «Топология и вариационное исчисление» (23 января 1944 г.); М.А.Лаврентьев «Вариационный метод в нелинейных задачах эмпирического типа» (1 марта 1944 г.); И.Р.Шафаревич «Теория полей классов» (29 марта 1944 г.); А.Н.Колмогоров «Современное состояние теории цепей Маркова и неразрешенные проблемы в этой области» (31 октября 1944 г.); Ф.И.Франкль «Уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа» (26 декабря 1944 г.); И.Г.Петровский «Эллиптические и параболические уравнения в частных производных» (30 января 1945 г.); А.О.Гельфонд «Некоторые аналитические методы в теории чисел» (27 марта 1945 г.); С.Л.Соболев «О почти периодических решениях уравнений математической физики» (24 апреля 1945 г.). Особый интерес вызывают проводимые Обществом специальные заседания, посвященные: 150-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского (3 ноября 1943 г., докладчики – В.Ф.Каган и А.Н.Колмогоров); выдвижению кандидатов на получение Сталинских премий (15 декабря 1943 г.); памяти И.И.Привалова (5 июля 1944 г., докладчики – В.В.Степанов, А.И.Маркушевич, П.С.Александров); обсуждению плана издания ГТТИ (21 ноября 1944 г.); обсуждению преподавания математики в Московском университете (6 февраля 1945 г.); выдвижению кандидатов на получение Сталинской премии (20 февраля 1945 г.); выдвижению кандидатов в действительные члены и члены-корреспонденты Академии педагогических наук (17 апреля 1945 г.).

Список литературы

1. *Александров П.С.* Московское математическое общество (К 75-летию со дня основания) // Вестник Академии наук СССР. 1942. Вып.1. С.58–62.
2. *Александров П.С.* К 80-летию Московского математического общества // Успехи математических наук. 1947. Т.II. Вып.3(19). С.180–181.

3. *Александров П.С.* Вступительный доклад на торжественном заседании Московского математического общества 20 октября 1964 г. // Успехи математических наук. 1965. T.XX. Вып.3(123). С.4–9.
4. *Александров П.С.* Московское математическое общество // Успехи математических наук. 1946. Т.I. Вып.1(11). С.232–241.
5. *Александров П.С., Головин О.Н.* Московское математическое общество // Успехи математических наук. 1957. Т.XII. Вып.6(78). С.9–46.
6. *Демидов С.С., Токарева Т.А.* Московское математическое общество: фрагменты истории // Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2003. Вып.8(43). С.27–49.
7. *Demidov S.S., Tikhomirov V.M., Tokareva T.A.* The Moscow Mathematical Society // European Mathematical Society. Newsletter. December 2003. №50. Part 1. P.17–19; March 2004. №51. Part 2. P.25–27.
8. *Майстров Л.Е.* Возникновение Московского математического общества // Успехи математических наук. 1959. Т.XIV. Вып.3(87). С.227–234.
9. *Токарева Т.А.* Филоматический пролог Московского математического общества //Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2002. Вып.7(42). С.39–62.
10. *Токарева Т.А.* О реорганизации Московского математического общества // Институт истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова. Годичная научная конференция, 2007. М., 2007. С.341–344.
11. *Токарева Т.А.* Белое пятно, или черные страницы в истории Московского математического общества // Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2007. Вып.12(47). С.104–124.
12. Труды II Всесоюзного математического съезда (Ленинград 24–30 июня 1934). Л.–М., 1935. Т.I. Пленарные заседания и обзорные доклады.

ЛЕОНИД ВИТАЛЬЕВИЧ КАНТОРОВИЧ (К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

В.М.Тихомиров

Леонид Витальевич Канторович принадлежит к числу великих ученых XX столетия. Как почти все ученые подобного ранга он был фигурой легендарной. Я буду перемежать информацию о его научных достижениях некоторыми зачастую апокрифическими историями о нем.

Начну с такой. Леонид Витальевич относился к разряду людей неслыханно раннего развития. Семи лет от роду он стал свидетелем подготовки своего брата, учившегося в вузе, к экзамену по химии. Мальчик заинтересовался химией и прочитал учебник. Вскоре выяснилось, что ребенок полностью усвоил курс химии и научился решать все задачи. Брат, испытывавший затруднения в решении задач, привел младшенького на экзамен под предлогом, что его не с кем оставить дома: пусть, мол, посидит и тихо порисует. А на самом деле маленький мальчик тайком от преподавателей решал экзаменационные задачи для брата и его друзей.

Сын Леонида Витальевича – Всеволод Леонидович – рассказал мне, что отец как-то поведал ему, что в возрасте десяти лет придумал радиоуглеродный метод датирования. Через несколько лет Л.В. узнал, что этот метод вошел в науку после того, как он его придумал!

При рассказе о жизни и математическом творчестве Л.В.Канторовича я буду нередко опираться на его «предполагавшийся доклад в Московском математическом обществе». Этот текст Леонид Витальевич диктовал своему сыну, когда лежал в больнице, из которой он не вышел. Доклад остался недописанным. Всеволод Леонидович подготовил все, что Леонид Витальевич успел продиктовать, к печати, сопроводив своими подстрочными комментариями. Эта работа под названием «Мой путь в науке» с подзаголовком «Предполагавшийся доклад в Московском математическом обществе» была опубликована в 1987 г. в журнале «Успехи математических наук» [1]. Мне хотелось бы, чтобы читатель проникся стилем мышления и речи самого Леонида Витальевича.

Канторович поступил в Ленинградский университет в 1926 г. в четырнадцатилетнем возрасте, а приступил к занятиям только в ноябре. Вот как он комментирует это событие в «Успехах...». Для того чтобы принять в университет человека в столь юном возрасте, требовалось некое согласование. Подтверждение о зачислении в ряды студентов мальчик не получил и на занятия не ходил. И вдруг 6 ноября приходит открытка (с надписью «Вторично»), где сказано, что если он до 9 ноября 1926 г. не пройдет «комиссию по платности», не заплатит за учебу и не приступит к занятиям, то это повлечет за собой «исключение из числа студентов Ун[иверсите]та без права восстановления» [1, с.183–184]. И мальчик, выполнив нужное требование, приступил к занятиям.

Доклад начинается так: «Члены общества хорошо знают труды московских математиков...Иногородних математиков знают гораздо меньше. Поэтому моя цель – как бы представиться Математическому обществу ...Прежде чем перейти к конкретному изложению, я хотел бы кое-что сказать о себе... Я не эрудит ...Должен признаться, что и моя память, и способность к восприятию нового не намного выше среднего.

Некоторые делят математиков на математиков, обладающих, по преимуществу, проникающей силой, и на математиков-концептуалистов. Я принадлежу ко второй категории» [1, с.183].

Что касается первой «категории», то скромная самооценка, возможно, была вызвана тем, что, преодолевая интеллектуальные преграды, Леонид Витальевич не замечал их трудности.

Переход к изложению конкретных результатов, начну с воспоминания. Однажды я оказался рядом с Леонидом Витальевичем на одном собрании и спросил у него, кого он относит к числу своих учителей. При ответе Леонид Витальевич проявил свойственную ему широту и щедрость. Он назвал четверых: Григория Михайловича Фихтенгольца, Андрея Николаевича Колмогорова, Сергея Натановича Бернштейна и Владимира Ивановича Смирнова.

Григорий Михайлович сыграл для юного Канторовича роль наставника, раскрывшего перед ним горизонты нашей науки и формы научной деятельности. Фихтенгольц открыл семинар по дескриптивной теории функций, который стал посещать второкурсник Леонид Канторович, выступавший там со своими первыми научными сообщениями. Особую роль на начальной стадии творчества Леонида Витальевича сыграл другой семинар Фихтенгольца, проходивший в 1928–1929 гг. и посвященный теории *А*-множеств. Среди участников семинара были Д.К.Фаддеев, И.П.Натансон, С.Л.Соболев, С.Г.Михлин и др. Леонид Витальевич тогда активно сотрудничал со своим сокурсником Е.М.Ливенсоном.

Вот как сам Леонид Витальевич представляет в своем докладе теорию, ставшую темой семинара Фихтенгольца: «Известно, что в период, примерно, с 1915 по 1925 гг., исследования по аналитическим множествам (*А*-множествам или александровским множествам), открытым и изученным П.С.Александровым, М.Я.Суслиным и Н.Н.Лузиным, занимали центральное место в работах многих московских математиков (А.Н.Колмогоров, П.С.Новиков и др.)» [1, с.186].

Тема «Открытие *А*-множеств» очень болезненная. В одной из своих статей я писал, что нужен гений масштаба Достоевского, чтобы раскрыть тайну взаимоотношений названных Леонидом Витальевичем П.С.Александрова, М.Я.Суслина, Н.Н.Лузина, А.Н.Колмогорова, П.С.Новикова. Приоритетные и психологические обсуждения могут завести нас слишком далеко, и потому я на них здесь останавливаться не буду.

В итоге активного участия в семинаре по теории *А*-множеств цикл исследований Канторовича–Ливенсона был посвящен дальнейшей разработке этой теории. На работах обозначенного цикла сказывалось воздействие Лузина, Хаусдорфа и Колмогорова. Тогда же состоялось знакомство Канторовича с Колмогоровым, который познакомил юношу со своими исследованиями, написанными также в самую раннюю пору его творчества, однако остававшимися неопубликованными. (Девятнадцатилетний Колмогоров написал две статьи по дескриптивной теории множеств и передал их своему учителю. Тот держал материалы в своем столе в течение нескольких лет, пока по требованию Д.Ф.Егорова не вернул их автору. Первая статья была напечатана в 1928 г. [2]; вторая пролежала в архиве Колмогорова, была обнаружена незадолго до его смерти и лишь тогда опубликована [3]). В 1930-е гг. Колмогоров показывал ее А.А.Ляпунову и Л.В.Канторовичу, но, как пишет Леонид Витальевич, «Андрей Николаевич категорически запретил указывать время написания его рукописи» [1, с.187]. Контакты и беседы с А.Н.Колмогоровым, начавшиеся в 1920-е гг. и продолжавшиеся на протяжении всей жизни, и послужили тому, что Канторович назвал Колмогорова одним из своих учителей.

Заканчивалось обучение в университете. В его группе учились С.Л.Соболев, С.А.Христианович, С.Г.Михлин, Б.Б.Девисон, Г.А.Амбарцумян (сестра В.А.Амбарцумяна) и В.Н.Замятина (будущая жена Дмитрия Константиновича Фаддеева и мать Людвига Дмитриевича). В аспирантские годы Канторович начинает преподавать в Строительном институте: в первый год – ассистентом, во второй – доцентом, в третий – профессором. Говорят, что однажды, когда он взошел на кафедру, чтобы читать лекцию, его стащили с криком: «Садись на место! Сейчас профессор придет!»

В 1932 г., в двадцатилетнем возрасте, он был избран профессором кафедры Института промышленного транспорта. В эти годы продолжается бурный период творчества. Вдруг появляется цикл работ по тематике, навеянной творчеством С.Н.Бернштейна. Вот как он пишет о мотивах, побудивших его начать эти исследования.

...Запаздывал ученик на урок, и Леонид Витальевич, листая математический журнал, наткнулся на статью о полиномах Бернштейна, восхитился, и ему «сразу подумалось, а нельзя ли в этих полиномах заменить значение функции в отдельных точках на более устойчивые средние значения функции в соответствующем интервале» [1, с.188]. Оказалось, что этот процесс ведет к сходимости почти всюду для функций из L_1 на отрезке.

И в других проблемах, навеянных творчеством Бернштейна, Леонид Витальевич идет своим путем, проявляя при этом большую самостоятельность. Он исследует сходимость полиномов Бернштейна в комплексной области, а также полиномов с целыми коэффициентами. Это оказало воздействие и на самого Бернштейна: в 1943 г. он печатает статью «О сходимости полиномов в комплексной области» [4].

В 1931 г. А.Н.Крылов печатает работу «О расчете балок, лежащих на упругом основании» [5], и спустя три года появляется реплика Леонида Витальевича «Применение теории интегралов Стилтьеса к расчету балки, лежащей на упругом основании» [6]. Несомненное влияние как на эту работу, так и вообще на идеологию обобщенных функций оказало творчество Н.М.Гюнтера, который в те годы опубликовал огромный труд о применении интеграла Стильтьеса к фундаментальным проблемам математической физики [7].

Его творчество оказало большое влияние и на Леонида Витальевича, и на С.Л.Соболева (В.И.Арнольд причисляет Гюнтера к основоположникам теории обобщенных функций.)

И почти одновременно осуществляется переход Канторовича к вопросам, постановка которых была навеяна контактами с Владимиром Ивановичем Смирновым: вариационное исчисление (учебник на эту тему написан В.И.Смирновым, В.И.Крыловым и Л.В.Канторовичем в 1933 г. [8]) и построение конформных отображений (работа [9], оказавшая влияние на Г.М.Голузина).

В 1936 г. появляется знаменитая книга Л.В.Канторовича и В.И.Крылова «Методы приближенного решения дифференциальных уравнений» [10], на кого только не оказавшая влияние в 1940-е гг. Два результата Канторовича из прикладного анализа хочу отметить особо. Он получил явные оценки приближений решений уравнения Фредгольма второго рода системами конечномерных уравнений и распространил метод Ньютона на бесконечномерный случай. (Этот метод был, в частности, использован А.Н.Колмогоровым при построении КАМ-теории). По ходу дела Леонид Витальевич описал медленнее сходящийся, но гораздо более удобный с вычислительной точки зрения метод, иногда называемый модифицированным методом Ньютона–Канторовича. Оба результата легли в основу вычислений, которые проводились при осуществлении атомных и космических программ, и потому в 1940-е гг. Канторович уделяет особое внимание проблематике создания эффективных численных методов решения прикладных задач. Мне лично было бы очень интересно узнать о вкладе Канторовича в осуществление атомной программы, я слышал о том, что его роль была велика, но подробного текста об этом мне найти не удалось.

Эта поразительная «всеядность» напомнила мне Павла Самуиловича Урысона, который, развивая общую топологию, мимоходом решал экстремальные задачи геометрии, создавал теорию нелинейных уравнений, показывал, как возникают A-множества в теории аналитических функций, решил принципиальную задачу электростатики о «сливании электричества с острия» и многое другое. Подобно Урысону, нашедшему свою тему – теорию размерности, Канторович нащупывает (во всяком случае, в предвоенный период) свое направление в функциональном анализе – он строит теорию упорядоченных векторных пространств.

В 1930-е гг. три математика формировали идеологию функционального анализа. Прежде всего, Банах – своим трудом «Théorie des Opération Linéare» [11] по теории линейных операций, в котором векторные пространства были оснащены метрикой и построены начала нормированных пространств (эта тема в дальнейшем развивалась Колмогоровым и фон Нейманом, оснастившими векторные пространства топологией, что привело к созданию теории топологических векторных пространств и, на их основе, теории обобщенных функций). Также следует назвать имя И.М.Гельфанда, соединившего полные нормированные (банаховы) пространства с алгеброй; в итоге была построена теория банаховых алгебр. И наконец, третий математик Л.В.Канторович соединил банаховы пространства с порядковыми структурами; в итоге была построена теория полуупорядоченных пространств, или К-пространств, или векторных решеток. (Доклад Канторовича на эту тему заинтересовал Колмогорова – ему показалось интересным, что пространства функций ограниченной вариации относятся к числу полуупорядоченных пространств). В течение нескольких лет Леонид Витальевич со своими учениками построил развернутую теорию полуупорядоченных пространств.

Создание этой теории дважды (в 1937 и 1938 гг.) было оценено первыми премиями на конкурсе научных работ: по всем специальностям в 1937 г. и по математике (вместе с А.Д.Александровым, Л.С.Понтрягиным и С.Л.Соболевым) в 1938 г.

Как мне не раз говорил С.С.Кутателадзе, Леонид Витальевич высказывал идею о том, что полуупорядоченные пространства во всем подобны вещественным числам. Это было подтверждено в 1970–1980-е гг., когда были построены булевозначные модели вещественных чисел и появились промежуточные мощности множеств числовой прямой. Леонид Витальевич застал подтверждение своих интуитивных прозрений: в работе Е.И.Гордона, с которой он познакомился, было доказано, что К-пространства можно с некоторой общей позиции рассматривать как вещественные числа.

Мы подошли к научным направлениям, которые были очень высоко оценены учеными всего мира. Я имею ввиду теорию линейного программировании и математическую экономику.

...В начале 1939 г. к двадцатисемилетнему профессору Ленинградского университета обратились за консультацией сотрудники лаборатории фанерного треста. Они поставили перед собой вопрос о наиболее выгодном распределении материала между станками. Леонид Витальевич заинтересовался этой задачей. Оказалось, что эта задача не была случайной. Обнаружилось большое число задач, имеющих аналогичный математический характер: наилучшее использование посевных площадей, выбор загрузки оборудования, рациональный раскрой материала, использование сырья, распределение транспортных грузопотоков. Это настойчиво побудило Канторовича к поиску эффективного метода их решения. В том же 1939 г. была опубликована небольшая брошюра Л.В.Канторовича «Математические методы организации и планирования производства» [12], в которой по сути было открыто новое научное направление в математике, изучавшее задачи на минимум или максимум выпуклых (как правило, линейных) функций при ограничениях типа линейных неравенств. Это направление, получившее название линейного программирования, оказало большое влияние на развитие теории и практики управления различными объектами, на создание нового раздела в теориях оптимизации численных методов выпуклой оптимизации (ныне этот материал является составной частью дисциплины под названием «Исследование операций») и на разработку математических оснований экономической науки. В упомянутой работе 1939 г. Леонид Витальевич впервые на математическом языке сформулировал задачи оптимального планирования и предложил методы их решения. Теория линейного программирования теперь рассматривается, как глава выпуклого анализа, существенно базирующегося на двойственности выпуклых объектов. Двойственные переменные в задачах линейного программирования получили в трудах Л.В.Канторовича экономическую интерпретацию и стали называться объективно обусловленными оценками, теневыми ценами и др.

В суровом 1942 г., выполняя многочисленные работы по военной тематике, Леонид Витальевич начал разработку особого отдела бесконечномерного линейного программирования, называемого ныне теорией Монжа–Канторовича. Эта теория, истоки которой были заложены в XVIII в. Г.Монжем, также базируется на принципе двойственности. В наши дни теория Монжа–Канторовича переживает период бурного развития. Достаточно сказать, что Седрик Виллани, получивший филдсовскую медаль на последнем Математическом конгрессе, развивает теорию Канторовича. Достижения Леонида Витальевича в экономике были увенчаны присуждением ему Нобелевской премии по экономике за 1975 г.

Двадцатый век был воистину жестоким веком. Но по отношению к Леониду Витальевичу он был во многом милостив. Ему посчастливилось родиться в одном из самых прекрасных городов мира и воспитываться в высококультурной и интеллигентной среде. Его выдающаяся одаренность была своевременно замечена и оценена, и в самые ранние годы он попал в атмосферу Ленинградского университета, в котором были живы традиции петербургской математической школы, заложенные еще Чебышевым и его последователями, и где работали люди высокого нравственного ценза, такие как Владимир Иванович Смирнов и Григорий Михайлович Фихтенгольц.

На протяжении первых лет своего творчества Леонид Витальевич ощущал всестороннюю поддержку и одобрение, причем не только коллег. Мне как-то довелось видеть календарь за 1940 г., где среди портретов передовиков производства был портрет Леонида Канторовича, про которого там сказано, что он относится к числу самых талантливых ученых Ленинградского университета.

В одном из писем 1942 г. к Павлу Сергеевичу Александрову А.Н.Колмогоров так описывает эволюцию творчества многих своих коллег: «После первых 10–15–20 лет, когда молодой математик занимается стихийно тем, что попадает ему под руку, большинство серьезных математиков начинает стремиться к тому, чтобы очертить себе достаточно узкий круг интересов и сосредоточить свои усилия на такой области, где они чувствовали себя полными хозяевами в смысле полного владения всем, что в данной области известно, а по возможности и не имели бы равных по силе конкурентов» [13, с.526].

В числе таковых «серьезных математиков» в письме названы Александров, Курош, Хаусдорф и Каратеодори – славные и достойные имена. Упоминая в этом списке своего друга и немецких математиков, оказавших большое влияние на его собственное творчество, Колмогоров признает их позицию вполне достойной. Но его, Колмогорова, влечет к себе другая позиция, а именно: «браться за все то, что с чисто субъективной точки зрения кажется наиболее существенным и интересным в математике вообще» [13, с.527]. Среди своих современников и соотечественников в очень скромном перечне тех, кого влекла к себе «другая позиция», названа фамилия Канторовича. Суровые испытания для Канторовича начались тогда, когда Леонид Витальевич осознал возможности математики в разрешении многих актуальных проблем экономики. Это было в начале 1940-х гг., и потом эти испытания продолжались долгие годы. Но все это было преодолено.

Влияние Канторовича испытали на себе все, кто занимался математическим анализом в широком смысле этого слова. Более того, Леониду Витальевичу довелось создать блистательную школу по математической экономике. Мне посчастливилось впервые увидеть Леонида Витальевича Канторовича в 1957 г., когда на ноябрьские праздники Андрей Николаевич Колмогоров взял меня в Ленинград для встреч с ленинградскими математиками, во время которых планировались наши доклады об эпсилон-энтропии. Вечером, после лекции Андрея Николаевича, состоялся прием у Юрия Владимировича Линника. На нем собралось много ленинградских математиков, среди них был и Леонид Витальевич Канторович. Разговор шел о разном и, разумеется, о кибернетике. Мне запомнились слова Леонида Витальевича о том, что машину нетрудно будет обучить делать разные сложные вещи по готовой программе, но нелегко выработать у нее «свободу воли», способность ставить перед собой незапрограммированные задания. Эти слова прозвучали очень веско: чувствовалось, что Леонид Витальевич глубоко вошел уже в тот мир, который мы сейчас зовем компьютерным (тогда этого слова еще не было). А у остальных об этом мире были лишь довольно отдаленные впечатления.

Нового знакомства не потребовалось: при встречах Леонид Витальевич дружески приветствовал меня, как человека хорошо ему известного. Мне посчастливилось несколько раз встречаться и разговаривать с Леонидом Витальевичем, и он раскрылся передо мной, как человек необычайной душевности и привлекательности. Ему было свойственно очень тонкое чувство юмора.

Мне рассказывали, что по разным «персональным» причинам некоторое время в Академгородке в Новосибирске не было полноценного медицинского обслуживания, а была только патологоанатомическая лаборатория. За лечением надо было ездить в Новосибирск. Как-то выступая на одном представительном собрании, Леонид Витальевич сказал, что было бы хорошо, если бы можно было получить медицинскую помощь на более ранней стадии болезни.

Но при всей своей мягкости и доброжелательности, Леонид Витальевич был бесстрашным часовым на рубеже истины. Примеров тому необычайно много. Мне же остается только сказать, что я часто вспоминаю светлый облик Леонида Витальевича и благодарю судьбу, за то, что она дала мне возможность общаться с ним.

Список литературы

1. *Канторович Л.В.* Мой путь в науке (Предполагавшийся доклад в Московском математическом обществе) // Успехи математических наук. 1987. Т.42. Вып.2(254). С.183–213.
2. *Колмогоров А.Н.* Об операциях над множествами // Математический сборник. 1928. Т.35. С.414–422.
3. *Колмогоров А.Н.* Теория информации и теория алгоритмов. М., 1987.
4. *Бернштейн С.Н.* О сходимости полиномов в комплексной области // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1943. Т.7. С.49–88.
5. *Крылов А.Н.* О расчете балок, лежащих на упругом основании. Л., 1931. 154 с. (Изд.3.)
6. *Канторович Л.В.* Применение теории интегралов Стилтьеса к расчету балки, лежащей на упругом основании // Труды Института промышленного строительства. 1934. Т.1. №1. С.17–34.
7. *Гюнтер Н.М.* Интегралы Стилтьеса в математической физике и в теории интегральных уравнений // Труды 2-го Всесоюзного математического съезда. 1934. Т.1. С.271–317.
8. *Смирнов В.И*, *Крылов В.И.*, *Канторович Л.В.* Вариационное исчисление. Л., 1933.
9. *Канторович Л.В.* О конформном отображении // Математический сборник. 1933. Т.40. С.294–325.
10. *Канторович Л.В*, *Крылов В.И.* Методы приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.–Л., 1936.
11. *Banach S.* Théorie des Opérations Linéaires. Warsaw, 1932.
12. *Канторовича Л.В.* Математические методы организации и планирования производства. Л., 1939.
13. *Колмогоров А.Н.* Книга вторая: Этих строк бегущих тесьма (избранные места из переписки А.Н.Колмогорова и П.С.Александрова). М., 2003.

РАЗВИТИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В РАБОТАХ Л.В.КАНТОРОВИЧА 1930–1950-Х ГГ.

А.Л.Андрианов

1. Введение

Как известно, Леонид Витальевич Канторович является основателем такой принципиально новой для своего времени области математических методов в экономике, как линейное программирование (ЛП). В период разработки этого направления важнейшую роль сыграли идеи предшествовавшего математического творчества ученого, в котором одно из центральных мест занимали исследования по функциональному анализу, в частности, по теме полуупорядоченных пространств – еще одному направлению, которое основал Канторович, на этот раз уже в области математики.

Задача данной статьи – осветить вопросы, связанные с исследованиями Леонида Витальевича в 1940–1960-е гг., проследив направление развития методов, зародившихся в более ранний период его научного творчества. Вторая важная тема, которую также затрагивает настоящая статья, касается признания вклада Канторовича в экономическую науку как на родине, в СССР, так и в рамках мирового научного сообщества. Наконец, последним, но отнюдь не менее важным вопросом, которого мы коснемся в этой статье, станет выяснение положения работ Леонида Витальевича в современной науке и в истории экономической математики, а также выявление их связей с достижениями в области функционального анализа.

Обращаясь непосредственно к теме исследований Канторовича в области математической экономики, необходимо сначала перечислить основные направления исследований, осуществленных Леонидом Витальевичем в довоенные годы. Несомненно, особое место в его научной биографии занимает работа «Математические методы организации и планирования производства» [1], поскольку это первая публикация на тему ЛП как в творчестве Леонида Витальевича, так и в мире в целом. В ней поставлены основные задачи ЛП, предложен метод их решения и приведены примеры важнейших приложений (как позднее напишет Дж.Б.Данциг, «работа Л.В.Канторовича 1939 г. содержит почти все области приложений, известные в 1960 г.» [2, с.29]). Ценность работы [1] для математики, прежде всего, в изложенном и обоснованном в ней методе решения задачи на экстремум, выходящем за рамки классического математического анализа; причем помимо собственно алгоритма решения проблемы, автор предлагает два подхода к доказательству существования решения.

Родилась эта работа, равно как и глубокое увлечение ученого разработкой математических методов в экономике, в известной степени случайно. Так, в 1938 г. Канторович занялся линейной оптимизацией, решая частную задачу оптимальной загрузки станков, с которой в Институт математики и механики ЛГУ обратился фанерный трест. Задача была абсолютно практическая и частная, однако Леонид Витальевич в силу свойственной ему способности видеть целостный результат, общую картину, не останавливаясь на частных моментах, заметил, что многие другие экономические проблемы приводят к аналогичным математическим задачам – максимизации функции при многих ограничениях. Отметим, что часто при решении практических задач не удается непосредственным образом применить методы математического анализа, поскольку это приводит к десяткам тысяч, а иногда и миллионам, систем уравнений, что делает такой подход неприменимым на практике.

Канторович предложил геометрический метод, доклад о котором, по его собственным воспоминаниям, впервые был сделан на октябрьской научной сессии Ленинградского педагогического института им. А.И.Герцена в 1938 г. Метод этот, однако, был недостаточно алгоритмичен, в связи с чем исследования продолжились, и уже в конце 1938 г. Канторович, опираясь на некоторые идеи функционального анализа, сформулировал общий метод решения подобных задач – так называемый метод разрешающих множителей. Этот метод, который показался Леониду Витальевичу перспективным как в силу его алгоритмичности, так и благодаря содержательному экономическому значению самих множителей, оказался одним из простейших и эффективнейших численных методов ЛП и уже в то время был опробован на практике.

Указанная выше работа 1939 г. [1] как раз и является результатом соответствующих исследований и первым трудом ученого в области экономики. Сохранилась рукопись 1938 г. [3], отражающая содержание доклада 1938 г. «По существу, в этой работе описывается симплекс-метод. То, что работа не была тогда же опубликована, связанно с очевидной неэффективностью симплекс-метода при счете вручную для сколько-нибудь реальных задач… Как вспоминает Леонид Витальевич, уже в январе 1939 г. им был предложен метод разрешающих множителей…» [4, с.52].

После выхода книги [1], в которой содержались как постановка задачи минимизации линейной функции на множестве, задаваемом линейными ограничениями типа равенств и неравенств, так и разработанная Канторовичем теория этих задач (включая методы их решения), Леонид Витальевич продолжил исследования математических методов, применимых в экономике. Результаты этих исследований были изложены в двух работах, увидевших свет уже через год. Одна из них, заметка [5], содержала наиболее общую математическую трактовку предложенного им вариационного принципа, метода разрешающих множителей и общую формулировку условий экстремума при ограничениях в бесконечномерном пространстве. Другая работа, статья [6], хотя и была завершена в 1940 г. (в том же году обнародована в докладе), в печатном виде появилась лишь в 1949 г. Несмотря на то, что эта публикация носила чисто прикладной характер, в ней содержались постановка и решение ставшей впоследствии классической транспортной задачи.

2. О последующих экономических исследованиях Л.В.Канторовича

Все последовавшие за опубликованными в книге [1] исследования Канторовича в области математических методов экономики можно разделить на две группы: те, которые были ориентированы на практическое применение и носили более частный характер, и те, которые имели большее теоретическое значение и не связывались напрямую с конкретными экономическими примерами.

2.1. Применение ЛП к частным задачам. К работам чисто прикладного характера относятся две статьи 1949 г. Это, во-первых, работа [7], содержащая решение задачи сочетания максимальной эффективности распиловки леса с получением заданного ассортимента продукции; а во-вторых, работа [6], упоминавшаяся выше (к сказанному добавим лишь, что в ней содержится, помимо прочего, анализ задач об оптимальных перевозках грузов и алгоритмы решения этих задач в виде созданного авторами метода потенциалов).

В 1951 г. вышла книга [8], в которой приводится отчет об использовании методов ЛП к решению задачи рационального раскроя материалов, излагаются новые приемы ЛП и на этой базе – подробный анализ проблем экономии материала при раскрое.

Еще одной работой экономического направления стала статья 1958 г. [9], разъясняющая связи ЛП с оптимальным решением задач оперативного производственного планирования.

Столь широкий спектр применения методов, разработанных Канторовичем, является лучшей иллюстрацией одного из творческих принципов Петербургской–Ленинградской школы, ярким представителем которой был Леонид Витальевич: «Нет ничего практичнее хорошей теории».

2.2. Разработанные методы и их применение к математическим проблемам. Как уже говорилось, для творчества Канторовича характерно взаимопроникновение прикладных и теоретических подходов. Не стали исключением и его исследования в области экономической математики. Так, ранее уже упоминалась работа

1940 г. [5]; а в статье 1957 г. [10] дана постановка и анализ общей задачи производственного планирования.

Знаменитая работа 1959 г. [11], за которую Леонид Витальевич был удостоен Ленинской премии (1965), также включает в себя прикладные и теоретические исследования, которые были, по возможности, отделены друг от друга и изложены в разных частях книги. Эта работа подытоживает предыдущие результаты. В одной ее части содержится анализ разработанных экономических приложений ЛП, в другой – наиболее полное изложение математической теории и вычислительных методов ЛП.

Продолжением упомянутой выше работы [6] стала статья 1942 г. [12], которую необходимо выделить особо, поскольку в ней рассматривался бесконечномерный аналог транспортной задачи. Примечательна она еще и тем, что, основываясь на ней, в 1948 г. Канторович получил более полное решение известной проблемы Монжа (см.: [13]).

Особняком стоят еще две работы, выполненные совместно с Г.Ш.Рубинштейном, – это статьи 1957 г. [14] и 1958 г. [15] Они посвящены обобщениям задач ЛП на пространства вполне аддитивных функций множеств.

3. О признании вклада Л.В.Канторовича в экономическую науку

Сейчас авторитет Канторовича, как создателя школы в области функционального анализа и родоначальника ЛП, общепризнан и не вызывает никаких сомнений. Изданная в 1948 г. его большая статья [16] отмечена Сталинской премией. Несмотря на то, что название статьи звучало тогда парадоксально (в сознании большинства ученых того времени между функциональным анализом и прикладными задачами была пропасть) развитые в ней идеи стали классическими. Как сказал С.Л.Соболев, уже через несколько лет представить себе вычислительную математику без функционального анализа стало так же невозможно, как и без вычислительных машин.

Вообще Канторович всегда опережал свое время, что вызывало трудности восприятия и продвижения его идей. Такая ситуация сложилось и вокруг работ в области экономики, только в этом случае она усугублялась тем, что надо было иметь дело не с абстрактной математической материей, а с ортодоксальными и политизированными взглядами консервативно и враждебно настроенных людей.

В 1959 г. вышла книга [11], вызвавшая резкие нападки ортодоксальных экономистов и острые дискуссии, продолжавшиеся до середины 1960-х гг. Впрочем, последние имели и положительный эффект: за ними следили ученые как в СССР, так и на Западе.

Тогда же переводились, получая всемирную известность, ранние работы Канторовича по ЛП, закрепившие за ним приоритет открытия. Вскоре пришло признание в СССР: в 1964 г. – избрание действительным членом Академии наук по Отделению математики, в 1965 г. – Ленинская премия. Заключительным аккордом стало вручение ему совместно с Т.Купмансом Нобелевской премии «за вклад в разработку теории оптимального использования ресурсов в экономике» (1975). К сожалению, это мало помогло его попыткам внедрения новых идей в экономическую практику.

3.1. Ленинская премия. История получения Канторовичем Ленинской премии как нельзя лучше иллюстрирует те трудности, с которыми пришлось столкнуться ученому в борьбе за продвижение и внедрение новых идей в экономическую практику СССР. В первый раз кандидатура Канторовича рассматривалась в 1962 г. в связи с его работами по ЛП, однако награждение не состоялось. Повторное обсуждение происходило в 1964 г., когда были представлены работы: Л.В.Канторовича [11], В.С.Немчинова [17], В.В.Новожилова [18]. Все это – основополагающие труды тогда еще молодого направления. Газета «Известия» опубликовала статью А.Г.Аганбегяна, А.Л.Вайнштейна и Ю.А.Олейника «Первооткрыватели» [19] о достижениях кандидатов. Но тут же нашлись противники – верные слуги «марксистской» экономики А.Боярский и Я.Кронрод, направившие в «Известия» письмо, в котором Канторович обвинялся в преступлениях против «марксистской трудовой теории стоимости» и т.д. Аналогичную кляузу Боярский и Кронрод одновременно направили в Комитет по Ленинским премиям. Интересно, что А.Н.Колмогоров дал достойный ответ на этот выпад [20, с.330].

Через некоторое время борьба за истину достигла своего апогея: для газеты «Правда» была подготовлена большая статья с громким названием «В плену теоретических ошибок», которая была подписанная четырнадцатью апологетами «единственно верной» экономической теории. Среди них были академики С.Г.Струмилин и К.В.Островитянов. Статья слово в слово повторяла обвинения вышеупомянутого письма. Причем критике подверглась только работа Л.В.Канторовича. К счастью, серьезный ответ С.Л.Соболева и А.А.Ляпунова не заставил себя ждать: в «Правду» пришла их статья «Математика и экономика».

Две эти статьи хотя и были целиком готовы, в печати не появились. Возможно, по причине указания «сверху». Ленинская премия по экономике была вручена всем трем авторам, но только в 1965 г. Вероятно, это было связанно с изменением политической ситуации: А.Н.Косыгин наметил программу экономических реформ, в которой могли быть использованы работы Канторовича. Возможно также, что на решение Комитета по Ленинским премиям повлияли М.В.Келдыш и В.А.Кириллин.

Сначала официальной мотивировкой выдвижения на премию была «разработка математических методов решения задач планирования и управления народным хозяйством», но к 22 апреля 1965 г. она изменилась: в «Правде» опубликовано постановление о присуждении трем ученым Ленинской премии «за научную разработку метода линейного программирования и математических моделей экономики». Формулировку изменили, чтобы исключение Канторовича из списка награждаемых стало невозможным.

3.2. Международное признание. Международное признание пришло не сразу, были и неприятные моменты. Зарубежные ученые узнали о трудах Леонида Витальевича с большим опозданием. Отчасти причиной тому послужило тяжелое время: до Великой Отечественной войны и во время нее Канторович написал около 20 работ экономико-математической направленности, но лишь две из них были своевременно напечатаны. Первая – заметка 1942 г. [12]; именно благодаря этой публикации о работах Канторовича по ЛП узнали на Западе. Произошло это лишь в 1953 г., когда в работе М.М.Флуда [21], посвященной транспортной задаче, появилась ссылка на единственную доступную зарубежному читателю упомянутую выше статью. Вторая – «Рациональные методы раскроя металла» [22] появилась в 1942 г. под грифом ДСП (для служебного пользования). Еще одна работа, Канторовича и Гавурина 1940 г. [6], также по транспортной задаче, увидела свет лишь в 1949 г., уже после переоткрытия этих результатов на Западе. Так же и знаменитая работа [11] была направлена в Госплан в 1942 г. и издана только в 1959 г.

В итоге признание приоритета советской науки в разработке методов ЛП оказалось сильно затруднено. Тем не менее, научная значимость и приоритет результатов Канторовича были признаны мировой общественностью, о чем свидетельствует, например, переписка Леонида Витальевича с Т.Купмансом, который сыграл огромную роль в «открытии» советских работ на Западе (см.: [20, с.364–381]). В письме от 12 ноября 1956 г. он пишет: «Недавно мне представился случай познакомиться с экземпляром Вашей статьи “О перемещении масс”... Мне сразу стало ясно, что частью Вы развивали параллельно, но в большей части предвосхитили развитие транспортной теории в США, развитие которой началось в период с 1941 г. ...Ваша краткая статья в замечательно сжатой форме содержит математическое существо того, что содержится в этих работах» [20, с.364].

В 1958 г. работа [12] была перепечатана в «Management Science»; в 1960 г. там же был опубликован перевод книги [1]. Вводную заметку к этому переводу писал Т.Купманс. С последней публикацией связан неприятный инцидент – появление статьи профессоров Чарнса и Купера «весьма странного тона и содержания» – чем-то напоминающий историю присуждения Ленинской премии (см.: [20, с.375]).

Об окончательном признания роли и приоритета работ Канторовича в развитии ЛП говорят многочисленные почетные степени и звания в наиболее уважаемых учреждениях всего мира. А в довершении – присуждение ему, совместно с Т.Купмансом, Нобелевской премии (1975) по экономическим наукам «за вклад в разработку теории оптимального использования ресурсов в экономике».

4. Л.В.Канторович и современная наука

В предыдущей части описано, какой трудный путь прошли идеи Канторовича, прежде чем занять должное место в экономической и математической науках, с какими сложными политическими и идеологическими проблемами пришлось столкнуться ученому. Это объясняет, почему они не получили своевременного признания, распространения и были позже переоткрыты в США. Непонимание значимости и перспективности нового направления (ЛП) послужило причиной того, что к одним и тем же идеям подходили с разных позиций и в разное время представители разных стран и школ. Причем исследователи не всегда осознавали, что, по существу, в основе их изысканий лежат одни и те же идеи. Работы Канторовича во многом опередили свое время, и лишь спустя годы теория ЛП заняла, наконец, должное место в науке и приобрела целостную, законченную форму. Появились новые численные методы решения и множество их применений в конкретных задачах, оформились связи с другими направлениями (например, с нелинейными задачами), а уже установленные факты были рассмотрены с новых позиций (функционального, в частности, выпуклого анализа, вариационного исчисления) и обобщены. Именно с этих позиций я изложу свое видение положения работ Канторовича в общей картине развития оптимизационных методов математической экономики. Изложение разделено на периоды в соответствии с хронологией.

4.1. Положение работ Л.В.Канторовича в истории экономической математики. *В классической математике* задачи на условный экстремум рассматривались только для ограничений типа равенств. Для них есть правило множителей Лагранжа, которое представляет собой необходимое условие экстремума первого порядка.

Сами по себе системы неравенств (вне связи с задачами минимизации) изучали Ж.Фурье, Г.Минковский, Г.Вейль и др. Созданный ими аппарат позволяет получить условия экстремума в задачах с ограничениями типа неравенств; первые же работы по экстремальным задачам с ограничениями общего вида появились только в конце 1930-х – начале 1940-х гг.

К следующему периоду можно отнести исследования *Чикагской школы* (Г.Блисс, О.Больца, Е.Макшейн, Л.М.Грейвс, М.Р.Хестенс и др.), для представителей которой характерен интерес к возможно более широкой постановке вариационных задач. «В 1937 г. появилась работа Ф.Валентайна, посвященная условиям экстремума для задач вариационного исчисления при наличии разного рода ограничений типа неравенств» [23, с.10]. Потом Е.Макшейном и некоторыми другими учеными были созданы общие схемы анализа абстрактных экстремальных задач. Вильям Каруш, бывший тогда аспирантом Чикагского университета, исследовал конечномерные задачи минимизации с общими ограничениями и «получил в 1939 г. условия экстремума I и II порядков для гладкого случая, но к этой работе не отнеслись серьезно и она не была опубликована. К тем же по существу условиям экстремума несколько позже пришел американский математик Ф.Джон, занимавшийся экстремальными проблемами в геометрии (типа отыскание эллипсоида наименьшего объема, описанного вокруг заданного выпуклого тела). Работа Джона была отвергнута одним серьезным математическим журналом и была напечатана лишь в 1949 г.» [там же].

В СССР пионером в этой области был Л.В.Канторович, опубликовавший в 1939 г. книгу [1], которая содержала постановку задачи минимизации линейной функции на множестве, задаваемом линейными ограничениями типа равенств и неравенств. Он разработал теорию этих задач и предложил некоторые (не полностью алгоритмизированные) методы их решения. В 1940 г. появилась заметка [5], содержавшая общую формулировку условий экстремума при наличии ограничений в бесконечномерном пространстве. Но эти работы, как и те, что упоминались в связи с исследованиями чикагской школы, не получили единодушного признания и широкого распространения, частично оставшись в засекреченных в военное время статьях.

Значительно позднее, в конце 1940-х гг., США вновь возвращаются к этим вопросам. Дж.Б.Данциг начал изучать задачи минимизации линейной функции при линейных ограничениях [24]. Они получили название задач ЛП. Дж.Данциг сформулировал условия оптимальности решений в ЛП и предложил симплекс-метод, ставший одним из наиболее популярных численных методов решения задач этого класса. Под влиянием работ фон Неймана по теории игр, Дж.Данциг, Д.Гейл, Г.Кун и А.У.Таккер создали теорию двойственности [25] в ЛП, которую можно рассматривать в качестве специфической формулировки условий экстремума.

Естественным развитием ЛП стало его обобщение на нелинейный случай. Минимизация нелинейной функции при нелинейных ограничениях получила название математического программирования (МП), а если минимизируемая функция и ограничения выпуклы – выпуклого программирования. Условия экстремума для задач МП стали широко известны после работы Г.Куна и А.У.Таккера 1950 г. [25]. «По существу, это были те же условия Каруша–Джона. Для выпуклого случая Г.У.Кун и А.У.Таккер сформулировали условия экстремума в терминах седловой точки; эта формулировка пригодна и для негладких задач» [23, с.11]. Первый численный метод нелинейного программирования (метод штрафных функций) введен Р.Курантом в 1943 г.

Рассмотрение тех же вопросов с иных позиций привело к появлению теории задач *оптимального управления* (ОПУ). Это непосредственное обобщение классической задачи вариационного исчисления. Задача ОПУ заключается в оптимизации функционалов от решений ОДУ, правые части которых включают подлежащие выбору функции («управления»). Необходимые условия оптимальности для этих задач сформулированы и доказаны Л.С.Понтрягиным, В.Г.Болтянским и Р.В.Гамкрелидзе в 1956–1958 гг. в форме так называемого принципа максимума. Эта теория обобщила условные вариационные задачи на случай нерегулярных ограничений, потому ее можно сравнить с задачами бесконечномерного (вообще говоря, невыпуклого) программирования. В другой форме эти же условия оптимальности для подобных задач были получены Беллманом на основе идеи динамического программирования [26]. Все эти результаты были настолько тесно связаны со специфической формой задач ОПУ, что не сразу было осознано их родство с условиями экстремума для задач МП.

В 1960-е гг. появился цикл работ (А.Я.Дубовицкого и А.А.Милютина, Б.Н.Пшеничного, Л.Нейштадта, Г.Халкина, Дж.Варги и др.), в которых были предложены общие схемы получения условий экстремума для абстрактных задач оптимизации с ограничениями, позволяющие охватить и теорему Куна–Таккера, и принцип максимума. Это дало возможность по-новому взглянуть на известные результаты. В частности, удалось выделить в них стандартную часть, которую можно получить с помощью общих схем, и нестандартную, связанную со спецификой конкретной задачи. В это же время в работах Р.Рокафеллара [27] получил завершенную форму выпуклый анализ, оказавшийся исключительно удобным аппаратом исследования экстремальных задач.

4.2. Связи с функциональным анализом и дискретной математикой. Канторович уже перед войной имел огромный авторитет во многих областях математики. Особо стоит отметить, что он был одним из признанных авторов в области функционального анализа. Вне всякого сомнения, опыт и идеи, накопленные ученым в этой области, сыграли большую роль в его подходе к ЛП, о чем и сам Леонид Витальевич неоднократно упоминал. Также понимал эти задачи фон Нейман; его основная теорема теории игр, модели экономического поведения и другие работы экономико-математической тематики имеют четкий след концепций функционального анализа и, в частности, идеи двойственности.

В этой плоскости лежит одна из наиболее прозрачных связей двух областей: так, при функционально-аналитическом подходе двойственность естественным образом рассматривается в терминах функционального анализа. При этом разрешающие множители, в свою очередь, представляют, по существу, решение двойственной задачи (эта терминология появилась значительно позднее).

«*Теория двойственности линейных пространств с конусом* (здесь и далее по цитате курсив мой. – *А.А.*) дает естественный язык для задач линейного программирования в пространствах произвольной размерности. *Теорема Хана–Банаха и теоремы линейной отделимости* – фундаментальные теоремы классического линейного функционального анализа – чистейший выпуклый геометрический анализ. То же относится к общей *теории двойственности линейных пространств*.

Классическая теория линейных неравенств Г.Минковского–Г.Вейля в современной форме появилась в работе Г.Вейля 30-х гг. чуть раньше работ Л.В.Канторовича – эта связь особенно прозрачна. *Теорема об альтернативах, леммы Фаркаша и т.д., двойственность Фенхеля–Юнга в теории выпуклых функций и множеств* – все это объединилось с теорией линейного программирования уже в 1950-е гг. Однако заслуга Леонида Витальевича, по-видимому, не сразу узнавшего обо всех этих связях, в том, что он нашел единый подход, базирующийся на идеях функционального анализа и вскрывающий идейную суть вопроса. Это одновременно давало и базу для численных методов его решения. Не преувеличивая, можно сказать, что функциональный анализ стал фундаментом всей математической экономики», – писал А.М.Вершик в статье «О Л.В.Канторовиче и о линейном программировании» [4, с.130–152].

Если смотреть хронологически, то первые связи теории Канторовича были с теорией наилучшего приближения и, в частности, с работами Крейна по *L*-проблеме моментов. Одним из первых обратил на это внимание сам М.Г.Крейн.

Хотя экономические проблемы, естественно, по своему существу являются конечными (так как имеется лишь ограниченное множество продуктов и ресурсов, а время можно считать дискретным), но конечные модели получаются слишком громоздкими и, соответственно, необозримыми для анализа и расчета. По этой причине гораздо эффективнее использовать родственные им непрерывные континуальные модели. Такова, например, модель развития (роста) при техническом прогрессе с вмененными основными фондами (Р.Солоу, Л.В.Канторович), описывающаяся функциональным уравнением, которое, в свою очередь, хорошо поддается не только общему теоретическому анализу, но и практическому расчету.

Для проведения исследований экономических моделей часто применяются различные *численные методы* нахождения решений. Как показала практика, наиболее плодотворными оказались следующие группы таких методов:

1) метод наискорейшего спуска и градиентные методы;
2) методы Ньютоновского типа;
3) общая теория приближенных методов;
4) принцип мажорант и методы последовательных приближений.

Сейчас эти методы хорошо изучены и широко представлены в литературе как по функциональному анализу, так и по различным разделам прикладной математики. С их помощью часто можно установить существование решения, область, в которой оно единственно, и некоторые другие свойства этого решения. Как известно, Леонид Витальевич в свое время сам очень многое сделал для развития данного направления. Так, например, в работах [16; 28] разрабатывается общая теория методов приближенных вычислений (демонстрируются различные варианты применения функционального анализа для изучения проблем вычислительной математики), основанная на следующей идее: пространство, в котором задано исходное уравнение, отображается на более простое пространство; и уже в этом, более простом, пространстве ведется исследование приближенного уравнения. Канторович доказал достаточно общие теоремы, дающие возможность установить разрешимость приближенного уравнения, а также сходимость приближенного решения к точному решению в зависимости от свойств исходного уравнения. Также Леониду Витальевичу удалось получить ряд результатов, позволяющих на основе разрешимости приближенного уравнения устанавливать существование точного решения исходной задачи и даже определять область его расположения.

Данная тематика напрямую связанна с так называемой *теорией K-пространств*, которая является одним из основных достижений Леонида Витальевича в функциональном анализе. Среди прочих она имеет и следующее значение: при построении банаховых пространств в качестве нормы вместо чисел можно использовать элементы *K*-пространства, конечномерного или бесконечномерного. Например, вместо максимума функции можно брать много локальных максимумов, что дает значительно более точное описание. Применительно к экономике этот подход полезен при агрегировании, если оно делается более детальным, чем обычная стоимость, образом. Так, в случае использования метода агрегирования экономических систем, появляется возможность понижения размерности и одновременного исследования близости приближенного решения, получаемого в процессе использования агрегированной модели, к искомому решению. Приближенное решение расположено в аппроксимирующем пространстве, которое получается агрегированием переменных, а искомое решение находится в исходном пространстве.

С другой стороны важно заметить, что *ЛП тесно связанно и с дискретной математикой*. Так, основную задачу теории антагонистических матричных игр с нулевой суммой (а именно теорему о минимаксе) связал с ЛП (теоремами двойственности) еще фон Нейман (см. воспоминания Данцига, цитированные в работе: [29]). Более того, в итоговом доказательстве теоремы фон Неймана о минимаксе фактически содержалась теория двойственности. По этой причине можно сказать, что оба эти подхода чрезвычайно полезно рассматривать в их взаимосвязи, так как в этом случае полнее раскрываются идеи каждого из них, а изучаемая задача и пути ее решения становятся более ясными.

Приближенные методы находят в экономике естественное применение: сложной модели, расположенной в некотором пространстве, сопоставляется более простая, с меньшей размерностью модель в этом же или другом пространстве посредством однозначного или одно-многозначного соответствия. При этом, как уже говорилось, принципы и теоремы общей теории часто дают возможность на основе исследований более простой системы дать точные заключения о начальной системе: устанавливать существование решения, его единственность, асимптотические свойства и т.д.

Когда мы изучаем математические методы в экономике, в том числе их появление и развитие, важно понимать взаимосвязь двух наук – экономики и математики. К примеру, обсуждаемый нами в данной статье метод ЛП появился как ответ замечательного математика Леонида Витальевича Канторовича на конкретный запрос со стороны экономики его времени. Народным хозяйством была поставлена задача фанерного треста, и Канторович в процессе поиска ее решения пришел к методу, который впоследствии в его работах и работах других ученых развился в метод ЛП. Этот подход, в свою очередь, позволил решить значительно больший класс экономических задач, нежели тот, которым его разработка была инициирована и ради решения которого он первоначально создавался. Однако самое интересное, что этим область его применения и значение не ограничились, о чем будет сказано ниже. И здесь, на наш взгляд, особый интерес представляет «*обратная связь*» математических методов экономики и чистой математики, то есть влияние экономических задач на математический аппарат.

Во-первых, теория систем линейных неравенств развилась на сто лет позже, чем теория систем линейных уравнений, причём развитие первой из них было инициировано именно необходимостью решения задач, продиктованных потребностями экономики того времени.

Во-вторых, приведем другой важный пример ситуации, когда именно проблема, поставленная в экономике, дала важный толчок для развития аппарата, повлиявшего впоследствии на саму математику. Таким примером может послужить транспортная задача. Изначально она была сформулирована на экономическом языке, математически оформлена и эффективно решена (например, метод потенциалов) около 1940 г. Первоначальное ее изложение под названием задачи о перемещении масс было дано в 1942 г. Л.В.Канторовичем в статье [12] (в ней исследуется бесконечномерный аналог транспортной задачи, рассмотренной в работе [6]). В данной работе основная задача ставится уже для случая произвольного метрического пространства, что придает ей абстрактный, обобщенный характер. Более того, в указанной работе естественным образом введено понятие расстояния между двумя множествами одинаковой массы в компакте: в качестве него принимается минимальный объем затрат по перемещению этой массы из одного места в другое. Эта метрика впоследствии нашла свое применение как в теории вероятностей для распределений, так и в собственно функциональном анализе, что привело к ряду новых результатов.

Этим значение работы [12] не ограничивается. Так, на ее основе Леониду Витальевичу в 1948 г. в статье [13] удалось получить более полное решение проблемы Монжа. Таким образом, математические методы, появившись как ответ на запрос со стороны экономики и пройдя определенную эволюцию, оказали положительное влияние на развитие других, не связанных с ними напрямую, областей чистой математики и позволили решить давние чисто математические задачи.

5. Заключение

Круг задач, над которыми Канторович работал и которые были им решены или выведены на новый уровень понимания, столь широк, что говорить о какой-либо одной области, где вполне проявился его талант, невозможно. Точно так же, как невозможно сказать, для какой науки его творческая деятельность имела большее значение – для математики или для экономики.

Безусловно, Леонид Витальевич с первых шагов в науке был математиком, а экономикой увлекся значительно позднее, когда был уже состоявшимся ученым с мировым именем. В заслугу Леониду Витальевичу можно поставить возникновение сильнейшей школы функционального анализа и принципиально нового направления – теории полуупорядоченных пространств. Отсюда и математический подход к проблемам экономики. Как показала история, наравне с глубокой интуицией математика Леонид Витальевич обладал удивительной проницательностью в вопросах экономического характера.

Вклад Канторовича в экономику сложно переоценить, поскольку им была создана абсолютно новая область математических методов (ЛП), появившаяся, как уже говорилось, на основе идей, «унаследованных» от математического периода его творчества. Интерес и гармоничное сочетание самых разных вопросов – вот характерная черта научного наследия Леонида Витальевича. Его работы дополняют друг друга, складываясь в цельную картину. Синтез позволял ему не останавливаться на частных моментах, видеть целостный результат. Вместе с тем Леонид Витальевич не избегал частных проблем, вопросов приложений, изучал специфику областей применения созданного им аппарата. Как писал сам ученый в докладе «Мой путь в науке» [4, с.22–75]: «...для моей деятельности характерным является постоянное взаимопроникновение теории и практики...», свидетельством чему вся его деятельность.

С другой стороны, такое разнообразие практических приложений методов, разработанных Канторовичем, является замечательной иллюстрацией одного из важнейших принципов Петербургской–Ленинградской математической школы, которой принадлежал Леонид Витальевич: «Нет ничего практичнее хорошей теории». Это относится как к использованию Канторовичем в работах по экономике идей, усвоенных им в период собственно математической деятельности, так и к последующему развитию и практическому применению методов ЛП.

Одновременно все еще остается ряд проблем, изучение которых может существенно углубить понимание истории ЛП на первых этапах его становления, а также роли идей ЛП в последующем развитии оптимизационных методов математической экономики. В этой связи мне представляется необходимым, во-первых, дальнейшее исследование трудов, лежащих на границе разных этапов научного творчества Леонида Витальевича – периода, когда его взгляд поворачивается к математическим методам в экономике. Здесь особое внимание стоит уделить работам, подытоживающим отдельные периоды его математического творчества, это может помочь лучше понять ход развития ранних идей, их трансформацию и зарождение новых. Последнее имеет не только историческое значение, но и помогает точнее определить направление развития математических методов экономики (и не только). Во-вторых, по всей вероятности, плодотворным будет сравнение истории становления ЛП в СССР в конце 1930-х и в 1940-е гг. с процессами «переоткрытия» ЛП западными учеными. Последнее имеет огромное значение как для истории, так и для математики, поскольку предоставляет нам великолепную возможность изучать рождение сходных идей в разной исторической, экономической, политической обстановке и на базе разных научных школ, традиций и знаний.

В настоящее время важность методов приближенных вычислений, линейного (выпуклого и более общего) моделирования и смежных тем, которыми занимался Леонид Витальевич, постоянно возрастает, тем более, что методы эти проникают во все отрасли науки – физику, математику, экономику и др. Таким образом, работа в данном направлении видится мне чрезвычайно значимой, заслуживающей повышенного внимания.

Список литературы

1. *Канторович Л.В.* Математические методы организации и планирования производства. Л., 1939.
2. *Данциг Дж.Б.* Линейное программирование, его применение и обобщения. М., 1966.
3. *Канторович Л.В.* О некоторых математических проблемах экономики промышленности, сельского хозяйства и транспорта // Экономико-математические модели и методы. Сборник научных трудов, посвященный памяти Л.В.Канторовича. Воронеж, 1989. С.13–18.
4. Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый / Ред.-сост. *В.Л.Канторович*, *С.С.Кутателадзе*, *Я.И.Фет.* Новосибирск, 2002. Т.1.
5. *Канторович Л.В.* Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем // Доклады Академии наук СССР. 1940. Т.28. №3. С.212–215.
6. *Канторович Л.В., Гавурин М.К.* Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков // Проблемы повышения эффективности работы транспорта М.–Л., 1949. С.110–138.
7. *Канторович Л.В.* Подбор поставов, обеспечивающих максимальный выход пилопродукции в заданном ассортименте // Лесная промышленность. 1949. №7. С.15–17; 1949. №8. С.17–19.
8. *Канторович Л.В., Залгаллер В.А.* Расчет рационального раскроя промышленных материалов. Л., 1951.
9. *Канторович Л.В.* Возможности применения математических методов в вопросах производственного планирования // Организация и планирование равномерной работы машиностроительных предприятий. М.–Л., 1958. С.338–353.
10. *Канторович Л.В.* О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач // Доклады Академии наук СССР. 1957. Т.115. №3. С.441–444.
11. *Канторович Л.В.* Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., 1959.

12. *Канторович Л.В.* О перемещении масс // Доклады Академии наук СССР. 1942. Т.37. №7–8. С.227–229.
13. *Канторович Л.В.* Об одной проблеме Монжа // Успехи математических наук. 1948. Т.III. Вып.2. С.225–226.
14. *Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш.* Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах // Доклады Академии наук СССР. 1957. Т.115. №6. С.1058–1061.
15. *Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш.* Об одном пространстве вполне аддитивных функций // Вестник ЛГУ (сер. мат., мех. и астр.). 1958. №7. Вып.2. С.52–59.
16. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи математических наук. 1948. Т.III. Вып.6. С.89–185.
17. *Немчинов В.С.* Экономико-математические методы и модели. М., 1962.
18. *Новожилов В.В.* Измерение затрат и их результатов в социалистическом хозяйстве // Применение математики в экономических исследованиях / Под ред. *В.С.Немчинова* М., 1959. Т.1. С.42–214.
19. *Аганбегян А.Г., Вайнштейн А.Л., Олейник Ю.А.* Первооткрыватели // Известия. №42. 18 февраля 1964 г.
20. Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый / Ред.-сост. *В.Л.Канторович, С.С.Кутателадзе, Я.И.Фет.* Новосибирск, 2004. Т.2.
21. *Flood M.M.* On the Hitchcock distribution problem // Pacific journal of mathematics. 1953. Vol.3. P.369–386.
22. *Канторович Л.В.* Рациональные методы раскроя металла // Производственно-технический бюллетень. 1942. №7–8. С.21–29.
23. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М., 1983.
24. *Данциг Дж.Б.* Линейное программирование, его обобщения и применения. М., 1966.
25. *Данциг Дж.Б., Форд Л.Р., Фулкерсон Д.Б.* Алгорифм для решения прямой и двойственной задач линейного программирования // *Г.Кун, А.Таккер* (ред.). Линейные неравенства и смежные вопросы / Пер. под ред. *Л.В.Канторовича* и *В.В.Новожилова*. М., 1959. С.277–286.
26. *Беллман Р.* Динамическое программирование / Пер. под ред. *Н.Н.Воробьева.* М., 1960.
27. *Рокафеллар Р.Т.* Выпуклый анализ. М., 1973.
28. *Канторович Л.В.* К общей теории приближенных методов анализа // Доклады Академии наук СССР. 1948. Т.60. №6. С.957–960.
29. *Вершик А.М., Колмогоров А.Н., Синай Я.Г.* Джон фон Нейман // *Дж. фон Нейман*. Избранные труды по функциональному анализу. М., 1987. Т.1. С.337–351.

К 100-ЛЕТИЮ ОТКРЫТИЯ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

В.С.Виденский

В 1912 г. С.Н.Бернштейн опубликовал конструкцию своих знаменитых полиномов и при помощи соображений из теории вероятностей доказал теорему Вейерштрасса о приближении непрерывных функций. В настоящей статье сделана попытка проследить почти десятилетний путь к этому открытию.

В феврале 2012 г. в СПбГУ состоялась международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Л.В.Канторовича. В частности, я делал доклад о его работах по полиномам Бернштейна. Тогда же я заметил, что эти полиномы были открыты ровно 100 лет тому назад. Мне показалось, впрочем, что не стоит отвлекать внимание слушателей и смешивать обе темы, а лучше обсудить вторую из них отдельно.

Эти полиномы были введены в очень краткой заметке С.Н.Бернштейна «Доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на теории вероятностей» [1]. Как известно, они определяются так:

$$B_n f = B_n(f(t); x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{nk}(x), \tag{1}$$

$$p_{nk}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \tag{2}$$

Опираясь на эти полиномы, С.Н.Бернштейн доказал теорему Вейерштрасса в такой форме.

Теорема 1: Если f – функция, непрерывная на отрезке [0; 1], то последовательность полиномов $B_n f$ при $n \to \infty$ сходится к ней равномерно на [0; 1].

Доказательство получилось простое, понять его легко. По биному Ньютона имеем

$$\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} p_{nk}(x) = x. \tag{3}$$

Из (3) легко выводится тождество:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 p_{nk}(x) = \frac{x(1-x)}{n}. \tag{4}$$

Остается воспользоваться неравенством Чебышева, применяемым для вывода закона больших чисел.

Рассуждение ясно и красиво, однако, оно совершенно неожиданно – как будто «с неба свалилось».

К концу марта или началу апреля 1952 г. первый том Собрания сочинений С.Н.Бернштейна [1] был вполне готов, и наступило время подписать его к печати. В какой-то момент редактор издательства профессор Д.А.Райков, по-видимому, чтобы заполнить паузу, возникшую в деловой беседе, спросил Сергея Натановича, как ему удалось построить такие оригинальные полиномы для доказательства теоремы Вейерштрасса. Сергей Натанович на мгновение задумался, а затем сухо и иронично ответил, что в 1911 г. имело место такое прогрессивное явление, как студенческие забастовки, благодаря чему у него оставалось довольно много времени для размышлений. Разумеется, мы ожидали, что Сергей Натанович войдет в какие-нибудь интересные подробности или расскажет о каком-нибудь поразительном озарении. Но он не открыл нам никакой великой тайны, – быть может, ее и не было.

Во всяком случае, С.Н.Бернштейн начал думать и публиковать статьи о приближении непрерывных функций рядами, по форме сходными с полиномами (1), еще в 1903 г. [2], когда приступил к решению девятнадцатой проблемы Гильберта. Мы попытаемся восстановить в общих чертах его дорогу к полиномам, которые носят его имя и которые привели к принципиально новому доказательству теоремы Вейерштрасса.

Девятнадцатая проблема Гильберта относится к дифференциальным уравнениям с частными производными второго порядка эллиптического типа, задаваемых аналитическими функциями, с двумя независимыми переменными. Иными словами, речь идет об уравнении

$$F(r,s,t,p,q,u,x,y)=0, \tag{5}$$

где F − аналитическая функция всех восьми переменных, и выполняется неравенство

$$4F'_r F'_t-(F'_s)^2>0. \tag{6}$$

Требовалось доказать, что все решения этого уравнения являются аналитическими функциями, причем предполагается, что решение уравнения u непрерывно дифференцируемо σ раз, $\sigma \geq 2$. Уравнение Лапласа было рассмотрено еще Коши, а случай линейных уравнений − Пикаром [3]. Оба они применяли метод последовательных приближений, что при переходе от декартовых координат к полярным приводило к некоторым степенным рядам. Лично Гильберт предложил молодому Бернштейну заняться проблемой в общем случае[1]. Естественно было начать с метода последовательных приближений и дальнейшего перехода к полярным координатам. Однако оказалось, что это приводит не к степенным рядам, а к более сложным двойным рядам вида

$$f(x)=\sum_{l,m} a_{lm}x^l(1-x)^m.$$

Если они сходятся абсолютно и равномерно, то С.Н.Бернштейн назвал их нормальными рядами.

Число σ непрерывных производных от решения u уравнения (5), которое нужно потребовать первоначально, зависит от класса функций f, разлагаемых в нормальные ряды. Если бы оказалось, что любая непрерывная на отрезке [0; 1] функция f представима суммой нормального ряда, то было бы достаточно требовать от решения u, чтобы его вторые частные производные удовлетворяли условию Липшица с $\alpha > 0{,}5$.

Но представимость любой непрерывной функции f нормальным рядом удалось доказать не сразу. Сначала приходилось требовать от функции f большей гладкости. Приведем рассуждение для дважды непрерывно дифференцируемой функции, данное в магистерской диссертации [4, гл.2, п.6, с.48–53]. Проверим, что справедливо тождество

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 f''(t)|x-t|\,dt + A + Bx, 0\le x\le 1. \tag{7}$$

Действительно, если мы напишем

$$\frac{1}{2}\int_0^1 f''(t)|x-t|\,dt=\frac{1}{2}\int_0^x f''(t)(x-t)dt-\frac{1}{2}\int_0^1 f''(t)(x-t)dt$$

и проинтегрируем по частям, то получим:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 f''(t)|x-t|\,dt=f(x)-\frac{1}{2}(f(1)+f(0)-f'(1))-\frac{1}{2}(f'(1)+f'(0))x.$$

Разложим функцию $|x-t|$ при $0\le x\le 1$ в ряд

$$|x-t|=(1-(1-(x-t)^2))^{1/2}=$$

$$=(1+t^2-(1-x^2+2tx))^{1/2}=(1+t^2)^{1/2}\left(1-\frac{1-x^2+2tx}{1+t^2}\right)^{1/2}=$$

$$=(1+t^2)^{1/2}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x^2+2tx}{1+t^2}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{k!2^k}\cdot\frac{(1-x^2+2tx)^k}{(1+t^2)^k}\right), \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), получим

$$f(x)=a+bx+cx^2+\sum_{p,q}A_{pq}x^p(1-x^2)^q. \tag{9}$$

Ясно, что (9) – нормальный ряд, так как

$$(1-x^2)^q=(1-x)^q\sum_{k=0}^{q}C_q^k x^k.$$

Затем С.Н.Бернштейн показывает, что приведенный результат остается справедливым для любой непрерывно дифференцируемой (только один раз) функции.

Вернемся, однако, к плодотворному 1911 г., как сказано в ответе Д.А.Райкову. Как раз в 1910 г. академия наук Бельгии объявила конкурс по теме, предложенной Валле Пуссеном, – о наилучшем приближении функции $f(x)=|x|$ на отрезке $[-1;\ 1]$ полиномами степени $\le n$. Эта задача была в стиле проблем Гильберта: просто формулируется; не кажется ни слишком легкой, ни совершенно неприступной; можно надеяться, что ее решение будет полезным также для исследования иных тем.

С.Н.Бернштейн с большой скоростью – к лету 1911 года – дал полное решение поставленной проблемы [5, с.79–84]. Для этой цели он создал общую теорию наилучшего приближения непрерывных функций многочленами, приведя во взаимодействие идеи и методы Вейерштрасса и Чебышева. Работа была премирована бельгийской академией наук.

На Международном конгрессе математиков в Кембридже в 1912 г. С.Н.Бернштейн в своем докладе сказал: «Пример задачи о наилучшем приближении $f(x)=|x|$, предложенный Валле Пуссеном, дает еще одно подтверждение того факта, что хорошо поставленный частный вопрос способен быть отправной точкой для далеко идущих теорий» [6, с.117].

Эти исследования С.Н.Бернштейна составили также его докторскую диссертацию, защищенную в Харьковском университете [7]. В нее было включено Добавление [7, гл.5], в котором доказывалось, что любая непрерывная на [0; 1] функция f представима нормальным рядом. В основу была положена простая идея. Так как система функций $\{x^k(1-x)^{n-k}\}_{k=0}^{n}$ линейно независима, то любой многочлен

$$P_m(x)=\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x^\nu$$

степени $m \le n$ можно однозначно представить в виде

$$P_m(x)=\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x^\nu((1-x)+x)^{n-\nu}=\sum_{\nu=0}^{m} A_{nk}x^k(1-x)^{n-k}. \qquad (10)$$

У С.Н.Бернштейна явно вычислены A_{nk} через a_ν, но проще рассматривать отдельно

$$x^\nu=x^\nu((1-x)+x)^{n-\nu}=\sum_{k=\nu}^{n} C_{n-\nu}^{k-\nu}x^k(1-x)^{n-k}. \qquad (11)$$

Для применения к (10) удобно формулу (11) переписать по полиномам p_{nk} (2):

$$x^\nu=\sum_{k=\nu}^{n}\frac{C_{n-\nu}^{k-\nu}}{C_n^k}p_{nk}(x). \qquad (12)$$

Мы имеем

$$\frac{C_{n-\nu}^{k-\nu}}{C_n^k}=\frac{k(k-1)\dots(k-\nu+1)}{n(n-1)\dots(n-\nu+1)}=\left(\frac{k}{n}\right)^\nu\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\dots\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right)}. \qquad (13)$$

Учитывая формулы (12) и (13) и применяя обозначения, принятые в наше время, можем написать приближающий полином для x^ν так:

$$B_n(t^\nu;x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\nu p_{nk}(x). \tag{14}$$

При помощи (13) и достаточно тонких вычислений С.Н.Бернштейн получает такую оценку разности

$$|x^\nu - B_n(t^\nu;x)|<\frac{K_\nu}{n},\quad \nu\le m,$$

где K_ν зависит только от ν. Отсюда для многочлена P_m (10) имеем

$$B_n(P_m(t);x)=\sum_{k=0}^{n}P_m\left(\frac{k}{n}\right)p_{nk}(x),$$

$$|B_n(P_m(t);x)-P_m(x)|<\frac{K_m}{n}, m\le n. \tag{15}$$

Заметим, между прочим, что неравенство (15) можно получить почти без вычислений и без применения неравенства Чебышева. Воспользуемся для этого одним тождеством, которое я недавно вывел для других целей. Многочлены $B_n(1;x)$ и $B_n(t;x)$ даются формулами (3). Покажем, что при $\nu\ge 1$ справедливо тождество

$$B_n(t^{\nu+1};x)=B_n(t^\nu;x)-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu(1-x)B_{n-1}(t^\nu;x). \tag{*}$$

Напишем явно

$$B_n(t^{\nu+1};x)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\nu+1}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

и преобразуем общий член, стоящий под знаком суммы

$$\left(\frac{k}{n}\right)^{\nu+1}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\left(\frac{k}{n}\right)^\nu\left(1-\left(1-\frac{k}{n}\right)\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=$$

$$=\left(\frac{k}{n}\right)^\nu C_n^k x^k(1-x)^{n-k}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu(1-x)\left(\frac{k}{n}\right)^{\nu-1}C_{n-1}^k x^k(1-x)^{n-1-k}.$$

Равенство (*) доказано. При $\nu=1$, используя (3), получим

$$B_n(t^2;x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n}. \tag{**}$$

Предположим по индукции, что имеет место

$$B_n(t^\nu;x)=x^\nu+O\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)\text{ при }\nu=1,2,\dots,m,$$

где константа в O зависит только от m, и применим (*). Тогда

$$B_n(t^{m+1};x) = x^{m+1} + \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right) x^m (1-x) + O\left(\frac{x(1-x)}{n}\right) =$$

$$= x^{m+1} + O\left(\frac{x(1-x)}{n}\right).$$

Напомним, что теорема о приближении непрерывных функций полиномами самим Вейерштрассом была доказана как теорема существования [8]. Используя ее в такой форме и применяя неравенство (15), С.Н.Бернштейн доказал два важных следствия.

Теорема 2: Любая непрерывная на отрезке [0; 1] функция f разлагается в нормальный ряд.

В самом деле, по теореме Вейерштрасса для любого натурального s существует полином P_{m_s} $(m_s > m_{s-1})$ такой, что

$$|f(x) - P_{m_s}(x)| < \frac{1}{2^{s+2}}, 0 \le x \le 1,$$

а по неравенству (15) существует $n_s > n_{s-1}$ такое, что

$$|B_{n_s}(P_{m_s};x) - P_{m_s}(x)| < \frac{1}{2^{s+2}},$$

$$|B_{n_s}(P_{m_s};x) - f(x)| < \frac{1}{2^{s+1}}.$$

Значит, функция f разлагается в нормальный ряд

$$f(x) = \sum B_{n_{s+1}}(P_{m_{s+1}};x) - B_{n_s}(P_{m_s};x).$$

Теорема 3: Для любой непрерывной на отрезке [0; 1] функции f последовательность $B_n(f;x)$ сходится к ней равномерно.

Для *доказательства* теоремы 3 применяется теорема Вейерштрасса, так что теорема 3 слабее теоремы 1. Обозначим через (P_m) последовательность полиномов, которая сходится к f. По теореме Вейерштрасса и неравенству (15) для фиксированного $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n и m имеем

$$|P_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |B_n(P_m;x) - P_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|B_n(f;x) - f(x)| < B_n(|f - P_m|;x) + |B_n(P_m;x) - P_m(x)| +$$
$$+ |P_m(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x) = f(x). \tag{16}$$

В тексте С.Н.Бернштейном сказано, что «формула (16) выведена мною при помощи теории вероятностей в заметке, помещенной в “Сообщениях Харьковского математического общества, т.13, №1, 1912 г.”» [1].

Мне кажется несомненным, что С.Н.Бернштейн доказал теорему 1 после теоремы 3, но следует признать, что он этого нигде не пишет!

Примечания

[1] Об этом автору сообщил сам С.Н.Бернштейн летом 1954 г. в санатории Академии наук в Узком (бывшая подмосковная усадьба князя П.Н.Трубецкого, ныне входит в состав Юго-Западного административного округа Москвы). Сергей Натанович тогда, гуляя по парку, рассказывал мне о прекрасном международном семинаре Д.Гильберта и о царившей там творческой обстановке.

Список литературы

1. *Бернштейн С.Н.* Доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на теории вероятностей // *С.Н.Бернштейн*. Собр. соч. М., 1952. Т.1. С.105–106.
2. *Бернштейн С.Н.* Об аналитической природе решений некоторых уравнений с частными производными второго порядка // *С.Н.Бернштейн*. Собр. соч. М., 1960. Т.3. С.5–7.
3. *Picard É.* Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de M.Fredholm // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1906. T.22. P.241–259.
4. *Бернштейн С.Н.* Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа // *С.Н.Бернштейн*. Собр. соч. М., 1960. Т.3. С.24–109.
5. *Bernstein S.N.* Sur l'ordre de la meilleure approximation de fonctions continues par des polynômes de degré donné // Mémoires de l'Académie Royale de Belgique. 1912. Vol.4. P.1–103.
6. *Бернштейн С.Н.* О новых исследованиях, относящихся к наилучшему приближению непрерывных функций многочленами // *С.Н.Бернштейн*. Собр. соч. М., 1952. Т.1. С.112–123.
7. *Бернштейн С.Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // *С.Н.Бернштейн*. Собр. соч. М., 1952. Т.1. С.11–104.
8. *Weierstrass K.* Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeler Argumente // *K.Weierstrass.* Mathematische Werke. Berlin, 1903. Bd.3. P.1–37.

МАЛЕНЬКАЯ ИСТОРИЯ БОЛЬШОЙ ТЕОРЕМЫ. ВОСПОМИНАНИЯ О Н.В.ЕФИМОВЕ

Е.В.Шикин

«Мы должны понимать, как мир устроен».

Н.В.Ефимов

Николай Владимирович был первым профессором МГУ, которого я увидел воочию, зная, что он профессор МГУ. Это случилось в самом начале сентября 1959 г., когда Николай Владимирович начал читать свой оригинальный двухгодичный курс лекций по математическому анализу только что принятым на мехмат первокурсникам. Педагогическое обаяние Николая Владимировича и впечатление от его лекций были такими, что мы, Юра Аминов, Ваня Брандт, Саша Маховой и я, довольно скоро оказались среди участников просеминара, который Николай Владимирович вел вместе с А.А.Гончаром, а затем, уже на втором курсе, стали посещать семинар по геометрии в целом, создателем и руководителем которого до самой своей кончины был Николай Владимирович.

Никто из нас четверых не мог тогда и предположить, что все мы окажемся свидетелями первых сообщений Николая Владимировича о его главной теореме.

Много позже я узнал о далеко непростой череде событий в жизни Николая Владимировича, которая предшествовала этому замечательному результату.

Родившись в Оренбурге 31 мая 1910 г., он, еще мальчиком, смог в полной мере ощутить на себе все характерные черты того сложного времени, которое переживала наша страна. После окончания средней школы в 1927 г. он был вынужден в течение года работать, для того чтобы получить рабочий стаж, необходимый для поступления на педагогический факультет Северо-Кавказского университета (г.Ростов-на-Дону). В 1931 г. Николай Владимирович в числе лучших выпускников был направлен в Московский университет для прохождения обучения в аспирантуре, которую он через три года успешно закончил, защитив под руководством Я.С.Дубнова кандидатскую диссертацию по теории сетей. После окончания аспирантуры Николай Владимирович с 1938 по 1941 г. работал в Воронежском университете, дойдя до должности проректора. Насыщенные годы работы в Воронежском университете не помешали Николаю Владимировичу подготовить и в 1940 г. защитить докторскую диссертацию об изгибаниях аналитической поверхности вблизи точки уплощения. Во время войны он работал сначала в Воронежском авиационном институте, а с 1943 г. по 1961 г. – в воссозданном Московском лесотехническом институте (ныне – Московский государственный университет леса). Одновременно, с 1946 г., Николай Владимирович начал работать в МГУ имени М.В.Ломоносова, сначала профессором кафедры математики физического факультета, а с 1957 г. (до своей кончины в 1982 г.) – заведующим кафедрой математического анализа механико-математического факультета. Семь лет, с 1962 по 1969 г., Николай Владимирович был деканом мехмата МГУ.

Ключевую роль в выборе Николаем Владимировичем основного направления геометрических исследований сыграла его встреча с эмигрировавшим из Германии Стефаном Кон-Фоссеном, которая произошла незадолго до смерти С.Кон-Фоссена в 1936 г. Эта единственная и очень короткая встреча произвела на Николая Владимировича столь сильное впечатление, что он называл С.Кон-Фоссена своим учителем. Вспоминая о ней, Николай Владимирович говорил: «Один раз я с ним полтора часа беседовал» (цитирую по рукописной стенограмме, хранящейся в личном архиве Э.Р.Розендорна).

Сегодня восстановить эту беседу, по-видимому, уже не удастся. Однако содержательную ее часть можно оценить по результатам Николая Владимировича в той области геометрии, которую принято называть *геометрией в целом*. Начать уместнее всего с событий стосемидесятилетней давности.

В середине 1830-х гг. в разных книжках «Journal für die reine und angewandte Mathematik» были опубликованы (во французском переводе и с небольшими сокращениями) два мемуара Н.И.Лобачевского, посвященные его *воображаемой геометрии*, а несколькими годами позже – две работы Ф.Миндинга, в первой из которых были описаны два типа поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны K (*волчок* и *катушка*), а во второй – тригонометрические свойства треугольников на поверхностях постоянной отрицательной кривизны.

Тогда еще не было замечено, что дефекты треугольников на плоскости Лобачевского пропорциональны их площадям так же, как и на поверхностях постоянной отрицательной кривизны.

«Можно было бы думать, – позже напишет Ф.Клейн, – что не понадобится много времени, чтобы выявить связь между этими замечательными результатами, полученными совершенно различным образом. Между тем на это понадобилось целых 30 лет» [1, с.22].

Изучая третий тип поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны, *псевдосферу*, Э.Бельтрами сопоставил работы Н.И.Лобачевского и Ф.Миндинга и нашел, что на поверхностях постоянной отрицательной кривизны реализуется планиметрия Лобачевского, однако не всей плоскости Лобачевского, а только некоторых ее частей.

Своей работой 1872 г. Э.Бельтрами поставил вопрос о возможной реализации аксиоматически определенной геометрии (геометрии плоскости Лобачевского) посредством внутренней геометрии поверхности трехмерного евклидова пространства E^3. Как следствие, возникла проблема существования в пространстве E^3 регулярной поверхности, внутренняя геометрия которой совпадала бы с геометрией всей плоскости Лобачевского.

Здесь стоит заметить, что все три упомянутых выше типа поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны, описанные Ф.Миндингом и Э.Бельтрами, имеют неустранимые особенности.

Д.Гильберт говорил об этой проблеме в известном докладе на II Международном конгрессе математиков, однако в подготовлен-ный для опубликования окончательный список проблем ее не включил. Николай Владимирович считал, что уже при отборе проблем к своему докладу Д.Гильберт видел путь ее решения. Косвенным подтверждением этого может служить менее чем годичный временной зазор между публикацией «Математических проблем» (1900) и решением этой проблемы (1901).

С.Кон-Фоссен был прямым учеником Д.Гильберта и естественно предположить, что они обсуждали то, насколько важным является условие постоянства кривизны K. Николая Владимировича заинтересовал именно этот вопрос. Однако, несмотря на все настойчивые попытки, получить ответ на него долго не удавалось. Возможно, что помимо трудности самой задачи сказывалось и отсутствие необходимого инструментария.

Николай Владимирович переключился на другую тематику, продолжая обдумывать проблему, сообщенную ему С.Кон-Фоссеном. Он с разных сторон анализировал доказательство Д.Гильберта, искал способы оторваться от постоянства кривизны, формулировал гипотезы и был удивительно последователен в своем упорстве и настойчивости.

Первые результаты появились у Николая Владимировича только в 1953 г. Сначала он опубликовал работу [2], в которой было доказано, что гауссова кривизна регулярной поверхности, однозначно проектирующейся на всю плоскость, не может оставаться меньше отрицательной постоянной, а несколькими месяцами позже – работу [3], посвященную оценке размеров квадрата, на который такая поверхность однозначно проектируется: если вырезок поверхности, гауссова кривизна K которой удовлетворяет условию $K \le K_0 < 0$, где $K_0 = \text{const}$, однозначно проектируется на квадрат со стороной a, то a не превышает некоторой постоянной, которая зависит только от K_0. В частности, если $K_0 = -1$, то $a \le 19$.

Эти результаты были еще очень далеки от того исчерпывающего ответа, который Николай Владимирович получил в 1963 г., но уже они высоко оценивались геометрами. Вот что говорил А.В.Погорелов: «Мы все понимали, что по всем направлениям такая поверхность простираться не может, так как поворачивается ее нормаль, но оценку получить не удавалось. Николай Владимирович сумел ее получить» (цитирую по рукописной стенограмме, хранящейся в личном архиве Э.Р.Розендорна).

Для оценки размеров квадрата Николай Владимирович привлек формулу для кривизны K регулярной поверхности, заданной явно в виде графика функции $z = z(x, y)$,

$$\frac{z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2} = K,$$

которая при известной кривизне $K(x, y)$ превращается в нелинейное уравнение второго порядка в частных производных для искомой функции z (уравнение Монжа–Ампера), и ввел в рассмотрение новый объект – *цепочки* – специальные кусочно-гладкие кривые из дуг асимптотических линий (характеристик уравнения Монжа–Ампера), которые были успешно использованы им при дальнейшем продвижении к основному результату.

Кстати, Николай Владимирович не раз подчеркивал, что затруднения, которые возникли у современников с пониманием статьи Д.Гильберта, были вызваны тем, что именно здесь Д.Гильберт впервые фактически использовал понятие универсальной накрывающей, хотя и не сформулировал общего ее определения (в двумерном случае для $K < 0$ универсальная накрывающая строится очень наглядно – это неограниченно расширяющийся геодезический круг с возможными самоналеганиями).

В течение 1960-х гг. Николаю Владимировичу удалось «оторваться» от постоянства кривизны K в теореме Гильберта, причем сразу по трем разным направлениям:

1-е направление – q-метрики,

2-е направление – теорема о невозможности в трехмерном евклидовом пространстве E^3 полной регулярной поверхности с кривизной $K \leq \mathrm{const} < 0$,

3-е направление – (h, δ)-метрики.

Вспомогательную, но важную роль в этих исследованиях сыграли новые формы записи уравнений теории поверхностей отрицательной кривизны, найденные Николаем Владимировичем совместно с Э.Г.Позняком в 1961 г. [4].

Для того чтобы описать полученные результаты, введем полезные обозначения:

$$k = \sqrt{-K} > 0, \quad R = \frac{1}{k}, \quad \sup_S |\nabla_{\mathrm{int}} R| = q.$$

1-е направление – q-метрики. В 1962 г. Николаем Владимировичем было доказано существование числа q_0 такого, что при $q \leq q_0$ полное двумерное односвязное многообразие отрицательной кривизны K не допускает регулярного изометрического погружения в пространство E^3 (с указанием конкретного значения q_0: $q_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$) [5]. В основу доказательства положено следующее наблюдение – при сформулированных условиях сеть асимптотических линий в целом на поверхности должна быть гомеоморфна декартовой сети на плоскости (это свойство является следствием результатов Э.Р.Розендорна об асимптотических линиях на поверхностях с медленно меняющейся отрицательной кривизной [6]).

Отсюда вытекает, что в пространстве E^3 на всякой полной регулярной поверхности отрицательной кривизны K выполнено неравенство

$$q \geq q_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

2-е направление. Окончательное решение фундаментальной проблемы о невозможности в трехмерном евклидовом пространстве E^3 полной регулярной поверхности с кривизной $K \leq \mathrm{const} < 0$ было получено при помощи исследования сферического образа универсальной накрывающей, его границы и цепочек и опубликовано в 1963 г. [7] (развернутое доказательство в 1964 г. [8]).

Тем самым, Николай Владимирович доказал, что в пространстве E^3 на всякой полной C^2-регулярной поверхности

$$\sup K \geq 0.$$

Николай Владимирович говорил, что у теорем с короткой формулировкой обычно бывает трудное доказательство. В связи с этим стоит заметить, что работа [7] относится к тому весьма редкому числу публикаций, названия которых включают в себя точную формулировку основного результата.

Позже, в 1968 г., Николай Владимирович получил результат, который перекрывает результаты и 1-го и 2-го направлений: если метрика ρ полна, ее кривизна K отрицательна, а R имеет изменение с линейной оценкой относительно ρ, т.е.

$$|R(X) - R(Y)| \leq a\rho(X, Y) + b$$

для любых точек X и Y (здесь a и b − неотрицательные постоянные), то в пространстве E^3 не существует регулярной поверхности, на которой эта метрика реализуется [8]. Это означает, что непогружаемость обеспечена, если при уходе на бесконечность кривизна K стремится к нулю, но не быстро, а также если q конечно.

Здесь стоит сказать, что еще в 1940-х гг. в разговоре с А.Д.Александровым Николай Владимирович высказал гипотезу (удивившую тогда А.Д.Александрова) о том, что сдерживающую роль может играть не отделенность кривизны K от нуля, а поведение ее производных.

3-е направление − (h, δ)-метрики.

Для доказательства невозможности регулярной реализации плоскости Лобачевского в пространство E^3 Д.Гильберт использовал формулу Хаццидакиса,

$$\omega_{uv} = \sin \omega,$$

где ω − угол между асимптотическими линиями поверхности кривизны $K = -1$, а u и v − натуральные асимптотические параметры, и установил, что это уравнение не имеет решений, удовлетворяющих неравенству

$$0 < \omega < \pi$$

на всей плоскости.

Николай Владимирович показал, что на самом деле таких решений нет и в сколь угодно узкой полосе

$$u_1 \le u \le u_2, -\infty < v < +\infty.$$

Геометрически это означает, что в пространстве E^3 на регулярной поверхности постоянной отрицательной кривизны K вдоль полной асимптотической линии не существует полосы постоянной ширины ε ни при каких значениях $\varepsilon > 0$ (усиленная теорема Гильберта).

Теорема о простой зоне представляет собой обобщение этого результата на (h, δ)-метрики.

Введем необходимые понятия.

Область D с заданной на ней метрикой называется *простой зоной*, если ее метрическое замыкание $\overline{D}$ некомпактно, а метрическая граница ∂D состоит из не более чем двух связных некомпактных компонент (например, полоса между ветвями гиперболы и полуплоскость – простые зоны).

Метрика отрицательной кривизны K, заданная в области D, называется (h, δ)-метрикой в этой области, если

$$k \ge 1, \quad \left|\frac{k'}{k}\right| \le \frac{1}{\delta}, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)'' \le (1-h)k^{3/2}, \quad \frac{1}{\delta^2} < \frac{4}{3}h.$$

(здесь $\delta = \mathrm{const} > 0, h = \mathrm{const} > 0$, а знак «'» означает дифференцирование по дуге геодезической).

В 1966 г. Николаем Владимировичем было доказано, что простая зона с (h, δ)-метрикой, регулярно и изометрически погруженная в пространство E^3, не может содержать более одной полной характеристики (асимптотической) из данного семейства [9].

Нельзя не упомянуть и еще один результат Николая Владимировича, связанный с проблемой Гильберта. Это непогружаемость в пространство E^3 полуплоскости Лобачевского.

Доказательство того, что полуплоскость Лобачевского не допускает C^4-регулярного изометрического погружения в пространство E^3 Николай Владимирович доложил на семинаре по геометрии в целом. Однако ряд непредвиденных обстоятельств не дал ему возможности сразу оформить этот результат в виде статьи, которая появилась только в 1975 г. [10]; Николай Владимирович воспользовался сохранившейся у Э.Р.Розендорна стенограммой того доклада.

Работы Николая Владимировича пробудили значительный интерес к изучению условий погружаемости и непогружаемости в пространство E^3 многообразий отрицательной кривизны, описанию частей таких многообразий, допускающих регулярную реализацию в этом пространстве, исследованию условий регулярности погруженных поверхностей отрицательной кривизны и изучению геометрических свойств решений уравнения Монжа–Ампера гиперболического типа.

Говорят, что «мир интересуется не штормами, которые подстерегали вас в пути, а тем, привели ли вы в целости судно в порт» [11], но, все равно, то, с каким нарастающим упорством в течение почти тридцати лет Николай Владимирович шел к поставленной цели, не перестает восхищать.

Мне довелось общаться с Николаем Владимировичем в разные годы и в разных обстоятельствах, и без преувеличения могу сказать, что это общение оставило зримый след в моей жизни и яркий след в моей памяти.

Воспоминания о Николае Владимировиче вызывают у меня самые добрые чувства. Иных никогда и не возникало.

При подготовке этой заметки я пользовался материалами, предоставленными Э.Р.Розендорном и И.Х.Сабитовым, словами признательности к которым я ее и заканчиваю.

Список литературы

1. *Каган В.Ф.* Основания геометрии. Учение об обосновании геометрии в ходе его исторического развития. Ч.II. Интерпретация геометрии Лобачевского и развитие ее идей. М.: ГИТТУ, 1956.
2. *Ефимов Н.В.* Исследование полной поверхности отрицательной кривизны // Доклады Академии наук СССР. 1953. Т.93. №3. С.393–395.
3. *Ефимов Н.В.* Исследование однозначной проекции поверхности отрицательной кривизны // Доклады Академии наук СССР. 1953. Т.93. №4. С.609–611.
4. *Ефимов Н.В.*, *Позняк Э.Г.* Некоторые преобразования основных уравнений теории поверхностей // Доклады Академии наук СССР. 1961. Т.137. №1. С.25–27.
5. *Ефимов Н.В.* Невозможность изометрического погружения в трехмерное евклидово пространство некоторых многообразий с отрицательной кривизной // Доклады Академии наук СССР. 1962. Т.146. №2. С.296–299.
6. *Розендорн Э.Р.* Свойства асимптотических линий на поверхности с медленно меняющейся отрицательной кривизной // Доклады Академии наук СССР. 1962. Т.145. №3. С.538–540.
7. *Ефимов Н.В.* Доказательство теоремы: на всякой полной регулярной поверхности в E_3 верхняя грань гауссовой кривизны неотрицательна // Успехи математических наук. 1963. Т.18. Вып.4. С.206–207.
8. *Ефимов Н.В.* Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны // Математический сборник. 1964. Т.64. №2. С.286–320.
9. *Ефимов Н.В.* Поверхности с медленно изменяющейся отрицательной кривизной // Успехи математических наук. 1966. Т.21. Вып.5. С.3–58.
10. *Ефимов Н.В.* Непогружаемость полуплоскости Лобачевского // Вестник МГУ (сер. мат. и мех.). 1975. Вып.2. С.83–86.
11. *Огастин Н.О.* Как выбраться из кризиса, который вы пытались предотвратить // Управление в условиях кризиса. М., 2005. С.11–40.

ТЕОРЕМА ХИНЧИНА О СИСТЕМАХ ЧЕБЫШЕВА[1)]

Н.Г.Мощевитин

В 2006 г. были переизданы основные труды А.Я.Хинчина по теории чисел [1]. Большинство из них посвящено теории диофантовых приближений в частности многомерным диофантовым приближениям. Несомненно, основополагающей в этой области является работа [2] опубликованная в 1926 г. В ней в зародыше имеется практически вся теория линейных однородных и неоднородных диофантовых приближений развивавшаяся впоследствии как самим Хинчиным, так и другими математиками – например В.Ярником, К.Малером, Дж.Касселсом. Однако многие классические результаты Хинчина (равно как и его последователей) оказывались забытыми и даже неоднократно передоказывались другими учеными.

В настоящей статье мы сравниваем оригинальный результат Хинчина об эквивалентности свойства матрицы быть регулярной и свойства матрицы быть матрицей Чебышева (основной результат статьи [3]) и его изложение в книге Касселса «Диофантовы приближения» [4]. Оказывается формулировка Хинчина и формулировка Касселса различны, хотя и эквивалентны. Это будет обсуждаться в пунктах 1 и 4 ниже.

Кроме того, мы вносим ясность в вопрос, как связаны результаты Хинчина о теоремах переноса для однородной и неоднородной задач [3] и соответствующие результаты Ярника [5; 6], Об этом уже написано в нашем обзоре (пункт 6.2 из [7][1]). Там сделан акцент на то, что основной результат Хинчина из работы 1948 г. [3] фактически уже имелся в малоизвестной работе Ярника [5][2] и в ее более позднем варианте [6], Это действительно так, но, к сожалению, изложение вопроса в [7] оказалось запутанным и не везде верным[3]. В пункте 2 настоящей работы мы дословно приведем формулировки необходимых теорем Ярника и сравним их с результатами Хинчина. Оказывается, формулировка Ярника ближе к формулировке из Касселса чем к оригинальной формулировке Хинчина.

1. Теорема о регулярных системах и системах Чебышева: Хинчин и Касселс. Пусть m и n суть натуральные числа. Положим $d = m + n$. Мы будем иметь дело с системой из n линейных форм от m целочисленных переменных. Для вещественной матрицы

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1^1 & \dots & \theta_1^m \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta_n^1 & \dots & \theta_n^m \end{pmatrix}$$

1) Работа поддержана грантами РФФИ №12-01-00681а и Правительства России, проект 11. G34.31.0053.

рассмотрим соответствующую систему линейных форм

$$L_j(\mathbf{x}) = L_j^{\Theta}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \theta_j^i x_i, \ 1 \le j \le n.$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ – набор целочисленных переменных. Через ${}^t\Theta$ будем обозначать транспонированную матрицу, а соответствующую транспонированную систему линейных форм будем обозначать

$${}^tL_i(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \theta_j^i y_j, \ 1 \le i \le m.$$

Целочисленным набором переменных будет здесь $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$
Мы будем рассматривать функции

$$\psi(t) = \psi^{\Theta}(t) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m;\ 0 < \max|x_i| \le t} \ \max_{1 \le j \le n} ||L_j(\mathbf{x})||,$$

$${}^t\psi(t) = \psi^{\Theta}(t) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m;\ 0 < \max|y_i| \le t} \ \max_{1 \le j \le m} ||{}^tL_i(\mathbf{y})||.$$

Из теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что при $t \ge 1$ выполнено

$$\psi(t) \le t^{-\frac{m}{n}}, \ {}^t\psi(t) \le t^{-\frac{n}{m}},$$

По Хинчину, «если при любом $\varepsilon > 0$ и любом достаточно большом t могут быть разрешены в целых числах неравенства

$$|L_j| < \frac{1}{t}, \ \ 1 \le j \le n, \ \ 0 < \max_{1 \le i \le m} |x_i| < \varepsilon t^{\frac{n}{m}}, \tag{1}$$

то мы называем систему чисел θ_j^i (или систему линейных форм или систему уравнений $L_J = 0$[4]) сингулярной» (см. [3] или [1, с.238]).

Таким образом, матрица Θ является сингулярной, если для любого $\varepsilon' > 0$ при достаточно больших t выполнено

$$\psi(t) < \varepsilon' t^{-\frac{m}{n}},$$

или

$$\limsup_{t \to \infty} t^{\frac{m}{n}} \psi(t) = 0.$$

Матрицы, не являющиеся сингулярными называются *регулярными*. Итак, Θ регулярна, если при некотором положительном ε найдется возрастающая к бесконечности последовательность t_k такая, что при $t = t_k$ система неравенств (1) не имеет решений в целых числах, или, что то же самое,

$$\limsup_{t\to\infty} t^{\frac{m}{n}}\psi(t) > 0.$$

Приведем дословно определение Хинчина системы Чебышева. Хинчин пишет[5]: «Будем называть систему чисел θ_j^i системой Чебышева, если, каковы бы ни были вещественные числа α_j $(1\le j\le n)$, существует такая положительная постоянная Г, что система неравенств

$$|L_j^{\Theta}(\mathbf{x}) - y_j - \alpha_j| < \frac{\Gamma}{x^{\frac{m}{n}}} \tag{2}$$

имеет целочисленные решения $x_i, y_i, 1\le i\le m, 1\le j\le n,$ с каким угодно большим $\max\limits_{1\le i\le m}|x_i|$» (см. [3] или [1, с.239–240]).

Итак, по Хинчину, система Θ называется системой Чебышева, если

$$\forall\alpha\ \exists\Gamma\ \forall x_0\ \exists \text{ решение системы (2) с } x\ge x_0. \tag{3}$$

Основным результатом работы Хинчина [3] является следующая теорема (мы дословно приводим формулировку Хинчина).

Теорема А. (Хинчин [3] или [1, с.240]). Регулярность системы чисел θ_j^i (или системы форм L_j, или системы уравнений $L_j = 0$[6]) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы эта система была системой Чебышева.

Дословно приведем формулировку соответствующей теоремы из книги Касселса [4, с.115] (теорема XIII). Для этого прежде отметим, что определение сингулярной и регулярной матрицы у Касселса точно такое же, как и приведенное выше определение Хинчина.

Теорема Б. (Касселс [4, с.115]): Для того чтобы система $L_j(\mathbf{x})$ была регулярна, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\delta > 0$, такое, что неравенство

$$(\max_j ||L_j(\mathbf{x}) - \alpha_j||)^n (\max_i |x_i|)^m < \delta$$

имело бесконечно много целых решений $\mathbf{x}$ для каждого действительного α.

Роль величины Г из определения Хинчина у Касселса играет величина $\delta^{\frac{1}{n}}$.

Мы видим что, по Касселсу, эквивалентным условием регулярности системы $L_j(\mathbf{x})$ (или матрицы Θ, что то же самое) является следующее высказывание:

$$\exists\Gamma\ \forall\alpha\ \forall x_0\ \exists \text{ решение системы (2) с } x\ge x_0. \tag{4}$$

Неожиданным наблюдением для нас является то, что высказывания (3) и (4), вообще говоря, различные – они отличаются порядком кванторов. Как учат студентов, такие высказывания вовсе не обязаны быть равносильными. Высказывание (3) предполагает, что Γ зависит от α, в то время как высказывание (4) предполагает, что Γ одно и то же для всех α.

Тем не менее, и оригинальное доказательство Хинчина, и доказательство из книги Касселса являются верными. Таким образом, оказывается, что в рассматриваемой здесь задаче (3) и (4) эквивалентны, и кванторы переставить можно.

Объяснение этого в следующем. В явном виде можно построить функцию $g:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и в более-менее явном виде можно указать по матрице Θ вектор $\eta^\Theta = (\eta_1^\Theta, \ldots, \eta_n^\Theta) \in \mathbb{R}^n$ такой, что если рассмотреть величину

$$\Delta = \liminf_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^m, |\mathbf{x}|\to+\infty} (\max_{1\le j\le n} ||L_j(\mathbf{x}) - \eta_j^\Theta||)^n (\max_i |x_i|)^m$$

и окажется, что $\Delta < +\infty$, то для любого вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ будет выполнено

$$\liminf_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^m, |\mathbf{x}|\to+\infty} (\max_{1\le j\le n} ||L_j(\mathbf{x}) - \alpha_j||)^n (\max_i |x_i|)^m \le g(\Delta).$$

В пункте 4 мы приведем точную формулировку этого результата. Но для этого нам потребуется сказать несколько слов о том, как строится множество допустимых векторов η. Это мы сделаем в пункте 3.

2. Регулярность и свойство Чебышева: Хинчин и Ярник. Для того чтобы привести в оригинальном виде результат Ярника из работ [5; 6], нам понадобится функция

$$\psi^{\Theta,\alpha}(t) = \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}:\max|x_i|\le t} \max_{1\le j\le n} ||L_j(\mathbf{x}) - \alpha_j||,$$

определенная для вещественного вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Во всех теоремах ниже предполагается, что $\varphi(t)$ и $\rho(t)$ положительные убывающие функции вещественного аргумента, причем взаимно обратные. Дополнительно предполагается, что $\varphi(0) = \rho(0) = 0$, что для некоторого $\eta > 0$ функция $\varphi(t) \cdot t^{-\eta}$ возрастает в промежутке $t > 0$ и $\limsup_{t\to\infty} \varphi(t) \cdot t^{-\eta} = +\infty$. Кроме того, предполагается что выполнено $\varphi(\alpha t) > \alpha^\eta \varphi(t)$ для всех $\alpha > 1$, $t > 0$.

Ярник доказал следующие две теоремы (Věta 5, 7 из [5, c.3–4]):

Теорема B. Если

$$\limsup_{t\to\infty} \varphi(t) \cdot {}^t\psi(t) > a > 0,$$

то

$$\limsup_{t\to\infty} \rho(t) \sup_{\alpha\,:\,0\le\alpha_j\le 1} \psi^{\Theta,\alpha}(t) \le A,$$

где

$$A = \frac{3}{2} d!\, d \max\left(1, \left(\frac{d!\, d}{2a}\right)^{1/\eta}\right).$$

Теорема Г. Если

$$\limsup_{t\to\infty} \varphi(t)\ {}^t\psi(t) < \infty,$$

то найдется вектор α такой, что

$$\liminf_{t\to\infty} \rho(t)\psi^{\Theta,\alpha}(t) > 0.$$

Если положить $\varphi(t) = \gamma t^{\frac{n}{m}}$ и $\rho(t) = (t/\gamma)^{\frac{m}{n}}$, $\gamma > 0$, то происходит следующее.

1. Из теоремы В получаем что если матрица ${}^t\Theta$ регулярна, то матрица Θ удовлетворяет высказыванию (4).

2. Из теоремы Г получаем, что если матрица ${}^t\Theta$ сингулярна, то матрица Θ не удовлетворяет высказыванию (4).

Итак, Ярник в [5] доказал, что регулярность матрицы ${}^t\Theta$ эквивалентна высказыванию (4) для матрицы Θ. В пункте 6.2 нашей обзорной работы [7] утверждается нечто другое: Ярник доказал, что регулярность матрицы ${}^t\Theta$ эквивалентна тому, что Θ есть матрица Чебышева, то есть удовлетворяет (3).

Последнее, конечно, в каком-то смысле верно, ибо (3) и (4) действительно эквивалентны. Но ни у Хинчина, ни у Ярника, ни у Касселса мы не нашли в явном виде утверждения о том, что (3) и (4) эквивалентны.

Утверждение о том, что матрица Θ сингулярна тогда и только тогда, когда сингулярна матрица ${}^t\Theta$ в явном виде в работах Ярника [5; 6] *не содержится*. Это утверждение составляет основной результат работы Хинчина 1948 г. [8]. Однако оно сразу следует из общей теоремы Малера[7] (Satz 1 из работы 1939 г. [9]).

3. Наилучшие приближения и множество $\mathcal{N}_\Theta$. Для транспонированной матрицы ${}^t\Theta$ рассмотрим (конечную или бесконечную) последовательность векторов наилучших приближений

$$\mathbf{y}_\nu = (y_{\nu,1}, \ldots, y_{\nu,n}),\ \nu = 1, 2, 3, \qquad (5)$$

(по поводу определения наилучших приближений и их простейших свойств мы сошлемся на нашу обзорную работу [7]).

Естественно, наиболее интересен и важен случай, когда последовательность (5) бесконечна.

По аналогии с [7] мы будем использовать обозначения

$$Y_\nu = \max_{1\le j\le n}|y_{\nu,j}|, \zeta_\nu = \max_{1\le i\le m}||{}^tL_i(\mathbf{y}_\nu)||.$$

Из теоремы Минковского о выпуклом теле сразу следует, что

$$\zeta_\nu^m Y_{\nu+1}^n \le 1. \tag{6}$$

Определим множество

$$\mathcal{N}_\Theta = \{\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n : \inf_{\nu\in\mathbb{Z}_+} ||\eta_1 x_{\nu,1} + \ldots + \eta_n x_{\nu,n}|| > 0\}.$$

С одной стороны, это множество достаточно маленькое. Если последовательность (5) бесконечна, то мера Лебега множества $\mathcal{N}_\Theta$ равна нулю. С другой стороны, это множество не очень маленькое – оно непусто, и, более того, размерность Хаусдорфа множества $\mathcal{N}_\Theta$ равна размерности всего пространства $\mathbb{R}^n$, то есть n. Можно сказать еще больше: для произвольной матрицы Θ множество $\mathcal{N}_\Theta$ является $1/2$-выигрышным в смысле В.М.Шмидта[8], что есть более сильное свойство, чем обладание полной размерностью Хаусдорфа.

4. Новая формулировка. Положим

$$K = \frac{1}{2^{d-1}\sqrt{d}} \operatorname{vol}_{d-1}, \{\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d) \in [-1,1]^d : z_1 + \ldots + z_d = 0\},$$

$$\frac{1}{\sqrt{d}} \le K \le \sqrt{\frac{2}{d}}, \tag{7}$$

$$R_{m,n} = \max_{0<r<1} r^n(1-r)^m = r_0^n(1-r_0)^m \ge \frac{1}{2^d}, 0 < r_0 < 1 \tag{8}$$

и определим

$$G_{m,n}(\varepsilon) = \frac{d^d(m^m n^n)^{d(d-1)}}{(\varepsilon^d K R_0)^{d(d-1)}}.$$

Теорема 1. Рассмотрим матрицу Θ и соответствующее ей множество $\mathcal{N}_\Theta$. Пусть $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathcal{N}_\Theta$. Возьмем[9] такое положительное ε, что

$$\inf_{\nu\in\mathbb{Z}_+} ||\eta_1 x_{\nu,1} + \ldots + \eta_n x_{\nu,n}|| \ge \varepsilon.$$

Рассмотрим величину

$$\Delta = \Delta(\Theta, \eta) = \liminf_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^m, |\mathbf{x}|\to+\infty} (\max_{1\le j\le n}||L_j(\mathbf{x}) - \eta_j||)^n (\max_i |x_i|)^m.$$

Тогда для любого вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\liminf_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m, |\mathbf{x}| \to +\infty} (\max_{1 \le j \le n} || L_j(\mathbf{x}) - \alpha_j ||)^n (\max_{1 \le i \le m} |x_i|)^m \le G_{m,n}(\varepsilon) \Delta^{d(d-1)}.$$

В качестве следствия из теоремы 1 сразу получается

Теорема 2. Для матрицы Θ выполнено высказывание (3) тогда и только тогда, когда для нее выполнено высказывание (4).

5. Схема доказательства теоремы 1. Мы будем следовать классическому доказательству Хинчина [3; 4]. Берем $\delta > \Delta$. Из тождества

$$\eta_1 y_1 + \ldots + \eta_n y_n = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot (\eta_j - K_j(x)) + \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot {}^t L_j(\mathbf{y})$$

при $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\nu$ получаем, что

$$\varepsilon < n Y_\nu \max_{1 \le j \le n} || L_j(\mathbf{x}) - ets_j || + m \zeta_\nu X. \tag{9}$$

Давайте в дальнейшем (для определенности) рассматривать только случай, когда последовательность (5) бесконечна. Выберем тогда ν из условия

$$(R_0 Y_\nu)^{\frac{n}{m}} \le X < (R_0 Y_{\nu+1})^{\frac{n}{m}},$$

где

$$R_0 = \frac{n \delta^{\frac{1}{n}}}{\varepsilon r_0},$$

а r_0 определено в (8). Если мы теперь предполагаем, что

$$\max_{1 \le j \le n} || L_j(\mathbf{x}) - \eta_j || \le \left(\frac{\delta}{X^m} \right)^{\frac{1}{n}},$$

то из неравенства (9) и соотношения (6) получаем:

$$\zeta_\nu^m Y_{\nu+1}^n \ge w, \tag{10}$$

где

$$w = \frac{\varepsilon^d r_0^n (1 - r_0)^m}{m^m n^n \delta}, \tag{11}$$

Это означает, что в $(m+n)$-мерном параллелепипеде

$$\Pi = \{ \mathbf{z} = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^d :$$

$$\max_{1 \le j \le n} | y_j | < Y_{\nu+1}, \quad \max_{1 \le i \le m} |{}^t L_i(\mathbf{y}) - x_i | \le \zeta_\nu \}$$

нет ненулевых целых точек. Согласно принципу переноса[10], в параллелепипеде

$$
{}^t\Pi = \{\mathbf{z} = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^d :
$$
$$
\max_{1\le i\le m} |x_i| < A, \quad \max_{1\le j\le n} |L_i(\mathbf{x}) - y_j| \le B\},
$$

где

$$
A = KY_{\nu+1}^{n}\zeta_{\nu}^{m-1}, \; B = KY_{\nu+1}^{n-1}\zeta_{\nu}^{m}, \tag{12}
$$

а K определено в (7), тоже нет нетривиальных целых точек. Для d-мерного объема этого параллелепипеда имеет место равенство

$$
\mathrm{vol}\ {}^t\Pi = 2^d A^n B^n = (2K)^d (\zeta_\nu^m Y_{\nu+1}^n)^{d-1} \ge (2K)^d w^{d-1}.
$$

Рассмотрим последовательные минимумы $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ параллелепипеда ${}^t\Pi$ по отношению к целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$. Ясно что $\lambda_{d-1} \ge \ldots \ge \lambda_1 \ge 1$. Используя теорему Минковского, видим, что

$$
\lambda_d \le \frac{2^d}{\lambda_1 \ldots \lambda_{d-1} \mathrm{vol}\ {}^t\Pi} \le \frac{1}{K^d w^{d-1}}.
$$

Так как в параллелепипеде $\lambda_d^t\Pi$ имеется d независимых целых точек, то параллелепипед[11]

$$
\Pi^* = \frac{d}{K^d w^{d-1}} \cdot {}^t\Pi \supset d\lambda_d \cdot {}^t\Pi
$$

содержит фундаментальную область по отношению к решетке $\mathbb{Z}^d$. Значит, для любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^d$ трансляция $\Pi^* + \xi$ содержит некоторую целую точку. В частности, для любого $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ найдется целая точка $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$ такая, что

$$
\max_{1\le i\le m} |x_i| \le \frac{d}{K^d w^{d-1}} \cdot A, \quad \max_{1\le j\le n} \| L_j(\mathbf{x}) - \alpha_j \| \le \frac{d}{K^d w^{d-1}} \cdot B.
$$

Таким образом, с учетом (6), (11) и (12) получаем:

$$
(\max_{1\le j\le n} \| L_j(\mathbf{x}) - \alpha_j \|)^n (\max_{1\le i\le m} |x_i|)^m \le \frac{d^d}{K^{d^2} w^{d(d-1)}} A^n B^m =
$$

$$
= \frac{d^d}{(Kw)^{d(d-1)}} (\zeta_\nu^m Y_{\nu+1}^n)^{d-1} \le \frac{d^d}{(Kw)^{d(d-1)}} = G_{m,n} \delta^{d(d-1)}.
$$

Поскольку $\Delta > \delta$ можно выбирать сколь угодно близким к Δ, теорема 1 доказана.

Примечания

[1] В англоязычной версии этой работы было исправлено достаточно много неточностей первоначальной русскоязычной версии. К сожалению, много некорректных моментов там все же осталось. См., например, примечание 3 в настоящей работе.

[2] Датируемой 1941 г. и изданной в Праге на чешском языке.

[3] Например, следствие теоремы 28 (принадлежащей Ярнику) из [7, с.83] на самом деле следует не из этой теоремы (как утверждается в [7, с.83]), а из другой теоремы Ярника (Věta 6 из [5, с.3]), которая в [7] оказалась непроцитированной. Также теоремы 31 и 32 из [7, с.84] неэквивалентны друг другу, как это утверждается.

[4] Добавим: или матрицу Θ.

[5] Мы стараемся, по возможности, приводить точные цитаты; тем не менее, нам приходится немного изменять обозначения, чтобы они соответствовали друг другу всюду в настоящей статье. Например, в оригинальной работе Хинчина [3] через L_j обозначалась линейная форма от $(m+1)$ переменной $L_j = \sum_{i=1}^{m} \theta_j^i x_i - y_j$, и неравенства (2) выглядели следующим образом: $|L_j - \alpha_j| < \frac{\Gamma}{x^{m/n}}$.

[6] Или матрицы Θ.

[7] Как это и отмечается в [4, с.95–97].

[8] О выигрышных множествах имеется много литературы; см оригинальную работу В.М.Шмидта [10] и его книгу [11]; некоторые недавние статьи о свойстве выигрышности процитированы в [7] и [12].

[9] Существует положительная постоянная $\varepsilon_{m,n}$ такая, что для любой матрицы Θ найдется $\eta \in \mathcal{N}_\Theta$ с $\varepsilon > \varepsilon_{m,n}$ (см. Лемму 2 из [4, с.107]). Это связано с тем, что для любой матрицы Θ последовательность наилучших приближений в среднем растет лакунарным образом (см., например: [12; 13]). Лучшую оценку снизу на $\varepsilon_{m,n}$ можно получить с помощью метода Переса–Шлага (см. оригинальную работу [14] или работу [15]).

[10] Здесь мы используем теорему К.Малера из [9] (излагаемую в книге [4, с.95–97]), точнее, несколько более сильный результат О.Н.Германа [16], который дает более точное значение константы. Вообще говоря, в некоторых других местах нашего доказательства возникающие постоянные тоже можно выбирать оптимальнее, чем это сделано у нас.

[11] Скорее всего, множитель в определении параллелепипеда Π^* выбран не оптимально. Если можно взять меньший множитель, то, естественно, константа в теореме 1 будет лучше.

Список литературы

1. *Хинчин А.Я.* Избранные труды по теории чисел. М., 2006.
2. *Khinchine A.Y.* Über eine klasse linear Diophantine Approximationen // Rendiconti Circolo Mathematico Palermo. 1926. Vol.50. P.170–195.
3. *Хинчин А.Я.* Регулярные системы линейных уравнений и общая задача Чебышева // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1948. Т.12. С.249–258.
4. *Касселс Дж.В.С.* Введение в теорию диофантовых приближений. М., 1961.
5. *Jarník V.* On linearnich nehomogennich diofantickych aproximacich // Rozpravy II Tridy Ceske Akademie Rocnik LI Cislo 29. 1941. P.1–21.
6. *Jarník V.* Sur les approximations diophantiques lineaires non homogenes // Bulletin international de l'Académie teheque des Sciences. 1946. Vol.47. №16. P.1–16.
7. *Мощевитин Н.Г.* Сингулярные диофантовы системы А.Я.Хинчина и их применение // Успехи математических наук. 2010. Т.65. № 3(393). С.43–126; англоязычная версия: *Moshchevitin N.G.* Khintchine's singular Diophantine systems and their applications // Russian Mathematical Surveys. 2010. Vol.65. №3. P.433–511.

8. *Хинчин А.Я.* Теорема переноса для сингулярных систем линейных уравнений // Доклады Академии наук СССР. 1948. Т.59. №2. С.217–218.
9. *Mahler K.* Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen // Časopis pro pěstování matematiky a fysiky. 1939. Vol.68 С.85–92.
10. *Schmidt W.M.* On badly approximable numbers and certain games // Transactions of the American Mathematical Society. 1966. Vol.623. P.178–199.
11. *Шмидт В.М.* Диофантовы приближения. М., 1983.
12. *Moshchevitin N.G.* On some open problems in Diophantine approximation Preprint available at arXiv:1202.4539v4 (2012).
13. *Bugeaud Y., Laurent M.* On exponents of homogeneous and inhomogeneous Diophantine approximations // Moscow Mathematical Journal. 2005. Vol.5. №4. P.747–766.
14. *Peres Y. Schlag W.* Two Erdös problems on lacunary sequences: chromatic numbers and Diophantine approximations // Bulletin London Mathematical Society. 2010. Vol.42. №2. P.295–300.
15. *Рочев И.П.* О распределении дробных долей линейных форм // Фундаментальная и прикладная математика 2010 Т.16. №6. С.123–137.
16. *German O.N.* On Diophantine exponents and Khintchine's transference principle // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2012. Vol.2. №2. P.22–51.

МАТЕМАТИКА АНТИЧНОСТИ И СРЕДНИХ ВЕКОВ

КАК БЫЛИ НАЙДЕНЫ НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УДВОЕНИИ КУБА?

А.И.Щетников

Введение. Задача об удвоении куба – это одна из трех знаменитых задач древнегреческой математики, наряду с задачами о квадратуре круга и трисекции угла. Громкая слава этих задач связана с тем, что они не могут быть решены с помощью циркуля и линейки – простейших геометрических инструментов, на использовании которых основаны все элементарные построения «Начал» Евклида. Древнегреческие математики не умели доказывать эту неразрешимость, хотя и были в ней уверены. Для решения этих задач они применяли разнообразные «неэлементарные» средства: механические инструменты, пространственные построения, конические сечения и другие кривые.

Все известные нам античные решения задачи об удвоении куба описаны Евтокием (VI в. н.э.) в комментарии к книге Архимеда «О шаре и цилиндре».

Евтокий сообщает, что сведение задачи об удвоении куба к задаче об отыскании двух средних пропорциональных выполнил Гиппократ Хиосский (конец V в. до н.э.), который «нашел, что если для двух данных линий, из которых большая равна удвоенной меньшей, найти две средние пропорциональные, составляющие с ним непрерывную пропорцию, то тем самым будет достигнуто и удвоение куба; тем самым он свел одну проблему к другой, ничуть ни меньшей» [1, с.430]. Все последующие математики решали именно эту задачу об отыскании двух средних пропорциональных отрезков между двумя данными.

К известным нам античным решениям этой задачи относятся:

– решение Архита Тарентского (IV в. до н.э.), в котором используются пространственные построения с пересечением тора, цилиндра и конуса;

– механическое решение, приписываемое Платону (IV в. до н.э.);

– два решения Менехма (IV в. до н.э.) с коническими сечениями;

– механическое решение Эратосфена Киренского (III в. до н.э.), в котором применяется специальное устройство с прямоугольными пластинками;

– решение Никомеда (III в. до н.э.), в котором используется специальная кривая –конхоида, предназначенная для выполнения так называемых вставок;

– группа схожих решений, принадлежащих Филону Византийскому (III в. до н.э.), Аполлонию Пергскому (конец III в. до н.э.) и Герону Александрийскому (I в. н.э.); в этих решениях применяются разного рода вставки;

– группа схожих решений, принадлежащих Диоклу (конец III в. до н.э.), Паппу Александрийскому (конец III в. н.э.) и Спору Никейскому (III в. н.э.); в решении Диокла используется специальная кривая – циссоида.

Все эти решения рассматривались и обсуждались в следующих книгах. Во-первых, это сделанный И.Н.Веселовским перевод всех отрывков из Евтокия, относящихся к задаче об удвоении куба [2, с.459–480]. Во-вторых, это общий анализ истории этой задачи, выполненный Б.Л. ван дер Варденом [3, с.194–196, 221–227, 317, 322–325, 362]. В-третьих, это математический обзор предложенных решений, произведенный В.В.Прасоловым [4]. Из комментариев на других языках следует упомянуть книгу Т.Хизса [5].

Проблема реконструкции. Античные решения задачи об удвоении куба, приводимые Евтокием, изложены по общему канону, характерному для античных математических текстов: после формулировки задачи сразу же идет описание построения, а за ним – доказательство того, что это построение действительно дает искомое решение. Из таких текстов зачастую совсем не видно, как предложенные решения могли быть найдены. Как говорит об этом Рене Декарт в «Правилах для руководства ума», «очень многое из того, что я прочитал у этих авторов касательно чисел, было истинным, как я, проведя расчеты, убедился на опыте; касательно же фигур многое они определенным образом представили моим глазам и выводили на основании некоторых заключений, но почему это обстояло именно так и каким образом было обнаружено, сами они, по-видимому, не показывали уму достаточно хорошо» [6, с.88].

В.В.Прасолов [4] предпринял попытку восстановить те пути, которыми античные геометры пришли к своим решениям. Однако его реконструкции, по моему мнению, не всегда могут быть признаны удачными. Они зачастую слишком «алгебраичны», что мало соответствует духу древнегреческой математики, и нисколько не раскрывают той «логики открытия», которой руководствовались античные авторы.

Я полагаю, что правильный путь восстановления этой логики должен ориентироваться не столько на детали тех доказательств, которые приводит Евтокий (ведь эти доказательства призваны задним числом подтвердить правильность построений, и они молчат о том, каким образом эти построения были придуманы), сколько на исходную ключевую проблему в формулировке Гиппократа Хиосского:

Для двух данных отрезков a и b найти отрезки x и y в непрерывной пропорции

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}. \tag{1}$$

Решая задачу об удвоении куба, античные геометры с самого начала исходили из этой пропорции и постоянно имели ее в виду. И пути, которыми они пришли к своим решениям, определялись теми средствами работы с пропорциями, которые у них имелись. А этими средствами были:

а) представление членов пропорций сторонами подобных треугольников в самоподобных геометрических структурах (рис.1);

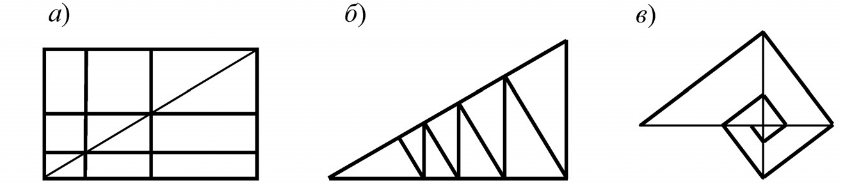


Рис.1

б) преобразования пропорций, описанные в V книге «Начал»;

в) преобразования «геометрической алгебры», описанные во II книге «Начал».

Из преобразований последних двух пунктов в дальнейшем нам потребуется следующая выкладка. Сначала почленным сложением крайних отношений в непрерывной пропорции (1) получим еще одну пропорцию

$$\frac{x}{y} = \frac{y+a}{x+b}. \tag{2}$$

Затем перемножим члены этой пропорции крест-накрест:

$$y(y+a) = x(x+b). \tag{3}$$

Наконец, выделив с обеих сторон полные квадраты, получим соотношение

$$\left(y+\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2. \tag{4}$$

Мы произвели все выкладки алгебраически, а древнегреческие математики могли проделывать их геометрически. Для получения соотношения (3) можно воспользоваться чертежом, изображенным на рис.2; наше рассуждение будет опираться на теорему Фалеса и теорему о равенстве площадей прямоугольников, закрашенных на чертеже (рис.2) одним цветом (предложение I.43 «Начал»).

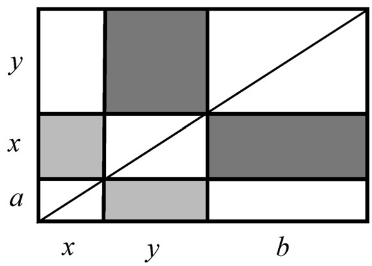


Рис.2

Для представления прямоугольника в виде разности двух квадратов применяется преобразование гномона, изображенное на рис.3 (предложение II.6 «Начал»).

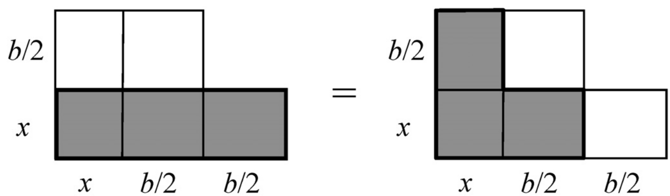


Рис.3

Содержащиеся в (4) квадраты могут представляться геометрически с помощью теоремы Пифагора, причем несколькими разными способами.

Поскольку в (4) задействованы отрезки $a/2$ и $b/2$, пропорцию крайних отношений

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{b}$$

удобно будет представить в виде

$$\frac{(a/2)}{x} = \frac{y}{(2b)}. \qquad (5)$$

Любое из соотношений (2)–(4) вкупе с соотношением (5) определяет собой искомые средние; чтобы выполнить построение этих средних, надо придумать для выбранных соотношений удобную геометрическую интерпретацию.

Решение Никомеда. Перестановкой членов преобразуем (4) к виду

$$\left(y + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2. \qquad (6)$$

Соотношение (6) можно представить геометрически (рис.4).

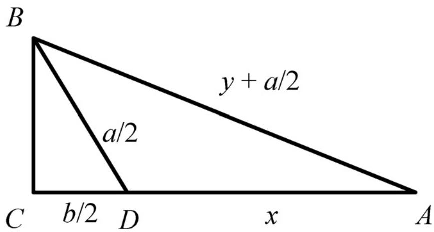


Рис.4

Треугольник BCD мы уже можем построить по данным гипотенузе $a/2$ и катету $b/2$, но положение точки A на прямой CD пока еще остается неопределенным. Для его отыскания перенесем пропорцию (5) на чертеж с помощью теоремы Фалеса (рис.5).

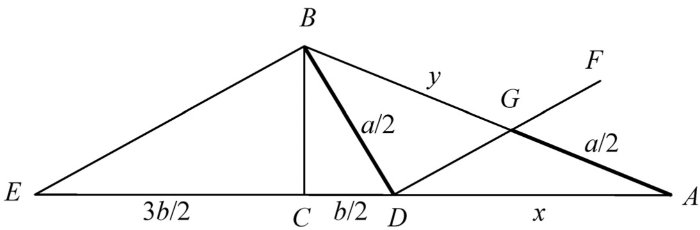


Рис.5

Теперь составим план построения. Сначала построим прямоугольный треугольник BCD с катетом $CD = b/2$ и гипотенузой $BD = a/2$. Затем пристроим к нему прямоугольный треугольник BCE с катетом $CE = 3b/2$. Проведем прямую DF, параллельную EB. Осталось провести из точки B прямую BA таким образом, чтобы стороны угла FDA высекали на ней отрезок $GA = a/2$.

Для выполнения этой вставки Никомед применяет специальную кривую – *конхоиду*. Эта кривая прочерчивается на плоскости точкой A', лежащей на подвижном луче BA' и перемещающейся по этому лучу таким образом, чтобы отрезок $G'A'$, заключенный между точкой G', в которой луч BA' пересекает прямую DF, и точкой A' был равен фиксированной величине $a/2$. Пересечение конхоиды с продолжением отрезка ED даст искомую точку A (рис.6).

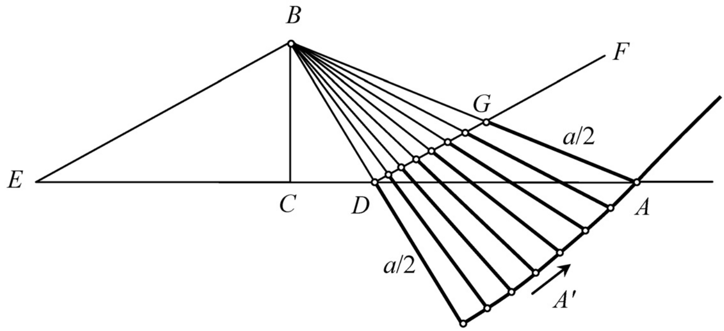


Рис.6

Заинтересованный читатель может теперь самостоятельно разобрать решение Никомеда и убедиться, что построенная реконструкция верно схватывает суть дела. Текст комментария Евтокия убеждает нас также и в том, что проводить реконструкцию, опираясь только на текст доказательства, оказывается делом почти безнадежным. Текст может дать для этого лишь отдельные намеки; дело же исследователя – не идти слепо за текстом, но установить, с какой исходной идеи мог стартовать автор, и попытаться проделать шаг за шагом все ходы, которые привели автора к открытию.

Решение Никомеда мы приводим в переводе И.Н.Веселовского [2, с.477]; перевод заново сверен с критическим изданием [7].

«Возьмем две взаимно перпендикулярные прямые ΓΛ и ΛΑ, для которых требуется найти две средние пропорциональные в непрерывной пропорции. Дополним параллелограмм ΑΒΓΛ и разделим пополам каждую из ΑΒ, ΒΓ в точках Δ, Ε; соединяющую прямую ΛΔ продолжим, и пусть она пересечет продолжение ΓΒ в Н. Затем перпендикулярно к ВΓ проведем EZ и сделаем ΓZ равной АΔ; проведем соединяющую прямую ZH и параллельную ей линию ΓΘ. Получив угол KΓΘ, проведем ZΘK из заданной точки Z так, чтобы ΘK равнялась АΔ или ΓZ (что это возможно, ясно из свойств конхоиды). Продолжим соединяющую прямую KΛ, и пусть она пересечет продолжение ВА в М. Я утверждаю, что ΓΛ к KΓ, как KΓ к МА, как МА к АΛ.

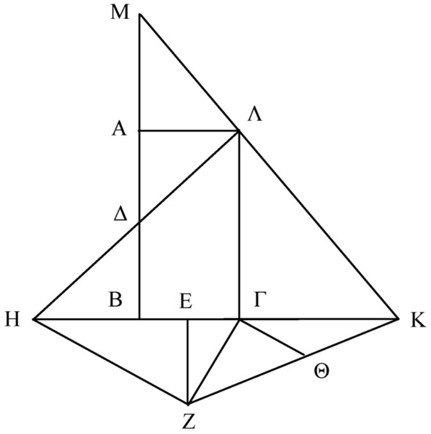


Рис.7

Так как ВΓ разделена в Е пополам и к ней прибавлена KΓ, то, значит, прямоугольник между ВK и KΓ вместе с квадратом на ΓЕ равен квадрату на ЕK. Прибавим к обеим частям квадрат на EZ: тогда прямоугольник между ВK и KΓ вместе с квадратами на ΓЕ и EZ, равными квадрату на ΓZ, будет равен квадратам на KЕ и EZ, равным квадрату на KZ. Затем, поскольку МА к АВ как МΛ к ΛK, и МΛ к ΛK как ВΓ к ΓK, то и МА к АВ как ВΓ к ΓK. Теперь АΔ будет половиной АВ, а ΓН будет удвоенной ВΓ (так как ΛΓ в два раза больше ΔВ); тогда МА к АΔ как НΓ к ΓK. Но НΓ к ΓK как ZΘ к ΘK, вследствие параллельности HZ и ΓΘ; и присоединением, МΔ к ΔА как ZK к KΘ. Но по предположению АΔ равна ΘK, и АΔ равна ΓZ; значит, и МΔ равна ZK, и квадрат на МΔ равен квадрату на ZK. Теперь квадрат на МΔ равен прямоугольнику между ВМ и МА вместе с квадратом на ΔА; и по уже доказанному, квадрат на ZK равен прямоугольнику между ВK и KΓ вместе с квадратом на ΓZ. Но квадрат на АΔ равен квадрату на ΓZ, поскольку по предположению АΔ равна ΓZ; значит, и прямоугольник между ВМ и МА равен прямоугольнику между ВK и KΓ. Таким образом, МВ к ВK, как KΓ к АМ. Но ВМ к ВK, как ΓΛ к ΓK. И тем самым ΛΓ к ΓK, как KΓ к

AM. И также ΛΓ к ΓK, как MA к AΛ. И вот ΛΓ к ΓK, как ΓK к AM, как AM к AΛ.»

Решение Филона–Аполлония–Герона. Вновь обратимся к соотношению (4) и преобразуем его к виду

$$\left(y+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2. \tag{7}$$

Рассмотрим чертеж, изображенный на рис.8. В силу подобия треугольников здесь уже имеет место пропорция $a{:}x = y{:}b$. Мы хотим, чтобы для четырех отрезков, составляющих эту пропорцию, выполнялось также соотношение (7). Это означает, что проведенные на рис.8 отрезки GE и GF должны быть равны между собой. Так получается решение, принадлежащее Герону; решения Филона и Аполлония отличаются от него лишь некоторыми деталями.

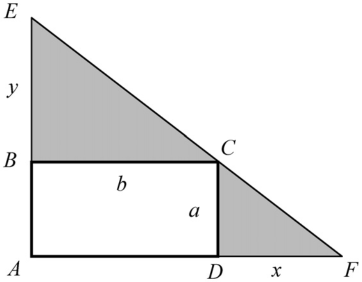


Рис.8

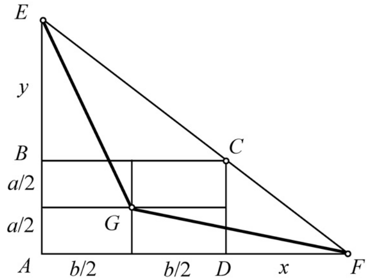


Рис.9

Вот как выглядит решение Герона в переводе:

«Пусть даны две прямые AB, BΓ, для которых требуется найти две средние пропорциональные. Расположим их так, чтобы они образовали при B прямой угол, и дополним параллелограмм BΔ; проведем прямые AΓ, BΔ; они, очевидно, между собой равны и пересекаются пополам; построенный на одной из них круг пройдет и через концы другой, так как рассматриваемый параллелограмм будет прямоугольным. Продолжим ΔΓ, ΔA до Z, H и вообразим линейку ZBH, которая двигалась бы около некоторого неподвижного гвоздя B. Повернем ее так, чтобы расстояния EZ и EH от точки E были равными. Представим, что линейка находится в положении ZBH, причем, как сказано, прямые EZ и EH сделались равными. Из точки E опустим на ΓΔ перпендикуляр EΘ; очевидно, что он разделит ΓΔ пополам.

Так как ΓΔ разделена в точке Θ пополам и к ней добавлен ΓZ, то прямоугольник между ΔZ и ZΓ вместе с квадратом на ΓΘ равен квадрату на ΘZ. Прибавим общий квадрат на EΘ, тогда прямо-

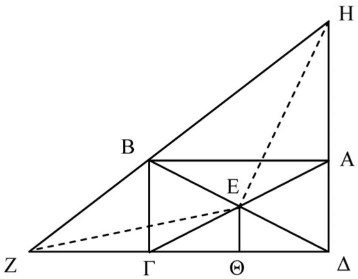


Рис.10

угольник между ΔZ и ZΓ вместе с квадратами на ΓΘ, EΘ равен квадратам на ZΘ, ΘE. Но квадраты на ΓΘ, ΘE равны квадрату на ΓE, и квадраты на ZΘ, ΘE равны квадрату на EZ. Значит, прямоугольник между ΔZ и ZΓ вместе с квадратом на ΓE равен квадрату на EZ. Точно так же докажем, что прямоугольник между ΔH и HA вместе с квадратом на AE равен квадрату на EH. Затем AE равна EΓ, и HE равна EZ; значит, прямоугольник между ΔZ и ZΓ равен прямоугольнику между ΔH и HA. Если же прямоугольник между крайними равен прямоугольнику между средними, то четыре прямых составляют пропорцию; значит, ZΔ к ΔH, как AH к ΓZ. Но ZΔ к ΔH, как ZΓ к ΓB, и как BA к AH, так как в треугольнике ZΔH проведены ΓB и AB параллельно ΔH и ΔZ. Значит, BA к AH, как AH к ΓZ, и как ΓZ к ΓB. И вот для AB и BΓ найдены средние пропорциональные AH и ΓZ».

Решение Диокла–Паппа–Спора. Основу этого решения составляет фигура из трех прямоугольных треугольников, стороны которых образуют непрерывную пропорцию, известная также по механическому решению, придуманному Платоном (рис.11). Катеты $OA = a$ и $OD = b$ заданы, катеты $OB = x$ и $OC = y$ нужно взять такими, чтобы прямые AB и CD были параллельны, а прямая BC – перпендикулярна им обеим.

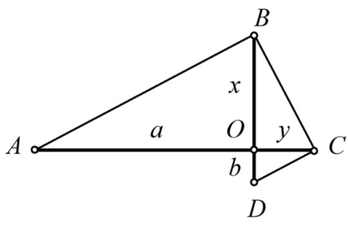


Рис.11

Идея Диокла состоит в том, чтобы достроить рис.11 до вписанного прямоугольника (рис.12). Если мы станем изменять положение вершины B, точка D будет описывать некоторую кривую, называемую *циссоидой*.

Чтобы произвести удвоение куба, надо найти такое положение точки D, для которого $a{:}b = 2$. Если циссоида уже проведена, это построение элементарно (рис.13).

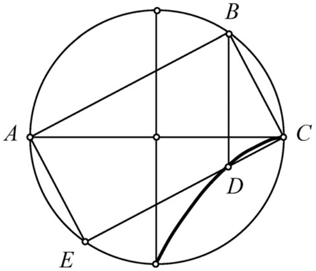


Рис.12

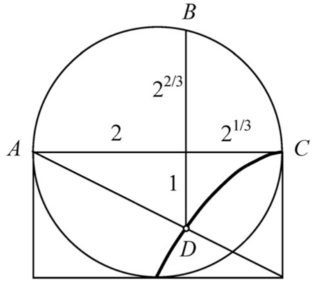


Рис.13

Вот как выглядит решение Диокла в переводе:

«Проведем в круге два перпендикулярных диаметра AB, ΓΔ; по обе стороны от B отложим две равные дуги EB и BZ; через Z проведем ZH параллельно AB; и соединим ΔE. Я утверждаю, что для ΓH, HΘ двумя средними пропорциональными будут ZH, HΔ.

Проведем через E параллельно AB прямую EK; тогда EK равна ZH, и KΓ равна HΔ. Это будет очевидным, если соединить Λ прямыми с E, Z; ведь получившиеся углы ΓΛE, ZΛΔ равны, и при K, H будут прямые углы; тогда вследствие равенства ΛE и ΛZ все стороны и углы одного треугольника будут соответственно равны всем сторонам и углам другого треугольника, а значит, будут равны и оставшиеся ΓK и HΔ. Теперь, поскольку ΔK к KE, как ΔH к HΘ, но и ΔK к KE, как EK к KΓ (ведь EK будет средней пропорциональной для ΔK, KΓ), то, значит, ΔK к KE, и EK к KΓ, как ΔH к HΘ. Далее, ΔK равна ΓH, KE равна ZH, KΓ равна HΔ; значит, ΓH к HZ, как ZH к HΔ, как ΔH к HΘ.

Если с каждой стороны B взять равные дуги MB, BN, через N параллельно AB провести NΞ и соединить ΔM, то совершенно так же для ΓΞ, ΞO средними пропорциональными будут NΞ, ΞΔ. Если мы подобным образом проведем много непрерывно расположенных параллельных между B, Δ, затем отложим от X к Γ дуги, соответственно равные дугам, отсекаемым этими прямыми от B, и полученные точки соединим с Δ прямыми (наподобие ΔE, ΔM), то эти прямые пересекут соответствующие им параллели между В, Δ в некоторых точках (в нашем примере в Θ, О); если соединить эти точки по линейке прямыми, то мы получим некоторую начерченную в круге линию, обладающую тем свойством, что если через любую ее точку провести прямую, параллельную ΛВ, то эта проведенная прямая и отсекаемый ей на диаметре по направлению к Δ отрезок будут средними пропорциональными для другого отрезка диаметра по направлению к точке Г и той части проведенной прямой, которая заключена между построенной в круге линией и диаметром ГΔ.

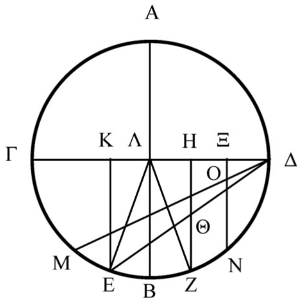


Рис.14

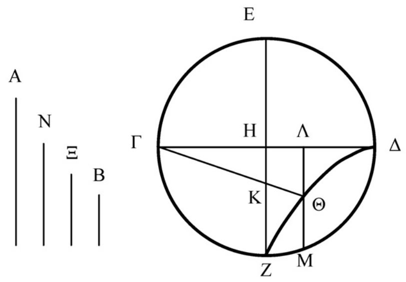


Рис.15

После этой подготовки возьмем две прямые, для которых требуется отыскать две средние пропорциональные, и пусть это будут А, В. Возьмем круг с двумя взаимно перпендикулярными диаметрами ГΔ, EZ и начертим в нем при помощи непрерывных точек упомянутую кривую ΔΘZ. Сделаем, чтобы как А к В, так и ГН к ГК. Затем продолжим ГК до пересечения с построенной линией в Θ. Через Θ параллельно EZ проведем ΛМ; тогда, согласно вышеизложенному, средними пропорциональными для ГΛ, ΛΘ будут МΛ, ΛΔ. Затем, поскольку ГΛ к ΛΘ как ГН к НК, и ГН к НК как А к В, то если мы между А, В вставим прямые N, Ξ так, чтобы все они были в одном отношении к ГΛ, ΛМ, ΛΔ, ΛΘ, то средними пропорциональными для А, В будут N, Ξ, что и требовалось отыскать.»

Решение Архита. Анализ задачи начнем с того, что построим полусферу единичного радиуса и проведем в ее основании диаметр $AB=2$. Допустим, что искомый отрезок, длина которого равна $\sqrt[3]{2}$, уже найден: пусть это будет хорда AC, лежащая в плоскости основания полусферы. Проведем через AC плоскость, перпендикулярную плоскости основания: она пересечет полусферу по полукругу с диаметром AC. В этом полукруге проведем хорду $AD=1$ и соединим CD. Угол ADC – прямой, как вписанный в полукруг. В секущей плоскости продолжим AC и AD, восстановим к AC перпендикуляр CE до пересечения с AD в точке E, а затем восстановим к AE перпендикуляр EF до пересечения с AC в точке F. Около прямоугольного треугольника AEF опишем полукруг с диаметром AF (рис.16). В силу подобия треугольников имеет место пропорция $AD{:}AC = AC{:}AE = AE{:}AF$, и поскольку по предположению $AD = 1$ и $AC = \sqrt[3]{2}$, тем самым $AF = 2$.

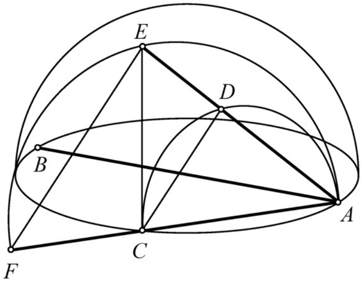


Рис.16

Рассмотрим теперь точку E. Во-первых, E лежит на перпендикуляре EC к основанию, и тем самым – на поверхности цилиндра, установленного на круге основания. Во-вторых, E лежит на продолжении AD, и тем самым – на поверхности конуса с вершиной A, основанием которого служит круг, проведенный на поверхности полусферы циркулем с единичным раствором. В-третьих, E лежит на полукруге с диаметром $AF = 2$, плоскость которого перпендикулярна к плоскости основания, и тем самым – на поверхности тора, заметаемого вращением исходной сферы вокруг оси, проходящей через точку A перпендикулярно к плоскости основания. Все три поверхности – цилиндр, конус и тор – мы можем мысленно построить, поскольку данных для этого вполне достаточно. Найдя точку E как место пересечения трех поверхностей, мы найдем вслед за ней точку C и тем самым искомый отрезок AC.

Поскольку исходная полусфера в итоговом построении непосредственно не участвует, не участвует она и в доказательстве, которое дает Архит. Как это часто бывает, когда строительные леса убраны, трудно сказать, откуда решение взялось. Но если их восстановить, все становится на свои места.

Вот как выглядит решение Архита в переводе:

«Пусть даны две прямые ΑΔ, Γ; требуется для ΑΔ, Γ найти две средние пропорциональные. На большей из них ΑΔ опишем круг ΑΒΔΖ и вставим в него ΑΒ, равную Γ; пусть она, будучи продолжена, встретит в Π касательную к кругу, проведенную из Δ. Проведем BEZ, параллельную ΠΔO, и вообразим прямой полуцилиндр на полукруге ABΔ, а на AΔ − перпендикулярный полукруг на прямоугольнике полуцилиндра. Этот полукруг при вращении от Δ к B около неподвижного конца диаметра A будет пересекать цилиндрическую поверхность и вычертит на ней некоторую линию. И опять, около неподвижной прямой AΔ будем вращать треугольник AΠΔ против движения полукруга; этот треугольник образует коническую поверхность с прямой AΠ, которая при вращении пересечет начерченную на цилиндре линию в некоторой точке; при этом B опишет полукруг на конической поверхности. Пусть в пересечении вышеупомянутых линий движущийся полукруг занимает положение Δ′KA, вращающийся обратно треугольник − положение ΔΛA, причем точкой упомянутого пересечения будет K; и пусть описанный точкой B полукруг будет BMZ, а его общее пересечение с кругом BΔZA будет BZ. Опустим из K перпендикуляр на плоскость полукруга BΔA; конец этого перпендикуляра попадет на окружность, так как цилиндр будет прямым. Пусть это будет KI, и соединяющая прямая AI пересечет BZ в Θ, а AΛ пересечет полукруг BMZ в M. Проведем прямые KΔ′, MI, MΘ. Так как каждый из полукругов Δ′KA и BMZ перпендикулярен к лежащей под ними плоскости, то и их общее сечение MΘ будет перпендикулярно к плоскости круга; поэтому MΘ будет перпендикулярна к BZ.

Таким образом, прямоугольник между BΘ и ΘZ, или прямоугольник между AΘ и ΘI, равен квадрату на MΘ; следовательно, треугольник AMI будет подобен каждому из треугольников MIΘ и

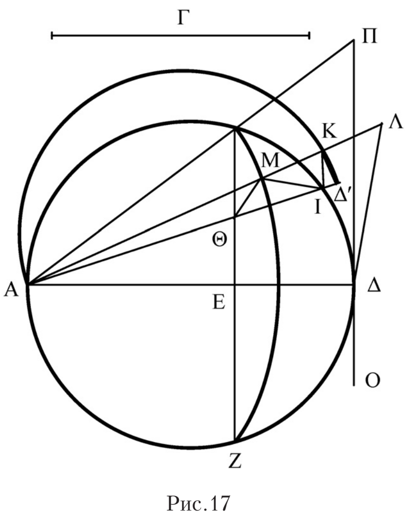


Рис.17

МАΘ. Далее, угол IMA прямой. Прямым будет и угол Δ′KA; значит, KΔ′ и MI будут параллельны, и получится пропорция: Δ′A к AK, как KA к AI, как IA к AM, вследствие подобия треугольников. Так что четыре прямые Δ′A, AK, AI, AM составляют непрерывную пропорцию. Затем AM равна Γ, так как она равна AB; значит, для двух данных прямых AΔ, Γ найдены две средние пропорциональные AK, AI.»

Решение Виета. Рассмотрим реконструкцию еще одного решения задачи об удвоении куба, которое предложил знаменитый французский математик Франсуа Виет (1540–1603) в своем сочинении «Геометрическое приложение» (1593). Хотя это решение относится к совсем другой эпохе, тем не менее, Виет успешно пользуется геометрическими методами античности. Само решение рассмотрено в книге Прасолова [4, с.119]. Мы же покажем, каким образом это решение могло быть найдено.

Вновь вернемся к соотношению

$$y(y+a)=x(x+b).$$

Это соотношение допускает геометрическую интерпретацию, основанную на теореме о секущих. Если считать, что $a>b$, удобно будет провести хорду a так, чтобы она проходила через центр окружности (рис.18).

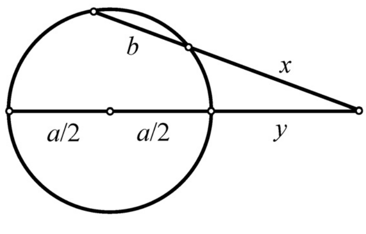


Рис.18

Теперь нам следует воспользоваться пропорцией $\dfrac{(a/2)}{x}=\dfrac{y}{2b}$. Чтобы перенести ее на чертеж с помощью теоремы Фалеса, поменяем местами отрезки $a/2$ и y, и удлиним хорду $SR=b$ до отрезка $TR=2b$; при этом прямые TO и RQ должны оказаться параллельными (рис.19).

Анализ завершен, и теперь можно описать само построение. Проведем окружность с центром O и радиусом $a/2$. Впишем в нее хорду $SR=b$ и удлиним ее до отрезка $TR=2b$; продлим хорду SR также и по другую сторону от точки R по прямой RU. Проведем отрезок TO, а затем параллельно ему проведем прямую RW. Оста-

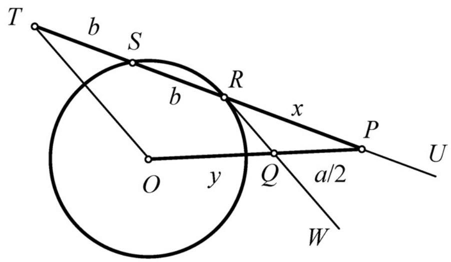


Рис.19

лось провести прямую OP таким образом, чтобы стороны угла URW высекали на ней отрезок $QP = a/2$. Эта вставка, как мы уже знаем, выполняется с помощью конхоиды Никомеда.

Список литературы

1. Фрагменты ранних греческих философов. Ч.1 / Изд. *А.В.Лебедева*. М., 1989.
2. *Архимед*. Сочинения / Пер. и комм. *И.Н.Веселовского*. М., 1962.
3. *Ван дер Варден Б.Л.* Пробуждающаяся наука: Математика древнего Египта, Вавилона и Греции / Пер. с голл. *И.Н.Веселовского.* М., 1959.
4. *Прасолов В.В.* Геометрические задачи древнего мира. М., 1997.
5. *Heath T.L.* A History of Greek Mathematics. 2 vols. Oxford, 1921.
6. *Декарт Р.* Сочинения. М., 1989. Т.1.
7. *Eutocius.* Commentarii in libros de sphaera et cylindro // Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii / Ed. *J.L.Heiberg.* Leipzig, 1915. T.3. P.2–224.

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ РАЗВИТИЯ СРЕДНЕВЕКОВОЙ АЛГЕБРЫ[1)]

М.М.Рожанская

Появление средневековой алгебры (да и алгебры вообще, как самостоятельной математической дисциплины) традиционно связывается с созданием алгебраического трактата ал-Хорезми (ок. 780 – ок. 850). В отличие от его арифметического трактата, который дошел до нас только в латинском переводе[1], «Алгебра» сохранилась и в арабской версии XIV в., и в латинских рукописях, которые восходят к переводам, сделанным в XII в. Робертом Честерским и Герардо Кремонским [1; 2]. Арабский текст носит заглавие «Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы» (Ал-китаб ал-мухтасар фи хисаб ал-джабр ва-л-мукабала) и состоит из трех частей, из которых только одна представляет собой алгебраический раздел. Содержание этого раздела и есть первое в истории математики изложение начал алгебры – науки о решении числовых квад-

1) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №06-06-80526а)

ратных и линейных уравнений. В отличие от арифметики, в которой согласно ал-Хорезми, рассматриваются числа вообще, в алгебре вводятся числа трех определенных родов, соответствующих понятиям неизвестного, его квадрата и свободного члена. Вводится и само понятие уравнения как некоего выражения, состоящего из двух частей, члены которого можно перемещать из одной части в другую.

Прежде всего, ал-Хорезми приводит классификацию рассматриваемых им шести типов линейных и квадратных уравнений, к которым он сводит всю совокупность решаемых задач, и предлагает единый метод (алгоритм) их решения. В классификации ал-Хорезми пользуется и единой терминологией: неизвестное – «вещь» или «корень», квадрат неизвестного – «квадрат» или «имущество», свободный член – «число» или «дирхем»[2]. К каноническому виду уравнения приводятся одним и тем же способом – с помощью операций, именуемых «восполнение» (ал-джабр) и «противопоставление» (ал-мукабала). «Восполнение» состоит в переносе вычитаемых членов уравнения в другую его сторону и записи их там в виде прибавляемых членов. Ее название «ал-джабр», стоящее в заглавии трактата ал-Хорезми, вскоре было распространено на всю науку об уравнениях. Операция «противопоставления» представляет собою удаление одинаковых членов в обеих частях уравнения. Кроме того, процедура сведения уравнения к каноническому виду подразумевает преобразование, с помощью арифметических операций, старшего коэффициента в единицу. Любое другое уравнение, линейное или квадратное, для решения должно быть приведено к одному из указанных шести типов.

И ал-Хорезми, и авторы более поздних алгебраических трактатов делят указанные шесть типов уравнений на две группы: первая группа – три так называемых простых, вторая группа – три так называемых составных уравнения; в современной терминологии это, соответственно, двух- и трехчленные, или неполные и полные, уравнения. В первой группе первое уравнение – линейное, второе и третье – трактуются как линейные: в обоих случаях в качестве искомого неизвестного рассматривается не только корень уравнения, но и его квадрат, причем во втором уравнении не учитывается нулевое решение, в конкретных задачах не представляющее интереса. Но вот что характерно: если в качестве неизвестного рассматривается корень уравнения, то в решении обязательно приводится значение его квадрата, и наоборот, определив значение квадрата неизвестного, автор трактата почти всегда приводит и значение его квадратного корня. И это можно проследить практически во всех алгебраических сочинениях математиков Востока и Запада средневекового мира ислама. Таким образом, вся первая группа может рассматриваться как состоящая из линейных уравнений. Решение же полных квадратных уравнений приводится обычно в виде словесных правил выражения их корней в радикалах (арифметический прием) и геометрического доказательства с помощью специальных геометрических построений, приемами геометрической алгебры.

Вопрос об источниках алгебраического трактата ал-Хорезми, в отличие от арифметического, в котором он явно следует индийским образцам, до сих пор не решен. В индийской математике отсутствует геометрическое обоснование правил решения квадратных уравнений и действий над алгебраическими величинами, столь характерных как для трактата ал-Хорезми, так и вообще для всей последующей средневековой алгебраической литературы, отсутствует и понятие отрицательного числа. О греческом влиянии свидетельствует геометрическое построение корней квадратных уравнений, в особенности полных. Но в целом его трактовка существенно отличается от геометрической алгебры «Начал» Евклида. И если античная геометрическая алгебра и оказала влияние на ал-Хорезми, то, безусловно, в сильно преобразованном виде, в форме, приспособленной к нуждам числовой алгебры. Но алгебра такого вида в известных источниках не упоминается.

Есть основание видеть у ал-Хорезми нечто общее с Диофантом [3], а именно, у обоих встречается приведение квадратного уравнения к трем каноническим формам. Однако прямое влияние на него Диофанта маловероятно, поскольку первые арабские переводы сочинений Диофанта были сделаны после появления трактата ал-Хорезми.

Скорее всего, «Алгебра» ал-Хорезми восходит к традиции, сложившейся на Ближнем и Среднем Востоке, в регионе бывшего эллинистического мира, и включавшей прочно усвоенные элементы как древневавилонской, так и греческой научной традиции, в том числе математической. Мы не знаем, есть ли у ал-Хорезми самостоятельные алгебраические результаты, тем более, что сам он лично себе новых открытий не приписывает. Но, вероятно, он был первым или одним из первых, кто донес до средних веков эту своеобразную традицию, бытовавшую в позднеэллинистическом мире и утвердившуюся на средневековом Востоке в эпоху раннего средневековья, и, таким образом, стоял у истоков алгебраического исчисления и алгебры как самостоятельной научной дисциплины.

Что же это за традиция? Можем ли мы, кроме общих соображений, судить о ее конкретных составляющих?

В практической арифметике средневекового Востока широкое распространение получил цикл задач на «тройное правило», сводящееся к простым пропорциям с одним неизвестным. Оно часто применялось в задачах о сделках и в юридической практике, в задачах «на наследство», то есть о делении наследства в соответствии с нормами мусульманского права. Возможно, уже во времена ал-Хорезми на Ближнем Востоке был известен частный случай тройного правила – «правило двух ложных положений», которое носило название «правила двух ошибок». Этот метод решения большого цикла арифметических задач в простейшем случае интерпретируется как решение линейного уравнения.

«Правило двух ошибок» по сути дела представляет собою алгоритм автоматического решения типовых задач, сводящихся к линейным уравнениям. Впоследствии оно широко применялось в математических сочинениях как в восточном, так и в западном ареалах средневекового мира ислама и стало одной из основных тем в европейской средневековой арифметике [4].

В XII в. мы встречаемся с этим методом под названием «правило чаш весов» [5]. Первая известная нам формулировка указанного правила дается у крупнейшего западноарабского математика XII в. ал-Хассара. Согласно ал-Хассару [6; 7], решение задачи предлагается в форме взвешивания некоторого груза, вес которого и есть искомое неизвестное, на равноплечих весах с двумя чашами, подвешенными в концах его плеч. Путем подбора грузов с соответственно «ложными» значениями искомого веса взвешиваемого объекта и двух «ошибок» достигается равновесие весов, что позволяет судить об искомом весе взвешиваемого груза. Ал-Хассар не приводит схемы весов. Можно предположить, что задача решается путем непосредственного взвешивания на них.

В XIII в. крупнейший западноарабский математик Ибн ал-Банна уже дает подробное описание этого правила, сопровождая его геометрической схемой таких весов. Вероятно, он знает (хотя и не приводит) геометрическое доказательство «правила чаш весов», замечая, что оно основывается на геометрии. Очевидно, это умолчание вызвано присущей ему чрезвычайной лаконичностью изложения. Начиная с Ибн ал-Банны, этот метод уже считался общепринятым арифметическим приемом в западноарабской математике и входил с состав почти каждого арифметического сочинения авторов XIII–XV вв. Тем не менее, схема весов остается непременным атрибутом этого правила при любых вычислениях с его помощью. Вскоре оно приобретает универсальный характер, уже Ибн ал-Банна формулирует его не на числовом примере, а сразу в общих выражениях.

Таким образом, правило чаш весов хотя и представляло собою как будто бы всего лишь частный случай тройного правила, играло важную роль в укреплении и развитии той самой местной математической традиции, которая сложилась и продолжала развиваться в пространстве средневекового исламского мира на почве древней и эллинистической науки.

Еще одной существенной особенностью так называемой арабской арифметики было применение теории взвешивания, точнее, практики взвешивания как способа решения достаточно большого класса арифметических задач.

Мы показали, что само «правило чаш весов» восходит в известной степени к практике взвешивания грузов на равноплечих весах. С помощью весов и взвешивания решались и задачи определения состава сплавов и смесей, и «задачи монетного двора», и многие другие.

Все вышеизложенное можно рассматривать как некоторое введение к тому, что предлагается автором настоящей работы в качестве источника и составных частей той самой научной традиции, в недрах которой началось формирование средневековой алгебры.

Во-первых, это понятие о рычаге и его равновесии применительно к его наиболее распространенной модификации – весам, восходящее еще к античной традиции – «науке о взвешивании» и учению о пяти «простых машинах». Ведь операция «восполнение и противопоставление» (ал-джабр ва-л-мукабала) представляет собой не что иное, как процедуру взвешивания. В простейшем случае при взвешивании на равноплечих весах с двумя чашами операция сводится к тому, что в одну из чаш помещают груз, вес которого подлежит определению, а в другую – систему разновесов, с помощью которых весы приводятся в равновесие. Совокупный вес разновесов есть искомый результат. В более сложном случае для получения равновесия весов приходится перемещать разновесы из одной чаши в другую. Очевидно, что операция «восполнения» вполне соответствует процессу перемещения грузов, а операция «противопоставления» – установлению равновесия равноплечих весов.

Если не первым, то, несомненно, самым важным моментом в зарождении и истории средневековой алгебры было введение в математику понятия равновесия, к которому восходит сам термин «уравнение» – «уравнивание» через «противопоставление»; здесь весы перестают быть вещественным атрибутом и переходят в разряд абстрактных схем, а эта схема уже приводит к понятию линейного уравнения. Вероятно, первоначально в арабской математике рассматривались только линейные уравнения, и слово «имущество» означало неизвестное, но по мере того, как в оборот входили и квадратные уравнения, этот термин закрепился за квадратом неизвестного. Ал-Хорезми применяет его как в случае квадратных, так и в случае линейных уравнений. Правила решения полных квадратных уравнений обосновываются при помощи геометрических построений, подобных рассмотренным выше. И восходят они как будто к греческой геометрической алгебре. Трактовка Ал-Хорезми хотя и близка к евклидовой, имеет ряд существенных отличий. Кроме того, сам стиль рассуждения и изложения у обоих авторов абсолютно непохожи. Поэтому можно утверждать, что греческая геометрия хотя и оказала влияние на ал-Хорезми, но в сильно преобразованной форме, приспособленной для нужд формирующейся числовой алгебры. В этом и состоит сущность процесса освоения средневековой арабоязычной математикой античного научного наследия.

Если же говорить о самой сути местной традиции, на основе которой стоит «Алгебра» ал-Хорезми, то это, прежде всего, введение понятия уравнения, восходящее к понятию равновесия, теории весов и взвешивания в сочетании с теорией «простых машин», тройного правила в трансформированном виде (в форме «правила чаш весов») и, конечно, греческой геометрической алгебры, также в трансформированном виде.

Примечания

[1] Даже, скорее, не в переводе, а в изложении исходного арабского текста, или, возможно, в первоначальной неизвестной латинской версии.

[2] Денежная или весовая единица.

Список литературы

1. Liber Maumeti filii Moysi alchoarismi de algebra et almuchabala... // *Libri G.* Histoire des sciences mathématiques en Italie depuis la Renaissance des lettres jasqu'à la fin du XVIII siècle. Paris, 1838. Vol.1. P.253–297.
2. *Karpinski L.Ch.* Robert of Chester's Latin translation of the Algebra of al-Khowarizmi. N.Y., 1915.
3. *Диофант.* Арифметика / Пер. с древнегреческого *И.Н.Веселовского*, ред. и коммент. *И.Г.Башмаковой*. М., 1974.
4. *Рожанская М.М.*, *Аль-Хамза М.* Ибн ал-Банна и его «Краткое изложение арифметических действий» // Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2005. Вып.9(44). С.330–347.
5. *Рожанская М.М.* Из истории теории весов и взвешивания // Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2009. Вып.13(48). С.259–269.
6. *Suter H.* Das Rechenkunst des Abu Zakariya al-Hassar // Bibliotheca Mathematica 1901. Bd.3. Folge 2. S.12–40. (Reprint: *H.Suter*. Beiträge zur Geschichte der Mathematik und Astronomie im Islam. Bd.1–2. Frankfurt-am-Main, 1986. Bd.2. S.115–143).
7. *Woepcke F.* Passages relatifs à des sommations de séries de cubes, extraits de deux manuscrits arabes inédits du British Museum de Londres // Journal des mathématiques pures et appliqués. 1865. Vol.10. Sér.2. P.83–116.

ПЕРВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ТРАКТАТА АЛ-АБХАРИ «УЛУЧШЕНИЕ “НАЧАЛ” ЕВКЛИДА»[1)]

И.О.Лютер

Грег де Янг, известный исследователь арабских версий «Начал» Евклида, назвал XIII век в истории арабо-мусульманской науки веком «обработок» по точным наукам и отметил появле-

1) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-06-00053а).

ние в этом столетии трех обработок «Начал» Евклида Мухъи ад-Дина ал-Магриби, Насир ад-Дина ат-Туси и Псевдо-Туси [1, с.265–266]. Обработки (тахрир) – в некотором роде редакции более ранних арабских версий текстов естественно-научных сочинений преимущественно древнегреческих ученых, составители которых не просто улучшали стиль изложения, но иногда и пересматривали формулировки, методы доказательства, заменяя их альтернативными или дополняя, включали обсуждение сложных с научной точки зрения фрагментов. Жанр обработок, по словам Г. де Янга, и другие близкие жанры научных сочинений (исправления, дополнения, комментарии, сокращения) строго не разграничиваются и часто переходят один в другой [1, с.266]. Поэтому к его списку обработок «Начал» с полным основанием можно отнести и составленный в этом же веке трактат «Улучшение “Начал” Евклида» (Ислах ал-китаб ал-Истиксат) крупного философа, логика и астронома Асир ад-Дина ал-Абхари (ок.1200–1264/1265?), представляющий собой авторскую редакцию тринадцати книг «Начал». Этот трактат ранее не изучался, хотя и был известен, благодаря ссылкам на него в геометрическом трактате «Предложения обоснования» (Ашкал ат-та'сис) Шамс ад-Дина ас-Самарканди (ок.1250–ок.1310) и комментарии к нему Кади заде ар-Руми (1364–1436). Так, доказательство ал-Абхари пятого постулата Евклида, приведенное ар-Руми, в таком вот опосредованном виде было введено в научный оборот Х.Дильганом и Б.А.Розенфельдом [2; 3].

Дублинская рукопись трактата. В настоящей статье я представлю некоторые первые результаты исследования трактата «Улучшение «Начал» Евклида» ал-Абхари по его дублинской рукописи (Dublin, Chester Beatty Library, CBL Ar 3424). Тегеранская рукопись (Tehran, Sipahsalar 540), указанная в нескольких каталогах как рукопись этого сочинения, оказалась рукописной копией римского печатного издания «Начал» Евклида в обработке Псевдо-Туси 1594 г. (эта рукопись была любезно предоставлена иранским историком науки доктором М.Багери). На это несоответствие также обратил внимание и Г. де Янг, изучая рукописи обработки «Начал» Псевдо-Туси [1, с.281–282]. Такая ошибочная идентификация была обусловлена тем, что на первом листе этой рукописи, над прочими пометами и владельческими печатями, почерком, отличным от почерка переписчика текста, написано, что это – «книга «Улучшение» достойнейшего человека, выдающегося ученого Асир ал-Дина ал-Абхари по геометрии», при этом собственно титульный лист трактата отсутствует. Сохранилась еще одна рукопись сочинения ал-Абхари, находящаяся в Бурсе (Bursa, Hüsein Çelebi 744) [4].

В большинстве случаев арабоязычные ученые называли сочинение Евклида «китаб Усул», то есть «книга “Начал”» («усул» также означает «принципы, основные положения»), у ал-Абхари несколько иначе – «китаб Истиксат», то есть «книга “Элементов”». Несмотря на это, я буду придерживаться названия «Улучшение “Начал” Евклида», следуя в большей степени традиционному русскому переводу названия самой книги Евклида. Заметим, что ар-Руми в своих комментариях, говоря, что трактат ал-Абхари более сокращенный и менее известный по сравнению с обработкой ат-Туси, называет его «Ислах Усул Уклидис» [5, с.129–130]. В англоязычной литературе это сочинение известно под названием «Emendation of Euclid’s “Elements”», поскольку «ислах» также означает «исправление».

Дублинская рукопись содержит 126 листов (лл.1–126 об.) и все 13 книг «Начал» Евклида. На каждом листе, если он без чертежей, которые повсюду включены в сам текст, по 21 строке. Первая строка на всех листах размыта и в большинстве случаев текст полностью утрачен. Определения, аксиомы, постулаты, предложения написаны единым блоком. Номера предложений указаны на полях в системе счисления абджад (десятичная система счисления, в которой каждой из 28 букв арабского алфавита соответствует определенное числовое значение). Выделены (более жирным почерком) только «порядковые названия» книг (например, «книга первая»), номера постулатов (например, «третий») и фраза «тогда я говорю», предваряющая доказательство каждого предложения. Предложения разграничиваются знаком, похожим на размытую двадцать шестую букву арабского алфавита «ха» (возможно, по образу и подобию знака, разграничивающего суры в Коране), иногда двумя такими знаками, реже двумя жирными горизонтально поставленными точками с «перевернутой запятой» над ними. Маргиналии отсутствуют, если не иметь в виду единичные случаи уточнений слов и фраз, записанных на полях.

В начале трактата (л.1 об.) автор сообщает, что «улучшение книги «Начала» по геометрии» он «составил для тех, кто имел искреннее желание, чтобы ее объяснили, и твердое намерение ее изучить». Ал-Абхари «добавил к [«Началам» Евклида] то, что делает книгу завершенной, устанавливая то, чем пренебрегли, разрешая сомнения, противоречивость положений и остальное, что не избавлено от этого».

Первая процитированная здесь фраза достаточно традиционна по своей сути. Арабоязычные авторы нередко мотивировали написание своих сочинений просьбами (иногда настоятельными) или желанием своих друзей и компаньонов, заинтересованных в изучении, понимании и объяснении того или иного предмета. Ас-Самарканди, например, в начале упомянутого выше трактата сообщает, что составил его по просьбе своих достойных друзей, нуждающихся во введении в многообразие доказательств наук вычислительных [5, с.103–104].

В конце трактата (л.126) переписчик текста отметил, что данная рукописная копия выполнена с автографа ʿАли ибн ʿУмара ал-Казвини (ум.1276 или позднее), не сообщив, однако, ни дату завершения этой копии, ни свое имя. На этом же листе, внизу, почерком (более похожим на насх), отличным от почерка переписчика (насталика), добавлены сведения из биобиблиографического труда Хаджжи Халифы (ок.1599–1658) «Раскрытие мнений относительно названий книг и отраслей наук» (Кашф аз-зунун): «согласно “Кашф аз-зунун”, умер ал-Казвини в 675 году Хиджры (1276 г. – *И.Л.*), составитель же книги – приблизительно в 660 году Хиджры (1262 г. – *И.Л.*)». Эти же сведения были воспроизведены еще кем-то на первом листе рукописи с добавлением названия трактата и полного имени автора – Асир ад-Дин Муфаддал ибн ʿУмар ал-Абхари. Год смерти ал-Абхари (1262), указанный на этих листах, расходится с 1264 г. (663 г.х), приведенном в классической биобиблиографии К.Броккельмана [6], но совпадает с годом, данным в аналогичной работе Г.Зутера [7]. Если обратиться непосредственно к «Кашф аз-зунун» Хаджжи Халифы, обнаружится, что и там нет определенности: в первой книге указывается, что ал-Абхари умер около 700 г.х., в третьей книге – после 660 г.х., в шестой книге – около 660 г.х. [8]. До сих пор эта дата не установлена точно: в новой редакции «Энциклопедии Ислама» дан 1264 г. [9].

Впоследствии на оставшейся незаполненной последней странице рукописи (л.126 об.) очень аккуратным насхом было записано доказательство способа построения круга, равного по площади двум данным кругам, принадлежащее ʿАлам ал-Дину Кайсару ал-Ханафи (1178–1251), известному изготовителю астролябий, теологу, архитектору и инженеру, знатоку математических наук (см.: Приложение 1).

Примечательно, что все ученые, имена которых встречаются по ходу изучения пока только рукописи трактата ал-Абхари, не только жили в одно время, но и были непосредственно знакомы с Насир ад-Дином ат-Туси, его философскими и естественно-научными воззрениями. Сохранилась, например, переписка ʿАлам ал-Дина Кайсара ал-Ханафи с ат-Туси, в которой обсуждалось доказательство ат-Туси постулата о параллельных. В Марагинской обсерватории, построенной и функционировавшей под руководством ат-Туси, некоторое время работал философ и логик Наджм ал-Дин

‘Али ибн ‘Умар ал-Казвини ал-Катиби, с автографа которого был переписан трактат ал-Абхари. Последнее неудивительно, если учесть, что ал-Казвини был учеником ал-Абхари. Турецкий историк науки А.Сайили, основываясь на рукописных источниках, заключил, что в этой обсерватории случилось поработать и самому ал-Абхари [10]. Напомним, что и ал-Абхари и ат-Туси были учениками знаменитого философа, математика и астронома Камал ад-Дина ибн Юнуса (Йунус, 1156–1242). Ал-Абхари приблизительно в 1227–1228 гг., будучи уже известным преподавателем права и астрономии, прибыл в Мосул (Ирак), чтобы изучать под руководством Ибн Юнуса математические науки (прежде всего астрономию), почти в то же время и с той же целью туда после изучения права и теологии в Египте приехал и ат-Туси [11].

Определение прямой ал-Абхари. В самом начале трактата ал-Абхари мое внимание привлекли его формулировки нескольких определений – прямой, плоскости и параллельных линий, отличающиеся не только от соответственных канонических определений Евклида, но и от их наиболее известных арабских версий.

Что касается остальных его определений, то, если сравнивать с соответственным списком из 23 определений, предваряющих первую книгу «Начал» Евклида, у ал-Абхари отсутствуют определения плоского угла и границы, но добавлено определение диаметра (диагонали) четырехугольника.

Определение точки ал-Абхари – «точка – это вещь, обладающая положением, но не имеющая части» [12, л.1 об.] – совпадает с определением точки Ибн Сины (Авиценны, 980–1037) и фактически не отличается от определения, представленного в обработке ат-Туси. Обратим внимание, что в этом определении говорится, что точка не имеет «части», а не «частей», как, например, в классическом русском переводе «Начал» Д.Д.Мордухай-Болтовского. Псевдо-Туси, ас-Самарканди и ар-Руми в своих определениях точки избежали эту трудность, говоря о точке как «неделимой» или той, что «не делится на части» (определения точки этих ученых, а также ат-Туси представлены в [5, с.107–109], где проанализирован другой аспект арабских версий этого определения – наделение точки положением).

Итак, начнем с определения прямой. Согласно ал-Абхари, «прямая линия – это такая [линия, что], если на ней предположить любое количество точек, то будут они все (биасирха) в одном направлении (самт), то есть не будут некоторые из них выше, некоторые из них ниже» [12, л.1 об.].

Эта формулировка отличается не только от энигматичного определения Евклида (прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней), но и от определений, представленных в наиболее популярных в мусульманских странах во времена ал-Абхари и вплоть до XX в. обработках «Начал» его современников Насир ад-Дина ат-Туси и Псевдо-Туси.

В обработке ат-Туси «прямая линия – та, расположение которой таково, что противопоставляется (йатакабала) любая предположенная на ней точка [любой] другой [точке]» [13, л.2]. Это можно перевести и так: «прямая линия – та, расположение которой таково, что любая предположенная на ней точка находится напротив любой другой точки».

Псевдо-Туси более лаконичен: «линия прямая, если точки, которые предположены на ней, будут противопоставлены друг другу (‘ала мукабалати, букв. «на противопоставлении» или «на сопоставлении». – *И.Л.*)» [14, с.4]. Как и в предыдущем случае, можно перевести еще следующим образом: «линия прямая, если точки, которые предположены на ней, будут друг напротив друга».

Подобный лексический набор присутствует и в определении прямой из более ранней редакции «Начал» Ибн Сины: «линия прямая – это [линия], расположенная (махтут) на противопоставлении (‘ала истикбали) любой точки, находящейся на ней, двум ее конечным точкам» [15, с.16]. Любая точка прямой здесь противопоставляется двум конечным точкам, что, вполне возможно, свидетельствует об основательном знакомстве Ибн Сины, например, через арабского Аристотеля, с определением прямой Платона («Парменид», 137е): прямая – то, середина чего не дает видеть (или заслоняет) оба конца.

Появление «противопоставления точек» в арабских редакциях определения прямой Евклида также могло быть результатом восприятия определения Платона, в котором, собственно, и подразумевается, что середина отрезка и его концы находятся друг напротив друга, противопоставляются друг другу.

Традиция определять прямую (и по аналогии с ней плоскость, см. далее) с помощью «противопоставления», возможно, была заложена еще в арабских переводах «Начал». Так, определение прямой в так называемой версии Исхака–Сабита, то есть в переводе Исхака ибн Хунейна (ок. 830–910/911), отредактированном впоследствии Сабитом ибн Коррой (836–901), следующее: «прямая линия – та, которая расположена на противопоставлении (‘ала мукабалати) любых точек, находящихся на ней, друг другу» [16, л.1 об.].

Версия Исхака–Сабита, осуществленная, как предполагают сейчас, при участии Хунейна ибн Исхака (809–873), возглавлявшего переводческую деятельность в багдадском «Доме мудрости» отца Исхака ибн Хунейна, сохранилась во многих рукописях. Этот перевод хронологически третий. Первые два перевода «Начал» Евклида на арабский язык принадлежат ал-Хаджаджу ибн Юсуфу ибн Матару (786–833). Второй его перевод представляет собой переработанную и сокращенную версию первого. Ни один из переводов ал-Хаджаджа не сохранился ни в полном виде, ни в оригинальных фрагментах; о его содержании можно судить лишь по цитированию и ссылкам в других сочинениях. В обработке «Начал» Насир ад-Дина ат-Туси, например, были использованы и перевод ал-Хаджаджа и версия Исхака–Сабита.

Возвращаясь к «противопоставлению точек» в определениях прямой, можно было бы заключить, что ал-Абхари в своем определении прямой отходит от сложившейся к XIII в. на средневековом арабском Востоке традиции определять эту линию с помощью «противопоставления точек». Однако это не совсем так.

Свое представление прямой ал-Абхари, судя по почти дословному совпадению, позаимствовал из «Комментария к введениям Евклида» Ибн ал-Хайсама (965–1039/40). Точнее, из трактовки ал-Хайсама определения прямой Евклида, данного в формулировке, в которой, подобно формулировкам ат-Туси и Псевдо-Туси, говорится о «противопоставлении точек»:

«Определение Евклида: прямая линия – [та, что] расположена (маудуу’) на противопоставлении (‘ала мукабалати) любых точек, находящихся на ней (в тексте «любой точки, находящейся на ней». – *И.Л.*), друг другу. Это означает, что прямая линия – [это такая линия, что], если на ней предположить любое количество точек, то все (джами‘) они будут в одном направлении (самт), то есть не будут некоторые из них выше, некоторые из них ниже, и не будут некоторые из них правей, некоторые из них левей, а будет положение их всех одним положением по сравнению с представлением линии» [17, л.155].

Фактически в этой трактовке утверждается, что все точки прямой находятся друг напротив друга (заметим, что арабский глагол «самата», однокоренной с используемым здесь и в определении прямой ал-Абхари арабским термином «самт» – «направление», как раз и означает «быть напротив»). При этом использование без предварительного определения термина «направление» в тексте трактовки вполне допустимо, в отличие от случая определения прямой ал-Абхари.

Комментарий Ибн ал-Хайсама представлял особый интерес для средневековых арабских ученых, прежде всего потому, что в нем было представлено оригинальное доказательство автора постулата о параллельных Евклида с помощью «одного простого» движения (параллельного переноса). Этот трактат, судя по всему, имевшийся в распоряжении ал-Абхари, был, однако, менее доступен по сравнению с другим сочинением ал-Хайсама под названием «Разрешение сомнений в книге Евклида» (Китаб фи халл шукук китаб Уклидис), в котором те же методология и доказательство изложены более лаконично. Так, исходя именно из этого трактата, Омар Хайям (ʽУмар ал-Хайййами, 1048–1131) в «Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида» (Шарх ма ашкала мин мусадарат китаб Уклидис) и Насир ад-Дин ат-Туси в «Трактате, исцеляющем сомнение по поводу параллельных линий» (Рисала аш-шафийа ʽан аш-шакк фи-л-хутут ал-мутавазийа) критикуют ал-Хайсама за введение движения в геометрию. Как объясняет свой выбор источника ат-Туси, ему не удалось найти ни одного экземпляра «Комментария» ал-Хайсама и он ознакомился с его содержанием только по «книге» «Разрешение сомнений» [18, с.486]. (Этим отступлением я уточнила и сказанное в этом же отношении в статье [5, с.124])

Альтернативные определения прямой в комментарии Ибн ал-Хайсама. Этот трактат, за исключением фрагмента с доказательством автора пятого постулата, еще не изучался. Поэтому в контексте определения прямой будут уместны несколько фрагментов, в которых ал-Хайсам приводит и обсуждает другие известные ему определения прямой.

Первое определение: «Прямая линия была определена как кратчайшая линия, проведенная между двумя точками, точнее, любыми двумя точками. Между ними возможно провести множество дугообразных (мукаввас, букв. «изогнутых по дуге». – *И.Л.*) и кривых линий, но только одну прямую линию. Оказывается, что эта прямая линия – [линия], проходящая (мумтаддан, букв. «тянущаяся». – *И.Л.*) по кратчайшему из протяжений (масафат, букв. «расстояний, дистанций». – *И.Л.*), по которым тянутся все линии, проведенные между двумя точками. Поэтому прямая линия и была определена этой линией» [17, л.155].

Это аксиоматическое по характеру определение прямой, устанавливающее связь прямолинейности и расстояния, без сомнения, почерпнуто из введенного Архимедом в трактате «О шаре и цилиндре» «допущения» (по сути постулата): из всех линий, имеющих одни и те же концы, прямая будет наименьшей. Заметим, что ат-Туси в своих комментариях к этому сочинению Архимеда усомнился в том, что это допущение не нуждается в обосновании, и представил свою попытку его доказать.

Второе определение: «Прямая линия была определена еще как та, части которой совмещаются друг с другом для всех (букв. «при всем разнообразии из». – *И.Л.*) их местоположений (в тексте «ее мест». – *И.Л.*). Это означает, что линия – прямая, если выделить из нее часть, потом наложить эту часть на остаток линии, и он совместится с ней, [с этой частью]; и еще, если перевернуть (фатала) эту часть, затем наложить на остаток линии, и она совместится с ним. Иначе [обстоит дело в случае] дугообразной линии, поскольку [для] линии любого вида из видов дугообразных, если выделить из нее часть, потом наложить на остаток дугообразной линии, [остаток], возможно, и совместится с ней, [с этой частью]. Но [остаток линии и ее часть] займут одно [и то же] из ее положений, если они выпуклы в одну сторону и[ли] вогнуты в одну сторону. Тогда, если перевернуть [эту] часть, чтобы ее выпуклость оказалась [направлена] в сторону, противоположную выпуклости остатка линии, то в этом случае эта часть не совместится с остатком линии» [17, л.155–155 об.].

Здесь утверждается другое свойство прямой. Она рассматривается как гомеомеричная (подобочастная) линия – такая, у которой, по Аристотелю, любые части подобны по своим свойствам друг другу и целому, другими словами, качественно однородны (гомогенны). Это и обуславливает возможность их совмещения. Этим свойством также обладает, например, окружность. Именно поэтому ал-Хайсам, чтобы обособить прямую, добавил еще и второе условие (если перевернуть часть линии, затем наложить ее на остаток линии и она совместится с ним), которое, как он показывает, не выполняется для «дугообразных» (круговых) линий.

И последнее, третье, определение: «Прямая линия была определена как та, положение которой не изменится, [если] зафиксировать ее концы и повернуть, то есть при вращении. Если [ее] повернуть, то [она] будет вращаться, подобно тому, как изменяется [при вращении] ось (михвар). Это означает, что любая дугообразная линия, если зафиксировать ее концы и таким образом вращать, изменит свое положение, то есть при этом перемещении направление ее выпуклости станет отличным от направления, в котором она была. Я особо выделяю определения прямой линии и завершаю их [определением], что прямая линия – та, которая, если зафиксировать на ней две точки и вращать, не изменит свое положение. С помощью этого определения избавится прямая линия от всего общего, что можно предположить о ней» [17, л.155 об.].

Ибн ал-Хайсам, однако, оригинален лишь относительно и только в своих трактовках. Все же определения прямой, представленные им, приведены, например, в комментарии к первой книге «Начал» неоплатоника Прокла (V в.): и что ни одна часть прямой не лежит ни на более низкой плоскости, ни на более высокой плоскости; и что все части прямой совмещаются подобным образом со всеми другими частями; и что это есть линия, остающаяся неподвижной, если ее концы фиксированы. Более подробно Прокл останавливается на определении Платона (заметим, что ему принадлежит обстоятельный комментарий к «Пармениду» Платона, в котором, как уже говорилось, дается это определение прямой), а также на гомеомеричности (в греческом тексте комментария используется именно этот термин) линий. В последнем случае Прокл указывает, что это свойство характерно не только для прямой, но также для окружности и еще цилиндрической спирали. Однако, в отличие от Ибн ал-Хайсама, он не дифференцирует гомеомеричность прямой от гомеомеричности двух других линий, то есть не характеризует это свойство прямой с помощью двух условий. Более того, все эти «определения» прямой Прокл рассматривает как ее свойства, следующие и из того, что прямая расположена равно по отношению к точкам на ней (то есть из определения Евклида), и из того, что «эта линия простая и проявляет себя как единственное кратчайшее расстояние между двумя точками» [19, с.84–90].

Определения прямой в комментариях ан-Найризи и Симпликия. О доступности средневековым арабским ученым комментария Прокла к «Началам» Евклида ничего не известно. Поэтому более вероятный источник представленных выше рассуждений Ибн ал-Хайсама – это комментарий к «Началам» Евклида Абу-л-ʿАббаса ан-Найризи (ум. ок.922), составленный на основании перевода ал-Хаджаджа, но значительно переработанного автором. В комментарии приведены обширные цитаты из несохранившегося греческого текста комментария Симпликия (VI в.) к введениям (определениям, аксиомам и постулатам первой книги) «Начал» Евклида, который в свою очередь во многом основывается опять-таки на комментарии Прокла.

В двух сохранившихся рукописях (Leiden Or.399, Qum (Iran) Kitabhana-i ʿUmumi 6526) этого комментария ан-Найризи, содержащих только первые четыре и пять книг соответственно, начало фрагментарно. В частности, отсутствуют первые три определения первой книги, в том числе и определение прямой, которое, несмотря на лакуны, можно восстановить по соответствующему комментарию Симпликия, приведенному ан-Найризи:

«Сказал Симпликий: Евклид, [в] своих словах «равна тому, что между любыми двумя точками» подразумевал расстояние, которое есть между двумя точками, являющимися концами. Тогда, если мы предположим две точки, являющиеся концами линии, ибо он определил в этом месте только ограниченную линию, и примем расстояние, которое между ними двумя, за линию, даже если и нет между ними двумя линии, то будет это расстояние равно прямой линии, у которой эти две точки будут концами. Если мы измеряем расстояния, которые между одними точками и другими, линией, то измеряем кратчайшей из линий, и это – кратчайшая из протяженностей (масафат), которая между различными вещами, и мы не измеряем их линией, которая обладает кривизной (даваран). Поэтому Архимед определил ее, говоря: «Прямая линия – кратчайшая из линий, концы которых являются ее концами». Он подразумевал, что это – кратчайшая линия, соединяющая две точки. И измерение производится только с помощью прямой линии, поскольку только она одна определена. И это так, потому что нет среди линий, равной ей, не найдется среди других линий ни одной определенной, ибо мы можем соединять точку с точкой с помощью линий кривых, дугообразных и составных, некоторые из них больше, чем другие. И это может продолжаться бесконечно, всегда» [20, с.1–2].

Также сохранился предшествующий этому комментарию Симпликия комментарий самого ан-Найризи: «Он, [Евклид], как будто имел в виду представление (маʽнан), которое высказал Архимед: “она, [прямая линия,] – кратчайшее расстояние, соединяющее две точки”» [20, с.1].

При реконструкции определения прямой могла бы оказаться полезной латинская версия трактата ан-Найризи, приписываемая Герарду Кремонскому (1114–1187), содержащая десять первых книг «Начал» и выполненная с неустановленной до сих пор арабской рукописи сочинения ан-Найризи. Однако латинский перевод определения прямой Евклида в передаче ан-Найризи не совсем удачен, что объясняется свойственными средневековью когнитивным трудностям перевода геометрического текста с арабского языка, и сам нуждается в доработке: «Линия прямая – та, которая расположена равно, что есть между любыми двумя точками, находящимися на ней» («Linea recta est, que est posita super equale, quod est inter omnia duo puncta cadentia super ipsam») [21, с.5].

В таком случае, исходя только из тех двух комментариев Симпликия и ан-Найризи, можно предположить, что в трактате ан-Найризи определение прямой Евклида было представлено в следующем виде: линия прямая – та, которая равна тому, что между любыми двумя точками, находящимися на ней. В такой формулировке можно усмотреть связь понятия прямой с понятием расстояния, о чем и говорится в приведенных комментариях ан-Найризи и Симпликия, а также свойство прямой быть гомеомеричной.

Можно было бы предположить, что такой была формулировка этого определения и в арабском переводе «Начал» ал-Хаджаджа, из которого, как уже говорилось, исходил ан-Найризи. Однако это не так, поскольку, во-первых, ан-Найризи, как известно, редактировал текст ал-Хаджаджа. А во-вторых, в выполненной в XII в. на основании этого же перевода латинской версии «Начал» Евклида, приписываемой Аделарду из Бата, определение прямой несколько неожиданное: «Прямая линия есть протяженность от одной точки до другой, принимающая их обеих в своих границах» («Linea recta est ab uno puncto ad alium extensio, in extremitates suas utrumque eorum recipiens») [22, с.31]. Эта формулировка, как и формулировка Герарда Кремонского, есть следствие тех же когнитивных трудностей перевода, возникавших в процессе трансмиссии арабских «Начал» на латинский Запад. Так, арабский глагол «кабала» (имеется в виду III порода глагола «кабила»), в отличие от других однокоренных с ним глаголов (некоторых других пород глагола «кабила»), означает не только «сопоставлять» («противопоставлять») и «быть напротив», но также и «принимать», «встречать». Поэтому, вполне вероятно, что Аделард перевел как «recipiens» («принимающая») не арабское причастие, образованное от этого глагола, а с учетом особенностей арабского языка фразу, в которой используется этот глагол, подобную фразе «которая противопоставляет». Если бы автор этого латинского перевода предпринял его столетия два спустя, то, приведя свою формулировку в соответствие со всеми доступными к тому времени арабскими версиями определения прямой и их трактовками, он, возможно, представил бы ее в следующем виде: «Прямая линия есть [кратчайшая] протяженность от одной точки до другой, [противопоставляющая] их обеих свои[м] граница[м]».

О связи прямолинейности и расстояния говорится и в трактовке определения прямой Прокла (весьма вероятного источника рассуждений Симпликия): «Евклид дает определение прямой линии… ясно давая понять с его помощью, что только прямая линия покрывает расстояние, равное тому, что между точками, которые лежат на ней. Ибо интервал между любыми двумя точками есть длина линии, которую эти две точки определяют, и это то, что подразумевается под «расположена равно по отношению к точкам на ней» [19, с.88].

Симпликий рассматривает и другие «определения» прямой (см.: Приложение 2.1). Например, определение Платона:

«Что касается Платона, то он определил прямую линию, говоря: «линия прямая – та, середина (васат) которой скрывает два ее конца», ибо, если ты [зафиксируешь глаз] в одном из ее двух концов и захочешь увидеть другой конец, а эта точка станет твоим наблюдательным пунктом (манзар), то окажется, что то, что в середине, скроет конец, который [за ней]. Что касается этого определения, оно обуславливает [другое] направление выводов (дала'ил), поскольку не потому, что середина скрывает два конца, прямая линия будет прямой, а [наоборот], поскольку она прямая, будет ее середина скрывать два ее конца. А это потому, что взгляд исходит прямо[линейно]» [20, с.3].

Необоснованно вводя оптику в геометрию, Симпликий критикует это определение за неверную причинно-следственную последовательность выводов. Исходя из оптического постулата Евклида, он утверждает, что именно из прямолинейности траектории распространения зрительного луча следует, что «середина скрывает концы», а не наоборот. При этом, «зафиксировав глаз» в одном из концов отрезка, как предлагает Симпликий, невозможно увидеть не только второй его конец, но и его середину и все остальные точки, лежащие между этими двумя концами, они все будут закрыты первым концом, совпадут с ним.

В определении прямой с указанием ее свойства гомеомеричности Симпликий, в отличие от ал-Хайсама и Прокла, объединяет два условия, характерные для этого случая, утверждая, что прямая – та, все части которой совмещаются друг с другом «со всех сторон» (соответственные рассуждения приведены в Приложении 2.1). Именно так определял прямую Герон Александрийский (I в.?), как и Симпликий, многократно цитируемый в комментарии ан-Найризи. К Герону восходят, возможно, и рассуждения Симпликия по поводу свойства прямой линии быть неподвижной, если ее концы неподвижны, поскольку оба ассоциируют концы с полюсами, а прямую с осью вращения [23, с.17–19].

Определение прямой ал-Абхари и предложение XI.1 «Начал». Возвращаясь к ал-Абхари, обратим внимание на то, что в его определении прямой (прямая линия – это такая линия, что, если на ней предположить любое количество точек, то будут они все в одном направлении, то есть не будут некоторые из них выше, некоторые из них ниже) последнюю фразу можно перевести немного иначе: «не будет часть из них выше, а часть из них ниже». Учитывая контекст, фразу «будут они все в одном направлении» можно интерпретировать как «будут они все на одном уровне» (в контексте источника этого определения ал-Абхари – трактовки ал-Хайсама – такой перевод некорректен, поскольку в ней указывается еще и то, что «не будут некоторые из них левей, а некоторые из них правей»). В таком случае формулировку определения прямой ал-Абхари можно переписать в следующем виде: «прямая линия – это такая линия, что, если на ней предположить любое количество точек, то будут они все на одном уровне, то есть не будет часть из них выше, часть из них ниже». Такое определение, по существу, равносильно предложению XI.1 «Начал» Евклида: «У прямой линии какая-нибудь часть не может быть в расположенной внизу плоскости, а какая-нибудь другая часть – в более высокой»

[24, с.11]. Для сравнения приведем формулировку Псевдо-Туси: «Невозможно, чтобы одна прямая линия находилась частью на одной плоскости, частью на [плоскости, расположенной] выше (самк)» [14, с.327]. Вызывает недоумение то, что ал-Абхари проигнорировал фактически совпадение определения и предложения, тем самым изменив поставленной в названии своего сочинения цели – улучшить аксиоматико-дедуктивное построение Евклида.

Доказательство ал-Абхари этого предложения следующее:

«Любая прямая линия находится на одной плоскости. В противном случае пусть ABC – прямая и ее [часть] (букв. “из нее”) AB находится на одной плоскости, а BC – на другой плоскости. Продолжим AB по прямой на плоскости, в которой она находится, до [точки] D. Тогда две линии CB и DB будут [продолжаться] по прямой (истикама) AB. Это нелепо. Следовательно, любая прямая линия находится на одной плоскости. И это то, что мы хотели доказать» [12, л.89 об.].

В этом доказательстве, как и в подобных доказательствах, например, Ибн Сины, ат-Туси и Псевдо-Туси, отсутствует объяснение полученного противоречия, которое есть в греческом тексте: «...это невозможно, поскольку, если мы из центра B раствором AB опишем круг, то диаметры [ABC и ABD] будут отсекать неравные обводы круга» [24, с.11–12]. В таком «полном» виде доказательство было подвергнуто критике Т.Л.Хизом, который небезосновательно считает его ранней интерполяцией в текст «Начал». В частности, он указал, что утверждение о том, что окружность с центром в B должна пересечь AB, BC и BD, возможно только, если AD и BC лежат в одной плоскости, а это утверждается только в последующем предложении XI.2 (о том, что если две прямые пересекаются, то они находятся на одной плоскости) [25, т.3, с.272–274].

Вероятно, что и в арабских редакциях эти аргументы были опущены по подобным соображениям. Я не располагаю соответственным фрагментом версии Исхака–Сабита, чтобы установить, восходят ли к ней эти «улучшенные» доказательства. Однако такое же доказательство могло быть в несохранившемся арабском переводе «Начал» ал-Хаджаджа, поскольку в выполненной, как уже говорилось, на его основании латинской версии «Начал» Евклида, приписываемой Аделарду из Бата, эти рассуждения отсутствуют [22, с.300].

Об определении плоскости. Обстоятельства, обусловившие арабские версии определения этого фундаментального геометрического понятия, в том числе и в формулировке ал-Абхари, аналогичны всем тем, что были изложены в контексте определения прямой. Напомним формулировку Евклида: плоская поверхность есть та, которая равно расположена по отношению к прямым на ней. Средневековые арабские ученые определяли плоскость, как и прямую линию, с помощью противопоставления, но в данном случае линий, и в полном соответствии со своим определением прямой линии.

Так, в версии «Начал» Исхака–Сабита: «Плоская поверхность (ал-басит ал-муставийй) – та, которая расположена на противопоставлении любых прямых линий, находящихся на ней, друг другу» [16, л.1 об.].

В редакции «Начал» Ибн Сины: «Плоская (ал-мусаттах) поверхность (ал-басит) – это [поверхность,] простирающаяся (мабсут) на противопоставлении линий, которые предположены на ней, двум ее граничным линиям, противопоставленным на ней [друг другу]; и это есть плоскость (сатх)» [15, с.17].

Согласно ат-Туси, «плоская поверхность (ас-сатх ав ал-басит ал-муставийй) – та [поверхность], положение которой таково, что любые линии, предположенные на ней, противопоставляются друг другу» [13, л.2].

Определение Псевдо-Туси следующее: «Поверхность (ал-сатх) плоская (ал-муставин), если прямые линии, предположенные или которые можно как угодно предполагать на ней, будут противопоставлены друг другу (или “будут друг напротив друга”. – *И.Л.*)» [14, с.4].

Аналогично своему определению прямой определяет плоскость и ал-Абхари: «Плоская поверхность (ал-басит ал-мусаттах) – это такая [поверхность, что], если на ней предположить множество (касра) линий, будут они все на одном уровне (самт), то есть не будут некоторые из них выше, некоторые из них ниже» [12, л.1 об.].

Такое определение плоскости, как и свое определение прямой линии, ал-Абхари также, по-видимому, позаимствовал (в данном случае не совсем дословно и с использованием другого термина для «плоскости») из комментария Ибн ал-Хайсама, точнее, из его пояснений к определению плоскости с помощью «противопоставления»:

«Что касается плоской поверхности (ас-сатх ал-мусаттах), это – та, которую Евклид назвал плоскостью (ал-басит ал-муставийй). Мы определим ее с помощью определения, аналогичного определению прямой линии. Вот его, [Евклида], высказывание: “плоскость – та, [которая] расположена (ал-мауду‘) на противопоставлении друг другу любых прямых линий, находящихся на ней”. Это означает, что плоская поверхность (ал-басит ал-муставийй) – [это такая поверхность, что], если на ней провести множество линий, не смогут некоторые из них быть выше и некоторые из них ниже, а будут они все на одном уровне (самт)» [17, л.155 об.–156].

В обоих случаях (и определения прямой и определения плоскости) выбор ал-Абхари именно таких почерпнутых из объяснений ал-Хайсама формулировок объясняется, вполне вероятно, следующим: с одной стороны, они наглядны, следовательно, более понятны по сравнению с тем, что собственно они поясняют; с другой стороны, следование структуре «Начал» Евклида не позволило ал-Абхари включить в свое «Улучшение» и определение и его толкование, что допускается в сочинениях иного жанра, в частности в комментарии ал-Хайсама.

В моем переводе определения плоскости ал-Абхари и соответствующей ему трактовки ал-Хайсама замена термина «направление», буквального перевода арабского слова «самт», на термин «уровень» (в отличие от моего перевода определения прямой ал-Абхари и его трактовки ал-Хайсама) объясняется и обосновывается тем, что в тексте трактовки не говорится, что прямые не могут быть левей или правей, как в случае точек в трактовке определения прямой Ибн ал-Хайсама. Более того, такая замена (интерпретация арабского слова «самт») даже необходима, поскольку, если, например, на боковой поверхности прямого кругового цилиндра взять некоторое множество прямых, параллельных его образующей, то эти все прямые будут «в одном направлении», но не на плоскости, а на цилиндрической поверхности.

Обратим внимание, что в определениях плоскости ал-Абхари, ат-Туси и Ибн Сины говорится о линиях. В версиях Исхака–Сабита, ал-Хайсама и Псевдо-Туси речь идет о прямых, что, вероятно, представляет собой результат передачи определения плоскости собственно Евклида, в котором рассматриваются только прямые линии. Первое, возможно, объясняется тем, что арабоязычные математики, говоря о прямых линиях и плоской поверхности, часто опускали слова «прямой» или «плоский», полагаясь на очевидность или контекст. Если же исходить из трактовки ал-Хайсама определения плоскости, согласно которой, под «противопоставлением линий» подразумевается то, что все линии, находящиеся на плоскости, должны быть на одном уровне, а этому условию вполне соответствует и множество различных плоских кривых, то и во всех определениях плоскости, в которых утверждается противопоставление линий, должно говориться обо всех линиях (как, например, в определении ат-Туси). Но из всех линий Евклид в «Началах» определил только прямые и окружности, причем определение плоскости предшествует определению окружности, поэтому, в тех определениях, в которых говорится о линиях, по-видимому, подразумеваются все-таки прямые линии, тем более, что в определении плоскости, приведенном самим ал-Хайсамом, в отличие от его трактовки, речь идет о прямых.

Ибн ал-Хайсам приводит и два альтернативных определения плоскости. Первое представляет собой еще одно «допущение» Архимеда из трактата «О шаре и цилиндре», в котором утверждается, что плоскость – наименьшая из поверхностей с общей границей, расположенной на плоскости; во втором определении говорится о свойстве плоскости быть, словами Симпликия, гомеомеричной «со всех сторон»:

«Плоскость была определена как наименьшая из поверхностей, граница которых одна [и та же]. Это означает, что плоскость ограничена. Возможно восставить на ее границе, если она имеет одну границу, то есть [граница] – простая [линия], или на ее границах, если ее границ больше, чем одна, выпуклые и вогнутые, простые и составные поверхности. Но если на границах плоскости таким образом восставлено множество поверхностей, или восставлено на ее границе, если она обладает одной границей, [то] будет плоскость, меньше их [по] площади (мисаха).

Плоскость была определена также как та, части которой совмещаются для всех их местоположений. Это означает, что поверхность – плоская, если выделить из нее часть, потом наложить эту часть на остаток поверхности, [и эта часть] совместится с ним; и далее, если перевернуть (калаба) эту часть и также наложить на остаток поверхности, и она совместится с ним. Не так [в случае] выпуклой и[ли] вогнутой поверхности» [17, л.155 об.–156].

Как и в случае прямой, эти рассуждения Ибн ал-Хайсама, вероятно, восходят к Найризи–Симпликию–Проклу. Очевидное желание ан-Найризи и Симпликия следовать при определении плоскости не только структуре и терминологии определения прямой (в моей реконструкции: линия прямая – та, которая равна тому, что между любыми двумя точками, находящимися на ней), но и его трактовке с помощью расстояния, привело их к несообразному представлению плоскости (но при этом, заметим, подтверждающему эту реконструкцию) и его не менее озадачивающему толкованию.

Так, ан-Найризи передает определение плоскости Евклида следующим образом: «Сказал Евклид: "Плоская поверхность (ал-басит ал-масих) – та, [которая] расположена (ал-мауду‘) на расстоянии (бу‘д), равном тому, что есть между прямыми линиями, находящимися на ней"» [20, с.8]. Возникает вопрос: что подразумевается здесь под некорректным в контексте определения плоскости термином «расстояние»? Ан-Найризи, осознавая это, сразу же пытается пояснить: «Как будто он, [Евклид,] имел в виду наименьшую поверхность (басит), соединяющую две прямые линии». Что же тогда понимается под «наименьшей поверхностью, соединяющей две прямые линии»? Может быть, по аналогии с терминологией определения II.1 «Начал» Евклида, речь идет о площади параллелограмма или прямоугольника, заключенного между этими двумя прямыми линиями, то есть построенного на них как на сторонах?

Ответ, видимо, должен был содержать помещенный следом (в статье в Приложении 2.2) комментарий Симпликия, который, однако, не столько разрешает проблему, сколько ставит дополнительные вопросы. Так, согласно Симпликию, расстояние плоскости равно кратчайшему расстоянию между отрезками, которые ее охватывают, независимо от того образуют ли эти отрезки (число которых не оговаривается) параллелограмм или нет. Означает ли это, что в случае параллелограмма, ограничивающего плоскость, речь идет о наименьшем из двух общих перпендикуляров к соответственным парам сторон этого параллелограмма? Если нет параллелограмма, а есть многоугольник, «расстояния» между сторонами которого различны, то, как утверждает Симпликий, расстояние плоскости и в этом случае равно кратчайшему из расстояний. Но что здесь мыслится под «кратчайшим расстоянием» между сторонами многоугольника? Чем все-таки обусловлено появление параллелограмма? Как соотносятся наименьшая по площади поверхность, параллелограмм, расстояние плоскости, кратчайшее расстояние? Вопросов возникает множество, однако, комментарий Симпликия нисколько не проясняет, а только запутывает ситуацию, обусловленную введением понятия расстояния в определение плоскости.

Во всяком случае, Прокл в своей трактовке определения плоскости Евклида (которая, возможно, и предопределила эти рассуждения Симпликия и ан-Найризи) обошелся без расстояния: плоскость – та, которая занимает место, равное тому, что между двумя прямыми линиями, лежащими на ней [19, с.95].

Отметим, что в процитированных арабских версиях определения плоскости их авторы, очевидно, не стремились к единообразию при подборе термина для обозначения этого вида поверхности. «Поверхность» у них – «басит» (от араб. глагола «басата», означающего «расстилать, протягивать») или «сатх» (от араб. глагола «сатаха», означающего «расстилать, выравнивать»). «Плоский» (здесь прилагательное мужского рода, поскольку в арабском языке «поверхность» – мужского рода) – это или «муставин», то есть «ровный, плоский»; или «мусаттах» – «ровный, плоский» (а также «площадь, поверхность, площадка»); или «масих», то есть «гладкий, стертый, смазанный»; или «муставийй» (относительное прилагательное от «муставан» – «уровень»). Вот из этих двух множеств синонимов и были образованы многочисленные арабские варианты не только для «плоской поверхности», но и для «плоскости». Так, у ан-Найризи это – соответственно «мусаттах» и «басит масих», у ал-Хайсама – «басит муставийй» и «сатх мусаттах», у Ибн Сины – «сатх» и «басит мусуттах», у ат-Туси – «муставан» и «сатх муставин». Однако, в последующих фрагментах рассматриваемых сочинений (например, в определениях параллельных прямых), не говоря уже о других трактатах, эти ученые не всегда придерживались введенных каждым терминов для плоскости и обращались к их синонимам.

Определение параллельных линий. Несмотря на то, что представленные в рассматриваемых сочинениях определения параллельных линий не расходятся с определением Евклида (параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той ни с другой стороны между собой не встречаются), приведем их в хронологическом порядке:

определение в версии Исхака–Сабита: «Параллельные прямые линии – те, которые находятся на одной плоской поверхности (басит муставийй), и если будут продолжены в обе стороны продолжением неограниченным, не встретятся ни с одной из двух [сторон]» [16, л.2];

определение ан-Найризи: «Сказал Евклид: “параллельные прямые линии – те, что находятся на одной плоскости (сатх), и если будут продолжены в обе стороны неограниченно, не встретятся, ни с одной из двух [сторон]”» [20, с.35];

определение Ибн Сины: «Две параллельные линии – те, которые, если будут продолжены их концы в обе стороны, даже если бы [продолжались] неограниченно, не встретятся» [15, с.18];

определение Ибн ал-Хайсама: «Затем сказал Евклид: “параллельные прямые линии – те, которые находятся на одной плоской поверхности (басит муставийй), и если будут продолжены в обе стороны, продолжение их неограниченно, не встретятся ни с одной из двух [сторон]”» [17, л.162];

определение ат-Туси: «Параллельные [линии] – это прямые линии, находящиеся на одной плоской поверхности (сатх муставин), которые не встретятся, даже если будут продолжены в обе стороны неограниченно» [13, л.3];

определение Псевдо-Туси: «Любые две прямые линии, находящиеся на одной плоской поверхности (сатх муставин), если будут продолжены в обе стороны неограниченно, то не минуют того, чтобы либо не встретиться, либо встретиться, тогда первые две называют параллельными» [14, с.4].

Аналогичное определение параллельных приводит и ал-Абхари, но добавляет еще и альтернативное определение этих линий как эквидистантных – утверждение, фактически эквивалентное пятому постулату о параллельных: «Две параллельные линии – те, которые находятся на одной плоскости (басит), и если бы были продолжены [неограниченно] (это условие отсутствует здесь, скорее всего, по вине переписчика. – *И.Л.*) прямолинейно в обе стороны, никогда бы не встретились. Говорится [также]: две параллельные линии – это две линии, которые находятся на одной плоскости, и если бы были продолжены по прямой неограниченно, расстояние между ними было бы всегда одним [и тем же] (букв. "постоянно одно". – *И.Л.*). Расстояние (буʽд) – кратчайшая линия, соединяющая их» [12, л.2].

В определении параллельных как эквидистантных ал-Абхари вряд ли основывался исключительно на комментарии ал-Хайсама. Понятие эквидистантных линий появляется у многих средневековых арабских математиков, но не в определении параллельных прямых, а в теории параллельных (и у Ибн Сины, и ат-Туси, и Псевдо-Туси и др.). Так, Ибн ал-Хайсам доказывает с помощью введенного им «одного простого» движения перпендикуляра по прямой, на которой он восставлен (другими словами, с помощью параллельного переноса), существование равноотстоящих прямых (подробно см.: [27, с.52–53; 28]). В конце этого доказательства он заключает:

«Таким образом (то есть движением перпендикуляра. – *И.Л.*) можно получить две [прямые] линии, расположенные на одной плоской поверхности, и при этом, если они будут продолжены в обе стороны продолжением неограниченным, они не встретятся ни с одной из двух сторон, так как, если расстояния между этими двумя линиями с любой стороны всегда будут расстояниями равными при устремлении их обеих в каждую из двух сторон, то невозможно, чтобы в каком-то месте они встретились. Тогда две прямые параллельные линии существуют и таким образом их можно представить» [17, л.164–164 об.].

По свидетельству Прокла, определение параллельных как эквидистантных линий дал еще Посидоний (II–I вв. до н.э.): «Параллельные линии – линии, находящиеся на одной плоскости, которые ни сходятся, ни расходятся, но имеют равными все перпендикуляры, которые проведены к точкам одной из них из точек на другой» [19, с.138]

В комментарии ан-Найризи, наиболее вероятном источнике сведений историко-математического и методологического характера не только для Ибн ал-Хайсама, но и других средневековых арабских и латинских математиков, после определения параллельных по Евклиду (см. выше) приводится обширный комментарий Симпликия, начинающийся с определения параллельных как равноотстоящих, близкого определению Посидония в передаче Прокла (полностью комментарий Симпликия к определению параллельных приведен в Приложении 2.3):

«Сказал Симпликий: Эти линии называются параллельными, поскольку они сохраняют расстояние, которое между ними, или, [другими словами,] словно в своем положении они находятся постоянно в одном [и том же] состоянии относительно расстояния, так, что не встречаются и не образуют одной линии, не отдаляются одна от другой на большее расстояние и не расходятся, и не различаются большим различием» [20, с.35].

Фразу Симпликия «эти линии называются параллельными, поскольку они сохраняют расстояние» можно понять, обратившись к этимологии греческого слова «παράλληλος», означающего «рядом друг с другом, бок о бок» (образовано из «παρά» – «рядом» и «ἀλλήλους» – «друг другу»). Соответствующий арабский термин для параллельных линий – «мутавазийан» (дв.ч.) – представляет собой буквальный перевод этого греческого термина и означает «идущие бок о бок»

Далее на примере двух скрещивающихся прямых, лежащих в параллельных плоскостях, Симпликий показывает, что отсутствие пересечения свойственно не только параллельным прямым, и заключает, что это обуславливает необходимость того, чтобы в определении параллельных утверждалось или их нахождение в одной плоскости (что, например, упустил в своем определении параллельных Ибн Сина), или сохранение расстояния между ними.

Он рассматривает определение параллельных как эквидистантных линий «Наллиса», которого Т.Л.Хиз идентифицирует как Посидония [25, т.1, с.190], несмотря на то, что это определение отличается от определения Посидония, процитированного Проклом: «Действительно, они – такие линии, что если они обе будут продолжены продолжением неограниченным в обе стороны, будет расстояние между обеими, то есть перпендикуляр, который падает из любой из двух на другую, всегда равным, неизменным» [20, с.36].

Комментируя это, Симпликий утверждает, что такое определение не нуждается в упоминания перпендикуляра, достаточно указания, что расстояние между прямыми повсюду равно и неизменно, но, чтобы понять это, желательно сказать, что это расстояние – их общий перпендикуляр. У ал-Абхари в определении параллельных как эвидистантных это «желательное пояснение» отсутствует. Отсутствует оно и в рассматриваемом Симпликием определении философа Аганиса, предположительно, современника Посидония (см.: Приложение 2.3).

О бесконечном продолжении прямых. Говоря о неограниченном продолжении прямых в своих двух определениях параллельных, философ и логик ал-Абхари прибегает к конструкции условно-ирреального предложения, выражающего условно-ирреальное действие. В русском переводе это передается с помощью условного предложения с глаголами в сослагательном наклонении гипотетического значения: «если бы были продолжены неограниченно прямолинейно в обе стороны, никогда бы не встретились» и «если бы были продолжены по прямой неограниченно, расстояние между ними было бы всегда одним и тем же». Вполне допустимо, что этим ал-Абхари преднамеренно акцентировал фразу, в которой речь идет о возможности бесконечного продолжения прямых, что, помимо обращения в рамках геометрии Евклида с ее ограниченными прямыми и плоскостями к понятию потенциальной бесконечности, еще и противоречит космологии Аристотеля, согласно которой мир конечен и ограничен сферой неподвижных звезд, и его тезису о невозможности существования бесконечных чувственно воспринимаемых тел.

Аналогично поступил в своей формулировке определения параллельных и выдающийся философ и логик Ибн Сина, исходя, вероятно, из тех же соображений. В этой связи интересны его геометрические аргументы, опровергающие существование бесконечной протяженности, приведенные ат-Туси в небольшом метафизическом сочинении «О делении сущих». Ибн Сина допускает, что бесконечная протяженность возможна; тогда стороны, например, угла могут быть бесконечно продолжены; если стороны угла бесконечны, то и расстояние между ними также будет бесконечным; но это расстояние заключено между сторонами угла, а все, что охватывается двумя вещами, обладает первым и последним элементом; следовательно, это расстояние не бесконечно; итак, то, что мыслилось бесконечным, оказалось конечным, следовательно, бесконечная протяженность невозможна [26, с.30]. Заметим, что при этом угол оказывается в некотором смысле конечным геометрическим объектом, а такой вывод вполне мог быть использован арабскими учеными как обоснование правомерности сравнения углов (частично неограниченных геометрических объектов) методом наложения (применимым для ограниченных геометрических объектов), например, в доказательстве четвертого постулата Евклида о равенстве всех прямых углов.

На этом моменте – фразе из определения параллельных о бесконечном продолжении прямых – специально остановился в своем комментарии Ибн ал-Хайсам. Он подверг критике определение Евклида вследствие невозможности представить утверждаемое в нем бесконечное, «не достигающее конца» продолжение прямых и существование бесконечных прямых. Представить, как он утверждает, можно все только ограниченное (конечное), в том числе и линии. Здесь Ибн ал-Хайсам отвергает даже саму возможность вообразить, помыслить что-либо бесконечное (это отдельная тема для исследования, требующая более широкого контекста, привлечения не только комментария ал-Хайсама, но и других философских и математических сочинений средневековых арабских ученых).

В качестве решения этой проблемы он предлагает оригинальный метод, позволяющий, по его мнению, представить существование таких бесконечных прямых, в основании которого можно усмотреть аристотелевское понятие бесконечного от прибавления или экстенсивной бесконечности: необходимо взять отрезок и приставить к нему другой отрезок, сохраняя направление первого, при этом такой составленный отрезок существует, затем к свободному концу второго отрезка приставить в его направлении еще один отрезок и т.д.; такие же действия необходимо предпринять по отношению к другому концу первого отрезка. Тогда ал-Хайсам утверждает, что именно таким образом можно представить существование «ограниченной прямой», продолжающейся в обе стороны бесконечно, поскольку ее можно неограниченно продлевать в обе стороны другими присоединенными к ее концам «ограниченными прямыми» (этот фрагмент, как и доказательство Ибн ал-Хайсама пятого постулата, переведен на русский язык Б.А.Розенфельдом, см.: [27, с.49–50; 28]).

Симпликий в своих комментариях к определению параллельных (см.: Приложение 2.3), следуя схеме, подобной той, что применил Прокл, то есть, анализируя необходимость и сущность каждой фразы определения параллельных Евклида, также не оставил без внимания утверждаемое в нем бесконечное продолжение прямых, что, по его мнению, реализуется в воображении: «Что касается его высказывания «если будут продолжены продолжением постоянным неограниченно», то он говорил [об] этом, только как [о] воображаемом, чтобы не надлежало им обеим прекращение этого, чтобы их продолжение допускалось сферой неподвижных звезд...» [20, с.39].

Еще раз о доказательстве ал-Абхари пятого постулата. Как уже отмечалось, трактат «Улучшение Начал Евклида» ал-Абхари получил известность, благодаря помещенному в нем доказательству автора пятого постулата, которое впоследствии было воспроизведено ар-Руми в его комментарии к трактату ас-Самарканди «Предложения обоснования». Это доказательство было опубликовано и прокомментировано в русском переводе Б.А.Розенфельдом, турецком и французском переводах Х.Дильганом, выполненным по рукописям комментария ар-Руми (Российской национальной библиотеки (№133/3 и №241/2) и Стамбульского технического университета (4316/5075) соответственно). Однако оба ученых с какой-то непостижимой логикой ошибочно приписали это доказательство ас-Самарканди, несмотря на то, что оба исходили из рукописей комментария ар-Руми, в котором авторство ал-Абхари указано явно: «философ Асир ад-Дин ал-Абхари сказал...».

Ал-Абхари поместил свою попытку доказать пятый постулат между 28 и 29 предложениями первой книги «Начал». Такое расположение доказательства этого постулата, присущее всем известным мне обработкам «Начал» Евклида и комментариям к ним (в том числе и рассматриваемым в статье), логически обоснованно, о чем в явном виде говорится в комментарии Ибн ал-Хайсама: «В этом доказательстве следует пользоваться предложениями книги, в доказательстве которых не используется эта предпосылка... Эта предпосылка впервые используется в двадцать девятом предложении первой книги ["Начал"]. Следовательно, ее место в книге перед этим предложением. Если она не используется ни в одном из первых двадцати восьми предложений первой книги и уже сделана предложением книги, то в ее доказательстве допускается использование первых двадцати восьми предложений или некоторых из них» [17, л.170–170 об.].

В Приложении 3 представлен перевод доказательства ал-Абхари по дублинской рукописи и перевод соответствующего фрагмента комментария ар-Руми по рукописи Научной библиотеки им. Н.И.Лобачевского Казанского федерального университета (араб. № 97). Как показывает сравнение этих фрагментов, ар-Руми воспроизвел доказательство ал-Абхари без существенных изменений и комментариев, главным образом, сократив описания аналогичных построений и уточнив в нескольких местах предложения «Начал» Евклида, из которых следует то или иное заключение.

Таким образом, Б.А.Розенфельд представил в [27, с.101–104] именно доказательство ал-Абхари и там же исчерпывающе изложил его особенности, сводящиеся к следующему. Основные идеи этого доказательства восходят к Симпликию (VI в.), доказательство которого было кратко изложено ал-Ханафи в переписке с ат-Туси [27, с.24–25, 101; 29]. Так, подобно Симпликию, ал-Абхари начинает с доказательства леммы о том, что в угле можно провести бесконечно много «хорд» (прямых, пересекающих обе его стороны), являющихся основаниями равнобедренного треугольника и находящихся друг под другом. Далее он проводит доказательство постулата для трех случаев (когда секущая пересекает две данные прямые под прямым и острым углами, под острыми углами, под острым и тупым углами). При этом он полагается на утверждение, которое, по-видимому, считает следствием из леммы: под каждой точкой биссектрисы угла можно провести «хорду». Другими словами, исходит из утверждения, эквивалентного пятому постулату, тем самым совершая логическую ошибку *circulus in demonstrando*. А также неявно применяет еще и аксиому Паша (если прямая пересекает одну из сторон треугольника, то она должна пересечь и другую сторону его).

Приложение 1

ʽАлам ад-Дин Кайсар о построении круга, равного двум данным кругам [12, л.126 об.]: «Из полученного ʻАлам ад-Дином Кайсаром, да смилуется над ним Аллах. Мы хотим построить круг, равный двум данным кругам. Пусть AB, CD – диаметры двух данных кругов. Мы хотим построить круг, равный по площади (букв. «по плоскости») площадям (букв. «плоскостям») этих кругов. Проведем из точки B линию BE под прямым углом [к AB] и отложим ее, равной диаметру CD. Соединим AE. Я говорю, что AE – диаметр искомого круга. Доказательство этого. Если отношение квадрата [на] AB к квадрату [на] CD, то есть к квадрату [на] BE, как отношение круга, диаметр которого AB, к кругу, диаметр которого CB, то, если составим, будет [составленное] отношение квадратов [на] линиях AB, BE, то есть [отношение] квадрата [на] AE к квадрату [на] BE, как отношение двух кругов, диаметры которых линии AB, CD, к кругу, диаметр которого есть линия BE. Отношение квадрата [на] AE к квадрату [на] BE, как отношение круга, диаметр которого AE, к кругу, диаметр которого BE. Тогда отношение двух кругов, диаметры которых AB, CD, к кругу, диаметр которого BE, как отношение круга, диаметр которого AE, к кругу, диаметр которого BE. Тогда два круга, диаметры которых AB, CD, равны кругу, диаметр которого AE. И это то, что мы хотели доказать».

В доказательстве используется предложение XII.2 «Начал» Евклида (круги относятся друг к другу, как квадраты на их диаметрах), общая теория отношений, в частности предложение V.18 «Начал» (если величины пропорциональны «выделяемые», то они будут пропорциональны и «составленные», то есть, если $a/b = c/d$, то $(a+b)/b = (c+d)/d$), и предложение I.47 – теорема Пифагора.

В современных обозначениях обоснование этого построения можно записать следующим образом: $AB^2/CD^2 = AB^2/BE^2$ по построению; из предложения XII.2 следует, что $AB^2/BE^2 = S_{AB}/S_{CD}$ (S_{AB}, S_{CD} – площади кругов с соответственными диаметрами); далее, из предложения V.18 «Начал» и предложения I.47 следует, что $(AB^2+BE^2)/BE^2 = AE^2/BE^2 = (S_{AB} + S_{CD})/S_{CD} = (S_{AB} + +S_{CD})/S_{BE}$; с другой стороны, $AE^2/BE^2 = S_{AE}/S_{BE}$ по предложению XII.2; таким образом, $S_{AE}/S_{BE} = (S_{AB}+S_{CD})/S_{BE}$; следовательно, $S_{AB}+S_{CD}=S_{AE}$.

Приложение 2

1. Симпликий об определениях прямой:

«Другие определяли прямую линию, говоря, что она – та, которая исключительно упорядочена.

Другие определяли ее и говорили: “Линия прямая – та, все части которой таковы, что совмещаются, все ее части [и] со всех сторон”. Ибо, если и накладываются друг на друга части окружности, то их совмещение будет не с любой стороны, поскольку, если ты поместишь [одну] ее выпуклую часть на другую ее выпуклую часть, то они будут касаться (тамаса) друг друга только в одной точке, как касаются окружности, и не совместятся, а если ты поместишь вогнутую [часть] на вогнутую, то они будут соприкасаться (таламаса) друг с другом в двух точках и не совместятся.

Другие ее определяли, говоря, что линия прямая – та, которая, если неподвижны ее два конца, также неподвижна и не сдвинется (йантаккулу) со своего положения, подобно оси. Ибо [в случае] дугообразных линий, если их концы неподвижны, как два полюса, это не препятствует (букв. “удерживает”. – *И.Л.*) их движению (то есть вращению. – *И.Л.*) и перемещению (интакала) с места на место, подобно полукругу, охватывающему два полюса (в тексте “две точки”. – *И.Л.*). Что касается прямой линии, то, если мы представим ее движущейся (то есть вращающейся. – *И.Л.*) и два ее конца неподвижными (букв. “сохраняющимися”. – *И.Л.*), она не переместится со своего положения. Поэтому другие определяли ее, говоря: линия прямая – та, которая, если ее вращать вокруг двух концов, не переместится со своего положения. Что касается круга, то, если он вращается (букв. “двигается”. – *И.Л.*) вокруг одного из двух ее концов, и это – его центр, он не переместится со своего положения в другое, отличное от этого положение. Но если он будет вращаться (букв. “двигаться”. – *И.Л.*) вокруг двух точек, подобных двум полюсам, то, действительно, он переместится со своего положения.

Необходимо знать, что определение, с помощью которого Евклид определил прямую линию самое характерное и выдающееся (также “заслуживающее внимание”. – *И.Л.*) из всех определений, которыми определяют ее другие. Это потому, что некоторые из них получаются путем вывода, а некоторые из них получаются из сравнения одних линий с другими. Из всего этого нам становится ясно, что прямая линия – более простая и первичная по отношению к круговой [линии], поскольку [если] есть прямая линия, [то] совмещается [любая] ее часть с другой, [не]смотря на их местоположение, и это не происходит со всеми прочими линиями. Это потому, что прямая линия – плоская и такая единственная, линия же, отличная от прямой, – выпукла [и] вогнута одновременно. Прямая линия – ею определяют и ею измеряют, поскольку она кратчайшая их линий, концы которых есть ее концы. И нет другой линии, подобной ей» [19, с.3–6].

2. Симпликий об определениях плоскости:

«Что касается Евклида, то он выбрал из видов поверхности только один вид, как он поступил [и в случае] линий и их видов. И он выбрал из них плоскую поверхность (ал-басит ал-масих) и определил ее с той же точки зрения, с которой он определил прямую линию. Действительно, положение прямой линии среди линий подобно положению плоской поверхности (ал-басит ал-масих), то есть плоскости (ал-мусаттах), среди поверхностей. Расстояние плоскости (сатх, также «поверхность». – *И.Л.*) равно расстоянию, которое между прямыми линиями, которые ее охватывают. И это – ограниченное расстояние, которое является кратчайшим из расстояний. Более того, если не случится параллелограмм, но будет расстояние между линиями на ее разных частях различно, это утверждение о нем также будет верно. Так, если в какой-нибудь ее части взято кратчайшее расстояние, [которое между линиями, являющимися ее двумя границами, и даже если это расстояние] (это вставка из комментария Герарда Кремонского. – *И.Л.*) между ними обеими будет на одних ее частях больше и на других частях меньше, то поверхность (басит), которая между линиями, будет равна ему.

Другие определяли плоскую поверхность (ал-басит ал-мусаттах), говоря, что плоская поверхность – такая, что, если на нее поместить прямую линию, как угодно поместить на нее, она, [прямая линия,] совместится с ней. И также говорят, что это поверхность исключительно упорядочена. Другие определяли ее, говоря, что плоская поверхность (ал-басит ал-мусаттах) – та, на которой можно из любой точки к любой точке проводить прямую линию. Эти определения, все они, определяют [и] любую плоскую поверхность, [и] поверхность неплоскую, которую охватывают прямые линии. Ее же определение, которое имел в виду Евклид, – [то], когда, определяя ее, он говорил: “Она равна расстоянию, которое между прямыми линиями, охватывающими ее”. Ибо сферическая поверхность не охватывается прямыми линиями, и поверхности составные не охватываются только прямыми линиями» [19, с.8–10].

3. Симпликий об определениях параллельных:

«Сказал Симпликий: Эти линии называются параллельными, поскольку они сохраняют расстояние, которое между ними, или, [другими словами], будто в своем положении они находятся постоянно в одном [и том же] состоянии относительно расстояния, так, что не встречаются и не образуют одной линии, не отдаляются одна от другой на большее расстояние и не расходятся, и не различаются большим различием. Характеристикой этих линий не является только то, что они не встречаются, потому что возможно двум линиям не встретиться, если одна из них двух находится на плоскости, подобно линии AB, а другая – на [плоскости, расположенной] выше (самк), подобно линии GD. Ибо эти две линии, будучи постоянно продолжаемы в обе стороны, могут не встретиться, если две плоскости будут параллельны, даже если изначально эти две линии не были параллельны, поскольку расстояние, которое было однажды между ними двумя, не будет постоянно в одном [и том же] состоянии. Но если будет расстояние между ними двумя в одном [и том же] состоянии, то, действительно, они обе будут параллельны, даже если они находятся в двух плоскостях. И даже если они обе и не параллельны во всех отношениях (букв. “со всех их сторон”. – *И.Л.*), то между ними все-таки есть нечто от параллельности.

Поэтому Наллис (здесь, по мнению Т.Л.Хиза, имеется в виду Посидоний. – *И.Л.*) определил параллельные линии, говоря: “Действительно, они – такие линии, что если они обе будут продолжены продолжением неограниченным в обе стороны, будет расстояние между обеими, то есть перпендикуляр, который падает из любой из двух на другую (сахиб, букв. “компаньон, спутник, друг”. – *И.Л.*), всегда одинаковым (букв. “равным”. – *И.Л.*), неизменным (букв. “нет изменения в нем”)”. И эти линии еще были названы линиями параллельными по положению (то есть эквидистантными. – *И.Л.*)». И, может быть, кто-то (букв. “говорящий”. – *И.Л.*) скажет, что тот, кто определил параллельные линии этим определением, мог выдвинуть и затем использовал что-то, что нуждается в доказательстве, а именно, что расстояние, которое между двумя параллельными прямыми – это перпендикуляр к ним обеим, а это было доказано Евклидом в предложении двадцать восьмом первой книги “Начал”. В ответ на это он скажет: “Действительно, это определение не нуждается в упоминании перпендикуляра, напротив, достаточно того, что в нем говорится, [что] расстояние, которое между обеими, – равное. [Но] для пояснения этого желательно, чтобы говорилось: одна [и та же] линия – перпендикуляр к ним обеим".

Что касается философа Аганиса, то он отметил в определении параллельных прямых, что они находятся на одной плоскости, и сказал: "Линии параллельные – те, которые находятся на одной плоскости и, если они обе продолжаются продолжением постоянным [и] неограниченно в обе стороны, будет расстояние между ними всегда расстоянием одним [и тем же]". Возможно, он предполагал, что равенство расстояния между ними обеими – это причина, по которой не происходит встреча, если же будет [встреча], нет смысла [в термине] "один" в обеих речах. И, может быть, то, что было исключено в их определении, а именно, что "две линии на одной плоскости", само по себе необязательно, ибо, если будет "если расстояние между обеими – расстояние одно [и то же]", [то] не будет одна из них наклонена к другой (букв. "не будет для одной из них наклона к другой". – *И.Л.*), и обе, несомненно, будут на одной плоскости, то есть плоскости, получающейся (махрадж) на них обеих, хотя и будет одна их них расположена ниже, а другая расположена выше.

Что касается того, что определенное расстояние – это кратчайшая из линий, которые проведены между двумя различными (мутафаррикайни) [линиями], то это было сказано раньше. Это расстояние, если находится между (букв. "в". – *И.Л.*) двумя различными (мутафаррикатайни) точками, безусловно, есть прямая линия, которая проведена между ними двумя, так как прямая линия – кратчайшая из линий, границы которых одни [и те же], то есть которые проведены между двумя точками. Что касается расстояния, которое между точкой и линией или между точкой и плоскостью, то это – перпендикуляр, который выходит из нее, [точки], к ней, [плоскости], или линии, и это – кратчайшая из линий, которые проведены между точкой и плоскостью или линией. Что касается расстояния, которое между линией и линией, то, если они будут параллельными, это – расстояние одно [и то же], равное в любом их месте, кратчайшее из расстояний, которые между ними, и это – перпендикуляр к каждой из них в любом их месте. Но если они не будут параллельными, ибо кратчайшие из линий, которые проведены между ними, отличаются в зависимости от разнообразия точек, распределенных на них обеих, то это – линия как (мин тарики, букв. "путем, посредством". – *И.Л.*) [расстояние] из точки к линии: она – перпендикуляр к линии, к которой она проведена, но она не перпендикулярна линии, на которой предположена точка. Однако это утверждение, возможно, нуждается в разъяснении для [большей] геометрической убедительности.

Что касается его высказывания “если они обе будут продолжены в обе стороны”, то это необходимо, так как две прямые линии, которые встречаются с одной из двух сторон, не встречаются с другой, но будут отдаляться каждая из них от другой (сахиб) [еще] больше, и они не параллельные.

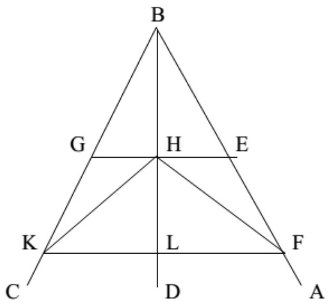
Что касается его высказывания “если будут продолжены продолжением постоянным неограниченно”, то он говорил [об] этом, только как [о] воображаемом (букв. “с точки зрения воображения”. – *И.Л.*), чтобы не надлежало им обеим прекращение этого, чтобы их продолжение допускалось сферой неподвижных звезд <...>. Если мы положим для их продолжения какую-нибудь границу, в которой они не встретятся, [то] мы рассуждаем о двух линиях: для них возможно, если они, чтобы встретиться, преодолеют эту границу, не встретиться. Это то, что обычно говорят об этом возражающему, но это – сокращение, краткое изложение того многого, что сделали в этом [отношении] другие» [19, с.35–39].

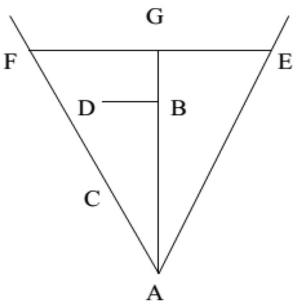
Примечание. Арабский текст последнего абзаца существенно отличается от соответственного фрагмента текста в латинском переводе Герарда Кремонского, который был выполнен, как уже отмечалось, с другой рукописи комментария ан-Найризи. Для сравнения и, возможно, облегчения понимания содержания этого арабского фрагмента, приведем его латинский аналог в русском переводе Е.А.Зайцева:

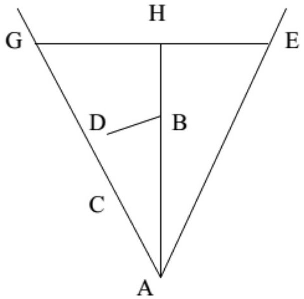
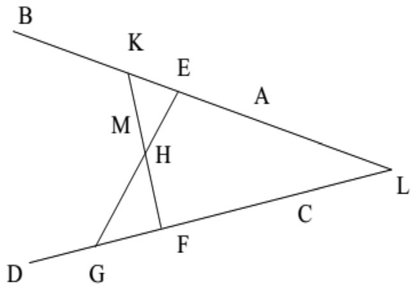
«Но то, что он сказал “их я продолжил неограниченно”, он [это] сказал, имея в виду только воображаемое [положение вещей]. Ведь надо, чтобы для каждой [из линий] – поскольку их продолжение будет в пространстве – существовало пространство, большее того, что между нами и сферой неподвижных звезд. Но будут верно и то и другое: и то, что мы положим их продолжение до некоторой границы, где они не пересекаются, и то, что мы выносим заключение о том, что они не пересекаются. И таков был обычай в тех вещах, и они положили это во избежание многословия и ради краткости понимания» [21, с.27].

Мой перевод на русский язык этих фрагментов выполнен по арабскому тексту, установленному Р.Арнценом с привлечением латинского перевода Герарда Кремонского, изданного П.Туммером [30]. В 2009 г. был опубликован английский перевод комментариев ан-Найризи к введениям «Начал» Евклида [31], сделанный А. Ло Белло на основании того же опубликованного арабского текста. Представленный здесь русский перевод в некоторых местах отличается от английского. Большая часть комментария Симпликия к определению параллельных, отсутствующая в [31] была опубликована в английском переводе А.Ло Бело в [32], однако, этим изданием я не располагаю.

Приложение 3

Асир ал-Дин ал-Абхари «Улучшение “Начал” Евклида» (Chester Beatty Library (Dublin), Ms Ar 3424, fols.10r–11r)	**Кази заде ар-Руми комментарий к трактату «Предложения обоснования» ас-Самарканди (рукопись Научной библиотеки им. Н.И.Лобачевского Казанского федерального университета №97, лл.19 об.–21)**
Исследование утверждения [о том], что если линия падает на две линии и с [одной] стороны образуются два внутренних угла, меньшие, чем два прямых, то они, [эти линии,] встретятся с этой стороны.	*Здесь место обещанного доказательства известного постулат* (курсивом здесь и далее выделены вставки ар-Руми в текст ал-Абхари. – *И.Л.*)
Предварим его доказательство предпосылкой. Вот она: угол B разделен пополам линией BH; тогда я говорю, что в нем можно провести бесконечно много хорд, [которые] находятся одна под другой и каждая из них есть основание равнобедренного треугольника.	*Философ Асир ад-Дин ал-Абхари сказал*: «Если угол ABC разделен линией BH пополам, то можно провести //л.20// в этом угле бесконечно много хорд так, что они находятся одна под другой и каждая из них есть основание равнобедренного треугольника».
Действительно, отложим BE, равную BG, и проведем EG [рис.1]. Тогда EB, BH равны [соответственно] GB, BH. Оба угла B равны. Поэтому оба угла //л. 10 об.// [H равны. Следовательно, BH – перпендикуляр к EG. Отложим BF, равную BK,][1] и проведем FK. Тогда линия FK не проходит через точку H. В противном случае два угла BHF, BHK были бы равны двум прямым. Но двум прямым уже равны [углы] BHE, BHG. Это нелепо. Она, [линия FK,] не пересекает линию EG. В противном случае две прямые линии охватывали бы одну плоскость. Это нелепо. Таким образом, можно провести бесконечно много хорд.	Действительно, отложим BE, равную BG, и проведем EG. Тогда EB, BH равны [соответственно] BG, BH. Оба угла B равны. Поэтому оба угла H равны. Следовательно, BH – перпендикуляр к EG. Отложим BF, равную BK, и проведем FK. Тогда линия FK не проходит через точку H. В противном случае два угла BHF, BHK были бы равны двум прямым. Но им[16] уже равны [углы] BHE и BHG. [Это] неверно. Она, [линия FK,] не пересекает линию EG. В противном случае две прямые линии охватывали бы плоскость[17]. *Поэтому FK проходит через точку, находящуюся под точкой H, такую, как точка L*. Таким образом, можно провести бесконечно много хорд.
 Рис.1	
Если [это] доказано, то говорим: если линия падает на две линии и с [одной] стороны образуются два [внутренних] угла, меньшие, чем два прямых, то эти две линии встретятся с этой стороны.	Если это разъяснено, то говорим: если линия падает на две линии и с [одной] стороны образуются два внутренних угла, меньшие, чем два прямых, то они встретятся с этой стороны, *если их продолжить*.

Поскольку неясно, либо [те два угла] острые, либо один из них острый, а другой прямой, либо один из них острый, а другой тупой, то пусть сначала один из них будет острым, а другой прямым. [На]пример: две линии AC, BD; падает на них линия AB и образуются прямой угол ABD и острый угол BAC, как на первом чертеже. Построим угол BAE, равный BAC[2] [рис.2]. Продолжим AB по прямой до G. Тогда угол EAC будет разделен линией AG пополам. Следовательно, можно проводить в нем хорды, расположенные одна под другой, как было [доказано] ранее (лима марра). Тогда будем проводить в нем хорды до тех пор, пока [одна из них] не окажется под точкой B. Пусть EF проходит под точкой B. Так как AG перпендикуляр к EF, так как [это] было [доказано] ранее[3], то GF не встретится с BD. В противном случае в треугольнике получилось бы два прямых [угла]. Это нелепо.  Рис.2	Поскольку неясно, либо оба [этих угла] острые, либо один из них острый, а другой прямой или тупой, то пусть один из них острый, а другой прямой. [На]пример: две линии AC, BD; падает на них линия AB и образуются прямой угол ABD и острый угол BAC. Построим угол BAE, равный BAC. Продолжим AB по прямой до G. Тогда угол EAC будет разделен пополам линией AG. Следовательно, можно проводить в нем хорды, расположенные одна под другой, как было [доказано] ранее (кама сабака). Тогда будем проводить в нем хорды до тех пор, пока [очередная] хорда не окажется под точкой B. Пусть EF проходит под точкой B. Так как AG перпендикуляр к EF, то GF не встретится с BD. В противном случае в треугольнике получилось бы два прямых [угла], *а это абсурдно по семнадцатому [предложению] первой [книги] «Начал»*[18]. *Хотя это также абсурдно по тридцать второму предложению из нее же*[19] *– это двадцатое [предложение] этой моей книги, в доказательстве, однако, применяется этот постулат; поэтому неправильно соединять [это предложение] с его [постулата] доказательством. Мы приведем то [семнадцатое] //20 об.// предложение по завершению этой речи, если [на то] будет воля Аллаха всевышнего. <...> Хотя можно обойтись без него*[20]*, [семнадцатого предложения,] при доказательстве невозможности их встречи; это [доказательство] следует из предложения восемнадцатого этой книги, это двадцать восьмое [предложение] из [книги] первой «Начал». Однако в этом [семнадцатом предложении] нуждаются в двух других предположениях [о двух внутренних односторонних углах]*[21].
Тогда BD, если [ее] продолжить по прямой, пересечет линию AF[4].	Поэтому BD, если ее продолжить по прямой, пересечет линию AF.
Пусть оба угла острые. [На]пример: линии AC, BD, падает на них линия AB и образуются два острых угла CAB, ABD, как на втором чертеже. Построим угол BAE, равный углу BAC. Тогда угол EAC будет разделен линией AB пополам [рис.3]. Следовательно, в нем можно проводить хорды, расположенные одна под другой, так как [это] было [доказано] ранее[5]. Пусть EG проходит через точку под точкой B. Так как угол ABD – острый, то угол HBD – тупой. Но угол AHG – прямой, так как [это] было [доказано] ранее[6]. Поэтому линия EG не встретит BD. В противном случае в треугольнике оказались (хадаса) бы два угла, один из которых прямой, а другой тупой. Это нелепо[7]. Тогда BD, если [ее] продолжить, пересечет AC.	Пусть оба угла острые. Пусть станет чертеж таким, что угол ABD тоже будет острым. И так как он острый, то угол GBD – тупой. Но AGF – прямой. Поэтому линия GF не встречает BD. В противном случае в треугольнике оказались бы (вака‘) прямой и тупой [углы], а это [нелепо] *в силу того же* [*семнадцатого*] *предложения* [*первой книги «Начал»*]. Поэтому BD, если ее продолжить, пересечет AC.

 Рис.3	
Пусть один из них острый, а другой – тупой. [На]пример: две линии AB, CD; падает на них линяя EG и образуются углы BEG, DGE, меньшие, чем два прямых. Угол DGE – тупой, угол BEG – острый, как на третьем чертеже. Разделим линию EG пополам в точке H и проведем [из] точки H линию HF, перпендикулярно к CD [рис.4]. Продолжим ее по прямой. Тогда так как угол HFG – прямой, то FHG – //л.11// острый[8]. [Следовательно, EHM – острый. Но и BEH – острый[9]. Поэтому линии AE и HM встречаются. Пусть их встреча – в точке] K[10].	Пусть один из них – острый, а другой – тупой. [На]пример: две линии AB, CD; падает на них линия EG и образуются углы BEG, DGE, меньше чем два прямых, и угол DGE – тупой, а угол BEG – острый. Разделим линию EG пополам в точке H и проведем из точки H линию HF, перпендикулярно к CD. Продолжим ее по прямой [до M]. Тогда так как угол HFG – прямой, то FHG – острый. Следовательно, EHM – острый. Но и BEH – острый. Поэтому линии AE и HM встречаются. Пусть их встреча – в точке K.
 Рис.4	
Тогда угол EKH – тупой, так как, если бы он не был тупым, то был бы или прямым или острым. Если бы он был прямым, то углы EKH, EHK были бы равны углам HFG, FHG [соответственно]. EH равна HG. Следовательно, угол KEH равен EGF[11]. Установим общий [угол] DGE. Тогда два угла G [вместе] равны двум углам DGE, KEH. Следовательно, два угла G меньше, чем два прямых. Это нелепо[12]. Если бы [угол EKH] был острым, и [так как] угол KFC прямой, то линии AB, DC встретились бы так как [это]	Тогда угол EKH – тупой. В противном случае он был бы прямым или острым. Если бы он был прямым, то углы EKH, EHK были бы равны углам HFG, FHG [соответственно]. EH равна HG, следовательно, угол KEH равен HGF. Установим общий угол DGE. Тогда два угла G [вместе] равны двум углам DGE, KEH. Следовательно, два угла G меньше, чем два прямых. [Это] ошибка. Если бы [угол EKH] был острым и [так как] угол KFG – прямой, то линии AB, CD встретились бы. Пусть их встреча – в точке L. Тогда, так

было [доказано] ранее[13] со стороны точек A, C. Пусть их встреча – в точке L. Тогда, так как углы BEG, DGE, меньше, чем два прямых, и углы AEG, KEG равны двум прямым[14], то угол DGE, меньше, чем угол AEG. Следовательно, внешний [угол], меньше, чем внутренний. Это нелепо[15]. Поэтому угол EKH – не острый и не прямой, следовательно, он – тупой. Тогда угол BKF – острый, а угол DFK – прямой. Поэтому линии AB, CD встретятся со стороны точек B, D, как было установлено. Это и есть то, что мы хотели доказать.	как углы BEG, DGE меньше, чем два прямых, и углы AEG, KEG равны двум прямым, то угол DGE меньше, чем угол AEG. Следовательно, внешний [угол] меньше чем внутренний. [Это] ошибка. Поэтому если установлено, что угол BKF – острый, а угол EKH – тупой, то угол[22] //21// GFK – прямой. Следовательно, линии AB, CD встречаются. Это и есть то, что мы хотели доказать.

Примечания

[1] Текст в квадратных скобках размыт, восстановлен по тексту ар-Руми.

[2] «равный BAC» – маргинальная вставка переписчика.

[3] «так как [это] было [доказано] ранее» – межстрочная вставка переписчика.

[4] В этом месте, по Б.А.Розенфельду, неявно применяется аксиома Паша.

[5,6] См.: прим.3.

[7] Над «нелепо» переписчиком (здесь и далее) проставлено «17» в счислении абджад, то есть нелепо по предложению I.17 «Начал»: во всяком треугольнике два угла, взятые вместе при всяком их выборе, меньше двух прямых.

[8] Над «острый» проставлено «17» в счислении абджад, то есть угол острый по предложению I.17 «Начал» (см.: прим.7).

[9] Над «острый» проставлено 15 в счислении абджад, то есть нелепо по предложению I.15 «Начал».

[10] Текст в квадратных скобках восстановлен по тексту ар-Руми.

[11] Над EGF проставлено «26» в счислении абджад, то есть углы равны по предложению I.26 «Начал».

[12] Над «нелепо» проставлено «13» в счислении абджад, то есть нелепо по предложению I.13 «Начал»

[13] См.: прим.3.

[14] Над «двум прямым» проставлено «13» в счислении абджад, то есть равны двум прямым по предложению I.13 «Начал»

[15] Над «нелепо» проставлено «16» в счислении абджад, то есть нелепо по предложению I.16 «Начал»

[16] На полях по поводу «им» написано, что «скорее, двум прямым», именно так у ал-Абхари.

[17] Над этим предложением начинается маргиналия переписчика, идущая влево: «...невозможно, чтобы линия FK проходила через точку над точкой H так, чтобы пересекать EG в двух местах по обе стороны от точки H. В противном случае две линии необходимо охватят плоскость, [а это нелепо,] так как предположенные две линии EG, FK – прямые».

[18] Формулировку предложения I.17 «Начал» см.: прим.7.

[19] Предложение I.32 «Начал»: во всяком треугольнике по продолжении одной из сторон внешний угол равен двум внутренним и противолежащим, и внутренние три угла треугольника вместе равны двум прямым.

[20] Букв. «нет нужды в этом [предложении] в доказательстве».

[21] Мой перевод этого фрагмента отличается от перевода Б.А.Розенфельда [3; с.599].

[22] «EKH – тупой, то угол – это» – маргинальная вставка.

Список литературы

1. *De Young G.* Further adventures of the Rome 1594 Arabic redaction of Euclid's *Elements* // Archive for History of Exact Sciences. 2012. Vol.66. P.265–294.
2. *Dilgan H.* Démonstration du V postulat d'Euclide par Shams-ed-Din al'Samarqandi // Revue d'histoire des sciences et de leurs applications. 1960. №13. P.191–196.
3. *Розенфельд Б.А.*, *Юшкевич А.П.* Доказательства пятого постулата Евклида в работах Сабита ибн Корры и Шамс ад-Дина ас-Самарканди // Историко-математические исследования. М., 1961. Вып.14. С.587–502, 598–602.
4. *Sezgin F.* Geschichte des arabischen Schrifttums. Band 5: Mathematik. Leiden: Brill, 1974. S.111.
5. *Лютер И.О.* Об определениях и постулатах в трактате «Предложения обоснования» ас-Самарканди и комментарии к нему ар-Руми // Историко-математические исследования. Вып.14(49). М.: Янус-К, 2011. С.103–136.
6. *Brockelmann C.* Geschichte der arabischen Litteratur. Bd.I. Weimar, 1897. S.464.
7. *Suter H.* Die Mathematiker und Astronomen der araber und ihre Werke. Leipzig, 1900. S.146, 219.
8. (*Hajji Khalifa Katib Celebi, Mustafa ibn 'Abdallah*. Kashf al-zunun 'an asami l-kutub wa-l-funun=) Lexicon bibliographicum et encyclopaedicum, a *Mustafa ben Abdallah, Katib Jelebi* dicto et nomine *Haji Khalfa* celebrato compositum; ad codicu Vindobonensium, Parisiensium et Berolinensis fidem primum edidit Latine vertit et commentario indicibusque instruxit *G.Fluegel.* 7 vols. Leipzig/London: Published for the Oriental Translation Fund of Great Britain and Ireland, 1835–1858. Vol.I. 1835. P.502. Vol.III. 1842. P.538. Vol.VI. 1852. P.473. (арабский текст, латинский перевод)
9. The Encyclopaedia of Islam. New edition / Ed. by *H.A.R.Gibb*, *J.H.Kramer*, etc. Vol.I. Leiden: E.J.Brill, 1986. P.98–99.
10. *Sayili A.* The Observatory in Islam. Publications of the Turkish Historical Society. Series VII. №38. Ankara, 1960. P.212, 215.
11. *Endress G.* Reading Avicenna in the Madrasa: intellectual genealogies and chains of transmission of philosophy and the sciences in the Islamic East // Arabic Theology, Arabic Philosophy. From the Many to the One: Essays in Celebration of Richard M. Frank / Ed. by *J.E.Montgomery* (Orientalia Lovaniensia Analecta, 152). Leuven: Peeters, 2006. P.371–422.
12. *Асир ал-Дин ал-Абхари*. Ислах ал-китаб ал-Истиксат / Chester Beatty Library (Dublin), Ms Ar 3424, fols.1v–126v (на арабском языке)
13. *Насир ад-Дин ат-Туси*. Тахрир китаб Уклидис. Стамбул: Дар ат-Тибаʿа ли'л-Даула ал- ʿАлийа ал-Усманийа, 1216 [1801/2] (на арабском языке)
14. [*Псевдо-Туси*]: [Kitab] Tahrir al-usul li-Uqlidis li-sharih majhul mansub khata' li Nasir al-Din al-Tusi. Anonymous commentary upon Euclid's *Elements* wrongly ascribed to Nasiraddin at-Tusi (Evclidis elementorum geometricorum Libri Tredecim. Ex traditione doctissimi Nasiridini Tusini. Nunc primum Arabicè impressi. Romae: Medicea, M.D.XCIV, 1594) // Islamic Mathematics and Astronomy / Ed. by *F.Sezgin*. Vol.20. Frankfurt am Main: Publications of the Institute for the History of Arabic-Islamic Science at the Johann Wolfgang Goethe University, 1997. (на арабском языке)
15. *Ibn Sina*. al-Shifa'. Usul Al-Handasah (Mathématique, Géométrie) / Texte établi par *A.H.Sabra*, *A.H.Lotfi*, Revu et préfacé par *I.Madkour*. Cairo: al-Hay'a al-Misriya al-'Amma li-l-Kitab / L'Organisation Egyptienne Générale du Livre, 1977. (на арабском языке)
16. Китаб Уклидис фи'л-Усул ислах Аби'л-Хасан Сабит ибн Курра ас-Саби / Uppsala University Library. Ms O. Vet.20 (на арабском языке)
17. *Ал-Хасан ибн ал-Хайсам*. Шарх мусадарат Уклидис / Рукопись Научной библиотеки им. Н.И.Лобачевского Казанского федерального университета №104 араб., л.151–222 (на арабском языке)
18. *Насир ад-Дин ат-Туси.* Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллельных линий / Пер. *Б.А.Розенфельда*, примечания *А.П.Юшкевича* и *Б.А.Розенфельда* // Историко-математические исследования. М., 1960. Вып.XIII. С.483–532.

19. *Proclus.* A Commentary on the First book of Euclid's *Elements* / Translated with Introduction and Notes by *G.R.Morrow*, with a new foreword by *I.Mueller*. Princeton–New Jersey: Princeton University Press, 1992.
20. *Abu'l-'Abbas an-Nayrizis* Exzerpte aus (Ps.–?) Simplicius Kommentar zu den Definitionen, Postulaten und Axiomen in Euclids *Elementa I* / Eingeleitet, ediert und mit arabischen und lateinischen Glossaren versehen von *R.Arnzen*. Köln, 2002. (издание арабского текста).
21. Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii. Ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata / Ed. *M.Curtze* // Euclidis Opera omnia: Supplementum / Ed. *I.L.Heiberg*, *H.Menge*. Lipsiae: B.G.Teubneri, 1889.
22. The first Latin translation of Euclid's *Elements* commonly ascribed to Adelard of Bath: books I–VIII and books X.36–XV.2 / Ed. by *H.L.L.Busard*. Toronto: Pontifical Institute of Medieval Studies, 1983.
23. Heronis Alexandrini opera quae Supersunt omnia. Volumen 4. Heronis definitiones cum variis collectionibus. Heronis quae feruntur geometrica / Copiis *G.Schmidt* usus; ed. *J.L.Heiberg*. Stuttgart: B.G.Teubner, 1976 (Ed.ster.1912).
24. *Евклид*. Начала Евклида. Книги XI–XIV / Пер. с греч. и ком. *Д.Д.Мордухай-Болтовского* при ред. участии *И.Н.Веселовского*. М.–Л.: ГТТИ, 1950.
25. *Euclid.* The thirteen books of the *Elements* / Translated from the text of *Heiberg* with introduction and commentary by Sir *T.L.Heath*. 3 vols. Reprint. New York: Dover, 1956.
26. The Metaphysics of Tusi: Treatise on the proof of a necessary being. Treatise on determinism and destiny / Persian text established by the Institute for Cultural Studies: Tehran, Iran; English translation by *P.Morewedge*; from an edition by *M.T.Mudarris Radawi*. Tehran: Publications of SSIPS, 1992. (Islamic Philosophy Translations Series).
27. *Розенфельд Б.А., Юшкевич А.П.* Теория параллельных линий на средневековом Востоке, IX–XIV вв. М., 1983.
28. *Розенфельд Б.А.* Доказательство пятого постулата Евклида у средневековых математиков Хасана ибн ал-Хайсама и Льва Герсонида // Историко-математические исследования. М., 1958. Вып.XI. С.733–782.
29. *Sabra A.I.* Simplicius's proof of Euclid's parallels postulate / Optics, Astronomy and Logic: Studies in Arabic Science and Philosophy. XIII. P.1–24. Variorum Collected Studies Series, 1994.
30. The Latin translation of Anaritius' Commentary on Euclid's Elements of geometry. Books I–IV. / Ed. by *P.M.J.E.Tummers* // Artistarium, Supplementa, IX. Nijmegen: Ingenium Publ., 1994.
31. *Lo Bello A.* The Commentary of al-Nayrizi on Books II–IV of Euclid's Elements of geometry. With a translation of that portion of Book I missing from MS Leiden Or. 399.1 but present in the newly discovered Qom manuscript edited by Rüdiger Arnzen / [Trans. and ed. by *A. Lo Bello*] // Studies in Platonism, Neoplatonism, and the Platonic Tradition. Vol.8. Leiden; Boston: Brill Academic Publishers, 2009.
32. *Lo Bello A.* The Commentary of al-Nayrizi on Book I of Euclid's Elements of Geometry. With an introduction on the transmission of Euclid's Elements in the Middle Ages / [Trans. and ed. by *A. Lo Bello*] // Ancient Mediterranean and Medieval Texts and Contexts. Medieval philosophy, mathematics, and science. Vol.1.Boston; Leiden: Brill Academic Publishers, 2003.

ИСТОКИ НУМЕРАЦИОННЫХ ЗНАНИЙ РУСИ (VII–VIII ВВ.)[1)]

Р.А.Симонов

Обычно критики фальшивой «Влесовой книги» ничего положительного для науки в ее истории не находят. Однако, если задуматься о феномене живучести интереса некоторой части населения к этому фальсификату и о причинах его издательского успеха [1–2], то приходит на ум следующее. Не может ли быть так, что указанный феномен обусловлен наличием в общественном сознании памяти о когда-то существовавшем протописьменном наследии наших предков? И не является ли этот интерес немым укором, адресованным настоящей науке, частично отдающей аутсайдерам-псевдоученым свои прерогативы в наиболее сложной для изучения области русской культуры? Позитивным результатом изучения фальсификаций может быть, наряду с выводом о необходимости разоблачения соответствующих фальшивых и клинических фантазий, бульшее внимание ученых к истокам отечественной истории и культуры, включая предысторию научных представлений. Это в свою очередь может стимулировать разработку и применение новых источниковедческих подходов в исследовании Руси.

В настоящей статье делается попытка показать на ряде артефактов, в том числе обнаруженных в последнее время, возможность и перспективность такого изучения применительно к древнерусской математической протокультуре. К концу XX столетия в теорию и практику источниковедения вошли новые методы (См., например: [3]). Их посильное использование привело автора настоящей работы как к достаточно очевидным, так и в чем-то неожиданным результатам в изучении истоков древнерусских математических представлений.

Одним из первоначальных математических знаний была разработка нумерации, то есть правил записи знаками чисел. Для этого на определенном этапе люди стали использовать буквы, поэтому такая нумерация называется «буквенной». По сравнению с современными (индоарабскими) десятью цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, знаков «буквенной нумерации», используемой в кириллице, было 27 (без знака нуля). Для каждого числового разряда (единиц, десятков, сотен) имелся свой набор из 9 знаков, итого: $3 \times 9 = 27$ (рис.1). Тысячи, десятки и сотни тысяч, миллионы и т.д.

---

1) Расширенное содержание доклада, сделанного на Объединенном Общемосковском научно-исследовательском семинаре по истории математики и механики (руководители: И.А.Тюлина, С.С.Демидов; механико-математический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова) 7 декабря 2009 г., а также на заседании Комиссии «Естественнонаучная книжность в культуре Руси» Научного совета «История мировой культуры» РАН 9 декабря 2009 г. Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант 09-03-00633а.

Рис.1. Древнерусская «буквенная нумерация»

передавались основными 27 знаками, дополненными особыми значками. «Буквенные цифры» в русских кириллических памятниках письменности восходят к греко-византийской «буквенной нумерации» [4]. Недостаточно изученным является вопрос о времени и месте появления на Руси «буквенной нумерации», первоначальном ознакомлении с нею славян, сферах употребления и усвоения [5, с.11–30; 6].

В 1998 г. в Новгороде археологами был найден уникальный памятник – деревянная счетная бирка (фрагмент) второй половины X в., – отражающий знакомство на Руси с греко-византийской «буквенной нумерацией» (рис.2). На бирке вырезаны 80 простых зарубок, пиктограмма в виде «бантика» и, возможно, княжеский знак Ярополка Святославича. Пиктограмму рас-

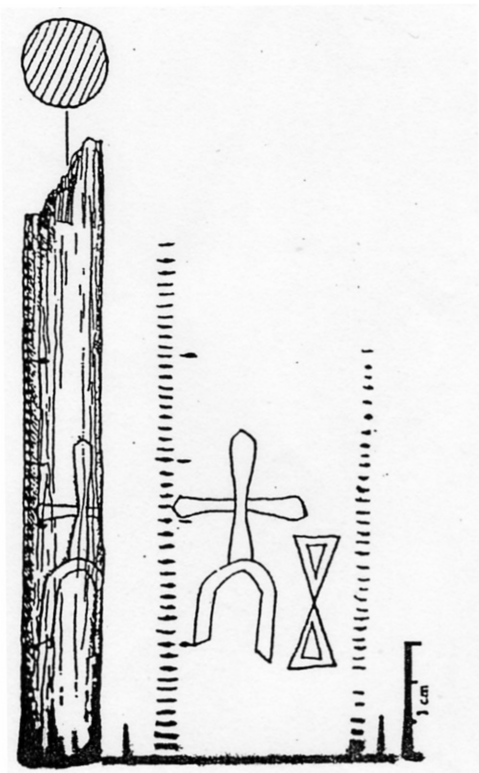


Рис.2. Новгородская деревянная бирка второй половины X в.

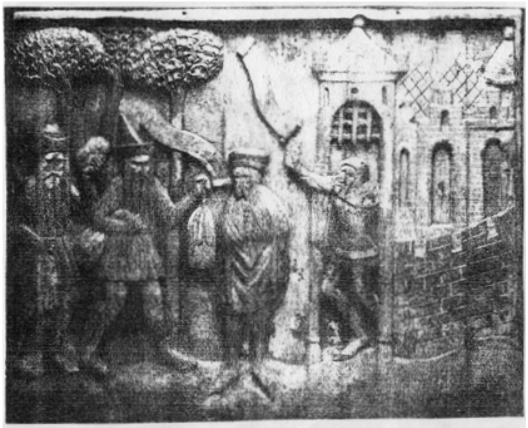


Рис.3. «Сорочок» меха (?) в руке средневекового новгородца.
Резные панели скамьи из собора св.Николая г.Штральзунде, ок. 1400 г.

шифровал Р.К.Ковалев (Университет Миннесоты, США) как две соединенные греческие «дельты» треугольной формы, отдельно обозначавшие 4 десятка, а вместе – восемьдесят шкурок меха [7, с.38].

Что речь могла идти именно о шкурках меха, по мнению Р.К.Ковалева, свидетельствуют слова византийского императора Константина Багрянородного, который сообщал в середине X в. об использовании славянами за столетие до этого парного счета типа: два раба, два сокола, две собаки и пр. [8, с.143][1]. В этом же ряду упоминаются 80 шкурок меха, что подкрепляет мнение Р.К.Ковалева о славянском счете парами «сорочков» (связками по 40 шкурок меха) (рис.3) [11, с.362, 365, обложка]. Рассматриваемая бирка могла быть своеобразной деревянной квитанцией о паре сорочков, сданных, например, перекупщику на продажу [12, с.100].

Особенности пиктограммы – орнаментальность («бантик» очерчен двойной каймой), сцепленность «дельт», отсутствие титл над знаками – говорят о том, что цифровое значение пиктограммы в X в. не всем могло быть понятно. А это значит, что активное использование «дельты» в цифровом качестве восходит к более раннему времени. Можно указать нижнюю временную границу, когда это могло произойти. По типу письменность на бирке как будто бы относится к «чертам и резам», которые могли существовать у славян уже в III–IV вв., а первоначальное употребление славянами греческих букв «нужно относить не ранее чем к VII и не позже чем к VIII в.» [13, с.464]. Сохранение к этому и несколько более позднему времени у славян письма типа «черт и резов» вполне возможно, что, в частности, теоретически допускал академик РАН Д.С.Лихачев [13, с.464–466; 14].

Если учесть, что слова Константина Багрянородного о сложившемся парном счете у славян принадлежат событиям середины IX в., то появление традиции «бантика» можно отнести к предшествующему периоду: VII – первой половине IX вв. Эту датировку можно несколько уточнить. В греческой палеографии известно, что в IX–X вв. «дельта» имела «ножки» («клинчики» или «клинышки») по краям основания треугольника [15], то есть примерно ту форму (рис.4), которая перешла в кириллицу, а сейчас сохраняет-

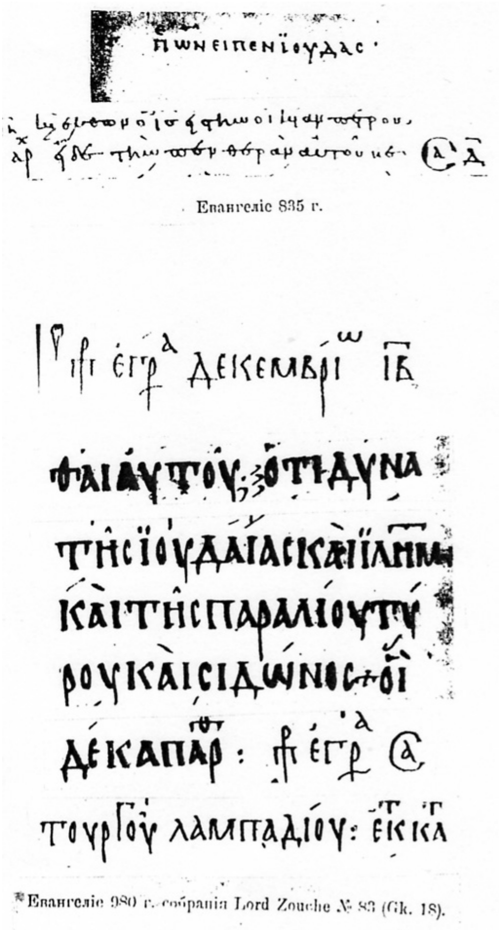


Рис.4. Образцы греческого письма IX–X вв. с «дельтой» на двух «ножках» Евангелие 835 г. из собрания РНБ, Евангелие 980 г. из собрания Lord Zouche

ся буквой Д. В древнерусской практике графика буквы «добро» в форме треугольника без «ножек», по-видимому, неизвестна [16, с.153–155; 17, с.74].

Греческая треугольная «дельта», легшая в основу «бантика», использовалась ранее IX–X вв. Более обстоятельное исследование греческих текстов уточнило этот результат, введя в рассмотрение промежуточную (переходную) форму «дельты» – с одной «ножкой» слева [18]. Зачаточная ножка появляется в VI в. в виде утолщения с левой стороны основания треугольника «дельты», в VII в. утолщение оформляется в «ножку»; в конце этого века появляется двуногая «дельта» (697 г.). В VIII в. традиция двуногой «дельты» еще не устанавливается, она укрепляется в IX–X вв., хотя одноногая «дельта» встречается и в IX в. (рис.5), и в X в. (980 г.). Значит, самым поздним временем, когда могла появиться форма «бантика», будет VII–VIII вв., однако протооригинал «бантика» мог возникнуть и до VII в.

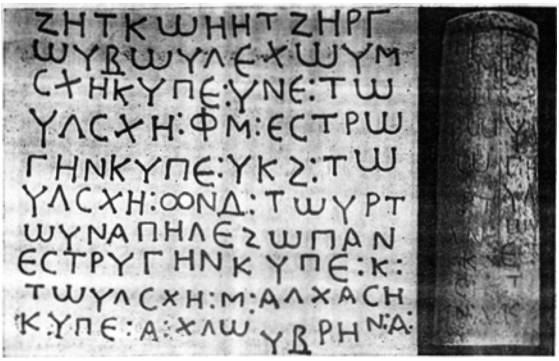


Рис.5. «Дельта» на одной «ножке» слева – в центре протоболгарской каменной надписи IX в. греческими буквами – в записи числа 854 в «буквенной нумерации»

Изложенная периодизация графики «дельты», построенная в основном на работах крупного немецкого ученого в области греческой палеографии В.Гардхаузена, по-видимому, нуждается в определенных уточнениях с учетом современных данных. Однако, даже если она достаточно верна, то ее нельзя с полной достоверностью использовать для датировки появления «бантика» $(80 = 40 + 40)$ в древнерусской среде, так как неизвестны конкретные графические источники, повлиявшие на формирование «бантика».

Так, известен алфавит греко-византийской «буквенной нумерации» IX в. из рукописи, хранящейся в Бюргер-библиотеке Берна (рис.6) [19, с.7]. Здесь «дельта» = 4 имеет треугольную форму (без дополнительных «ножек»). Причем над каждой буквой-циф-

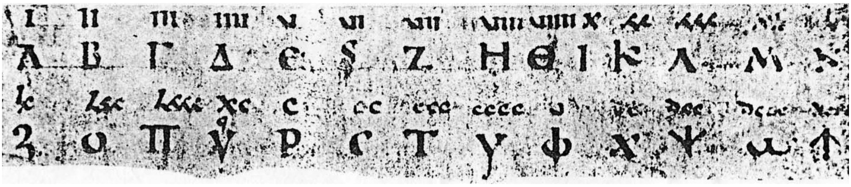


Рис.6. Алфавит греко-византийской «буквенной» нумерации IX в. (Берн, Бюргер-библиотека, кодекс №207). Дельта = 4 имеет треугольную форму (без «ножек»)

рой стоит ее цифровое значение в римской нумерации. Значит, данный «цифровой алфавит» имел учебное или справочное назначение в негреческой языковой среде. Нельзя исключить, что «бантик», возникнув в негреческой среде, формировался в традиции, подобной представленной в «цифровом алфавите» IX в., то есть не в VII–VIII, а в IX–X вв., сравнительно незадолго до появления «бантика» на новгородской бирке второй половины X в.

Поскольку ко второй половине X в. на Руси «бантик», скорее всего, утрачивал числовой смысл знака 80, то какое значение он имел или приобретал? В сказании «О письменехъ» болгарский писатель конца IX – начала X вв. Черноризец Храбр сообщал, что славяне «черътами и резами» «чьтеху и гатааху», то есть считали и гадали [13, с.408, 465; 20]. Если «бантик» изначально или впоследствии стал магическим знаком, то по какой причине и в каком качестве? На эти вопросы предварительный ответ дает недавняя книга о русской магии известного британского ученого В.Ф.Райана. По его мнению, сила магического талисмана или знака могла обусловливаться его математической природой. Например, с античных времен считалось, что такой магической силой обладают числа 4 и 10. Якобы через Пифагора было известно, «что наиболее совершенными являются числа 4 и 10, поскольку $1+2+3+4=10$» [21, с.447]. Этот мотив представлен в средневековом произведении «Тайная тайных» (XV–XVI вв.), являющемся русской версией эзотерического арабского текста IX или X в. [там же, с.36–37, 447]. Природа «бантика» связана с числами 4 и 10, так как каждая из треугольных частей пиктограммы выражает четыре десятка, то есть заключает в себе количественное содержание чисел 4 и 10. Следовательно, «бантик» по своей математической природе мог толковаться в системе античной и средневековой эзотерики в качестве магического знака.

Магический знак в виде соединенных вершинами треугольников известен в античном Крыму (Херсонес) и трактуется «как критский лабрис (двойная секира): символ, защищающий от злых духов и связанный с культом плодородия» [17, с.74]. Этот знак несколько отличается от «чистого» «бантика» добавлением вертикальной линии, идущей вниз от места соединения треугольников [22, с.134, табл. XXXI / 1750]. Труднее определить, к какому виду магии относится новгородский знак «бантика», имевший первоначальное математическое значение: 4 десятка + 4 десятка, то есть сорок + сорок. Возможно, подход к решению этого вопроса содержится в поверье о сокровенности числа сорок для охраны сокровища [21, с.280]. В таком случае «бантик» будет иметь значение магического оберега. Такая его трактовка согласуется со смыслом рассматриваемой бирки (как квитанции). Владелец (или комиссионер, сопроводитель) меха был заинтересован в его сохранности, чему по представлению средневековых славян и мог служить знак-оберег в виде «бантика».

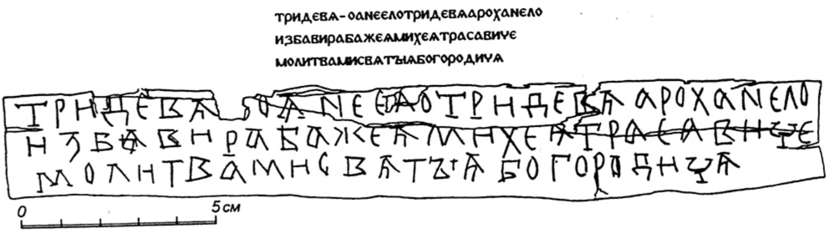


Рис.7. Наборный текст и прорись берестяной грамоты №715 с числовым заговором (первая половина XIII в.)

Итак, древние славяне до появления у них письменности, разработанной св. Константином-Кириллом и Мефодием в середине IX в., были знакомы с греко-византийской нумерацией. Однако оставался неясным вопрос о степени их информированности: знали ли древние славяне о 27-значной системе «буквенных цифр» так сказать в полноте или владели сведениями лишь об отдельных знаках, например, о «дельте» = 4? Определенный сдвиг в решении указанного вопроса дает изучение найденной в Новгороде берестяной грамоты первой половины XIII в. №715 [23, с.14–15] (рис.7). Она содержит следующий числовой заговор от лихорадки (в переводе):

Тридевять ангелов, тридевять архангелов,
Избавьте раба божия Михея от лихорадки
Молитвами святой Богородицы.

Академик РАН А.А.Зализняк, исследовавший грамоту одним из первых, писал: «Слову тридевять в данном тексте явно не следует приписывать точного арифметического значения (скажем, “27”): это мифологизированное обозначение некоего большого количества, соединяющее в себе сакральные свойства числа девять и числа три» [24, с.105]. О.Ф.Жолобов предложил толковать слово тридевять в точном значении 27, равном количеству дней сидерического месяца: «Оно (указанное числительное как “3×9”. – *Р.С.*) интерпретируется в статье (Жолобова. – *Р.С.*) не как сочетание двух сакральных чисел, где второе число отражает кратный рост первого, а как реальная числовая формула. Ее строение отражало количество дней сидерического лунного месяца...» [25, с.32].

Попутно, в связи с неким понятием «полноты», которое О.Ф.Жолобов, к сожалению, не определяет и не раскрывает, им рассматривается «буквенная нумерация»: «Более чем явственно эта особенность (то есть некая полнота. – *Р.С.*) десятичного счисления проявилась в греческой, а затем и в греко-славянской письменной традиции. В греческой и славянской системах цифровых обозначений ровно 27 знаков, которые разбиваются на три группы по 9 знаков в каждой» [25, с.36–37].

В.Ф.Райан в упомянутом выше исследовании учел большое число заговоров, бытовавших среди многих народов мира, а не только славян. Поэтому его суждение о магической природе слова тридевять (независимо от контекста заговора) представляет значительный интерес: «“Тридевять” (т.е. 27), возможно, является реликтом девятеричной системы счета; упоминание этой числовой формулы можно встретить как в сказках, так и в заклинаниях» [21, с.447]. Из трех рассмотренных объяснений трактовка у Райана прямо, а у Жолобова – косвенно, связана с системой счета. Трактовка А.А.Зализняка такой подход не исключает, а скорее углубляет, указывая на возможность «обозначения» словом тридевять некоей математической (числовой) сущности («большого количества»), магически связанной с числами 9 и 3. Не обозначается ли в заговоре берестяной грамоты №715 словом тридевять математическая сущность 27-значной «буквенной нумерации»?

Чтобы разобраться в этом вопросе, надо учесть количество рассматриваемых в ней ангелов и архангелов. Известно, что архангелов семь (по христианско-ветхозаветной традиции, «число архангелов равно семи» [25, с.39, прим.12]), то есть конечное число. В 27-значной системе «буквенной нумерации» это число (семь) находится на 7-м месте (рис.1). Значит, в таком смысле оправданно количественную характеристику совокупности архангелов связывать с именем «27», как обозначением математической сущности 27-значной системы «буквенной нумерации», из которой число семь получается как частный случай.

Сложнее обстоит вопрос о количестве ангелов. Достаточно распространенным является мнение, что так называемых чинов ангельской иерархии девять. Об этом, например, указано у Псевдо-Дионисия Ареопагита в сочинении «О небесной иерархии»[2], который при этом делает существенное дополнение: сколько в действительности имеется чинов, мы не знаем [27, с.57, 131]. Павел Флоренский, математик по базовому образованию, считал, что число ангелов может быть актуально бесконечно [28, с.496–497]. Если ангелов бесконечно много, то можно ли вести речь о выражении их количества через некий счет вообще и конкретно через счет по типу «буквенной нумерации»?

Подход к решению указанного вопроса был предложен академиком РАН А.Н.Паршиным (Отделение математики). Результат оказался таким: «Можно было бы рискнуть высказать предположение, что и число уровней ангельской иерархии бесконечно. Есть некоторый аргумент в пользу подобного предположения. Я не случайно упомянул тут о позиционной системе счисления. Когда мы считаем числа, то, пройдя от 0 до 9, мы приходим к 10, когда переходим в следующий разряд... В системах счисления числа могут быть сколь угодно большими, когда мы переходим во все новые и новые разряды, или чины» [29, с.146].

Таким образом, А.Н.Паршин определил, что установление бесконечности числа ангельской иерархии находит аналогию или обоснование в счислении чисел. Например, в десятеричной позиционной системе. В 27-значной «буквенной нумерации», не являющейся строго позиционной в связи с отсутствием в ней знака нуля, также можно выражать сколь угодно большое число с помощью основных 27-ми знаков и системы дополнительных значков. Поэтому вполне допустимо количество ангелов и в случае их бесконечной трактовки связывать со словом тридевять как обозначением математической сущности 27-значной «буквенной нумерации», в которой можно выразить сколь угодно большое число (См. подробнее: [30]).

Конечно, предлагаемые рассуждения о числе ангелов и числе архангелов в берестяной грамоте №715 носят несколько абстрактный характер, так как неизвестно, какими они считались во время возникновения заговора. С целью надежности выводов целесообразно исходить из принципа максимума (а не минимума) информированности авторов заговора. То есть полагать, что они могли подходить к числу ангелов и числу архангелов примерно так, какими они (числа ангелов и архангелов) принимались в христианско-ветхозаветной традиции и сочинении Псевдо-Дионисия Ареопагита в 533 г. Обобщая изложенные данные, заключаем, что, возможно, слово тридевять в берестяной грамоте №715 могло быть обозначением математической сущности 27-значной «буквенной нумерации», как системы, которая позволяет выражать как любое конечное, так и бесконечное число.

Система «буквенной нумерации» в Древней Руси, по-видимому, была достаточно хорошо известна, особенно после принятия христианства в 988 г. Она входила в состав обучения грамоте, наряду с буквенным алфавитом. Об этом, в частности, свидетельствует учебное изложение данных о ней в древнейшей русской деревянно-восковой Новгородской псалтыри первой трети XI в. Нумерационные сведения здесь представлены наряду с буквенными алфавитами на деревянной основе церы (под воском). Причем имеются в нескольких фрагментах не только основные 27 знаков «буквенной нумерации», но и дополнительные значки для выражения тысяч и десятка тысяч[3]. Здесь же (под воском церы) несколько раз процарапано древнейшее в русской практике сохранившееся в оригинале многозначное число в «буквенной нумерации» 6507/999 г. в качестве года возведения в сан священника автора записей иеромонаха Исаакия, не исключая возможности их (записей) внесения копиистом [33; 34].

На Руси было известно, что «буквенная нумерация» в греко-византийской письменной традиции насчитывала 27 знаков, как и в кириллице. Это подтверждается Епифанием Премудрым в Житии Стефана Пермского (начало XV в.): «Собрася азбука греческая слов числом .КД. (24)... а ин книжник (добавил) три слова, ими же пишутся: шестое яве и девятьдесятое и девятьсотное» [35, с.151–152]. Из этого следует, что на Руси не позже XIV в. знали, что в греко-византийской «буквенной нумерации» основных цифр было 24 + 3 = 27 (то есть тридевять), а также что структурно она состояла из 24 букв греческого алфавита и трех дополнительных числовых знаков – эписем – для выражения 6, 90 и 900.

Эмоционально освоение знаний (в том числе – математических) как бы проходит два этапа. Первооткрыватели и их ближайшие последователи испытывают подъем, граничащий с восторгом. Затем эти знания становятся общим местом обыденной жизни, и люди к ним относятся спокойно[4]. Примерно по такой же схеме могло протекать освоение знания о том, что путем 27-значной «буквенной нумерации» можно выразить любое число. Эта идея, очевидно, могла вызвать у первооткрывателей мистический трепет и послужить основой числового заговора, отраженного (возможно, в обобщенной и стертой форме) в берестяной грамоте №715. Затем эти знания приобрели налет обыденности в спокойной (лишенной какого-либо мистицизма) практике, как показывает использование «буквенной нумерации» в Древней Руси не позже X–XI вв.

Поскольку слово тридевять в заговоре грамоты №715 не имеет четкой этимологии, то будет правильным считать, что потребители заговора не знали с определенностью, о каком количестве ангелов и архангелов в нем шла речь. Причем этого количества могли не знать и трансляторы заговора (жрецы). Но они могли понимать, что Богородица (заговор как бы представлен ею или от ее имени) и другие высшие силы должны были об этом количестве ведать. В таком случае перед трансляторами заговора стояла задача выразить число ангелов и число архангелов, не зная точно каждое число и даже структуру чисел (конечность/бесконечность), но сознавая, что высшим силам эти числа известны.

Разобраться в этом непростом вопросе можно попытаться с помощью науки логики, которая изучает такие понятия как «смысл», «языковое выражение» или «имя» некоторого предмета (явления), «денотат» имени и пр. Можно попытаться установить, что выражение грамоты №715 «тридевять» (ангелов и архангелов) является непрямым (косвенным) употреблением «имени» (названия) «27-значная «буквенная нумерация». С указанной целью можно опереться на следующее положение известного американского ученого Алонзо Черча (математика и логика): «Денотат есть функция смысла имени…, т.е. если дать смысл, то этим определяется существование и единственность денотата» [38, с.17–19]. Если в качестве «смысла» выражения «система счета» взять 27-значную «буквенную нумерацию», тогда каждому значению этой системы по установленным для нее правилам будет соответствовать конкретное число.

Не зная, сколько всего было ангелов и архангелов, авторы заговора сознательно или бессознательно прямое указание количества ангелов и архангелов могли заменить косвенным. Такая ситуация предусматривается в логике: «В обычных языках, как правило, наряду с прямым употреблением имени возможно и косвенное, когда денотатом становится то, что было смыслом при прямом употреблении имени» [39, с.553]. При указанном выше прямом употреблении имени «система счета» «смыслом» будет 27-значная «буквенная нумерация», а при косвенном – этот «смысл» становится «денотатом». Это значит, что выражение «тридевять» (ангелов, архангелов) в берестяной грамоте №715 передавало общее понятие типа числовой таблицы, из которой могли получаться частные числовые значения, в том числе 7 (архангелов) и бесконечно много (ангелов). Тем самым авторы заговора обходили вопрос о точном количестве ангелов и архангелов, которого могли не знать. Но для заговора, обращенного к высшим силам (конкретно – к Богородице), это не имело существенного значения, поскольку в представлении авторов (трансляторов, пользователей) заговора высшие силы должны были знать соответствующие числа ангелов и архангелов.

Авторы заговора поступили талантливо или, по крайней мере, толково, введя слово тридевять для обозначения математической сущности «буквенной нумерации», как бы кристаллизующей в себе все числа. Сознательно или бессознательно они словом тридевять фактически выразили не имя 27-значной «буквенной нумерации», а предмет имени (денотат) «буквенной нумерации», ее математическую сущность. Авторы заговора надеялись или были уверены, что для Бога, Богородицы тридевять архангелов это семь или какое-то известное высшим силам число архангелов, а тридевять ангелов это также известное им конечное или бесконечное число ангелов. А обычным пользователям заговора, скорее всего, это не было понятно, с чем и могла быть связана эзотерическая тайна магии заговора.

Тайна могла быть обусловлена незнанием точного количества ангелов и архангелов и, возможно, мнением, что и знать этого людям не обязательно (не нужно) или нельзя. Поскольку это знание было прерогативой высших сил, что как бы и фиксировалось словом тридевять. В этом магическом слове могло быть зашифровано чудесное прозрение человека при познании им нового математического смысла, что с помощью 27-значной (вот откуда сакраментальное тридевять) «буквенной нумерации» можно выражать любое число, включая конечные числа, например, семь (количество архангелов) и бесконечно много (количество ангелов).

Византийская «буквенная нумерация», будучи сложившимся, «кристаллизовавшимся» знанием, могла усваиваться культурой Руси преимущественно в своей целостности или наряду с данными об отдельных «буквенных» числах, как ее (нумерации) частные проявления. Рассматриваемый нумерационный заговор берестяной грамоты №715 мог сложиться до X–XI вв., когда практика счета на основе «буквенной нумерации» на Руси еще не стала обыденной. По мнению Райана, многие русские апокрифические и магические тексты восходят «к греческому прототипу» [21, с.21]. Возможно, обозначение математической сущности «буквенной нумерации» словом тридевять появилось в качестве кальки греческого именования в заговоре, нумерационный смысл которого был понятен немногим людям (например, жрецам). То есть числовой заговор со словом тридевять мог возникнуть задолго до его фиксации берестяной грамотой №715 первой половины XIII в. На момент обнаружения археологами этот заговор был самым древним среди берестяных грамот. Правда, вскоре было найдено еще более раннее заклинание на бересте, однако грамота №715 остается древнейшей, содержащей заговор нумерационного характера.

Модель вхождения готового знания в начальную протокультуру по типу от общего к единичным его проявлениям (например, от 27-значной системы «буквенной нумерации» к отдельным «буквенным цифрам») согласуется, например, с тем как понимал академик Д.С.Лихачев процесс приобщения Руси к высокой культуре Византии: «Сложившиеся, точно определившиеся формы культуры легче воздействуют и легче усваиваются, чем формы начальные и еще не кристаллизовавшиеся». И еще: «Сейчас подчеркнем одну особенность этих внутренних потребностей культуры: потребности эти сказываются сильнее и определеннее в переносе целого, чем в переносе отдельных элементов культуры, ее единичных проявлений» [40, с.15, 20].

Есть определенные основания относить факт первоначального древнерусского ознакомления с возможностями «буквенной нумерации» выражать числа любой величины примерно тем же временем, что и усвоение знаний об отдельных знаках в этой системе. На Руси процессы усвоения отдельных знаков «буквенной нумерации» и ее самой (в целом), как системы, вырабатывающей навыки числового абстрагирования, могли идти во взаимодействии. Об этом как будто бы свидетельствует помимо грамоты №715 и числовой «бантик» (как знак, состоящий из двух «дельт» и обозначающий 80). Он несет в себе абстракцию, состоящую в обобщении одним числовым знаком («дельтой») двух разных чисел: четырех и сорока.

Можно ли географически локализовать появление нумерационной традиции, представленной рассмотренными древнерусскими памятниками (биркой и берестяной грамотой №715)? Априори эта локализация должна, например, удовлетворять таким требованиям: 1. Находиться в зоне греческого культурного влияния; 2. Обладать свидетельствами четко выраженной греческой нумерационной культуры; 3. Иметь информационные каналы с Новгородом, откуда происходят оба памятника.

Рассмотрим подробнее эти требования:

1. С античной древности возникали греческие поселения и города в юго-восточном Крыму (Херсонес, Феодосия, Пантикопей) и на противоположной стороне Керченского пролива в районе Таманского полуострова (Фанагория) при устье реки Кубани и в восточном Приазовье [41, с.278]. Славяне (анты) поблизости от этих территорий находились в IV–VI вв. [42, с.129, 131]. Они селились в устье Кубани, в Северном Причерноморье, Прикубанье и по нижнему течению Дона. Эта территория в историографии преимущественно хазарского периода носит название Приазовской или Азовско-Черноморской Руси и Донской Руси[5]. Свидетельство о прямых, возможно, достаточно продолжительных контактах этого

славяно-русского населения с Крымом как будто бы содержит договор князя Игоря с греками 945 г.

Здесь говорится по поводу, вероятно, крымской территории восточнее Херсонеса следующее: «Елико же есть городовъ на той части, да не имать волости князь рускии, да воюеть на техъ странахъ, и та страна не покоряется вамъ» [42, с.129; 47, с.64]. Из этих слов можно заключить, что греки хотели предостеречь себя от того, чтобы русские владели греческими территориями восточнее Херсонеса и воевали в этой части Крыма, осуществляя здесь захваты. Значит, в этом месте находились интересы Руси, что могло быть обусловлено наличием славянских поселений в непосредственном соседстве с греками. Это как будто бы подтверждается сообщением византийского историка Льва Диакона, что в X в. воины князя Игоря и позже его сына князя Святослава, совершив набег на греческие города, уходили на лодках в Керченский пролив («к Киммерийскому Боспору» [42, с.128–129; 48, с.39 и далее]), где располагалась Тмутаракань – южный форпост Руси.

Еще одним фактором, свидетельствующим в пользу славянского контакта с греческой культурой в этом районе, являются языковые реликты Северного Причерноморья. Их изучение привело академика РАН О.Н.Трубачева к выводу, что «вряд ли что-либо подобное оказалось бы возможным, если бы «потомки античного населения» не дожили в той или иной форме до появления в Северном Причерноморье славян» [42, с.131]. Из изложенных фактов следует, что славяне, по-видимому, не спорадически контактировали с греческим населением Крыма и Приазовья, а продолжительное время могли жить по соседству, очевидно, вступая с греками в разнообразные контакты. Причем, договорами русских князей с греками X в. документально зафиксированы военные, политические, дипломатические, торговые и юридические[6] отношения.

2. При раскопках Белой Вежи (Саркела) археологи обнаружили[7] стратиграфически датированный концом 830-х гг. фрагмент амфоры с записью двух чисел в греко-византийской «буквенной нумерации» (РП) 180 и (РО) 170. Запись сопровождалась фамильным знаком или знаком собственности (тамгой), правая часть которого не сохранилась (рис.8). Указанная датировка (830-е гг.) условна, «так как исследователи предполагают, что на горизонт он (фрагмент амфоры. – *Р.С.*) мог попасть из ямы, спущенной из слоев X в.» [51, с.245; со ссылкой на материалы по стратиграфии и датировке, представленные С.А.Плетневой].

В 1954 г. при раскопках Тмутаракани был найден кувшин середины X в. с записями на тулове двузначных и трехзначных чисел в греко-византийской «буквенной нумерации», как правило, округленных до десятка (рис.9) [52]. Числа располагались в пред-

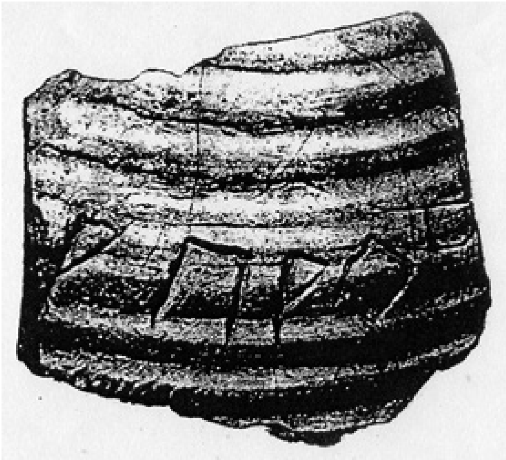


Рис.8. Запись чисел РП (180) и РО (170) в «буквенной нумерации» в сопровождении частично сохранившейся тамги. Белая Вежа (Саркел), 830-е гг. (?) или X в. (по А.А.Медынцевой)

варительно разграфленной сетке, рядами – одно под другим – с параллельно проставленными знаками-тамгами и отдельными словами, написанными греческими буквами. По-видимому, числа име-

Рис.9. Корчага с «бухгалтерскими» записями в «буквенной нумерации». Тмутаракань, середина X в. (по Б.А.Рыбакову)

ли торгово-хозяйственное происхождение и выражали количество или стоимость товара (изделий, сельскохозяйственной продукции, скота или птицы), либо суммы взимания налога, взыскания долга, или указывали количественный состав отрядов и пр. Академик РАН Б.А.Рыбаков считал, что «применительно к этой бухгалтерии на кувшине трудно сказать, является ли она русской или греческой, так как цифровые системы одинаковы» [53, с.57].

Известна подобная «бухгалтерская» запись на керамическом фрагменте, найденном в Белой Веже (Саркеле) и датируемом второй половиной X в. (рис.10) [49, с.14; 54, с.17–19]. По поводу этой надписи А.А.Медынцева недавно писала следующее: «В расшифровке Р.А.Симонова числа на этом фрагменте идут сверху вниз в таком порядке: (РО) 170, (РZ) 160, (РМ) 140 и, вероятно, (РП) 180. Помимо букв – цифровых записей, на фрагменте сохранились и остатки слов: слева от колонки цифр: NHKH (у Симонова ошибочно NHKO), справа в самой верхней и нижней строках – тамгообразные знаки»[8].

Рис.10. Прорись керамического фрагмента с «бухгалтерскими» записями в «буквенной нумерации». Белая Вежа (Саркел), вторая половина X в. (по М.И.Артамонову)

Изучение «бухгалтерских» записей приводит к заключению, что они основаны на традиции использования греко-византийской «буквенной нумерации» как обобщенной 27-значной системы, содержащей знание о способе выражения любых чисел в пределах 1–999. В наибольшем «ходу» представлены «буквенные цифры» десятков и два знака сотен (сто и двести), отсутствуют числа с разрядами тысяч. Встречающиеся немногие слова, выраженные греческими буквами, пока не поддаются однозначной расшифровке. Лучше обстоит дело с тамгообразными знаками. Как заключает А.А.Медынцева, «эти знаки можно связывать с местным тюркоязычным населением Тмутаракани (и, очевидно, Белой Вежи. – *Р.С.*). Скорее всего, они обозначали в данном случае или конкретное лицо или главу определенной семьи» [51, с.242].

Важное значение имеют следующие суждения А.А.Медынцевой: «Но следует предположить, что цифровые расчеты были знакомы и местным жителям Тмутаракани (и, очевидно, Белой Вежи. – *Р.С.*), так как долговые или какие-либо иные записи предполагают одинаковое владение ими обеих сторон, иначе счет мог быть записан по другой системе, например, при помощи зарубок на счетных бирках». И еще: «Но два остальных документа (то есть без учета числовой записи, возможно, датируемой 830-ми гг. или X в. – *Р.С.*) связаны с тем временем (середина и 2-я половина X в. – *Р.С.*), когда оба города – Тамань и Белая Вежа – входили в систему русских княжеств. Поэтому можно говорить о документированных свидетельствах использования цифровых записей (и буквенных – византийских?) в этих пунктах, где Русь тесно соприкасалась с византийским миром и Хазарией» [51, с.243, 245].

Также на керамических находках с территории Хазарии имеются единичные и парные знаки, которые некоторые археологи рассматривают в качестве возможных числовых записей в византийской «буквенной нумерации» [17, с.74–80]. Причем «пользоваться ею могли не только греческие, но и славянские, болгарские, хазарские и касожские купцы...» [17, с.80]. Примерно то же говорят археологи о единичных знаках на древнерусской керамике: «При археологических раскопках на территории Древней Руси нередки находки керамических сосудов или их остатков с выцарапанными на них отдельно стоящими буквенными знаками. Полагаем, что по крайней мере часть из них представляют собой цифры, обозначающие емкость сосуда, выраженную в каких-то мерах объема» [55, с.60]. Однако в отличие от «бухгалтерских» записей эти знаки на хазарской керамике не имеют качества бесспорно числовых.

Правда, в последние десятилетия знаки на средневековной керамике типа NH стали рассматриваться «несомненно, с цифровым значением 58» [55, с.107] (рис.11). Обосновывается это тем, в частности, что «NH обозначал объем амфоры в 58 секстариев – 31,668 л... Объем амфор XXIII типа, на которых встречается подобное сочетание, близок к 30–32 л» [56, с.176][9].

Следовательно, не только заинтересованный автор настоящей статьи полагает, что наука в виде «бухгалтерских» записей имеет прямое доказательство (не считая косвенных) использования «буквенной нумерации» на территориях славянского средневекового

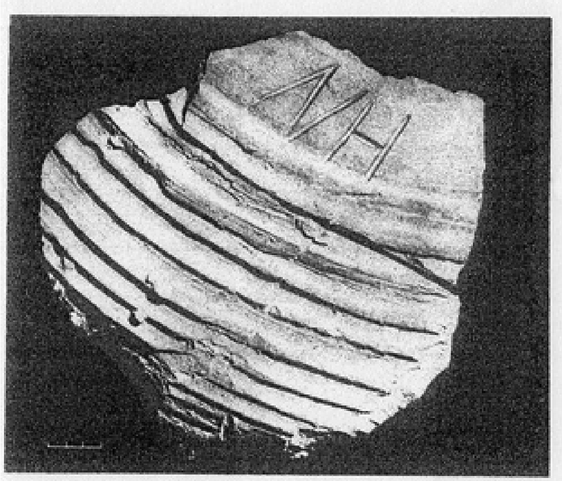


Рис.11. Предположительно число NH=58 на черепке амфоры, обнаруженной при разборке в середине XX в. руин Успенского собора Киево-Печерского монастыря 1073–1077 гг. (по С.А.Высоцкому). Возможно, выражает объем содержимого амфоры в 58 секстариев = 31,668 л (или 31,552 кг)

проникновения в южные области современной России. Так думают и профессиональные ученые-археологи, непосредственно работавшие с соответствующими памятниками и углубленно их изучавшие (Б.А.Рыбаков, А.А.Медынцева и др.). С тем, что «бухгалтерские» записи свидетельствуют о возможности проникновении греко-византийской «буквенной нумерации» в жизнь Руси, сейчас согласны не только археологи и историки науки, но и историки языка: «Даже если исходить из того, что найденные фрагменты записей имеют греческое происхождение, это не отменяет возможность проникновения цифирной грамоты в хозяйственно-бытовую жизнь Древней Руси» [59, с.50].

«Бухгалтерские» записи X в. не найдены на территории Киевской Руси, а встречаются восточнее Днепра в районе, известном как Азовско-Черноморская Русь и Донская Русь, районе, занятом Хазарией (примерно в VIII–IX вв.) и включавшем Тмутаракань на юге и Белую Вежу (Саркел) у излучины Дона (рис.12). Донские славяне выходили с днепровского Правобережья примерно с VIII в. [60, с.26–31]. «Впрочем, славяне появились здесь скорее еще в более раннее время..., чьи типичные жилища-полуземлянки обнаруживают в долине Оскола с VI в. и даже уже с V в. ...И хотя здесь была уже зона хазарского влияния, население всегда оставалось разноплеменным конгломератом из славян, иранцев-алан и тюрок... Внимание научной истории как бы соскальзывает с этого

Рис.12. Карта с Тмутараканью на Таманском полуострове (сейчас западная оконечность Азовско-Черноморского побережья Краснодарского края) и Белой Вежей (Саркелом) у излучины Дона (сейчас район Цимлянского водохранилища)

промежуточного, малоизвестного объекта, сосредоточиваясь на изучении двух главных субъектов древней восточноевропейской истории – Киевской Руси и Хазарского каганата» [42, с.140–141].

Обсуждая две рассмотренные находки из Новгорода (деревянную бирку и берестяную грамоту №715), следует иметь в виду, что «Новгородская земля была одной из периферий Древней Руси, на то время, быть может, – самой дальней. Так получилось, что именно новгородская окраина отпечаталась вместе со своим древним говором в древнерусской письменности, возможно, лучше всего, но это надлежит понимать в том смысле, что о других самобытных окраинах Древней Руси (например, о ее древнем Юго-Востоке, стертом Степью) мы просто ничего не знаем» [42, с.16–17]. Тем ценнее «бухгалтерские» записи X в. из района Азовско-Черноморской Руси, четко и однозначно отражающие традицию хозяйственного использования греко-византийской «буквенной нумерации».

3. Рассмотренные памятники (бирка и грамота №715) найдены в Новгороде, но отраженные в них традиции могли возникнуть на юге. Вывод о движении русской культуры с юга на север, в частности, основан на материалах «Этимологического словаря славянских языков», которые академик О.Н.Трубачев собирал и изучал долгие годы. Обобщая эти данные, он писал: «...Нелишним считаю напомнить, что нам ведь полезно представить себе не только «откуда пошел Киев», но и **куда** (выделено О.Н.Трубачевым. – *Р.С.*) он пошел. При этом, если на Украине Киев один, а в Белоруссии можно насчитать добрый пяток малых Киевов и еще больше их дальше на север, на Верхней Волге, в Псковской и Новгородской земле, то опытный глаз видит, что это и есть магистраль древней русской истории, русского движения – с юга на север, от Киева к Новгороду» [42, с.56–57].

На основе славянской ономастики и других данных О.Н.Трубачев установил, что центр ареала Руси находился южнее Киева: «Точно так же – с Юга на Север – была перенесена и расширительно употреблена Русь северопонтийская, таврическая, придонская, приазовская – на Русь славянскую, в том числе днепровскую, и так – вплоть до «Руси» варяжской...» [42, с.157]. Однако по археологическим данным, присутствие славянских поселений на юге почти не прослеживается: «Археологически южная колонизация почти неуловима» [61, с.237]. В этой связи актуальность приобретают поиски «того, что осталось от Азовско-Черноморской Руси... А осталось от древнего славянского Юго-Востока в целом немного. Вычтя всю потенциальную собственную письменность, которая имела шансы возникнуть и получить развитие (ведь все-таки «история начиналась на юге»), мы получим этот невеликий остаток: побочные традиции (византийские и восточные историки и географы, очень скудно – агиография, в том числе – славянская, мы обращаемся и будем к этому обращаться) и ономастика (топонимия, гидронимия и т.д.)» [42, с.134].

Положение о южном очаге русской счетной культуры как будто бы не подтверждает информация Константина Багрянородного о том, что счет 80 шкурками меха (очевидно, по два «сорочка») применялся в середине IX в. южными славянами, конкретно – сербами. Получалось, что этим как бы документально фиксируется источник соответствующего счета на Балканах, а не на Юге Руси. Однако данные по ономастике, изученные академиком О.Н.Трубачевым, показывают, что процесс культурных заимствований мог проходить именно по южному маршруту. Сейчас сербы живут (как и прежде, рядом с хорватами) на Балканах, которые славяне заселяли в середине I тысячелетия н.э. При этом в VI–VII вв. сербы и хорваты или некие неславянские народы, давшие славянам эти названия, находились в Предкавказье [42, с.142], то есть примерно там, где селились в указанное время анты (славяне) и их потомки.

Подвести итог можно словами О.Н.Трубачева: «Ведя наименование Руси из Северного Причерноморья, мы вправе вспомнить, что оттуда же, согласно древним свидетельствам и надежной этимологии, идут и названия двух других славянских народов – сербов и хорватов, которым для того, чтобы внедриться в славянский мир, предстояло проделать гораздо более долгий путь, чем названию Руси славянской, **одним из факторов формирования которой было соседство с северным берегом Черного моря** (выделено О.Н.Трубачевым. – *Р.С.*). Не будет большим преувеличением признать здесь наличие очага этнообразующих влияний» [42, с.158].

Можно сделать предположение, что парный счет «сорочк**а**ми» и др. предметами мог возникнуть или локализоваться на юге Руси примерно в VI–VII вв. и отсюда распространиться в двух направлениях: западном (Балканском) и северном (Новгородском). Тогда же для обозначения двух «сорочков» меха мог сформироваться числительный знак 80 (40 + 40), выраженный двумя «дельтами» треугольной формы, модификация коего в виде «бантика» представлена на Новгородской бирке второй половины X в. При этом следует учесть, что знак типа «бантика» был достаточно распространенным на керамике античного и средневекового Крыма, а также Саркела [17, с.74; 56, с.174].

Сложнее связать происхождение числового заговора берестяной грамоты №715, содержащего христианские мотивы, с Югом Руси. Конечно, христианская культура через греческих поселенцев Крыма и Тамани могла распространяться на славянское население соседних районов, но могла и не передаваться ему. Важно располагать данными если не о прямом контакте со славянами христианизированного местного населения, то хотя бы косвенном. К таким данным, по-видимому, можно отнести свидетельство Иоанна Златоуста IV в., который в проповеди сообщал, что скифы (как и сарматы, и фракийцы) перевели на свой язык тексты из Библии [62, с.109]. По данным академика О.Н.Трубачева, «современной науке неизвестно ни одной строчки связного текста на скифском и сарматском языках, практически ничего не сохранилось и из фракийской письменности. Кроме того, мы знаем, что в позднеантичное и раннесредневековое время объем понятия «скифский» был очень расплывчат, в него могли входить и другие остаточные языки и этносы региона» [42, с.169].

Из Жития Стефана Сурожского известно о крещении некоего «русского князя» в Крыму в конце VIII в. [63, с.71]. По мнению академика О.Н.Трубачева, этого «русского князя» «нет нужды поспешно зачислять в славяне или русские... Ситуация, когда в том же Крыму имеется этнос под названием Рос/Рус, а славянской Руси практически еще нет, не должна нас шокировать; речь идет о вполне жизненной, переходной ситуации» [42, с.168]. «Русский князь» Жития Стефана Сурожского имел имя Бравлин, реконструируемое из славянского «бранлив», то есть «воинственный» [46, с.82–83; 64, с.21; 65, т.3, с.95–96; 66, с.180–182]. Это значит, что в войске Бравлина были славяне (возможно, потомки антов), которые своего воеводу характеризовали как «воинственного», что не является достаточным основанием считать самого «русского князя» этническим славянином. Однако через принятие христианства Бравлином влияние этого вероучения могло распространиться на славян его окружения[10].

Обобщая вышеприведенные требования (пп.1–3), можно предположить, что уже к концу VIII в. славяне Юга современной России могли иметь отдельные представления из христианства через контакты с греческими колонистами и другими соседними народами Крыма и Предкавказья. Под видом «скифов» Иоанна Златоуста еще в IV в. верхушка антов (славян) могла принять христианство. Возможно, тогда же анты через торговые связи могли познакомиться с греко-византийской «буквенной нумерацией» и поразились ее математической возможностью выражать любые числа. Под этим впечатлением полуязычники-славяне, лишь соприкоснувшиеся с христианским вероучением, могли создать или усвоить числовой заговор, сохранившийся, возможно, в адаптированном варианте в берестяной грамоте №715.

Датировать, когда это произошло, очень трудно. Однако, по-видимому, это могло случиться до IX–X вв., когда использование «буквенной нумерации» стало на территории Азовско-Черноморской Руси обыденным делом, как показывают «бухгалтерские» записи на керамике; остается широкий период IV–VIII вв. Возможно, последующие находки источников и исследования позволят внести уточнения в указанную хронологию. Тем не менее, можно предварительно заключить, что имеющимся данным наиболее соответствует время VII–VIII вв., когда могли появиться на юге современной России первоначальные образцы обоих новгородских памятников (прототип деревянной бирки с «бантиком» и протограф заговора берестяной грамоты №715) в их первоначальном виде.

Заключение

Заслуживает внимание то, что славянскую письменную культуру Юго-востока Руси академик О.Н.Трубачев охарактеризовал, как «потенциальную собственную письменность, которая имела шансы возникнуть и получить развитие» [42, с.134]. Тем самым он поставил вопрос о потенциальной возможности существования исчезнувшей или не обнаруженной славянской письменности в южных пределах современной России. В этом свете изложенные новые результаты выглядят открывающими, хотя в чем-то неожиданную, но предвидимую страницу истории древней письменной культуры Руси.

Новгородские находки (бирка и грамота №715) могут свидетельствовать не только о том, что образцы такой письменности действительно могли быть, но и как они примерно выглядели, достаточно отчетливо отражая конкретные математические (нумерационные) знания. Вместе с тем, яснее становится перспективность научного направления в изучении истории «книжной культуры» в трактовке члена-корреспондента РАН В.И.Васильева, как многоаспектной системы на стыке истории, книговедения, теории и истории культуры, истории науки и техники, социологии. Научного направления, которое не исключает «необходимость изучения истоков письменности», «письменную книжную культуру» [68, ч.1, с.453, 454; 69, с.23–24].

В науке обсуждается относительно новый аспект происхождения славянской письменности, основанный на идее, высказанной еще в 1960-х гг., что помимо глаголицы и кириллицы у славян существовал третий вид письма в виде византийской «буквенной нумерации», восходящей к греческой ионийской нумерации: «Однако независимость нумерации, употреблявшейся в кириллице, от последней позволяет ставить вопрос о существовании у восточных славян самостоятельной традиции употребления ионийской нумерации (точнее: греко-византийской нумерации. – *Р.С.*) до проникновения к ним кириллицы через болгар» [70, с.33].

Этой идее посвятила отдельное исследование Л.П.Жуковская с применением метода комбинаторики. Она взяла за основу три вида письма: греко-византийскую цифровую систему и две фонетических (глаголицу и кириллицу). Математически три указанных письменных системы образуют шесть перестановок. Анализируя вероятность каждой из них, Л.П.Жуковская пришла к выводу, что до глаголицы и кириллицы славяне употребляли греческие буквы в цифровом значении: «До изобретения специальной славянской азбуки у славян существовала устойчивая традиция употребления букв греческого алфавита для записи чисел» [71, с.42; 72, с.169–176]. Позже соответствующая идея со ссылкой на ее авторов была поддержана С.А.Высоцким [73, с.230].

В последнее время в рамках указанной концепции О.Ф.Жолобов высказал предположение, что распространение у славян именно кириллицы, а не глаголицы, обусловлено использованием греко-византийской «буквенной нумерации»: «Можно предположить, что употребление греческой буквенной цифири у славян стало причиной развития и закрепления кириллической системы письма. В противном случае трудно объяснить распространение нового алфавита вместо славянской глаголицы. В сравнительно-типологическом плане это предположение кажется естественным. Так, известно, что древнейшие системы письма у истоков своих связаны с обозначением числительных» [59, с.49].

К подобной идее, что кириллица изначально (феноменологически) задана определенным математическим кодом, пришли недавно болгарские ученые [74, с.114–116].

Известно, что на восприятие славянами того или иного вида письма влияла также та его форма, которая употреблялась соседями. К примеру, западные славяне издревле применяли латиницу, причем, древнейшим сохранившимся образцом славянского письма X в. являются «Фрейзингенские отрывки», написанные латиницей (а не глаголицей или кириллицей) [13, с.449]. Древние славяне Юга современной России жили в окружении народов, имевших помимо греческой письменности свои письменные системы, например, тюркскую рунику, еврейское письмо и др.

В указанном отношении представляет интерес сравнительно недавно обретенный историками документ, известный как «киевское письмо», первыми издателями и исследователями датируемое около 930 г., но сейчас относимое к концу IX – началу X вв. ([75, с.209, 481]; см. комментарий В.Я.Петрухина в кн.: [76, с.217]). Документ представляет собой рекомендательное письмо, попавшее из древнего Киева в Египет и здесь найденное в средневековых развалинах Каирского пригорода. Письмо написано на древнееврейском языке, скреплено подписями людей, имевших хазарские и славянское (Гостята) имена и завизировано тюркским руническим письмом [42, с.40–41; 77] (рис.13). Значит, восточные славяне в IX–X вв. в той или иной степени, возможно, использовали в своем обиходе еврейское[11], а, может быть, и тюркское письмо.

Заданный В.И.Истриным примерно полвека назад вопрос «Зачем же славянам самостоятельно «изобретать» то, что им было известно от их соседей?» [13, с.443], возможно, теперь получает ответ в свете указанной роли греко-византийской «буквенной нумерации». Если последняя могла быть «причиной развития и закрепления кириллической системы письма», то при ее использовании отпадала необходимость заимствования славянами еврейского и др. видов письма. В этой связи приобретают особое значение для истории славянской письменной культуры памятники, фиксирующие раннее знакомство славян с греко-византийской нумерацией.

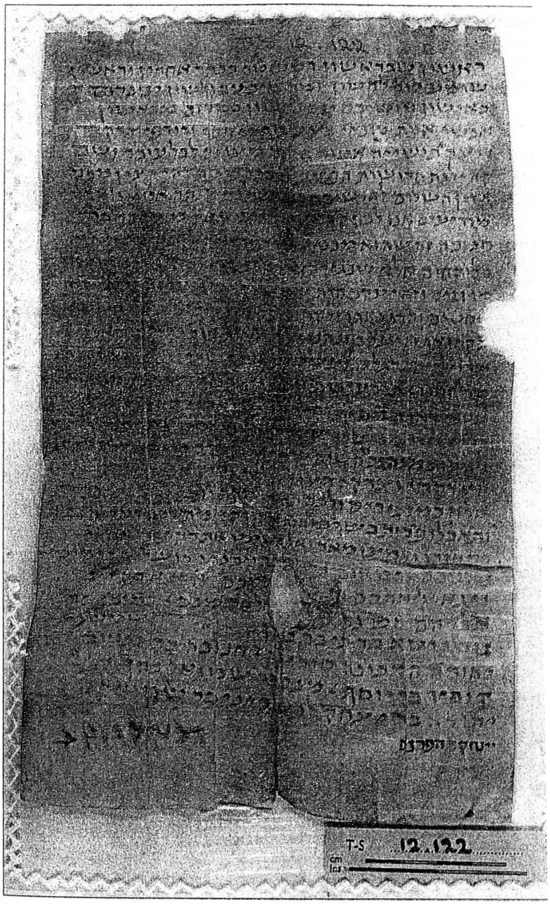


Рис.13. «Киевское письмо» на древнееврейском языке с тюркской записью, предположительно «я прочел», конец IX – начало XI вв. Университетская библиотека Кембриджа (MS N-S / Glass / 12.122)

«Буквенная нумерация» также имеет важное значение для изучения предыстории научной мысли. Первый русский календарный трактат «Учение им же ведати человеку числа всех лет», написанный в 1136 г. Кириком Новгородцем (1110 – не ранее 1156/1158), которому исполнилось в 2010 г. 900 лет со дня рождения, посвящался математике, астрономии и хронологии, в том числе и не потерявшему актуальности вопросу математической (числовой) природы времени [67, с.33; 79; 80; 81]. Упоминаемый в настоящей статье В.Ф.Райан высказывал недоумение по поводу кажущегося несоответствия высокого научного содержания указанного труда

Кирика общему интеллектуальному уровню культуры Руси [82]. Сейчас становится понятно, что это недоумение обусловлено в значительной степени недостаточной изученностью древнерусских историко-математических источников. Как показывают рассмотренные два из них (деревянная бирка и числовой заговор берестяной грамоты №715), необходимы значительные исследовательские усилия и знания для поиска и правильной их трактовки. Это может раскрыть новые, еще не разгаданные страницы предыстории математической культуры Руси.

Историческое формирование рассмотренных артефактов на Руси шло по схеме архаического (магического) восприятия элементов знания. Оно соответствует раннеписьменному периоду «черт и резов», проявлением которого был счет и магическое гадание. Нумерационные представления формировались в контексте магии следующим образом. Для «бантика» (как числового знака 80) они развивались через сокровенное представление об особо значимых числах 4 и 10 – к магическому его («бантика») восприятию как оберега. В заговоре берестяной грамоты №715 словом тридевять (как выражением математической сущности 27-значной «буквенной нумерации») отражались нумерационные представления о свойстве «буквенной нумерации» передавать любые числа, что фиксировалось магическим восприятием этого слова (тридевять) в качестве важной составной части формулы заговора.

Соответствующие нумерационные субстратные знания могли возникнуть у поселившихся в Азовско-Черноморском регионе ближайших потомков славян (антов) в VII–VIII вв. Они (нумерационные знания) дошли до нас в реликтовом виде магических архетипов оберега и заговора, представленных позднейшими новгородскими памятниками X и XIII вв. Древнейшие славянские нумерационные знания, восходящие к VII–VIII вв., возможно, отражены в частично сохранившихся в указанном регионе «бухгалтерских» числовых записях на керамике Белой Вежи (Саркела) и Тмутаракани IX(?)–X вв., которые находят археологи.

В современной славистической науке обращается внимание на важность знакомства населения Руси с традициями иноземной письменности для складывания самостоятельной письменной культуры. Так, С.Франклин отмечает, что с конца VIII до начала XI вв. использование на территории Руси восточных монет могло знакомить «с арабским письмом в его зрительных образах», что «существование целой массы памятников арабской письменности, инородных по своему происхождению, наводит на мысль, что более успешными могут оказаться **поиски следов других разновидностей ученого письма** (выделено мною. – *Р.С.*), также привозных...» [75, с.207, 209–210]. «Бантик» в значении 80 на новгородской деревянной счетной бирке X в. можно рассматривать в качестве разновидности ученого письма на привозной греко-византийской основе.

В отличие от «бантика», с достаточностью выражавшего 80 (как 40+40), числовой заговор берестяной грамоты XIII в. №715 лишь с необходимостью может трактоваться в качестве реминисценции 27-значной «буквенной» нумерации. Следовательно, роль двух анализируемых памятников в источниковедческом отношении не равноценна. Фактически наука к настоящему моменту располагает только одним достаточно надежным памятником в указанном отношении – новгородской счетной биркой X в. с 80-ю простыми нарезками и нумерационно эквивалентным им «бантиком».

Отмеченная «мизерность» источниковой базы настоящего исследования находит некоторую аналогию в «большой» науке. В последнее время популярнейшее научное направление в астрономии по поиску внеземных цивилизаций путем «прослушивания» космоса сворачивает свои программы по причине бесперспективности. Альтернативой этим исследованиям предложен поиск архаичной внеземной жизни на самой Земле.

Мысль такова: если гости из космоса неоднократно посещали Землю, то эта внеземная жизнь может сохраниться в потаенных и труднодоступных местах планеты (пещерах, пустынях, горах, вулканах и пр.), имея микроскопические размеры. Этот научный проект роднит с настоящей статьей мизерность исходного материала, сложность его выявления и изучения. Указанный подход решительно отличается от поиска столь любимых фантастами и сумасшедшими пресловутых «зеленых человечков» с их летающими тарелками, что перекликается с попытками замещения фальсификатами типа «Влесовой книги» кропотливой научной работы по изучению древнерусской протокультуры.

Примечания

[1] Возможно, не совсем безосновательным было бы предположение, что парность славянского счета, о котором сообщал Константин Багрянородный, имеет аналогию в парности главных небесных богов (языческих) у восточных славян (Перун и солнечный бог Хорс или Дажьбог), представленной, например, двумя языческими изваяниями у Пскова [9]. Это может иметь определенную связь с парным членением индоевропейского пантеона богов [10, с.64–66].

[2] Согласно «Деяниям апостолов», включенным в Новый Завет Библии, Дионисий Ареопагит был обращен в христианство апостолом Павлом (I в. н.э.). «Те сочинения с именем Дионисия Ареопагита, что дошли до нас (включая текст «О небесной иерархии». – *Р.С.*), стали известны в 533 г. в Константинополе на частном соборе...». Есть сомнения в принадлежности этих сочинений библейскому Дионисию Ареопагиту, в связи с чем их автором называют некоего не установленного по имени писателя, условно Псевдо-Дионисия Ареопагита, жившего в конце V – начале VI вв. [26, с.7, 8].

[3] См.: [31, с.31]. В 2008 г. археологами в Новгороде найдена берестяная грамота №966 (палеографически датируемая XIII в.) с записью на нижнем поле ряда древнерусских «буквенных цифр» от 1 до 8. Ранее обнаруженные в разные годы три берестяные грамоты XIII–XIV вв., также посвященные «буквенной нумерации», имели учебное или справочное назначение. Редкая особенность б.г. №966 состоит в том, что ее автор использовал оставшееся место от основного места грамоты для «пробы пера, записи разных цифр» [32, с.8].

[4] См.: [36]. Возможно, некогда существовавшее реликтовое чувство подъема/восторга при познании нового в современном менеджменте научной деятельности трансформировалось в «истинное личное удовлетворение» от проведенного исследования. См., например: [37, с.21].

[5] См., например: [42, с.127; 43–45]. Некоторые авторы сомневаются в правомерности выделения Азовско-Причерноморской Руси в качестве древнерусского этнообразующего центра; см., например: [46, с.11].

[6] Так, здесь отмечалось (удостоверялось) право русских наследников на имущество умершего в Византии купца.

[7] [49, с.75, рис.59]. Археологи, по-видимому, считают последовательной смену названия города Саркела на Белую Вежу в связи с его взятием в 965 г. кн. Святославом. Это, например, следует из такой фразы: «Знаки (на керамике. – *Р.С.*) есть и в хазарском, и в беловежском слое Саркела» [17, с.75]. По просьбе правителей Хазарии крепость Саркел построили византийские инженеры при участии большого количества местного населения в 830-х гг. (перед 837 г.) [50, с.15]. Этимология свидетельствует, что слово Саркел известно на Дону в начале IX в. Оно, по-видимому, могло быть тюркской параллелью древнерусского названия Белая Вежа: «...На Дону в начале IX в. документирован хазарский Сар-кел, буквально (по-древнерусски) – Белая Вежа, т.е. “белый дом”» [42, с.54].

[8] См. работу А.А.Медынцевой: [51, с.243]. Ценно, что А.А.Медынцева проверила все до буквы и не нашла погрешностей в расшифровке чисел. Ее уточнение одной буквы в указанном слове относится к прориси, сделанной не Симоновым, а Артамоновым, который за четверть века до него исследовал соответствующую запись, однако не определил ее числовой смысл.

[9] См. также: [17, с.75; 57, с.112]. В метрологии величина секстария указывается также в граммах: 1 секстарий = 544 г. [58, с.407]. Тогда 58 секстариев будут равны 31,552 кг.

[10] В современной историографии первые шаги христианизации славян Южной Руси относят к 860-м гг. («первое крещение») [67, с.7, 15].

[11] По мнению С.Франклина, «в отношении письменной культуры Древней Руси одним из самых спорных и неясных остается вопрос о том, каковы были связи ее с еврейской письменностью». Он заключает: «Вероятно, что здесь в течение длительного времени, от случая к случаю или даже без перерыва, находил применение еврейский алфавит. Что же касается умения читать и понимать еврейскую письменность – среди уроженцев Руси это было редким искусством: возможно, столь редким, что оно и вовсе не встречалось» [75, с.210, 212]. На Руси (или шире – в славянской ойкумене) были знакомы с еврейским направлением письма справа налево. Кажется, впервые это зафиксировано в перечне дат «пасхальных полнолуний» («еврейской Пасхи»), воспроизведенных справа налево в виде глаголической приписки XII(?) в. в старославянском глаголическом «Синайском служебнике» XI в. На Руси соответствующий (по-еврейски) порядок «посхальных полнолуний» ранее всего известен в «Кононнике Скалигера» 1331–1332 гг. в «Руке жидовск[ой]» [78, с.477–479].

В.Е.Флерова отметила среди знаков хазарской тарной керамики возможные случаи так называемой «славянской инверсии», ссылаясь на мои работы [17, с.74]. Однако подобные примеры записи чисел для старших разрядов справа налево (например, 40.900 вместо 900.40, то есть 940) в славянской практике не встречаются. Возможно, указанные хазарские образцы обусловлены не «славянской инверсией», а направлением еврейского письма справа налево.

Список литературы

1. *Соболев Н.А.* О некоторых причинах коммерческого успеха псевдонаучных изданий // Книговедение: Новые имена. М., 1998. Вып.3. С.52–55.
2. *Соболев Н.А.* Проблема изданий фальсификатов // Что думают ученые о «Велесовой книге». СПб., 2004. С.176–198.
3. Источниковедение: Теория. История. Метод. Источники российской истории: Учеб. пособие / *И.Н.Данилевский*, *В.В.Кабанов*, *О.М.Медушевская*, *М.Ф.Румянцева*. М., 1998.
4. *Симонов Р.А.* О греко-византийской основе «буквенных цифр» кириллицы // Древняя Русь. Вопросы медиевистики. М., 2002. №4(10). С.48–56; 2003. №1(11). С.24–29.
5. *Симонов Р.А.* Математическая и календарно-астрономическая мысль Древней Руси. М., 2007.
6. *Симонов Р.А.* Нумерация как атрибут культуры книги. К 900-летию Кирика Новгородца // Славянское книгопечатание и культура книги: Материалы Международной научной конференции (Минск, 16–18 сентября 2009 г.). М., 2009. С.76–80.
7. *Ковалев Р.К.* Бирки-сорочки: упаковка меховых шкурок в средневековом Новгороде // Новгородский исторический сборник. СПб., 2003. Вып.9(19). С.2–43.
8. *Константин Багрянородный.* Об управлении империей. М., 1991.
9. *Кирпичников А.Н.* Древнерусское святилище у Пскова // Древности славян и Руси. М., 1988. С.34–37.
10. *Дюмезиль Ж.* Верховные боги индоевропейцев. М., 1986.
11. *Сквайрс Е.Р.*, *Фердинанд С.Н.* Ганза и Новгород. М., 2002.
12. *Симонов Р.А.* Древнейший памятник математической культуры Древней Руси 2-й половины X века // Труды вторых Колмогоровских чтений. Ярославль, 2004. С.96–105.
13. *Истрин В.А.* Возникновение и развитие письма. М., 1965.
14. *Лихачев Д.С.* Исторические предпосылки возникновения русской письменности и русской литературы // Вопросы истории. 1951. №12. С.7–25.
15. *Гардтхаузен В.* Греческое письмо IX–X столетий // Энциклопедия славянской филологии. СПб., 1911. Вып.3. С.48.
16. *Высоцкий С.А.* Средневековые надписи Софии Киевской. Киев, 1976.
17. *Флерова В.Е.* Граффити Хазарии. М., 1997.
18. *Gardthausen V.* Griechische Palaeographie. Bd.2. Leipzig,1913. S.120, 152–158. Taf. 2–3.
19. *Пейчев Б.* Държани под стража // За буквите. София, 1985. №10. С.7.
20. *Черноризец Храбр.* О письменехь / Подг. *А.Джамбилука-Коссова*. София, 1980.
21. *Райан В.Ф.* Баня в полночь: Исторический обзор магии и гаданий в России / Пер. с англ. М., 2006.
22. Граффити античного Херсонеса. Киев, 1976.
23. *Янин В.Л.*, *Зализняк А.А.* Новгородские грамоты на бересте (Из раскопок 1990–1996 гг.). Т.X. М., 2000.
24. *Зализняк А.А.* Древнейший восточнославянский заговорный текст // Исследования в области балто-славянской духовной культуры. Заговор. М.,1993. С.103–116.
25. *Жолобов О.Ф.* Тридевято анеело тридевя ароханело (функции и формы числительных в берестяной грамоте №715) // Вопросы языкознания. М., 2005. №3. С.32–46.
26. *Прохоров Г.М.* Памятники переводной и русской литературы XIV–XV веков. Л., 1987.
27. *Дионисий Ареопагит.* О небесной иерархии. СПб., 1997.
28. *Павел Флоренский.* Столп и утверждение Истины. М., 1914.
29. *Паршин А.Н.* Средневековая космология и проблема времени // Вестник русского христианского движения. Париж–Москва, 2004. №188. С.117–153.

30. *Симонов Р.А.* Берестяная грамота №715 XIII века с числовым заклинанием // Труды четвертых Колмогоровских чтений. Ярославль, 2006. С.284–290.
31. *Зализняк А.А.* Древнейшая кириллическая азбука // Вопросы языкознания. М., 2003. №2. С.29–43.
32. *Зализняк А.А.*, *Янин В.Л.* Берестяные грамоты из новгородских раскопок 2008 г. // Вопросы языкознания. М., 2009. №4. С.5–8.
33. *Зализняк А.А.* Проблемы изучения Новгородского кодекса XI в., найденного в 2000 году // Вестник РГНФ. М., 2004. №3(36). С.160–178.
34. *Симонов Р.А.* Откуда есть пошла арифметика на Руси: о предшественнике Кирика Новгородца – иеромонахе Исаакии // Вопросы истории естествознания и техники. М., 2006. №1. С.52–60.
35. *[Епифаний Премудрый.]* Слово о житии святого отца нашего Стефана, бывшего в Перми епископа // Памятники старинной русской литературы, издаваемые графом Григорием Кушелевым-Безбородко. СПб., 1862. Вып.4.
36. *Пойа Д.* Математическое открытие. М.,1970.
37. *Бут У.К.*, *Коломб Г.Д.*, *Уильямс Д.М.* Исследование. 2-е изд. / Пер. с англ. М., 2007.
38. *Черч А.* Введение в математическую логику. Т.1 / Пер.с англ. М., 1960.
39. *Кондаков Н.И.* Логический словарь-справочник. 2-е изд. М., 1975.
40. *Лихачев Д.С.* Развитие русской литературы X–XVII веков. Эпохи и стили. Л., 1973.
41. Словарь античности / Пер. с нем. М., 1989. (карта «Греческая колонизация 8–6 вв. до н.э.», С.160–161).
42. *Трубачев О.Н.* В поисках единства. 3-е изд. М., 2005.
43. *Смирнов А.П.* К вопросу об истоках Приазовской Руси // Советская археология. М., 1958. №2. С.19–30.
44. *Гадло А.В.* Проблема Приазовской Руси и современные археологические данные о Южном Приазовье VIII–X вв. // Вестник ЛГУ. Л., 1968. №14. Вып.3. С.11–17.
45. *Николаенко А.Г.* Северо-западная Хазария или Донская Русь? // Древности Приоскольской лесостепи: Заметки краеведа. Методическое пособие. Волоконовка, 1991.
46. *Гумилев Л.Н.* Древняя Русь и Великая степь. М., 1992.
47. Памятники литературы Древней Руси. Начало русской литературы. XI – начало XII века / Сост. и общ. ред. *Л.А.Дмитриева*, *Д.С.Лихачева*. М., 1978.
48. *Карышковский П.О.* Лев Диакон о Тмутараканской Руси // Византийский временник. М.–Л., 1960. Т.17. С.39–50.
49. *Артамонов М.И.* Саркел – Белая Вежа // Труды Волго-Донской археологической экспедиции: Материалы и исследования по археологии СССР. М.–Л., 1958. Вып.62.
50. *Плетнева С.А.* Саркел и «шелковый» путь. Воронеж, 1996.
51. *Медынцева А.А.* Грамотность в Древней Руси (По памятникам эпиграфики X – первой половины XIII века). М., 2000.
52. *Майстров Л.Е.* О математических знаках и терминах, встречающихся в археологических памятниках Древней Руси // Историко-математические исследования. М.,1957. Вып.10. С.601–604.
53. *Рыбаков Б.А.* Русская эпиграфика X–XIV вв. (Состояние, возможности, задачи) // История, фольклор, искусство славянских народов. V Международный съезд славистов (София, сентябрь 1963): Доклады советской делегации. М., 1963. С.34–72.
54. *Симонов Р.А.* Математическая мысль Древней Руси. М., 1977.
55. *Высоцкий С.А.* Киевские граффити XI–XVII вв. Киев, 1985.
56. *Романчук А.И.* Граффити на средневековой керамике из Херсонеса // Советская археология. М., 1986. №4. С.171–180.

57. *Popescu E.* Inscriptiile grecesti si latine din secolete IV–XIII descoperite in Romania. Bucuresti, 1976. №66. P.102–129.
58. *Каменцева Е.И.*, *Шостьин Н.А.* Метрология // Советская историческая энциклопедия. М., 1966. Т.9. Стб.403–415.
59. *Жолобов О.Ф.* Древнеславянские числительные как часть речи. Казань, 2007.
60. *Винников А.З.* Славянские поселения на р. Воронеже // Древности славян и Руси. М., 1988. С.26–31.
61. *Рыбаков Б.А.* Киевская Русь и русские княжества XII–XIII вв. М., 1982.
62. *Ebert M.* Sudrussland im Altertum. Bonn–Leipzig, 1921.
63. *Fermeglia G.* Razmisljanja o starim slavenskim azbukama // Slovo 36, 1986.
64. *Гумилевский Ф.* История русской церкви. М., 1888.
65. *Васильевский В.Г.* Труды. В 4 т. Пб.–Пг.–Л., 1908–1930.
66. *Vernadsky G.* The Origins of Russia. Oxford, 1959.
67. Россия. Хроника основных событий. IX–XX века / Редколл.: чл.-корр. РАН *В.П.Козлов* и др.; предисл. *В.Ю.Афиани*, *И.И.Кудрявцев*. М., 2002.
68. *Васильев В.И.* Расширение географии и развитие исследований по проблемам книжной культуры // Материалы XII Международной научной конференции по проблемам книговедения (Москва, 28–30 апреля 2009 г.): В 4 ч. М., 2009. Ч.1. С.451–454.
69. *Васильев В.И.* Современные тенденции в исследованиях по истории книжной культуры // Славянское книгопечатание и культура книги: Материалы Международной научной конференции (Минск, 16–18 сентября 2009 г.). М., 2009. С.17–29.
70. *Симонов Р.А.* О некоторых особенностях нумерации, употреблявшейся в кириллице // Источниковедение и история русского языка. М., 1964. С.14–36.
71. *Жуковская Л.П.* К истории буквенной цифири и алфавитов у славян // Источниковедение и история русского языка. М., 1964. С.37–43.
72. *Симонов Р.А.* К вопросу о греко-византийской нумерации как древнейшей письменной системе у славян // Палеография и кодикология: 300 лет после Монфокона. М., 2008. С.169–176.
73. *Высоцкий С.А.* Средневековые надписи Софии Киевской (По материалам граффити XI–XVII вв.). Киев, 1976.
74. *Денчев Ст.*, *Куманова А.* Графемите на кирилицата в естествената знакова класификация на писмото на homo sapiens'а (Към аксиологичния въпрос за методологията на писмената ера) // България в културното многообразие на Европа. Шеста национална научна конфененция с международно участие. София, 1 ноември 2008 г. София, 2009. С.109–121.
75. *Франклин С.* Письменность, общество и культура в Древней Руси (около 950 –1300 гг.). СПб., 2010.
76. *Гольб Н.*, *Прицак О.* Хазарско-еврейские документы X века. М.–Иерусалим, 1997.
77. *Golb N.*, *Pritsak O.* Khazarian Hebrew documents of the Tenth century. Cornell university press. Ithaca–London, 1982.
78. *Симонов Р.А.* О греческих истоках древнерусского мнемонического способа расчета Пасхи // Институт истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова. Годичная научная конференция, 2000. М., 2000. С.477–479.
79. *Симонов Р.А.*, *Мильков В.В.* Кирик Новгородец (XII век) как древнерусский ученый – мыслитель // Вестник Российского гуманитарного научного фонда. М., 2004. №4(37). С.50–65.
80. Календарно-хронологическая культура и проблемы ее изучения: К 870-летию «Учения» Кирика Новгородца // Материалы научной конференции «Календарно-хронологическая культура и проблемы ее изучения: К 870-летию «Учения» Кирика Новгородца». Москва, РГГУ, 11–12 декабря 2006 г. / Отв. ред. *Р.А.Симонов*. М., 2006.

81. *Пчелов Е.В.*, *Симонов Р.А.* Конференция «Календарно-хронологическая культура и проблемы ее изучения» // Вопросы истории естествознания и техники. М., 2007. №2. С.207–211.
82. *Ryan W.F.* Astronomy in Church Slavonic: Linguistic Aspects of Cultural Transmission // The Formation of the Slavonic Literary Languages. Columbus, 1985. P.53–60.

ДЖОН НЕПЕР: ЛОГАРИФМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КАК МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЗЕМЛИ

А.В.Кузьмин

Введение. Интерпретация заглавной гравюры книги П.Апиана[1] «Horoscopion Apiani» (1539) [1] приводит к выводу, что перед нами графическое (точнее – номографическое) воплощение геоцентрической пространственно-временной динамики, иначе говоря, номографическое выражение всей совокупности особенностей движения небесной сферы, в свою очередь отражающее сложное многофакторное движение Земли в пространстве.

Упомянутая гравюра (рис.1) есть графическое представление зависимостей скоростей восхода эклиптики относительно горизонта для широт от 0-го градуса (экватора) до 66-й параллели северной широты, то есть до той предельной широты, где Солнце один день в году вообще не восходит над горизонтом (зимнее солнцестояние) и один день в году вообще не заходит за горизонт (летнее солнцестояние), иными словами – до широты, на которой величина скорости восхода солнечного пути (то есть эклиптики) приобретает вырожденные значения.

Эта зависимость выражается, к примеру, в неравных угловых величинах часов (делений циферблата солнечных часов), в продолжительности сумерек. Эти же принципы составляют математическую основу расчета протяженности домов гороскопа (*гороскоп* буквально означает «показатель часа»).

Кроме того, перед нами универсальные звездные часы. Мы можем по восходу определенного участка эклиптики, какой-либо звезды или группы звезд, маркирующих собой этот участок, найдя соответствующее значение широты места и календарной даты наблюдения, определить время наблюдения ночью. Упоминание такого способа определения времени ночью можно встретить в «Божественной Комедии» Данте:

> «Но нам пора; прошел немалый срок;
> Блеснули Рыбы над чертой Востока,
> И Воз уже совсем над Кавром лег,
> А к спуску нам идти еще далеко» [2, с.69]

Так могло выглядеть описание времени: около двух часов до восхода Солнца.

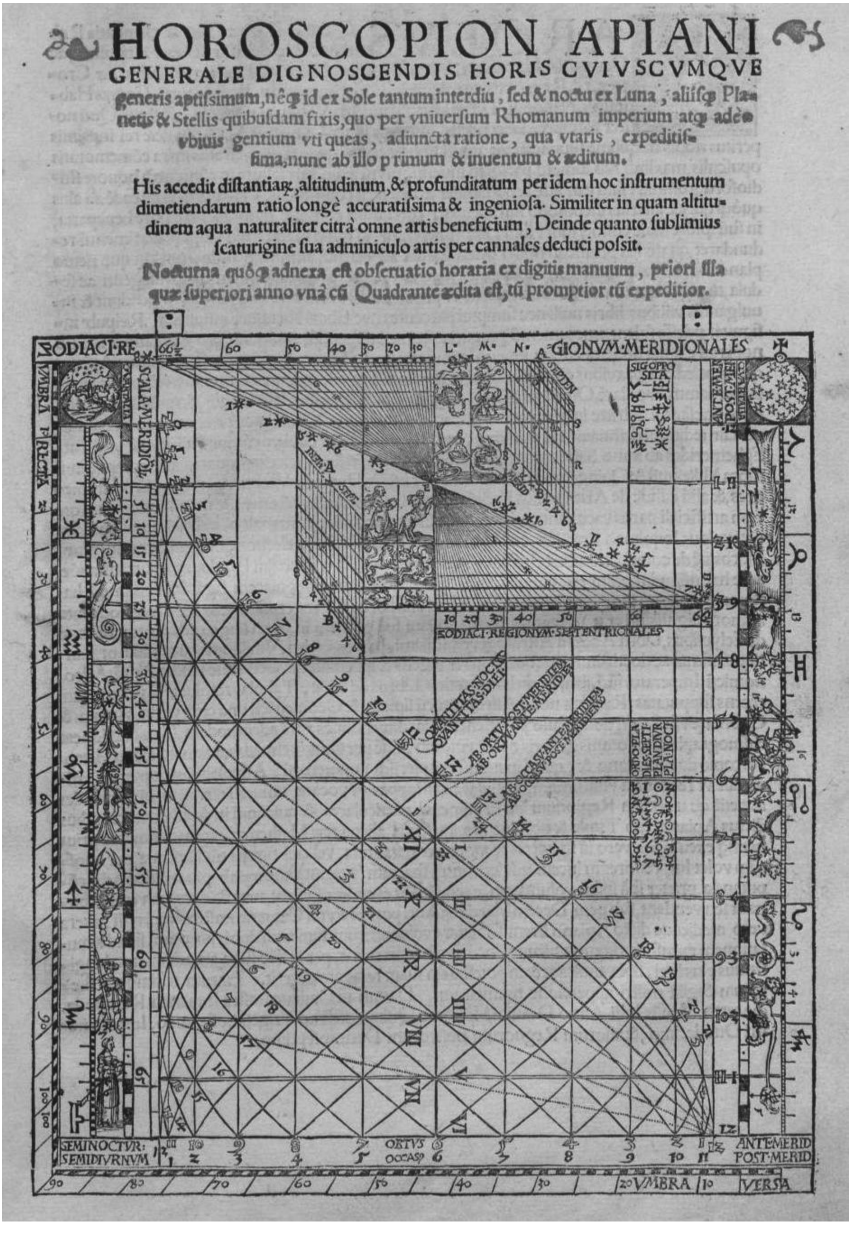


Рис.1. «Гороскопион» П.Апиана

На гравюре параллельно с изображением эклиптики дан пояс из созвездий и некоторых отдельных звезд, причем созвездий не только зодиакальных, но и просто путеводных, по которым легко ориентироваться как по маякам или стрелкам часов. Причем эти созвездия указывают не только время, но точно свидетельствуют и о восходе определенного участка эклиптики. Этот способ определения ночных часов восходит к египетским деканам, здесь он представлен в компактном виде. Зная точное время в светлое время суток (например, при помощи солнечных часов), выполнив обратные действия, можно определить точку или, по крайней мере, область восхода эклиптики.

Таким образом, на листе бумаги, компактно и обозримо, в виде номограммы, имеющей современный вид, представлена обширная, достаточно сложная информация, представляющая не что иное как графическое воплощение геоцентрической пространственно-временной динамики, или, иначе говоря, совокупность движений небесной сферы.

Уникальная особенность этого изображения (как, впрочем, и любой номограммы) в том, что оно одновременно является и наглядной геометрической моделью сложных зависимостей и простым счетным прибором для них.

Как известно, свойства функциональных зависимостей отражаются в геометрических особенностях номограмм. На номограмме можно увидеть влияние отдельных параметров, область существования решения и т.д. Можно подбирать параметры эмпирических формул. Номограммы можно использовать для исследования свойств, причем значительно проще и нагляднее, чем иными способами. Последнее обстоятельство широко используется в современных компьютерных технологиях: подобные изображение появляется на экране компьютера, когда мы обращаемся, например, к астрономическим программам. Подобные кривые могут отображать области видимости той или иной планеты на поверхности Земли и т.п. Идея такого рода презентации у П.Апиана представлена фактически в ее завершенном виде.

По уровню сложности заглавная гравюра этого издания просто несопоставима с остальной графической информацией, представленной в книге[2]. Вероятно, такой метод в XVI в. становился весьма распространенным прикладным способом вычислений, однако не исключено, что Апиан умышленно представляет его здесь как свое изобретение, добавляя комплекс общеизвестной информации. Возможно, здесь произошло какое-то заимствование из арабских источников, как и его карта созвездий доисламского периода [5]. Такая таблица может быть выстроена по аналогии с астролябиями.

«**Описание удивительных таблиц логарифмов**». Джон Непер (1550–1617) – изобретатель логарифмов. Основная идея вычислений с помощью логарифмов и первая логарифмическая таблица появились между 1590 и 1592 гг. [6], однако книга «Описание удивительных таблиц логарифмов» была издана им только в 1614 г.

Текст «Описания…» состоит из двух книг. В первой из них представлено общее определение логарифмов, обсуждаются их свойства и правила действий, поясняется устройство таблицы. Вторая книга посвящена применению логарифмов к решению задач плоской и сферической тригонометрии. Таблицы, приведенные в «Описании…», логарифмически-тригонометрические: семизначные логарифмы синусов, косинусов и тангенсов для углов от 0° до 90° с интервалом в 1'. «Описание…» переиздавалось еще пять раз. Последнее издание было осуществлено в 1899 г. [6].

Значения логарифмов, синусов, косинусов и тангенсов необходимы для точного воссоздания номограммы Апиана. Причем здесь появляется возможность получить, в том числе, предельные значения для углов (то есть широт) от 66° до 90°, что графически представить достаточно сложно.

Не было ли изобретение логарифмов результатом стремления Непера создать математическую формализацию небесных движений? Тем более, как было показано выше, ранее подобные попытки уже предпринимались – и одна из них, только в графическом исполнении, реализована в номограмме Апиана. Таким образом, к изобретению логарифмов мог привести поиск своего рода эмпирической формулы, которая, по сути, моделировала бы совокупность движений Земли в пространстве уже не просто набором приблизительных кривых, а точными числовыми таблицами.

Непер при этом не афишировал ни самого открытия, ни его логики, остерегаясь известных конфликтов. В частности, согласно информации, приводимой в [6], именно в предполагаемые годы изобретения логарифмов особенно усиливалась «охота на ведьм».

«Альмагест». В свою очередь, история логарифмических шкал и, в частности, номограммы Апиана уходит, по меньшей мере, в позднюю античность. В разделе 8 Книги II «Альмагеста» Клавдия Птолемея (II в. н.э.) приводится таблица подекадного времени восхода эклиптики на одиннадцати эталонных широтах. Здесь в табличной форме выражена нелинейная зависимость скорости восхода различных участков эклиптики по отношению к экватору в зависимости от широты географического пункта наблюдений.

Эта математическая зависимость на протяжении четырнадцати столетий использовалась для различных расчетов (в том числе, построения систем астрологических домов). Названные системы представляют собой неравномерные круговые шкалы (в отличие от равномерной, линейной, шкалы двенадцати тридцатиградусных знаков зодиакальной шкалы эклиптики), величина каждого из двенадцати секторов которых количественно отражает динамику эклиптики в определенное время и в определенном географическом месте. Считалось, что таким образом возможно символически описать земное проявление явлений небесной сферы, – построив «временну́ю (хрональную) топоцентрическую вариацию эклиптического круга». Об этом Птолемей пишет в 10 главе третьей книги «Тетрабиблоса».

Причем III книга «Тетрабиблоса» вступает в своеобразный диалог со II книгой «Альмагеста», в том числе, перечисляющей задачи, которые можно решать с помощью этих таблиц: вычисление продолжительности дня и ночи, сезонных часов, определение положений заданных градусов эклиптики и т.д., а в «Тетрабиблосе» Птолемей рассуждает о том, как этот комплекс параметров отражается на судьбе человека, то есть Птолемей пытается проецировать космологические особенности времени и места на личность. Причем появление в культуре такого явления, как личный гороскоп (согласно ван дер Вардену, это Персия, V в. до н.э.), независимо от споров о его рациональности, свидетельствует о возникновении гуманизма, то есть человек получает право иметь личную судьбу. На более ранних этапах существуют только коллективные методы предсказаний.

Первое печатное издание таблиц домов осуществил Региомонтан (1436–1476) [7]. Свою собственную систему, созданную им на основе изучения труда К.Птолемея, Региомонтан начал публиковать в 1474 г., ста сорока годами ранее первого издания таблиц логарифмов. Причем одним из основных применений логарифмов сразу после их изобретения было именно создание точных таблиц астрологических домов. Но теперь вычисления стали ясными, точными и сравнительно простыми, поскольку для таких расчетов не требовалось ничего, кроме точного времени и места события (например, рождения человека). Заметим, кстати, что в то время столь объемные расчеты были необходимы только в астрономии, никакие другие области человеческой деятельности в них не нуждались.

Первое печатное издание комплекса неравномерных круговых шкал Региомонтана представляло их в табличной форме с использованием эклиптической системы небесных координат.

Таким образом, впервые неравномерные шкалы, ставшие впоследствии, по сути, основой номографического метода в математике, появились не позднее II в. н.э. Один из наборов таких шкал приводится в «Альмагесте» К.Птолемея, в их основе лежит определение зависимости изменения скорости восхода различных частей эклиптики от изменения географической точки наблюдений. Эти наиболее ранние из известных номографических таблиц фактически представляют собой количественное описание движения Земли, в котором нашло отражение вращение небесного экватора и эклиптики на различных широтах земного шара [8]. Поясним кратко, сколь велико исследовательское значение такой информации. Она предлагает метод расчета астрономо-географических характеристик любой точки земной поверхности, представленных в виде сочетаний движений экватора и эклиптики на определенной широте в определенное время. Напомним, что экватор – математический круг, порождаемый движением Земли вокруг оси; эклиптика – движением Земли, вокруг Солнца; широта, в свою очередь, в значительной степени определяет особенности климата.

В XVI в. этот математический метод, реализованный в номограммах, был одним из наиболее распространенных прикладных способов пространственно-временных измерений.

Заключение. В данной статье мы высказали предположение, что Джоном Непером руководила идея поиска идеального, точного математического «природоподобия» или, говоря современным языком, идея создания эмпирической формулы для точной (не исключено, что, кроме того, и в теологическом смысле – идеальной) формализации особенностей движения небесной сферы, которые к тому времени были зафиксированы в образах номограмм (подобных номограмме Апиана) и таблицах (подобных таблице Птолемея). И именно эта идея и привела впоследствии к изобретению логарифмов.

Примечания

[1] Петер Апиан (1495–1552) – астрономом и конструктор астрономических приборов, математик и картограф, знаменитый издатель научной литературы, в том числе переводов с арабского, на что имел привилегию от императора Карла V; проявлял огромный интерес к науке Востока; профессор астрономии и математики Венского университета.

[2] Кроме рассмотренной нами гравюры, в этом издании представлены элементарные способы измерений углов и определения времени, которые воспроизводятся, в том числе, в «Занимательной астрономии» [3] и «Занимательной геометрии» Я.И.Перельмана [4], а также карта созвездий староарабского неба [5].

Список литературы

1. *Apianus Peterus*. Horoscopion Apiani. Ingolstadt, 1533.
2. *Данте Алигьери.* Божественная комедия. М., 1982.
3. *Перельман Я.И.* Занимательная астрономия. М.–Л., 1938.
4. *Перельман Я.И.* Занимательная геометрия. М., 1955.
5. *Кузьмин А.В.* Пастушеские собаки Апиана: зороастрийский след на современной карте созвездий // Природа. 2008. № 12. С.85–87.
6. *Гутер Р.С., Полунов Ю.Л.* Джон Непер. 1550–1617. М., 1980.
7. *Белый Ю.А.* Йоганн Мюллер (Региомонтан). 1436–1476. М., 1985.
8. *Птолемей К.* Альмагест / Пер. с древнегреч. *И.Н.Веселовского*. М., 1998.

ЕВРОПЕЙСКАЯ МАТЕМАТИКА НОВОГО И НОВЕЙШЕГО ВРЕМЕНИ

РИСОРДЖИМЕНТО И ФОРМИРОВАНИЕ ИТАЛЬЯНСКОГО И МЕЖДУНАРОДНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СООБЩЕСТВА[1]

С.С.Демидов

1. Вступление. События итальянского Risorgimento нашли широкий отклик во всем цивилизованном мире. Они оказали глубокое воздействие на социальную и культурную жизнь Европы и Америки. Всколыхнув итальянское общество, они оказали мощное воздействие и на развитие науки (в частности, математики) притом не только в самой Италии, но и далеко за ее пределами. Я остановлюсь лишь на одном аспекте этого воздействия – на мощном импульсе, который придало Risorgimento процессу формирования итальянского и, шире, международного математического сообщества. Не входя в рассмотрение этого феномена во всей его общности, я ограничусь рассмотрением лишь двух его важных моментов – рождения и формирования *Circolo matematico di Palermo* – как общенациональной и международной ассоциации математиков, и деятельности Дж.Пеано (1858–1932) – его попытки подведения нового фундамента подо всю математику: ее полную аксиоматизацию, выстраивание математической логики и переводу на единый язык – интерлингву. При этом я попытаюсь взглянуть на рассматриваемые процессы с очень специальной точки зрения – участия в них российских математиков – представителей математического сообщества, также находившегося в этот период в состоянии подъема: закладывался фундамент одной из ведущих математических школ второй половины XX столетия.

Важно отметить, что детство и молодые годы Дж.Пеано и создателя *Circolo matematico di Palermo* Дж.Гучча (1855–1914) пришлись на эпоху Risorgimento и юности молодого государства, выросли в атмосфере национального подъема, наполненной духом интернационализма. И о деятельности Пеано, и об истории *Circolo matematico di Palermo* имеется обширная литература – совсем недавно была торжественно отмечена 150-летняя годовщина Дж.Пеано, к которой были приурочены многие публикации, что же касается истории *Circolo*, то усилиями д-ра А.Бригальи и его сотрудников она вошла в число наиболее изучаемых сегодня вопросов истории математики конца XIX – первой трети XX вв. Эти труды, на которые я буду здесь опираться, касаются и обсуждаемых мною вопросов. В своих рассмотрениях я буду использовать материалы из архивов Турина и Палермо (здесь я должен выразить глубокую благодарность профессорам С.Роэро и А.Бригалье, без помощи которых я бы не смог ознакомиться с этими материалами), а также из архивов Москвы, Ростова-на-Дону и Одессы.

2. Международное математическое сотрудничество в последней трети XIX в. На протяжении XIX в. наблюдается зарождение процесса постепенного превращения математики в массовую профессию. Прежде всего, математика заняла важное место в системе народного образования. Девятнадцатое столетие – период, когда народное образование становится одним из приоритетов внутренней политики развитых государств. Образуются специальные министерства, задачей которых становится строительство национальной системы народного образования – от начальных училищ вплоть до высшей школы. Для нужд этой системы требуются квалифицированные кадры педагогов – от учителей начальных школ до профессоров университетов. Это уже целое сообщество профессионалов, занимающихся обучением математике. Научными изысканиями в области математики, ее приложениями к другим наукам и к практическим нуждам общественной жизни занимается еще сравнительно небольшое количество специалистов, но и эта группа к началу XX столетия становится заметной. О росте числа такого рода профессионалов можно судить, скажем, по изменениям в составе участников математических секций национальных научных съездов, проведение которых становится традицией во второй половине XIX в. в развитых европейских странах (например, в России это – Всероссийские съезды естествоиспытателей и врачей). Рост промышленности, прежде всего промышленности военной, приводил к необходимости воспитания специалистов математиков-прикладников, могущих ставить и решать сложные в математическом отношении задачи, возникающие в новой технике. (Этот процесс приобрел особую значимость уже в XX в., прежде всего после Первой мировой войны.) Статистические задачи и проблемы вычислительного характера начинают выдвигаться на передний план, приводя к организации всякого рода вычислительных и статистических бюро – но заметной эта активность становится уже в XX столетии.

Деятельность эта, определявшаяся прежде всего нуждами национального развития и получившая наиболее явственное выражения в наиболее развитых государствах того времени – прежде всего в Германии, Франции, Великобритании, Италии и России – постепенно приобретала международный характер. К ставшим уже традиционными связям на уровне академий наук и университетов, во второй половине XIX в. добавились контакты национальных математических обществ. В 1871 г. в Германии появился первый реферативный математический журнал – «Ежегодник успехов математики» (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik). В первом его томе были прореферированы статьи по математике и ее приложениям, вышедшие в мире в 1868 г. В конце века немецкие математики начали издание монументальной «Энциклопедии математических наук» (Encyclopedie der mathematischen Wissenschaften), в работе над которой, наряду с немецкими, приняли участие математики из Австрии, Бельгии, Великобритании, Нидерландов, Норвегии, России, Соединенных штатов северной Америки, Франции и Швеции. Наконец, в 1897 г. в нейтральной Швейцарии – в Цюрихе – собрался Первый международный конгресс математиков, а уже через три года – в 1900-м – в Париже прошел Второй такой конгресс, на котором со знаменитым докладом «Математические проблемы» выступил Д.Гильберт, в котором великий математик попытался предугадать будущее развитие математики, выделив проблемы (в печатном тексте их 23), на путях решения которых, сформируется значительная часть математики XX в. Его речь была пронизана оптимизмом, верой в наступающий светлый век – век разума и прогресса, верой в высокое предназначение математической мысли. Математики стали ощущать себя органической частью единого мирового математического сообщества, в котором должны были быть разрушены все границы, в том числе границы языковые. Дж.Пеано вместе со своими учениками и единомышленниками выписывает контуры будущей математической логики, разрабатывает единый язык – интерлингву – на котором, как в прошлом на древнегреческом, арабском или латыни, будет, по его мысли, говорить будущая математика и, шире, вся наука. И неудивительно, что с такой программой выступал итальянец – представитель нации, только вчера пережившей великое возрождение – Рисорджименто (Risorgimento). И также неудивительно, что в другой части единой Италии – в сицилийском Палермо – родился другой честолюбивый международный проект – создания международного математического общества.

3. Становление национальных математических сообществ как начало формирования международного математического сообщества – опыт *Circolo matematico di Palermo*. Процесс формирования математических сообществ в наиболее развитых странах Европы, ставший одним из наиболее зримых проявлений тенденции возрастания роли математических наук в обществе (прежде всего, в промышленном и экономическом его развитии), нашел активную государственную поддержку. Поэтому неудивительно, что он окрасился в национальные тона. Наиболее развитые государства оказывали больше внимания народному образованию и развитию науки. Тон здесь начала задавать Франция, мощный экономический подъем которой в конце XVIII – начале XIX вв. был во многом определен ее высоким научным потенциалом. Вскоре главным конкурентом французским математикам стали математики Германии. XIX – начало XX вв. для нашей науки – время доминирования в мире французской и немецкой традиций, находившихся в постоянной конфронтации, то утихавшей, то обострявшейся в зависимости от общей политической ситуации в Европе. Но, конечно, математика развивалась и в других частях тогдашнего культурного мира. Из важных составляющих математического ландшафта второй половины XIX – начала XX вв. (а именно на этот промежуток времени падают интересующие нас в настоящем сообщении события) следует назвать Великобританию, математика которой, выйдя из самоизоляции, на которую обрекли себя сами островитяне, не пожелавшие принять континентальную лейбницевскую форму математического анализа, в 1820–1840-е гг. достигла передовых позиций математической мысли (Д.Грин, У.Гамильтон, Д.Сильвестр, А.Кэли). К концу века среди стран с уже сложившимся математическим потенциалом мы видим и страны Скандинавии, и Россию, и США. Но, пожалуй, наиболее ярким событием в развитии мировой математики последней трети XIX – начала XX вв. стал взрыв математической мысли в Италии. Бурное ее развитие делало итальянскую математику буквально «третьей силой», претендующей на то, чтобы вместе Германией и Францией определять вектор ее дальнейшего развития. Процесс этот, ставший возрождением великих традиций, восходивших к эпохе Ренессанса, получил определяющий импульс в событиях Рисорджименто (Risorgimento), ставших мощным катализатором общественной и культурной жизни Италии того времени. Такое воздействие произошедших в стране революционных событий на развитие в ней культуры, в частности, на науку, не является в ходе мировой истории уникальным – достаточно вспомнить историю Великой Французской революции или революционные события 1917 г. в России, имевшие чрезвычайно благотворные последствия для развития математических наук во Франции конца XVIII – начала XIX вв. и в СССР.

Цель данной работы проследить влияние процессов эволюции итальянского математического сообщества, зародившихся в атмосфере мощного национального подъема, вызванного событиями Рисорджименто, на формирование единого международного математического сообщества, ставшего ощутимой реальностью лишь в 1880–1890-е гг. Мы не беремся обсуждать вопрос об этом влиянии, взятый во всей его полноте. Мы попробуем лишь высветить некоторые его аспекты на материале взаимодействия итальянского и российского сообществ – сообществ с очень разной предысторией, но находившихся в рассматриваемый период в состоянии подъема.

Организация математических обществ стала во второй половине века одним из наиболее ярких проявлений становления национальных математических сообществ. Так, в 1864 г. появилось Московское, а в 1865 г. – Лондонское математические общества, которые достаточно быстро взяли на себя роль общенациональных. В уставе Московского математического общества, утвержденном в 1867 г., так и написано: «Московское математическое общество учреждается с целью содействовать развитию математических наук в России» [2, с.46]. В 1872 г. было учреждено Французское математическое общество, а в 1884 г. было основано *Circolo matematico di Palermo*, ставшее таким образом одним из первых математических обществ в Европе (уже следом были организованы математическое общество в Нью-Йорке и только в 1890 г. – Германское объединение математиков). Как и Московское, и Лондонское, оно достаточно быстро превратилось в общенациональное. При этом не следует забывать, что Москва была второй, а Лондон первой (и единственной) столицей своих Империй. Палермо же, хотя и был заметным экономическим и культурным центром юга Италии, оставался городом провинциальным, удаленным от научных и культурных центров итальянского севера. Лишь необыкновенным организаторским способностям Дж.Б.Гучча, четко поставленной им цели и хорошо проработанным планам, предприятие удалось. Общество начало работать весной 1884 г.

Поначалу это было более чем скромное предприятие. Среди 27 его членов только девять были профессиональными математиками, остальные были инженерами и школьными учителями. Первоначальная деятельность *Circolo* осуществлялась в значительной степени за счет Дж.Б.Гучча. Действуя чрезвычайно энергично и используя свои связи, как в администрации, так и в академических кругах, он по первоначалу поставил своею целью превратить кружок, если не официально, то де-факто, в общеитальянское математическое общество. В 1886–1888 гг. членами *Circolo* стали почти все крупные математики Италии –Дж.Баттальини (с 1886); Э.Бетти, Ф.Бриоски, В.Вольтера, Л.Кремона, Дж.Пеано, К.Сегре, Э.Чезаро (с 1887); Ч.Арцела, Э.Бельтрами, Дж.Веронезе, Ф.Казорати, С.Пинкерле (с 1888). Затем к обществу присоединились Г.Кастельнуово, Ф.Энриквес, Т.Леви-Чивита, Ф.Севери [3, с.186].

В 1887 г. вышел первый том журнала «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo», в котором кроме статей итальянских математиков (К.Сегре и др.) участвовали также зарубежные ученые – бельгиец Э.Каталан, британец Т.А.Хирст, голландец П.Г.Схоуте. Обо всем этом желающие могут узнать из работ историка *Circolo* А.Бригальи и его сотрудников (см., например: [3; 4]). Я лишь ограничусь несколькими необходимыми для дальнейшего фактами, заимствованными из этих работ. В 1888 г. появился второй том, где наряду с именами известных итальянских авторов (Э.Бетти, В.Вольтера, Дж.Пеано, того же К.Сегре) мы видим французов Ж.Альфана, Э. де Жонкьера, К.Жордана, россиянина А.П.Старкова. В 1888 г. в *Circolo* был принят новый статус, по которому члены редколлегии журнала избирались членами общества. В результате этих выборов появилась достаточно большая редколлегия, в которую вошли представители крупнейших математических центров Италии. Таким образом, *Circolo matematico di Palermo* де-факто становилось не региональным, но общенациональным обществом. В этом оно повторяло опыт Московского и Лондонского математических обществ. Но амбиции Дж.Б.Гучча простирались значительно дальше: он намеревался сделать его международной ассоциацией, объединяющей математиков всего мира. Именно с этой целью он начал интернационализацию общества и его журнала. В 1891 г. к редколлегии присоединился А.Пуанкаре – это был первый иностранный ее член. В 1894 г. к нему присоединился Г.Миттаг-Леффлер, издававший ставший широко известный в Европе математический журнал «Acta Mathematica».

Успех журнала стал следствием политики его редакции, определявшейся, прежде всего, самим Дж.Б.Гучча. Редакция горячо поддерживала новые тенденции в развитии математической мысли. Так, именно на страницах «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo» появились первые важные работы Э.Бореля, Г.Вейля, М.Фреше. Здесь в период с 1904 по 1914 гг. были опубликованы 9 фундаментальных работ А.Пуанкаре, в том числе, «Пятое дополнение к analysis situs» (1904), «Новые замечания о непрерывных группах» (1908), «О динамике электрона» (1906), «Об одной геометрической теореме» (1912). Последняя вышла уже через несколько дней после смерти А.Пуанкаре.

При этом руководство *Circolo* при публикации статей и даже при выборе членов редколлегии исходило, прежде всего, из значимости результатов математика, а не из его официального положения. Важно также отметить, что Дж.Б.Гучча превосходно организовал сам издательский процесс.

В итоге журнал стал одним из наиболее распространенных и читаемых во всем мире. Свидетельством этому служит и история взаимоотношений журнала с российским математическим сообществом (о чем речь пойдет ниже).

Документы из архива *Circolo matematico di Palermo* показывают, как Дж.Б.Гучча постепенно реализовывал идею превращения *Circolo* в международную организацию. Первым важным достижением на этом пути стало, как мы уже говорили, приобретенный обществом де-факто к началу XX столетия статус «(неофициального) национального математического общества Италии с высокой международной репутацией» [3, с.181].

Репутация *Circolo* в математическом мире в начале XX в. была столь высока, что подготовку IV Международного математического конгресса 1908 г., который по решению III конгресса в Гейдельберге должен был состояться в Риме, была поручена двум итальянским организациям – Национальной Академии наук (*dei Lincei*) в Риме и *Circolo*. Дж.Б.Гучча использовал эту подготовку для реализации своих планов интернационализации *Circolo*. К 1908 г. число иностранных членов *Circolo* возросло до 605 и, что было также очень важно в тогдашней Европе, 78 из них составляли немцы. Чтобы добиться этого в обстановке ставшей к тому времени традиционной вражды немецких и французских ученых, нужно было проявить чудеса дипломатической эквилибристики, на которую оказался способным Дж.Б.Гучча. Ко времени его смерти – к 1914 г. – общество *Circolo* включало 924 члена, то есть было крупнейшим математическим обществом мира. 618 из них были иностранные математики, то есть общество было действительно интернациональным: оно включало 140 математиков из Германии, 140 – из США, 77 – из Австрии, 67 – из Франции, 44 – из России, 29 – из Великобритании. Журнал общества «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo» печатал статьи на итальянском, немецком, французском, английском, испанском, эсперанто и пеановской интерлингве. В 1908 г. был принят новый статус, согласно которому принцип формирования редколлегии кардинально менялся – журнал становился действительно международным. С 1909 г. она состояла из 15 итальянских и 25 иностранных математиков. Из итальянцев мы видим здесь К.Сегре из Турина, Дж.Лориа из Генуи, Т.Леви-Чивиту и Ф.Севери из Падуи, С.Пинкерле и Ф.Энриквеса из Болоньи, Л.Бианки и У.Дини из Пизы. Из Франции – Э.Бореля, Ж.Адамара, Э.Пикара и А.Пуанкаре. Из Германии – Д.Гильберта, К.Каратеодори, Ф.Клейна, Э.Ландау и М.Нётера. Из США – Э.Мура и У.Осгуда, из Швеции – И.Фредгольма и Г.Миттаг-Леффлера. Из Бельгии – Ш. да ла Валле Пуссена. Из Дании – Г.Цейтена. Российская школа была представлена А.М.Ляпуновым и В.А.Стекловым. Указанные имена – элита мировой математики начала XX в. Ни один другой математический журнал того времени не мог похвастать такой представительной редакционной коллегией.

Circolo matematico di Palermo было первым в истории математики опытом создания международной ассоциации математиков. Однако надеждам Дж.Б.Гучча не дано было реализоваться в достаточной мере – тому есть несколько причин. Во-первых, реакция на его деятельность итальянского математического бомонда – провинциальному «выскочке» было указано его место. Во-вторых, смерть самого Гучча в конце октября 1914 г. – хотя преемники продолжили его линию, их организационные таланты не шли в сравнение с дарованием мэтра. В-третьих, начало Второй мировой войны опрокинуло все планы и на некоторое время прервало активность общества. (Последующее развитие событий в мире и в самой Италии также не оказалось благоприятным для *Circolo* – об этом см.: [3; 4]). В-четвертых (и это самое главное), международная ассоциация не должна создаваться на базе национальной организации – об этом свидетельствует поистине драматическая история создания Международного Союза математиков, для которого опыт *Circolo matematico di Palermo* стал важнейшим эпизодом предыстории. Принципы, на которых стояли Дж.Б.Гучча и его преемники – в работе международной научной ассоциации нет места идеологии или политике, все ее члены оцениваются исключительно по результатам своей научной деятельности, но не по национальной, расовой, религиозной принадлежности или по положению в научной иерархии – стали теми основаниями, на которых в конечном итоге, в результате длительного полного драматизма процесса во второй половине XX в. начало выстраиваться современное мировое математическое сообщество.

Роль итальянских математиков конца XIX – первой трети XX в. в интернационализации мирового математического сообщества хорошо иллюстрирует история сотрудничества в этот период итальянских и российских математиков.

4. Италия и Россия в мире математики второй половины XIX – начала XX вв. Если Италия была страной с издревле существовавшей высокой математической культурой, то в Россию математика в том смысле, какой вкладывается в этот термин в Новое время, была занесена ветрами петровских реформ лишь в XVIII столетии. Собственная же оригинальная математика высокого уровня появилась лишь в XIX в.: это были труды Н.И.Лобачевского, открывшего миру неевклидову геометрию (признание которой пришло лишь после смерти великого ученого), и М.В.Остроградского, получившего замечательные результаты в области математического анализа, математической физики и аналитической механики. Надо сказать, что Италия оказалась в числе стран, отметивших достижения обоих ученых. Остроградский был избран в 1841 г. в Туринскую академию наук, а в 1853 г. – в Академию *dei Lincei*. Итальянские математики сделали многое для признания и развития геометрии Лобачевского: в 1867 г. в 5 томе «Giornale di Matematiche» Дж.Баттальини напечатал перевод его «Pangeometrie» и статью «Sulla geometria immaginaria di Lobatchewsky», а в 1868 г. в 6 томе того же журнала появился мемуар Э.Бельтрами «Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea», содержавший знаменитую локальную интерпретацию геометрии Лобачевского на поверхности отрицательной кривизны.

Начало интенсивного развития математики в России падает уже на 1860-е гг. и, в значительной мере связано с именем П.Л.Чебышева и его школы. (Его достижения были также отмечены в Италии избранием в1873 г. в Болонскую академию наук и в 1883 г. – в Академию *dei Lincei*.) Вторым по значимости центром математических исследований становится Москва, где с 1864 г. начало действовать уже упоминавшееся Московское математическое общество. Так что подъем математических исследований и в Италии и России начинается в 1860-е гг. И если в Италии он стал во многом следствием подъема национального духа, вызванным событиями Risorgimento (Рисорджименто), то в России его причиной стали реформы Александра II, самой знаменитой из которых стала отмена крепостного права. Если в Италии этот подъем был возрождением вековых традиций итальянской математики, то в России это было время рождения собственной национальной математической школы, которое, начиная с XVIII в., протекало в тесной связи с традициями математики Франции и Германии. Многообразные связи российских математиков с их итальянскими коллегами начинают складываться уже в последней четверти XIX столетия.

5. Российские математики в *Circolo matematico di Palermo*. Первым из россиян членом *Circolo matematico di Palermo* стал математик из Одессы Алексей Петрович Старков (№113)[2]. Это случилось в 1888 г., когда во втором томе

«Rendiconti» появилась его статья «Об одной задаче вариационного исчисления».

А.П.Старков (1850–1903) фигура в российской математической жизни последней четверти XIX в. своеобразная. Информацию о его биографии мы обнаружили в [5]. Родился Старков в Тверской губернии, учился в Петербурге в Горном институте, который был вынужден покинуть из-за болезни. Затем, выдержав экзамен на штурмана дальнего плавания, 4 года провел в плавании. Плавая, изучал культуру и языки стран Востока, а также математику. Завершив морскую карьеру, осел в Одессе, где активно участвовал в работе Математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей (с 1878 г. он стал его членом, а с 1884 г. членом его Совета). Его перу принадлежит большое количество работ по различным вопросам математики (математического анализа, алгебры) и ее истории. Некоторые из них (их список приведен в [5, с.435]) были доложены на заседаниях отделения. Выступал также со статьями по вопросам истории книгопечатания, китайского языка и др. Некоторое время преподавал в Одесском коммерческом училище, издавал газету «Одесские новости». В 1892 г. членом *Circolo* стала Евгения Кербедз из Санкт-Петербурга (№180), не оставившая никакого заметного следа в развитии математики[3].

В 1899 г. в Общество вступил известный русский математик профессор Казанского университета А.В.Васильев (№265) (1853–1929) (о нем см.: [7, с.520–521; 8]). Если первые два русских члена *Circolo* – результат естественного неуправляемого хода событий, то появление в составе Общества А.В.Васильева можно рассматривать как проявление усилий Дж.Б.Гучча, направленных на превращение *Circolo* в представительную международную ассоциацию: ученик П.Л.Чебышева и К.Вейерштрасса, совсем недавно успешно проведший в Казани празднества по случаю 100-летия Н.И.Лобачевского, ставшие событием в математической жизни всей Европы – такая фигура была для руководителей *Circolo*, преследовавших амбициозные цели, действительно ценным приобретением. Однако планомерный характер действия Дж.Б.Гучча приобрели в преддверии Международного конгресса математиков 1908 г. в Риме.

В 1905 г. членом *Circolo* становятся уже два россиянина. Это – автор работ по теории вероятностей и ее приложениям к теории стрельбы профессор Санкт-Петербургской Михайловской артиллерийской академии, где он читал курсы по различным отделам анализа и теории функций комплексного переменного, полковник С.Г.Петрович (№418) (1868–1926) [9, с.423], а также ученик А.М.Ляпунова и В.А.Стеклова профессор теоретической механики Киевского политехнического института Н.Н.Салтыков[4] (№438)

(1870–1961). В 1907 г. к *Circolo* присоединяются уже крупнейшие деятели Петербургской школы – член-корреспондент Петербургской академии наук профессор университета В.А.Стеклов (№651) (1864–1926) и академик А.М.Ляпунов (№652) (1957–1918), в 1908 г. избранный членом Академии *dei Lincei*. В 1909 г. оба математика становятся членами редакционной коллегии «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo»[5].

В 1908 г. – в год римского Конгресса – членами *Circolo* становятся 6 русских математиков. Это петербуржцы профессор Морской академии А.Н.Крылов (№756) (1863–1945), профессор Технологического института Б.М.Коялович (№757) (1867–1941), академик Н.Я.Сонин (№759) (1849–1915), профессор университета И.Л.Пташицкий (№767) (1854–1912), а также профессор Харьковского университета Д.М.Синцов (№731) (1867–1946) и приват-доцент Новороссийского университета В.Ф.Каган (№766) (1869–1953).

Процесс активного вступления в *Circolo* россиян продолжался вплоть до Первой мировой войны. Так в 1909 г. членами Общества становятся петербуржцы академик А.А.Марков (№838) (1856–1922), приват-доцент университета И.И.Иванов[6] (№842) (1862–1939), выпускник Горного института Н.М.Крылов (№875) (1879–1955), выпускник Харьковского университета Г.А.Грузинцев[7] (№851) (1880–1929), в 1910 г. – профессор Петербургского университета Д.К.Бобылев (№879) (1842–1917) и профессор Харьковских Высших женских курсов С.Н.Бернштейн (№907) (1880–1968). В 1911 г. к ним добавились один москвич – готовивший по руководством Д.Ф.Егорова магистерскую диссертацию Н.Н.Лузин (№996) (1883–1950), а также целый отряд петербуржцев, оставленных В.А.Стекловым при университете для подготовки к профессорскому званию – Я.Д.Тамаркин[8] (№968) (1888–1945), А.А.Фридман (№974) (1888–1924), Я.А.Шохат[9] (№983) (1886–1944), В.В.Булыгин (№984) (1888–1918), В.И.Смирнов (№1010) (1887–1974), а также оставленный А.А.Марковым для подготовки к профессорскому званию Я.В.Успенский[10] (№982) (1883–1947). Если в 1912 г. к *Circolo* присоединился единственный представитель России – преподаватель Высших женских курсов в Петербурге В.И.Шифф (№1022) (ум. в 1919), то в 1913 г. их было уже пятеро – профессор Киевского политехнического института Н.Б.Делоне (№1064) (1856–1931), переехавший в Петербург из Одессы Г.М.Фихтенгольц (№1099) (1888–1959), некий А.Панов (№1108) (найти какие-либо сведения о нем нам не удалось), приват-доцент Киевского университета А.Д.Билимович[11] (№1117) (1879–1970), приват-доцент Новороссийского университета Д.А.Крыжановский[12] (№1125) (1183–1939) и московский аэродинамик, организатор известного института в Кучино Д.П.Рябушинский[13] (№1132) (1882–1962). Еще два россиянина вступили в *Circolo* в первые годы Первой мировой войны – это были москвичи, работавшие тогда над магистерскими диссертациями, В.В.Голубев (1914; №1188) (1884–1954) и И.И.Привалов (1916; №1232) (1891–1941).

Далее приток новых русских членов в *Circolo* приостановила Первая мировая война и последовавшие за ней в России революция и гражданская война. Возобновился он тогда, когда жизнь научного сообщества в СССР начала налаживаться – во второй половине 1920-х гг. В 1924 г. членом Общества становится профессор Московского университета А.Я.Хинчин (№1394) (1894–1959), в 1925 г. – молодая супружеская пара из Ленинграда ассистент Ленинградского университета Н.Е.Кочин (№1437) (1901–1944) и сотрудница Главной геофизической обсерватории П.Я.Полубаринова (№1438) (1899–1999), в 1926 г. – киевляне сотрудники АН УССР М.К.Куренский (№1464) (1895–1940) и М.Ф.Кравчук[14] (№1465) (1892–1942). Особенно крупное пополнение *Circolo* теперь уже советскими математики случилось в 1927 г. Это были профессор Днепропетровского университета И.Е.Огиевецкий (№1475) (1889 – 1956), профессор Московского университета С.П.Фиников (№1484) (1883–1964), ленинградцы – профессор университета Н.М.Гюнтер (№1486) (1871–1941), профессор Горного института А.М.Журавский (№1487) (1892–1969), аспиранты университета И.А.Лаппо-Данилевский (№1489) (1896–1931) и В.А.Тартаковский (№1491) (1901–1973). Наконец, в 1928 г. (список составлен по положению на конец июня 1928 г.) появляется имя преподавателя Харьковского технологического института Я.Л.Геронимуса (№1510) (1898–1984).

Еще отдельно без номеров и дат, а также без инициалов указаны – Рабинович из Одессы, Гернетт (написано Gernett) из Петербурга и Аппельрот. Что касается последнего, то речь, очевидно, идет об известном московском математике и механике Г.Г.Аппельроте (1866–1943). В «россыпе» анкет мы нашли «Заявление о приеме» в *Circolo*, заполненное и подписанное им 20 января 1908 г. На заявлении две подписи рекомендующих его членов *Circolo* – Р.Марколонго (Неаполь) и Дж.Б.Гучча. Проставлена дата приема и присвоенный ему номер: 26 января 1908 г., №691. Что касается Гернетт из Петербурга, то можно предположить, что имеются в виду профессор Ленинградского университета Надежда Николаевна Гернет (1877–1943). Почему их имена приписаны, но не вошли основной список – можно только гадать. Может быть, к моменту составления списка они выбыли из состава *Circolo*, например, из-за неуплаты взносов.

Список российских членов *Circolo* весьма представителен: практически все содержащиеся в нем имена (за ничтожным числом исключений!) это известные математики. Он несет, с одной стороны, печать проводимой руководителями *Circolo* политики, направленной на преобразование Общества в международную ассоциацию – резкое увеличение числа российских членов Общества (как и вообще числа его иностранных членов), связанное с проводимым в Риме в 1908 г. Международным конгрессом математиков, продолжавшееся вплоть до начала Первой мировой войны и возобновившееся по ее окончании. С другой стороны, он замечательным образом отражает и динамику развития российского математического сообщества рассматриваемого периода. В нем отчетливо проявляются три наиболее активно развивавшихся тогда математических региона Российской империи. Во-первых, Санкт-Петербург со своими ведущими математиками той поры – А.А.Марковым, А.М.Ляпуновым и В.А.Стекловым – и со своей замечательной молодежью, по большей части принадлежавшей к школе В.А.Стеклова. Во-вторых, Москва – громко заявившая о себе миру творчеством Н.Н.Лузина и его учеников. В-третьих, Украина со своим старейшим Харьковским университетом, а также с Киевским университетом, динамичным и открытым новым веяниям Новороссийским университетом, наконец, с совсем молодым Днепропетровским университетом. Большой процент совсем молодых математиков в «российской» части *Circolo* – людей еще только готовящих свою первую диссертацию или совсем недавно ее защитивших, приступивших к разработке новых территорий в математике (как в таких традиционных областях, как математическая физика или обыкновенные дифференциальные уравнения, в случае питерцев, так и в совсем новых, вроде теории функций действительного переменного, в случае москвичей) свидетельствовал о подъеме, который переживали математические исследования в стране.

Среди материалов архива *Circolo*, касающихся математики в России и в СССР, я обнаружил поздравления с состоявшимся в 1914 г. 30-летием *Circolo* – телеграмму Московского математического общества, подписанную президентом Общества Н.Е.Жуковским, вице-президентом Б.К.Млодзеевским и секретарем Д.Ф.Егоровым, письмо В.А.Стеклова, а также телеграмму от Д.П.Рябушинского. В архиве хранятся также многочисленные бланки «Заявления о приеме», заполненные нашими соотечественниками, их письма, касающиеся вопросов об уплате членских взносов, а также корректур их статей в «Rendiconti» (в частности, письма В.А.Стеклова 1911 г. о его статье «Problèmes des vibrations transversales d'une verge élastique homogène», написанной совместно с Я.Д.Тамаркиным и опубликованной в том же году в

«Rendiconti», переписка 1923 г. советских внешнеторговых представительств (Arcos Ltd, Book Department, 68, Lincoln's Inn Fields, Kingsway, London; Kniga, Kurfürstenstrasse, 79, Berlin) о приобретении для советских библиотек (Библиотеки Академии наук в Петрограде, Библиотек Московского, Петроградского и Казанского университетов, Библиотеки УАН в Киеве, Центральной научной библиотеки в Харькове) свежих номеров *«Rendiconti».* Поразительно, но в это сложное для страны время советское правительство находило средства для пополнения ведущих научных библиотек страны текущей научной литературой.

6. Дж.Пеано и российское математическое сообщество. Российские связи Дж.Пеано стали темой моего доклада [10] на международной конференции 2008 г. в Турине, посвященной 150-летию выдающегося математика и последующей публикации [11]. Поэтому я не буду входить в подробности, с которыми может ознакомиться каждый желающий. Ограничусь некоторыми выводами, в значительной мере основывающимися на материале этого доклада. Русские связи Пеано были многообразны. Если не касаться его многочисленных корреспондентов по вопросам, связанным с интерлингвой, то это математики со всей России, исключая столицы – Санкт-Петербург и Москву. Это может показаться странным лишь на первый взгляд – дело в том, что тематика исследований петербуржцев слабо связана с тем, чем занимался Пеано. Что касается Москвы, то они вышли на вопросы математического анализа, теории множеств и функций, которым посвящены ранние работы Пеано, достаточно поздно, когда сам Пеано занялся уже совершенно другими вопросами. Проблемы оснований математики (в том числе аксиоматизация различных ее разделов) и математической логики интересовали математиков российских провинциальных университетов – Казанского, Одесского, Варшавского (позднее ставшего Ростовским-на-Дону), что вызывало немалое раздражение у петербургских академиков, рассматривавших подобные занятия как абсолютно лишенные смысла. Поддержка Пеано служила для провинциальных математиков основанием для их исследований, которые впоследствии стали базой для советской школы в области оснований математики и математической логики, что придало Советской математической школе, сформировавшейся в 1920–1930-е гг., широту проводимых в ней исследований. Эта широта не могла бы быть достигнутой, если бы математические исследования в стране развивались в идеологических рамках, заданных лидерами столичных школ. К счастью, влияние этих выдающихся математиков было не абсолютным даже в столицах и значительно теряло свою силу на периферии. Так именно в провинциальных университетах были без всякого предубеждения восприняты идеи Дж.Пеано в области анализа, оснований математики и математической логики. Именно там начали воспринимать его результаты как высшие достижения современной математики, а само его имя относить к числу наиболее выдающихся математиков. Начали воспринимать и развивать. И когда с течением времени на авансцену начали выходить математики нового поколения (некоторые из них были выходцами из провинции), то для них имя Пеано и его результаты воспринимались естественно как научная классика, а в спектре научных исследований советских уже математиков появились и математическая логика, и основания математики, и теория функций множеств, и теория интеграла.

7. Заключение. Рассмотренные нами эпизоды – участие россиян в созданном организационным гением Дж.Б.Гучча *Circolo matematico di Palermo* и связи Дж.Пеано с российскими математиками – являются частными проявлениями общей тенденции развития итальянского математического сообщества конца XIX – начала XX столетия: стремлению к объединению всех математиков не только недавно воссоединенной Италии, но и всего мира в единую «математическую семью». Ибо такое объединение будет служить наиболее успешному развитию математических наук, что, в свою очередь, должно, в соответствии с бытовавшими в обществе того времени надеждами, способствовать благоденствию, процветанию и укреплению мира, в котором не будет места войнам и насилию. Особенно искренне верили в это люди, рожденные под флагом Рисорджименто.

Примечания

1 Настоящая статья является расширенным вариантом текста доклада [1] «Италия и Россия во второй половине XIX – в первой трети XX века», произнесенного на международном математическом симпозиуме «Europa matematica e Risorgimento italiano», проходившего в Пизе в сентябре 2011 г.

2 Здесь и далее в скобках указаны порядковые номера членов *Circolo* в соответствии со списком, хранящимся в архиве Общества.

3 Хотя ставшая видной фигурой в истории польской культуры: речь, вероятно, идет о Евгении Станиславовне Кербедз (1855–1946), дочери известного петербургского инженера польского происхождения почетного члена Петербургской академии наук С.В.Кербедза (см.: [6, с.160]).

4 Известный математик, впоследствии эмигрировавший в Сербию, вице-президент Сербской академии наук.

5 Следует отметить, что Стеклов в письме от 20 мая 1908 г., хранящемся в архиве *Circolo*, рекомендовал к избранию в Общество А.А.Маркова, К.А.Поссе, Д.К.Бобылева, А.Н.Коркина, Ю.В.Сохоцкого и И.Л.Пташицкого. За исключением Коркина и Сохоцкого все они вскоре стали членами Общества.

6 Известный специалист в области теории чисел. С 1924 г. член-корреспондент АН СССР.

[7] С 1910 г. приват-доцент Харьковского университета, с 1918 г. профессор Днепропетровского института народного образования.

[8] Впоследствии известный математик, после революции эмигрировавший в США.

[9] Впоследствии известный математик. В 1922 г. уехал в Польшу, а оттуда в 1923 г. переехал в США.

[10] Известный математик, действительный член Российской академии наук в 1921–1930 гг. В 1929 г. эмигрировал в США.

[11] Впоследствии профессор. Эмигрировал в Сербию.

[12] Впоследствии профессор этого университета.

[13] После революции 1917 г. эмигрировал во Францию. Член-корреспондент Академии наук Франции.

[14] Известный украинский математик. С 1929 г. академик АН УССР. Репрессирован. Погиб в ГУЛАГе.

Список литературы

1. *Demidov S.S.* Italy and Russia in the second half of the 19th – the early 20th century // *L.Pepe* (Ed.) Europa matematica e Risorgimento italiano. Bologna: CLUEB, 2013. P.59–66.
2. *Демидов С.С.*, *Токарева Т.А.* Московское математическое общество: фрагменты истории // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып.8(43). М., 2003. С.27–49.
3. *Brigaglia A.* The First International Mathematical Community: The Circolo matematico di Palermo // Mathematics Unbound: The Evolution of an International Mathematical Research Community, 1800–1945 / *K.H.Parshall* and *A.C.Rice* (Ed.). Providence, Rhode Island: AMS/LMS, 2002. P.179–200.
4. *Brigaglia A.*, *Masotto G.* Il Circolo matematico di Palermo. Bari: Edizioni Dedalo, 1982.
5. *Лейбман Э.Б.* Математическое отделение Новороссийского общества естествоиспытателей (1876–1928) // Историко-математические исследования. Вып.XIV. М., 1961. С.391–440.
6. *Воронин М.И.*, *Воронина М.М.* Станислав Валерианович Кербедз. 1810–1899. Л., 1982.
7. *Юшкевич А.П.* История математики в России до 1917 года. М., 1968.
8. *Бажанов В.А.*, *Юшкевич А.П.* А.В.Васильев как ученый и общественный деятель // *А.В.Васильев.* Николай Иванович Лобачевский. М., 1992. С.221–228.
9. История отечественной математики / Под ред. *И.З.Штокало*. Т.2. Киев, 1967.
10. *Demidov S.S.* Peano et la communauté mathématique russe au premier tiers du XX-e siècle // *S.C.Roero* (Ed.) Peano e la sua scuola fra matematica, logica e interlingua. Atti del Congresso internazionale di studi (Torino, 6–7 ottobre 2008). Universita di Torino. Centro di studi per la storia dell'universita. Studi e fonti. XVII. Torino: Deputazione Subalpina di Storia Patria, 2010. P.215–240.
11. *Демидов С.С.* Джузеппе Пеано и российское математическое сообщество его времени // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып.14(49). М., 2011. С.25–40.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЖУРНАЛЫ И ИХ ИНТЕРНАЦИОНАЛИЗАЦИЯ: ПЕРВЫЙ ПОРТУГАЛЬСКИЙ ЖУРНАЛ «JORNAL DE SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONÓMICAS»[1)]

В.И.Харламова, А.А.Харламов, Х.Р.Малонек

Введение. Появление первых научных журналов, начавшееся в Европе во второй половине XVII в., явилось поворотным пунктом в истории науки. К этому времени издание книг в Европе имело уже двухвековой опыт. Распространение журналов было принципиально новым явлением, не связанным с книжной функцией публикации нового знания. Наступала эпоха Просвещения – одна из ключевых эпох в истории европейской культуры, связанная с развитием научной, философской и общественной мысли. Начавшись в Англии, это движение распространилось на Францию, Германию, Россию и охватило другие страны Европы. Это время расцвета литературы и искусства: многие шедевры были написаны и созданы в XVII столетии, картины Рембрандта, Ван Дейка, Веласкеса, театр Шекспира, Сервантеса, Корнеля, Мольера, Расина. Это был век давший мировой культуре имена Галилея, Декарта, Паскаля, Спинозы, Бэкона, Ньютона.

Условия создания первых европейских журналов в первую очередь определялись формированием в XVII в. определенной интеллектуальной среды. Возникала новая форма общения европейских ученых, ориентированных на антисхоластические методы познания. В основе этого интеллектуального движения лежали рационализм и свободомыслие. Это было зарождение своего рода интернационального сообщества интеллектуалов свободных от теологических ограничений, объединенных задачей поиска истины. Помимо личных встреч, ученые нуждались в регулярной научной переписке, без которой трудно себе представить духовную жизнь Европы этого периода. Научная переписка не могла вовлечь в общение достаточно большое число ученых, что вносило определенные ограничения в распространение новых достижений. Информационно-пропагандистские возможности периодического научного журнала были несоизмеримо выше. Научные журналы возникли из сначала эпизодического, а затем регулярного обмена письмами

1) Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда FEDER через COMPETE (Programa Operacional Factores de Competitividade), а также через португальские фонды, представленные Центром CIDMA (Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações, Center for Research and Development in Mathematics and Applications) и фондом FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia, Foundation for Science and Technology), в рамках проекта PEst-C/MAT/UI4106/2011 с COMPETE n° FCOMP-01-0124-FEDER-022690.

между учеными о результатах их исследований. Потребность в создании более устойчивой системы научного общения повлекла за собой усиление научных связей, а также возникновение интеллектуальных коллективов, которые послужили основой почти одновременного создания как научных журналов, так и некоторых научных обществ. Стали создаваться научные общества, способные к привлечению и аккумулированию средств на издания (в том числе и периодические). Исторически европейские общенаучные журналы содействовали как формированию национальных научных школ, так и интернационализации науки[1].

Математические статьи впервые стали, наряду с работами по другим естественным наукам, печататься в общенаучных журналах. Особенного исторического интереса здесь заслуживают: «Journal des Savants» (Журнал ученых), в котором публиковались работы братьев Якоба и Иоганна Бернулли по исчислению бесконечно малых; «Philosophical Transactions of the Royal Society» (Философские труды Королевского общества), с которым связаны бессмертные открытия И.Ньютона, придавшие деятельности журнала огромную известность и выдвинувшие на первый план занятия математикой; «Acta eruditorum» (Ученые записки) – здесь напечатаны работы Г.В.Лейбница по дифференциальному и интегральному исчислению, изложение содержания «Математических начал натуральной философии» Ньютона, а также статьи Г.Лопиталя, братьев Бернулли и других виднейших математиков.

Особенностью первых европейских журналов была преимущественно научно-информационная ориентация. Публикация результатов научных исследований первоначально носила предварительный характер и облекалась в традиционную форму писем. В течение полутора веков, начиная со второй половины XVII в., в научных журналах печатались, главным образом, сведения компилятивного характера, публикации содержали пересказ других книг и журналов и выдержки из них, а также хроникальные сообщения. Сплав оригинального и компилятивного текстов был естественным явлением. Ссылки на первоисточники не были приняты, статьи зачастую не подписывались или подписывались инициалами, вследствие чего установление авторства до сих пор затруднительно. Вопросы авторского приоритета ученого на оригинальную научную информацию находились в зачаточном состоянии. Достаточно упомянуть многолетние приоритетные споры Р.Гука и Лейбница с Ньютоном. Лишь в XIX в. научные журналы из средства только распространения сведений о новых достижениях стали превращаться в основной инструмент сбора, хранения и распространения научных знаний.

С начала XIX в. стали создаваться журналы по различным отраслям науки, техники, культуры, разделяясь не только по тематике, но и по целевому назначению – на массовые, научные и профессиональные. В первую очередь стали развиваться специальные журналы, число которых росло вместе с ростом объема научной информации. В течение нескольких десятилетий журналы выявили оптимальную форму издания и продолжали формироваться под влиянием процессов дифференциации и интеграции накопляющегося знания. Примерно во второй половине XIX в. журнальная статья приобрела современную форму. Благодаря формированию практики библиографических ссылок на предшествующие работы усиливалась преемственность в науке, а рост доступности всей европейской журнальной литературы способствовал интернациональному характеру исследований. Важно отметить, что функции научного журнала уже не ограничиваются простым распространением научной информации: публикация оригинальной статьи обеспечивает установление и сохранение интеллектуальной собственности авторов.

В наши дни научным журналом[2] принято называть периодическое издание, являющееся источником научной информации и средством научной коммуникации. С определенной долей условности можно выделить три типа направленности современных научных журналов: во-первых, это журналы, содержащие преимущественно новые научные результаты или новое осмысление и обсуждение известных идей и фактов. Во-вторых, журналы, публикующие сведения научно-информационного и библиографического характера (реферативные журналы и указатели к ним, сигнальная информация, экспресс-информация, библиографические журналы). И, наконец, журналы, которые можно отнести к третьему типу, посвящены обобщению уже опубликованной научной информации (обзорные, научно-методические и научно-популярные журналы).

Одним из характерных примеров перехода от начальной научно-информационной ориентации к современной научной форме публикаций может служить эволюция первого португальского математического журнала «Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas» (Журнал математических и астрономических наук) созданного Ф.Г.Тейшейрой[3] в последней четверти XIX в.[4] Ниже, в разделе посвященном деятельности Гомеша Тейшейры, мы постараемся показать, как происходила эволюция журнала. Мы покажем также, как журнал Тейшейры одновременно способствовал, с одной стороны, формированию национального португальского математического сообщества и, с другой стороны, интернационализации связей португальских математиков с математиками передовых европейских стран.

Первые общенаучные журналы. Первый европейский общенаучный журнал «Journal des Savants» появился во Франции в 1665 г. по инициативе Ж.-Б.Кольбера. Первым редактором и издателем журнала был Д. де Салло. В издании «Journal des Savants» (1665–1792 и с 1816) участвовали такие известные деятели французской культуры, как поэты и литераторы М.Л. де Гомбервилль и Ж.Шаплен. Журнал печатается с разной периодичностью с 1665 г. до наших дней с перерывом в период с 1792 по 1816 гг.

С опозданием на два месяца 6 марта 1665 г. в Англии появился журнал «Philosophical Transactions of the Royal Society» под редакцией Г.Ольденбурга, секретаря Королевского общества. Ольденбург ввел в обиход практику предварительного рецензирования присылаемых для публикации научных рукописей независимыми экспертами. Этот журнал, официальный орган Королевского общества, выходит ежемесячно без перерывов до нашего времени. Любопытно, что из десяти публикаций, составивших первый номер, три были взяты из «Journal des Savants».

В 1668 г. в Риме появился первый итальянский журнал «Giornale de' Letterati» (Журнал литераторов), основанный Ф.Нацари по образцу французского «Journal des Savants», а в дальнейшем сам послужил образцом для итальянских общенаучных журналов. Журнал, в котором помещались работы литературоведческого, языковедческого, философского характера, просуществовал до 1683 г.

В 1670 г. Германская академия естествоиспытателей «Леопольдина» (Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina) в Швейнфурте[5] начала издавать свои труды в журнале «Miscellanea curiosa medico-physica» (Занимательная медико-физика), в основном это были публикации на медико-биологические темы. Этот журнал считается первым периодическим научным изданием в области медицина и, после нескольких изменений названия, журнал с 1932 г. продолжает выходить под названием «Nova Acta Leopoldina» (Новый журнал Леопольдина).

В 1682 г. О.Менке предпринял в Лейпциге издание журнала «Acta Eruditorum» на латинском языке, который быстро приобрел известность, став столь же популярным, как и «Journal des Savants». В его издании деятельное участие принял Лейбниц. Благодаря статьям Лейбница журнал этот скоро приобрел огромное значение для математики. Журнал «Acta Eruditorum» просуществовал до 1731 г.

Лондонские журналы «The Ladies' Diary: or, Woman's Almanack» (Дамский ежедневник: или альманах женщины) (1704–1841) и «Gentleman's Diary or, The Mathematical Repository»[6] (Мужской ежедневник: или математический сборник)

(1741–1800) печатали работы математического содержания среди других публикаций научно-популярного характера.

Во Франции по инициативе Г.Монжа и Л.Карно начинает издаваться журнал «Journal de l'Ecole Polytechnique» (Журнал Политехнической школы) (с 1795) при созданной в 1794 г. знаменитой парижской Политехнической школе.

В России первым научным журналом был издаваемый Петербургской академией наук (по инициативе Г.Ф.Миллера) журнал на латинском языке «Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae» (Комментарии Императорской петербургской академии наук) (1726–1751), предшественник «Известий Академии наук». После 1751 г. «Commentarii...» под разными названиями публиковались до 1806 г.[7] Рефераты на русском языке публиковались в специальном научном журнале «Краткое описание Комментариев Академии наук» (1728), «Содержание ученых рассуждений Академии наук» (1750–1759) и в общих журналах: «Примечания к Ведомостям» (1728–1742), «Ежемесячные сочинения, к пользе и увеселению служащие» (1755–1781) и др. Старейший из выходящих до сих пор отечественных научно-технических журналов – «Горный журнал» (с 1825).

Различные общие издания академий, университетов и научных обществ также отводят значительное место математическим публикациям. Среди этих изданий в России: «Казанский вестник» (1821–1833) и его продолжение «Ученые записки Казанского университета» (с 1834), в которых впервые опубликованы важнейшие сочинения Н.И.Лобачевского, «Известия Физико-математического общества при Казанском университете» (с 1891), «Ученые записки императорского Московского университета» (1833–1836), «Ученые записки Московского университета». «Отдел физико-математический» (1880–1916), «Ученые записки Московского университета» (с 1933).

Ряд общих журналов имеет целью быстрое опубликование коротких предварительных сообщений о достигнутых результатах по математике. Основные журналы этого типа: французский «Comptes rendus de l'Académie des sciences» (Труды Академии наук) (с 1835), «Proceedings of the National Academy of sciences of the United States of America» (Труды Национальной академии наук США) (с 1915), «Доклады Академии наук СССР» (с 1922).

По инициативе немецкого физика И.К.Поггендорфа[8] издается справочник «Biographisch-Literarisches Handwörterbuch der exakten Naturwissenschaften» (Биографическо-литературный карманный словарь точных наук) (с 1863), известный как справочник Поггендорфа, содержащий биографические сведения и научную библиографию ученых, работавших в области точных наук.

Международный указатель научных журналов, выходивших в XX в., «World List of Scientific Periodicals, published in the years 1900–1960» (Список всемирной научной периодики) (4 ed., vol.1–3, 1963–1965), содержит около 60 тыс. названий журналов (по всем наукам), в том числе и прекративших издание. Подсчеты по фондам Британской национальной библиотеки дают около 35 тыс. названий текущих журналов по точным, естественным и прикладным наукам. В них ежегодно публикуется не менее 3 млн. статей.

Математические журналы. С начала XIX в. появляются специализированные математические журналы. В 1799–1804 гг. в Лондоне выпускался математический журнал «The Mathematical Repository» (Математический сборник), в 1806–1833 гг. печаталось его продолжение – «New Series of the Mathematical Repository» (Новые выпуски Математического сборника). В этом журнале кроме оригинальных сочинений также перепечатывались некоторые из уже опубликованных работ Ж.Лагранжа, А.М.Лежандра и Л.Эйлера.

В 1810 г. из-за трудностей в публикации своих исследований французский математик Ж.Жергонн основал свой собственный математический журнал «Annales de mathématiques pures et appliquées» (Анналы чистой и прикладной математики), на который зачастую ссылаются, как на журнал Жергонна («Annales de Gergonne»), журнал выходил до 1831 г. Журнал Жергонна некоторые авторы считают первым специализированным математическим журналом [1], однако, с нашей точки зрения, первым таким журналом все-таки был английский «The Mathematical Repository».

В 1826 г. в Германии немецкий математик А.Крелле начинает издавать «Journal für die reine und angewandte Mathematik» (Журнал теоретической и прикладной математики), который называли по имени редактора – «Crelle's Journal» (журналом Крелле) до 1855 г., позже – «Borchardt's Journal», а еще позже – «Kronecker's Journal», но название журнала по имени его первого издателя и редактора Крелле стало общепринятым. Уже в первом томе «Crelle's Journal» выходят семь статей Н.Г.Абеля, а впоследствии публикуются работы Г.Кантора. С 1836 г. во Франции Ж.Лиувилль, продолжая традицию Жергонна, начинает издание «Journal de mathématiques pures et appliquées» (Журнал чистой и прикладной математики). Лиувилль, одним из первых осознав важность неопубликованных работ Э.Галуа, опубликовал их в своем журнале в 1846 г. Оба этих старейших математических журнала существуют и в наши дни. В Англии начинают выходить «The Cambridge (and Dublin) Mathematical Journal» (Математический журнал Кембриджа (и Дублина)) (1839–1854) и журнал «The Quarterly

Journal of Pure and Applied Mathematics» (Ежеквартальный журнал чистой и прикладной математики) (1857–1927), основанный известным английским математиком Д.Сильвестром[9]. В Италии Б.Тортолини выпускает журнал «Annali di Scienze Matematiche e Fisiche» (Летопись физико-математических наук) (1850–1857), который с 1858 г. называется «Annali di Matematica Pura e Applicata» (Летопись теоретической и прикладной математики) и выходит до сих пор.

В Европе и Америке продолжают появляться новые математические журналы: во Франции – «Nouvelles Annales de Mathématiques» (Новые летописи математики) (1842–1927) и «Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure» (Научные анналы Высшей нормальной школы) (с 1864), в Германии – «Archiv der Mathematik und Physik» (Архив математики и физики) (1841–1920) и «Mathematische Annalen» (Математические анналы) (с 1869), в Португалии – «Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas» (1877–1902) известный также как «Teixeira Jornal», в США – «American Journal of Mathematics» (Американский журнал математики) (с 1878) и «Annals of mathematics» (Математические анналы) (с 1884), в Швеции – «Acta mathematica» (Математический журнал) (с 1882).

Во второй половине XIX в. образуется ряд математических обществ, которые начинают издавать новые математические журналы, некоторые из которых выходят и в настоящее время: «Proceedings of the London Mathematical Society» (Труды Лондонского математического общества) (с 1865); «Математический сборник» (с 1866)[10]; «Bulletin de la Société mathématique de France» (Вестник математического общества Франции) (с 1872); «Časopis pro pěstování matematiky a fysiky»[11] (Прикладная математика и физика) (1872–1950), с 1950 г. этот чешский журнал выходил под названием «Časopis pro pěstování matematiky» (Прикладная математика), а с 1990 г. – под названием «Mathematica Bohemica» (Математика Богемии); «Сообщения Харьковского математического общества»[12] (1879–1917); «Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society» (Труды математического общества Эдинбурга) (с 1883); «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo» (Известия математического сообщества Палермо) (с 1884); «Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung» (Выпуски немецкого математического общества) (с 1890); «Bulletin of the American Mathematical Society» (Бюллетень американского математического общества) (с 1891). Начало XX в. отмечено появлением новых специализированных математических журналов, выходящих во многих странах Европы, в Северной Америке (США и Канада), в Австралии и Японии. В примечаниях приводится хронологический список основных математических журналов этого периода[13].

Журналы по отдельным разделам математики. Журналы по конкретным разделам математики возникли уже в XIX в., первыми отдельными направлениями стали статистика и история математики [2]. Один из старейших специализированных журналов – «Journal of the Statistical Society of London» (Журнал статистического общества Лондона) (1838–1886), с 1887 по 1947 г. выходил как «Journal of the Royal Statistical Society»[14] (Журнал Королевского статистического общества). Позже в США начал публиковаться «Journal of the American Statistical Association» (Журнал американской статистической ассоциации) (с 1888). В Англии (Оксфорд) выходит журнал по теоретическим вопросам статистики «Biometrika» (Биометрика) (с 1901). Журнал научно-исторического содержания выпускается в Италии математиком и историком науки Балдассаром Бонкомпагни «Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Mathematiche e Fisiche» (Бюллетень библиографии и истории математических и физических наук) (1868–1887). В Германии выходит журнал исторических очерков о математике «Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwedungen» (Очерки по истории математических наук, включая их применение) (1877–1913), а в Швеции – историко-математический журнал «Bibliotheca Mathematica» (Математическая библиотека) (1884–1914) издававшийся историком и математиком Г.Энестремом. В России В.В.Бобынин издавал журнал «Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем» (1884–1894), посвященный чистой и прикладной математике, астрономии и физике, а также истории математики и физики.

Интенсивное разделение общематематических журналов на периодические издания в различных специализированных областях математики началось в XX в. В Варшаве польские математики В.Серпинский, С.Мазуркевич и З.Янишевский основали журнал «Fundamenta Mathematicae» (Основы математики) (с 1920), посвященный вопросам теории множеств и ее приложениям, а в Львове под редакцией польских математиков С.Банаха и Г.Штейнгауза стал издаваться журнал «Studia Mathematica» (Математические исследования) (с 1929), специализировавшийся на проблемах функционального анализа. В последующие годы возникают новые математические журналы по отдельным дисциплинам[15].

Реферативные журналы. Во второй половине XIX в. начинается деятельность по оповещению о содержании математических работ (в том числе и журнальных статей), публикующихся в различных странах мира, которая в начале XX в. приняла современную форму – публикацию реферативных журналов. Первым таким журналом, появившимся в 1868 г., стал «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik» (Ежегодник прогресса в математике). В период с 1985 по 1900 гг. В.В.Бобынин выпускает журнал «Русская физико-математическая библиография» (т.1–3). В 1904–1917 гг. выходит «Русская библиография по естествознанию и математике, составленная состоящим при имп. Академии наук С.-Петербургским бюро международной библиографии» (т.1–9). В 1931 г. начался выпуск журнала «Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete» (Международный журнал математики и смежных областей), в 1939 г. – «Физико-математический реферативный журнал» (выходил до 1941), в 1940 г. – «Mathematical Reviews» (Математические обзоры), в 1953 г. – «Реферативный журнал. Математика».

Журналы по общим вопросам и по элементарной математике. Отдельную группу составляют научно-методические математические журналы, посвященные вопросам преподавания математики в средних и высших учебных заведениях. Число таких журналов за последние два века неуклонно увеличивалось по мере распространения математического образования, и доказательством этого может служить список журналов, приведенный в примечаниях для некоторых стран[16].

Исторические особенности развития математики в Португалии. Хотя математика, как интеллектуальный феномен, не имеет жесткой привязки к социально-экономическим факторам, рассматриваемые здесь вопросы, на наш взгляд, целесообразно представить в социально-историческом контексте. Для этого необходимо привести краткую справку по истории Португалии.

Португальская империя[17] после эпохи великих географических открытий стала в XVI в. первой в мире империей на пяти континентах. Но уже в конце XVI столетия в Португалии наступил период упадка, продолжавшийся до середины XVIII в.[18]. Некоторые известные европейские имена имеют отношение к Португалии. Барух Спиноза был сыном португальского еврея-сефарда, бежавшего от инквизиции в Голландию. Английский экономист Давид Рикардо был родом из португальско-еврейской семьи, бежавшей в Голландию, а затем переехавшей в Англию. Великий испанский художник Диего Веласкес был сыном уроженца португальского города Порту, вынужденного искать работу в Севилье. Это лишь характерные примеры. Но эти примеры указывают на две основные причины упадка: 1) преследования португальской инквизиции[19], породившие изоляцию и парализовавшие культурные инициативы, и 2) экономический и политический кризис, который создал в стране атмосферу депрессии и уныния. На протяжении части XVI, всего XVII и первой половины XVIII вв. инквизиции удавалось удерживать португальскую культуру в изоляции от европейских процессов развития идей, развития, которое как раз в эту эпоху было весьма интенсивным и творческим. От идей эпох Реформации и Просвещения до Португалии доходила лишь тонкая струйка рискованной идейной контрабанды [3].

Главную роль в культурной жизни Португалии с конца XVI до середины XVIII вв. играли иезуиты[20]. Именно они продвигали образование и контролировали практически всю культурную жизнь. Во всех странах, в которых создавался орден, иезуиты брали в свои руки образование и делали это с большим успехом[21]. Иезуиты в своих школах, разбросанных по всей стране, давали среднее образование и обучали грамоте. Образование, которое они давали, было одной из форм борьбы с ересью и духом Реформации[22].

Книги для обучения были тщательно подготовлены. В этих учебниках, написанных, как правило, с высоким педагогическим мастерством, объединялось все ортодоксальное учение, которое в условиях Контрреформации считалось соответствующим истинам веры. Эти книги, языком которых была латынь, являлись основой образования до времен маркиза Помбала[23], запретившего их употребление в 1759 г. Они были единственными книгами в течение полутора веков, и это сделало их существенной причиной задержки и отсталости: в XVIII в. португальские студенты читали учебники, излагавшие идеи начала XVII в.

Во второй половине XVIII в. начался период реформ маркиза Помбала. За двадцать семь лет правления маркиз Помбал развернул невиданные в истории Португалии государственные преобразования. Они включали реорганизацию структуры органов власти, развитие экономики, перестройку системы образования и учебных заведений. В области экономики Помбал был сторонником протекционизма: осыпая привилегиями португальские мануфактуры и торговые компании, он наложил запрет на экспорт необработанного сырья, что привело к становлению национального производства шелка, стекла и керамики. Соответственно росло сопротивление его реформам со стороны высшей аристократии, инквизиции и влиятельного Ордена иезуитов. После неудачного покушения на жизнь короля (3 сентября 1758 г.), в котором многие видели происки иезуитов, Помбал добился их изгнания из страны.

С изгнанием иезуитов возникла срочная необходимость в реформе системы образования. Еще в 1759 г. тем же законом, которым объявлялось о закрытии иезуитских школ, были созданы классы для изучения латинской грамматики и риторики во всех центрах округов и запрещалось преподавание лицам, не имевшим на то официального разрешения. В 1772 г. был издан закон, где впервые в Португалии определялась образовательная политика. Основные ее идеи заключались в том, что образование должно даваться каждому в зависимости от социального положения, которое ему предстоит занять. Для тех, кто займется физическим трудом, школьное образование не нужно – достаточно наставлений приходских священников. Среди тех, кому предстоит занять более высокое положение, различаются две категории – те, кому достаточно уметь читать, писать и считать, и те, кто будет продолжать учебу и поступит в университет, где дается образование, «позволяющее готовить государственных мужей». Для них предусматривалось получение среднего образования: изучение латинской грамматики, греческого языка, риторики и философии. Эта концепция системы образования, которую создал Помбал (рудиментарный уровень начального образования; высшее образование для элиты; среднее образование, предназначенное, главным образом, для подготовки к высшему образованию), сохранится в общих чертах в национальной системе базового образования почти до последней четверти XX в.

В том же 1772 г. был обнародован новый университетский устав. Сформировавшаяся к тому времени в Португалии система высшего образования была очень низкого уровня. Студентам не сообщалось практически ничего о достижениях в философии и в науках за последние два века, имена Ньютона, Р.Декарта, Лейбница, Д.Локка в Университете Коимбры не произносились [3]. Реформа Помбала радикально изменила как структуру учебного процесса, так и методику обучения[24]. В Университете Коимбры были открыты два новых факультета – математический и философский. Философский факультет соответствовал сегодняшним факультетам естественных наук и включал курсы по естественным наукам, экспериментальной физике и химии[25]. В Коимбре были созданы физическая лаборатория, ботанический сад, анатомический театр, астрономическая обсерватория, университетская типография.

Начало следующего XIX столетия началось для Португалии крайне неблагоприятно. Страна пережила три французских вторжения в эпоху наполеоновских войн, затем, в 1822 г., произошло отделение Бразилии, чем была подорвана колониальная экономика Португалии. Усилилось английское торговое доминирование, тормозившее развитие национальной промышленности. После либеральной революции 1820 г. и принятия конституции 1822 г. реакционные круги пытались восстановить абсолютизм и отменить конституцию. В результате в 1828 г. разразилась гражданская война, отмеченная схваткой абсолютизма и либерализма, закончившаяся в

1834 г. установлением конституционной монархии. Вследствие противоречивых политических условий, а также нехватки капиталов, устаревшего оборудования и давления со стороны иностранных конкурентов попытки экономического восстановления, предпринятые в 1820–1824 и 1834–1838 гг., успеха не имели.

С распространением либерализма в обществе началось медленное формирование среднего класса мелкой буржуазии. Система образования, созданная во времена маркиза Помбала, не предусматривала специального образовательного уровня для этого нового слоя общества. Выдвинутый в результате революции проект реформы системы образования предусматривал создание лицеев (путь в университет) и школ среднего образования (путь к трудоустройству). К сожалению, проект основывался на идеях заимствованных из Франции и не учитывал специфику социально-экономического устройства Португалии. Новая программа наряду со старыми гуманитарными предметами включала французский, английский или немецкий язык, химию, физику, естественные науки, математику. Однако ощущалась нехватка квалифицированных учителей, а в обществе отсутствовало понимание необходимости получения образования, что привело к дефициту учащихся. В результате проект не был осуществлен. Только с появлением поездов и проезжих дорог набрала силу общественная группа, которая стала направлять своих детей в лицеи, и поэтому обучение в лицеях начало становиться обыденной практикой лишь в 1860-е гг.

Первая половина XIX в., которая в Европе была периодом интенсивной экономической деятельности, в Португалии оказалась временем стагнации и депрессии, что серьезно усугубило отставание Португалии. Характерным примером может служить тот факт, что к началу второй половины XIX в. Португалия практически не имела торгового флота для поддержания связи со своими колониями в Африке [4] и была вынуждена пользоваться услугами британского и германского флотов[26].

Вторая половина XIX в. оказалась более успешной для страны [5]. Начинается фаза восстановления и экспансии, называемая в Португалии «Regeneração» (периодом Восстановления, или Возрождения). Отмечается усиление роли частного сектора и вмешательство государства, взявшего на себя выполнение программы создания коммуникаций[27]. Этот период португальской истории связан с повышенной активностью в научных и творческих кругах (что наблюдалось раньше только в XVI в.), которая, однако, быстро пошла на спад уже в начале следующего XX столетия. Во второй половине XIX в. были созданы некоторые научные общества, стали выходить новые португальские журналы[28]. Успехи, достигнутые в этот период в области археологии, истории, права, медицины, географии, лингвистики, во многих случаях кажутся неожиданными. Рост этой успешной деятельности во многом связан с тем обстоятельством, что после либеральной революции[29] университетское образование в Португалии стало более доступным широким социальным группам. Социальная активность, вызванная заменой старого режима новым обществом, вероятно, стала причиной интеллектуальных движений во второй половине XIX в. Однако к началу XX в. ситуация снова меняется. После кризиса 1891 г. опять наступает фаза стагнации и депрессии, которая продолжается до следующего столетия. В 1910 г. происходит изменение государственного строя – падение португальской монархии, провозглашение республики и продолжение колониальной политики (вплоть до потери всех колониальных территорий в 2002 г.).

Общенаучные журналы в Португалии. В Португалии в 1720 г. в Лиссабоне по декрету короля Жуао V была создана «Academia Real da História Portuguesa» (Королевская академия португальской истории), просуществовавшая до 1776 г.[30] За время с 1721 до 1736 гг. Академия истории выпустила 15 томов общего журнала «Memórias» (Труды) с работами на исторические темы и отдельные монографии, написанные членами Академии. Журнал «Memórias» Королевской академии португальской истории стал первым научным изданием в Португалии.

Королевская академия португальской истории стала предвестником учреждения в 1779 г. «Academia Real das Ciências de Lisboa»[31] (Королевская академия наук Лиссабона), которая существует по сей день[32]. Первые публикации по математике, которые в наше время можно классифицировать как научные статьи, появились в первом выпуске за 1780–1788 гг. нового академического журнала «Memórias da Academia Real das Ciências de Lisboa» (Труды королевской академии наук Лиссабона), опубликованном в 1797 г. К концу XIX в. португальская Академия наук опубликовала 38 томов «Memórias», посвященных математике, физике и естественным наукам. Подробный анализ научных публикаций за этот период сделан в 1986 г. в работе Ф.Р.Диаша Агуду [6]. Позже, в 1866 г., под эгидой Академии был создан журнал «Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes» (Журнал математических, физических и естественных наук), выходивший до 1927 г. Несмотря на эпизодические публикации математических статей, основной ориентацией журнала (как и подавляющее число публикаций) была история естествознания.

Все издания «Memórias da Academia Real das Ciências de Lisboa» и выпуски «Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes» выходили с большой задержкой (на несколько лет) и часто содержали публикации оригинальных работ по математике, доложенных на заседаниях Академии задолго до времени выхода издания. Задержка в сроках и, что немаловажно, использование в публикациях только португальского языка регулярно приводили к утрате приоритета. Многие математические исследования велись независимо и одновременно в разных странах Европы, поэтому нет ничего удивительного в том, что к одним и тем же результатам приходили ученые в других странах с небольшой разницей во времени. В результате математические исследования, сделанные позже, публиковались в других журналах раньше и приобретали приоритетность по срокам публикации[33]. Научная изолированность Португалии, по мнению крупнейшего португальского математика Гомеша Тейшейры [7], была еще одной немаловажной причиной потери научного приоритета португальскими математиками, печатавшимися на португальском языке.

В 1852 г. в Португалии в университете Коимбры была основана Академия науки, литературы и искусства – «Instituto de Coimbra» (Институт Коимбры), созданная на основе клуба преподавателей университета «Clube dos Lentes» (Клуб доцентов) и продолжавшая свое существование до 1982 г. Следуя новым либеральным идеям периода португальского Возрождения второй половины XIX в., новая Академия декларировала свои главные задачи в распространении и развитии наук, законодательства, искусства и восстановлении португальской культуры. Академия была организована в тот момент, когда либеральная политика нуждалась в практической реализации и требовалось особое внимание к просвещению общественности. Уже через год, в 1853 г., Академия получила первую поддержку от государства: было разрешено издавать научно-литературный журнал в издательстве университета («Imprensa da Universidade») за государственный счет[34]. Журнал назывался «O Instituto: Revista científica e literária» (Институт: научный и литературный журнал) и выходил до 1981 г. Всего был издан 141 том. Журнал не был математическим, хотя иногда публиковал статьи преподавателей математики университета в основном дидактического характера [8].

Как отмечает Л.Сараива [9], после радикальных реформ университетского образования проведенных маркизом Помбалом в 1772 г., появление факультета математики университета Коимбры не оказало заметного влияния на развитие математики в Португалии в первые три четверти XIX в. В этот период математические публикации журнала «O Instituto: Revista científica e literária» отражали ситуацию на факультете Математики и не представляли собой заметного научного интереса. Исключением была перепечатка оригинальной работы выдающегося португальского математика

Ж.Анастасио да Кунья[35] в выпуске журнала 1856 г. [10]. К сожалению труды Анастасио да Куньи не получили известности, какой заслуживали.

Подробный анализ «Математических начал» Анастасио да Куньи [11] был проведен А.П.Юшкевичем [12–14]. В работе [12] Юшкевич рассматривает предположение о том, что Анастасио да Кунья в своих «Математических началах», опубликованных посмертно в 1790 г., предвосхитил открытие общего условия сходимости произвольного ряда предложенного О.Л.Коши. Общепризнанное определение признака сходимости рядов было представлено Коши в 1821 г. в курсе анализа «Cours d'analyse de l'École royale polytechnique» (Курс анализа Королевской политехнической школы) [15] и известно теперь, как условия сходимости бесконечного ряда Больцано–Коши [16]. Вопрос о приоритете Анастасио да Куньи был поставлен в 1940 г. в работе португальского математика В.Гонсалвеша [17]. Юшкевич обсуждает мнение Гонсалвеша и выражает сомнения в явном приоритете Анастасио да Куньи. Однако Юшкевич сразу отмечает [11, с.157], что он не располагает оригинальным изданием трудов Анастасио да Куньи и вынужден использовать французский перевод [18], опубликованный в 1811 г. учеником Анастасио да Куньи – математиком Ж.М. д'Абреу. Анализ португальского оригинала «Математических начал», сделанный позже в работе [19], показывает, что французский перевод, хотя он и сделан почти дословно, не передает некоторых математических особенностей определений Анастасио да Куньи. Это еще один из характерных примеров потери научного приоритета португальским математиком из-за научной изолированности страны. На наш взгляд, вопрос приоритета в определении критерия сходимости остается открытым и нуждается в дальнейшем исследовании.

Появление первого португальского математического журнала. Современные авторы отмечают [7; 9; 20], что хотя математические исследования в Португалии на протяжении XVIII–XIX вв. были достаточно скромными и ограниченными, даже немногие оригинальные работы того времени и те оставались неизвестными международному научному сообществу и, как следствие, теряли свой научный приоритет. Основными причинами этого положения были: 1) языковые ограничения (публикации только на португальском языке), 2) традиционная изоляция страны (созданная еще в эпоху инквизиции) и 3) периферийное положение португальских Университетов и Академии наук по отношению к интеллектуальным центрам Европы. В середине второй половины XIX в. в португальских научных кругах эти проблемы прекрасно понимали, и выходом из такого положения могло в первую очередь служить срочное налаживание международных контактов и научного обмена [21].

Именно в такой ситуации, как при поддержке со стороны академического сообщества, так и патроната высших правительственных кругов[36], в 1877 г. появился первый португальский математический журнал «Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas» (Журнал математических и астрономических наук), созданный Гомешем Тейшейрой, впоследствии известный также как «Teixeira Jornal» (Журнал Тейшейры). Журнал печатался в типографии Университета Коимбры («Imprensa da Universidade») за государственный счет по распоряжению королевского министра Ж.Лусиано де Каштру [22]. Это был первый математический журнал на Пиренейском полуострове, не зависящий от университетских или академических институтов. Журнал издавался с разной периодичностью до 1905 г., за это время было опубликовано 15 сводных томов, каждый из которых состоял из нескольких отдельных выпусков собранных в один том. Задачи журнала были декларированы сразу в начале первого тома: преодоление математической изоляции Португалии и налаживание прямых контактов с математиками других стран. Для достижения этих целей была изменена традиция использования только португальского языка. Среди публикаций журнала можно встретить статьи, написанные по-французски, по-итальянски и, конечно, по-португальски. Некоторые португальские математики публиковали свои работы по-французски (часто сам Гомеш Тейшейра). Но основным языком публикаций португальских авторов все же оставался их родной язык. Одна из серьезных особенностей журнала состояла в отсутствии предварительного рецензирования независимыми экспертами, эту работу взял на себя сам Гомеш Тейшейра. Надо сразу признать, что появление «журнала Тейшейры» дало положительный результат, слабое и разрозненное математическое сообщество Португалии сразу откликнулось на выход журнала новыми публикациями. В последней четверти XIX в., как отметил Л.Сараива [9], после появления «журнала Тейшейры», началась заметная активизация деятельности португальских математиков (увеличение математической активности оценивалось количественно по простому увеличению числа публикаций, что, конечно, не отражает степень их ценности для математики). Интересен и состав португальских авторов присылавших свои работы: кроме университетских профессоров математики, авторами статей и комментариев были школьные учителя, преподаватели политехнических институтов, военные инженеры и преподаватели различных военных школ.

В журнале «Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas», кроме самого Гомеша Тейшейры, публиковались известные португальские математики: Ф.Понте Орта, Ж.А.Мартинш да Силва, Д.Перейра да Силва, Б.Кабедо, Р.Гимараиш.

Многочисленные личные контакты Гомеша Тейшейры, его интенсивная переписка с известными математиками и широкое признание его работ позволили привлечь к участию в журнале математиков из многих европейских стран: Франции, Германии, Италии, России, Дании, Чехии, Бельгии, Испании, Швейцарии, Голландии. Участие иностранных математиков в «журнале Тейшейры» с годами увеличивалось. В первых выпусках журнала сначала появляются публикации Ш.Эрмита и Г.Дж.Беллавитиса. Затем круг расширяется, в каждом томе журнала появляются новые имена, а некоторые математики публикуются по несколько раз за год в одном томе журнала. В «журнале Тейшейры» печатались Ш.Эрмит, Ш.Валле Пуссен, Г.Дж.Беллавитис, М.Лерх, Э.Чезаро, Г.Виванти, М.Биргер Ханстед, М.Д'Окань, Дж.Лориа, К.Лепэж, А.Гуцмер, Ж.Пирондини, Э.Вейр, М.Бассани, И.Пламеневский[37], С.Пинкерле, М.Лепон, Р.Марколонго, Ж.Дуран Лорига, Д.Бессо, Э.Лемуан, М.П.Схоуте, Э.Новарезе, Ф.Сибирани. Этот список авторов, состоявших в научной переписке с Гомешем Тейшейрой и публиковавших свои работы в португальском журнале «Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas», является лучшим признаком интернационализации математического журнала. Иностранцы охотно печатались в португальском журнале, а математики в Португалии знакомились с новейшими математическими течениями того времени. Постепенно содержание журнала изменялось. Журнал из научно-информационного (в начальных выпусках) превратился в научный журнал, публикующий оригинальные статьи и текущую математическую библиографию.

От иностранных математиков в журнале принимались к публикации два типа работ: во-первых, это были традиционные научные статьи и, во-вторых, публикации писем из математической переписки Гомеша Тейшейры. Публикаций второго типа было гораздо больше, они представляли собой выдержки из писем, включающие научные результаты.

Кроме отделов, содержащих научные статьи и заметки, в первых выпусках «Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas» существовал раздел, предназначенный для учителей средней школы. Это была попытка привлечения возможных публикаций со стороны школьных учителей математики. Но этот эксперимент оказался неудачным, и в следующих выпусках журнала печатались только статьи, заметки и комментарии.

В первых томах журнала, кроме научных статей, помещались интересные математические задачи для читателей, а наиболее удачные из присланных решений печатались в последующих выпусках. Эти задачи представляли собой актуальные проблемы, взятые из научных статей известных математиков и еще не решенные на тот момент. Решения задач, как правило, присылались португальскими математиками, но некоторые решения тех же задач, короткие и очень изящные, были предложены Эрмитом и Беллавитисом.

Начиная со второго тома, в журнале появляется библиографический раздел, включающий всемирную математическую периодику и книги. Библиография подготавливалась Гомешем Тейшейрой и, кроме имени автора, названия работы, журнала или места публикации, содержала краткий реферат, дающий представление о содержании работы. По мере развития журнала количество библиографии увеличивалось, поэтому в некоторых случаях уже обходились без рефератов.

Кроме публикации своих исследований почти в каждом выпуске «Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas», начиная с 1877 г., Гомеш Тейшейра регулярно посылал библиографию работ португальских математиков в немецкий реферативный журнал «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik» а с 1894 г. и в издававшийся во Франции «Le repertoire bibliographique des sciences mathématiques» (Библиографический каталог математических наук).

Если подвести итог, то можно утверждать, что задачи журнала «Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas», поставленные в самом начале, были весьма успешно решены. Были налажены личные контакты и научная переписка с известными математиками других европейских стран, что приблизило математиков в Португалии к более тесному сотрудничеству с зарубежными коллегами. Однако явно видны и трудности. Математическое сообщество Португалии и международное математическое сообщество имели прямые контакты с Гомешем Тейшейрой, но не между собой. Все замыкалось на одного человека, без которого португальские математики и европейское математическое сообщество не могли бы взаимодействовать. Эти недостатки были частично исправлены после закрытия «журнала Тейшейры» в 1905 г. (последний 15 том был напечатан в 1905 г.). В 1905 г. Гомеш Тейшейра открывает новый научный журнал «Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto» (Научные анналы политехнической академии Порту). Новый журнал «Annaes» был общенаучным и публиковал работы по математике, физике, химии и другим естественным наукам. Для математиков новый журнал «Annaes» должен был стать заменой старого «Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas». Журнал

«Annaes» печатается по-прежнему в типографии Университета Коимбры, а после 1927 г. продолжает выходить под новым названием «Anais da Faculdade de Sciências do Porto» и печатается в типографии Порту «Imprensa Portuguesa». В журнале с самого начала наряду со статьями португальских авторов (которые составляли большинство) печатались и работы иностранных математиков (не только из Европы, но даже из Японии[38]). Появляются новые португальские математики: Ж.В.Гонсалвеш, А.Альмейда Кошта, А.Монтейро. Среди уже упомянутых авторов «журнала Тейшейры» в журнале «Annaes» публикуются П.Аппель, Э.Ландау, Т.Леви-Чивита. Даже после кончины Гомеша Тейшейры в 1933 г. журнал и в следующее десятилетие остается основным португальским журналом, публикующим новые математические исследования.

Примечания

[1] Понятие интернационализации для математики довольно спорно, в наше время на смену интернационализации пришла глобализация, хотя и раньше математическое знание не имело географических границ.

[2] Само слово «журнал» происходит от латинского *diurnalis* – ежедневный, что напоминает *acta diurna* Юлия Цезаря.

[3] Франсишко Гомеш Тейшейра (1851–1933) – известный португальский математик, издатель и общественный деятель, профессор Университета Коимбры (1879–1883), Политехнической академии Порту (1883–1911), ректор открытого в 1911 г. Университета Порто (1911–1929).

[4] Первый португальский математический журнал «Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas» (1877–1902), известный также как «Teixeira Jornal».

[5] Германская академия естествоиспытателей Леопольдина («Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina») основана в 1652 г. И.Л.Баушем в городе Швейнфурте. В 1687 г. утверждена императором Леопольдом I, откуда она и получила название Леопольдина. С 1878 г. – в городе Галле.

[6] Еще известный как «The mathematical repository: an almanac» (Математический репозиторий: альманах) или «A Collection of mathematical problems and enigmas» (Собрание математических проблем и загадок).

[7] В изданиях Петербургской академии наук были помещены 43 работы Д.Бернулли, 473 работы Л.Эйлера (печатались до 1830 г.), а также работы знаменитых русских математиков (М.В.Остроградского 60 работ, В.Я.Буняковского 103 работы, П.Л.Чебышева 50 работ, Е.И.Золотарева 6 работ, А.А.Маркова 51 работа, А.М.Ляпунова 20 работ, В.А.Стеклова 47 работ).

[8] Иоганн Кристиан Поггендорф (1796–1877) – известный немецкий физик, основатель и редактор журнала «Annalen der Physik und Chemie» (Анналы физики и химии) (1824–1860), издавал также (с 1863) справочник, содержащий биографические сведения и библиографию большого числа ученых.

[9] Джеймс Джозеф Сильвестр (1814–1897) – английский математик, основал в 1878 г. «American Journal of Mathematics» (Американский журнал математики), выходящий до нашего времени.

[10] В 1864 г. было создано Московское математическое общество, выпускающее журнал «Математический сборник», начиная с 1866 г.

[11] Журнал Союза математиков и физиков Чехии (Jednota českých matematiků a fyziků), образован в Праге в 1869.

[12] В 1879 г. по инициативе известного российского математика В.Г.Имшенецкого было основано Харьковское математическое общество при Харьковском Университете. Тогда же было решено учредить журнал «Сообщения Харьковского

математического общества» (1879–1917), ставший в те годы одним из ведущих математических журналов России.

[13] Среди новых журналов, появившихся уже в XX в.: «Transactions of the American Mathematical Society» (с 1900), «Tohoku Mathematical Journal» (1911–1943 и с 1949), «Mathematische Zeitschrift» (с 1918), «Fundamenta mathematicae» (с 1920), «Journal of the London Mathematical Society» (с 1926), «Quarterly Journal of Mathematics» (с 1930), «Scripta mathematica» (с 1931), «Duke Mathematical Journal» (с 1935), «Успехи математических наук» (1936–1944, с 1946), «Известия АН СССР. Серия математическая» (с 1937), «Quarterly of Applied Mathematics» (с 1943), «Publications de l'Institut mathématique de Belgrade» (с 1947), «Journal of the Mathematical Society of Japan» (с 1948), «Mathematische Nachrichten» (с 1948), «Monatshefte für Mathematik» (с 1948), «Украинский математический журнал» (с 1949), «Annales de l'Institut Fourier» (с 1949), «Canadian Journal of Mathematics» (с 1949), «Mathematikai lapok» (с 1949), «Studii si cercetări matematice» (с 1950), «Proceedings of the American Mathematical Society» (с 1950), «Nagoya Mathematical Journa» (с 1950), «Acta mathematica Academiae scientiarum hungaricae» (с 1950), «Časopis pro pěstování matematiky» (с 1951), «Michigan Mathematical Journal» (с 1952), «Ricerche di matematica» (с 1952), «SIAM Journal on Applied Mathematics» (с 1953), «Известия на Математическия институт (Българска Академия на науките)» (с 1953), «Publications of the Mathematical Society of Japan» (с 1955), «Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées» (с 1956), «Illinois Journal of Mathematics» (с 1957), «The Journal of the Australian Mathematical Society» (с 1959), «Сибирский математический журнал» (с 1960), «Advances in Mathematics» (с 1961), «Osaka Journal of Mathematics» (с 1964), «Математические заметки» (с 1967), «Bulletin of the London mathematical society» (с 1969), «Mathematica balkanica» (с 1971).

[14] «Royal Statistical Society» существует в Великобритании с 1836 г.

[15] «Sankhya. The Indian Journal of Statistics» (с 1933), «Acta Arithmetica» (с 1935), «Journal of Symbolic Logic» (с 1936), «Tensor» (с 1938), «Bulletin of Mathematical Statistics» (с 1947), «Calcutta Statistical Association Bulletin» (с 1947), «Operational Research Quarterly» (с 1950), «Journal of the Royal Statistical Society. Series C» (с 1952), «Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik» (с 1955), «Теория вероятностей и ее применения» (с 1956), «Metrika» (с 1958), «Funkcialaj Ekvacioj» (с 1958), «Журнал вычислительной математики и математической физики» (с 1961), «Zeitschrift für Wahrscheilichkeitstheorie und verwandte Gebiete» (с 1962), «Topology» (с 1962), «Journal of Algebra» (с 1964), «Journal of Applied Probability» (с 1964), «Дифференциальные уравнения» (с 1965), «Journal of Differential Equations» (с 1965), «Journal of Combinatorial Theory» (с 1966), «Функциональный анализ и его приложения» (с 1967), «Journal of Differential Geometry» (с 1967), «Journal of Functional Analysis» (с 1967), «Journal of Number Theory» (с 1969), «Annals of Prolability» (с 1973), «Annals of Statistics» (с 1973).

[16] Во Франции: «Revue de mathématiques spéciales» (с 1890), «Education mathématique» (с 1898), «Enseignement mathématique» (с 1899), «Bulletin de l'Association des professeurs do mathématiques de l'enseignement publics» (с 1920); в Великобритании: «The Mathematical Gazette» (с 1894); в США: «American Mathematical Monthly» (с 1894), «Mathematics Teacher» (с 1908), «Mathematics Magazine» (с 1947); в Германии: «Euclides» (с 1925), «Archimedes» (с 1948), «Praxis der Mathematik» (с 1959), «Mathematik in der Schule» (с 1963); в России: «Вестник опытной физики и элементарной математики» (1886–1917), «Математика в школе (с 1934); в Чехии: «Mathematika ve škole» (с 1951); в Норвегии: «Nordiskmatematisk tidskrift» (с 1953); в Венгрии: «A matematika tanítása» (с 1953). На Пиренейском полуострове выходил испанский журнал «Periodico Mensual de Ciencias Matemáticas y Físicas» (с 1848) и португальский журнал «Jornal de Matemática Elementar» (1883), просуществовавший менее одного года.

[17] Португальская империя – общее название всех заморских территорий, занятых или управляемых Португалией с начала XV до начала XXI вв. Термин «Португальская Империя» не использовался официально, для заморских территорий

использовалось название «Заморская Португалия» (Ultramar Português). Началом образования империи считается захват в 1415 г. древнего марроканского города – крепости Сеута (Ceuta) в Северной Африке, а концом явилось окончание португальского управления в Макао (Китай) в 1999 г. и провозглашение независимости Восточного Тимора в 2002 г., последней заморской территории, принадлежавшей Португалии.

[18] Общепринята следующая хронология португальской империи:

1. Первая империя (1415–1580) – открытие и захват африканских и восточных территорий, эпоха заканчивается потерей независимости: Филлип II, король Испании, бывший одним из прямых наследников португальского трона, в 1581 г. был провозглашен королем Португалии; Португалия и ее колонии входили в состав владений Испании до 1668 г.

2. Вторая империя (1580–1822) – потеря влияния на востоке и усиление экономической важности Бразилии.

3. Третья империя (1822–1975) – признание независимости Бразилии, усиление экономического значения африканских колоний, колониальные войны и окончательная потеря африканских территорий.

[19] Португальская инквизиция была официально утверждена в 1536 г. по просьбе короля Португалии Жуао III. Португальская инквизиция, как и испанская, фактически была государственной инквизицией, хотя правовой основой деятельности инквизиции являлась власть папы. Во второй половине XVIII в. активность инквизиции на Пиренейском полуострове значительно сократилась, частично – благодаря либерализации общественного сознания, частично – из-за почти полного отсутствия объекта преследования. В Португалии последнее аутодафе (акт веры) состоялось в октябре 1765 г.; формально инквизиция в Португалии была упразднена в марте 1821 г.

[20] Иезуиты (Орден Иезуитов; официальное название «Общество Иисуса», лат. *Societas Jesu*) – мужской монашеский орден Римско-католической церкви, основанный в 1534 г. Игнатием Лойолой и утвержденный папой Павлом III в 1540 г. Иезуиты сыграли большую роль в контрреформации, активно занимались наукой, образованием и миссионерской деятельностью. Оппозиция иезуитам католических монархов Европы (Испании, Португалии, Франции) вынудила папу Климента XIV упразднить орден в 1773 г. Однако иезуиты продолжали свою деятельность в Китае, Индии, Пруссии и, прежде всего, в России, где Екатерина II отказалась признавать указ папы. Общество было восстановлено в 1814 г.

[21] В Португалии иезуитские коллегии (школы) действовали во всех крупных городах. Также работало несколько школ в Бразилии, Африке и Индии. Это было первая сеть средних учебных заведений на всей территории Португалии и ее колоний.

[22] Реформация стала порождением умственной свободы, права думать самостоятельно, которым должен был обладать каждый. Именно этого стремилась избежать система преподавания в иезуитских коллегиях. Его целью было укоренить догмы, которые являются предметом искренней веры, а не порождать критику, поскольку критика всегда приводит к уничтожению догм. В итоге образование было направлено не на тренировку мысли, но на закладку основ веры. Это дало результаты, поскольку португальцы в XVII в. отличались глубиной веры, но не мысли.

[23] Себастьян Жозе Помбал (порт. Sebastião José de Carvalho e Melo, Conde de Oeiras, Marquês de Pombal; 1699–1782) – наиболее влиятельный португальский политик эпохи Просвещения, один из самых ярких представителей «просвещенного абсолютизма». Фактически держал в своих руках бразды правления Португалией при короле Жозе I (1750–1777) и руководил восстановлением страны после разрушительного Лиссабонского землетрясения.

[24] В применяемых методах возобладали как рационалистический, так и экспериментальный подходы (так было записано в уставах). В Университете Коимбры была запрещена старая традиция учебы по размноженным текстам лекций; переведены несколько иностранных учебников и введена обязательная учеба по книгам. Особенно важными являлись реформы в изучении права и медицины. В случае права отказались от комментирования толкований и был принят метод историзма. В медицине

вводилось практическое обучение и работа студентов в городской больнице, приписанной к Университету Коимбры.

[25] Для руководства кафедрами, для которых в Португалии не могли найти достойных специалистов, приглашались зарубежные ученые. В то же время старые преподаватели не увольнялись – они продолжали работать на новых кафедрах.

[26] Экспорт из португальских колоний шел не напрямую в Португалию, а через британские и немецкие порты (Гавр и Гамбург), что снижало прибыльность этого основного (и фактически единственного) источника доходов Португалии. Еще один сильный удар пришлось испытать после открытия Суэцкого канала в 1869 г., когда большая часть торговых перевозок стала проходить не через португальские порты в Африке. Однако из этого практически безнадежного положения удалось найти выход: португальское правительство изменило налоги и условия финансирования, были созданы благоприятные условия для работы португальских частных компаний, которые могли бы взять на себя торговые перевозки между метрополией и Африканскими колониями. В 1877 г. была создана первая частная пароходная компания «Empresa Nacional de Navegação» (ENN), в следующие годы появились новые компании «Empresa Insulana, Pinto Basto» (1883), «Mala Real Portuguesa» (1888), «Benchimol» (1891). К 1913 г. Лиссабон стал пятым портом в мире по грузообороту, а 90% объема перевозок из Африканских колоний уже обеспечивалось португальскими компаниями.

[27] Началось строительство дорог – железных и шоссейных, появился телеграф, был создан торговый флот.

[28] Среди таких Португальских журналов можно упомянуть: «Revista de Brazil e Portugal» (Журнал Бразилии и Португалии) (1841–1914), «Revista Militar» (Военный журнал) (1848), «O Instituto: Revista científica e literária» (1853–1981), «Revista de obras publicas e minas» (Журнал общественных и горнодобывающих работ) (с 1870), «Annaes do Club militar naval» (Анналы военно-морского клуба) (1871), «Boletim da Sociedade de geographia de Lisboa» (Бюллетень географического общества Лиссабона) (с 1876), «Revista de sciencias militares» (Журнал военных наук) (1885), «Revista de engenharia militar» (Военно-инженерный журнал) (с 1896), «Revista Portugueza Colonial e Marítima» (Колониальный и морской португальский журнал) (с 1897).

[29] Имеется в виду замена абсолютизма на конституционную монархию.

[30] В 1936 г. Академия истории была восстановлена под названием Academia Portuguesa da História.

[31] Идея создания Академии наук возникла в Университете Коимбры и обсуждалась при активной поддержке португальского реформатора маркиза Помбала. Однако верхушка аристократии и ряд представителей интеллектуальной элиты Португалии, находившиеся в оппозиции к маркизу Помбалу, организовали создание Академии в Лиссабоне, а не в Коимбре.

[32] С 1910 г., после падения монархии в Португалии, академия стала называться Academia das Ciências de Lisboa (Лиссабонская Академия наук).

[33] Типичные примеры потери приоритета: португальский астроном Ж.Монтейро да Роша (1734–1819), сыгравший выдающуюся роль в развитии математических наук в Португалии, в 1782 г. представил Лиссабонской академии наук свою работу «Вычисление орбит комет», но опубликована она была в 1799 г. во втором томе «Memorias», а немецкий астроном Г.Ольберс опубликовал сходные вычисления в 1787 г. Общий метод решения алгебраических уравнений четвертой степени был опубликован С.Мажиоки в седьмом томе «Memorias» в 1821 г.; а в 1826 г. подобный метод решения был получен Т.Оливером и опубликован (без ссылок на оригинальные результаты Мажиоки) в «журнале Крелле» («Crelles Journal»). Численный метод решения алгебраических уравнений любой степени, представленный Академии португальским математиком Дантешем Перейрой в 1794 г. и опубликованный на португальском языке во втором томе «Memorias» в 1799 г., был независимо разработан В.Ж.Горнером и опубликован в 1819 г. в «Philosophical Transactions of the Royal Society». Выдающийся португальский математик Д.А. да Сильва (1814–1878) в 1851 г. опубликовал (опять же на португальском) оригинальные результаты в

работе «О вращении сил относительно точек приложения», которые опережали результаты, представленные Ж.Г.Дарбу в 1876 г. Парижской Академии наук. Еще одна заметная работа да Сильвы по теории чисел, опубликованная в «Memorias» в 1854 г., опять осталась неизвестной, в 1861 г. ирландец Г.Д.Смит опубликовал схожие результаты в «Philosophical Transactions of the Royal Society».

[34] Условием финансирования журнала являлось обязательное выделение половины объема для публикации отчетов Совета народного просвещения (Conselho Superior de Instrução Pública) и списков назначенных учителей начального, среднего и высшего образования по всей стране.

[35] Жозе Анастасио да Кунья (1744–1787) – выдающийся португальский математик, автор «Математических начал», впервые опубликованных посмертно в 1790 г. на португальском языке.

[36] Патронат над выдающимися учеными и деятелями культуры (учеными, писателями, художниками, артистами) со стороны монархов, властителей и верхушки аристократии – практика, обладающая глубокими историческими корнями. В ее основе лежит желание власть имущих укрепить свой авторитет за счет привлечения интеллектуалов. Примеров тому много и, если не уходить мыслью слишком далеко, в эпоху античности или средневековья, напомним, например, о Г.Галилее (переехавшем во Флоренцию ко двору Медичи), Н.Копернике, И.Ньютоне. Это покровительство ученым было особенно развито в маленьких странах, княжествах, графствах, в городах-республиках (Венеция, Генуя). Не имея возможностей прославиться за счет военных или экономических побед, властители маленьких стран старались выделиться за счет фактического найма интеллектуалов. Не составляет в этом исключения и португальская королевская власть и аристократия. Мы, разумеется, не ставим Гомеша Тейшейру в один ряд с Ньютоном, Галилеем или Лейбницем, но некоторые признаки патроната королевского двора и правительства в его случае «имели место быть». Молодой активный математик Гомеш Тейшейра был выбран и поддержан верхушкой королевского правительства Португалии, поручившего ему создание международного журнала, созданного для повышения культурного престижа страны.

[37] Ипполит Пламеневский (годы жизни неизвестны, в доступных архивах их найти не удалось) – математик, преподаватель реального училища около Тифлиса, единственный автор из России, упомивавшийся в «журнале Тейшейры».

[38] Т.Хаяши (1873–1935) – математик и историк японской математики, основатель журнала «Tohoku Mathematical Journal» (1911–1943 и с 1949), издаваемого в Университете Тохоку (Япония).

Список литературы

1. *Rodrigues J.F.* Portuguese mathematical journals: some aspects of (almost) periodical research publications // Boletim da Sociedade Portuguêsa de Matemática. Lisboa, 2004. Vol.50. P.19–36
2. *Neuenschwander E.* Mathematical Journals // *Grattan-Guinness I.* Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences. London–New York, 1994. Vol.2. P.1533–1539.
3. *Saraiva J.H.* História Concisa de Portugal. Lisboa, 2006.
4. *Agur S.* The establishment of modern shipping firms in Portugal 1850–1910 // Thesis Workshop in Economic History. London, 2010.
5. *Clarence-Smith W.G.* The third Portuguese empire, 1825–1975: a study in economic imperialism. Manchester, 1985.
6. *Dias Agudo F.R.* Contribução da Academia das Ciências de Lisboa para o Desenvolvimento da Ciência // História e Desenvolvimento da Ciência em Portugal. Lisboa, 1986. Vol.2. P.1301–1340.
7. *Gomes Teixeira F.* História das matemáticas em Portugal. Lisboa, 1934.
8. *Carvalho e Silva J.* A Faculdade de Matemática na Universidade de Coimbra (1772–1911). Coimbra, 2000.
9. *Saraiva L.M.R.* A Survey of Portuguese Mathematics in the Nineteenth Century // Centaurus. 2000. Vol.42. P.297–318.

10. *Anastácio da Cunha J.* Ensaio sobre os Principios de Mechanica // Revista científica e literária. Coimbra, 1856. Vol.4. P.212–214, 222–223, 236–238.
11. *Anastácio da Cunha J.* Principios Mathematicos. Coimbra, 1987. P.106–120.
12. *Юшкевич А.П.* Ж.А. да Кунья и проблемы обоснования математического анализа // Историко-математические исследования. М., 1973. Вып.18. С.157–175.
13. *Юшкевич А.П.* К.Ф.Гаусс и Ж.А. да Кунья // Историко-математические исследования. М., 1979. Вып.24. С. 186–190.
14. *Юшкевич А.П.* «Математические начала» да Куньи // *Юшкевич А.П.* История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3-х т. Т.3. М., 1972. С.291–292.
15. *Cauchy A.-L.* Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. Paris, 1821. P.114–152.
16. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т. Т.2. М., 1962. С.295–296.
17. *Gonçalves V.* Análise do livro VIIII dos «Principios Mathematicos» de José Anastácio da Cunha // Congresso do Mundo Português XII. Lisboa, 1940. P.123–140.
18. *Anastácio da Cunha J.* Principes mathématiques de feu Joseph Anastace da Cunha, traduits littéralement du portugais. Par J.M. d'Abreu. Bordeaux, 1811.
19. *Queiró J.F.* José Anastácio da Cunha: um matemático a recordar, 200 anos depois // Boletim da SPM. Coimbra. 1994. №29. P.1–18.
20. *Leitão H.* The Practice of Mathematics in Portugal: Problems and Methods // Acta Universitatis Conimbrigensis. Coimbra, 2004. P.1–34.
21. *De Castro Freire F.* Memoria Historica da Faculdade de Mathematica. Coimbra, 1872. P.49–50.
22. *De Vilhena H.* O Professor Doutor Francisco Gomes Teixeira. Lisboa, 1936. P.119.

СТРАНИЦЫ ИСТОРИИ ФРАКТАЛОВ[1)]

П.Н.Антонюк

От Ламберта до Мандельброта [1]. О фракталах стали много говорить в 1980-е гг., в первую очередь – физики. Произошло это благодаря выходу в свет книг Б.Б.Мандельброта [2–6], в которых и появилось загадочное слово *фрактал*. Интерес к фракталам подогревался также красивыми картинками, построенными на компьютерах при помощи математических алгоритмов. Похоже, что только фракталы смогли одновременно заинтересовать и математиков, и художников.

Фрактал – это геометрическое множество точек евклидова пространства, обладающее свойством самоподобия и дробной пространственной размерностью. Самоподобие означает, что любой фрагмент множества подобен всему множеству. Дробная размерность означает, что множество занимает промежуточное положение между системой нульмерных точек и одномерной линией, между одномерной линией и двумерной поверхностью, между двумерной поверхностью и трехмерным телом и так далее. Дробная размер-

1) В основу статьи положены десять докладов, сделанных на механико-математическом и физическом факультетах МГУ им. М.В.Ломоносова.

ность понимается в широком смысле: не как дробь, а как нецелое действительное число. Благодаря самоподобию фрактал имеет иерархическую структуру, то есть является объединением бесконечного ряда множеств, характеризуемых последовательностью пространственных масштабов, в пределе стремящихся к нулю. Следовательно, любой фрагмент фрактала, как бы мал он ни был, имеет нетривиальное геометрическое устройство. Множества-фракталы, или фрактальные множества, рассматриваются и изучаются математиками и физиками уже более двух столетий.

Иоганн Генрих Ламберт (1728–1777) предложил иерархическую модель строения Вселенной. Другими словами, Вселенная была представлена им в виде фрактального множества. Ламберт много работал с бесконечными непрерывными дробями и бесконечными рядами, что позволило ему в 1766 г. первым доказать иррациональность числа π [7]. Он также теоретически вывел закон поглощения света в прозрачной среде, ранее экспериментально установленный П.Бугером: интенсивность пучка монохроматического света убывает по экспоненциальному закону в зависимости от пройденного им в среде расстояния (закон Бугера–Ламберта)[1]. Глубокий интерес Ламберта к бесконечности (непрерывные дроби, ряды, число π, поглощение света на сколь угодно больших расстояниях) во многом определил направление его размышлений о структуре Вселенной на больших пространственных масштабах. В результате родилась иерархическая или, как сегодня принято говорить, фрактальная модель Вселенной. Возможно, это был первый фрактал в науке. Обсуждению иерархической модели Вселенной свои работы также посвятили в XVIII в. – И.Кант, а в начале XX в. – П.П.Леви, Э.Э.Фурнье д'Альб и К.В.Л.Шарлье[2]. Важно отметить, что только фрактальная Вселенная может одновременно иметь бесконечный объем, бесконечную массу, нулевую плотность материи и при этом не иметь так называемого центра. Для такой Вселенной устраняются фотометрический парадокс Шезо–Ольберса и гравитационный парадокс Неймана–Зелигера.

Пытаясь найти бесконечные множества, мощность которых занимает промежуточное положение между $\aleph_0$ (мощность множества натуральных чисел) и $\aleph$ (мощность континуума), Георг Кантор (1845–1918) построил на прямой фрактальные множества, позднее получившие названия *канторовы дисконтинуумы* и *канторова пыль*. Простейшим из них является так называемое *канторово множество* [9] – подмножество единичного отрезка прямой, имеющее мощность континуума и нулевую длину (нулевую меру Лебега). Независимо от Кантора примеры канторовой пыли появились в работах Г.Дж.С.Смита (1875 г.) и В.Вольтерра (1881 г.). Прямое произведение канторовой пыли на окружность хорошо моделирует структуру колец Сатурна (не удается только смоделировать спицы – радиальные образования в кольцах). Атомные и молекулярные спектры, часто представлены совокупностью полос, распадающихся на тесно расположенные спектральные линии. Геометрия спектральных линий имеет много общего с геометрией канторовой пыли. С канторовой пылью также связаны линейные штрих-коды, которыми маркируют различную продукцию и товары. Анатомия штрих-кода описывается двоичным кодом – последовательностью нулей и единиц (нуль – пробел, единица – штрих). В последнее время наметилась тенденция перехода к имеющим ряд преимуществ двумерным, и даже трехмерным, штрих-кодам (матричным кодам), которые, в свою очередь, связаны с фракталами на плоскости и в пространстве.

Начиная с конца XIX в. появляется много различных примеров фрактальных множеств. В 1879 г. Артур Кэли (1821–1895) применил итерационный метод Ньютона (метод касательных) для нахождения комплексных корней многочленов и исследовал для каждого корня данного многочлена геометрическую форму комплексной области притяжения, или бассейна притяжения (область притяжения состоит из всех начальных приближений к корню, обеспечивающих сходимость к нему итераций Ньютона). Кэли обнаружил, что если степень многочлена выше двух, то границы областей притяжения имеют сложную и непонятную структуру, требующую дальнейшего изучения. Компьютерные исследования в конце XX в. сразу показали, что эти границы являются фракталами. Кэли первым рассмотрел фракталы, порождаемые итерационными алгоритмами. В 1890 г. Джузеппе Пеано (1858–1932) рисует непрерывную кривую, целиком заполняющую квадрат, то есть проходящую через все его точки. *Кривая Пеано* вопреки ожиданию не является фракталом, так как совпадает с нефрактальным квадратом. Но если растянуть эту кривую вдоль отрезка, ортогонального плоскости квадрата, то получится фрактал в трехмерном пространстве – «непроницаемая для дождя крыша, дырявая в каждой точке». Имеется ввиду следующее: если кривая Пеано задается двумя уравнениями $x = \varphi(p)$, $y = \psi(p)$, то растянутая кривая характеризуется тремя уравнениями $x = \varphi(p)$, $y = \psi(p)$, $z = p$. Здесь $0 \le p \le 1$. Вацлав Серпинский (1882–1969) построил двумерный аналог канторова множества – *ковер Серпинского* (1916 г.). Трехмерный аналог канторова множества придумал Карл Менгер (1902–1985) – *губка Менгера*.

Важнейшей числовой характеристикой фрактала является дробная размерность, или фрактальная размерность; она может принимать различные действительные значения. Существует большое количество определений такой размерности. Наиболее важной и интересной является так называемая *фрактальная размерность Хаусдорфа–Безиковича*, вычисление которой использует процедуру покрытия фрактального множества, расположенного в многомерном евклидовом пространстве, шарами дробной размерности. Другими словами, происходит сравнение фрактала и шаров. Шары являются простейшими несчетными множествами в евклидовом пространстве, так как только для них классическое изопериметрическое неравенство превращается в равенство. По этой причине шары используются в качестве эталонов в процессе «измерения» фрактала.

Покажем, что совместное рассмотрение многомерных сфер и шаров (поверхности шаров называются сферами) естественным образом приводит к дробным размерностям. Положим для определенности радиусы всех сфер и шаров равными единице. Отображение $n \mapsto (S_n, B_n)$ однозначно сопоставляет размерности n пару чисел: S_n – объем единичной n-мерной сферы и B_n – объем единичного n-мерного шара. Пусть n пробегает все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$, тогда отображение определяет плоскую кривую объемов единичных сфер и шаров. Эта кривая имеет вид спирали, обходящей начало координат по часовой стрелке. Сначала кривая приближается к началу координат, затем удаляется и, наконец, вновь приближается. При $n \to +\infty$ кривая устремляется к началу координат. Характерными точками кривой являются десять точек самопересечения, в которых происходит совпадение объемов при разных значениях размерностей. Ниже даны значения размерностей, соответствующих точкам самопересечения (слева указывается номер точки самопересечения).

1. −20.83188612293551836281252…
2. −20.5746582317248562644663…
3. −17.02235221173597218381817…
4. −16.48610865552757088589965…
5. −13.41842254245385177084792…
6. −12.41543453877457701679399…
7. −11.28391183054606527073455…
8. −9.204457320261308804739536…
9. −8.343044564146100214694943…
8. −5.268476422708899152479195…
10. −4.251138886697102757546850…
7. −3.468509164313190243785262…
5. −1.749214221351873402169329…
3. −1.105394210524003191002349…
1. 0.9128294203475005300924228…
2. 11.99737002263045780667881…
4. 16.94595525235431125089247…

6. 19.91183887559101757452510...
10. 21.32326747336801871746395...
9. 21.48012850992620714647434...

Все размерности нецелые[3]. Значение числа π, входящего в формулы объемов сфер и шаров, является следствием[4] этих формул и естественного условия монотонности последовательности B_n/S_n для натуральных значений n, включая нуль.

В XX в. изучение фракталов значительно ускорилось, но никто, кроме Мандельброта, не догадался ввести специальный термин [5], объединяющий эти множества.

Итерации Фату и Жюлиа [10]. Тесная связь теории итераций с фракталами была замечена уже более ста лет назад.

Появление в начале XX в. теории итераций рациональных отображений комплексной плоскости в себя позволило определить новые фрактальные множества, порождаемые итерациями. Основы этой теории разработали два французских математика Пьер Жозеф Луи Фату (1878–1929) и Гастон Морис Жюлиа (1893–1978).

В 1901 г. Фату окончил Высшую нормальную школу в Париже и всю последующую жизнь работал в Парижской обсерватории. Будучи математиком, занимался теорией функций действительного и комплексного переменного и, кроме того, как астроном решал задачи небесной механики. В декабре 1917 г. Фату опубликовал свои исследования по теории итераций.

Жюлиа также окончил Высшую нормальную школу в Париже в 1914 г. и в августе того же года, в связи с разразившейся Первой мировой войной, был мобилизован в армию. В январе 1915 г. получил тяжелое ранение в голову и с 1915 по 1918 г. лежал в госпитале. До конца жизни ему пришлось носить на лице темный колпачок вместо утраченного носа. В госпитале Жюлиа, человек волевой и целеустремленный, смог постепенно прийти в себя, стал активно заниматься математикой и в 1918 г. опубликовал мемуар об итерациях рациональных функций объемом 199 (!) страниц. С 1919 г. он работал в Высшей нормальной школе, в Сорбонне и в Политехнической школе в Париже. Был избран членом Парижской академии наук. Его труды по теории функций комплексного переменного составили шесть больших томов.

Результаты Фату и Жюлиа оказались близкими и похожими. Во второй половине XX в. стало ясно, насколько богатым по содержанию является выбранное ими научное направление: был обнаружен и открыт целый ряд фундаментальных свойств итераций нелинейных отображений, описываемых в терминах фрактальной геометрии.

Уже итерации самых простых нелинейных отображений комплексной плоскости приводят к фракталам. Отображение $z \mapsto az^2 + bz + c$, задаваемое многочленом второго порядка, при помощи подходящих линейных замен $z \mapsto pz + q$ может быть топологически сопряжено[5] с более простыми отображениями, играющими роль канонических форм для исходного отображения. В данном случае имеют место канонические формы $z \mapsto z^2 - \mu$ (простейшее квадратичное отображение) и $z \mapsto \lambda z(1 - z)$ (логистическое отображение). Здесь a, b, c, p, q, μ, λ – комплексные параметры отображений. Заметим, что отображение $z \mapsto z^2$ не является канонической формой, так как оно топологически сопряжено с линейным отображением $z \mapsto 2z$.

Множество комплексных значений параметра μ, для которых итерации $z \mapsto z^2 - \mu$ точки $z = 0$ не дают последовательность, стремящуюся к точке $z = \infty$, образует фрактальное *множество Мандельброта*. Обозначим это множество буквой M. Фактически множество M впервые обнаружил и определил Фату. Но, подобно Христофору Колумбу, открывшему Америку и не знавшему, как выглядит ее карта, Фату, в отсутствие компьютерных технологий, не мог даже грубо представить себе «карту» множества M. Только в 1980 г. Мандельброт смог, наконец, впервые увидеть это множество с помощью компьютера и по достоинству оценить его красоту и бесконечное многообразие структуры[6]. Вскоре была доказана связность множества M и началось его подробное исследование. Выяснилось, что множество M содержит бесконечное число малых копий самого себя – такой вид нелинейного самоподобия еще только предстоит осмыслить и сформулировать в математических терминах. Другие множества, которые копируют себя в малых масштабах, пока неизвестны.

Жюлиа определил множество $J(f)$, как множество инвариантное (не изменяющееся) относительно заданного отображения f комплексной плоскости в себя: отображение «сохраняет» множество, но может переставлять местами его точки. Множество $J(f)$ называется *множеством Жюлиа*. Жюлиа и Фату доказали важную теорему о том, что фрактальное множество $J(f)$ для отображения $z \mapsto f(z) = z^2 - \mu$ связно тогда и только тогда, когда $\mu \in M$. Иными словами, множество Мандельброта для отображения $z \mapsto z^2 - \mu$ является каталогом всех связных множеств Жюлиа этого отображения: каждому связному множеству Жюлиа ставится во взаимно-однозначное соответствие точка множества Мандельброта. Каждое несвязное множество Жюлиа (фрактальная пыль или пыль Жюлиа) соответствует некоторой точке, расположенной вне множества Мандельброта.

Рассмотрение на комплексной плоскости множества кругов с центром в нулевой точке приводит к выводу, что существуют максимальный круг, содержащийся в множестве M и минимальный круг, включающий в себя M, а именно: $\{|z| \le 1/4\} \subset M \subset \{|z| \le 2\}$. Равномерно распределив в круге радиуса 2 большое число точек и подсчитав долю этих точек, попавших в множество M, можно найти площадь S множества Мандельброта. Максимальный и минимальный круги дают нижнюю и верхнюю оценки для площади: $\pi/16 < S < 4\pi$. Сложные и громоздкие расчеты дают значение $S = 1{,}506\ldots$. Аналогично определяется центр масс z_* множества M, лежащий на действительной оси, и вычисляется его положение $z_* = 0{,}2867\ldots$ (мнимая часть равна нулю).

Порядок Шарковского и универсальность Фейгенбаума [13]. Периодические решения нелинейных разностных уравнений описываются в рамках фрактальной геометрии.

Бельгийский математик Пьер Франсуа Ферхюльст (1804–1849) применил в 1838 г. дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = \lambda x(1 - kx)$ для моделирования роста численности $x(t)$ населения в зависимости от времени t. Здесь λ и k – константы. Это уравнение он назвал логистическим. Любое частное решение логистического уравнения геометрически представляется в виде логистической кривой [14]. Дискретным аналогом уравнения Ферхюльста является логистическое разностное уравнение $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$, $k = 1$. Последнее уравнение часто интерпретируется на языке итераций логистического отображения $z \mapsto \lambda x(1 - x)$. В широкий круг научных интересов Ферхюльста входили теория чисел, вариационное исчисление, теория вероятностей, дифференциальное и интегральное исчисления, геометрия и тригонометрия, эллиптические функции, астрономия и небесная механика. Но логистическое уравнение считается его главным результатом. В 1841 г. Ферхюльст был избран членом Бельгийской академии наук, а в 1848 г. стал ее президентом.

Рассмотрим отображение f прямой в себя. Итерации числа x_0 под действием f дают последовательность x_0, x_1, x_2, ..., которую можно интерпретировать как частное решение разностного уравнения (РУ) $x_{n+1} = f(x_n)$. Если последовательность периодическая, то будем говорить о периодическом решении РУ. Множество попарно неравных членов последовательности x_0, x_1, x_2, ..., x_{p-1} назовем циклом периода p. В случае непериодической последовательности будем говорить об апериодическом решении РУ.

В 1964 г. украинский математик Александр Николаевич Шарковский доказал следующую теорему. Сосуществование циклов непрерывного отображения интервала прямой в себя характеризуется последовательностью всех натуральных чисел, расположенных в следующем универсальном порядке [15]:

$1 \lhd 2 \lhd 4 \lhd 8 \lhd 16 \lhd 32 \lhd 64 \lhd 128 \lhd 256 \lhd 512 \lhd 1024 \lhd \ldots$
$\ldots \lhd 19 \cdot 8 \lhd 17 \cdot 8 \lhd 15 \cdot 8 \lhd 13 \cdot 8 \lhd 11 \cdot 8 \lhd 9 \cdot 8 \lhd 7 \cdot 8 \lhd 5 \cdot 8 \lhd 3 \cdot 8 \lhd \ldots$
$\ldots \lhd 19 \cdot 4 \lhd 17 \cdot 4 \lhd 15 \cdot 4 \lhd 13 \cdot 4 \lhd 11 \cdot 4 \lhd 9 \cdot 4 \lhd 7 \cdot 4 \lhd 5 \cdot 4 \lhd 3 \cdot 4 \lhd \ldots$
$\ldots \lhd 19 \cdot 2 \lhd 17 \cdot 2 \lhd 15 \cdot 2 \lhd 13 \cdot 2 \lhd 11 \cdot 2 \lhd 9 \cdot 2 \lhd 7 \cdot 2 \lhd 5 \cdot 2 \lhd 3 \cdot 2 \lhd \ldots$
$\ldots \lhd 27 \lhd 25 \lhd 23 \lhd 21 \lhd 19 \lhd 17 \lhd 15 \lhd 13 \lhd 11 \lhd 9 \lhd 7 \lhd 5 \lhd 3.$

Треугольник $\lhd$ определяет порядок взаимного расположения натуральных чисел, которые обозначают периоды циклов отображения. Пусть p и q расположены в порядке $p \lhd q$. Тогда из существования цикла периода q следует существование цикла периода p. Рассмотренную последовательность и ее порядок принято называть последовательностью Шарковского и порядком Шарковского. Существование цикла периода 3 гарантирует существование циклов всех натуральных периодов. Существование цикла периода 1 (существование неподвижной точки отображения) следует из существования цикла любого другого периода.

Рассмотрим однопараметрическое семейство отображений $f(x,a)$ и связанное с ним РУ $x_{n+1} = f(x_n, a)$. Пара действительных чисел (a,x), где $x = x_0$, задает одно из решений РУ. Плоскость (a,x), на которой отмечены все точки, соответствующие периодическим решениям РУ, назовем бифуркационной диаграммой. Множество периодических решений на диаграмме является фракталом, оно составлено из бесконечного набора кривых, вытянутых одна вдоль другой. Многие фрагменты множества напоминают кольца Сатурна. Пересекаются кривые в точках бифуркаций. Кривые делятся на притягивающие (аттракторы), соответствующие устойчивым циклам, и отталкивающие (репеллеры), соответствующие неустойчивым циклам. Бифуркационная диаграмма строится при помощи компьютера. Наиболее интересен класс унимодальных («одногорбых») отображений с отрицательной производной Шварца[7], содержащий логистическое отображение. На бифуркационной диаграмме, построенной для этого класса, в первую очередь бросается в глаза каскад удвоений периода один. Притягивающая кривая, соответствующая периоду 1, сначала делится на две притягивающие кривые периода 2, которые, в свою очередь, снова делятся и образуют четыре притягивающих кривых периода 4. Затем деление дает восемь притягивающих кривых периода 8 и т.д. На конечный отрезок изменения параметра приходится бесконечно много делений кривых и удвоений периода. Точки деления кривых – это точки бифуркаций. Принято говорить о последовательности бифуркаций удвоения периода. Бифуркационное «дерево» вытянуто вдоль оси параметра a, его «крона» направлена в сторону увеличения значений параметра.

В 1976 г. американский физик Митчелл Фейгенбаум открыл универсальный закон асимптотического поведения последовательности бифуркаций удвоения периода [16], а именно: для любого унимодального отображения с отрицательной производной Шварца линейные размеры притягивающей кривой в окрестности точки бифуркации при переходе от периода $p = 2^n$ к периоду $p = 2^{n+1}$ уменьшаются по закону бесконечно убывающей геометрической прогрессии. При $n \to \infty$ отклонение от закона геометрической прогрессии стремится к нулю. Изменение линейных размеров вдоль оси абсцисс (оси a) и вдоль оси ординат (оси x) характеризуется знаменателями δ и α. Числа δ и α – две новые математические константы, вроде чисел π или e. Укажем первые 65 десятичных знаков этих констант:

$\delta = 4{,}66920160910299067185320382046620161725818557747576863274565134 30\ldots$,

$\alpha = 2{,}50290787509589282228390287321821578638127137672714997733619205 67\ldots$.

Для константы α Фейгенбаум вывел функциональное уравнение

$$g(g(x)) = -\frac{g(\alpha x)}{\alpha},$$

с дополнительными условиями $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$, $g''(0) < 0$, $g(-x) = g(x)$. Решение функционального уравнения дает константу α и функцию $g(x)$, описывающую бифуркации удвоения периода. Это же уравнение позволяет найти константу δ.

Важнейшими представителями класса унимодальных отображений с отрицательной производной Шварца являются логистическое отображение $x \mapsto \lambda x(1-x)$ и квадратичное отображение $x \mapsto x^2 - \mu$ [17–19]. Им соответствуют РУ $x_{n+1} = \lambda x_n(1-x_n)$ и $x_{n+1} = x_n^2 - \mu$. При увеличении значений λ и μ в пределах отрезков $1 \le \lambda \le 4$ и $-\frac{1}{4} \le \mu \le 2$ последовательно появляются все периодические решения РУ. Появляются в точном соответствии с последовательностью Шарковского: первым появляется период 1, последним – период 3. При $\lambda = 4$ и $\mu = 2$ окончательно рождаются все периодические решения, которые продолжают существовать при дальнейшем увеличении значений параметров. Граничные значения μ на отрезке $-\frac{1}{4} \le \mu \le 2$ однозначно связаны с радиусами максимального и минимального кругов множества Мандельброта.

Последовательность, задаваемая логистическим отображением при $\lambda = 4$, впервые рассматривалась более двух тысяч лет назад в работе Архимеда [7]. Квадраты половин сторон, вписанных в единичную окружность правильных n-угольника и $2n$-угольника, связаны уравнением $s_n = 4s_{2n}(1 - s_{2n})$. Следовательно, итерация Архимеда $s_n \mapsto s_{2n}$ означает обращение логистического отображения[8].

Фрактальными свойствами могут обладать некоторые одномерные апериодические последовательности. Приведем два примера таких фрактальных последовательностей. Первая последовательность строится из нулей и единиц, путем удвоения их числа, за счет приписывания дополнения:

$$0 \Rightarrow 01 \Rightarrow 0110 \Rightarrow 01101001 \Rightarrow 0110100110010110 \Rightarrow \ldots .$$

В результате получаем последовательность Туэ–Морса

$$0110100110010110100101100110100110010110011010010110100110010110\ldots .$$

Последовательность независимо получили А.Туэ (1906 г.) и Х.К.М.Морс (1921 г.). Она обладает рядом замечательных свойств. Например, если отбросить все члены последовательности, имеющие четные номера, то оставшиеся члены с нечетными номерами снова образуют ту же последовательность. Так проявляет себя свойство самоподобия последовательности. Вторую последовательность нашел К.Кимберлинг (1995 г.):

1 1 2 1 3 2 4 1 5 3 6 2 7 4 8 1 9 5 10… .

Здесь свойство самоподобия заключается в существовании подпоследовательностей натуральных чисел, «растянутых» в 2, 4, 8, 16 и т.д. раз.

Фракталы в геометрии природы [20]. Существует два источника фракталов: математические алгоритмы и природа.

Редко удается получить природный фрактал в результате математического моделирования. Но это удалось сделать для морских раковин. Оказалось, что различные варианты окраски многих раковин прекрасно моделируются алгоритмами треугольника Паскаля (таблицы биномиальных коэффициентов). Например, если четные и нечетные числа этого треугольника заменить нулем и единицей, то получим иерархическую систему вложенных друг в друга и составленных из нулей треугольников. Именно такая фрактальная система треугольников лежит в основе окраски раковин, а далекое обобщение механизма ее построения приводит к важному классу алгоритмов, открытому Джоном фон Нейманом и названному им *клеточными автоматами*. Разностные уравнения помогают понять смысл и действия клеточных автоматов, описывающих эволюционные процессы в дискретном пространстве-времени. Игра «Жизнь» Джона Конвея – простейший пример такого автомата. В результате действия клеточного автомата часто получается фрактал.

К концу XX в. список объектов природы, структура которых была признана фрактальной, стал невероятно широким и продолжает быстро расти. Рассмотрим здесь лишь небольшое число природных фракталов из этого списка.

1. *Кольца планет.* В XVII в. были открыты кольца Сатурна. В 1977, 1979 и 1989 гг. были открыты соответственно кольца Урана, Юпитера и Нептуна. Таким образом, все четыре планеты-гиганта окружены кольцами. Кольца планет распадаются на тонкие кольца, имеющие вид окружностей. У Сатурна несколько тысяч тонких колец. Геометрия взаимного расположения тонких колец характеризуется фрактальными свойствами, например, самоподобием.

2. *Круги на полях* – это название загадочных рисунков, появляющихся на пшеничных (и не только пшеничных) полях Англии, Канады, США, Японии, Австралии, Новой Зеландии, России и других стран. Размеры кругов в поперечнике составляют десятки и сотни метров. Есть много версий возникновения кругов на полях, но ни одна из них не доказана. Участие людей в появлении кругов маловероятно, так как колосья пшеницы не сломаны, а лишь изогнуты почти под прямым углом на небольшом расстоянии от земли. Геометрические фигуры, образуемые кругами на полях, часто нетривиальны по своей структуре, а примерно пятая часть таких фигур представляет собой фракталы или, в крайнем случае, содержит фракталоподобные элементы.

3. Поверхность Земли, наблюдаемая из космоса, содержит большое множество фрактальных структур. Вот некоторые из них.

а) *Береговые линии* (побережье Норвегии; западные побережья Канады и США, расположенные вдоль Скалистых гор; побережье южной части Чили, расположенное вдоль Анд; Фолклендские острова; побережья Греции и Турции вместе с многочисленными островами, образующие «границу» Эгейского моря).

б) *Реки* – например, Миссисипи с притоком Миссури, Амазонка, Волга.

Длина береговой линии и длина реки неограниченно возрастают при уменьшении эталона длины, при помощи которого производится их измерение. Поэтому для характеристики этих длин вместо обычного понятия «длина кривой» необходимо использовать понятие «фрактальная размерность». Береговые линии и реки хорошо моделируются при помощи открытых в XIX в. непрерывных, но нигде не дифференцируемых, функций Больцано–Вейерштрасса, то есть имеют вид непрерывных недифференцируемых кривых.

в) *Дельты рек* (Лена, Юкон на Аляске, Бецибука на Мадагаскаре), а также реки, рассмотренные вместе со всеми своими притоками, представляют собой древовидные фракталы.

г) *Снежный покров в горных районах* (Скандинавские горы Норвегии, Скалистые горы, Анды, горная система Большой Кавказ) напоминает узоры, которые рисует мороз на окнах.

5. *Фракталы в анатомии: артерии и вены, бронхи, мозговые извилины.* Древовидная структура артерий и вен, образующих кровеносную систему, позволяет подводить (и отводить) кровь к любой точке живого тела, а также – экономить кровь, так как полный объем всех артерий и вен достаточно мал. Древовидная структура бронхов оптимизирует работу легких. Мозговые извилины (фрактальные складки коры головного мозга) увеличивают объем серого вещества по отношению к белому.

6. *Линейные молнии* относятся к тому же виду фракталов, что и реки, так как представляют собой нитевидные фрактальные деревья[9], составленные из непрерывных недифференцируемых кривых. О шаровых и четочных молниях известно слишком мало, чтобы рассуждать об их фрактальности.

7. *Разрушение и распад сплошной среды.* Рассмотрим теперь фракталы, состоящие из бесконечного количества непересекающихся фрагментов, каждый из которых представляет собой связное множество.

Такие фракталы появляются в задаче о быстром распаде трехмерной сплошной среды на большое число осколков. Распад может быть результатом взрыва твердого тела, либо результатом распыливания жидкости форсункой. Совокупность осколков и есть фрактал. Осколки жидкости – это капли. Определим радиус-вектор $\mathbf{r}=(x,y,z)$ молекулы в осколке, поместив начало вектора в центр масс осколка, а конец вектора – в саму молекулу. Плотность $h(x,y,z)$ распределения вероятностей радиус-векторов молекул пропорциональна числу молекул с данным $\mathbf{r}$. Модуль R радиус-вектора $\mathbf{r}$ назовем смещением молекулы. Плотность $g(R)$ распределения вероятностей смещений молекул пропорциональна числу молекул со смещением R. Радиус шара, того же объема, что и осколок, также обозначим буквой R. Рассмотрим также плотность $f(R)$ распределения вероятностей радиусов осколков. Вероятность того, что радиус осколков лежит между R и $R+dR$, пропорциональна числу молекул, образующих такие осколки, и равна $f(R)dR$. Из упрощающего предположения о шарообразности осколков следует соотношение

$$f(R)=\frac{1}{3}[2g(R)-g'(R)\cdot R],$$

связывающее плотности распределений.

Если плотность $h(x,y,z)$ определяет трехмерное нормальное распределение, математическое ожидание которого равно нулевому радиус-вектору, то смещения молекул подчиняются распределению Максвелла (хи-распределению с тремя степенями свободы)

$$g(R) = \frac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3} R^2 e^{-R^2/\alpha^2},$$

а радиусы осколков подчиняются хи-распределению с пятью степенями свободы[10]

$$f(R) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}\alpha^5} R^4 e^{-R^2/\alpha^2}.$$

Здесь α – характерный размер осколка. Средний радиус (математическое ожидание радиуса) и мода радиуса (абсцисса максимума плотности) соответственно равны $\frac{8}{3\sqrt{\pi}}\alpha$ и $\sqrt{2}\alpha$, причем мода меньше среднего радиуса.

Если распределение вероятностей радиус-векторов молекул не является нормальным, то плотности $g(R)$ и $f(R)$ могут иметь другой вид.

Простую эмпирическую формулу

$$F(R) = 1 - \exp[-(R / a)^b]$$

для функции $F(R)$ распределения вероятностей радиусов осколков предложили в 1933 г. немецкие инженеры Пауль Отто Розин (1890–1967) и Эрих Раммлер (1901–1986). Здесь a и b – параметры распределения. Очевидно, что $F'(R) = f(R)$.

Аналогичная эмпирическая формула[11]

$$\Phi(m) = 1 - \exp[-(m / \mu)^\Lambda]$$

описывает распределение осколков по массам. Вероятность того, что масса осколков лежит между m и $m + dm$, пропорциональна числу таких осколков и равна $\varphi(m)dm$, где $\varphi(m) = \Phi'(m)$. Эта формула появилась в результате исследований прочности материалов, которые провел и подытожил в 1939 г. шведский инженер Эрнст Яльмар Валодди Вейбулл (1887–1979).

Несколько слов о Мандельброте. Когда эта статья была уже написана, пришла печальная весть: 14 октября 2010 г. в возрасте 85 лет ушел из жизни Бенуа Б.Мандельброт, имя которого в истории естествознания всегда будет связано с фракталами. Мандельброт первым стал употреблять термины *фрактал, фрактальное множество* и *природный фрактал* для обозначения объектов и множеств, известных в математике и физике более двух столетий. Внедрение этих терминов в науку не было гладким. Например, первое время использовали параллельно такой термин, как *дисконтинуум Кантора*, и другие подобные термины.

Родился Мандельброт 20 ноября 1924 г. в Варшаве, а через несколько лет его семья переехала во Францию. Образование получил в Политехнической школе в Париже и в Калифорнийском технологическом институте. Жил и работал сначала во Франции, затем – в США.

О своей книге [5], посвященной фракталам, Мандельброт пишет, что она «не является ни учебником, ни математическим трактатом», и он «склонен определить ее жанр как научное эссе[12]».

Термин *фрактал* образован от латинского слова *fractus* (фрагментированный, разбитый на осколки). Nomen est omen. В переводе с латинского эта поговорка означает, что само имя или название уже характеризует его носителя, заставляет догадываться о его свойствах и качествах.

Мандельброт всегда избегал окончательных формулировок, связанных со словом *фрактал*: «В 1975 г. я придумал термин *фрактал*, чтобы дать название моей первой работе в этой области. Однако я не стал приводить математическое определение, чувствуя, что это понятие, как и хорошее вино, требует выдержки, прежде чем оно будет «разлито по бутылкам». Все фигуры, которые я исследовал и называл фракталами, в моем представлении обладали свойством быть «нерегулярными, но *самоподобными*». Слово «подобный» не всегда имеет классический смысл «линейно увеличенный или уменьшенный», но всегда находится в согласии с удобным и широким толкованием слова «похожий» [23]. В параграфе «Фракталы (определение)» Мандельброт пишет, что «...лучше всего обойтись совсем без определения... Самый простой довод в пользу такого нежелания состоит в том, что настоящее определение ...исключает из семейства фракталов кое-какие множества, которые нам не хотелось бы терять» [5].

Эрудиция и энциклопедические познания Мандельброта помогли ему систематизировать огромное число известных ранее и вновь открытых фракталов, а также собрать вместе соответствующие исторические факты. Его главная книга о фракталах содержит 670 литературных ссылок [5]. Сегодня фракталы составляют важный раздел современной науки. В этом и заключается главная заслуга Мандельброта.

Примечания

[1] Закон поглощения света вывести теоретически можно двумя путями. Либо решая дифференциальное уравнение (так поступил Ламберт), либо решая функциональное уравнение Коши $f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$, что приводит к показательной функции $f(x) = a^x$. Здесь $f(x)$ – коэффициент убывания интенсивности на расстоянии x. Рассуждения Бугера близки к последнему варианту, а потому можно считать, что он обосновал закон не только экспериментально, но и теоретически.

[2] В XX в. многие авторы рассуждали об иерархической модели Вселенной. В России – это Кирилл Петрович Станюкович (1916–1989) и Григорий Моисеевич Идлис (1928–2010). Одна из таких работ принадлежит автору этих строк [8].

[3] Укажем еще три нецелые размерности. Объемы B_n и S_n достигают своих максимальных значений на множестве неотрицательных n, когда соответственно $n = 5{,}2569464048605767801328 38\ldots$ и $n = 6{,}2569464048605767801328 38\ldots$. С этими размерностями связана экстремальная размерность $n = 5{,}7635005295291507471083 28\ldots$, задаваемая уравнениями $B_{n-1} = B_n$, $S_n = S_{n+1}$, $2\pi B_n = S_n$. Эти уравнения попарно эквивалентны и каждое из них определяет данную размерность.

Интересно, что дробная размерность появилась за две тысячи лет до Пифагора в геометрической задаче о «пифагоровых тройках». Уравнения этой задачи $x^2 + y^2 = z^2$, $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$ определяют зависимость сторон x, y, z прямоугольного треугольника от параметров m, n, имеющих размерность корня квадратного из длины, т.е. измеряемых в метрах в степени $1/2$.

[4] Формулы, определяющие зависимость S_n и B_n от n, позволяют записать условие монотонности последовательности $B_n \,/\, S_n$ в виде бесконечного ряда неравенств

$$\frac{1}{2} \ge \frac{1}{\pi} \ge \frac{1}{4} \ge \frac{2}{3\pi} \ge \frac{3}{16} \ge \frac{8}{15\pi} \ge \frac{5}{32} \ge \ldots,$$

откуда получаем для π последовательность нижних и верхних оценок

$$\pi \ge 2,\ \pi \le 2\cdot\frac{2}{1},\ \pi \ge 2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3},\ \pi \le 2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3},\ \pi \ge 2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5},$$

$$\pi \le 2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5},\ \ldots .$$

Это означает, что число π может принимать одно и только одно значение:

$$\pi = 2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\ldots .$$

Согласно известной формуле Дж.Валлиса (1655 г.) это и есть стандартное значение π, равное 3,14… . Мы доказали, что действительная константа π, входящая в формулы объемов сфер и шаров, равна отношению длины окружности к диаметру. Причем это равенство возможно тогда и только тогда, когда последовательность $B_n \,/\, S_n$ монотонна. Заметим также, что из монотонности последовательности $B_n \,/\, S_n$ следует ее строгая монотонность.

[5] Отображения f и g называются *топологически сопряженными*, если существует *гомеоморфизм* h, такой что $f = h^{-1} \circ g \circ h$. Гомеоморфизм – это взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение.

[6] Физик М.Берри сформулировал *принцип Арнольда: если какой-либо объект имеет собственное имя (например, «Америка»), то это – не имя первооткрывателя* [11]. Множество Мандельброта и его «карта» удовлетворяют принципу Арнольда. Первое компьютерное изображение множества Мандельброта, не отличающееся высоким качеством, получили в 1978 г. Р.В.Брукс и Дж.П.Мательский [12].

[7] Производная Шварца отображения f задается формулой: $S(f) = \dfrac{f'''}{f'} - \dfrac{3}{2}\cdot\left(\dfrac{f''}{f'}\right)^2$.

Производная инвариантна относительно дробно-линейных преобразований отображения:

$$S\left(\frac{af + b}{cf + d}\right) = S(f).$$

[8] Настоящее утверждение о связи логистического отображения с работой Архимеда, по-видимому, делается впервые.

[9] Фрактальные деревья появились в конце XIX в. в связи с активным обсуждением физиками и математиками H-теоремы Больцмана. Геометрия теоремы описывается H-кривой. Процитируем подробно высказывания об этой кривой. Э.П.Калверуэлл:

«В качестве иллюстрации… мы можем взять перевернутое вниз вершиной дерево с бесконечным числом веток, проходящих через каждую точку во всех направлениях, тогда в каждой точке будет больше веток, направленных вниз, чем вверх…, и каждая ветка, направленная вверх, в конце концов, повернется вниз и будет стремиться стать почти горизонтальной…». Л.Э.Больцман: «Эта… форма очень хорошо иллюстрируется примером Калверуэлла с перевернутым деревом. H-кривая образуется последовательностью таких деревьев. Почти все такие деревья очень низки, и все их ветки близки к горизонтальным…Трудность заключается в том, чтобы вообразить все эти ветки бесконечно короткими». Больцман: «…кривая …на любом конечном отрезке имеет очень много максимумов и минимумов и поэтому не может быть изображена с помощью линии, непрерывно изменяющей направление. Ее лучше назвать агрегатом, множеством очень близких точек или малых горизонтальных отрезков». Больцман: «Мне хотелось бы, чтобы меня правильно поняли, так как я полагаю, что профессиональный геометр с иронией воспринимает H-кривую. Я могу только напомнить, что кривые записей метеорологических, барометрических, термометрических и пр. показаний, обнаруживают внешние черты, которые напоминают свойства H-кривой». Цитаты даны по книге [21, с.423, 424, 463, 472].

[10] Распад одномерной и двумерной сплошных сред подчиняется хи-распределению соответственно с тремя и четырьмя степенями свободы:

$$f(R) = \frac{4}{\sqrt{\pi}a^3} R^2 e^{-R^2/\alpha^2} \text{ (для одномерной среды)},$$

$$f(R) = \frac{2}{\alpha^4} R^3 e^{-R^2/\alpha^2} \text{ (для двумерной среды)}.$$

Интересно, что три формулы хи-распределения для $f(R)$, рассмотренные здесь, впервые появились у лорда Рэлея в совсем другой задаче – о распределении фаз колебаний и их интенсивностей в одномерном, двумерном и трехмерном пространствах [22]. Одинаковые формулы для $f(R)$ (одномерная среда) и $g(R)$ (трехмерная среда) появились еще раньше, также в другой задаче – о распределении молекул по скоростям. Речь идет о формуле, известной в физике как распределение Максвелла.

[11] Хи-распределение с пятью степенями свободы эквивалентно распределению Вейбулла с параметром $\Lambda = 2/3$, которое, в свою очередь, подтверждается экспериментально при распаде хрупких твердых тел.

Рассмотренные распределения осколков являются унимодальными («одногорбыми»), так как их функции плотности имеют один максимум. В случае сложных процессов распада сплошной среды на осколки полезно иметь ввиду бимодальное («двугорбое») распределение Одинцова–Грэди.

[12] Эссе – очерк научного или публицистического характера (*франц.* essai; *англ.* essay).

Список литературы

1. *Антонюк П.Н.* От Ламберта до Мандельброта. Страницы истории фракталов // Институт истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова. Годичная научная конференция, 2006. М., 2006. С.260–262.
2. *Mandelbrot B.B.* Les objets fractals: forme, hasard et dimension. Paris, 1975.
3. *Mandelbrot B.B.* Fractals: form, chance and dimension. San Francisco, 1977.
4. *Mandelbrot B.B.* The fractal geometry of nature. N.Y., 1982.
5. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М., 2002.
6. *Мандельброт Б.Б.* Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. Москва–Ижевск, 2009.
7. *Архимед, Гюйгенс, Лежандр, Ламберт.* О квадратуре круга. М., 2003.
8. *Антонюк П.Н.* Вселенная. 1969. (Рукопись из личного архива автора).
9. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
10. *Антонюк П.Н.* Итерации Фату и Жюлиа. Страницы истории фракталов // Институт истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова. Годичная научная конференция, 2007. М., 2008. С.270–271.
11. *Арнольд В.И.* Что такое математика? М., 2004.

12. Кто открыл множество Мандельброта? // В мире науки. 1990. №6. С.92–97.
13. *Антонюк П.Н.* Порядок Шарковского и универсальность Фейгенбаума. Страницы истории фракталов // Институт истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова. Годичная научная конференция, 2008. М., 2009. С.220–222.
14. *Галл Я.М.* Логистическая кривая и популяционная экология // Институт истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова. Годичная научная конференция, 2005. М., 2005. С.346–347.
15. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев, 1986.
16. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физических наук. 1983. Т.141. Вып.2. С.343–374.
17. *Антонюк П.Н., Станюкович К.П.* Периодические решения логистического разностного уравнения // Доклады Академии наук СССР. 1990. Т.313. №5. С.1033–1036.
18. *Антонюк П.Н., Станюкович К.П.* Логистическое разностное уравнение. Удвоения периода и числа Ферма // Доклады Академии наук СССР. 1990. Т.313. №6. С.1289–1292.
19. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: Введение. М., 1988.
20. *Антонюк П.Н.* Фракталы в геометрии природы // Институт истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова. Годичная научная конференция, 2009. М., 2009. С.247–250.
21. *Больцман Л.* Избранные труды. М., 1984.
22. *Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Т.I. М., 1955.
23. *Мандельброт Б.Б.* Фракталы и возрождение теории итераций // *Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М., 1993. С.131–140.

ЕВРОПЕЙСКИЙ НАУЧНЫЙ МИР ГЛАЗАМИ МАГИСТРА ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ Н.В.БУГАЕВА

О.А.Саввина

«**В чужие краи**». Заграничные командировки «для приготовления к профессорскому званию» получили распространение в России в XIX в. и были вызваны, очевидно, развитием отечественной университетской системы. Открытие новых университетов поставило проблему их кадрового обеспечения «природными россиянами». Так, еще в 1808 г. «в чужие краи» отправились 12 «отличных дарованиями, знанием наук и иностранных языков» студентов Санкт-Петербургского учительского института, которые после возвращения должны были «занять места адъюнктов и профессоров» будущего столичного университета [1]. Стажеры вернулись в 1811 г., но открытие университета в столице затянулось. Тем не менее, они подверглись испытанию, по-видимому, на степень магистра и доктора в «совокупном заседании конференции Академии и Педагогического института» [2, с.337].

В 1816 г. по Высочайшему повелению в Англию были отправлены 4 студента все того же учительского института. Хотя цель их поездки состояла в изучении «метóды Ланкастера и Бэла»[1], попечитель столичного округа С.С.Уваров (1786–1855) предписал командированным «не терять из виду тех наук, которыми каждый из них занимался» [2, с.335].

Следующее упоминание о заграничных стажировках датировано 1829 г. В это время в Берлинский университет были командированы 5 выпускников С.-Петербургской и Московской духовных академий (для подготовки из них будущих профессоров правоведения).

Практика научных стажировок, хотя и с перерывами, продолжилась в России и дальше. Наиболее массовыми из них, пожалуй, были командировки в 1836 г., когда 11 выпускников Педагогического института были направлены в Берлин, и в 1858 г., когда 9 профессоров и адъюнктов Харьковского и Киевского[2] университетов и адъюнкт Ришельевского лицея из Одессы уехали за границу «для усовершенствования» в разных науках. Итак, в середине XIX в. появился еще один тип стажировки – научные командировки профессоров.

Примечательно, что среди первых стажеров редко встречаются математики. Министерство проявляет бóльшую заинтересованность в воспроизводстве университетских кадров по медицинским и юридическим наукам, нежели по математическим. Так, среди командированных с 1808 по 1860 гг. встречаем всего несколько математиков: Д.С.Чижова[3], Ф.И.Буссе[4], П.И.Котельникова[5], Воскресенского[6], М.Ф.Спасского[7], И.Д.Соколова[8], А.Н.Тихомандрицкого[9]. Особняком в этом ряду стоит «увольнение за границу» московского профессора Н.Д.Брашмана (1786–1855) в университеты Германии, Франции и Англии с целью ознакомления их устройства [3]. На профессора большое впечатление тогда произвели именно английские университеты. Его приводило в изумление то обстоятельство, что английские университеты, в отличие от французских и немецких, «не доставляют» ни юристов, ни медиков, ни ботаников, ни историков, ставя основной задачей воспитание «джентльмена» [4].

Как видим, в первой половине XIX в. научные стажировки носили эпизодический характер. Не существовало ни единого плана их организации, ни общих регулирующих норм и правил. Каждая из командировок создавала собой новый прецедент, для каждого случая обговаривались свои условия, которые обычно окончательно закреплялись Высочайшим повелением.

Например, в «Начертании об отправлении студентов С.-Петербургского педагогического института в чужие краи» стажеру, совершенствующемуся в чистой математике, предписывалось: «Не в публичных, всегда весьма поверхностных и содержащих токмо первые основания наук, курсах профессоров в университете, даже устроенным наилучшим образом, наш студент может надеяться пройти с успехом математику, в частных же уроках, преподаваемых и слушаемых таким образом, он в короткое время успеет умножить свои познания. Пфафф в Гельмштете, Клюгель в Галле, Гаусс в Геттингене наиболее заслуживают доверенность по части Геометрии как имеющие по сей части глубочайшие познания изо всех ученых Германии. В Париже изобилие затрудняет выбор. Не говоря о Лагранже и Лапласе (кои не занимаются частными уроками, но, верно, согласятся давать советы касательно затруднительных случаев, достойных их внимания), там находятся Боссю, Лежандр, Лакруа, Био, Франкер, которые известны по своим сочинениям и по успехам их учеников» [1, стб.468–469]. Таким образом, первые научные стажировки предполагали только индивидуальные (частные) занятия русских стажеров у научных светил Европы.

Лишь в 1860-х гг. заграничные научные стажировки получили массовый характер и окончательное законодательное оформление. В 1863 г. вопрос «об отправлении молодых людей за границу для приготовления занятия кафедр» был узаконен Уставом университетов [5]. В Московском университете были приняты правила «о стипендиатах, оставляемых при университете по окончании университетского курса и отправляемых за границу для дальнейшего усовершенствования в науках», в которых говорилось: «Факультет ходатайствует перед советом об отправлении за границу для дальнейшего усовершенствования в науках тех стипендиатов, которые вполне оправдали доверие совета и приобрели степень магистра или доктора медицины. Совет, по обсуждении достоинств предложенных кандидатов, подвергает их баллотированию» [6, с.34]. После баллотировки (при условии ее положительного результата) кандидат «через попечителя» утверждался министром.

Более того, вопрос о научных стажировках был решен кардинально еще до принятия Устава университетов, на этапе подготовки его проекта. Согласно проекту, планировалось обновление перечня и количественного состава кафедр, «для занятия» которых был подготовлен список кандидатов, командированных за границу еще в 1862 г. [7]. Средняя продолжительность командировок кандидатов «на занятие кафедр» тогда составляла 2–2,5 года.

С этого времени командировки для «усовершенствования» в математических науках организуются систематически. Среди стажеров 1863–1865 гг. встречаем имена математиков А.Н.Коркина (1837–1908), А.А.Ильина (1839–1879), А.В.Бесселя (1837–1870), Д.М.Деларю (1839–1905), В.Г.Имшенецкого (1832–1892), Д.Н.Лебедева (1840–1880), Н.В.Бугаева (1837–1903) [7], 1871–1872 гг. – Е.И.Золотарева (1847–1878), В.П.Ермакова (1845–1922) [8] и Н.Я.Сонина (1849–1915) [9], в 1879 г. – А.В.Васильева (1853–1929) [10], 1882–1884 гг. – Д.Ф.Селиванова (1855–1932) и М.А.Тихомандрицкого (1844–1921); 1889–1890 гг.

– П.М.Покровского (1857–1901) [8] и В.А.Анисимова (1860–1907) [11] и др.

Меняется и характер проведения стажировок. В отличие от командировок начала XIX в., большую часть времени русские стажеры посвящают слушанию лекций в университетах и работе в библиотеках. Иногда, очевидно, имели место и частные занятия стажеров у европейских ученых, но такие факты были редкими.

Под контролем у государства. Первоначально перед молодыми стажерами-учеными стояли только две задачи: 1) повысить уровень своих знаний; 2) приобрести ученую степень и занять место на кафедре. Затем в задачи командировок добавилась еще одна – установление связей между русской и европейской наукой. Расходы на командировки брало на себя обычно государство, преимущественно Министерство народного просвещения. Нередко в финансировании принимал участие Московский университет. Сумма, выделяемая на командировочные расходы, не являлась стабильной. В 1808 г. «на содержание и путевые издержки» было выделено каждому стажеру 1500 рублей на год[10], в 1816 г. – 1200 рублей на 4 месяца, в 1836 г. – 3 550 рублей на год, по «Правилам Московского университета» от 1864 г. каждому кандидату выделялось 1200 рублей в год [6, с.34].

Государственная политика организации командировок была довольно мудрой. Во-первых, стажеры получали, по сути, аванс, который в будущем должны были вернуть в виде службы на ниве русской науки и просвещения. С 1844 г. Сенат обязал лиц, «отправляющихся в чужие краи», после возвращения на Родину выслужить в университете не менее 12 лет! Затем продолжительность «выслуги» определялась для каждого стажера, можно сказать, индивидуально. Например, профессора и адъюнкты Харьковского университета были обязаны выслужить по 2 года «за каждый год пребывания за границей», а Киевского, отправленные всего на 1,5 года, должны были в совокупности выслужить 6 лет [2, с.353].

Во-вторых, расходы государственных денег строго контролировались: о ходе своих научных занятий и о расходах стажеры должны были отчитываться. Периодичность таких отчетов варьировалась от 1 раза в 2–3 месяца до 1 раза в полугодие (в 1808 г. – 1 раз в 4 месяца, затем – 1 раз в семестр, во второй половине XIX в. – 1 раз в 3 месяца). В 1862–1867 гг. отчеты публиковались в периодическом издании МНП – «Журнале Министерства народного просвещения» (ЖМНП). В официальном письме от 5 марта 1863 г. министра просвещения А.В.Головнина (1821–1886), адресованном управляющему Московским учебным округом, разъясняется цель публикации отчетов: «Препровождая при сем к Вашему

Превосходительству список лиц, командированных за границу для приготовления к званию профессоров и преподавателей, а также несколько экземпляров статьи об отчетах их, я прошу Вас обратить внимание Гг. профессоров на эти отчеты, печатаемые в Журнале Министерства народного просвещения с тем, чтобы доставить университетам возможность постепенно ознакомиться с лицами, из числа коих университетам можно впоследствии избирать профессоров для замещения вакантных кафедр» [13]. Итак, в 1862 г. в ЖМНП была открыта специальная рубрика – «Отдел III. Отчеты лиц, отправленных Министерством народного просвещения за границу для приготовления к профессорскому званию»[11], в которой в 1863–1865 гг. и были опубликованы уникальные отчеты магистра чистой математики Николая Васильевича Бугаева. Всего здесь размещено 8 его отчетов:

первый – 29 июня–11 июля 1863 г. (Берлин),
второй – 1 октября 1863 г. (Берлин),
третий – 23 декабря–4 января 1863/64 г. (Париж),
четвертый – 3/15 марта 1864 г. (Париж),
пятый – 10/22 июня 1864 г. (Париж),
шестой – 21 декабря–2 января 1864/65 г. (Париж),
седьмой – 26 марта–7апреля 1865 г. (Париж),
восьмой – 16/18 июня 1865 г. (Берлин).

География научного путешествия магистра Н.В.Бугаева. Весной 1863 г. Николай Васильевич Бугаев защитил магистерскую диссертацию по математике. Однако на этом молодой ученый останавливаться не намеревался. Задолго до защиты он принял решение продолжить свое научное образование в Европе. И, очевидно, получив благословление факультета и министра, отправился в научное путешествие.

Для начала своих научных занятий, «руководствуясь советами профессоров Московского и Петербургского университетов», новоиспеченный магистр выбрал Берлинский университет. И этот выбор был не случаен. Берлин являлся тогда настоящей Меккой для математиков всего мира [8, с.73]. В Берлинском университете в то время трудились Я.Штейнер (1796–1863), Л.Кронекер (1823–1891), Э.Куммер (1910–1893), К.Вейерштрасс (1815–1897), Л.Фукс (1833–1902).

Видимо, из-за хлопот, связанных с защитой магистерской диссертации, Н.В.Бугаев опоздал к началу семестра (прибыл, очевидно, летом 1863 г.), но он тут же включился в активную работу по своему самообразованию.

Первыми лекторами, которых услышал Н.В.Бугаев, были известные математики Э.Куммер и К.Вейерштрасс. О курсах последнего следует рассказать особо. Они были уникальны тем, что К.Вейерштрасс знакомил слушателей не только с известными научными фактами, но и с теми новыми результатами и идеями, над которыми он размышлял в то время[12]. Сам же немецкий профессор, по словам Ф.Клейна, питал «принципиальное отвращение к типографской краске» [16, с.313] и не только не любил публиковать свои рассуждения, но даже запрещал литографировать свои лекции, требуя от слушателей, чтобы переписывали их от руки. Большая часть результатов К.Вейерштрасса постепенно публиковалась именно слушателями его лекций, распространившими вейерштрассовскую реформу в математике Европы. Весь цикл лекций К.Вейерштрасса обычно длился 2 года и включал четыре темы: теорию аналитических функций, теорию эллиптических функций, приложения эллиптических функций[13], теорию абелевых функций[14]. Помимо того, Вейерштрасс иногда читал и другие курсы. Например, в последние годы он неоднократно читал вариационное исчисление. Стажировка Н.В.Бугаева вклинилась внутрь одного из циклов лекций К.Вейерштрасса, продолжавшего чтение курса по эллиптическим функциям, начатого еще осенью 1863 г. Поэтому Н.В.Бугаев вынужден был спешно самостоятельно изучить предыдущий материал, в чем ему помогли конспекты соотечественника – Александра Васильевича Бесселя (1839–1870)[15]. Очевидно, между русскими стажерами существовали дружеская солидарность и взаимопомощь. Следует обратить внимание на тот высокий уровень математической подготовки, с которым приехал начинающий стажер из России. Ни языковой барьер, ни «подавляющий» стиль лекций немецкого профессора не смутили Николая Васильевича. А лекции К.Вейерштрасса, по свидетельству его соотечественника Ф.Клейна, были понятны далеко не всем [16, с.320]. Известно, что Ф.Клейн так и не решился посещать эти лекции, хотя об этом потом сожалел. Н.В.Бугаев, помимо лекций по эллиптическим функциям и их приложениям, прослушал вводный курс К.Вейерштрасса по теории абелевых функций и вариационному исчислению. Как раз высокий научный уровень изложения материала и привлекал Н.В.Бугаева. Высоко оценивая мемуар К.Вейерштрасса «Theorie der abelschen Functionen», опубликованный в журнале Крелля, Н.В.Бугаев писал: «Мемуар этот составляет самую лучшую заслугу Вейерштрасса в науке по характеру обобщения и некоторым замечательным выводам, к которым его привело развитие такого сложного вопроса. Но в нем он касается эллиптических функций только в общих чертах. На лекциях же он старался придать полное и всестороннее развитие исходной точке, и потому изложение его эллиптических функций в высшей степени своеобразно» [19, с.309].

Не оставил без внимания Н.В.Бугаев и замечание К.Вейерштрасса о необходимости расширения курса средней школы новыми математическими фактами: элементами аналитической геометрии, учением о функции, включая элементы дифференциального исчисления [20]. Педагогические заметки К.Вейерштрасса, которые он делал во время лекций, оказали несомненное влияние на становление педагогических взглядов молодого русского ученого. Несколько позже, в 1869 г., Н.В.Бугаев в речи «Математика как орудие научное и педагогическое» разовьет идеи своего немецкого учителя: «Между настоящими среднеучебными заведениями и физико-математическими факультетами нет такой органической связи, чтобы можно было вполне сознательно выбирать физико-математический факультет для дальнейшего образования. Воспитывающийся в гимназии не имеет ясного представления о характере этих вопросов, которыми занимаются в университете на физико-математическом факультете. Общее образование не должно быть настолько недостаточно, чтобы в выборе факультета не обнаружилось вполне сознательной воли; такой важный шаг не должен быть предоставлен случайности. Эти мысли были высказаны еще берлинским профессором Вейерштрассом, и трудно отказать им в справедливости» [21]. Через 30 лет идеи К.Вейерштрасса и Н.В.Бугаева были подхвачены Ф.Клейном (1849–1925), который активно продолжил их деятельное воплощение в начале XX в.[16].

Ученики К.Вейерштрасса составляли особое международное содружество, лидером которого была С.В.Ковалевская (1850–1891), отправившаяся в Германию в 1869 г. Н.В.Бугаев был участником этого содружества[17], хотя и не избрал для себя стезю популяризации и продолжения вейерштрассовской теории функций.

Большое влияние на формирование научных интересов Николая Васильевича во время стажировки оказали немецкие и французские лекторы, читающие курсы теории чисел. С восторгом отзывался он о лекциях Э.Куммера, в которых, помимо теории чисел (учение об идеальных и комплексных числах), была изложена теория кривых линий двоякой кривизны и кривых поверхностей. Э.Куммер, по мнению Н.В.Бугаева, был просто «образцовым преподавателем». «Лекции Куммера, – писал он в отчете, – отличаются полнотою, ясностью и изяществом изложения, обилием исторических заметок и важными указаниями на ход и развитие этого отдела математического анализа» [23, с.408].

Следующий семестр Н.В.Бугаев запланировал провести во Франции. Выяснив, что занятия в Париже начинаются позднее, чем в Берлине, он решает воспользоваться этим обстоятельством и задерживается в Берлине на октябрь и ноябрь, желая прослушать несколько начальных лекций Куммера, Вейерштрасса и Кронекера. У Э.Куммера он начинает посещать курсы аналитической механики и теории гипергеометрического ряда, у К.Вейерштрасса – общей теории гипергеометрического ряда, у Л.Кронекера – теории чисел. И опять лекции по теории чисел – лекции Л.Кронекера – привлекают его более остальных. Ему импонирует не только тематика лекций, но и манера чтения лектора. Он отмечает: «Сжатость и ясность изложения – отличительные достоинства чтений Кронекера» [20, с.271].

Однако приближалось начало семестра во Франции, и Н.В.Бугаев вынужден покинуть Берлин, так и не дослушав здешних курсов. Прибыв в Париж, он сначала слушает в Сорбонне лекции Ж.Лиувилля (1809–1882) по механике и Ж.М.К.Дюамеля (1797–1872) по дифференциальному исчислению[18]. В отчете за зимний семестр 1863/64 гг. Н.В.Бугаев приводит свои впечатления об этих лекциях: «Чтения Лиувилля, не давая знакомства с каким-нибудь новым научным фактом, интересны по обилию доказательств, предлагаемых им для каждой теоремы, и тем критическим заметкам, которыми он сопровождал эти доказательства, показывая как взаимную связь, так и значение их по отношению к историческому развитию науки.

Из чтений Дюамеля можно вынести довольно ясное представление о том, какой ряд вопросов должен иметься в виду и в каком виде должно быть преподаваемо введение в дифференциальное исчисление. Дюамель исторически разбирал на своих лекциях способы, которые были употребляемы древними геометрами и математиками, предшествовавшими эпохе введения бесконечно малых, для решения задач, входящих теперь в дифференциальное исчисление. Он изложил методы Ферма, Декарта, Роберваля для определения касательных к кривым, maxima и minima, указал на пути, бывшие предметом полемики между этими учеными, и старался доискаться до внутренней причины и сущности их разногласия» [20, с.271].

С открытием занятий в *Collège de France* (Колле́ж де Франс) русский стажер отдает предпочтение этому учебному заведению, видимо, в силу имеющегося в нем более высокого уровня преподавания. Дело в том, что *Collège de France* было не простым высшим учебным заведением, а представляло собой лекторий[19], в котором, как пишет Н.В.Бугаев, «не стесняемые теми педагогическими соображениями, которые все-таки влияют до известной степени на преподавание в Сорбонне, лучшие ученые выбирают по своему произволу какой-нибудь научный вопрос и стараются ...развить его перед слушателями с полнотою и глубиною, соответствующею современному состоянию науки» [20, с.272]. Вместе с тем он продолжает посещать в Сорбонне лекции Г.Ламе (1795–1870) по теории упругости.

В *Collège de France* Н.В.Бугаева привлекают лекции Ж.Л.Ф.Бертрана (1822–1900) о «распределении электричества на поверхности проводников в связи с вопросами анализа» и, особенно, лекции Ж.Лиувилля по теории чисел. У Н.В.Бугаева еще свежи впечатления от курсов по теории чисел, прослушанных в Берлине. Он внимательно анализирует лекции Ж.Лиувилля, сравнивает немецкую и французскую школы, отмечая, что французский математик старается показать непосредственную связь теории чисел с вопросами «чистого» анализа. Примечательно, что, когда после довольно подробного введения, Ж.Лиувилль приступил к изложению сочинения по теории чисел К.Ф.Гаусса, Н.В.Бугаев начал слушать лекции с «двойным интересом», поскольку это сочинение К.Ф.Гаусса он изучил раньше, еще находясь в Берлине.

Два следующих семестра (летний и зимний) Н.В.Бугаев живет в Париже. Летом 1864 г. он продолжает в *Collège de France* слушать дополнительные лекции Ж.Бертрана по теории статического электричества и лекции Ж.Лиувилля по теории чисел. Лето 1864 г. можно назвать рубежным в его научной командировке. В это время он, очевидно, окончательно утверждается в своих исследовательских предпочтениях. Он много самостоятельно занимается теорией чисел и сосредотачивает свои усилия на получении собственных научных результатов в этой области, «занимаясь упрощением приемов, предложенных Гауссом» [23, с.80].

Начало зимнего семестра он снова встречает в Сорбонне, слушая лекции М.Шаля (1793–1880) по высшей геометрии и М.Верде (1824–1866) по механической теории теплоты, но с открытием занятий в *Collège de France* прерывает посещение курса М.Верде, поскольку он совпал по времени с занятиями у Ж.Серре (1819–1885). Одновременно в *Collège de France* он активный слушатель лекций Ж.Бертрана по интегральному исчислению, Ж.Серре – по общей теории интегрирования дифференциальных уравнений движения, Ж.Лиувилля – по избранным вопросам анализа и теории чисел. Судя по отчетам, в лекциях Ж.Серре и Ж.Лиувилля Н.В.Бугаева привлекает обстоятельность, с которой они рассматривают методы решения уравнений с частными производными.

Свое научное путешествие Н.В.Бугаев решает завершить в Берлине. Здесь он надеется продолжить свои занятия у Л.Кронекера и Э.Куммера. Прибыв в Германию, он с сожалением обнаруживает, что Кронекер вовсе не читает в настоящий семестр, Куммер же читает тот самый раздел о приложении дифференциального исчисления к поверхностям, который Николай Васильевич выслушал во время своего первого пребывания в Берлине [24, с.175]. Поэтому Н.В.Бугаев ограничивается только посещением лекций К.Вейерштрасса по вариационному исчислению. Он тщательно изучает новую научную литературу в библиотеке и направляет все силы для «приготовления к печати» своих исследований «о некоторых числовых тождествах».

Во время научной стажировки 1863–1865 гг., похожие функции которой сегодня выполняют аспирантура и докторантура, Н.В.Бугаев занимался математикой с необыкновенным усердием. Его отчеты свидетельствуют о том, что он с большой тщательностью посещал лекции, конспектировал и глубоко осмысливал услышанное на них [25]. Много Н.В.Бугаев занимался самостоятельно, используя свой скромный досуг исключительно на изучение серьезной математической литературы, штудируя в оригинале сочинения К.Ф.Гаусса по теории чисел и высшей алгебре, Г.Монжа по вариационному исчислению, Ш.Эрмита по теории эллиптических функций, Ж.Бертрана по интегрированию уравнений с частными производными и многие другие.

Слушая лекции немецких и французских математиков, Н.В.Бугаев всегда обращал особое внимание на педагогическое оформление этих лекций: темп чтения, научную строгость, доступность и последовательность изложения, использование исторических сведений, педагогические находки лекторов.

У истоков аритмологии. Из восьми отчетов Н.В.Бугаева особый интерес представляет последний, восьмой. Он был составлен летом 1865 г. в Берлине и включал в себя фрагмент его будущей докторской диссертации «Числовые тождества, находящиеся в связи со свойствами символа E»[20] [27].

Действительно, во введении к диссертации Н.В.Бугаев практически повторяет текст отчета. Например, он пишет: «Совокупность математических истин, известных в настоящее время под общим именем теории чисел, существенно распадается на два огромных отдела. В одном рассматриваются свойства неопределенных уравнений; сюда принадлежит теория сравнений и различных форм. В другом исследуются свойства числовых функций, как по отношению их между собою, так и по отношению их к функциям аналитическим, и по связи их с различными вопросами анализа» [27, с.I]. Свои исследования, наряду с Гауссом, Дирихле, Кронекером и Лиувиллем, он относит ко второму отделу, который называет «числовым исчислением» (calcul numérique), или «числовым анализом».

Одним из главных понятий, пронизывающих все «числовое исчисление», был «символ» $E(x)$. В отчете Н.В.Бугаев различает три способа изучения свойств символа E: 1) *способ неравенств*, заключающийся в выяснении того, сколько раз неравенство $f(x,y,z)<n$ может быть удовлетворено при известных условиях

возрастания переменных; 2) *геометрический способ*; 3) *способ числовых тождеств*, «в котором свойства символа E выводятся на основании способности выражений, зависящих от E, удовлетворять определенным тождествам» (см.: Приложение). Если описание первых двух способов не претерпело в дальнейших исследованиях Н.В.Бугаева изменений, то объяснение последнего имело определенную трансформацию. В диссертации ученый назвал третий способ иначе – «*способом неопределенных уравнений*» и его суть объяснял как «вывод свойств символа E на основании способности выражений, зависящих от E, выражать различные свойства по отношению к неопределенным уравнениям» [27, с.III]. Стремление Н.В.Бугаева к более точному терминологическому описанию третьего способа понятно. Именно этим способом он и пользуется в своей диссертации. Итак, судя по этому отчету, практически завершив свое докторское исследование, Н.В.Бугаев возвращается в Россию (очевидно, в конце 1865 г.) и вскоре, в феврале 1866 г., защищает диссертацию.

Последний отчет Н.В.Бугаева также показывает, как траектория его научных интересов смещается в сторону будущей аритмологии. Как замечает С.С.Демидов, «в основе теоретико-числовых построений Бугаева лежала мысль об аналогии между некоторыми операциями элементарной теории чисел (суммирование по делителям и др.) и операциями математического анализа. Опираясь на эту аналогию, Бугаев хотел построить науку о «прерывных» функциях. Этот отдел математики он называл аритмологией» [28, с.116]. Одна из попыток построения такой аналогии просматривается в отчете. Так, Н.В.Бугаев пишет: «В нашем исследовании мы вывели два общих закона числовых тождеств. Второй из них может выражаться с одной и с двумя произвольными функциями. Формулами этих числовых тождеств как бы указывается на взаимную связь этого метода с интеграцией по конечным разностям. Действительно, в частном случае второй закон числового тождества дает общие формулы по конечным разностям, могущим послужить и для решения различных вопросов числового анализа» (см.: Приложение). Несколько позже Н.В.Бугаев будет связывать будущее развитие математики именно с аритмологией, или теорией прерывных функций (изучением одной из таких прерывных функций – $E(x)$ – он серьезно занимался во время стажировки), которая, по его мнению, выдвинулась из теории чисел [29, с.5]. Отсюда напрашивается вывод, что истоки аритмологических воззрений ученого зародились во время его научной стажировки.

Впечатления Н.В.Бугаева о западноевропейском математическом мире имели продолжение. Магнетические лекции Л.Кронекера и Э.Куммера не давали покоя Николаю Васильевичу, его снова тянуло в Германию. В октябре 1871 г. – январе 1872 г. уже состоявшийся профессор Н.В.Бугаев снова совершил командировку в Берлин «с ученой целью», причем задержался здесь больше запланированного времени, о чем свидетельствует запись в Журнале заседаний физико-математического факультета от 29 февраля 1872 г.: «Определено: довести до сведения Совета, что профессор Бугаев возвратился из командировки двумя неделями позднее срока, потому что был задержан в Берлине учеными занятиями, имевшими прямое отношение к цели его путешествия» [30].

На рубеже XIX–XX вв. Н.В.Бугаев станет активным участником европейской научной жизни. Его международные контакты будут чрезвычайно многообразными. На Первом Международном конгрессе математиков 1897 г. в Цюрихе он будет избран одним из его вице-президентов. Швейцарские математики встретят Н.В.Бугаева, по его словам, не приветливо, но его знаменательная речь «Математика и научно-философское миросозерцание», произнесенная на пленарном заседании по-французски, получит огромный успех у участников конгресса[21]. Однако это уже другая история.

Приложение
Извлечения из отчетов лиц, отправленных за границу для приготовления к профессорскому званию (Отчет Н.В.Бугаева)[22]

Остальную часть времени моего пребывания за границею я решился провести в Берлине. К сожалению, я застал весьма мало математических лекций, способных возбудить особенный интерес, ибо Кронекер вовсе не читает в настоящий семестр, Куммер же читает ту самую статью о приложении дифференциального исчисления к поверхностям, которую я у него выслушал во время моего первого пребывания в Берлине, поэтому я счел полезным слушать только лекции Вейерштрасса о вариационном исчислении. Главные же мои занятия сосредоточились на изучении в библиотеке некоторых математических статей журналов Crelle'я и Liouville'я и преимущественно на приготовлении к печати моих исследований о некоторых числовых тождествах. Для более точного уяснения того круга истин, который составляет предмет моих изысканий, я считаю полезным высказать несколько общих воззрений.

Совокупность математических истин, известных в настоящее время под общим именем теории чисел, существенно распадается на два огромных отдела. В одном рассматриваются свойства неопределенных уравнений; сюда принадлежит теория сравнений и различных форм. В другом исследуются свойства числовых функций, как по отношению их между собою, так и по отношению их к функциям аналитическим, и по связи их с различными вопросами анализа. К этому отделу относятся изящные исследования Чебышева о первых числах Гаусса и Дирихле о числе родов и классов квадратичных форм для различных определителей, исследования Дирихле об асимптотических выражениях, Лиувилля о различных числовых тождествах и все изыскания о взаимной зависимости между свойствами числовых функций и коэффициентами бесконечных рядов.

Хотя еще не существует до сих пор общих методов для решения различных вопросов второго отдела, хотя частные изыскания, относящиеся сюда, стоят независимо друг от друга, однако нельзя не видеть, что вопросы и приемы, употребляемые во втором отделе, отличаются от методов первого отдела своим аналитико-числовым характером. На этом основании мы считаем полезным усвоить и терминологию, соответствующую этим двум отделам. Совокупность истин, относящихся к первому отделу, мы будем называть собственно теорией чисел, или просто *теорией чисел* (здесь и далее курсив сохранен в соответствии с оригиналом. – *О.С.*). Совокупность истин, относящихся ко второму отделу, будем называть *числовым исчислением* (calcul numérique). Те случаи, в которых свойства числовых функций будут зависеть от свойства неопределенных уравнений, нисколько не противоречат этому разделению.

Совокупность законов, составляющих предмет нашего исследования, принадлежит к той огромной группе истин, которую мы будем называть числовым исчислением, ибо, хотя неопределенные уравнения служат точкой отправления при выводе различных числовых тождеств в нашем исследовании, однако то воззрение на цель, с которою рассматриваются эти уравнения, носит на себе характер, не подлежащий вполне теории чисел в смысле вышеупомянутого определения. В выражение числовых законов, выводимых у нас, входит функция $E(u)$ с символом E, означающим наибольшее целое число, содержащееся в положительном количестве u. До сих пор этот символ употреблялся как вспомогательное орудие для облегчения доказательства различных теорем теории чисел и числового исчисления (закон взаимности двух простых чисел, теорема Чебышева), но не был предметом самостоятельного исследования, и свойства функции $E(u)$ не имелись главным образом в виду.

Лучшее исследование, в котором разбираются некоторые свойства выражений, зависящих от символа E, принадлежат Дирихле. Но в своей статье «Sur la détermination des valeurs moyennes dans la théorie des nombres, Liouvill, 1856» он преимущественно имеет в виду провести мысль об асимптотических формулах, к которым стремятся в пределе решения различных числовых вопросов, поэтому и преобразования, употребляемые у него, и методы носят иногда частный характер, соответствующий другой основной мысли.

Для исследования свойств символа E можно пользоваться любым из трех приемов, или 1) можно употреблять *способ неравенств*, в котором общей задачей было бы определить, сколько раз неравенство $f(x,y,z)<n$ может быть удовлетворено при известных условиях возрастания переменных, или 2) *способ геометрический*, при котором мы могли бы решать различные вопросы для точек, распределенных на плоскости или в пространстве известным образом, и выводить все, что возможно вывести из подобного воззрения, или 3) *способ числовых тождеств*, в котором свойства символа E выводятся на основании способности выражений, зависящих от E, удовлетворять определенным тождествам. Хотя каждый из этих приемов имеет своеобразный характер и способен вносить в исследование свойственные ему особенности, однако не трудно видеть при ближайшем разборе, что все эти методы, равно как и метод преобразования числовых выражений, сводятся в сущности к одной основной идее. Мы могли бы дать нашим изысканиям название теории символа E, если бы воспользовались всеми вышеупомянутыми способами и разобрали все заключения, к которым может повести каждый из методов исследования; но так как нами выбран один из приемов и мы разбирали все законы, к которым может повести он для определенных случаев, независимо от того, будет ли, или не будет входить в выражение их символ E, то мы и считаем необходимым удержать в названии нашего исследования соответствующую общую идею. В нашем исследовании мы вывели два общих закона числовых тождеств. Второй из них может выражаться с одной и с двумя произвольными функциями. Формулами этих числовых тождеств как бы указывается на взаимную связь этого метода с интеграцией по конечным разностям. Действительно, в частном случае второй закон числового тождества дает общие формулы по конечным разностям, могущим послужить и для решения различных вопросов числового анализа.

Чтобы иметь понятие о тех числовых законах, к которым приводятся общие числовые тождества в частных предположениях, я приведу некоторые из них.

Пусть функция $\xi(u)$ означает число делителей целого числа p, не превосходящих u, d_u величину делителя, стоящего на месте u в ряде делителей числа p, распределенных по их величине, тогда для всяких двух целых чисел k и n таких, чтобы $n+d_k \le p$ имеет формулу:

$$\sum_{u=1}^{n=k}\xi(n+d_n)+\sum_{1+\xi(n)}^{\xi(n+d_k)}\xi(d_n-n)=k\xi(n+d_k)+\theta,$$

где θ – число, означающее, сколько в ряде $d_{1+\xi(n)} - n, d_{2+\xi(n)} - n, \ldots, d_{\xi(n+d_k)} - n$ находится делителей числа p.

Полагая $p = 36$, имеем его делителей 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Формула наша дает $k = 7$ и $n = 7$:

$$\sum_{u=1}^{n=7} \xi(7 + d_n) + \sum_{6}^{8} \xi(d_n - 7) = 7 \cdot 8 + \theta,$$

θ показывает, сколько в ряде $d_6 - 7 = 2, d_7 - 5 = 5, d_8 - 7 = 11$ заключается делителей числа 36. В нашем случае $\theta = 1$ и формула дает

$$\xi(8) + \xi(9) + \xi(10) + \xi(11) + \xi(13) + \xi(16) + \\ + \xi(19) + \xi(2) + \xi(5) + \xi(11) = 57.$$

В пример задачи, решаемой одною из формул, я приведу следующую: дан конечный ряд целых чисел:

$(1 + E\sqrt{n})^2 - n,\ (2 + E\sqrt{n})^2 - n,\ \ldots\ (E\sqrt{n+k})^2 - n,$ получаемый от подстановки в выражении $u^2 - n$ вместо u ряда натуральных чисел от $1 + E\sqrt{n}$ до $E\sqrt{n+k}$, найти N число первых чисел, содержащихся в этом ряде. Это число N выражается формулой:

$$N = \sum_{u=1}^{u=\psi k} E\sqrt{n + \theta_u} + \sum_{1+E\sqrt{n}}^{E\sqrt{n+k}} \psi(u^2 - n) - E\sqrt{n+k}\,\psi(k),$$

где $\psi(u)$ выражает число первых чисел, не превосходящих u, и θ_u – величину первого числа, стоящего в таблице на месте u.

Сохраняя те же самые обозначения для $\xi(u)$, d_u, $\psi(u)$, θ_u, мы имеем следующий числовой закон:

$$\sum_{u=1}^{u=\psi(1+\xi n)} \Theta_u = [1 + \xi(n)]\psi[1 + \xi(n)] - \sum_{1}^{\psi[\xi(n)]} \xi\left(\frac{n}{d_{\Theta_u}}\right).$$

Для $p = n = 36$ формула дает:

$$\sum_{1}^{u=\psi(1+\xi 36)} \Theta_u = [1 + \xi(36)]\psi[1 + \xi(36)] - \sum_{1}^{\psi[\xi(36)]} \xi\left(\frac{36}{d_{\Theta_u}}\right),$$

имея в виду, что $\xi(36) = 9$, ибо делители 36 суть 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36,

$\psi[1 + \xi(36)] = \psi(10) = 4$, имеем

$$\sum_{1}^{4} \Theta_u = 10\psi(10) - \sum_{1}^{4} \xi\left(\frac{36}{d_{\Theta_u}}\right)$$

или

$$\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\Theta_4=10\cdot 4-\left[\xi\left(\frac{36}{d_2}\right)+\xi\left(\frac{36}{d_3}\right)+\xi\left(\frac{36}{d_5}\right)+\xi\left(\frac{36}{d_7}\right)\right]=$$

$$=40-23=17=2+3+5+7.$$

Этих примеров мы считаем достаточным для уяснения общего характера тех числовых законов, которые являются простым следствием общих числовых тождеств.

Берлин, 16/18 июня 1865 года.

Примечания

[1] Ланкастер Джозеф (1778–1838) и Бэл (Белл) Эндрю (1753–1832) – английские педагоги, создатели системы взаимного обучения, где старшие (более подготовленные) ученики обучают младших.

[2] Университета Св.Владимира.

[3] Чижов Д.С. (1785–1853) – первый декан физико-математического отделения Санкт-Петербургского университета. В 1808–1811 гг. стажировался в Гельмштете, Галле, Геттингене и Париже.

[4] Буссе Ф.И. (1794–1859) – педагог-математик, в 1816–1819 гг. находился в научной командировке в Англии, Франции, Швейцарии и Германии.

[5] Котельников П.И. (1809–1879) – в 1833–1835 гг. слушал лекции Штейнера и Дирихле в Берлине.

[6] К сожалению, о нем не удалось установить никаких биографических сведений. Воскресенский (как воспитанник Педагогического института) в 1836 г. был командирован в Кенигсберг на 2 года для научных занятий под руководством Якоби.

[7] Спасский М.Ф. (1809–1859) – профессор Московского университета, в 1836 г. был командирован в Кенигсберг на 2 года для научных занятий под руководством Якоби.

[8] Соколов И.Д. (1812–1873) – профессор Харьковского университета, в 1836 г. был командирован в Кенигсберг на 2 года для научных занятий под руководством Якоби.

[9] Тихомандрицкий А.Н. (1800–1888) – доктор математических наук, профессор университета Св.Владимира, в 1836 г. был командирован в Кенигсберг на 2 года для научных занятий под руководством Якоби.

[10] Чтобы у читателя была возможность оценить реальный уровень обеспечиваемого этой суммой благосостояния, приведем следующие данные. По университетскому уставу 1804 г., профессор получал жалованье в 2000 руб. (ассигнациями) в год. На начало XIX в. цены в столице были примерно такими: пуд муки пшеничной стоил от 2 руб. 40 коп. до 2 руб. 80 коп., крупы гречневой – 1 руб. 10 коп., риса – 3 руб. 20 коп., мяса – от 4 руб. до 4 руб. 40 коп. [12].

[11] Наряду с этими публикациями, можно назвать другие источники: [14; 15].

[12] По справедливому замечанию С.С.Демидова, эти размышления К.Вейерштрасса составили его знаменитую реформу анализа («$\varepsilon-\delta$ идеология» и т.д.).

[13] По свидетельству Н.В.Бугаева – приложения эллиптических функций (см.: Приложение), по свидетельству Ф.Клейна – приложения аналитических функций [16, с.313].

[14] К.Вейерштрасс прослужил в Берлинском университете 30 лет, а цикл был двухлетним. Отсюда получается, что этот цикл он повторял 15 раз, начиная с 1857 г. и до летнего семестра 1887 г., внося в него каждый раз изменения. Это любопытное замечание принадлежит С.С.Демидову.

[15] А.В.Бессель был отправлен за границу раньше Н.В.Бугаева, еще в мае 1862 г. [17, с.179]. Из его отчетов следует, что он полностью прослушал лекции К.Вейерштрасса по эллиптическим функциям [18, с.50–51].

[16] О том, как эти идеи «приживались» на русской почве, см. подробнее: [22].

[17] По свидетельству С.С.Демидова, подпись Н.В.Бугаева имеется в адресе русских учеников К.Вейерштрасса по случаю 80-летия учителя.

[18] Сорбонна – название коллежа, основанного еще в середине XIII в. Капелланом Робертом де Сорбоном. После объединения в XVII в. коллежа с Парижским университетом их названия стали отождествлять.

[19] С.С.Демидов предложил следующее полезное разъяснение по поводу специфики *Collège de France*: это был лекторий, притом лекторий очень высокого уровня. Профессора сами определяют тематику курсов, программу и число лекций. Зачастую это были те же профессора, что и в Сорбонне (немногие профессора Сорбонны имели честь быть избранными профессорами в *Collège de France*). В *Collège de France* открыт доступ всем желающим, не существует экзаменов, не фиксируется присутствие или отсутствие слушателя, не выдают дипломов. Отсюда и разница в уровне – курсы в *Collège de France* и в университете ориентированы на разный контингент слушателей.

[20] На это обратила внимание Е.П.Ожигова [26, с.220–245].

[21] Подробнее о выступлении Н.В.Бугаева в Цюрихе см.: [25, с.103–104].

[22] Взято из: [31].

Список литературы

1. Об отправлении студентов С.-Петербургского педагогического института в чужие краи // Сборник постановлений по Министерству народного просвещения. Т.1. 1802–1825. СПб.: Типография Императорской Академии наук, 1864. Стб.458–474.
2. О лицах, командированных Министерством народного просвещения за границу для приготовления к званию профессоров и преподавателей с 1808 по 1860 год // Журнал Министерства народного просвещения. 1864. Ч.CXXI. №2. С.335–354.
3. Об увольнении за границу ординарного профессора Брашмана // Центральный государственный архив города Москвы. Ф.418. Оп.11. Д.105.
4. *Брашман Н.Д.* Об английских университетах // Журнал Министерства народного просвещения. 1843. №4. С.1–30.
5. Общий устав Императорских Российских университетов. Высочайше утв. 18 июня 1863 года. §42. В.4) // Сборник постановлений по Министерству народного просвещения. 1855–1864. СПб.: Типографии Императорской Академии наук, 1865. Т.3. Стб.924–959.
6. Правила Императорского Московского университета // Журнал Министерства народного просвещения. 1864. Ч.CXXII. С.1–37.
7. Список кафедрам по проекту нового Университетского устава, с означением, кто командирован за границу для приготовления по каждой кафедре // Журнал Министерства народного просвещения. Ч.XVIII. 1863. №4. С.179–186.
8. *Демидов С.С.* Русские математики в Берлине во второй половине XIX – начале XX века // Историко-математические исследования. Вып.5(40). М., 2000. С.71–84.
9. Высочайшие приказы // Журнал Министерства народного просвещения. 1872. Ч.CLX. №4.
10. *Бажанов В.А.* Очерки социальной истории логики в России. Ульяновск, 2002.
11. Письма Н.В.Бугаева // Отдел редких книг и рукописей Научной библиотеки МГУ им. М.В.Ломоносова. Ф.41. Д.333. Л.16–28.
12. *Шипилов А.В.* Зарплата российского профессора в ее настоящем, прошлом и будущем // ALMA MATER. Вестник высшей школы. 2003. №4. С.33–42.
13. Списки лиц, командированных за границу для приготовления к званию профессоров и преподавателей // Центральный государственный архив города Москвы. Ф.459. Д.2761. Л.1.
14. Извлечения из отчетов лиц, отправленных Министерством народного просвещения за границу для приготовления к профессорскому званию. Ч.1–7. СПб., 1863–1866.

15. Отчет о состоянии и действиях Императорского Московского университета за 1876 год. М., 1877. Отчет о состоянии и действиях Императорского Московского университета за 1877 год. М., 1878.
16. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. В 2-х томах / Пер. с нем. Под ред. *М.М.Постникова*. М., 1989. Т.I.
17. Журнал Министерства народного просвещения. 1863. Ч.CXVIII. №4.
18. Журнал Министерства народного просвещения. 1863. Ч.CXVII. №1.
19. Извлечения из отчетов лиц, отправленных за границу для приготовления к профессорскому званию // Журнал Министерства народного просвещения. 1863. Ч.CXX. С.307–310.
20. Извлечения из отчетов лиц, отправленных за границу для приготовления к профессорскому званию // Журнал Министерства народного просвещения. 1864. Ч.CXXI. С.271–272.
21. *Бугаев Н.В.* Математика как орудие научное и педагогическое. 2-е изд. М., 1875.
22. *Саввина О.А.* Исторические очерки о преподавании высшей математики в средних учебных заведениях России. Ч.2: Вторая половина XIX – первые семнадцать лет XX вв. Елец, 2002.
23. Извлечения из отчетов лиц, отправленных за границу для приготовления к профессорскому званию // Журнал Министерства народного просвещения. 1863. Ч.CXIX. С.405–409.
24. Извлечения из отчетов лиц, отправленных за границу для приготовления к профессорскому званию // Журнал Министерства народного просвещения. 1865. Ч.CXXVII. №9. С.175.
25. *Колягин Ю.М.*, *Саввина О.А.* Математики-педагоги России. Забытые имена. Кн.4: Николай Васильевич Бугаев. Елец, 2009.
26. *Ожигова Е.П.* Развитие теории чисел в России. 2-е изд. М., 2003.
27. *Бугаев Н.В.* Числовые тождества, находящиеся в связи со свойствами символа *E* // Математический сборник. Т.1. Отд.1. 1866. С.1–162.
28. *Демидов С.С.* Н.В.Бугаев и возникновение Московской школы теории функций действительного переменного // Историко-математические исследования. М., 1985. Вып.XXIX. С.113–124.
29. *Бугаев Н.В.* Математика и научно-философское миросозерцание. Киев, 1898.
30. Журнал заседаний физико-математического факультета. О командировании за границу профессоров Швейцера и Бугаева. 1871–1872 гг. // Центральный государственный архив города Москвы. Ф.418. Оп.461. Д.33. Л.1, 6.
31. Извлечения из отчетов лиц, отправленных за границу для приготовления к профессорскому званию // Журнал Министерства народного просвещения. 1865. Ч.XXVII. С.175–179.

СТАТЬИ РАЗЛИЧНОГО СОДЕРЖАНИЯ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ДЕЙСТВУЮЩЕГО МАТЕМАТИКА[1)]

М.И.Монастырский

Введение. В последние годы в некоторых разделах математики, таких как обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы, топология и математическая физика, были получены первоклассные результаты. Эти результаты, конечно, принадлежат истории математики и существенно ее обогащают. Но является ли знание истории математики необходимым для развития самой математики? Почему мы наблюдаем растущий интерес к истории математики у активно работающих математиков? Я хочу обсудить эти вопросы, исследуя несколько конкретных примеров. Я буду следовать мудрому совету Фримена Дайсона. В 1972 г. в своей Гиббсовской лекции «Missed opportunities» [1] он сказал: «У Гильберта и Минковского я научился по крайней мере одному – людей нельзя убедить общими рассуждениями. Гильберт и Минковский наметили конкретные задачи, над которыми математики и физики могли с пользой размышлять. Я попытаюсь, действуя в их стиле и рассматривая соответствующие случаи, убедить вас, что прогресс как математики, так и физики в прошлом был значительно замедлен из-за нежелания прислушиваться к мнению друг друга» (см. перевод: [1, с.171–173]).

Я начну с нескольких общих замечаний. Историк математики и профессиональный математик имеют разный взгляд на предмет – историю математики. Хорошая историческая работа может состоять в исследовании происхождения понятия нуля. Для действую-

1)Эта работа была частично поддержана грантом РФФИ (грант 13-01-00314а).

щего математика эта проблема интересна лишь с общекультурной точки зрения, она для него ничем не привлекательнее, чем, скажем, история строительства египетских пирамид. Математики, не очень озабоченные культурными ценностями, интересуются не тем, кто первым открыл то или это, а, главным образом, самим результатом, в частности, в связи с их собственной работой. Такой математик считает, что все известное ранее и заслуживающее внимания, изложено в учебниках, и чтение оригинальных работ классиков (тем более, неклассиков) просто лишняя трата времени.

Современная тенденция чтения препринтов в arXive приводит к тому, что новые генерации математиков не знают не только работы предшественников, но часто и результаты последних десяти лет. Нередко молодой математик, получив свежий результат, бывает неприятно поражен, узнав от рецензента своей статьи, что его теорема была давно доказана, иногда пятьдесят и более лет тому назад.

Математика – счастливая наука. Правильный результат остается навсегда. Другое дело, что может быть найдено принципиально иное доказательство, или значение теоремы может измениться. Но иногда оказывается, что в теореме, которая считалась доказанной, находятся пробелы или даже серьезные ошибки. Бывает, что это выясняется спустя много лет. Особенно интересны примеры ошибочных теорем.

Одним из таких примеров является история проблемы Римана–Гильберта.

1. Проблема Римана–Гильберта. Начало истории этой проблемы естественно датировать с работы Б.Римана «Zwei algemeine Lehrsatze über lineare Differential-gleichungen mit algebraische Coefficienten». Она была написана в 1857–1858 гг., но опубликована посмертно (подробнее см.: [2; 3]).

В этой статье Риман формулирует следующую проблему. Рассмотрим систему однородных линейных дифференциальных уравнений, заданных в комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$dy_i \,/\, dz = \sum A_{ij}(z) y_j, \tag{1}$$

где $A_{ij}(z)$ – рациональные функции по z. Решения этой системы будут многозначными функциями.

Особенности каждого решения уравнения (1) определяются полюсами $a_1, \ldots, a_k, a_0 = \infty$ матрицы $A(z)$. Решение, естественно, изменяется при обходе вокруг особенности. Риман нашел условия гарантирующие, что решение после обхода сингулярности будет отличаться от первоначального только на постоянную матрицу. Если после обхода вокруг точки a_1 решение $\gamma_1 = (y_{11}(z), \ldots,$

$y_{n1}(z))$ переходит в вектор $\sum b_{ij}^{(1)}\eta_j$, а решение γ_i переходит в $\sum b_{ij}^{(m)}\eta_j$ после обхода точки a_m, тогда матрицы $B^{(0)}$, ..., $B^{(m)}$ будут невырожденными и будут удовлетворять условию Римана:

$$B^{(0)} \times B^{(1)} \times \ldots \times B^{(m)} = E, \qquad (2)$$

где E – единичная матрица.

В современной терминологии условия (2) определяют *монодромное отображение*, то есть отображение

$$\pi_1(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_m\}) \to GL(n, \mathbb{C}), \qquad (3)$$

где порядок n группы $GL(n,\mathbb{C})$ определяется размерностью фундаментальной матрицы решений системы (1). Здесь $\hat{\mathbb{C}}$ – сфера Римана (комплексная плоскость $\mathbb{C}$, пополненная $a_0 = \infty$), а $\pi_1(X)$ – фундаментальная группа множества X.

Матрицы $B^{(i)}$ называются *матрицами монодромии* и порождаются простыми обходами вокруг точек a_i, то есть петлями, не содержащими других сингулярностей.

В той же работе Риман сформулировал обратную проблему. Пусть задана система точек a_0, ..., a_m; всегда ли существует система уравнений вида (1), имеющая заданные сингулярности и матрицы преобразований, удовлетворяющие условиям (2)? Риман выдвинул гипотезу, касающуюся вида соответствующих уравнений, но не дал общего доказательства.

В своих лекциях о гипергеометрических функциях он рассмотрел случай $n = m = 2$. Решения уравнений типа (1) образуют весьма широкий класс функций, в частности, функции Бесселя, гипергеометрические функции и т.п. Работа Римана оставалась неопубликованной почти двадцать лет. Не зная о работе Римана, другой немецкий математик Л.Фукс (1833–1902), опубликовал в 1865 г. серию работ на эту тему. Он дал детальную классификацию особых точек уравнений типа (1). Наиболее важный класс таких уравнений с матрицами $A_{ij}(z)$, имеющих только простые полюса, в дальнейшем стали называться *фуксовыми уравнениями*. Этот термин ввел А.Пуанкаре. Но основная проблема Римана – доказательство существования уравнений с заданными матрицами монодромии и особыми точками – оставалась нерешенной. Эта проблема считалась столь трудной и важной, что Д.Гильберт включил ее в список своих знаменитых «Mathematische probleme». В своем докладе, представленном на Втором математическом конгрессе в Париже в 1900 г., Гильберт поставил 23 проблемы, решение которых он считал жизненно важным для дальнейшего прогресса математики. Проблема, которую мы обсуждаем, имела номер 21. В дальнейшем ее стали называть *проблемой Римана–Гильберта*. История ее решения весьма интригующая.

До недавнего времени считалось, что проблема Римана–Гильберта была решена в 1908 г. словенским математиком И.Племелем (1873–1967). Так как никаких сомнений в доказательстве Племеля не возникало, усилия математиков были направлены на нахождения эффективных методов построения уравнений с данной группой монодромии. В частности, детальное исследование точек ветвления было проведено русским математиком И.А.Лаппо-Данилевским (1896–1931). Для решения этой задачи он разработал специальный аппарат – теорию аналитических функций от матриц. В 1957 г. проблема Римана–Гильберта была перенесена на произвольные римановы поверхности немецким математиком Х.Рерлем. Однако в начале 1980-х гг. появились некоторые сомнения в корректности доказательства Племеля. Поначалу казалось, что пробел в его доказательстве не очень серьезен. Но наиболее драматические события случились в 1989 г., когда московский математик А.А.Болибрух (1950–2003) построил контрпример к теореме Племеля [4; 5][1].

Оказалось, что для любого $n \geq 3$ и любых m точек $a_1, \ldots, a_m$, $m > 3$, существует представление (3), которое не реализуется никакой фуксовой системой. Этот замечательный результат полностью изменил направление исследований в этой области дифференциальных уравнений.

2. Теорема Пуанкаре о конечности предельных циклов. Второй пример, к которому мне хотелось бы обратиться, касается другой знаменитой теоремы. А.Пуанкаре в мемуаре «Sur les courbes définis par une équation différentielle» (1881) поставил следующую проблему. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$x = P(x, y), y = Q(x, y), \text{где } P, Q - \text{ многочлены от } x, y \in \mathbb{R}. \qquad (4)$$

Верно ли, что:

1. Число предельных циклов уравнения (4) конечно?

2. Число предельных циклов полиномиального векторного поля степени n зависит только от n?

Обе проблемы оказались очень сложными. Насколько мне известно, вторая проблема все еще не решена. Но какова ситуация с первой проблемой?

А.Дюлак (1870–1955), ученик Пуанкаре, в 1909–1923 гг. развил так называемую *локальную теорию дифференциальных уравнений*. В 1923 г. он опубликовал большую статью [6] (больше сотни страниц), где дал положительный ответ на вопрос Пуанкаре. Доказательство Дюлака просуществовало более 60 лет. Однако в начале 1980-х гг. в нем был обнаружен серьезный пробел. Десять лет спустя два математика, Ю.С.Ильяшенко в России и Ж.Экаль во Франции, независимо опубликовали полное доказательство теоремы Дюлака [7; 8]. Обе работы большие и очень трудные. Сложность доказательства связана с детальным анализом поведения интегральных кривых в окрестности сингулярных точек. То, что эти доказательства получены независимо и существенно отличаются, позволяет надеяться, что длинная история доказательства гипотезы Пуанкаре заканчивается[2]. Но что бы ни случилось, эти конкретные и трудные вопросы стимулировали развитие теории дифференциальных уравнений.

3. Уравнение Лёвнера и Броуновское движение. Мой третий пример иллюстрирует тезис, что красивый математический результат, в течение определенного времени считавшийся незначительным или лежащим вне основного направления развития математики, может оказаться весьма существенным много лет спустя.

В 1923 г. К.Лёвнер (1893–1968), в то время чешский математик, изучал следующую проблему [9][3]. Рассмотрим диск $D \subset \mathbb{C}$ пару точек a, b, лежащих на границе ∂D. Лёвнер интересовался описанием множества кривых, соединяющих точки a и b и лежащих в D. Он дал такое описание в терминах уравнения, включающую так называемую *вынуждающую функцию* g_t. Уравнение (эволюционное уравнение Лёвнера):

$$\partial_t g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - u(t)}, \qquad (1),$$

где g_t – это конформное отображение $D \setminus \gamma[0,t] \to D$ и $u(t) = g_t(\gamma(t))$.

Иногда удобно заменить D на верхнюю полуплоскость $H \subset \mathbb{C}$.

Это уравнение считалось весьма специальным и пребывало в забвении многие годы[4].

Однако в 2000 г. израильским математиком О.Шраммом (1961–2008) уравнение Лёвнера было применено к проблеме фазовых переходов в стохастических системах [10]. Шрамм предложил изучать кривые $\gamma(t)$, где $u(t)$ – траектории броуновского движения вдоль ∂D (или ∂H) с коэффициентом диффузии κ: $u(t) = \sqrt{\kappa}B(t)$.

Рассматривая случайную функцию $u(t)$, мы получаем случайную кривую из a в b внутри D. Изучение вероятностного распределения такой кривой представляет огромный интерес. Соответствующее уравнение Шрамм предложил назвать *стохастическим уравнением Лёвнера*, для краткости – SLE_κ[5]. Замечательно, что эти уравнения при различных κ связаны в скэйлинговом пределе с хорошо известными двумерными решеточными моделями статистической физики, включая модель Изинга, решеточные перколяции и ряд других систем.

В наши дни теория стохастическим уравнением Лёвнера – одна из активно развивающихся междисциплинарных областей, включающих теорию вероятностей, комплексный анализ, статистическую физику и конформную теорию поля.

4. Двойственность в неабелевых группах и статистическая физика. В этом разделе я представлю последний пример из моей коллекции. Он иллюстрирует сложные взаимоотношения между математикой и физикой и близок к моим собственным исследованиям. Начнем с математики.

В начале 1930-х гг. Л.С.Понтрягин (1908–1988) и Э.Р. ван Кампен (1908–1942) построили теорию двойственности для абелевых групп. Основным результатом их теории была следующая теорема.

Пусть G – локально компактная абелева группа, а $\hat{G}$ – множество отображений: $\chi(G) \to \mathbb{C}$ *и операцией умножения*:

$\chi(g_1 \times g_2) = \chi(g_1) \times \chi(g_2)$.

Множество отображений образует группу $\hat{G}$ (называемую группой характеров или двойственной группой группы G). Тогда $\hat{\hat{G}}$ – группа, двойственная к $\hat{G}$, – совпадает с G.

Для математиков естественно обобщить эту теорему на неабелев случай. Это нетривиальная задача, так как в некоммутативном случае произведение двух неприводимых представлений не является неприводимым и поэтому множество $\hat{G}$ не образует группу. Тем не менее, эта проблема в некотором смысле была решена в 1938 г. японским математиком Т.Таннакой (1908–1986). Независимо она была также решена в 1941 г. М.Г.Крейном (1907–1989), который не знал о работе Таннаки. Статья Таннаки привлекла внимание Дж. фон Неймана (1903–1957), который указал на упомянутые трудности и отметил несколько важных свойств $\hat{G}$. Дуальный объект к некоммутативной группе является не группой, а коммутативным пространством, снабженным мультипликативной операцией. Статьи Таннаки и Крейна были в забвении почти 30 лет – до появления первых работ по некоммутативному интегрированию и кольцевым группам. Но настоящая ценность этих работ стала ясна позднее, в 1980-х гг., после создания теории квантовых групп. Квантовые группы тесно связаны с интегрируемыми квантовыми системами. Такие системы незадолго до этого появились в физике.

Теперь перейдем к физике. В статистической физике, а именно в теории фазовых переходов, с давних пор исследуются решеточные модели, являющиеся дискретными аппроксимациями различных физических систем. Одной из первых таких моделей была *одномерная модель Изинга* (1925). Э.Изинг (1900–1998), ученик В.Ленца (1888–1957), вычислил свободную энергию в своей модели. Обобщение его результата на двумерные решетки сопряжено с большими трудностями. Точное решение для свободной энергии в двумерной модели Изинга было получено только в 1944 г. Л.Онсагером (1903–1976) и до сих пор принадлежит к числу немногочисленных точных решений в решеточных моделях.

Столкнувшись с трудностями нахождения точных решений, физики пытались разрабатывать приближенные методы для нахождения точек фазовых переходов. В 1941 г. два физика, голландец Х.Крамерс (1894–1952) и швейцарец Г.Ваннье (1911–1983), предложили красивый метод нахождения точки фазового перехода в двумерной модели Изинга. Они построили преобразование, переводящее низкотемпературную фазу в высокотемпературную фазу. Позднее оно стало называться *двойственностью Крамерса–Ваннье*.

С математической точки зрения, это очень интересный объект: бесконечномерное расслоение со структурной группой $G = Z_2$. Двойственность Крамерса–Ваннье заключается в переходе к двойственной по Пуанкаре решетке и к замене группы G – дуальной $\hat{G}$; в данном случае совпадающей с $G = Z_2$.

Позднее физики обобщили KW-двойственность на модели Поттса с Z_n-симметрией.

В конце 1970-х гг., в связи с проблемами квантовой теории поля (конфаймент кварков), физики стали интересоваться обобщениями KW-двойственности на неабелевы группы.

В это время появилось несколько статей относящихся к построению KW-двойственности для некоторых неабелевых групп. Я также интересовался этой проблемой [11]. В это время ни А.Б.Замолодчиков, ни я, ни другие физики не имели представления о работах Таннаки и Крейна.

Спустя 25 лет В.М.Бухштабер и я построили KW-двойственность для конечных и компактных некоммутативных групп, основываясь на идеях, появившихся незадолго до этого квантовых групп [12; 13]. Но только позднее мы узнали о работах Таннаки и Крейна.

Хотя наши результаты не покрываются работами Таннаки и Крейна, очевидно, что ранняя осведомленность с их идеями позволила бы закончить нашу работу намного раньше.

Выполняя нашу работу, мы обнаружили интересные связи со старой и тоже практически забытой работой Фробениуса [14]. Ф.Г.Фробениус (1849–1917) – один из создателей теории представлений групп (в основном конечных групп). Его знаменитые теоремы о неприводимых представлениях групп изложены во всех учебниках по теории представлений. Но одна из его работ, содержащая массу интереснейших идей, оказалась забытой на десятилетия. Например, Фробениус ввел для некоммутативных групп понятие обобщенных характеров, позволяющих определить группу, так же, как и в коммутативном случае. Хорошо известно, что существуют некоммутативные группы с одной и той же группой характеров, например, группа единичных кватернионов Q и диэдральная группа D_2, обе порядка 8. Другое интересное понятие, введенное в той же статье, – некоммутативный детерминант, обобщение коммутативного детерминанта, определенное ранее Р.Дедекиндом (1831–1916). Этот результат Фробениуса был недавно применен в теории графов [15].

Одно из возможных объяснений судьбы, постигшей работу Фробениуса, состоит в том, что его последователи И.Шур (1875–1941), В.Бернсайд (1852–1927) и Э.Нётер (1882–1935), нашли новый и более удобный метод развития теории представлений. Поэтому более сложный и искусственный метод, предложенный в работе Фробениуса, оказался преданным забвению на многие годы.

Другие редко цитируемые работы Фробениуса [16; 17], посвященные представлениям симметрических групп (см., например: [18]), также заслуживают тщательного изучения. В этих работах он развил метод, параллельный хорошо известным таблицам Юнга. Его метод был недавно переоткрыт и применен в теории представлений бесконечных симметрических групп $S(\infty)$ и в теории случайных поверхностей.

Подобные примеры можно найти в истории современных исследований теории узлов, голоморфной динамики, в так называемой *фазе Берри* в квантовой механике [19] и ряде других областей.

Мне хотелось показать, что математика и ее история образует единый предмет, как растущее дерево со многими ветвями. Некоторые из них временно игнорируются или забываются, но оказываются востребованными спустя многие годы.

Благодарности. Эта статья представляет собой существенно расширенный вариант доклада, прочитанного на Конгрессе по истории науки (Будапешт, июнь 2009 г.). Я благодарен Я.Вандулакису, организовавшему специальную сессию на Конгрессе и предложившему написать статью. В окончательном виде работа была закончена во время моего визита в *Institut des Hautes Étude Scientifiques* (Бюр-сюр-Иветт, Франция). Я благодарен Институту за поддержку. Советы и замечания П.Картье, М.Л.Громова и Р.Кернера были очень полезны при работе над статьей.

Примечания

[1] Любопытно, что этот поразительный результат был напечатан в журнале «Математические заметки» [4], в разделе «Краткие сообщения» и занял всего две страницы.

[2] Лучший способ убедиться, что мы имеем окончательное решение проблемы Дюлака, – попросить авторов этих доказательств проверить доказательство коллеги, то есть осуществить «перекрестное опыление».

[3] Позднее, бежав от нацистов и став профессором Стенфордского университета, он превратился в Charles Loewner.

[4] История, связанная с судьбой работы Лёвнера не столь проста. Его работа [9] оказалась важной для теории аналитических функций. Лёвнер применил свое уравнение для решения одного частного случая известной проблемы Л.Бибербаха (1886–1982).

В общем виде проблема Бибербаха была решена только в 1985 г. Л. де Бранжем использовавшим совершенно другой подход. Но спустя несколько лет К.Фицджеральд и К.Померанке нашли принципиально новое доказательство теоремы де Бранжа, применив уравнение Лёвнера. Тем не менее, работа Лёвнера была известна лишь специалистам в классических разделах комплексного анализа.

[5] Теперь аббревиатура SLE означает *Schramm–Löwner equation* или *Schramm–Löwner evolution*. Это сокращение стало общеупотребительным, в память о Шрамме, трагически погибшем в Скалистых горах на пике своей блестящей карьеры.

Список литературы

1. *Dyson F.* Missed opportunities // Bulletin of the American Mathematical Socciety. 1972. Vol.78. P.635–652. (Русский перевод: *Дайсон Ф.Дж.* Упущенные возможности (перевод и примечания *М.И.Монастырского*) // Успехи математических наук. 1980. Т.35. Вып.1(211) С.171–191.)
2. *Monastyrsky M.* Riemann, Topology, and Physics (second edition). Boston: Birkhäuser, 1999.
3. *Монастырский М.И.* Бернхард Риман. Топология. Физика (второе издание). М., 1999.
4. *Болибрух А.А.* О проблеме Римана–Гильберта на комплексной проективной прямой // Математические заметки. 1989. Т.46. Вып.3. С.118–120.
5. *Bolibruch A.* Hilbert's twenty-first problem for Fuchsian systems // Developments in Mathematics: the Moscow School / Eds. *V.Arnold, M.Monastyrsky*. London: Chapman & Hall, 1993. P.54–99.
6. *Dulac H.* Sur la cycles limites // Bulletin de la Société mathématique de France. 1923. Vol.51. P.45–188. (Русский перевод: *Дюлак Г.* О предельных циклах. М, 1980.)
7. *Écalle J.* Finitude des cycles-limites et accéléro-sommation de l'application de retour // Lecture Notes in Mathematics. 1990. Vol.1455. P.74–159.
8. *Ilyashenko Yu.S.* Finiteness theorems for limit cycles // Translation of mathematical Monographs. Providence: The American Mathematical Society, 1991. Vol.94.
9. *Löwner K.* Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. // Mathematische Annallen. 1923. Bd.89. S.103–121.
10. *Schramm O.* Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spunning trees, Israel Journal of Mathematics. 2000. Vol.118. P.221–288.
11. *Zamolodchikov A.B., Monastyrsky M.I.* Kramers–Wannier transformation for spin systems // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1979. Vol.50. №1. P.167–172.
12. *Buchstaber V.M., Monastyrsky M.I.* Generalized Kramers–Wannier Duality for spin systems with non-commutative symmetry // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2003. Vol.36. №28. P.7679–7692.
13. *Monastyrsky M.* Kramers–Wannier Duality for Non-abelian Lattice Spin Systems and Hecke Surfaces // Contemporary Mathematics. Providence: The American Mathematical Society, 2011. Vol.554. P.127–145.
14. *Frobenius G.* Über die Primfaktoren der Gruppendeterminante // Sitzungsberiche der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalish-Mathematische Klass. Berlin, 1896. S.1343–1382.

15. *Murty M.R.* Ramanujan Graphs // Journal of the Ramanujan Mathematical Society. 2003. Vol.18. №1. P.1–20.
16. *Frobenius G.* Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe // Sitzungsberiche der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalish-Mathematische Klass. Berlin, 1900. S.516–534.
17. *Frobenius G.* Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe // Sitzungsberiche der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalish-Mathematische Klass. Berlin, 1903. S.328–358.
18. *Weyl H.* The Classical Groups: Their Invariants and Representations. Princeton: Princeton University Press, 1939. (Русский перевод: *Вейль Г.* Классические группы: их инварианты и представления. М., 1947.)
19. *Монастырский М.И.* В.С.Игнатовский и предыстория открытия топологических инвариантов в квантовой механике // Институт истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова. Годичная научная конференция, 1998. М., 1999. С.424–426.

АРИСТОТЕЛЕВО НЕОБХОДИМОЕ СЛЕДОВАНИЕ

Н.П.Брусенцов

Парадоксальность материальной импликации, обретенная в условиях двузначности отношением необходимого следования, и тщетность всех попыток исправить положение изобретением строгих, сильных, релевантных, паранепротиворечивых и прочих импликаций неопровержимо свидетельствуют о неадекватности двузначной логики. Трехзначность присуща следованию, определенному в силлогистике Аристотеля, против которого предназначался вымышленный стоиками «закон» исключенного третьего. Вот оно, это определение: «...когда два [объекта] относятся друг к другу так, что если есть один, необходимо есть и второй, тогда, если нет второго, не будет и первого, однако если второй есть, то не необходимо, чтобы был первый. Но невозможно, чтобы одно и то же было необходимо и когда другое есть, и когда его нет» [1, с.215].

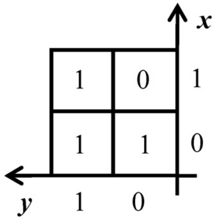
Обозначив «первый» термином x, «второй» – термином y, нельзя не усмотреть в определяемом контрапозитивного отношения следования y из x:

$$\mathrm{A}xy = (x \Rightarrow y)(y' \Rightarrow x').$$

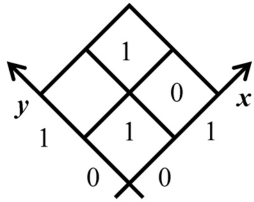
На трехзначность этого отношения указывают слова «однако если второй есть, то не необходимо, чтобы был первый», то есть при соблюденности $\mathrm{A}xy$ обратное отношение $\mathrm{A}yx$ возможно (не исключено), но не необходимо. Оно необходимо удовлетворяется лишь при соблюденности тождества $x \equiv y$, то есть не невозможно, но и не необходимо, а только возможно.

С учетом трехзначности следования материальная импликация естественно избавляется от парадоксов. Значение «1», приписанное ей при $x = 0$, $y = 1$ из-за отсутствия в двузначной логике третьего, надо заменить символизирующим возможность, то есть не 0 и не 1.

На диаграмме Кэррола [2] клетка с таким значением остается пустой − может быть 0, может быть 1. Полноценное отображение на ней трехзначного непарадоксального отношения следования Axy получается из отображения материальной импликации опустошением содержащей «1» клетки $x'y$.



Материальная импликация $x \to y$



Аристотелево необходимое следование $x \Rightarrow y$

Алгебраически отношение следования $x \Rightarrow y$ представимо нечетким множеством двухтерминных дизъюнкций $\mathrm{V}xy\mathrm{V}'xy'\mathrm{V}x'y'$ либо соответствующим нечетким классом $xy \vee -xy' \vee x'y'$, тогда как в Универсуме Аристотеля (УА), предполагающем сосуществование $\mathrm{V}x\mathrm{V}x'\mathrm{V}y\mathrm{V}y'$ всех рассматриваемых терминов и их антиподов [3], следование $x \Rightarrow y$ сводится к несуществованию xy', то есть к $\mathrm{V}'xy'$, методом индексов Кэррола выразимому как xy'_0.

В логике Кэррола следование $x \Rightarrow y$ представлено конъюнкцией $x_1 \wedge xy'_0$, в которой недостает члена y'_1, предотвращающего общезначимость y. Таким образом, устранен только один из парадоксов материальной импликации. Непарадоксальна же трехзначная конъюнкция $x_1 \wedge xy'_0 \wedge y'_1$. Черная фишка в клетке xy' кэрроловой диаграммы «сталкивает» не одну, а обе «сидящие» на стенках x и y' красные фишки в соседние клетки xy и $x'y'$, порождая $xy_1 \wedge xy'_0 \wedge x'y'_1$. Четвертая $x'y$-клетка диаграммы остается при этом пустой.

Категорически извратил аристотелево следование С.К.Клини, истолковав отношение «Все x суть y» как удовлетворяющееся при несуществовании x, ибо «смысл этот проще и потому полезнее» [4, с.169]. В результате его следование обрело парадоксы материальной импликации. Кэррол сказал бы: «Трехзначная реальность стала двузначной химерой». Где же полезность?

В условиях двузначности неосуществимо умозаключение. Обученные двузначной логике, мы практически пользуемся силлогистикой Аристотеля с ее «все», «некоторые», «все не», то есть «необходимо», «возможно», «невозможно». Возможность (ни «да» / ни «нет», может быть «да» / может быть «нет») − как раз то диалектическое третье, которого недостает двузначной логике.

Список литературы

1. *Аристотель.* Сочинения в 4-х томах. М., 1978. Т.2.
2. *Кэррол Л.* Символическая логика / / *Кэррол Льюис*. История с узелками / Пер. с англ. *Ю.А.Данилова*. М., 1973.
3. *Брусенцов Н.П.* Аристотелева силлогистика и гераклитово сосуществование противоположностей / / Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2009. Вып.13(48). С.270–273.
4. *Клини С.К.* Математическая логика. М., 1973.

ТРЕХЗНАЧНОЕ ОБОБЩЕНИЕ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ. ПРЕОДОЛЕНИЕ НЕСОВЕРШЕННОСТИ ДНФ ТРЕХЗНАЧНЫМ ОБОБЩЕНИЕМ ЛОГИКИ

Н.П.Брусенцов

Двузначная булева алгебра недостаточна для отображения необходимого следования $x \Rightarrow y$ – важнейшего логического отношения, представленного в естественном языке словосочетаниями: «Все x суть y», «Всем x необходимо присуще y», «Сущность y целиком содержится в сущности x», «Класс x является подклассом класса y, класс y' – подклассом класса x'». Посредством символа эквивалентности «=» это отношение представимо рекурсией $x = xy$. Однако в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ) представление его неизбежно вырождается либо в эквивалентность $(x = y) \equiv xy \vee x'y'$, либо в парадоксальную «материальную импликацию» $(x \supset y) \equiv xy \vee x'y \vee x'y'$.

Неадекватность булевой алгебры обусловлена тем, что умалчивание членов ДНФ означает в ней исключенность (несуществование) их, тогда как в действительности наряду с исключенностью имеет место несущественность члена для отображаемого отношения. Так, в ДНФ-выражении отношения следования $x \Rightarrow y$ член xy' необходимо исключен, а член $x'y$ игнорируется как несущественный. Если его исключить, возникнет тождество $(x = y)$, а если сохранить, то следование превратится в «материальную импликацию» $(x \supset y)$.

Ясно, что несущественность надо отличать от несуществования-исключенности. Кстати, в элементарных конъюнкциях это различие воплощено. Например, термин y в конъюнкции xyz утверждаем, в $xy'z$ – отрицаем, а в xz – умалчиваем как несущественный, не исключен, но и не необходим (возможен).

Аналогично, в ДНФ умалчиваться должны только несущественные члены, а исключенность надо обозначать специальным символом, например, кэрроловым индексом несуществования «0» [1, с.255].

Отношение необходимого следования $(x \Rightarrow y)$ в обобщенной таким образом булевой алгебре представимо в трехзначной ДНФ, выражением $xy \vee xy'_0 \vee x'y'$, в котором член $x'y$ умалчивается как несущественный.

Материальная импликация $(x \supset y)$ выражается этой же ДНФ, но без умолчания члена $x'y$:

$$(x \supset y) \equiv xy \vee xy'_0 \vee x'y \vee x'y' \equiv \neg xy' \equiv x' \vee y \equiv (x \Rightarrow y) \vee x'y.$$

В кэрроловом определении следования $(x \Rightarrow y) \equiv x_1 \wedge xy'_0$ недостает члена y'_1, без которого отношение оказывается соблюденным при общезначимом y независимо от x, поскольку xy'_0 у Кэррола означает несуществование xy' [1, с.256]. Полноценным выражением будет $(x \Rightarrow y) \equiv x_1 \wedge xy'_0 \wedge y'_1$.

Но для реальных, сосуществующих с их противоположностями терминов x, x', y, y' кэрролово несуществование (nullity) xy'_0 равнозначно несовместимости x с y', обусловленной тем, что в x содержится y, а в y' содержится x', то есть $x = xy$, $y' = x'y'$. Таким образом, в реальном универсуме Аристотеля кэрролово xy'_0 вынуждает следование $(x \Rightarrow y)\,(y' \Rightarrow x')$.

Взаимосвязанность терминов порождается тем, что в сущности одного содержится сущность другого либо ее противоположность. Если $x = xy$, то есть в x содержится y, то соблюдена xy'_0 – несовместимость x с y', означающая также $y' = x'y'$. Поэтому $xy'_0 \equiv (x \Rightarrow y)\,(y' \Rightarrow x')$ – «Все x суть y», «Все y' суть x'», из x необходимо следует y, из y' необходимо следует x', тогда как $\neg xy' \equiv x' \vee y \equiv (x \supset y)\,(y' \supset x')$ – «материальная импликация», соблюденная при существовании y независимо от x и при несуществовании x независимо от y.

Наглядным примером является взаимосвязанность квадратности с прямоугольностью и равносторонностью четырехугольника. Все квадраты суть прямоугольники и ромбы, но ни прямоугольник, ни ромб еще не есть квадрат. Прямоугольность и равносторонность целиком содержатся в квадратности. Но не все прямоугольники и ромбы квадратны, квадратность не сказывается о них. Наоборот, прямоугольность и равносторонность необходимо присущи квадратам, сказываются обо всех них.

Аристотель ошибся, полагая что «одно целиком содержится в другом» означает то же, что «другое сказывается обо всем первом» (Первая аналитика, 24b26) [2, с.120]. Но диалектическая трехзначность его силлогистики вопреки общепринятой догме исключенного третьего безупречна.

Список литературы

1. *Кэррол Л.* Символическая логика // *Кэррол Льюис.* История с узелками / Пер. с англ. *Ю.А.Данилова*. М., 1973.
2. *Аристотель.* Сочинения в 4-х томах. М., 1978. Т.2.

ТЕОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИСТОРИИ НАУКИ НА ПРИМЕРЕ ПРОБЛЕМЫ НЕФРОТОКСИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ РЕНТГЕНОКОНТРАСТНЫХ ВЕЩЕСТВ

В.Н.Тутубалин, Ю.М.Барабашева, Г.Н.Девяткова, Е.Г.Угер

Введение: теологический подход. К XX в. достижения науки стали столь значимы, а влияние науки настолько всеобщим, что осмысление феномена науки, критический анализ научного знания превратились в мощное интеллектуальное течение. Это течение условно можно разделить на два потока – историю науки и философию науки. Историки науки сосредоточились на изучении этапов и особенностей развития науки, анализе возникновения научного знания, на фактах. Представители философии науки занялись построением обоснования научного знания, как на уровне теории, так и эксперимента. Работа историков и философов науки взаимосвязана: изменения в философии науки обуславливают трансформацию подходов, используемых в области истории науки, и наоборот, смена акцентов в историко-научных исследованиях не может не вызывать концептуальных сдвигов в философии науки.

Закат классического позитивизма, как его философской, так и историко-научной частей, заключался в том, что на многих остроумно подобранных и блестяще описанных примерах философы науки показали, что опора на эксперимент сродни опоре на безнадежно хромую ногу. У Фейерабенда [1] можно прочитать, как Галилей с друзьями, интересующимися наукой, собрались вечером, чтобы ночь посвятить наблюдениям неба с помощью галилеева телескопа. Так вот: эти друзья не видели в телескоп того, что видел Галилей: ни гор на Луне, ни спутников Юпитера, ни колец Сатурна... Научный эксперимент, оказывается, не имеет и тени объективности. Что же касается теории, то история понятий типа флогистона, эфира и т.п., которые вообще исчезли из науки с течением времени, неутешительно говорит и о теоретической ноге науки, тоже оказавшейся «хромой». В итоге, был поставлен вопрос о том, какое обоснование науки может заменить классическое «сведение» теории к экспериментальным данным, и что в науке способно занять место эксперимента в качестве обоснования истинности научного знания (в том числе, возникли сомнения, можно ли вообще к научному знанию применить понятие истины [2]). В общем, философы и историки науки показали, что наука в целом несостоятельна, *если основы науки анализировать с точки зрения логической и рациональной.*

Рационализм в философии науки сдает свои позиции. Но при этом, что удивительно, не уменьшается вера в науку и непреложность ее результатов. Ведь спорить с тем, что наука кое-что узнала, как-то неудобно, сидя перед монитором простейшего современного компьютера, возможности которого (скажем, в смысле быстродействия и памяти) несравнимо выше, чем у БЭСМ-6, которая в свое время требовала для своего размещения и охлаждения целого машинного зала.

В каких исторических данных нуждается новое обоснование науки? Прежняя философия науки использовала данные из классической истории науки, говорящей о знаниях минувших времен. Она пыталась рационально интерпретировать классическую историю, выявить в ней экспериментальные факты, ранее полученные результаты. Однако вера в непреложность научных знаний нуждается в современных результатах, в том, что происходит в науке «здесь-сейчас». Такая смена предмета исследования, переход от классической истории науки к современной истории науки, к «свежим исследованиям», обусловлена тем, что уверенность ученого в том, что он способен сделать нечто новое и непреложное, обязательно связана с теми результатами, которые только что получены или которые предстоит получить, которые еще не потеряли налета убежденности ученого-творца в том, чту было им получено в некотором интеллектуальном прозрении (откровении).

Обоснование науки движется в сторону не иррационализма (как следовало бы ожидать), а чего-то более значительного, большего. Имя этого большего уже давно существует, со средних веков убежищем от иррационализма в условиях тщеты попыток рационализма объяснить существующее была теология. *Для современной науки необходима своя теология* (схема реализации способности усматривать и контролировать истину на основе озарения), которую можно назвать «теологией разума». Такая теология способна возродить уверенность в непреложности научных результатов, не опираясь на редукционизм (теории к эксперименту), она апеллирует к современной науке, расширяя горизонт истории науки, доводя историю до современности.

Тем самым, мы предполагаем, что в истории и философии науки становится необходимым формирование «*теологического направления*» (соответствующего подхода в философии и истории науки), абрис которого на некоторых примерах мы представим в настоящей статье.

Особенность теологического подхода состоит в том, что он должен начинаться со всеобъемлющей картины мира. Но данная статья посвящена некоторым конкретным вопросам истории и философии науки. В ней нет места для всеобъемлющей картины, и потому мы отсылаем заинтересованного читателя к интернет-публикации [3]. Здесь же заметим кратко, что при рассмотрении конкретных научно-исторических вопросов теологический подход сводится к следующему.

Познание начинается с того, что отдельный человек, в частности ученый, обладает глупостью, которую можно вежливо называть «недостаточной осведомленностью». Этот недостаток присущ всем, это наш первородный грех, в чем-то напоминающий первородный грех в теологии христианства. Он выявляется, конечно, не при сравнении разума и понимания отдельного ученого с тем, что известно Высшему Разуму (понятно, что такое сравнение нам недоступно), но хотя бы при сравнении того, что знает и думает этот отдельный ученый с тем, что вообще по рассматриваемому поводу известно в науке. Исторические примеры показывают, что нет ученого, который бы заранее знал все и не делал ошибок. Поэтому неизбежность «недостаточной осведомленности» исследователя следует положить в основу теологического подхода.

Недостаточная осведомленность может быть отчасти искуплена озарением, в котором положение вещей открывается исследователю как бы в откровении, акте высокого просветления. Такое просветление можно объяснять разными способами, в том числе как вмешательство некоего Высшего Разума, который иногда позволяет нам что-нибудь правильно узнать.

Но нам хочется еще и убедиться в том, что мы что-то действительно правильно узнали, мы хотим отличить просветление от самообмана. Такое отличие возможно тогда, когда появляется хорошее или даже очень хорошее соответствие результатов эксперимента с теми теоретическими предвидениями, которые ниспосланы нам в качестве откровения. Можно сказать, что Высший Разум посылает нам чудо (если, конечно, захочет): эксперимент подтверждает теорию.

Например, результаты экспериментов Г.Менделя по расщеплению признаков находятся в слишком хорошем соответствии с представлением о чисто случайном сочетании гамет, несущих доминантные или рецессивные аллели каких-то генов (по этому поводу см., например: [4])[1]. Слишком хорошее согласие с экспериментами Менделя было замечено в самом начале XX в. (когда из забвения была извлечена работа Менделя) и неоднократно подтверждено. С другой стороны, за весь XX в. наука не придумала какого-либо механизма сочетания гамет, отличного от чисто случайного, который позволил бы приличным образом объяснить слишком хорошее совпадение теории и эксперимента у Менделя. С точки зрения позитивизма, напрашивается вывод: сей трудолюбивый монах частично отбрасывал экспериментальные результаты, которые хуже других согласовывались с теорией. Однако в тексте своей работы Мендель начинает с того, что запрещает подобную ложь, подчеркивая, что результаты всех экспериментов должны приводиться полностью. Так может быть, не Мендель лгал, а мы в данном случае имеем чудо подтверждения теории?

В применении к историко-научным исследованиям отсюда вытекает, что предметом каждого такого исследования должен быть конкретный пример взаимодействия между исходным незнанием (неосведомленностью), озарением (откровением) и чудесным ниспосланием исследователю инструмента, помогающего отличить откровение от самообмана.

Данная работа написана по следующему плану. Сначала на научно-популярном уровне описывается конкретная медицинская проблема. Для ее наилучшего возможного решения используются различные методы, в том числе, методы математической статистики. В процессе их применения в широком масштабе проявляется грех неосведомленности, что и излагается (с некоторым удивлением по поводу явного регресса в понимании статистических методов, который наблюдается сейчас в американской медицинской статистике, в сравнении с тем, что было лет 50–60 назад). Но затем все-таки следует частичное «искупление», которое выявляется при сопоставлении с независимыми фактическими данными.

Постановка задачи: рентгеноконтрастные вещества и вероятностно-статистические методы. У живых существ, в частности, человека, не все необходимые для жизни функции воплощены самым совершенным образом. Складывается впечатление, что Высший Разум не добивался оптимального выполнения каждой функции. Отсюда огромное множество нарушений, которые мы называем болезнями.

Поскольку медицинский диагноз – понятие сакральное (в терминах теологического подхода), то достаточно очевидно, что невозможна полная замена врача-диагноста вычислительной машиной. Однако для вспомогательных диагностических исследований (например, рентгеновской компьютерной томографии) вычислительные машины оказываются весьма полезны. Из многих рентгеновских снимков в разных проекциях томографическое изображение получается только после компьютерной обработки. Но многие ткани и органы человеческого тела имеют примерно равный коэффициент поглощения рентгеновских лучей, так что на томографических срезах нужные подробности видны плохо и требуется применение дополнительного контрастирования путем введения специальных растворов. В тех случаях, когда речь идет о заболеваниях кровеносных сосудов, вообще можно обойтись без компьютерной томографии, если ввести в эти сосуды рентгеноконтрастные вещества (РКВ) и сделать рентгеновские снимки в небольшом количестве проекций. Такое исследование называется *ангиографией*, а соответствующее исследование коронарных сосудов сердца называется *коронарографией*.

Рентгеноконтрастные вещества представляют собой специально подобранные в результате многолетних научных усилий органические молекулы, к которым присоединены атомы йода. Эти атомы и осуществляют дополнительное поглощение рентгеновских лучей. Без предварительной коронарографии невозможны, например, операции на сердце типа аортокоронарного шунтирования, которое позволяет обойти пораженный склерозом участок коронарной артерии. Начиная с 1979 г., в практику операций на сердечных сосудах вошла несравненно менее травматичная операция, которая носит название *ангиопластики*. Через бедренную артерию в сосуды сердца вводятся специальные катетеры и другие инструменты, которыми можно расширить суженные артерии и даже установить в места сужений специальные приспособления – *стенты*. (Полное название такой операции – *ангиопластика со стентированием*.) Эту операцию можно делать только под рентгеновским контролем, многократно и понемногу вводя в сосуды сердца рентгеноконтрастное вещество. При этом общее количество введенного РКВ может быть довольно большим – в отдельных сложных случаях порядка литра (общее количество йода в виде относительно нетоксичного соединения при этом составит около 300 г).

Одна из проблем состоит в том, что эта нетоксичность, действительно, лишь относительная. РКВ выводятся из кровеносной системы путем фильтрации в почечных канальцах. Иногда нагрузка на почки оказывается чрезмерной, что приводит к их повреждению в той или иной степени. Например, в работе [5] приводятся следующие данные. В 2000 г. в США было выполнено 1 790 000 катетеризаций сердца (с целью ангиографии и/или ангиопластики). Из них около 59 000 расцениваются как не вполне благополучные для почек (по критерию, который будет описан ниже); в 4 600 случаях потребовалась на какое-то время заместительная терапия (гемодиализ). Последнее означает, что в результате нефротоксического действия РКВ почки пациента стали (постоянно или временно) неработоспособными. Число смертных случаев, приписываемых токсическому действию контраста на почки (которые произошли за время в течение года после введения РКВ), оценивается в 7 000. Приведенные данные еще раз подтверждают, насколько важна проблема отбора наиболее подходящего РКВ из имеющегося ассортимента веществ.

Любое применение даже классического фармацевтического средства таит некоторую опасность аллергической реакции, а кроме того, вполне может оказаться неэффективным. Правильно будет сказать, что любое обращение за медицинской помощью представляет собой эксперимент с заранее не вполне ясным исходом. И это действительно так, пока мы говорим об отработанных медицинских методиках. А как быть при разработке новых методик – как, в частности, выбрать наилучший вариант методики из нескольких предложенных? Конечно, речь может идти только об эксперименте (то есть клинических испытаниях на людях).

В планировании таких экспериментов возникает аналогия со средневековой концепцией «суда Божьего», когда спор между двумя рыцарями, например из-за недвижимости, разрешался поединком. В поединке двух примерно равных бойцов достаточно было, чтобы кто-нибудь из них сделал маленькую ошибку, и тогда он погиб.

Здесь, очевидно, важнейшую роль играют представления о случайности и понятие вероятности.

Два фармацевтических препарата обычно сравнивают по двум показателям – по эффективности и безопасности. Поскольку эффективность РКВ определяется содержанием йода, то за счет выбора соответствующим образом скорректированных доз эффективность препаратов можно сделать одинаковой; остается только показатель безопасности. Как показывает медицинская практика, с препаратами не бывает так, что один всегда (то есть у всех больных) вызывает некое определенное осложнение, а другой – никогда. Риск при применении каждого препарата измеряется *вероятностью осложнения*. Согласимся, что это похоже на ситуацию с судебным поединком рыцарей.

В рамках философии науки (позитивистский подход) вероятность события связывается с его частотной повторяемостью в эксперименте. Однако когда мы начинаем объяснять, что нужно представить себе длинный ряд экспериментов, в каждом из которых может наступить или не наступить соответствующее событие, мы неизбежно должны сказать, что условия экспериментов *не меняются*. Но если мы контролируем и сохраняем неизменными *все* условия эксперимента, то все эксперименты должны кончиться одинаково (то есть событие должно либо наступить во всех экспериментах, либо не наступить ни в одном из них). Если же мы контролируем не все условия эксперимента, то как мы можем надеяться на то, что они остаются одинаковыми?

В рамках же рассматриваемого теологического подхода *вероятность – это понятие сакральное*. Людям присуща способность наделять реально существующие явления некой идеальной сущностью, которую можно назвать, например, «душой». Тогда естественно предположить, что *вероятность осложнения при применении препарата является «душой» его способности вызывать реальные осложнения*. Она принадлежит некоему идеальному миру и сама по себе не наблюдается (как и все сущности идеального мира). Вместо вероятности наблюдается частота наступления события в некотором (желательно – в большом) количестве опытов. Так как же сравнить вероятности осложнения для двух (или нескольких) различных препаратов? Нужно создать две (или, соответственно, несколько) достаточно больших групп пациентов и на каждой группе испытывать один из препаратов. При этом группы должны быть в каком-то смысле одинаковыми: нельзя один препарат испытывать на группе более тяжелых больных, а другой – на группе более легких. Для создания таких групп употребляется вариант «суда Божьего», который называется *двойным слепым рандомизированным методом* («доказательная» медицина приемлет только этот метод). В случае двух препаратов (в частности, сравнения исследуемого препарата с плацебо) метод состоит в том, что все испытуемые случайным образом делятся на две группы («рандомизация»). Одна группа получает один препарат, другая – другой, но «двойной слепой» метод требует, чтобы до окончания эксперимента ни пациенты, ни лечащие их врачи не знали, какой именно препарат получает каждый больной. Это должно снять субъективную оценку препарата со стороны врача и, возможно, пациента.

После окончания эксперимента становятся известными частоты событий, скажем, частоты осложнений в каждой группе. На основании этих реальных частот и предстоит сделать вывод о вероятностях, то есть о сакральных свойствах реальных объектов. Такими выводами занимается математическая статистика, всегда основанная на дополнительных предположениях об исходных свойствах таких объектов. Действительно, если бы в каждой из двух групп был всего один испытуемый, то ничего не надо было бы предполагать о вероятностях наступления осложнения. Но, с другой стороны, понятно, что при таком объеме экспериментального материала (всего двое испытуемых) никаких заслуживающих внимания выводов получить нельзя. Если же испытуемых в каждой группе много, то надо что-то предположить о том, как комбинируются результаты для разных испытуемых. Практически единственным вариантом является предположение о том, что для всех испытуемых каждой группы *вероятность осложнения одна и та же*, а результаты для различных испытуемых *получаются независимо*.

Это предположение всегда и делается по умолчанию. Заметим, что исходные предположения ни в какой науке непосредственной проверки не допускают: могут проверяться лишь какие-то выводы из них.

Например, пусть после окончания эксперимента оказалось, что частота осложнения в первой группе h_1 оказалась больше, чем во второй группе h_2. Можно ли сделать вывод, что и для идеальных сущностей – вероятностей p_1 и p_2 – тоже выполняется соотношение $p_1 > p_2$, а главное – насколько надежен будет такой вывод? Математическая статистика в каком-то смысле отвечает на этот вопрос: это так называемая «задача о проверке гипотезы $p_1 = p_2$», но оценку надежности ответа производит не применительно к данным реально произведенного единственного эксперимента (по сравнению частот осложнений в двух группах), а в терминах множества (ансамбля) таких экспериментов, имеющих те же статистические свойства, что и проведенный единственный эксперимент. Примысливание к единственному проведенному эксперименту сакрального ансамбля похожих экспериментов совершенно неизбежно: иначе нельзя объяснить основные понятия математической статистики.

Не правда ли, эти процедуры напоминают процедуры птицегадания в Древнем Риме? Сакральные представления о птицегадании в Древнем Риме и современные сакральные представления о вероятностях и доверительных интервалах требуют в каждом случае своих специалистов. «Первородный грех» – ограниченность человеческих способностей – не позволит ни врачу толком разобраться в математической статистике, ни математику ввести катетер в сердце больного. Нельзя владеть всеми методами сразу.

Но самое интересное (как будет показано ниже) заключается в том, что вся эта двойная слепая рандомизация вместе с математической статистикой все же не позволяет в ряде важных случаев получить достаточно надежный ответ на некоторые существенные вопросы. Попросту говоря, в одних исследованиях положительное влияние определенного препарата оказывается статистически значимым, а в других не только не значимо, но и отсутствует совершенно.

Понятие контрастиндуцированной нефропатии (КИН). Поскольку сравнение рисков применения различных контрастных веществ может происходить только в вероятностном контексте, необходим формальный критерий, по которому можно было бы судить, имело место или нет токсическое воздействие контраста на почки данного больного. Относительно доступной является оценка фильтрующей способности почечных канальцев. В процессе метаболизма белков в организме образуется вещество, называемое *креатинином*, которое фильтруется в почечных канальцах без его последующей реабсорбции. Не представляет сложности лабораторное определение концентрации креатинина в плазме крови (обозначается SCr). Скорость фильтрации креатинина при неизменных канальцах пропорциональна SCr. Если допустить, что его продукция в организме остается постоянной до и после применения РКВ, то повышение концентрации креатинина в сыворотке крови (обозначается ΔSCr) эквивалентно соответствующему сокращению площади мембран почечных канальцев. Вопрос о том, пострадали или нет почки больного в результате применения РКВ сводят к повышению SCr через двое–трое суток после вмешательства по отношению к тому значению, которое было до вмешательства. На практике выработались общепринятые числовые границы. А именно, при формализации понятия контрастиндуцированной нефропатии (КИН) считают, что это осложнение наступило, если ΔSCr оказалось более 25% от базового значения (до вмешательства) и/или сама величина ΔSCr оказалась больше, чем 44,2 мкМоль/л. Возникает противоречие между сакральным и формальным пониманием КИН. Врач обычно имеет в виду сакральный смысл: нефропатия – это серьезное осложнение, угрожающее жизни больного. А формальное повышение концентрации креатинина выше указанных пределов в большинстве случаев является преходящим и не представляет серьезной опасности. Дело в том, что серьезные случаи контрастиндуцированной нефропатии встречаются с малой вероятностью, которую очень трудно оценивать количественно (требуется большой объем выборки). Поэтому для возможности статистических исследований пользуются фактически суррогатом серьезного осложнения, который встречается значительно чаще. Например, выбор РКВ из имеющегося ассортимента производится с учетом того, какие вещества реже вызывают КИН в формальном понимании.

Новейший Органон. В XVII в., на заре развития науки Нового времени, были написаны «Новый Органон» Ф.Бэкона и «Рассуждение о методе» Р.Декарта. Авторы этих трудов стремились дать свод правил, придерживаясь которых исследователь мог бы гарантировать верность своих научных выводов. Современное образование ставит примерно такую же задачу.

Как римских патрициев полагалось с детства обучать искусству птицегадания, так и будущих научных работников полагается обучать понятиям вероятности, уровней значимости, p-значений и доверительных интервалов если не с детских, то, во всяком случае, со студенческих лет. В образование, таким образом, входит математика с ее сакральным содержанием. Надо сказать, что математика сакральна в целом: в ней нет никаких реальных явлений; реальность бывает только в приложениях математики. Это несет с собой большую опасность для науки перейти на чисто схоластический путь развития. Что имеется в виду?

В средние века в монастырских скрипториях монахи переписывали книги, в том числе, бестиарии, то есть энциклопедии животного мира. В этих бестиариях были описаны, в частности, страшные звери единороги и василиски и указаны эффективные способы борьбы с ними. Единственный недостаток заключался в том, что указанных зверей, как мы знаем, не существует.

Многие науки, использующие математику, как например, математическая экономика или математическая экология, в настоящее время почти полностью перешли на схоластический путь развития, зачастую никак не сопоставляя свои методы, модели и теоремы с какой-либо реальностью. И эти методы, модели и теоремы блуждают по научным журналам так же, как василиски и единороги блуждали по монастырским библиотекам.

К медицине это не должно относиться. Поступать, как отец Фауста (алхимик): «людей лечили этой амальгамой, не проверяя, вылечился ль тот, кто обращался к нашему бальзаму» – нельзя. Исходя из клятвы Гиппократа, врач обязуется предоставить больному наилучший возможный способ лечения. Формально клятва касается только врачей, но в настоящее время медицина является областью знания, возможно, наиболее насыщенной различными достижениями высоких технологий – в том числе, наиболее продвинутыми методами математической статистики. В ней, кроме врачей, непосредственно имеющих дело с больными, работают математики, физики, химики и т.д. И каждый, кто прямо или косвенно причастен медицине, должен чувствовать себя в какой-то мере связанным клятвой Гиппократа.

Поступки людей зависят от принятых в соответствующую эпоху представлений о сакральном мире. В наше время всенепременно в эти представления входит и математическая статистика, которой, в частности, обучают будущих научных сотрудников. Они усваивают, что двойной слепой рандомизированный план эксперимента есть спасение от возможных научных ошибок.

А что получается на практике? Из многих примеров использования этого метода в научных исследованиях остановимся на следующих.

Существует гипотеза, что токсическое влияние контраста на почки в какой-то мере обусловливается кислородсодержащими свободными радикалами. Современная фармакология обладает многими антиоксидантами, среди которых имеется такой дешевый, безвредный и удобный, как ацетилцистеин (АЦЦ). В работе [6] приводятся результаты клинических испытаний этого средства. Выдвинутая гипотеза подтверждается.

Аналогичные клинические испытания описаны в работе [7]. Вот незадача: в этом исследовании проверять значимость эффекта ацетилцистеина вообще не нужно, потому что частота КИН (в ее формальном понимании) в группе больных, получавших этот препарат, даже несколько выше, чем в группе плацебо. (Несколько неловко это обстоятельство отображается таким странным утверждением: соответствующее p-значение в точности равно единице, то есть настолько большое, насколько это вообще возможно. Напомним, что большое p-значение говорит о том, что искомый эффект не подтвержден.)

Понятно, что при такой противоречивости выводов исследования эффективности АЦЦ продолжаются. В работе [8] приводится сводка результатов 25 проспективных рандомизированных исследований эффективности АЦЦ. Мы взяли из таблицы результатов лишь p-значения, полученные в разных исследованиях. (Нулевая гипотеза: одинаковая вероятность КИН в случае применения АЦЦ и в случае плацебо.)

Для наглядного представления этих чисел мы применим хорошо известный в математической статистике прием, не используемый однако в медицинских исследованиях. (Это невнимание к полезному приему, конечно, очередное проявление первородного греха глупости[2]). А именно, изобразим эмпирическую функцию распределения (см.: рис.1).

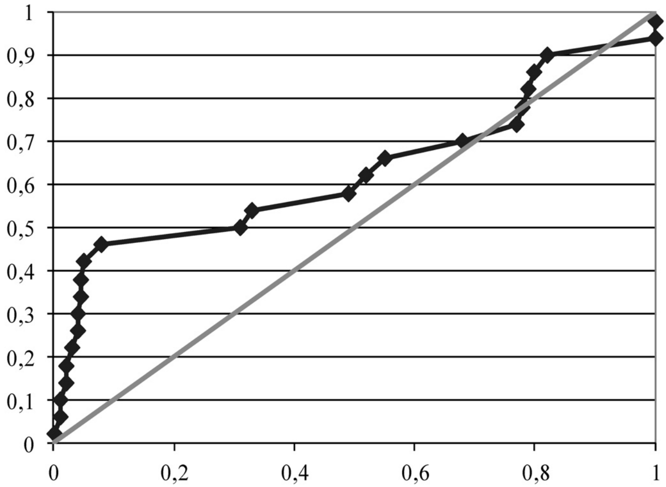


Рис.1. Эмпирическая функция распределения для p-значений

Теоретически известно, что если в ряде независимых экспериментов проверяется одна и та же гипотеза, которая на самом деле верна, то получаемые p-значения обязаны образовывать выборку из равномерного распределения на отрезке [0;1]. В данном случае проверяемая гипотеза состоит в том, что применение АЦЦ не изменяет вероятности КИН: исследователи хотят такую гипотезу отвергнуть (в пользу гипотезы о том, что АЦЦ снижает вероятность КИН), но ищут подтверждения права на это в сакральных приемах математической статистики. На рис.1 вместе с эмпирической функцией показана теоретическая функция равномерного распределения – это отрезок прямой. Видно, что эмпирическая функция значительно отличается от теоретической: что подтверждается и критерием Колмогорова (посчитанное нами значение статистики Колмогорова равно 2,0, что высоко значимо). Ну что тут сказать? В современной науке гадание по полету птиц, либо по внутренностям жертвенных животных заменяется на сравнение с экспериментом. Но результат гадания, как прежде, так и теперь, нужно еще уметь правильно истолковать. Формально равномерного распределения для p-значений нет: гипотеза об отсутствии влияния АЦЦ может быть отвергнута. Однако на рис.1 явно заметно, что все 25 наблюдений распадаются на две группы: «левую» (примерно 11 наблюдений), отвечающую тем исследованиям, когда положительный эффект АЦЦ наблюдался (p-значения $< 0{,}1$), и «правую» (тоже примерно 11 наблюдений), когда никакого эффекта не наблюдалось (p-значения $> 0{,}5$). То есть фактический материал, к которому применяется математическая статистика, статистически неоднороден.

Следует сказать, что авторы работы [8] на основании полного анализа результатов исследований эффекта АЦЦ пришли к такому же выводу о неоднородности фактического материала. К этому они добавили следующее соображение. Испытания АЦЦ на здоровых добровольцах (без введения РКВ) показали, что введение АЦЦ снижает уровень креатинина (и других маркеров фильтрационной способности почек). Это может означать, что АЦЦ влияет на метаболические процессы, в результате которых в крови оказывается та или иная концентрация креатинина (в то время как при формальной трактовке понятия КИН предполагается, что продукция креатинина в организме не меняется).

Подобная ситуация повторяется и с другими проспективными рандомизированными исследованиями. Известно, например, что полезным методом для предупреждения КИН является гидратация пациента (переливание ему растворов хлорида натрия – поваренной соли или бикарбоната натрия – питьевой соды) за несколько часов до и в течение нескольких часов после введения РКВ. Спрашивается, какой раствор лучше переливать? В работе [10] производится *мета-анализ*, то есть сравниваются результаты проспективных рандомизированных исследований, приведенных в различных публикациях. Как и в случае исследований влияния АЦЦ результаты противоречивы, и определенного вывода сделать нельзя.

Что же получается? Мы веруем (и учим студентов), что рандомизация является эффективным средством для того, чтобы сделать медицину доказательной. Пока рандомизированное исследование (например, сравнение двух препаратов) ровно одно, мы знаем, что либо что-то доказали (если p-значение маленькое), либо что-то опровергли (если p-значение большое). Когда таких исследований несколько, может возникнуть проблема противоречивости полученных результатов.

Проспективные исследования и реальные (ретроспективные) клинические данные. Рассмотрим еще один пример противоречивых выводов, полученных при недостатке материала для исследования.

В связи с выбором наиболее безопасных РКВ в статье [8] рассматривается вопрос о связи их нефротоксичности с осмолярностью и вязкостью. Контрастные вещества делятся на высокоосмолярные (1 000–2 000 мОсм/кг), низкоосмолярные (500–1 000 мОсм/кг) и изоосмолярные (290–300 мОсм/кг, что примерно совпадает с осмолярностью плазмы крови, отсюда приставка «изо»). Напомним, что в этой работе рассматриваются проспективные исследования, число больных в которых не превышает нескольких сотен, и потому токсичность тех или иных РКВ оценивалась по частоте КИН, а не по частоте серьезных осложнений. Был сделан вывод, что для больных высокого риска КИН (это, в частности, больные с предшествующей почечной патологией и/или диабетом) предпочтительными являются низко- или изоосмолярные вещества. А в работе [11] (на данных других проспективных исследований) установлено, что заметной разницы между нефротоксичностью низко- и изоосмолярных РКВ не наблюдается.

Однако выводы, полученные на нескольких сотнях больных, всегда желательно сопоставить с более обширными данными, которые можно было бы собрать в ретроспективе на основе реального клинического опыта. (Напомним: в одном 2000 г. сделано почти два миллиона катетеризаций сердца только в США). По двум миллионам случаев доступных данных нет, но в 2006 г. была опубликована работа шведских исследователей [12], также посвященная изучению нефротоксичности веществ в связи с их различной осмолярностью, где рассматривался опыт десятков тысяч случаев применения РКВ. В проведенном исследовании сравнивались в основном три РКВ: изоосмолярный йодиксанол (обозначим J1), низкоосмолярный йоксаглат (J2) и низкоосмолярный йогексол (J3), осмолярность которого несколько выше, чем J2. Авторы этой работы не интересовались частотой КИН в ее формальном понимании, так как большой объем выборки пациентов позволил им рассматривать гораздо более редкое событие – возникновение почечной недостаточности в такой степени, что потребовалась регоспитализация или диализ.

Вещества J1 и J2 применялись в Швеции в 2000–2003 гг. (первое было использовано для 45 485 пациентов, второе – для 12 440 пациентов, всего пациентов 57 925); а J3 – в 1990-х гг. (для 86 334 пациентов). Существовала тенденция к замене контрастных веществ на вещества с более низкой осмолярностью (так что J3, имеющий наивысшую осмолярность из трех, с 2000 г. больше не применялся, а J2 постепенно заменялся на J1). В работе [12] было показано, что эта теоретически предполагавшаяся тенденция имела крайне вредные последствия. Частота регоспитализации при применении J1 оказалась более чем вдвое выше по сравнению с J2. Что касается снятого с употребления J3, то его воздействие на пациентов сходно с J2 (то есть намного лучше, чем у вошедшего в употребление J1).

В качестве объяснения наблюденного отрицательного эффекта авторы предлагают механизм, связанный с относительно высокой вязкостью J1. Однако вывод авторов относительно J3 не согласуется с выводом работы [11], в которой с помощью многомерной логистической модели было показано, что частота осложнений при применении J1 значимо ниже, чем для J3 (но в данной работе частота осложнений определялась по частоте развития КИН). Таким образом, наблюдается противоречие между результатами, полученными на основании данных о регоспитализации и данных о частоте КИН. Парадигма проспективного рандомизированного исследования снова скомпрометирована – на этот раз в результате использования вместо серьезных клинических осложнений их суррогата в виде формально определяемой КИН. А это навязывается неизбежными ограничениями на объем и продолжительность проспективного исследования, в результате которых не могут быть сколько-нибудь надежно оценены весьма малые вероятности серьезных клинических осложнений.

Попытки многомерного статистического анализа. Для сравнения опасности применения различных РКВ в реальных клинических условиях чрезвычайно желательно иметь математическую формулу, выражающую вероятность осложнения через какие-то параметры, характеризующие пациента и ход эндоваскулярного вмешательства.

Подобная формула для вероятности возникновения ИБС в виде многомерного логистического закона была опубликована в работе [13] (Фрэмингемское исследование). С этой работой связано получение первых ярких результатов многомерного анализа статистических данных в медицине в 1960-х гг.

Целью этого исследования было выяснение факторов, влияющих на развитие ишемической болезни сердца (ИБС). Сначала определялись отдельные факторы риска – возраст, уровень холестерина, гемоглобин, курение и т.д. Это делалось путем разбиения исследуемой совокупности на те или иные части (в зависимости от величины какого-то отдельного фактора) и сравнения частот возникновения ИБС в отдельных группах в течение определенного срока (а именно 12 лет), в начале которого у пациента не было ИБС, а по прошествии его она могла возникнуть. Затем встал вопрос – как учесть совместное влияние нескольких факторов риска.

Одному из авторов работы – Корнфилду – Высший Разум ниспослал следующее математическое откровение. Пусть совместное распределение k факторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ обладает следующими свойствами. Для свободных от ИБС (в течение 12 лет) пациентов это распределение имеет плотность $f_0(x_1, \ldots, x_k)$, а для тех, кто заболеет в течение этого срока – плотность $f_1(x_1, \ldots, x_k)$. Тогда, как известно, классификация на больных и здоровых (в течение будущих 12 лет) определяется отношением f_1 / f_0. Если предположить дополнительно, что распределения f_1 и f_0 – многомерные нормальные *с одной и той же матрицей ковариаций*, то логарифм отношения плотностей будет линейной функцией от факторов x_1, $x_2, \ldots, x_k$. После несложного преобразования получаем, что вероятность заболеть выразится некоторой дробью от выражения $\exp\left(a + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i\right)$. При этом постоянные коэффициенты a и b_i выражаются через математические ожидания и (общую) матрицу ковариаций указанных многомерных нормальных распределений. Следовательно, их можно оценивать по соответствующим многомерным выборкам (когда по истечении 12-летнего срока выяснится, кто заболел ИБС и кто нет; значения факторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ соответствуют началу этого срока).

Что сакрального в этом откровении? Во-первых, это предположение о существовании каких-то распределений вероятностей, но к этому мы настолько привыкли, что не воспринимаем такое предположение как нечто сакральное. А в принципе, многомерного нормального распределения здесь быть не может по той простой причине, что некоторые факторы имеют дискретные значения. А именно, «курение» кодируется: 0 – некурящие; 1 – лица, выкуривающих меньше пачки сигарет в день; 2 – одну пачку; 3 – больше одной пачки. «Кардиограмма» кодируется как 0, если она нормальна, и как 1 при достаточно выраженной патологии (подробнее см.: [13]). Иными словами, «душа», которой снабжаются фактические данные, заведомо неадекватна, и лишь экспериментальная проверка может подтвердить (в порядке чуда), что модель вообще чего-нибудь стоит.

Впрочем, эту идеальную сущность (душу) можно заменить другой, не содержащей явных логических несообразностей. Скажем так: в многомерном анализе страшновато иметь дело с функциями, более сложными, чем линейная. Хорошо бы сделать так, чтобы вероятность p события (в данном случае – возникновения ИБС в течение 12 лет) была линейной функцией от исходных факторов x_1, x_2, ..., x_k. Однако прямо это невозможно, потому что любая вероятность принимает значения между 0 и 1, в то время как линейная функция не ограничена. Поэтому было сделано несложное функциональное преобразование: вместо вероятности p рассматривалась величина y, равная *логарифму отношения рисков*, то есть

$$y = \ln \frac{p}{1-p}.$$

Эта величина меняется на всей вещественной прямой и потому вполне возможно предположить, что y линейно зависит от факторов:

$$y = a + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i, \quad p = \frac{1}{1+e^{-y}} = \frac{1}{1+\exp\left(-a - \sum_{i=1}^{k} b_i x_i\right)}.$$

Вероятность p выражена в виде функции от факторов, которая носит название *многомерной логистической функции.*

Но почему именно такое функциональное преобразование? Это и было озарением, посетившим Корнфилда, откровением со стороны Высшего Разума.

Первоначальная модель с многомерными нормальными распределениями имплицировала один способ оценки параметров: через выборочные средние и ковариации. Если же начинать рассуждения с величины y, то параметры естественно оценивать методом максимального правдоподобия, что при наличии компьютера не представляет трудности.

И где же чудо? Для каждого обследованного пациента можно вычислить (имея оценки параметров) свое значение y, упорядочить эти значения по возрастанию и найти эмпирические децили (то есть границы децильных групп, каждая из которых содержит 10% наблюдений). Для каждой такой группы можно определить фактическую частоту возникновения ИБС в течение 12 лет. Процитируем заключение работы:

«Совместный эффект всех факторов риска поразителен. Разница в частоте возникновения ИБС между верхней и нижней децильной группой является тридцатикратной для мужчин и семидесятикратной для женщин» [13, с.523].

Таким образом, многомерная логистическая модель оказалась способной разделить обследованную популяцию по степени риска возникновения ИБС с эффективностью, до тех пор невиданной в медицине (используя при этом самые простые факторы риска). Понятно, например, что для оценки эффективности того или иного метода снижения риска ИБС нужно сравнить число случаев возникновения ИБС в группе, для которой применялся этот метод, с математическим ожиданием, вычисленным согласно работе [13]. Для такого вычисления достаточно знать приводимые в этой работе оценки коэффициентов a и b_i. Возможны и относительные оценки влияния отдельных факторов. Например, для фактора курения у мужчин указана оценка коэффициента 0,3610, а для фактора возраста 0,0708 на 1 год. Следовательно, тот, кто выкуривает менее одной пачки сигарет в день (значение фактора курения равно 1), ускоряет наступление ИБС на $0{,}3610 / 0{,}0708 = 5{,}1$ года.

Заметим, что каждому отдельному специалисту доступно овладение лишь достаточно узкой областью знания, которой он и занимается, а, следовательно, в комплексных исследованиях специалистов должно быть много, поэтому сплошь и рядом возникает то, что по-английски называется *misunderstanding*. Интернет сделал доступными для нас многие научные журналы. Так вот, при чтении статей в американских журналах по вопросу о нефротоксичности РКВ возникает отчетливое впечатление, что прикладная (к медицине) американская математическая статистика радикально поглупела со времен Фрэмингемского исследования.

Из многих примеров этого процесса поглупения остановимся на следующих.

Обратимся к оценке риска применения РКВ согласно работам [14] и [11]. Первая из этих работ сходна с Фрэмингемским исследованием в том смысле, что параметры многомерного логистического закона определялись с помощью базы исходных данных для нескольких тысяч пациентов. Вторая работа представляет собой мета-анализ, использующий лишь данные публикаций.

В работе [14] производилась оценка коэффициентов логистической модели по данным для 4 898 пациентов, подвергшихся ангиопластике сосудов сердца, из которых у 646 возникла КИН. Приведены оценки всех коэффициентов логистической модели, кроме свободного члена a. Авторы, очевидно, не понимают, что отсутствие этой оценки исключает возможность проверки полученной ими формулы на независимых данных.

При анализе результатов обработки данных[3] авторы работы [14] обращают основное внимание не на способность полученных формул количественно описать вероятность КИН, а на статистическую значимость оценок коэффициентов. Все p-значения при этом получаются меньше 0,0001, однако авторы не придают значения тому факту, что доверительные интервалы для коэффициентов весьма широки. Оценим влияние, которое может иметь неточность в каком-нибудь коэффициенте логистической модели, на расчет вероятностей. Для примера возьмем коэффициент при количестве контраста примерно равный 0,25. Доверительный интервал для него (0,191; 0,318). Неопределенность, то есть разница между его концами 0,127. Однако важна не только эта разница, но и порядок тех чисел, на которые будет умножаться рассматриваемый коэффициент. Например, больному может быть введено 500 мл контраста: тогда нужно умножать на 5. В значении y (логарифм отношения рисков) неопределенность составит $5 \cdot 0{,}127 = 0{,}635$, а в значении самого отношения рисков неопределенность оценивается множителем $\exp(0{,}635) = 1{,}89$. Таким образом, из-за неопределенности лишь в одном коэффициенте модели возможно ошибиться в значении отношения рисков почти вдвое. Причем при применении формулы с однажды оцененными коэффициентами к новым данным эти ошибки станут систематическими. По-видимому, с многомерными линейными формулами может происходить следующее явление: ошибки в одних коэффициентах компенсируются ошибками противоположного знака других коэффициентов. Таким образом, проблема проверки формулы на новых данных стоит остро. Но поскольку авторы работы [14] не приводят оценки коэффициента a, они просто не понимают необходимости этой проверки.

Не свидетельствует об интеллектуальной одаренности и тот способ проверки логистической модели, который используется в работе. Путем чисто случайного выбора авторы разделили все имеющиеся данные на две совокупности: «обучающую», то есть использованную для оценки коэффициентов модели, и «экзаменационную» – для проверки полученных коэффициентов. Однако в статистических исследованиях подобный способ проверки лишен смысла: при чисто случайном делении получаемые части одной совокупности имеют одинаковые статистические свойства. Приведем упрощенный пример. Пусть речь идет об измерении некоторой физической константы, но из-за появления систематической ошибки вдруг появился некоторый сдвиг в измерениях. Мы заметим этот сдвиг, если разделим наши измерения по порядку их получения, и ничего не заметим, если разделим их путем случайного выбора. Делить надо по какому-то содержательному признаку. Полвека назад статистики это понимали: например, Корнфилд в [13] разделил пациентов по их возрасту в момент первого обследования и таким образом установил, что коэффициенты логистической модели меняются с возрастом. Возникает подозрение, что в настоящее время это понимание утеряно (в частности, такая же ошибка делается в работе [15]).

Чтобы убедиться в том, что многомерные логистические формулы имеют смысл, необходимо хоть какое-нибудь чудо, а для появления этого чуда нужно как минимум иметь альтернативную базу данных. Нам удалось воспользоваться данными Института трансплантологии и искусственных органов (г.Москва). Эти данные относятся к пациентам, подвергшимся операциям ангиопластики и стентирования сосудов сердца (больные с пересаженной почкой, которым указанная операция на сердце делается по причине развившейся ИБС [16]). В нашем распоряжении оказалось 50 достаточно полных наблюдений (данные с параметрами, входящими в логистическую модель) причем КИН (в формальном понимании) наблюдалась в 14 случаях.

Рассмотрим подробнее модели из работ [11] и [14].

В работе [14] формула для расчета риска КИН с помощью логистической модели не приведена полностью, но предлагается второй (упрощенный) способ расчета вероятности КИН, который мы и использовали для проверки модели на данных Института трансплантологии. Этот способ состоит в подсчете баллов риска по значениям факторов (см. примечание 3) и определении вероятности КИН по следующей таблице:

Сумма баллов	**Риск КИН**
От 0 до 5	7,5%
От 6 до 10	14%
От 11 до 16	26,1%
Более 16	57,3%

Этот способ не слишком точен (чего не замечают авторы). Например, подсчет математического ожидания числа случаев КИН для исходной базы данных дает значение 540,7 при фактическом числе случаев 646.

В работе [14, рис.1] обозначено количество пациентов, имеющих ту или иную сумму баллов[4]; частоты КИН в этих группах не приведены, но их можно приближенно оценить по графику. Пересчитывая эти частоты p в логарифмы отношения рисков y, можно получить неплохую линейную зависимость y от суммы баллов. Оценивая параметры этой зависимости как одномерной регрессии (с учетом весов наблюдений), мы получили способ оценки вероятности КИН. Для данных с [14, рис.1] получается, что математическое ожидание числа случаев КИН равно 628 (в варианте А) и 660 (в варианте В), что достаточно хорошо согласуется с фактическим числом 646.

Применив эту модель одномерной регрессии к данным Института трансплантологии (напомним, что там наблюдалось 14 случаев КИН), мы получили следующий результат. Расчет математического ожидания числа случаев КИН дает в варианте A значение 14,72. Вот случай неожиданно близкого совпадения факта с расчетом, который можно расценить как чудо. В варианте В математическое ожидание получается 11,18, что уже не чудо, но неплохо (стандартное отклонение в обоих вариантах примерно равно 3).

Рассмотрим теперь более подробно работу [11] и попытаемся применить ее результаты к нашим данным.

Не имея доступа к первичным базам данных, лучшее, что могли сделать авторы, это пересчитать частоту КИН каждого исследования в логарифм отношения рисков (y). В качестве значений объясняющих переменных были взяты средние значения факторов для каждого исследования (они указаны в [11, табл.2]). Далее вычислялась многомерная линейная регрессия значений y на значения объясняющих переменных (с учетом весов, то есть дисперсий различных значений y, рассчитанных по частотам КИН). Эта процедура стандартна. Лишь одно обстоятельство требует комментария.

Дело в том, что не во всех 19 исследованиях РКВ были одинаковы (йогексол, йодиксанол, йопамидол и другие). Учет влияния различных контрастных веществ на вероятность КИН приходилось выполнять, вводя так называемые «фиктивные переменные» (английский термин *dummy variables*). Они соответствуют различным контрастным веществам по естественному правилу: например, столбец значений фиктивной переменной для йодиксанола имеет значения «1» для тех исследований, в которых употреблялся йодиксанол, и нули для всех остальных. При этом предполагалось, что для различных контрастных веществ действуют модели, отличающиеся лишь константой a. Поэтому при получении оценок коэффициентов регрессии (в статистическом пакете) нужно было выбрать опцию «константа равна нулю»[5].

Результаты всех 19 первичных проспективных исследований приведены в [11, табл.2]. Значения частот КИН в таблице не приводятся, и нам опять пришлось снимать их с графика из [11, рис.2] с помощью масштабной линейки. Коэффициенты многомерной логистической функции приведены в [11, табл.4] не полностью и, по-видимому, с ошибками (поскольку табличные данные противоречивы). Коэффициент при объясняющей переменной «пол» оказался незначимым, а коэффициент при переменной «диабет» получил противоречащий здравому смыслу отрицательный знак (то есть наличие диабета как бы уменьшает нефротоксическое действие контраста), к тому же он статистически незначим, поэтому мы исключили эти переменные из модели. Оставшиеся переменные: «возраст», «базовое значение креатинина» и «объем контраста», а также фиктивные переменные, обозначающие контрастные вещества: «йогексол», «йодиксанол», «йопамидол» и «другие». Всего 7 переменных и 19 наблюдений. Мы пересчитали коэффициенты логистичекой модели с учетом указанных поправок. Константы a, отвечающие фиктивным переменным, в работе [11] не приводятся. У нас получились следующие значения (в скобках указаны стандартные ошибки):

Вещество	Йогексол	Йодиксанол	Йопамидол	другие
Значение a	−10,67 (2,95)	−11,92 (2,99)	−11,74 (3,07)	−10,86 (3,05)

Как нередко бывает, стандартные ошибки коэффициентов при переменных столь велики, что при их рассмотрении можно сделать лишь тот вывод, что найденная формула неработоспособна. Действительно, если, например, значение a для йогексола увеличить на величину стандартной ошибки 2,95, то значение y увеличится на ту же величину, а отношение рисков умножится на $\exp(2{,}95) = 19{,}1$. Казалось бы, ни о какой точности при вычислении вероятностей КИН для новых наблюдений (то есть не использованных в вычислениях параметров многомерной регрессии) говорить нельзя. Но эксперименты показывают, что в многомерном линейном анализе нередко дело обстоит не так уж плохо.

Коэффициенты при объясняющих переменных, вычисленные нами на основе данных [11], не вполне совпали с коэффициентами автора работы, но оказались довольно близкими. (Различие может объясняться не вполне точным определением частот КИН с помощью масштабной линейки по [11, рис.2], а также некоторым сокращением списка объясняющих переменных). Сравнение значений этих коэффициентов дается ниже:

Переменная	**Возраст**	**Креатинин в исходе**	**Контраст**
Ед. измерения	год	мг/дл	мл
Наш расчет	0,1106	0,4810	0,0083
Работа [11]	0,1052	0,3487	0,0081

Расчет математического ожидания числа случаев КИН для данных Института трансплантологии по уточненной нами модели дает значение 15,8 (при таком же стандартном отклонении, как и при расчете по модели, полученной в работе [14]).

Если рассматривать с помощью полученных моделей влияние контраста на величину y, то по данным [14] на 100 мл контраста y увеличивается на 0,25, а по данным [11] – на $0{,}8 = 0{,}008 \cdot 100$. Таковы свойства регрессионных моделей: при изменении списка объясняющих переменных одни переменные берут на себя нагрузки других (поскольку векторы значений объясняющих переменных не ортогональны). Сами по себе отдельные коэффициенты модели имеют мало смысла. Соответственно, ненадежна и количественная оценка степени влияния отдельных факторов на вероятность интересующего нас события. (Правда, Корнфилд в [13] тоже занимался подобными оценками, но для него главным являлась способность логистической формулы неплохо описать вероятность события с весьма резкой разницей для тех групп пациентов, которые отличаются взвешенной суммой факторов риска.)

В недавних работах способность количественного описания вероятности события вообще потеряна – до такой степени, что их авторы не считают нужным приводить оценку коэффициента a в логистической формуле, и его значение приходится восстанавливать почти что методами криминалистики.

В заключение нашего короткого исследования выскажем несколько соображений. Исследователи должны быть осведомлены о трудностях, связанных с ненадежностью рандомизации. В конечном счете, проблема сводится к тому, что нельзя взять для эксперимента чисто случайную выборку из всего населения Земли, либо данной страны, либо из всех больных определенной болезнью. Небесполезно помнить о том, что очевидным способом проверки модели является ее применение к независимым данным, полученным в другом месте и/или в другое время. Получение таких данных в настоящее время достаточно проблематично. Один из возможных путей решения этой проблемы связан с тем, что в наше время принципиально возможна интернет-публикация исходных данных, а не только результатов их обработки (которые обычно публикуются в бумажных изданиях). Их наличие в свободном доступе позволило бы проводить те или иные многомерные обработки, с помощью которых, возможно, удалось бы выяснить, чем именно отличаются больные разных исследований, в которых получились противоречивые результаты. Но конечно, при этом выявились бы и многие «безобразия» при составлении этих исходных таблиц, которые пока что являются личным делом их авторов (предложение о публикации баз данных в интернете на сегодняшний день является лишь благим пожеланием).

Как мы видим, доказательная медицина в некоторых случаях оказывается в неудобном положении «голого глухонемого в крапиве» (что, впрочем, случалось и с самыми квалифицированными авгурами и гаруспиками Древнего Рима).

Примечания

[1] Как понятие доминантных и рецессивных аллелей, так и представление о случайном сочетании гамет было, очевидно, получено Менделем в результате откровения.

[2] В данном случае «первородный грех» зашел столь далеко, что даже в статистической части пакета *Excel* нет специальной закладки, вычисляющей эмпирическую функцию. Согласно своему определению, это – некоторая ступенчатая функция, которую вполне возможно, но не очень удобно рисовать средствами пакета *Excel*. Однако в старых учебниках математической статистики (см., например: [9]) имеется рекомендация изображать лишь середины скачков этой функции (соединяя их для наглядности отрезками прямых). Такое вполне удобно изображать в *Excel*, что и сделано, в частности, на рис.1.

[3] Факторы риска и их значения следующие:

Внутриаортальная баллонная контрпульсация – 5 баллов;

Сердечная недостаточность – 5 баллов (III/IV класс согласно нью-йоркской классификации, либо отек легких в анамнезе);

Преклонный возраст – 4 балла (старше 75 лет);

Анемия – 3 балла (гематокрит меньше 39% для мужчин и 36% для женщин);

Диабет – 3 балла;

Объем контрастного вещества – 1 балл на каждые 100 миллилитров;

Оцененная скорость клубочковой фильтрации (eGFR): 2 балла – если eGFR от 59 до 40; 4 балла – если eGFR от 39 до 20, и 6 баллов – если eGFR меньше 20 (вариант расчета B);

Если показатель eGFR не рассчитывался, то применялся вариант расчета A, в котором использовался фактор SCr (концентрация креатинина в плазме крови): 4 балла в том случае, когда SCr больше 1,5 мг/дл.

[4] Правда, суммарное для всех групп число пациентов: 4 785 в варианте A и 4 872 в варианте B не вполне согласуется с числом 4 898, объявленном в тексте работы.

[5] В противном случае программа регрессии автоматически сформирует столбец из единиц, который будет в точности равен сумме столбцов для всех фиктивных переменных. Иными словами, между столбцами значений объясняющих переменных возникнет линейная зависимость. Это явление еще называется «ловушкой мультиколлинеарности».

Список литературы

1. *Фейерабенд П.* Избранные труды по методологии науки. М., 1986.
2. *Кун Т.* Структура научных революций. М., 1975.
3. *Тутубалин В.Н.* Теология науки // http://www.sevin.ru/fundecology/authors/tutubalin.html
4. *Тутубалин В.Н.*, *Барабашева Ю.М.*, *Девяткова Г.Н.*, *Угер Е.Г.* Критерий Колмогорова и проверка законов наследственности Менделя // Историко-математические исследования. Вторая серия. М., 2009. Вып.13(48). С.185–197.
5. *Gami A.S., Garovic V.D.* Contrast nephropathy after coronary angiography // Mayo Clinic Proceedings. 2004. Vol.79. P.211–219.
6. *Tepel M.*, *van der Giet M.*, *Schwarzfeld C.*, *et al.* Prevention of radiographic-contrast-agent-induced reductions in renal function by acetylcysteine // The New England Journal of Medicine. 2000. Vol.20. P.180–184.
7. *Durham J.D.*, *Caputo C.*, *Dokko J.*, *et al.* A randomized controlled trial of N-acetilcysteine to prevent contrast nephropathy in cardiac angiography // Kidney International. 2002. Vol.62. P.2202–2207.
8. *Tepel M.*, *Aspelin P.*, *Lameire N.* Contrast-Induced Nephropathy: a clinical and evidence-based approach // Circulation. 2006. Vol.113. P.1799–1806.
9. *Хальд А.* Математическая статистика с техническими приложениями. М.,1956.
10. *Brar S.S.*, *Hiremath S.*, *Dangas G.*, *et al.* Sodium bicarbonate for the prevention of contrast induced acute kidney injury // Clinical Journal of the American Society of Nephrology. 2009. Vol.4. P.1584–1592.
11. *Solomon R.* The role of osmolality in the incidence of contrast-induced nephropathy: a systematic review of angiographic contrast media in high risk patients // Kidney International. 2005. Vol.68. P.2256–2263.

12. *Liss P., Persson P.B., Hansell P., Lagerqvist B.* Renal failure in 57925 patients undergoing coronary procedures using iso-osmolar or low-osmolar contrast media// Kidney International. 2006. Vol.70. P.1811–1817.
13. *Truett J., Cornfield J., Kannel W.* A multivariate analysis of the risk of coronary heart disease in Framingham // Journal of Chronic Diseases. 1967. Vol.20. P.511–524.
14. *Mehran R., Aymong E.D., Nikolsky E., Lasic Z., Iakovou I., Fahy M., Mintz G.S., Lansky A.J., Moses J.W., Stone G.W., Leon M.B., Dangas G.* A simple risk score for prediction of contrast-induced nephropathy after percutaneous coronary intervention: development and initial validation // Journal of the American College of Cardiology. 2004. Vol.44. P.1393–1399.
15. *Nashef S.A.M., Roques F., Mishel P., et al.* European system for cardiac operative risk evaluation (Euro SCORE) // European Journal of Cardio-thoracic Surgery. 1999. Vol.16. P.9–13.
16. *Рядовой И.Г., Тутубалин В.Н.* Проблема нефротоксического действия йодсодержащих рентгеноконтрастных веществ // Международная конференция «Теория вероятностей и ее приложения», посвященная 100-летию со дня рождения Б.В.Гнеденко (Москва, 26–30 июня 2012 г.). Тезисы докладов. М., 2012. С.335–336.

НАШИ ПУБЛИКАЦИИ

СОБРАНИЕ ОСНОВНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ НАУКИ О ВЫЧИСЛЕНИЯХ (ГЛ.0 И 1)

Махавира

Введение, перевод с санскрита и комментарии Г.Г.Хмуркина

Введение. Трактат Махавиры «Собрание основных положений науки о вычислениях» (**gaNitasArasaGgrahaH**) является первой в истории индийской мысли работой, посвященной исключительно математике как независимой (прежде всего, от астрономии) дисциплине. В этом сочинении мастерски соединены и изложены практически все математические достижения того времени; вероятно, его текст содержит и собственные находки Махавиры, однако выделить их из общего материала довольно проблематично [1, с.X]. На протяжении многих веков «Собрание...» пользовалось успехом среди ученых всей южной Индии [там же].

Спектр затрагиваемых в трактате вопросов весьма обширен: арифметические операции, действия с дробями, арифметическая и геометрическая прогрессии, правило трех величин, экономические задачи, задачи на движение, комбинаторика, суммирование конечных рядов, неопределенные уравнения 1-ой степени, решение систем уравнений с несколькими переменными, планиметрия, стереометрия и многое другое. Махавира приводит классификации исследуемых объектов, дает правила вычислений (без доказательств) и снабжает текст многочисленными упражнениями.

Трактат написан на санскрите, в традиционной индийской манере – стихах, изредка перемежающихся прозаическими вставками. Текст состоит из 9 глав – вводной, не имеющей номера (мы ее будем называть «глава 0»), и восьми помеченных как «первая»–«восьмая». Материал распределен по главам неравномерно: глава 0 содержит 70 стихов; глава 1 – 115 стихов; глава 2 – 140 стихов; глава 3 – 72 стиха; глава 4 – 43 стиха; глава 5 – 337 стихов; глава 6 – 232 стиха; глава 7 – 68 стихов; глава 8 – 52 стиха. Итого 1129 стихов.

В русскоязычной историко-математической литературе работу Махавиры принято называть «Краткий курс математики» [2; 3, с.6] или «Краткий курс арифметики» [4, с.110]. На наш взгляд, оба названия не вполне удачные. Термином **gaNita** (букв. "посчитанное, вычисленное"), как правило, обозначался (1) специальный раздел в астрономо-астролого-математических сочинениях, посвященный прикладным вычислительным процедурам, то есть своего рода «количественная [в отличие от описательной] астрономия»; а также (2) свод вообще любых правил, относящихся к вычислительной практике. Слово **sAra** переводится как «суть, квинтэссенция, сущность». Таким образом, **gaNitasAra** – это «сущность (=основные положения) науки о вычислениях». Наконец, **saGgrahaH** буквально означает «собрание». В итоге имеем более точный перевод: «Собрание основных положений науки о вычислениях». Подчеркнем, что в названии трактата нет указания на его краткость; тем более, оснований для этого не дает объем сочинения, значительно превышающий все известные математические трактаты средневековых индийских авторов [3, с.6]. Также нельзя говорить, что сочинение представляет собою «курс арифметики», поскольку его содержание не ограничивается арифметикой.

Махавира (**mahAvIra**, букв. "великий герой") или Махавирачарья (**mahAvIrAcArya**, букв. "учитель Махавира") – представитель дигамбарской ветви джайнизма, живший в середине IX в. н.э. Судя по всему, он работал при дворе Амогхаварши (годы правления: ок. 815–ок. 877 гг.), царя из средневековой династии Раштракутов – правителей крупной империи (VIII–X вв.), располагавшейся на территории современных южноиндийских штатов Карнатака и Махараштра. «Собрание...» – единственная известная работа Махавиры.

Вопреки установившейся русскоязычной традиции, называющей автора «Собрания...» Магавирой [2–4], мы будем именовать его Ма*х*авирой. Это произношение, во-первых, соответствует индийскому написанию и звучанию имени; во-вторых, укладывается в уже устоявшиеся нормы заимствования аналогичных санскритских слов в русскую лексику (ср. укоренившиеся в литературе слова «Махабхарата», «махаяна», «махатма», «махасиддхи» и др.); и в-третьих, оно в точности соответствует принятому в советском и российском востоковедении написанию имени Джины Махавиры (см., например: [5–7]) – основателя джайнской традиции, в честь которого, по всей видимости, и был назван автор обсуждаемого трактата.

Санскритский текст «Собрания…» и его перевод на английский язык были изданы в 1912 г. [8] индийским ученым М.Рангачарьей, профессором санскрита и сравнительного языкознания в Окружном университете (Presidency College), г.Мадрас (ныне – Ченнай), Индия. В основу его публикации легли 5 рукописей, для простоты М.Рангачарья обозначает их заглавными латинскими буквами:

1) *Рукопись P* – написана на бумаге, на санскрите, на алфавите грантха; содержит главы 0–4 с сопроводительными комментариями; обнаружена М.Рангачарьей в Правительственной библиотеке восточных рукописей (Government Oriental Manuscripts Library), г.Мадрас.

2) *Рукопись K* – единое обозначение для двух документов, написанных на пальмовых листьях, на алфавите каннада (М.Рангачарья использует редкое обозначение Kanarese characters – «канарская письменность»); первый содержит главы 0–4, второй – только главу 6; оба документа, помимо оригинального санскритского текста, имеют приложение на языке каннада (М.Рангачарья использует редкое обозначение Kanarese language – «канарский язык»), в котором дается краткий перечень названий цифр, используемых в упражнениях из трактата, и ответы к этим упражнениям; тексты обнаружены М.Рангачарьей в той же Правительственной библиотеке восточных рукописей.

3) *Рукопись M* – переписанный на бумагу на алфавите каннада текст с пальмовых листьев, содержащий трактат в полном объеме и краткий комментарий на языке каннада; автор комментария – некий Валлабха, которому также приписывается комментарий на языке телугу к «Собранию…»; рукопись принадлежит Правительственной восточной библиотеке (Government Oriental Library), г.Майсур, Индия.

4) *Рукопись B* – переписанный на бумагу на алфавите каннада текст с пальмовых листьев, найденных в джайнском монастыре в г.Мудабидри, Индия; содержит полный текст трактата и приложение на языке каннада – краткий перечень упражнений и ответов к ним.

Сведений о происхождении (древности, переписчиках и т.п.) рукописей М.Рангачарья, к сожалению, не приводит.

В 1963 г. вышел перевод сочинения Махавиры на хинди, осуществленный Л.Джайном [1], однако, по собственному признанию издателя, публикация основывалась главным образом на английском переводе М.Рангачарьи [там же, с.XVI].

Вниманию читателя предлагается перевод с санскрита на русский язык первых двух глав (главы 0 и 1) трактата Махавиры «Собрание основных положений науки о вычислениях», выполненный по изданию [8]. Мы опустили ряд строф, не имеющих отношения к собственно математическому материалу: восхваления основателя джайнизма Джины Махавиры, панегирики царю Амогхаварше, превозношение могущества математики, перечни единиц измерения, список наименований математических операций, а также «названия» цифр в нумерационной системе, которая используется в трактате. Кроме того, мы опустили многочисленные упражнения. К каждой строфе дан комментарий.

[Глава 0]

Теперь общие правила [действий] с положительными величинами, отрицательными величинами [и] нулем:

49. Величина, умноженная на ноль, [дает] ноль; она [остается] неизменной при делении [на ноль и] сложении [с нулем]; а также при вычитании [нуля]. Произведение и прочие [операции] с нулем [дают] ноль; при сложении [с произвольной величиной] ноль [«принимает значение»] такое же, как прибавляемое слагаемое.

Первое предложение (в представленном переводе) содержит следующие утверждения:

$a \cdot 0 = 0, a : 0 = a, a + 0 = a, a - 0 = a.$

Бросается в глаза ошибочность (при современном понимании деления) второго правила, к которому М.Рангачарья дает не вполне ясный подстрочный комментарий: «Махавира, очевидно, считает, что деление на ноль – это вообще не деление» [8, с.6 англ. текста].

Р.Н.Мукхерджи [9, с.197] интерпретирует это место как $0 / 0 = 0$, что хотя и представляется, строго говоря, некорректным, все же вызывает меньше нареканий, поскольку может быть «проверено умножением»: $0 \cdot 0 = 0$. Однако подобные версии кажутся нам малоубедительными. Вообще, санскритский текст в этом месте достаточно прозрачен, и, на наш взгляд, любые попытки интерпретировать его так, чтобы высказывание Махавиры «стало» математически грамотным, потребуют противоестественных манипуляций.

Вероятно, Махавире в реальных (многоступенчатых) вычислениях не приходилось сталкиваться с делением на 0, что с высокой вероятностью привело бы его к пониманию ошибки. Многие правила Махавиры, приводимые ниже, не дают правильный результат, если производить деление на 0 согласно указанной им инструкции.

Процитированный стих следует воспринимать, скорее, как формальность – попытку охватить весь круг математических процедур и проблем, не всегда соотнося выдвигаемые тезисы (рецепты) с реальной вычислительной практикой.

50. При перемножении и при делении двух отрицательных величин [или] двух положительных величин результат [есть] величина положительная; а вот [при перемножении и при делении] положительной величины [и] отрицательной величины будет [получаться] отрицательная величина. Разность положительной величины [и] отрицательной величины [равна числу, получающемуся] при сложении [положительного и противоположного к отрицательному чисел].

Обозначая отрицательные числа через N_i, а положительные – через P_j, получаем свод правил:

$$N_1 \cdot N_2 = P_1$$
$$N_1 : N_2 = P_2$$
$$P_1 \cdot P_2 = P_3$$
$$P_1 : P_2 = P_4$$
$$P_1 \cdot N_1 = N_3$$
$$P_1 - N_1 = P_1 + (-N_1)$$

51. Сумма двух отрицательных величин [или] двух положительных величин [подсчитывается] так же, как сумма [их абсолютных величин, но результатом будет соответственно] отрицательная величина [или] положительная величина. Вычитаемое, [представляющее собой] положительную величину, следует рассматривать [как слагаемое, которое есть соответствующая] отрицательная величина; [если] из числа [вычитается] вычитаемое, [представляющее собой] отрицательную величину, [то его можно заменить на слагаемое, значение которого есть соответствующая] положительная величина.

Алгебраически:

$$(-P_1) + (-P_2) = -(P_1 + P_2)$$
$$P_1 + P_2 = P_1 + P_2$$
$$X - P = X + (-P)$$
$$X - (-P) = X + P$$

Через X мы обозначили величину произвольного знака.

52. Квадрат положительной величины [и] отрицательной величины [есть] величина положительная; [таким образом, имеется] два [значения квадратного] корня – положительное число [и] отрицательное число. Поскольку из этих двух [типов величин (то есть положительных и отрицательных)], согласно [описанному выше] правилу, отрицательная величина по своей при-

роде не может быть квадратом, то не [существует квадратного] корня из нее.

Как видим, Махавира рассматривает *алгебраический* квадратный корень, принимающий как положительное, так и отрицательное значение.

[Глава 1]

Умножение

В случае первой математической операции, [называемой] «умножение», правило вычисления [вот] какое:

1. Следует умножить множимое на множитель, разместив [их друг относительно друга и произведя действия] согласно алгоритму «кавата-сандхи». [Кроме того, умножение можно производить] с помощью [алгоритмов] «раши[-кханда]», «аргха-кханда» [и] «тат-стха», [каждый из которых может осуществляться] двумя путями – в обычном и в обратном порядке.

В настоящий момент автором перевода готовится отдельная статья, посвященная данной строфе.

Деление

В случае второй операции, [называемой] «деление», правило вычисления [вот] какое:

18. Расположи делимое [рядом] со стоящим под ним делителем, [затем], преобразовав дробь, согласно «правилу деления на одинаковые [числа]», получишь [искомое] значение.

Фактически, речь идет о записи частного двух чисел в виде обыкновенной дроби и последовательном делении ее числителя и знаменателя на общие множители. Деталей Махавира не сообщает.

Или

19. В обратном порядке: делимое следует поделить на стоящий ниже делитель; [здесь применяется] «правило деления на одинаковые [числа]», если у этих двух [чисел] есть именно такое [число, которое бы подошло] для деления.

Махавира не сообщает подробностей алгоритма; соответственно, пояснить, что значит «в обратном порядке» (**pratilomapathena**), мы не можем.

[Возведение в] квадрат

В случае третьей операции, [называемой «возведение в] квадрат», правило вычисления [вот] какое:

29. Квадрат может быть получен [как] произведение двух одинаковых [множителей]; или [как] произведение двух [множителей, первый из которых есть заданное число], уменьшенное на произвольную величину, [а второе – есть заданное число], увеличенное [на ту же произвольную величину], плюс квадрат [этой] произвольной величины; или [как] сумма [ариф-

метической прогрессии, в которой] первый член [равен] 1, разность [равна] 2, количество членов [равно возводимому в квадрат] числу, о котором говорится в задаче.

Алгебраически:

$$n \cdot n = n^2,$$

$$(n-a)(n+a) + a^2 = n^2,$$

$$\underbrace{1+3+5+7+\ldots}_{n\ \text{слагаемых}} = n^2.$$

30. [Если число разбито на] 2 или более слагаемых, [то] сумма квадратов всех [этих] величин, сложенная с удвоенной суммой их всевозможных попарных произведений, [есть] квадрат [исходного числа].

Алгебраически:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 + 2\left(\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j\right), \text{ где } n \ge 2.$$

31. Возведя в квадрат последнюю цифру, следует умножить удвоенную последнюю цифру на оставшиеся цифры, [каждый раз соответствующим образом] сдвигая вверх [записываемый результат]; так [следует делать и далее, постепенно] сдвигаясь [по всем] оставшимся [цифрам]. Это правило следует применять в случае возведения в квадрат.

В указанной строфе дважды встречается слово **utsArya** – каузативное деепричастие от глагольного корня **ut-$\sqrt{\ }$ sR**, «исключив, выгнав, передвинув». Контекст побуждает нас в первом случае перевести его как «сдвигая вверх» (буквальный перевод, учитывающий семантику префикса **ut-**), а во втором случае – истолковать его в непонудительном значении: «сдвигаясь, перемещаясь».

Пусть число записано в десятичной позиционной системе. Используемый в строфе термин **antya** (букв. “последняя [цифра]”) можно понимать как «последняя [слева цифра]» и как «последняя [справа цифра]». В итоге мы приходим к двум равновозможным вариантам истолкования правила. Распишем оба варианта алгоритма подробно; параллельно, в фигурных скобках, будем выполнять действия над конкретным числом.

Пусть необходимо возвести в квадрат некоторое натуральное число. {Возьмем, к примеру, число 8537.}

1 вариант. Начерти столько горизонтальных полос, сколько цифр в числе {4}. Нижняя полоса будет отвечать единицам; вторая снизу – десяткам; третья снизу – сотням и т.д. Посередине каждой полосы проведи «среднюю линию», которая разобьет ее на две «подполосы». ***1 шаг***. Возьми крайнюю правую цифру числа {7}, возведи ее в квадрат $\{7^2\}$ и запиши результат {49} сверху вниз так, чтобы его последняя цифра {9} «стояла» на нижней границе полосы единиц. ***2 шаг***. Удвой эту цифру $\{7 \cdot 2\}$ и умножь полученное число {14} на оставшиеся цифры {3, 5, 8}, а результаты $\{14 \cdot 3 = 42, 14 \cdot 5 = 70, 14 \cdot 8 = 112\}$ запиши сверху вниз так, чтобы нижняя цифра каждый раз была на одну «ступеньку» выше. Первая итерация закончена.

Теперь возьми следующую справа цифру {3} и проделай с ней те же действия – возведи ее в квадрат $\{3^2\}$ и запиши результат {9} сверху вниз так, чтобы его последняя цифра {9} «стояла» на нижней границе полосы, отвечающей десяткам. Удвой эту цифру $\{3 \cdot 2\}$ и умножь полученное число {6} на оставшиеся цифры {5, 8}, записывая произведения с соответствующим сдвигом. И т.д.

В конце сложи числа в каждой «подполосе», начиная с нижней, и запиши сумму (цифру) в самый правый столбец; при этом, как обычно, если сумма больше 9, пиши только ее последнюю цифру, а десятки «переноси» в следующую «подполосу» (табл.1).

Таблица 1

Вычисление 8537^2 = 72 880 369

полоса тысяч										6	7
									8	4	2
полоса сотен				1			4	2	0		8
				1		3	8	5			8
полоса десятков			7	2		0					0
		4	0		9						3
полоса единиц	4	2									6
	9										9

Алгоритм основан на тождестве:

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}^{\,2} = (10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^1 a_1 + a_0)^2 =$$
$$= a_0^2 + (2a_0 \cdot a_1) \cdot 10^1 + (2a_0 \cdot a_2) \cdot 10^2 + \ldots + (2a_0 \cdot a_n) \cdot 10^n +$$
$$+ a_1^2 \cdot 10^2 + (2a_1 \cdot a_2) \cdot 10^3 + (2a_1 \cdot a_3) \cdot 10^4 + \ldots + (2a_1 \cdot a_n) \cdot 10^{n+1} +$$
$$+ a_2^2 \cdot 10^4 + (2a_2 \cdot a_3) \cdot 10^5 + (2a_2 \cdot a_4) \cdot 10^6 + \ldots + (2a_2 \cdot a_n) \cdot 10^{n+2} +$$
$$+ \ldots + a_{n-1}^2 \cdot 10^{2n-2} + (2a_{n-1} \cdot a_n) \cdot 10^{2n-1} +$$
$$+ a_n^2 \cdot 10^{2n}.$$

2 вариант. Начерти столько горизонтальных полос, сколько цифр в числе {4}. Верхняя полоса будет отвечать единицам; вторая сверху – десяткам; третья сверху – сотням и т.д. Посередине каждой полосы проведи «среднюю линию», которая разобьет ее на две «подполосы». ***1 шаг***. Возьми крайнюю левую цифру числа {8}, возведи ее в квадрат $\{8^2\}$ и запиши результат {64} снизу вверх так, чтобы его последняя цифра {4} «упиралась» в верхнюю границу полосы, отвечающей последнему разряду {тысячам}. ***2 шаг***. Удвой эту цифру $\{8 \cdot 2\}$ и умножь полученное число {16} на оставшиеся цифры {5, 3, 7}, а результаты $\{16 \cdot 5 = 80,\ 16 \cdot 3 = 48,\ 16 \cdot 7 = 112\}$ запиши снизу вверх так, чтобы верхняя цифра каждый раз была на одну «ступеньку» выше. Первая итерация закончена.

Возьми следующую слева цифру {5}, возведи ее в квадрат $\{5^2\}$ и запиши результат {25} снизу вверх так, чтобы его последняя цифра {5} «упиралась» в верхнюю границу полосы, отвечающей следующему разряду {сотням}. Удвой эту цифру $\{5 \cdot 2\}$ и умножь полученное число {10} на оставшиеся цифры {3, 7}, записывая произведения с соответствующим сдвигом. И т.д.

В конце сложи числа в каждой «подполосе», начиная с верхней, и запиши сумму (цифру) в самый правый столбец; при этом, как обычно, если сумма больше 9, пиши только последнюю цифру, а десятки «переноси» в следующую «подполосу» (табл.2).

Таблица 2

Вычисление 8537^2 = 72 880 369

полоса единиц										9	9
									2	4	6
полоса десятков				2			0	9	4		3
				1		0	7				0
полоса сотен			8	1	5	3					8
		0	4		2						8
полоса тысяч	4	8									2
	6										7

Алгоритм основан на аналогичном тождестве:

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}^{\,2} = (10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^1 a_1 + a_0)^2 =$$

$$= a_n^2 \cdot 10^{2n} + (2a_n \cdot a_{n-1}) \cdot 10^{2n-1} + (2a_n \cdot a_{n-2}) \cdot 10^{2n-2} + \ldots + (2a_n \cdot a_0) \cdot 10^n +$$

$$+ a_{n-1}^2 \cdot 10^{2n-2} + (2a_{n-1} \cdot a_{n-2}) \cdot 10^{2n-3} + (2a_{n-1} \cdot a_{n-3}) \cdot 10^{2n-4} + \ldots + (2a_{n-1} \cdot a_0) \cdot 10^{n-1} +$$

$$+ a_{n-2}^2 \cdot 10^{2n-4} + (2a_{n-2} \cdot a_{n-3}) \cdot 10^{2n-5} + (2a_{n-2} \cdot a_{n-4}) \cdot 10^{2n-6} + \ldots + (2a_{n-2} \cdot a_0) \cdot 10^{n-2} +$$

$$+ \ldots + a_1^2 \cdot 10^2 + (2a_1 \cdot a_0) \cdot 10^1 +$$

$$+ a_0^2.$$

Перевод М.Рангачарьи по сути тот же, однако его «графическая реализация» отличается от нашей, во-первых, направлением заполнения таблицы, а во-вторых, тем, что произведения вписываются в таблицу целиком, их цифры не распределяются по отдельным клеткам [8, с.14 англ. текста].

Квадратный корень

В случае четвертой операции, [называемой] «квадратный корень», правило вычисления [вот] какое:

36. Когда из «крайней оджи» вычтен [максимально возможный] квадрат, [а затем поочередно то – находится] отношение «югмы» к удвоенному [«текущему значению» квадратного] корня, [то – из] «оджи» вычитается квадрат полученной [на предыдущем шаге цифры, тогда цифра, которая соответствует найденному в самом начале максимальному квадрату, и цифры, получающиеся далее, при] делении [с остатком каждой «югмы»] на удвоенное [«текущее значение» квадратного корня, дают полное] значение квадратного корня.

Распишем алгоритм Махавиры более подробно; параллельно, в фигурных скобках, будем выполнять действия над конкретным числом.

Пусть необходимо найти значение квадратного корня из числа, которое представляет собой полный квадрат {возьмем, к примеру, число 2 337 841}.

Шаг 1. Разобьем цифры этого числа справа налево по парам {2’33’78’41}. Самая левая группа, которая может состоять как из одной, так и из двух цифр, называется *«крайней оджей»* **(antyauja)** {в нашем случае это 2}.

Шаг 2. Найдем наибольшую цифру, квадрат которой не превосходит «крайнюю оджу», это будет первая цифра искомого корня {цифра 1}; вычтем ее квадрат из «крайней оджи» {из 2 вычитаем $1^2 = 1$, получаем 1}. Мы совершили 1-ое вычитание; если к его результату приписать («снести») следующую цифру {3} исходного числа, то получится число {13}, называемое *«югма»* **(yugma)**.

$$\sqrt{2'33'78'41} = 1\ldots$$

$$\begin{array}{l} \phantom{\text{югма} = {}}\underline{1} \\ \text{югма} = 13 \end{array}$$

Шаг 3. Ищем удвоенное «текущее значение» корня {«текущее значение» – это 1, оно удвоенное – это 2}. Полученный результат надо умножить на такую *максимальную цифру*, чтобы произведение, с одной стороны, не превосходило только что найденную «югму», а с другой стороны – удовлетворяло условию: если из текущей «югмы» вычесть это произведение, а затем «снести» следующую цифру исходного числа, то образовавшееся число, называемое «*оджа*» (**oja**), должно быть не меньше, чем квадрат подобранной цифры. Заметим, что последнее условие никак не оговаривается М.Рангачарьей [8, с.15 англ. текста], а оно важное, без него во многих случаях алгоритм заходит в тупик.

{Будем искать среди цифр, удовлетворяющих условию: $2k \le 13$, необходимо проверить $k=6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0$. Пусть $k=6$, вычитаем $2k=12$, получаем 1, «сносим» 3, получаем число 13, которое меньше, чем $k^2=36$; значит, $k=6$ не подходит:

$$\sqrt{2'33'78'41}=1\ldots$$

$$\begin{array}{rl} & \underline{1} \\ \textit{югма} = & 13 \\ & \underline{12} \\ & \ \ 13<6^2 \end{array}$$

Пусть $k=5$, вычитаем $2k=10$, получаем 3, «сносим» 3, получаем «оджу» 33, которая не меньше, чем $k^2=25$; значит, $k=5$ подходит:

$$\sqrt{2'33'78'41}=1\ldots$$

$$\begin{array}{rl} & \underline{1} \\ \textit{югма} = & 13 \\ & \underline{10\ \ } \\ \textit{оджа} = & \ \ 33<5^2 \end{array}$$

На этом шаге совершается 2-ое вычитание, и, повторимся, его результат с приставленной («снесенной») следующей цифрой исходного числа {число 33} называется «*оджа*» (**oja**).

Шаг 4. Найденная на предыдущем шаге цифра является следующей цифрой искомого значения корня. Вычитаем ее квадрат из текущей «оджи» и «сносим» следующую цифру, получается число, называемое, опять же, «югма» {в нашем примере – это 87}:

$$\sqrt{2'33'78'41}=15\ldots$$

$$\begin{array}{rl} & \underline{1} \\ \textit{югма} = & 13 \\ & \underline{10\ \ } \\ \textit{оджа} = & \ \ 33 \\ & \ \ \ \underline{25\ \ } \\ \textit{югма} = & \ \ \ \ 87 \end{array}$$

Далее возвращаемся к Шагу 3. {«Текущее значение» корня – это 15, оно удвоенное – это 30. Будем искать среди цифр, удовлетворяющих условию: $30k \le 87$. Необходимо проверить $k=2,\ 1,\ 0$.

Пусть $k=2$, вычитаем $30k=60$, получаем 27, «сносим» 8, получаем «оджу» 278, которая не меньше, чем $k^2=4$; значит, $k=2$ подходит:

$$\sqrt{2'33'78'41}=15\ldots$$

$$\begin{array}{rl}
 & 1\\ \cline{2-2}
\textit{югма}= & 13\\
 & 10\\ \cline{2-2}
\textit{оджа}= & 33\\
 & 25\\ \cline{2-2}
\textit{югма}= & 87\\
 & 60\\ \cline{2-2}
\textit{оджа}= & 278\geq 2^2
\end{array}$$

Найденная таким образом цифра 2 является следующей цифрой искомого значения корня. Вычитаем ее квадрат из текущей «оджи», получаем 274, «сносим» следующую цифру 4, получается число 2744, называемое, опять же, «югма»:

$$\sqrt{2'33'78'41}=152\ldots$$

$$\begin{array}{rl}
 & 1\\ \cline{2-2}
\textit{югма}= & 13\\
 & 10\\ \cline{2-2}
\textit{оджа}= & 33\\
 & 25\\ \cline{2-2}
\textit{югма}= & 87\\
 & 60\\ \cline{2-2}
\textit{оджа}= & 278\\
 & 4\\ \cline{2-2}
\textit{югма}= & 2744
\end{array}$$

Снова, «текущее значение» корня – это 152, оно удвоенное – это 304. Будем искать среди цифр, удовлетворяющих условию: $304k\leq 2744$. Необходимо проверить $k=9$, 8, …, 1, 0. Пусть $k=9$, вычитаем $304k=2736$, получаем 8, «сносим» 1, получаем «оджу» 81, которая не меньше, чем $k^2=81$; значит, $k=9$ подходит. Найденная только что цифра 9 является следующей и последней цифрой искомого значения корня. Вычитаем ее квадрат из текущей «оджи», получаем 0:

$$\sqrt{2'33'78'41}=1529$$

$$\begin{array}{rl}
 & 1\\ \cline{2-2}
\textit{югма}= & 13
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rl}
 & \underline{10} \\
\textit{оджа} = & 33 \\
 & \underline{25} \\
\textit{югма} = & 87 \\
 & \underline{60} \\
\textit{оджа} = & 278 \\
 & \underline{4} \\
\textit{югма} = & 2744 \\
 & \underline{2736} \\
\textit{оджа} = & 81 \geq 9^2 \\
 & \underline{81} \\
 & 0
\end{array}
$$

На этом вычисление заканчивается: $\sqrt{2\,337\,841} = 1529.\}$

Описанный метод основан на следующей формуле, которая несложно проверяется методом математической индукции:

$$
\begin{aligned}
&(10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^1 a_1 + a_0)^2 = \\
&= 10^{2n} a_n^2 + \\
&+ 2a_n \cdot 10^{2n-1} a_{n-1} + 10^{2n-2} a_{n-1}^2 + \\
&+ 2(10a_n + a_{n-1}) \cdot 10^{2n-3} a_{n-1} + 10^{2n-4} a_{n-2}^2 + \\
&+ 2(10^2 a_n + 10a_{n-1} + a_{n-2}) \cdot 10^{2n-5} a_{n-2} + 10^{2n-6} a_{n-3}^2 + \\
&+ \ldots + 2(10^{n-1} a_n + 10^{n-2} a_{n-1} + \ldots + a_1) \cdot 10 a_0 + 10^0 a_0^2
\end{aligned}
$$

Алгебраический «подтекст» процедур алгоритма становится вполне ясным, если рассмотреть, скажем, 7- или 8-значное число N (являющееся полным квадратом), из которого требуется извлечь квадратный корень. Ввиду $1\,000\,000 \leq N < 100\,000\,000$ имеем $1\,000 \leq \sqrt{N} < 10\,000$, значит, $\sqrt{N}$ – четырехзначное число.

Шаг 1 никаких алгебраических преобразований не предполагает.

Шаг 2. Находим максимальную цифру $a \in \overline{1{,}9}$ такую, что $N \geq 1\,000\,000a^2$.

Если $N = 1\,000\,000a^2$, то $N = (1000a)^2$, и вычисление заканчивается.

Пусть $N > 1\,000\,000a^2$. Рассмотрим $N_1 = N - 1\,000\,000a^2 > 0$.

Шаг 3. Возьмем максимальную цифру $b \in \overline{0, 9}$, удовлетворяющую условию:

$N_1 - 2a \cdot 100\,000b \geq 10\,000b^2$.

Такая цифра заведомо существует, поскольку выписанному неравенству удовлетворяет, например, цифра 0.

Шаг 4. Рассмотрим $N_2 = N_1 - 2a \cdot 100\,000b - 10\,000b^2 \geq 0$.

Если $N_2 = 0$, то

$$N = N_1 + 1\,000\,000a^2 = (2a \cdot 100\,000b + 10\,000b^2) + 1\,000\,000a^2 =$$

$$= (1000a + 100b)^2,$$

и вычисление заканчивается.

Пусть $N_2 > 0$.

Снова Шаг 3. Возьмем максимальную цифру $c \in \overline{0{,}9}$, удовлетворяющую условию:

$N_2 - 2(10a + b) \cdot 1000c \geq 100c^2$.

Такая цифра заведомо существует, поскольку выписанному неравенству удовлетворяет, например, цифра 0.

Снова Шаг 4. Рассмотрим

$$N_3 = N_2 - 2(10a + b) \cdot 1000c - 100c^2 \geq 0.$$

Если $N_3 = 0$, то

$$N = N_1 + 1\,000\,000a^2 =$$

$$= (N_2 + 2a \cdot 100\,000b + 10\,000b^2) + 1\,000\,000a^2 =$$

$$= [100c^2 + 2(10a + b) \cdot 1000c] + 2a \cdot 100\,000b +$$

$$+ 10\,000b^2 + 1\,000\,000a^2 = (1000a + 100b + 10c)^2,$$

и вычисление заканчивается.

Пусть $N_3 > 0$.

Снова Шаг 3. Возьмем максимальную цифру $d \in \overline{0{,}9}$, удовлетворяющую условию:

$N_3 - 2(100a + 10b + c) \cdot 10d \geq d^2$.

Такая цифра заведомо существует, поскольку выписанному неравенству удовлетворяет, например, цифра 0.

Снова Шаг 4. Рассмотрим

$$N_4 = N_3 - 2(100a + 10b + c) \cdot 10d - d^2 \geq 0.$$

Если $N_4 = 0$, то

$$N = N_2 + 2a \cdot 100\,000b + 10\,000b^2 + 1\,000\,000a^2 =$$

$$= [N_3 + 2(10a + b) \cdot 1000c + 100c^2 + 2a \cdot 100\,000b] +$$

$$+ 10\,000b^2 + 1\,000\,000a^2 =$$

$$= [2(100a + 10b + c) \cdot 10d + d^2] + 2(10a + b) \cdot 1000c + 100c^2 +$$

$$+2a \cdot 100\,000b + 10\,000b^2 + 1\,000\,000a^2 =$$

$$= (1000a + 100b + 10c + d)^2,$$

и вычисление заканчивается.

Пусть $N_4 > 0$, тогда

$$N = N_3 + 2(10a + b) \cdot 1000c + 100c^2 +$$

$$+2a \cdot 100\,000b + 10\,000b^2 + 1\,000\,000a^2 =$$

$$= [N_4 + 2(100a + 10b + c) \cdot 10d + d^2] + 2(10a + b) \cdot 1000c +$$

$$+100c^2 + 2a \cdot 100\,000b + 10\,000b^2 + 1\,000\,000a^2 >$$

$$> 2(100a + 10b + c) \cdot 10d + d^2 + 2(10a + b) \cdot 1000c + 100c^2 +$$

$$+2a \cdot 100\,000b + 10\,000b^2 + 1\,000\,000a^2 = (1000a + 100b + 10c + d)^2.$$

Поскольку d – это максимальная цифра, удовлетворяющая условию: $N_3 - 2(100a + 10b + c) \cdot 10d \ge d^2$, то для любой цифры $d_1 > d$ будет справедливо обратное неравенство: $N_3 - 2(100a + 10b + c) \cdot 10d_1 < d_1^2$. Следовательно,

$$N = N_3 + 2(10a + b) \cdot 1000c + 100c^2 +$$

$$+2a \cdot 100\,000b + 10\,000b^2 + 1\,000\,000a^2 <$$

$$< d_1^2 + 2(100a + 10b + c) \cdot 10d_1 + 2(10a + b) \cdot 1000c + 100c^2 +$$

$$+2a \cdot 100\,000b + 10\,000b^2 + 1\,000\,000a^2 = (1\,000a + 100b + 10c + d_1)^2.$$

С другой стороны, для всякой цифры $d_2 < d$ число

$$N_3 \ge d^2 + 2(100a + 10b + c) \cdot 10d > d_2^2 + 2(100a + 10b + c) \cdot 10d_2,$$

поэтому

$$N = N_3 + 2(10a + b) \cdot 1\,000c + 100c^2 +$$

$$+2a \cdot 100\,000b + 10\,000b^2 + 1\,000\,000a^2 >$$

$$> [d_2^2 + 2(100a + 10b + c) \cdot 10d_2] + 2(10a + b) \cdot 1000c + 100c^2 +$$

$$+2a \cdot 100\,000b + 10\,000b^2 + 1\,000\,000a^2 = (1\,000a + 100b + 10c + d_2)^2.$$

В итоге:

1) a, b, c, d – цифры, причем $a \ge 1$,

2) $N > (1\,000a + 100b + 10c + d)^2$,

3) для всякой цифры $d_1 > d$ справедливо

$N < (1\,000a + 100b + 10c + d_1)^2$,

4) для всякой цифры $d_2 < d$ справедливо

$$N > (1\,000a + 100b + 10c + d_2)^2,$$

чего не может быть, поскольку N является квадратом некоторого 4-значного натурального числа. Значит, случай $N_4 > 0$ невозможен, а найденные цифры a, b, c, d составляют число $\overline{abcd} = \sqrt{N}$.

[Возведение в] куб

В случае пятой операции, [называемой «возведение в] куб», правило вычисления [вот] какое:

43. Куб может быть получен [как] произведение трех одинаковых [множителей]; или [так: если найдено] произведение [трех множителей, первый из которых – это заданное число, второе – это заданное число], уменьшенное на произвольную, [но] отличающуюся [от заданного числа] величину, [а третье – это заданное число], увеличенное [на ту же произвольную величину, то это произведение], сложенное с квадратом [того же] произвольного [числа], умноженным на наименьшее [из трех упомянутых выше чисел], а также с кубом [той же] произвольной [величины, даст куб заданного числа].

Алгебраически:

$$n \cdot n \cdot n = n^3,$$

$$n(n-a)(n+a) + (\min\{n,\, n-a,\, n+a\}) \cdot a^2 + a^3 = n^3.$$

Причем в последнем соотношении, очевидно, подразумевается $a > 0$, откуда, в частности, $\min\{n,\, n-a,\, n+a\} = n - a$.

44. Или [другой способ]: сумма [арифметической прогрессии, у которой] первый член [равен возводимому в куб] произвольному числу, разность [равна] удвоенному [возводимому в куб] произвольному числу, [а] количество членов [равно возводимому в куб] произвольному числу, [есть куб этого произвольного числа]. Или еще [способ]: квадрат [возводимого в куб] произвольного числа, сложенный с суммой [арифметической прогрессии, у которой] первый член [равен] 1, разность [равна] 2, [а] количество членов [равно возводимому в куб] произвольному числу, [причем эта сумма] умножена на [возводимое в куб] произвольное число без 1, [– тоже есть куб этого произвольного числа].

Алгебраически:

$$\underbrace{n + 3n + 5n + 7n + \ldots}_{n\ \text{слагаемых}} = n^3$$

$$n^2 + (n-1)(\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots}_{n\ \text{слагаемых}}) = n^3.$$

45. [Пусть] при условии, что [в качестве] первого члена [и] разности арифметической прогрессии [взята] 1, [а] количество членов произвольно, каждый член прогрессии умножен на предшествующее [ему целое число; тогда] сумма [таких] произведений, утроенная [и затем] сложенная с последним [членом исходной последовательности], есть куб [количества членов].

Замечания: **каждый член прогрессии** – в тексте **pUrvaM rAziM** (букв. "предыдущая величина"); **умножен на предшествующее [ему целое число]** – в тексте **pareNa saGguNayet** (букв. "на предшествующее следует умножить").

Алгебраически:

$$[0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)\cdot n]\cdot 3+n=n^3.$$

Действительно, сумма в квадратных скобках равна

$$S=0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)\cdot n=\sum_{k=1}^{n}(k-1)\cdot k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)=\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}k\right).$$

В силу известных соотношений

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ и } \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},$$

имеем:

$$S=\frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{6}\cdot[(2n+1)-3]=$$

$$=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}=\frac{n^3-n}{3},$$

откуда легко следует утверждаемое Махавирой правило.

46. [Возьми] последнее [слагаемое и] слагаемое, [равное сумме] других, [стоящих перед ним; возведи одно из двух в] квадрат [и] умножь [на другое] слагаемое; [сделай] симметричную процедуру; утрой [оба произведения и сложи; делай] так снова [и снова, перемещаясь от последнего слагаемого к первому]; тогда [полученная] сумма, сложенная с кубами всех слагаемых, [даст] куб [исходной суммы].

Как трактовать встречающийся в тексте термин **antya** (вернее, **antya[sthAna]**), в данном случае неважно. На суть процедуры это не повлияет. Будем считать, что нумерация слагаемых идет справа налево, и, таким образом, «последнее» слагаемое – это то, которое слева, а «стоящие перед ним» – это те, что расположены правее.

Тогда строфа дает правило вычисления куба произвольной конечной суммы по формуле:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^3 = 3a_1^2(a_2 + a_3 + \ldots + a_n) + 3a_1(a_2 + a_3 + \ldots + a_n)^2 +$$
$$+3a_2^2(a_3 + a_4 + \ldots + a_n) + 3a_2(a_3 + a_4 + \ldots + a_n)^2 +$$
$$+\ldots+3a_{n-1}^2 \cdot a_n + 3a_{n-1} \cdot a_n^2 +$$
$$+(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3),$$

которая получается многократным применением к левой части разложения:

$$(a_k + S_k)^3 = (3a_k^2 S_k + 3a_k S_k^2 + a_k^3) + S_k^3,$$

где $S_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n, k \in \overline{1, n-1}$.

47. Или [по-другому: выписываем] куб последней [цифры; затем выписываем] ее же квадрат, [но] утроенный [и] умноженный [по отдельности] на [каждую] оставшуюся [цифру, причем каждый раз соответствующим образом] сдвигая [результат] вверх; [затем вычисляем] квадрат [каждой] оставшейся [цифры, по отдельности] умноженный на утроенную последнюю [цифру], ставя [его в таблицу и должным образом] сдвигая вверх; [делаем] так дальше. [Таково] правило [нахождения куба числа].

Общая со строфой 1.31 лексика (**antya**, **kRti**, **zeSa**, **utsArya**, **evaM**, **vidhi**) указывает на то, что Махавира пытается изложить алгоритм подсчета куба натурального числа, аналогичный описанному в 1.31. Подобно 1.31, термин **antya** (букв. “последняя [цифра]”) здесь тоже может быть истолкован двояко – «последняя [слева цифра]» или «последняя [справа цифра]». Если, к примеру, мы возьмем его в первом значении, то алгоритм будет реализовывать следующее равенство:

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}^{\,3} = (10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^1 a_1 + a_0)^3 =$$
$$= a_0^3 + (3a_0^2 \cdot a_1) \cdot 10^1 + (3a_0^2 \cdot a_2) \cdot 10^2 + \ldots + (3a_0^2 \cdot a_n) \cdot 10^n +$$
$$+(3a_0 \cdot a_1^2) \cdot 10^2 + (3a_0 \cdot a_2^2) \cdot 10^4 + \ldots + (3a_0 \cdot a_n^2) \cdot 10^{2n} +$$
$$+a_1^3 \cdot 10^3 + (3a_1^2 \cdot a_2) \cdot 10^4 + (3a_1^2 \cdot a_3) \cdot 10^5 + \ldots + (3a_1^2 \cdot a_n) \cdot 10^{n+2} +$$
$$+(3a_1 \cdot a_2^2) \cdot 10^5 + (3a_1 \cdot a_3^2) \cdot 10^7 + \ldots + (3a_1 \cdot a_n^2) \cdot 10^{2n+1} +$$
$$+\ldots+a_{n-1}^3 \cdot 10^{3n-3} + (3a_{n-1}^2 \cdot a_n) \cdot 10^{3n-2} +$$
$$+(3a_{n-1} \cdot a_n^2) \cdot 10^{3n-1} +$$
$$+a_n^3 \cdot 10^{3n},$$

которое с помощью замены $b_p = 10^p a_p$, $p \in \overline{0,n}$, переписывается в более «прозрачном» эквивалентном виде:

$$(b_0 + b_1 + \ldots + b_n)^3 = \left(\sum_{i=0}^{n} b_i^3\right) + 3\left(\sum_{0 \le i < j \le n} b_i b_j^2\right) + 3\left(\sum_{0 \le i < j \le n} b_i^2 b_j\right).$$

Однако это равенство неверное, поскольку в правой части не хватает еще одного слагаемого: $6\left(\sum_{0 \le i < j < k \le n} b_i b_j b_k\right)$. Таким образом, алгоритм Махавиры неправилен. М.Рангачарья, понявший строфу 1.47 по сути так же, как и мы, не заметил этого [8, с.17 англ. текста]. Если переводить **antya** как «последняя [справа цифра]», ситуация не меняется.

Дополним правило Махавиры вычислением недостающего слагаемого и проиллюстрируем получающийся алгоритм на примере нахождения куба числа 6245.

1 вариант (когда под **antya** понимается «последняя [слева цифра]»). Начерти столько горизонтальных полос, сколько цифр в числе {4}. Нижняя полоса будет отвечать единицам; вторая снизу – десяткам; третья снизу – сотням и т.д. Внутри каждой полосы проведи две линии, разбивающие ее на три одинаковые «подполосы». ***1 шаг***. Возьми последнюю цифру {5}, возведи ее в куб $\{5^3\}$ и запиши результат {125} сверху вниз так, чтобы его последняя цифра {5} «стояла» на нижней границе полосы, отвечающей единицам. ***2 шаг***. Теперь утрой квадрат рассматриваемой цифры $\{3 \cdot 5^2\}$, умножь полученное число {75} на оставшиеся цифры {4, 2, 6}, а результаты $\{75 \cdot 4 = 300,\ 75 \cdot 2 = 150,\ 75 \cdot 6 = 450\}$ запиши сверху вниз так, чтобы нижняя цифра каждый раз была на одну «ступеньку» выше. ***3 шаг***. Далее, утрой последнюю цифру $\{3 \cdot 5\}$, умножь полученное число {15} на квадраты оставшихся цифр {4, 2, 6}, а результаты $\{15 \cdot 4^2 = 240,\ 15 \cdot 2^2 = 60,\ 15 \cdot 6^2 = 540\}$ запиши сверху вниз так, чтобы нижняя цифра каждый раз была на две «ступеньки» выше предыдущей. ***4 шаг***. Возьми все ту же цифру {5}, умножь ее на 6 и результат {30} умножь на всевозможные пары различных оставшихся цифр {4, 2, 6}. Результаты $\{30 \cdot 4 \cdot 2 = 240,\ 30 \cdot 4 \cdot 6 = 720,\ 30 \cdot 2 \cdot 6 = 360\}$ запиши со сдвигами, соответствующими десятичным разрядам, из которых берутся цифры {цифра 5 отвечает единицам; поэтому при сдвиге вверх надо «отталкиваться» от нижней границы полосы единиц; возьмем, например, $30 \cdot 4 \cdot 2 = 240$; 4 – стоит в десятках, 2 – в сотнях, значит, число 240 должно быть записано со сдвигом на $1 + 2 = 3$ клетки; аналогично, число $30 \cdot 4 \cdot 6 = 720$ должно быть сдвинуто на $1+3=4$ клетки, а число $30\cdot 2\cdot 6=360$ – на $2+3=5$ клеток}. Первая итерация закончена.

Далее описанные шаги выполняются последовательно для всех оставшихся цифр {4, 2, 6}. При этом результаты выполнения шага 1 всегда будут записываться над нижней границей соответствующей полосы; а ближе к концу отпадет необходимость в подсчете ушестеренных произведений троек (при «обработке» второй и первой цифры), а также утроенных произведений с квадратами (при «обработке» первой цифры).

В конце производится сложение по «подполосам», начиная с нижней (табл.3).

Таблица 3

Вычисление 6245^3 = 243 555 156 125.

Полоса тысяч																				2	2
																			2	1	4
														4					1	6	3
Полоса сотен						5								3	2		7	6			5
						4			3			2		2	8		2				5
						0		7	6			8	4		8	8					5
Полоса десятков				4		6		2	2	0		9	8	8							1
			1	5	2	0		4	0		6	6									5
		3	5	0	4			0			4										6
Полоса единиц	1	0	0		0																1
	2	0																			2
	5																				5

2 вариант (когда под **antya** понимается «последняя [справа цифра]») аналогичен, мы его не приводим.

Кубический корень

В случае шестой операции, [называемой] «кубический корень», правило вычисления [вот] какое:

53. Когда из «крайней гханы» вычтен [максимально возможный] куб, [а затем по циклу сначала –] «бхаджья» разделена на утроенный квадрат [«текущего значения» кубического] корня, [затем –] из «шодхьи» вычтен квадрат [только что] полученной [цифры корня, умноженный на] утроенное [найденное] ранее [«текущее значение» корня, и] затем – из «гханы» [вычтен] куб [только что полученной цифры корня, тогда из этих цифр составляется значение кубического корня].

Распишем алгоритм Махавиры более подробно; параллельно, в фигурных скобках, будем выполнять действия над конкретным числом.

Пусть необходимо найти значение кубического корня из числа, которое представляет собой полный куб {возьмем, к примеру, число 13 312 053}.

Шаг 1. Разобьем цифры этого числа справа налево по тройкам {13’312’053}. Самая левая группа, которая может состоять из одной, двух или трех цифр, называется «*крайней гханой*» **(antyaghana)** {в нашем случае это 13}.

Шаг 2. Найдем наибольшую цифру, куб которой не превосходит «крайнюю гхану», это будет первая цифра искомого корня {цифра 2}; вычтем ее куб из «крайней гханы» {из 13 вычитаем $2^2 = 8$, получаем 5}. Мы совершили 1-ое вычитание; если к его результату приписать («снести») следующую цифру {3} исходного числа, то получится число {53}, называемое «*бхаджья*» **(bhAjya)**.

$$\sqrt[3]{13'312'053} = 2\ldots$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \hline \textit{бхаджья} = 53 \end{array}$$

Шаг 3. Ищем утроенный квадрат «текущего значения» корня {«текущее значение» – это 2, его утроенный квадрат – это $3 \cdot 2^2 = 12$}. Полученный результат надо умножить на такую *максимальную цифру* k, чтобы произведение, с одной стороны, не превосходило только что найденную «бхаджью», а с другой – удовлетворяло следующему условию: если из текущей «бхаджьи» вычесть это произведение (***Шаг 4***), «снести» следующую цифру (***Шаг 5***) и затем, с соответствующим сдвигом, вычесть произведение «текущего значения» корня и утроенного квадрата цифры k (***Шаг 6***), то после «снесения» очередной цифры (***Шаг 7***) получится число не меньше k^3. Ясно, что правильность выбора цифры k будет установлена при полном или частичном осуществлении Шагов 4–5. Если все условия оказываются выполненными, то найденная цифра записывается в ответ, вычисляемая на Шаге 4 разность с присоединенной («снесенной») цифрой получает название «*шодхья*» **(zodhya)**; а вычисляемая на Шаге 5 разность с присоединенной («снесенной») цифрой, получает название «*гхана*» **(ghana)**.

{Вернемся к примеру. Будем искать среди цифр, удовлетворяющих условию: $12k \le 53$, необходимо проверить $k = 4$, 3, 2, 1, 0.

Пусть $k = 4$, из текущей «бхаджьи» 53 вычитаем $12k = 48$, получаем 5, «сносим» 1, получаем «шодхью» 51, из которой надо вычесть произведение $3k^2 \cdot 2 = 96$ так, чтобы «гхана» (то есть результат вычитания с присоединенной цифрой 2) была не меньше $k^3 = 64$:

$$\sqrt[3]{13'312'053} = 2\ldots$$

$$\begin{array}{r} \underline{8} \\ \textit{бхаджья} = 53 \\ \underline{48} \\ \textit{шодхья} = \;51 \\ \underline{96} \end{array}$$

Видим, что это невозможно ($51 - 96 < 0$), следовательно, цифра $k = 4$ не подходит.

Пусть $k = 3$, из текущей «бхаджьи» 53 вычитаем $12k = 36$, получаем 17, «сносим» 1, получаем «шодхью» 171, из которой надо вычесть произведение $3k^2 \cdot 2 = 54$ так, чтобы «гхана» (то есть результат вычитания с присоединенной цифрой 2) была не меньше $k^3 = 27$. В нашем случае «гхана» $1172 \geq 27$, таким образом, цифра $k = 3$ найдена правильно, записываем ее в ответ:

$$\sqrt[3]{13'312'053} = 23\ldots$$

$$\begin{array}{r} \underline{8} \\ \textit{бхаджья} = 53 \\ \underline{36} \\ \textit{шодхья} = 171 \\ \underline{54} \\ \textit{гхана} = 1172 \geq 3^3 \end{array}$$

Теперь «текущее значение» корня – это 23.}

Шаг 8. Из «гханы» вычитаем куб только что найденной цифры $k\{1172 - 27 = 1145\}$, «сносим» очередную цифру {0} и получаем следующую «бхаджью» {то есть 11450:

$$\sqrt[3]{13'312'053} = 23\ldots$$

$$\begin{array}{r} \underline{8} \\ \textit{бхаджья} = 53 \\ \underline{36} \\ \textit{шодхья} = 171 \\ \underline{54} \\ \textit{гхана} = 1172 \\ \underline{27} \\ \textit{бхаджья} = 11450 \end{array}$$

Возвращаемся к Шагу 3. {Утроенный квадрат «текущего значения» корня – это $3 \cdot 23^2 = 1587$. Ищем такую *максимальную цифру* k, чтобы число $1587k$, с одной стороны, не превосходило только что найденную «бхаджью» 11450, а с другой стороны – удовлетворяло следующему условию: если из текущей «бхаджьи» 11450 вычесть $1587k$ (***снова Шаг 4***), потом «снести» следующую цифру 5 (***снова Шаг 5***) и затем, с соответствующим сдвигом, вычесть произведение утроенного квадрата этой цифры k и «текущего значения» корня 23 (***снова Шаг 6***), то после «снесения» очередной цифры 3 (***снова Шаг 7***) должно получиться число не меньше k^3.

Будем искать среди цифр, удовлетворяющих условию: $1587k \le 11450$, необходимо проверить $k = 7$, 6, ..., 1, 0.

Пусть $k = 7$, из текущей «бхаджьи» 11450 вычитаем $1587k = 11109$, получаем 341, «сносим» 5, получаем «шодхью» 3415, из которой надо вычесть произведение $3k^2 \cdot 23 = 3381$ так, чтобы «гхана» (то есть результат вычитания с присоединенной цифрой 3) была не меньше $k^3 = 343$. В данном случае «гхана» в точности равна 343, следовательно, цифра $k = 7$ выбрана правильно. Записываем ее в результат. Завершает процедуру вычисления ***снова Шаг 8***:

$$\sqrt[3]{13'312'053} = 237\ldots$$

$$\begin{array}{rl}
 & \underline{8} \\
\textit{бхаджья} = & 53 \\
 & \underline{36} \\
\textit{шодхья} = & 171 \\
 & \underline{54} \\
\textit{гхана} = & 1172 \\
 & \underline{27} \\
\textit{бхаджья} = & 11450 \\
 & \underline{11109} \\
\textit{шодхья} = & 3415 \\
 & \underline{3381} \\
\textit{гхана} = & 343 \ge 7^3 \\
 & \underline{343} \\
 & 0
\end{array}$$

Итак: $\sqrt[3]{13\,312\,053} = 237.$}

Описанный метод основан на следующей формуле, которая несложно проверяется методом математической индукции:

$$(10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^1 a_1 + a_0)^3 =$$

$$= 10^{3n} a_n^3 +$$

$$+3a_n^2\cdot 10^{3n-1}a_{n-1}+3a_{n-1}\cdot 10^{3n-2}a_{n-1}^2+10^{3n-3}a_{n-1}^3+$$
$$+3(10a_n+a_{n-1})^2\cdot 10^{3n-4}a_{n-2}+3(10a_n+a_{n-1})\cdot 10^{3n-5}a_{n-2}^2+$$
$$+10^{3n-6}a_{n-2}^3+$$
$$+3(100a_n+10a_{n-1}+a_{n-2})^2\cdot 10^{3n-7}a_{n-3}+$$
$$+3(100a_n+10a_{n-1}+a_{n-2})\cdot 10^{3n-8}a_{n-3}^2+$$
$$+10^{3n-9}a_{n-3}^3+$$
$$+\ldots+3(10^{n-1}a_n+\ldots+a_1)^2\cdot 10^2a_0+3(10^{n-1}a_n+\ldots+a_1)\cdot 10a_0^2+a_0^3.$$

Алгебраический «подтекст» процедур алгоритма становится вполне ясным, если рассмотреть, скажем, 10-, 11- или 12-значное число N (являющееся полным кубом), из которого извлекается кубический корень. Ввиду $10^9\le N<10^{12}$ имеем $1\,000\le\sqrt[3]{N}<10\,000$, значит, $\sqrt[3]{N}$ – четырехзначное число.

Шаг 1 никаких алгебраических преобразований не предполагает.

Шаг 2. Находим максимальную цифру $a\in\overline{1,9}$ такую, что $N\ge 10^9a^3$.

Если $N=10^9a^3$, то $N=(1\,000a)^3$, и вычисление заканчивается.

Пусть $N>10^9a^3$. Рассмотрим $N_1=N-10^9a^3>0$.

Шаг 3–7. Возьмем максимальную цифру $b\in\overline{0,9}$, удовлетворяющую условию:

$$N_1-3a^2b\cdot 10^8-3ab^2\cdot 10^7\ge 10^6b^3.$$

Такая цифра заведомо существует, поскольку выписанному неравенству удовлетворяет, например, цифра 0.

Шаг 8. Рассмотрим

$$N_2=N_1-3a^2b\cdot 10^8-3ab^2\cdot 10^7-10^6b^3\ge 0.$$

Если $N_2=0$, то

$$N=N_1+10^9a^3=(3a^2b\cdot 10^8+3ab^2\cdot 10^7+10^6b^3)+10^9a^3=$$
$$=(1\,000a+100b)^3,$$

и вычисление заканчивается.

Пусть $N_2>0$.

Снова Шаги 3–7. Возьмем максимальную цифру $c\in\overline{0,9}$, удовлетворяющую условию:

$$N_2-3(10a+b)^2\cdot 10^5c-3(10a+b)\cdot 10^4c^2\ge 1\,000c^3.$$

Такая цифра заведомо существует, поскольку выписанному неравенству удовлетворяет, например, цифра 0.

Снова Шаг 8. Рассмотрим число

$$N_3 = N_2 - 3(10a+b)^2 \cdot 10^5 c - 3(10a+b)\cdot 10^4 c^2 - 1\,000c^3 \ge 0.$$

Если $N_3 = 0$, то

$$N = N_1 + 10^9 a^3 = (N_2 + 3a^2b\cdot 10^8 + 3ab^2 \cdot 10^7 + 10^6 b^3) + 10^9 a^3 =$$

$$= [3(10a+b)^2 \cdot 10^5 c + 3(10a+b)\cdot 10^4 c^2 + 1000c^3] +$$

$$+3a^2b\cdot 10^8 + 3ab^2 \cdot 10^7 + 10^6 b^3 + 10^9 a^3 =$$

$$= (1\,000a + 100b + 10c)^3,$$

и вычисление заканчивается.

Пусть $N_3 > 0$.

Снова Шаги 3–7. Возьмем максимальную цифру $d \in \overline{0{,}9}$, удовлетворяющую условию:

$$N_3 - 3(100a + 10b + c)^2 \cdot 100d - 3(100a+10b+c)\cdot 10d^2 \ge d^3.$$

Такая цифра заведомо существует, поскольку выписанному неравенству удовлетворяет, например, цифра 0.

Снова Шаг 8. Рассмотрим число

$$N_4 = N_3 - 3(100a+10b+c)^2 \cdot 100d - 3(100a+10b+c)\cdot 10d^2 - d^3 \ge 0.$$

Если $N_4 = 0$, то

$$N = N_2 + 3a^2b\cdot 10^8 + 3ab^2 \cdot 10^7 + 10^6 b^3 + 10^9 a^3 =$$

$$= [N_3 + 3(10a+b)^2 \cdot 10^5 c + 3(10a+b)\cdot 10^4 c^2 + 1000c^3] +$$

$$+3a^2b\cdot 10^8 + 3ab^2 \cdot 10^7 + 10^6 b^3 + 10^9 a^3 =$$

$$= [3(100a+10b+c)^2 \cdot 100d + 3(100a+10b+c)\cdot 10d^2 + d^3] +$$

$$+3(10a+b)^2 \cdot 10^5 c + 3(10a+b)\cdot 10^4 c^2 + 1000c^3 +$$

$$+3a^2b\cdot 10^8 + 3ab^2 \cdot 10^7 + 10^6 b^3 + 10^9 a^3 =$$

$$= (1\,000a + 100b + 10c + d)^3,$$

и вычисление заканчивается.

Пусть $N_4 > 0$, тогда

$$N = N_3 + 3(10a+b)^2 \cdot 10^5 c + 3(10a+b)\cdot 10^4 c^2 + 1\,000c^3 +$$

$$+3a^2b\cdot 10^8 + 3ab^2 \cdot 10^7 + 10^6 b^3 + 10^9 a^3 =$$

$$= [N_4 + 3(100a+10b+c)^2 \cdot 100d + 3(100a+10b+c)\cdot 10d^2 + d^3] +$$

$$+3(10a+b)^2 \cdot 10^5 c + 3(10a+b)\cdot 10^4 c^2 + 1\,000c^3 +$$

$$+3a^2b\cdot 10^8 + 3ab^2 \cdot 10^7 + 10^6 b^3 + 10^9 a^3 >$$

$$> 3(100a+10b+c)^2\cdot 100d + 3(100a+10b+c)\cdot 10d^2 + d^3 +$$

$$+3(10a+b)^2\cdot 10^5c + 3(10a+b)\cdot 10^4c^2 + 1\,000c^3 +$$

$$+3a^2b\cdot 10^8 + 3ab^2\cdot 10^7 + 10^6b^3 + 10^9a^3 =$$

$$= (1\,000a+100b+10c+d)^3.$$

Поскольку d – это максимальная цифра, удовлетворяющая условию

$$N_3 - 3(100a+10b+c)^2\cdot 100d - 3(100a+10b+c)\cdot 10d^2 \ge d^3,$$

то для любой цифры $d_1 > d$ будет справедливо обратное неравенство:

$$N_3 - 3(100a+10b+c)^2\cdot 100d_1 - 3(100a+10b+c)\cdot 10d_1^2 < d_1^3.$$

Следовательно,

$$N = N_3 + 3(10a+b)^2\cdot 10^5c + 3(10a+b)\cdot 10^4c^2 + 1\,000c^3 +$$

$$+3a^2b\cdot 10^8 + 3ab^2\cdot 10^7 + 10^6b^3 + 10^9a^3 <$$

$$< [3(100a+10b+c)^2\cdot 100d_1 + 3(100a+10b+c)\cdot 10d_1^2 + d_1^3] +$$

$$+3(10a+b)^2\cdot 10^5c + 3(10a+b)\cdot 10^4c^2 + 1\,000c^3 +$$

$$+3a^2b\cdot 10^8 + 3ab^2\cdot 10^7 + 10^6b^3 + 10^9a^3 =$$

$$= (1\,000a+100b+10c+d_1)^3.$$

С другой стороны, для всякой цифры $d_2 < d$ число

$$N_3 \ge 3(100a+10b+c)^2\cdot 100d + 3(100a+10b+c)\cdot 10d^2 + d^3 >$$

$$> 3(100a+10b+c)^2\cdot 100d_2 + 3(100a+10b+c)\cdot 10d_2^2 + d_2^3,$$

поэтому

$$N = N_3 + 3(10a+b)^2\cdot 10^5c + 3(10a+b)\cdot 10^4c^2 + 1\,000c^3 +$$

$$+3a^2b\cdot 10^8 + 3ab^2\cdot 10^7 + 10^6b^3 + 10^9a^3 >$$

$$> [3(100a+10b+c)^2\cdot 100d_2 + 3(100a+10b+c)\cdot 10d_2^2 + d_2^3] +$$

$$+3(10a+b)^2\cdot 10^5c + 3(10a+b)\cdot 10^4c^2 + 1\,000c^3 +$$

$$+3a^2b\cdot 10^8 + 3ab^2\cdot 10^7 + 10^6b^3 + 10^9a^3 =$$

$$= (1\,000a+100b+10c+d_2)^3.$$

В итоге:

1) a, b, c, d – цифры, причем $a \ge 1$,
2) N – полный куб некоторого 4-значного натурального числа,
3) $N > (1\,000a+100b+10c+d)^3$,
4) для всякой цифры $d_1 > d$ справедливо

$N < (1\,000a + 100b + 10c + d_1)^3$,

5) для всякой цифры $d_2 < d$ справедливо

$N > (1\,000a + 100b + 10c + d_2)^3$,

чего не может быть. Значит, случай $N_4 > 0$ невозможен, а найденные цифры a, b, c, d составляют число $\overline{abcd} = \sqrt[3]{N}$.

54. [Числа, получающиеся после каждого вычитания и «снесения» очередной цифры, могут быть собраны в тройки, в каждой такой тройке] одно [число называется] «гхана», два [другие –] «агхана». [Из «крайней гханы» следует вычесть максимально возможный куб, а затем по циклу: сначала – первую «агхану»] следует разделить на утроенный квадрат [«текущего значения»] кубического корня, [затем –] из [второй] «агханы» должно быть вычтено [найденное] ранее [«текущее значение» корня, умноженное на] утроенный квадрат [только что] полученной [цифры корня], и [наконец – из «гханы» должен быть вычтен] куб полученной [цифры корня; далее действуем] согласно [выписанным] ранее [инструкциям, при этом оперируя] полученными цифрами [«текущего значения» кубического корня].

Алгоритм – такой же, как описан в строфе 1.53, с тем лишь отличием, что числа типа «бхаджья» и «шодхья» названы одним термином «*агхана*» (**aghana**, букв. “некубическое”).

Следует заметить, что построение санскритского текста данной строфы имеет ряд особенностей:

I. В строфе 1.54 использована оптативная форма глагола (**bhajet**), что весьма нехарактерно для Махавиры, который, как нам показалось, в подобных случаях обычно прибегает к пассивным причастиям прошедшего времени.

II. В строфе 1.54 наблюдается, как нам кажется, неестественный для Махавиры порядок слов: описание делителя при глаголе «следует разделить» (**bhajet**) разбито на две части, расположенные по разные стороны от глагола (**ghanapadakRtyA bhajettriguNayA**); в подобных случаях Махавира помещает множитель или делитель, как правило, *непосредственно перед* глагольной формой.

III. В строфе 1.36 (алгоритм вычисления квадратного корня) и в строфе 1.53 (алгоритм вычисления кубического корня) имеется ряд сходств:

(а) одинаковое начало: **antyaujAdapahRta** . . . (1.36) и **antyaghanAdapahRta** . . . (1.53);

(б) все типы «опорных» чисел имеют отдельные наименования: в строфе 1.36 – **antyauja**, **yugma**, **oja**, в строфе 1.53 – **antyaghana**, **bhAjya**, **zodhya**, **ghana**;

(в) в обеих строфах алгоритмы записаны с помощью пары конструкций Locativus Absolutus.

В то же время для строфы 1.54 эти особенности не характерны:

(а) отсутствует явное указание на самое первое действие – вычитание максимально возможного куба из крайней группы цифр исходного числа;

(б) «опорные» числа делятся на две более «грубые» категории – **ghana** (одно число из каждой тройки) и **aghana** (оставшиеся два числа из каждой тройки);

(в) конструкция Locativus Absolutus не используется.

На этом текстологический анализ завершен. С точки зрения содержания строфы 1.53 и 1.54 идентичны, что, по нашим впечатлениям, весьма нехарактерно для Махавиры, который если и приводит в разных строфах правила нахождения одной и той же величины, формулирует их именно как модификации, отличающиеся хотя бы небольшой деталью.

Перечисленные наблюдения наводят на мысль, что строфа 1.54 не принадлежит Махавире. Это подтверждается ее отсутствием в рукописи *M* [8, с.8 санскр. текста].

Сумма [арифметической прогрессии]

В случае седьмой операции, [называемой] «сумма [арифметической прогрессии]», правило вычисления [вот] какое:

61. Количество членов [арифметической прогрессии], уменьшенное на единицу, деленное пополам, умноженное на разность [арифметической прогрессии], сложенное с первым членом [арифметической прогрессии и] умноженное на количество членов, есть сумма всех [членов арифметической прогрессии].

Алгебраически: $\left[\frac{n-1}{2}\cdot d+a_1\right]\cdot n=\sum_{j=1}^{n}a_j$.

Правило вычисления суммы [арифметической прогрессии, сформулированное] иным образом:

62. Количество членов [арифметической прогрессии], уменьшенное на единицу, умноженное на разность [арифметической прогрессии], сложенное с удвоенным первым членом [арифметической прогрессии], умноженное на количество членов, деленное на 2, неизменно дает сумму [арифметической прогрессии].

Алгебраически: $\frac{[(n-1)\cdot d+2a_1]\cdot n}{2}=\sum_{j=1}^{n}a_j$.

Правило вычисления [«вклада»] первого члена, [«вклада»] разности [и] суммы [арифметической прогрессии]:

63. Первый член [арифметической прогрессии], умноженный на количество членов, – [это] «вклад» первого члена; количество членов [арифметической прогрессии], умноженное на [ее] разность, которая [в свою очередь] умножена на половину количества членов, уменьшенного на 1, [есть] «вклад» разности; сумма этих двух [величин, – есть сумма арифметической прогрессии; такая же] сумма [получится, если] разность [арифметической прогрессии взять] со знаком «минус», [а] в качестве первого члена взять последний.

Махавира вводит две величины: $S_a = a_1 \cdot n$ – *«вклад» первого члена* в сумму арифметической прогрессии (**Adidhana**) и $S_d = n \cdot d \cdot \frac{n-1}{2}$ – *«вклад» разности* в сумму арифметической прогрессии (**uttaradhana**). Сумма $S_a + S_d$ фигурирует как *полная сумма арифметический прогрессии* (**sarvadhana**). Смысл этих наименований становится очевидным, если преобразовать сумму первых n членов арифметической прогрессии следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} [a_1 + d(j-1)] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_1 + \sum_{j=1}^{n} d(j-1) = \sum_{j=1}^{n} a_1 + d \cdot \sum_{j=1}^{n} (j-1) =$$

$$= \underbrace{n \cdot a_1}_{S_a} + \underbrace{n \cdot d \cdot \frac{n-1}{2}}_{S_d}.$$

Последняя фраза правила означает, что если взять арифметическую прогрессию с первым членом $a'_1 = a_n$ и разностью $d' = -d$, то ее сумма будет такой же: $\sum_{j=1}^{n} a'_j = \sum_{j=1}^{n} a_j$.

Правило вычисления последнего члена, «среднего члена» [и] суммы арифметической прогрессии:

64. Количество членов [арифметической прогрессии], уменьшенное на 1 и [затем] умноженное на разность [арифметической прогрессии], плюс первый член – [это] последний член [арифметической прогрессии]; половина суммы этой [величины и] первого члена [арифметической прогрессии есть] «средний член»; этот [«средний член»], умноженный на [общее] коли-

чество членов [прогрессии, есть] описанная [выше] сумма арифметической прогрессии.

Последний член (**antyadhana**): $(n-1)\cdot d + a_1 = a_n$; *«средний член»* (**madhyadhana**): $\frac{a_n + a_1}{2} = a^*$; сумма арифметической прогрессии (**sarvasaGkalita**): $a^* \cdot n = \sum_{j=1}^{n} a_j$. Заметим, что если рассматривается прогрессия с ненулевой разностью, то в случае нечетного количества $n = 2m+1$ членов «средний член» совпадает с членом a_{m+1}, занимающим центральное положение в общем ряде прогрессии; в случае же четного количества $n = 2m$ членов под «средним членом» понимается число, равное среднему арифметическому двух «центральных» членов: $\frac{a_m + a_{m+1}}{2}$.

Правило вычисления количества членов [арифметической прогрессии]:

69. Из суммы [арифметической прогрессии], умноженной на 8 и на разность [прогрессии, а затем] увеличенной на квадрат удвоенного первого члена [прогрессии, из которого] вычтена разность [прогрессии, необходимо извлечь квадратный] корень, [тогда он,] сложенный с разностью [прогрессии, затем] деленный на 2, [затем] уменьшенный на первый член [прогрессии и] деленный на разность [прогрессии, даст] количество членов [арифметической прогрессии].

Алгебраически: $\left(\frac{\sqrt{8d\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) + (2a_1 - d)^2} + d}{2} - a_1\right) : d = n.$ Ни Махавира, ни М.Рангачарья не отмечают, но мы заметим, что при любых значениях a_1 и d подкоренное выражение неотрицательно:

$$8d\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) + (2a_1 - d)^2 = 8d \cdot \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n + (2a_1 - d)^2 =$$

$$= 4nd[(2a_1 - d) + nd] + (2a_1 - d)^2 =$$

$$= 4n^2 d^2 + 4nd(2a_1 - d) + (2a_1 - d)^2 = [2nd + (2a_1 - d)]^2 \geq 0.$$

Таким образом, сформулированное правило работает при любых значениях a_1 и любых ненулевых d. Правило легко выводится как решение (точнее, один из корней) квадратного (относительно переменной n) уравнения

$$\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \sum_{j=1}^{n} a_j .$$

Правило вычисления количества членов [арифметической прогрессии, сформулированное] иным образом:

70. Из суммы [арифметической прогрессии], умноженной на 8 и на разность [прогрессии, а затем] увеличенной на квадрат удвоенного первого члена [прогрессии, из которого] вычтена разность [прогрессии, необходимо извлечь квадратный] корень, [тогда он,] уменьшенный на «кшепападу»[, то есть на разность между удвоенным первым членом и разностью прогрессии, затем] деленный на 2, [а затем] деленный на разность [прогрессии, даст] количество членов [арифметической прогрессии].

Незначительная модификация предыдущего правила, а именно:

$$\frac{\sqrt{8d\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) + (2a_1 - d)^2} - k}{2} : d = n,$$

где $k = 2a_1 - d$ есть особая величина, которую Махавира называет трудно переводимым термином *кшепапада* (**kSepapada**). У М.Рангачарьи ошибочно указано, что $k = \frac{2a_1 - d}{2}$ [8, с.23 англ. текста].

Правило вычисления разности [арифметической прогрессии] и первого члена:

73. Сумма [арифметической прогрессии], уменьшенная на «вклад» первого члена [и затем] разделенная на половину квадрата количества членов, уменьшенного на количество членов, [есть] разность [арифметической прогрессии]; сумма [арифметической прогрессии], уменьшенная на «вклад» этой разности [и затем] разделенная на количество членов, [есть] первый член [прогрессии].

Алгебраически: $\frac{S_n - S_a}{\left(\frac{n^2 - n}{2}\right)} = d,\ \frac{S_n - S_d}{n} = a_1,$

где, напомним, величины $S_a = a_1 \cdot n, S_d = n \cdot d \cdot \frac{n-1}{2}$ были введены в строфе 1.63.

Правило вычисления первого члена и разности [арифметической прогрессии]:

74. Первый член [арифметической прогрессии есть] сумма [прогрессии], разделенная на количество [ее] членов, из которой [затем] вычли разность [прогрессии], умноженную на половину количества членов, уменьшенного на 1; сумма [арифметической прогрессии], разделенная на количество [ее] членов, [затем] уменьшенная на первый член [прогрессии и затем] поделенная на половину количества членов, уменьшенного на 1, [есть] разность [прогрессии].

Алгебраически: $a_1 = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}{n} - d \cdot \dfrac{n-1}{2}, \left(\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}{n} - a_1 \right) : \dfrac{n-1}{2} = d.$

Двойное правило вычисления разности и первого члена [арифметической прогрессии, сформулированное] иным образом:

75. Знай [о, математик], удвоенная сумма [арифметической прогрессии], разделенная на количество членов [прогрессии, затем] уменьшенная на удвоенный первый член [прогрессии и затем] разделенная на количество членов, уменьшенное на 1, даст разность [арифметической прогрессии].

Алгебраически: $\left(\dfrac{2 \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} a_j}{n} - 2a_1 \right) :(n-1) = d.$

76. Удвоенная сумма [арифметической прогрессии], разделенная на количество членов [прогрессии, затем] уменьшенная на количество членов, уменьшенное на 1 и [после этого] умноженное на разность [прогрессии], будучи разделенной на 2, [дает] первый член [прогрессии].

Алгебраически: $\left(\dfrac{2 \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} a_j}{n} - (n-1)d \right) :2 = a_1 .$

Правило вычисления первого члена, разности и количества членов [арифметической прогрессии] с известной степенью произвола:

78. Когда сумма [арифметической прогрессии] разделена на произвольное [число, то этот] делитель [можно взять в качестве] количества членов [прогрессии]; тогда если из [полученного] частного вычесть произвольное [число, то это] вычитаемое [можно взять в качестве] первого члена [прогрессии]; если [полученная] разность разделена на половину количества членов, уменьшенного на 1, [то результат можно взять в качестве] разности [арифметической прогрессии].

Смысл правила в том, чтобы по заранее заданному или произвольно выбираемому числу S построить арифметическую прогрессию, первые несколько членов которой в сумме давали бы S. Фиксируется произвольное n (как видно из дальнейшего, предполагается $n > 1$), его можно считать количеством членов конструируемой прогрессии. Далее, из дроби $\frac{S}{n}$ вычитается любое число a, оно берется в качестве первого члена. По этим трем параметрам однозначно определяется разность конструируемой прогрессии:

$$d = \frac{\frac{S}{n} - a}{\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Предложенный заголовок (как видно, не вполне точно отражающий суть правила) есть условное истолкование трудно переводимого текста Махавиры: **sveSTAdyuttaragacchAnayanasUtram**. М.Рангачарья интерпретирует это место примерно так же, как и мы: «Правило нахождения (при заданной сумме) первого члена [арифметической прогрессии], разности [арифметической прогрессии] и количества членов [арифметической прогрессии], при желании, может быть представлено [так:]» [8, с.25 англ. текста].

Тройное правило [нахождения] суммы [арифметической прогрессии], скомбинированной отдельно с первым членом, [отдельно] с разностью [прогрессии, отдельно] с количеством членов [прогрессии и отдельно] со всеми [перечисленными параметрами]:

80. Знай, о широмани математиков, [что] сумма [арифметической прогрессии], скомбинированная [с первым членом], уменьшенная на «вклад» разности в сумму [арифметической прогрессии и затем] деленная на сложенное с единицей количество членов [прогрессии], должна давать первый член [прогрессии].

Правило утверждает, что $\dfrac{M_a - S_d}{n+1} = a_1$, где через M_a обозначена так называемая *сумма арифметической прогрессии, скомбинированная с первым членом* (**Adimizradhana**), а величина $S_d = n \cdot d \cdot \dfrac{n-1}{2}$, называемая «вкладом» разности в сумму арифметической прогрессии, была введена в строфе 1.63. Элементарные преобразования дают:

$$M_a = (n+1)a_1 + S_d = a_1 + a_1 \cdot n + S_d = a_1 + S_a + S_d.$$

Таким образом, $M_a = a_1 + \sum_{j=1}^{n} a_j$, откуда понятен смысл наименования.

Термин *широмани* (**ziromaNi**) использовался как почетный эпитет пандитов (ученых брахманов) и буквально означает «драгоценность в хохолке (гребешке) [птицы]».

81. Скомбинированная [с разностью прогрессии сумма арифметической прогрессии, из которой] вычли «вклад» первого члена, [а затем] поделили на сложенное с 1 количество членов, [в свою очередь] умноженное на половину количества членов без единицы, [дает] разность [прогрессии]; по [такому же] принципу [вычисляемая аналогичная величина] для количества членов [подсчитывается так: складывается соответствующее] количество членов [арифметической прогрессии] при условии, что [ее] первый член увеличен на 1.

Первая часть правила утверждает, что $\dfrac{M_d - S_a}{\frac{n-1}{2} \cdot n + 1} = d$, где через M_d обозначена так называемая *сумма арифметической прогрессии, скомбинированная с разностью прогрессии* (**uttaramizradhana**), а величина $S_a = a_1 \cdot n$, называемая «вкладом» первого члена в сумму арифметической прогрессии, была введена в строфе 1.63. Элементарные преобразования дают:

$$M_d = S_a + \left(\frac{n-1}{2} \cdot n + 1\right)d = S_a + n \cdot d \cdot \frac{n-1}{2} + d = S_a + S_d + d.$$

Таким образом, $M_d = d + \sum_{j=1}^{n} a_j$, откуда понятен смысл наименования.

Вторая часть правила определяет *сумму арифметической прогрессии, скомбинированную с количеством членов прогрессии* (**gacchamizradhana**):

$$M_n = (a_1 + 1) + [(a_1 + 1) + d] + [(a_1 + 1) + 2d] + \ldots + [(a_1 + 1) + (n-1)d] =$$

$$= n + a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + [a_1 + (n-1)d] = n + \sum_{j=1}^{n} a_j ,$$

откуда также понятно происхождение названия.

82. [Если] из [суммы арифметической прогрессии], скомбинированной [со всеми параметрами прогрессии], вычтены произвольные первый член [и] количество членов, [то результатом является то, что может быть] получено по правилу [для суммы арифметической прогрессии], скомбинированной с разностью прогрессии, [причем] та величина, которая [в последнем случае «комбинируется» с суммой], должна быть [той же] разностью прогрессии. Это [правило] вычисления в случае с суммой [арифметической прогрессии, скомбинированной со] всеми [параметрами прогрессии].

Сей замысловатый текст утверждает единственное правило:

$$M_{adn} - a_1 - n = M_d ,$$

в котором величины a_1 и n берутся произвольными, а про M_d известно, что это сумма арифметической прогрессии (с теми же a_1, n и d), скомбинированная с разностью прогрессии. Нетрудно видеть, что $M_{adn} = a_1 + n + M_d = a_1 + n + d + \sum_{j=1}^{n} a_j$, откуда ясен смысл наименования M_{adn} – *сумма арифметической прогрессии, скомбинированная со всеми параметрами прогрессии* (**[sarva]mizra[dhana]**, **sarvasaMyoga**).

Правило вычисления первого члена [и] разности [арифметической прогрессии] по [известным параметрам заданной прогрессии –] первому члену, разности [и] известной сумме, [которая является] удвоенной, утроенной [и т.д. или] половиной, третью и т.д. от суммы исследуемой [прогрессии]:

84. [Рассмотрим] сумму исследуемой [прогрессии], деленную на [сумму] заданной [прогрессии, пусть это отношение] записано в двух [разных] местах. [Тогда] это [отношение], умноженное на разность [известной] прогрессии, [даст] разность [исследуемой] прогрессии, [а] то же [отношение], умноженное на первый член [известной прогрессии, даст] первый член [исследуемой прогрессии. При этом отношение сумм прогрессий выражается дробью, в которой] числитель, деленный на знаменатель, [есть сумма] исследуемой [прогрессии], деленная на [сумму] заданной [прогрессии].

Кажется естественным предположить, что речь идет о прогрессиях с одинаковым количеством членов. Это подтверждает и приводимая Махавирой задача на закрепление правила (строфа 1.85), которая содержит именно такое условие (**samagaccha...**). Таким образом, рассматриваются две прогрессии, указанные в табл.4:

Таблица 4

	1-ый член	разность	количество членов	сумма
1-ая прогрессия	a_1	d	n	S
2-ая прогрессия	a'_1	d'	n	S'

Считаем, что известны значения a_1, d, S и $\xi = \frac{S'}{S}$. Для нахождения a'_1 и d' Махавира предлагает использовать формулы: $\xi \cdot a_1 = a'_1$ и $\xi \cdot d = d'$. Попробуем выяснить, для каких пар прогрессий справедливы эти равенства. Воспользуемся соотношением для первого члена. Согласно формуле суммы прогрессии (строфа 1.61), имеем:

$$\frac{\left[\frac{n-1}{2} \cdot d' + a'_1\right] \cdot n}{\left[\frac{n-1}{2} \cdot d + a_1\right] \cdot n} \cdot a_1 = a'_1,$$

После несложных преобразований получаем: $\frac{a'_1}{a_1} = \frac{d'}{d}$. Нетрудно убедиться, что соотношение для разностей прогрессии влечет точно такой же результат. Таким образом, если для двух прогрессий соотношения Махавиры выполнены, то их первые члены и разности пропорциональны. Легко видеть, что справедливо и обратное. Таким образом, правило Махавиры сформулировано для случая (и только для него) пропорциональности первых членов и разностей.

Заметим, что в заголовке правила речь идет об «**известной сумме, [которая является] удвоенной, утроенной [и т.д. или] половиной, третью и т.д. от суммы исследуемой [прогрессии]**», иными словами, Махавира, строго говоря, допускает лишь случаи $\xi = 2, 3, 4, \ldots$ и $\xi = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ (случай $\xi = 1$, очевидно, ему неинтересен). Однако нетрудно видеть, что если $\frac{S'}{S} = m$ и $\frac{S''}{S'} = \frac{1}{n}$, где m, $n = 2, 3, 4, \ldots$, то отношение $\frac{S''}{S} = \frac{m}{n}$ пробегает все положительные рациональные значения, в том числе и 1. Таким образом, двухступенчатое применение правила дает возможность находить первый член и разность прогрессии, сумма которой относится к сумме другой прогрессии (с известными первым членом и разностью) как *произвольное* положительное рациональное число.

Правило вычисления [первых членов и разностей арифметических прогрессий при условии, что даны две прогрессии] с произвольными [известными] количествами членов, [причем] первый член одной прогрессии равен разности другой и наоборот, [а] сумма [одной прогрессии либо] равна [сумме второй прогрессии, либо является] удвоенной, утроенной [и т.д. или] половиной, третью и т.д. от суммы [второй прогрессии]:

86. Количество членов [одной] прогрессии, умноженное на себя за вычетом 1, [затем] умноженное на произвольно заданное [отношение суммы второй прогрессии к сумме первой прогрессии и, далее], уменьшенное на удвоенное количество членов другой [прогрессии дает] первый член [первой] прогрессии, [он же – разность второй прогрессии]; квадрат [количества членов] другой [прогрессии], из которого вычли само это [количество, а затем еще] вычли удвоенное произведение произвольно заданное [отношение суммы второй прогрессии к сумме первой прогрессии и] количества членов [первой] прогрессии [дает] разность [первой] прогрессии, [она же – первый член второй прогрессии].

Пусть опять заданы две прогрессии (табл.5). Если известны числа n, n' и коэффициент ξ, связывающий суммы прогрессий ($\xi S = S'$), то правило дает возможность выписать конкретные значения a_1 и d, удовлетворяющие условию задачи. Очевидно, что при умножении первых членов и разностей обеих прогрессий на одно и то же ненулевое число отношение $\xi = \dfrac{S'}{S}$ не изменится. Таким образом, если при некоторых фиксированных значениях n, n' и ξ задача имеет хотя бы одно решение, то она имеет бесконечно много решений.

Таблица 5

	1-ый член	разность	количество членов	сумма
1-ая прогрессия	a_1	d	n	S
2-ая прогрессия	d	a_1	n'	S'

Махавира предлагает воспользоваться следующими соотношениями:

$$n(n-1)\xi - 2n' = a_1\,,$$

$$n'^2 - n' - 2\xi n = d.$$

Покажем, что такие значения действительно будут удовлетворять условиям задачи. Суммы прогрессий можно записать по известной формуле (строфа 1.61):

$$S=\left[\frac{n-1}{2}\cdot d+a_1\right]\cdot n,\quad S'=\left[\frac{n'-1}{2}\cdot a_1+d\right]\cdot n'.$$

Ввиду $\xi S=S'$ имеем:

$$\xi\left[\frac{n-1}{2}\cdot d+a_1\right]\cdot n=\left[\frac{n'-1}{2}\cdot a_1+d\right]\cdot n',$$

откуда после несложных равносильных преобразований (возможных при любых значениях переменных) получаем:

$$[n(n-1)\xi-2n']\cdot d=[n'^2-n'-2\xi n]\cdot a_1.$$

Таким образом, для первой прогрессии в качестве первого члена можно взять число $a_1=n(n-1)\xi-2n'$, а в качестве разности – число $d=n'^2-n'-2\xi n$, что и требовалось доказать.

Также см. последний абзац комментария к строфе 1.84.

Правило вычисления первых членов и разностей для [случая двух прогрессий с] неравными разностями, одинаковыми количествами членов и одинаковыми суммами:

89. Для прогрессии с большей разностью [полагаем] первый член [равным] 1; а [если] вычесть из большей разности разность оставшейся [прогрессии, то полученный результат], умноженный на половину количества членов, уменьшенного на 1, а [затем] сложенный с единицей, [будет давать], о друг, [при подстановке различных] разностей оставшейся [прогрессии] первые члены [прогрессии с меньшей разностью].

Пусть заданы две прогрессии, указанные в табл.6:

Таблица 6

	1-ый член	разность	количество членов	сумма
1-ая прогрессия	a_1	d	n	S
2-ая прогрессия	a'_1	d'	n	S

Пусть известны n, d и d', причем $d>d'$. Согласно правилу, необходимо положить $a_1=1$; тогда Махавира предлагает брать $a'_1=(d-d')\cdot\dfrac{n-1}{2}+1$. Действительно, если суммы прогрессий равны, то по известной формуле (строфа 1.61):

$$\left[\frac{n-1}{2}\cdot d+a_1\right]\cdot n=\left[\frac{n-1}{2}\cdot d'+a'_1\right]\cdot n.$$

Учитывая $n \neq 0$, получаем: $a'_1 = (d - d') \cdot \frac{n-1}{2} + a_1$. При $a_1 = 1$ имеем указанное правило.

Также отметим, что заголовок не вполне соответствует содержанию: правило не предполагает нахождение разностей прогрессии.

Правило вычисления разностей [двух прогрессий с] неравными первыми членами, одинаковыми количествами членов [и] одинаковыми суммами:

91. Для прогрессии с бо́льшим первым членом [полагаем] разность [равной] 1; а [если] вычесть из большего первого члена первый член оставшейся [прогрессии, то при] делении [результата] на половину количества членов, уменьшенного на 1, и [затем] сложении [частного] с единицей, [при подстановке различных] первых членов [варьирующейся] оставшейся [прогрессии] получаются разности [прогрессии с меньшим первым членом].

Пусть заданы две прогрессии, указанные в табл.7:

Таблица 7

	1-ый член	разность	количество членов	сумма
1-ая прогрессия	a_1	d	n	S
2-ая прогрессия	a'_1	d'	n	S

Пусть известны n, a_1 и a'_1, причем $a_1 > a'_1$. Согласно правилу, необходимо положить $d = 1$; тогда Махавира предлагает брать $d' = \frac{a_1 - a'_1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)} + 1$. Действительно, если суммы прогрессий равны, то по известной формуле (строфа 1.61):

$$\left[\frac{n-1}{2} \cdot d + a_1\right] \cdot n = \left[\frac{n-1}{2} \cdot d' + a'_1\right] \cdot n.$$

Отсюда при $n > 1$ получаем: $d' = \frac{a_1 - a'_1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)} + d$. При $d = 1$ имеем указанное правило.

А теперь правило [вычисления] сверхпоследнего члена [и] суммы геометрической прогрессии:

93. Следует знать, [что] первый член [геометрической прогрессии], умноженный на произведение нескольких знаменателей [геометрической прогрессии], взятых в числе, равном [заданному] количеству членов, будет давать сверхпоследний член; этот [член], уменьшенный на первый член [геометрической прогрессии], деленный на знаменатель [прогрессии], из которого вычли 1, [дает] сумму геометрической прогрессии.

Махавира вводит трудно переводимый термин **guNadhana**, которым он обозначает член геометрической прогрессии, следующий непосредственно за последним (отсюда наше условное наименование – *сверхпоследний*) членом из заданного отрезка прогрессии. В стандартных обозначениях это $(n+1)$-ый член:

$$g(n) = b_{n+1} = q^n \cdot b_1 .$$

Для суммы первых n членов геометрической прогрессии вводится, очевидно, верная формула:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{g(n) - b_1}{q-1}$$

А вот другое правило на случай суммы геометрической прогрессии:

94. [Берем] количество членов [прогрессии; если оно] четное, [то] делим [его] на 2 [и около частного ставим помету] «ноль»; [если оно] нечетное, [то тоже делим его на 2 с остатком и около неполного частного ставим помету] «единица»; [выписываем последовательность чисел, начинающуюся со знаменателя прогрессии и получающуюся] умножением [каждого очередного числа-]множителя [на себя; затем один за другим] перемножается квадрат, [около каждого из которых написана «единица»; если теперь из полученного результата] вычесть единицу, [затем] умножить [получившееся число] на первый член [геометрической прогрессии, а после] поделить на знаменатель [прогрессии], уменьшенный на единицу, [то получится] сумма геометрической прогрессии.

Ввиду лаконичности первой полустрофы, возможны различные варианты ее истолкования, хотя нет сомнений в том, что ее цель – научить слушателя/читателя вычислять значение q^n. В представленном переводе и в дальнейшем комментарии обсуждается только наша интерпретация, М.Рангачарья понял эту полустрофу иначе [8, с.30–31 англ. текста].

Покажем, как работает алгоритм Махавиры на примере вычисления числа 7^{41}. Имеем: $n = 41$, последовательно делим это число на 2 и каждый раз выписываем неполное частное, пока не получим 1. В зависимости от четности числа, снизу приписываем пометы «0» или «1». Затем последовательно возводим число 7 в квадрат и подчеркиваем те значения, около которых поставлена помета «1». Схематически:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
41 & \xrightarrow{:2} & 20 & \xrightarrow{:2} & 10 & \xrightarrow{:2} & 5 & \xrightarrow{:2} & 2 & \xrightarrow{:2} & 1 \\
1 & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 1 \\
\underline{\underline{7}} & \xrightarrow{\hat{}2} & 7^2 & \xrightarrow{\hat{}2} & 7^4 & \xrightarrow{\hat{}2} & \underline{\underline{7^8}} & \xrightarrow{\hat{}2} & 7^{16} & \xrightarrow{\hat{}2} & \underline{\underline{7^{32}}}
\end{array}$$

В результате 7^{41} будет находиться как произведение трех подчеркнутых чисел: $7 \cdot 7^8 \cdot 7^{32}$.

В основе метода лежит двоичное разложение числа n – инвертированная цепочка выписываемых нулей и единиц (в приведенном примере $41_{10} = 101001_2$). Когда число записано в двоичной системе

$$n = (\overline{c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0})_2 = 2^k \cdot c_k + 2^{k-1} \cdot c_{k-1} + \dots + 2^1 \cdot c_1 + 2^0 \cdot c_0,$$

искомая степень находится так:

$$q^n = q^{2^k \cdot c_k + \dots + 2^1 \cdot c_1 + 2^0 \cdot c_0} =$$

$$= \overline{\left(c_0 \cdot q^{2^0}\right)} \cdot \overline{\left(c_1 \cdot \left(q^{2^0}\right)^2\right)} \cdot \overline{\left(c_2 \cdot \left(\left(q^{2^0}\right)^2\right)^2\right)} \cdot \dots \cdot$$

$$\cdot \overline{\left(c_k \cdot \left(\left(\left(q^{2^0}\right)^2\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}\right)^2\right)},$$

(черты означают, что в выписанном произведении присутствуют только те множители, в которых $c_j = 1$).

Покажем, что уже при небольших n алгоритм Махавиры в некотором смысле удобнее многократного последовательного умножения. Пусть требуется вычислить значение q^n. Тогда первая цепочка (всегда оканчивающаяся числом 1) будет содержать в точности $[\log_2 n]$ делений на 2; затем следует цепочка из $[\log_2 n]$ последовательных возведений в квадрат, и, наконец, на последнем этапе, когда мы получили $m \le [\log_2 n] + 1$ пометок «1», нам придется перемножить m квадратов, то есть совершить еще $(m-1)$ умножений. В итоге общее количество операций равно:

$$N(n) = [\log_2 n] + [\log_2 n] + (m-1) \le 3[\log_2 n].$$

Лемма: При любых натуральных $n \ge 12$ справедливо неравенство $3[\log_2 n] < n - 1$.

Доказательство: Пусть $n \ge 12$ – натуральное число, тогда

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3!} + \ldots +$$

$$+ \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{n!} <$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2! \cdot 2} + \frac{1}{2! \cdot 2 \cdot 2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2! \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n-2}} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 1 \cdot \frac{1 - 0{,}5^n}{1 - 0{,}5} = 3 - 2 \cdot 0{,}5^n < 3 < n + 1.$$

Таким образом, при натуральных $n \geq 12$ выполняется неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n + 1$, которое несложно преобразовать к виду $\sqrt[n]{n+1} < \sqrt[n-1]{n}$. Следовательно, функция $\varphi(n) = \sqrt[n-1]{n}$, определенная на натуральных числах $n \geq 12$, монотонно убывает. Нетрудно проверить, что $\varphi(12) < \sqrt[3]{2}$, значит, при всех натуральных $n \geq 12$ все числа $\varphi(n) = \sqrt[n-1]{n} < \sqrt[3]{2}$. Отсюда после логарифмирования по основанию 2 и простейших преобразований получаем: $3\log_2 n < n - 1$. В силу $[\log_2 n] \leq \log_2 n$ имеем доказываемое неравенство.■

В результате для натуральных $n \geq 12$ количество предписываемых Махавирой операций (даже без учета их различной трудоемкости) заведомо меньше, чем при «бесхитростном» последовательном умножении $\underbrace{(..((q \cdot q) \cdot q) \cdot \ldots) \cdot q}_{n}$.

Для натуральных значений $n < 12$ мы составили табл.8:

Таблица 8

	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$
Количество перемножений при последовательном перемножении	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество операций при использовании алгоритма Махавиры, $N(n)$	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8

Как видим, если принимать во внимание только количество операций, то алгоритм Махавиры имеет некоторые преимущества уже начиная с $n = 8$, а с увеличением n он становится все более предпочтительным, ввиду того, что логарифмическая функция растет медленнее линейной. Так, в приведенном выше примере, где вычислялось значение 7^{41}, вместо 40 «естественных» умножений алгоритм Махавиры предписывает 5 делений на два, 5 возведений в квадрат и 3 умножения, то есть, по большому счету, всего лишь 8 относительно трудоемких операций.

Что касается вычисления последнего члена геометрической прогрессии и вычисления суммы этой геометрической прогрессии, [то] правило [здесь такое]:

95. Последним членом геометрической прогрессии является сверхпоследний член [ряда, у которого] количество членов уменьшено на 1; этот [сверхпоследний член, будучи] умноженным на знаменатель прогрессии, [затем] уменьшенным на первый член [прогрессии и, наконец,] поделенный на знаменатель прогрессии, уменьшенный на 1, [дает] сумму геометрической прогрессии.

Первая часть строфы в комментариях не нуждается. Вторая часть есть словесная запись тривиальной формулы:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{g(n-1)\cdot q - b_1}{q-1},$$

где так называемый сверхпоследний член $g(n) = b_{n+1} = q^n \cdot b_1$ был введен в строфе 1.93.

Правило вычисления первого члена [и] знаменателя [геометрической прогрессии] по сверхпоследнему члену:

97. [Пусть] сверхпоследний член [геометрической прогрессии] поделен на первый член; [тогда] именно то [число будет] знаменателем прогрессии, которое [удовлетворяет свойству:] произведение одинаковых экземпляров [этого числа], взятых в количестве, равном количеству членов [прогрессии, есть полученный при делении результат]; сверхпоследний член [геометрической прогрессии], деленный на произведение знаменателей прогрессии, взятых в количестве, равном количеству членов [прогрессии], даст первый член [прогрессии].

Первая полустрофа утверждает, что знаменателем прогрессии является такое число q, что $\frac{g(n)}{b_1} = q^n$. Вторая полустрофа есть не что иное как словесное выражение формулы: $\frac{g(n)}{q^n} = b_1$.

Правило вычисления количества членов [геометрической прогрессии по значению] сверхпоследнего члена:

98. Когда известны [сверхпоследний член], деленный на первый член [прогрессии, а также] знаменатель [прогрессии, поступаем так:] пока [первая из названных величин] делится нацело [на знаменатель], следует делить [ее] на знаменатель; тогда сколько [будет] рисок, таково [и] количество членов [– так количество членов находится по значению] сверхпоследнего члена.

Итак, предполагается, что известны числа $\frac{g(n)}{b_1}$ (согласно предыдущей строфе, оно равно q^n) и знаменатель прогрессии q. Махавира предлагает последовательно делить число $\frac{g(n)}{b_1}$ на q до тех пор, пока возможно деление нацело. Что касается рисок **(zalAkA)**, то, по всей видимости, имеется в виду последовательное деление, при котором между каждым очередным делимым и получаемым частным ставится риска; в результате количество таких рисок оказывается равным числу произведенных делений. К примеру, пусть для некоторой геометрической прогрессии $\frac{g(n)}{b_1} = 243$, а $q = 3$, тогда имеем:

$243 \mid 81 \mid 27 \mid 9 \mid 3 \mid 1.$

Таким образом, искомое количество членов прогрессии $n = 5$.

Отметим еще одну важную деталь. Махавира говорит о делении нацело **(niragraM)**, подразумевая тем самым, что, по крайней мере, в качестве знаменателя прогрессии в этом месте должны использоваться целые числа.

Правило вычисления знаменателя [и] первого члена [геометрической прогрессии по] сумме прогрессии:

101. Заданное отношение [суммы прогрессии и] первого члена [подвергаем следующей] многократной [процедуре:] вычитаем 1 [и делим на некоторое число, затем снова вычитаем 1 и делим на это число и т.д. пока в результате очередного деления не получим 1; тогда] то [число], на которое [мы] делим, [и] будет знаменателем прогрессии. [Если] сумму геометрической прогрессии, умноженную на знаменатель прогрессии, из которого вычли 1, поделить на уменьшенное на 1 произведение [одинаковых экземпляров] знаменателя прогрессии, взятых в количестве, равном количеству членов прогрессии, [то получится] первый член прогрессии.

Смысл первой полустрофы становится ясным, если представить заданное отношение суммы геометрической прогрессии и первого члена в виде:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} b_j}{b_1} = 1 + \underbrace{q(1 + q(1 + \ldots + q(1 + q}_{n-2}\underbrace{)\ldots))}_{n-2}.$$

Если мы несколько раз подряд вычтем 1 и затем поделим на q (как подобрать это число, Махавира умалчивает) и в конце получим 1, то число q и будет знаменателем прогрессии.

Вторая полустрофа алгебраически: $\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) \cdot (q-1)}{q^n - 1} = b_1$.

Правило вычисления количества членов [геометрической прогрессии по] сумме прогрессии:

103. [Пусть] найдена [сумма геометрической прогрессии], умноженная на знаменатель, из которого вычли 1, [затем] деленная на первый член прогрессии, [и, наконец,] сложенная с единицей, [тогда] сколько раз [можно произвести] деление на знаменатель [прогрессии, чтобы в конце получилась 1], таково в точности количество членов [прогрессии].

Махавира предлагает найти значение $\dfrac{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) \cdot (q-1)}{b_1} + 1$, которое, очевидно, будет равно q^n. Затем мы должны делить полученное число на q до тех пор, пока не получим 1; количество произведенных таким образом делений будет совпадать с количеством членов прогрессии.

В случае восьмой операции, [называемой] «выборочная сумма [арифметической прогрессии]», правило вычисления [вот] какое:

106. [Число, равное] сумме [количества членов] произвольного [начального отрезка и общего] количества членов [прогрессии], (или [− количество членов] произвольного [начального отрезка]), уменьшенное на 1, [затем] разделенное пополам, [затем] умноженное на разность арифметической прогрессии, [затем] сложенное с первым членом прогрессии, [затем] умноженное на количество членов в «хвосте» ([или − на количество

членов выделенного] произвольного [начального отрезка]), известна [как] выборочная сумма [арифметической прогрессии] (или [– как сумма членов выделенного] произвольного [начального отрезка]).

Рассмотрим первые n членов прогрессии и выделим произвольный начальный отрезок из k членов, $k < n$:

$$\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_k}_{\textit{начальный отрезок}}, \qquad \underbrace{a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n}_{\textit{"хвост" из } (n-k) \textit{ членов}}.$$

Тогда *выборочная сумма арифметической прогрессии* (**vyutkalita**), то есть сумма членов, составляющих «хвост», есть

$$\sum_{j=k+1}^{n} a_j = \left[\frac{k+n-1}{2} \cdot d + a_1\right] \cdot (n-k),$$

а сумма членов выделенного произвольного начального отрезка (**sveSTa[kalita]**) есть

$$\sum_{j=1}^{k} a_j = \left[\frac{k-1}{2} \cdot d + a_1\right] \cdot k.$$

Последнее соотношение не нуждается в обосновании. Доказательство формулы для *выборочной суммы*, то есть для суммы членов «хвоста», тривиально:

$$\sum_{j=k+1}^{n} a_j = \left[\frac{(n-k)-1}{2} \cdot d + a_{k+1}\right] \cdot (n-k) =$$

$$= \left[\frac{n-k-1}{2} \cdot d + a_1 + kd\right] \cdot (n-k) =$$

$$= \left[\frac{n+k-1}{2} \cdot d + a_1\right] \cdot (n-k).$$

Правило вычисления выборочной суммы [арифметической прогрессии и] суммы [членов выделенного] произвольного [начального отрезка, сформулированное] иным образом:

107. [Количество членов] произвольно выбранного [начального отрезка прогрессии], сложенное с [общим] количеством членов [прогрессии], (или [– количество членов] произвольного [начального отрезка]), уменьшенное на 1, [затем] умноженное на разность арифметической прогрессии, [затем] сложенное с удвоенным первым членом прогрессии, [затем] умноженное на половину количества членов в «хвосте» ([или – на половину количества членов выделенного] произвольного [начального от-

резка]), известна [как] выборочная сумма [арифметической прогрессии] (или [– как сумма членов выделенного] произвольного [начального отрезка]).

Рассматривается та же конструкция, и даются модифицированные формулы для вычисления тех же сумм:

$$\sum_{j=k+1}^{n} a_j = [(k+n-1)\cdot d + 2a_1]\cdot\frac{n-k}{2},$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_j = [(k-1)\cdot d + 2a_1]\cdot\frac{k}{2}.$$

Что касается вычисления выборочной суммы для арифметической [и] геометрической прогрессии, а также [сопутствующего вычислению] выборочной суммы нахождения количества членов в «хвосте» [прогрессии и] в произвольном [начальном отрезке прогрессии, то] правило [здесь вот какое]:

108. Сумма [всех] членов прогрессии минус сумма [членов из] произвольного [начального отрезка прогрессии есть] выборочная сумма [то есть сумма членов «хвоста»; это справедливо и] для арифметической прогрессии, и для геометрической прогрессии. Когда [найдена] разность общего [количества членов прогрессии и] количества членов произвольного [начального отрезка прогрессии], получается количество членов в его «хвосте».

Правило не нуждается в комментариях. Отметим лишь, что заголовок не вполне соответствует содержанию: правило не предполагает нахождение количества членов в начальном отрезке прогрессии.

Правило вычисления первого члена «хвоста»:

109. Количество членов произвольного [начального отрезка прогрессии], умноженное на разность прогрессии, плюс первый член [прогрессии – это] первый член [«хвоста»]. Ведь у цепочки, образующей «хвост», разность [между соседними членами] будет прежней – [то есть как] у цепочки, образующей произвольный [начальный отрезок прогрессии], ведь обе [цепочки в этом смысле одинаковы].

Первая часть дает правило нахождения начального члена «хвоста»: $k\cdot d + a_1 = a_k$. Вторая часть не нуждается в комментариях.

Правило вычисления первого члена в цепочке, образующей «хвост», [для ситуации, когда аналогичным образом] разбивается геометрическая прогрессия:

110. А вот в случае, когда [каждый последующий член получается] умножением [предыдущего] на [некоторый] множитель, [то есть в случае геометрической прогрессии], со знаменателем и первым членом [дела обстоят] точно так же; здесь [есть] вот какая особенность: в «хвосте» ряда первым членом будет первый член [всей прогрессии], умноженный на произведение [одинаковых экземпляров] знаменателя прогрессии, взятых в количестве, равном числу членов в произвольно [выбранном начальном отрезке прогрессии].

Рассматриваются первые n членов теперь уже геометрической прогрессии с выделенным начальным отрезком из k членов ($k < n$) и «хвостом»:

$$\underbrace{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_k}_{\text{начальный отрезок}},\underbrace{b_{k+1},\ b_{k+2},\ \ldots,\ b_n}_{\text{"хвост" из } (n-k) \text{ членов}}.$$

Утверждается, что $b_{k+1} = b_1 q^k$.

Список литературы

1. **mahAvIrAcArya's gaNitasAra-saMgraha** (An Ancient Treatise on Mathematics) / Authentically edited with a Hindi translation and Introduction, etc. by *L.C.Jain*. Sholapur, 1963.
2. *Володарский А.И.* О трактате Магавиры «Краткий курс математики» // Физико-математические науки в странах Востока. 1969. Вып.2(5). С.98–130.
3. *Володарский А.И.* Очерки истории средневековой индийской математики / Отв. ред. *Б.А.Розенфельд*. 2-е изд. М., 2009.
4. *Юшкевич А.П.* История математики в средние века. М., 1961.
5. *Бонгард-Левин Г.М.*, *Ильин Г.Ф.* Индия в древности. СПб., 2001.
6. Индуизм. Джайнизм. Сикхизм: Словарь / Под общ. ред. *М.Ф.Альбедиль* и *А.М.Дубянского*. М., 1996.
7. Индийская философия: Энциклопедия / Отв. ред. *М.Т.Степанянц.* М., 2009.
8. The **gaNita-sAra-saGgraha** of **mahAvIrAcArya.** With English translation and Notes by **M.RaGgAcArya.** Madras, 1912.
9. *Mukherjee R.N.* Discovery of zero and its impact on Indian mathematics. Calcutta, 1991.

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИСКУССТВО[1]

Франсуа Виет

Перевод с латинского и комментарии Е. А. Зайцева[1]

Глава I

Об определении и видах анализа, а также о вещах, полезных для зететики

Рис. 1. Титульный лист издания математических трудов Виета, подготовленного Ф. ван Схотеном: *Francisci Vietæ. Opera mathematica, in unum volumen congesta ac recognita, opera atque studio Francisci a Schooten*. Ex Officina de Bonaventurae et Abrahami Elzeviorum. Leyden, 1646

В математике существует метод (via) исследования истины, который, как говорят, был изначально найден Платоном; Теон же впоследствии назвал его «анализ» и определил как «принятие искомого в качестве заданного (tanquam concessi) для нахождения искомой истины (ad verum concessum) при помощи следствий». «Синтез же, напротив, есть принятие того, что задано, для нахождения и уразумения при помощи следствий того, что ищется». В то время как древние различали лишь два вида анализа *зететику* и *пористику* (греч.)[2] – к последней и относится, по преимуществу, определение Теона – я счел уместным (consentaneum) ввести дополнительно третий вид, который называ-

1 Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-06-00194-а).

ется *ретическим* или *экзегетическим* (греч.); при помощи *зететического* анализа составляют (invenitur)[3] равенство или пропорцию между искомыми и заданными величинами; при помощи *пористического* – исследуют, исходя из [этого] равенства или пропорции, истинность получаемой [в результате преобразования] теоремы, а при помощи *экзегетического* – определяют, исходя из полученного [в результате преобразования] равенства или пропорции, искомую величину[4]. Таким образом, аналитическое искусство (ars analytice), как целое, включающее в себя все три вида анализа, можно определить как учение о добром способе открытия/изобретения в математических [науках] (doctrina bene inveniendi in mathematicis). Относящееся к зететике устанавливается при помощи логического искусства, [то есть] посредством силлогизмов и энтимем, основанием которых служат соглашения (symbola), посредством которых формулируются равенства и пропорции; они (эти соглашения) должны быть выведены из общих понятий (ex communibus notionibus) и теорем, полученных, благодаря мощи анализа. Способ же действия (forma ineundi) зететики является характерным (proprium) для [данного] искусства: зететика вместо применения логики к числам (в этом как раз и состоял недостаток анализа древних), применяет логистику по новому[, а именно,] к видам (sub specie)[5]; в [деле] приравнивания величин друг другу она – в условиях выполнения закона однородности – значительно успешнее и могущественнее, нежели логистика числовая; ибо в со-

Рис.2. Титульный лист издания математических работ Ф.Виета в переводе на французский язык: L'algèbre nouvelle de Mr Viète… traduicte en françois par A.Vasset. Chez Pierre Rocolet, Paris, 1630

ответствии с [принятым в ней] обычаем, происходит построение последовательности (series) или лествицы (scala), состоящей из величин, которые восходят и нисходят из одного рода в другой пропорционально в соответствии со своей природой; и это дает возможность обозначать и различать степени (gradus) и роды (genera) приравниваемых друг другу величин.

Глава II

О соглашениях, лежащих в основе уравнений и пропорций

Аналитическое искусство принимает в качестве установленных хорошо известные соглашения о равенствах и пропорциях, содержащиеся в «Началах» [Евклида][6]:

1. Целое равно [совокупности] своих частей (totum suis partibus equari).

2. Равные одному и тому же равны между собой.

3. Если к равным прибавляются равные, то и целые равны.

4. Если от равных отнимаются равные, то остатки равны.

5. Если равные умножаются на равные, то произведения (facta) равны.

6. Если равные делятся на равные, то частные (orta) равны.

7. Те, что пропорциональны напрямую, пропорциональны при «обращении» и «перестановке» [если $a:b=c:d$, то $b:a=d:c$ и $a:c=b:d$].

8. Если подобные пропорциональные прибавляются к подобным, то целые [то есть суммы] подобны [если $a:b=c:d$, то $(a+c):(b+d)=a:b$].

9. Если от подобных пропорциональных отнимаются подобные, то разности (остатки) подобны [если $a:b=c:d$, то $(a-c):(b-d)=a:b$].

10. Если подобные умножаются на подобные, то произведения подобны [если $a:b=c:d$ и $e:f=g:h$, то $ae:bf=cg:dh$].

Ибо при умножении пропорциональных [величин] на пропорциональные входящие в них (в произведения) отношения составляются (componuntur)[7]*. А в том, что отношения, составленные из равных отношений, равны между собой (досл. «суть те же»), согласны все античные греческие геометры, о чем свидетельствуют в разных местах [своих сочинений] Аполлоний, Папп и прочие геометры. Но составное отношение есть результат перемножения между собой предшествующих и последующих [членов], что следует из доказанного Евклидом 23-го предложения шестой [книги] и 5-го предложения восьмой книги «Начал»*[8].

11. Если подобные делятся на подобные, то частные подобны [если $a:b=c:d$ и $e:f=g:h$, то $a/e:b/f=c/g:d/h$].

Ибо при делении пропорциональных [величин] на пропорциональные равные отношения отделяются (auferuntur) от равных; в то время как при перемножении отношения составляются вместе, при делении одно отношение отделяется от другого, ибо деление разрешает (resolvit) то, что умножение, как показано выше, производит (efficit). О таком способе рассуждения свидетельствуют [различные] места, рассеянные в работах Аполлония и прочих древних геометров.

12. Равенство или отношение не изменяется при умножении на общий множитель или делении на общий делитель [$ma:mb = a:b$ и $a/m:b/m = a:b$].

13. Произведения, построенные на нескольких отрезках, равны произведению [, построенному] на целом [, то есть на сумме отрезков $ab + ac = a(b + c)$].

14. Произведения, полученные при помощи последовательного умножения величин, или частные, полученные при помощи последовательного деления, равны независимо от порядка сомножителей или делителей [$ab = ba$ и $(a/b)/c = (a/c)/b$].

Однако самым главным и наиболее важным будет следующее соглашение о равенствах и пропорциях:

15. Если заданы три или четыре величины и произведение крайних членов [этой последовательности] равно произведению среднего [члена] на себя или же средних [членов] между собой, то [эти] величины являются пропорциональными

[если заданы три величины a, b, c и $ac = b^2$, то $a:b = b:c$; если же заданы четыре величины a, b, c, d и $ad = bc$, то $a:b = c:d$].

И наоборот,

16. Если даны три или четыре величины и отношение первой ко второй равно отношению второй или третьей к оставшейся, то произведение крайних [членов] будет равно произведению средних [если $a:b = b:c$, то $ac = b^2$; если $a:b = c:d$, то $ad = bc$].

Таким образом, можно сказать, что пропорция есть установление равенства (constitutio aequalitatis), а равенство – разрешение пропорции (resolutio proportionis)

Глава III

О законе однородных, а также о степенях и родах сравниваемых (comparatarum)[9] величин

Самым главным и неизменным законом равенств и пропорций, носящим название закона однородных – ибо он относится к однородным [величинам] – является следующее [установление]:

1. Однородные [величины] приравниваются [только] однородным (homogenea homogeneis comparari)[10]

Ибо, как сказано Адрастом[11], невозможно знать, как сочетаются между собой (inter se adfecta sint) разнородные (heterogenea) [величины].

Таким образом,

Если величина прибавляется к величине, то они (эти величины) однородны.

Если величина вычитается из величины, то они однородны.

Если величина умножается (ducitur) на величину, то [величина] произведения разнородна и с первой и со второй.

Если величина делится (adplicatur) на величину, то они разнородны.

Небрежение этими положениями было причиной многих неясностей, порожденных слепотой древних аналитиков.

2. Величины, которые пропорционально восходят и нисходят из рода в род согласно собственной силе (sua vi), называются упорядоченными (scalares).

3. Первой упорядоченной величиной является «сторона» (latus) или «корень» (radix);
второй – «квадрат» (quadratum);
третьей – «куб» (cubus);
четвертой – «квадрато-квадрат» (quadrato-quadratum);
пятой – «квадрато-куб» (quadrato-cubus);
шестой – «кубо-куб» (cubo-cubus);
седьмой – «квадрато-квадрато-куб» (quadrato-quadrato-cubus);
восьмой – «квадрато-кубо-куб» (quadrato-cubo-cubus);
девятой – «кубо-кубо-куб» (cubo-cubo-cubus).

И на основании этих [имен] прочие [величины] должно именовать (denominanda) по порядку в соответствии с [описанным] методом.

4. Родами величин, которые приравниваются, будучи поставленными в соответствие с упорядоченными [величинами], являются:
во-первых, «длина» (longitudo) или ширина (latitudo);
во-вторых, «плоская» (planum);
в-третьих, «телесная» (solidum);
в-четвертых, «плоско-плоская» (plano-planum);
в-пятых, «плоско-телесная» (plano-solidum);
в-шестых, «телесно-телесная» (solido-solidum);
в-седьмых, «плоско-плоско-телесная» (plano-plano-solidum);
в-восьмых, «плоско-телесно-телесная» (plano-solido-solidum);
в-девятых, «телесно-телесно-телесная» (solido-solido-solidum).

Основываясь на этом, должно именовать (denominanda) прочие [величины] по порядку в соответствии с [описанным] методом.

5. В ряду упорядоченных [величин] та [величина], которая имеет наивысшую ступень (gradus) по отношению к «стороне» (latus), из которой [она] происходит, называется «степенью» (potestas). Остальные, более низкие упорядоченные [величины], называются ступенями, находящимися «по пути к степени» (parodici ad potestatem) [далее переводим по смыслу: «имеющие более низкую степень»].

6. Степень называется «чистой» (pura), если она свободна от сочетания (adfectione vacat). Степенью «в сочетании» (adfecta) называется та, к которой присоединяется (immiscetur) однородная [ей величина], состоящая из низшей ступени и величины-коэффициента [x^3 – чистая степень; $x^3 + x^2a$ – степень «в сочетании» или сочетающаяся степень].

Чистыми степенями являются

«квадрат», «куб», «квадрато-квадрат», «квадрато-куб», «кубо-куб» и т.д.

Сочетающимися степенями являются

во второй степени:

«квадрат» вместе с «плоской» [величиной], являющейся произведением стороны квадрата и [некоторой] «длины» или «ширины» [$x^2 + xa$];

в третьей степени:

(i) «куб» вместе с «телесной» [величиной], являющейся произведением «квадрата» и [некоторой] «длины» или «ширины» [$x^3 + x^2a$];

(ii) «куб» вместе с «телесной» [величиной], являющейся произведением «стороны» и [некоторой] «плоской» [величины] [$x^3 + xB$, *где* B – *«плоская» величина*];

(iii) «куб» вместе с двумя «телесными» [величинами], одна из которых является произведением «квадрата» и [некоторой] «длины» или «ширины», а другая – «стороны» и [некоторой] «плоской» [величины] [$x^3 + x^2a + xB$].

в четвертой степени:

(i) «квадрато-квадрат» вместе с «плоско-плоской» [величиной], являющейся произведением «куба» и [некоторой] «длины» или «ширины» [$x^4 + x^3a$];

(ii) ««квадрато-квадрат» вместе с «плоско-плоской» [величиной], являющейся произведением «квадрата» и [некоторой] «плоской» [величины] [$x^4 + x^2B$, *где* B – *«плоская» величина*];

(iii) «квадрато-квадрат» вместе с «плоско-плоской» [величиной], являющейся произведением «стороны» и [некоторой] «телесной» [величины] [$x^4 + xC$, *где* C – *телесная величина*];

(iv) «квадрато-квадрат» вместе с двумя «плоско-плоскими» [величинами], одна из которых является произведением «куба» и [некоторой] «длины» или «ширины», а другая – произведением «квадрата» и [некоторой] «плоской» [величины] $[x^4 + x^3 a + x^2 B]$.

(v) «квадрато-квадрат» вместе с двумя «плоско-плоскими» [величинами], одна из которых является произведением «куба» и [некоторой] «длины» или «ширины», а другая – произведением «стороны» и [некоторой] «телесной» [величины] $[x^4 + x^3 a + xC]$;

(vi) «квадрато-квадрат» вместе с двумя «плоско-плоскими» [величинами], одна из которых является произведением «квадрата» и [некоторой] «плоской» [величины], а другая – произведением «стороны» и [некоторой] «телесной» [величины] $[x^4 + x^2 B + xC]$;

(vii) «квадрато-квадрат» вместе с тремя «плоско-плоскими» [величинами], одна из которых является произведением «куба» и [некоторой] «длины» или «ширины», другая – произведением «квадрата» и [некоторой] «плоской» [величины], а третья – произведением «стороны» и [некоторой] «телесной» [величины] $[x^4 + x^3 a + x^2 B + xC]$.

Следуя по порядку, можно найти степени в сочетании, соответствующие остальным ступеням лествицы. Если же захотим узнать, сколько родов сочетающихся степеней находится на данной ступени, то возьмем число на единицу меньшее того члена геометрической прогрессии со знаменателем два $[1:2 = 2:4 = 4:8$, *etc.], порядок которого совпадает с порядком степени. Так, если кто-то захочет узнать, сколько сочетающихся степеней находится на ступени «квадрато-квадратов», то есть на четвертой, то следует взять четвертый член этой прогрессии, то есть 8, и отнять от него единицу – получится 7. Ровно столько степеней в сочетании [, принадлежащих к] четвертой ступени, мы перечислили выше. Тем же способом можно установить, что на ступени «квадрато-кубов», то есть на пятой, находится пятнадцать родов сочетающихся степеней.*

7. Величины-коэффициенты, на которые умножают величины более низких степеней для получения однородных членов, называются «под-ступенями» (sub-graduales).

«Под-ступенями» являются: «длина» или «ширина», «плоская», «телесная», «плоско-плоская» [величины]. Так, если задан «квадрато-квадрат» вместе с «плоско-плосокой» [величиной], являющейся произведением «стороны» и «телесной» [величины], то «телесная» [величина] будет «под-ступенью»; «сторона» же будет [величиной] более низкой степени по отношению к «квадра-

то-квадрату» [пусть в выражении $x^4 + xC$, x^4 – «квадрато-квадрат», а xC – «плоско-плоская» величина, являющаяся произведением стороны x и телесной величины C; тогда C является «под-ступенью», а x – величиной более низкой степени по отношению к x^4]. Или, если задан «квадрато-квадрат» вместе с двумя «плоско-плоскими» [величинами], одна из которых является произведением «квадрата» и [некоторой] «плоской» [величины], а другая – произведением «стороны» и [некоторой] «телесной» [величины], то плоская и телесная [величины] будут «под-ступенями», а «квадрат» и «сторона» – [величинами] более низких степеней по отношению к «квадрато-квадрату» [в выражении $x^4 + x^2B + xC$ величины B и C являются под-ступенями, а x^2 и x – величинами более низких степеней по отношению к x^4].

Глава IV

О правилах вычислений с видами (logistice speciosa)

Числовая логистика (logistice numerosa) работает с числами, видовая же (logistice speciosa) – с видами или формами вещей, например, с буквами алфавита.

Диофант изложил (tractavit) числовую логистику в тринадцати книгах «Арифметики», из которых сохранились только первые шесть; [теперь] они доступны на греческом и латинском языке с ученейшими комментариями знаменитейшего мужа Клавдия Баше [де Мезириака]. Виет же упорядочил (concinnavit) исчисление видов в пяти книгах «Зететики», [содержание] которой он изложил, придерживаясь, в основном, последовательности основных задач Диофанта, некоторые из которых он решил при помощи своего собственного метода (methodo). Таким образом, если ты желаешь с пользой усвоить различие между двумя типами исчислений [то есть между числовой и видовой логистикой], то тебе следует обратиться одновременно к Диофанту и Виету; зететика последнего должна изучаться вместе с арифметическими задачами первого; с целью облегчить тебе столь затруднительное сопоставление, я кратко перечислю «зететики», заимствованные [Виетом] из задач Диофанта.

Диофант		Виет	
Книга «Арифметики»	Задача	*Книга «Зететики»*	Задача
I	1	I	1
	4		2
	2		3
	7		4
	9		5
	5		7

Диофант		Виет	
Книга «Арифметики»	Задача	*Книга «Зететики»*	Задача
	6		8
II	8, 9	IV	1
	10		2, 3
	11		6
	12		7
	13		8
	14		9
V	8		11
III	7, 8	V	1
	9		3
	10		4
	11		5
	12		7
	13		8
V	9		9
IV	34		13

В видовой логистике существуют следующие четыре канонических правила (praecepta).

Правило I

Прибавить величину к величине

Пусть заданы две величины A и B. Требуется одну прибавить к другой.

Если к величине прибавляется величина, то – [поскольку] неоднородные не сочетаются с однородными – величины, которые требуется сложить, суть однородные. То, что одна из них больше, а другая меньше, не означает, что они принадлежат разным родам. По этой причине сложение удобно (commode) производить при помощи знака объединения (copulae) или присоединения (adjunctionis); когда A и B суть просто «длина» или «ширина», их сумма (досл. «взятые совместно»), будет [обозначаться] «A plus B».

Если же они (величины) находятся на более высоких ступенях вышеописанной лествицы или же разделяют род с теми [величинами], которые находятся выше, то тогда они будут обозначаться соответствующим именем (denominatione); например, можно сказать «A quadratum plus B plano» [«квадрат» A плюс «плоская» (величина) B] или «A cubus plus B solido» [«куб» A плюс «телесная» (величина) B], и сходным образом в остальных случаях.

Аналитики (analystae) обычно обозначают операцию присоединения при помощи символа «+».

Правило II
Вычесть величину из величины

Пусть заданы две величины A и B, первая из которых больше второй. Требуется из большей вычесть меньшую.

Если от величины отнимается величина, то – [поскольку] неоднородные не сочетаются с однородными – заданные величины являются однородными. То, что одна из них больше, а другая меньше, не означает, что они принадлежат разным родам. По этой причине их удобно вычитать при помощи знака отъединения (disjunctionis) или отнятия (multae)[12] меньшей от большей; вычитание одной из другой будет [обозначаться] «A minus B», когда A и B суть просто «длина» или «ширина».

Если же они (величины) находятся на более высоких ступенях указанной лествицы или же разделяют род с теми [величинами], которые находятся выше, то тогда они будут обозначаться соответствующим именем; например, можно сказать «A quadratum minus B plano» [«квадрат» A минус «плоская» (величина) B] или «A cubus minus B solido» [«куб» A минус «телесная» (величина) B], и сходным образом в других случаях.

Не иначе будет обстоять дело и в случае, когда вычитаемая величина сама является составленной [из нескольких величин], ибо не до́лжно судить о целом и [его] частях по различным законам. Например, если из A вычитается «B plus D», то разность будет «A minus B, minus D», иными словами, величины B и D вычитаются последовательной (одна за другой).

Если же из B вычтена D, а из A требуется вычесть «B minus D», то разность будет «A minus B plus D»; ибо, вычитая B, мы вычитаем величину, которая превосходит вычитаемое на величину, равную D; поэтому [поученный результат] следует компенсировать прибавлением [величины] D. Аналитики же обычно обозначают операцию отнятия (multae) при помощи символа «–». У Диофанта она названа «недостатком» (греч.), а сложение – «наличием (присутствием)» (греч.).

Если же требуется произвести вычитание и [при этом] не сказано, какая из величин больше, а какая меньше, то знаком для разности будет «=»; это [обозначение] будет свидетельствовать о том, что меньшая [величина] не определена; например, если «A quadratum» и « B planum» являются заданными величинами, то их разность будет или «A quadratum = B planum» или «B planum = A quadratum»[13].

Правило III

Умножить величину на величину (magnitudinem in magnitudinem ducere)

Пусть заданы две величины A и B. Требуется одну умножить на другую.

Если величина умножается на величину, то своим произведением (ductu suo) они создадут (efficient) величину, неоднородную по отношению к ним обеим; поэтому ту [величину], которая станет их произведением (quae sub iis fit), будет правильно назвать, используя слова «in» или «sub», например, «A in B»; это означает, что одна из них умножена на другую, или, как иные говорят, [величина произведения] «построена на A и B» (factam esse sub A&B); именно такой простой вид [имеет произведение], когда A и B суть обычные «длина» или «ширина».

Если же перемножаемые величины находятся на более высоких ступенях лествицы или же разделяют род с таковыми, то согласимся добавлять [к ним] имена упорядоченных величин или величин, поставленных им в соответствие: например, «A quadratum in B» [«квадрат» A, умноженный на (линейную величину) B»], или «A quadratum in B planum» [«квадрат» A, умноженный на плоскую (величину) B»], или «A quadratum in B solidum» [«квадрат» A, умноженный на телесную (величину) B»], и сходным образом в других случаях.

Если перемножаемые величины, [обе сразу] или одна, имеют два наименования или более, то и в этом случае никакого различия в действиях не произойдет. Так как целое равно сумме своих частей, совокупность того, что построено на отрезках (сумма которых есть некоторая величина), равно построенному на целом [отрезке][14]. И если положительное имя (nomen adfirmatum) умножается на положительное имя другой величины, то произведение будет положительным, а если умножается на отрицательное (nomen negatum), то – отрицательным.

Из этого же правила следует, что произведение одного отрицательного имени на другое [отрицательное имя] будет положительным, как, например, в случае умножения «$A = B$» на «$D = G$» [произведение равно $DA - DB - GA + GB$]; произведение положительной [величины] A и отрицательной [величины] G будет отрицательной [величиной], это означает, что, когда в качестве сомножителя берется A, то отнимается или вычитается слишком много; [то есть, когда из DA вычитается целиком GA и записывается в виде «$- GA$»,] допускается неточность; сходным образом [обстоит дело] и в отношении [величины] произведения отрицательной [величины] B на положительную [величину] D, [которая] будет отрицательной; это означает снова, что, когда в качестве сомножителя берется D, то вычитается слишком много; [то есть, когда из DA вычитается целиком DB и записывается в виде «$-DB$»,] допускается неточность. Следовательно, чтобы компенсировать [указанную] неточность, произведение отрицательного [имени] B на отрицательное [имя] G должно быть положительным.

Именования (denominationes) произведений, составленных из величин, пропорционально возрастающих из рода в род, связаны между собой следующим точным образом:

«Сторона», [умноженная] на себя, дает «квадрат».

«Сторона», [умноженная] на «квадрат», дает «куб».

«Сторона», [умноженная] на «куб», дает «квадрато-квадрат».

«Сторона», [умноженная] на «квадрато-квадрат», дает «квадрато-куб».

«Сторона», [умноженная] на «квадрато-куб», дает «кубо-куб».

И [точно] так же [именуются произведения, сомножители которых взяты] в обратном порядке (permutatim): а именно, «квадрат», [умноженный] на «сторону», дает «куб»; «куб», [умноженный] на «сторону», дает «квадрато-квадрат»; и т.д. И далее,

«Квадрат» на «квадрат» дает «квадрато-квадрат».

«Квадрат» на «куб» дает «квадрато-куб».

«Квадрат» на «квадрато-квадрат» дает «кубо-куб». И [точно так же] в обратном порядке. И далее,

«Куб» на себя дает «кубо-куб».

«Куб» на «квадрато-квадрат» дает «квадрато-квадрато-куб».

«Куб на «квадрато-куб» дает «квадрато-кубо-куб».

«Куб на кубо-куб» дает «кубо-кубо-куб». И [точно] так же взятые в обратном порядке; и далее по порядку [возрастания степеней].

И точно так же с однородными [величинами]:

«Ширина» на «длину» дает «плоское».

«Ширина» на «плоское» дает «телесное».

«Ширина» на «телесное» дает «плоско-плоское».

«Ширина» на «плоско-плоское» дает «плоско-телесное».

«Ширина» на «плоско-телесное» дает «телесно-телесное».

И [точно] так же взятые в обратном порядке.

«Плоское» на «плоское» дает «плоско-плоское».

«Плоское» на «телесное» дает «плоско-телесное».

«Плоское» на «плоско-плоское» дает «телесно-телесное».

И [точно] так же взятые в другом порядке.

«Телесное» на «телесное» дает «телесно-телесное».

«Телесное» на «плоско-плоское» дает «плоско-плоско-телесное».

«Телесное» на «плоско-телесное» дает «плоско-телесно-телесное».

«Телесное» на «телесно-телесное» дает «телесно-телесно-телесное».

И [точно] так же взятые в другом порядке; и далее по порядку [возрастания степеней].

Правило IV

Деление величины на величину (magnitudinem magnitudini adplicare)

Пусть заданы две величины A и B. Требуется поделить одну на другую.

Поскольку требуется поделить одну величину на другую, а именно, имеющую более высокую степень на [имеющую] более низкую, то данные величины [обязательно] будут неоднородными. Пусть A будет «длиной», а B – «плоской» (величиной). Тогда между [буквой] B, которая делится и [имеет] более высокую [степень], и [буквой] A, которая делит [и имеет] более низкую [степень], следует (commode) расположить [горизонтальную] линию.

И тогда сами величины, полученные при делении, будут именоваться или в соответствии со ступенями пропорциональных [величин] лествицы или [же в соответствии с теми] однородными, к которым они приведены (devectae sunt), как, например, $\dfrac{B\ planum}{A}$; таким символом можно обозначить «ширину», которая получится при делении «плоской» (величины) B на «длину» A.

Если же [величина] B задана как «куб», а A – как «плоская» (величина), то результат деления обозначается $\dfrac{B\ cubus}{A\ plano}$; этим символом можно обозначить «ширину», которая получится при делении «куба» B на «плоскую (величину)» A.

А если [величина] B задана как «куб», а [величина] A – как «длина», то [результат деления] обозначается $\dfrac{B\ cubus}{A}$; этим символом можно обозначить «плоскую (величину)», которая получится при делении «куба» B на [длину] A; и т.д. в том же порядке до бесконечности.

И при [выполнении] действий с величинами, имеющими вид биномов или полиномов, никаких отличий [от приведенных выше правил] не будет.

Обозначения величин, возникающих при делении на пропорциональные, последовательно нисходящие из рода в род, связаны между собой в точности так, как сформулировано ниже:

«Квадрат», деленный на «сторону», (снова) дает (restituit) «сторону».

«Куб», деленный на «сторону», дает «квадрат».

«Квадрато-квадрат», деленный на «сторону», дает «куб».

«Квадрато-куб», деленный на «сторону», дает «квадрато-квадрат».

«Кубо-куб», деленный на «сторону», дает «квадрато-куб».

И [точно так же взятые] в обратном порядке, то есть «куб», деленный на «квадрат», дает «сторону»; «квадрато-квадрат» на «куб» [дает] «сторону»; и т.д.

И снова,

«Квадрато-квадрат», деленный на «квадрат», дает «квадрат».

«Квадрато-куб», деленный на «квадрат», дает «куб».

«Кубо-куб», деленный на «квадрат», дает «квадрато-квадрат».

И [точно так же взятые] в обратном порядке.

И снова,

«Кубо-куб», деленный на «куб», дает «квадрато-квадрат»[15].

«Квадрато-кубо-куб», деленный на «куб», дает «квадрато-куб».

«Кубо-кубо-куб», деленный на «куб», дает «кубо-куб».

И [так же взятые] в обратном порядке; и далее по порядку [возрастания степеней].

Подобным же образом [обстоит дело и] с однородными [величинами].

«Плоская» [величина], деленная на «ширину», дает «длину».

«Телесная» [величина], деленная на «ширину», дает «плоскую».

«Плоско-плоская» [величина], деленная на «ширину», дает «телесную».

«Плоско-телесная» [величина], деленная на «ширину», дает «плоско-плоскую».

«Телесно-телесная» [величина], деленная на «ширину», дает «плоско-телесную».

И [точно так же взятые] в обратном порядке.

«Плоско-плоская», деленная на «плоскую», дает «плоскую».

«Плоско-телесная», деленная на «плоскую», дает «телесную».

«Телесно-телесная», деленная на «плоскую», дает «плоско-плоскую».

И [точно так же взятые] в обратном порядке.

«Телесно-телесная», деленная на «телесную», дает «телесную».

«Плоско-плоско-телесная», деленная на «телесную», дает «плоско-плоскую».

«Плоско-телесно-телесная», деленная на «телесную», дает «плоско-телесную».

«Телесно-телесно-телесная», деленная на «телесную», дает «телесно-телесную».

И [точно] так же взятые в обратном порядке; и далее по порядку [возрастания степеней].

Кроме того, если величина, которая делится, является суммой, разностью, произведением или частным некоторых величин, ничто не препятствует применению к [операции] деления вышеизложенных правил; ибо было замечено, что, если величина, которая делится (будет ли она высокой или низкой [степени]), является произведением [некоторой] величины и величины, равной делителю, то при этом ничего кроме делителя не добавляется и не отнимается от ее рода или значения (valori); ибо то, что производится умножением, разрешается делением, как, например, $\dfrac{B\ in\ A}{B}$ равно A; или $\dfrac{B\ in\ A\ planum}{B}$ равно $A\ planum$.

И [точно] так же при сложении:

Пусть требуется к $\dfrac{A\ plano}{B}$ прибавить Z; сумма будет $\dfrac{A\ planum + Z\ in\ B}{B}\left[\dfrac{a^2}{b} + z = \dfrac{a^2 + z \cdot b}{b}\right]$.

Или пусть требуется к $\dfrac{A\ plano}{B}$ прибавить $\dfrac{Z\ quadratum}{G}$; сумма будет $\dfrac{G\ in\ A\ planum + B\ in\ Z\ quadratum}{B\ inG}$.

В случае вычитания:

Пусть требуется из $\dfrac{A\ plano}{B}$ вычесть Z; разность будет $\dfrac{A\ planum - Z\ in\ B}{B}$.

Или же пусть требуется из $\dfrac{A\ plano}{B}$ вычесть $\dfrac{Z\ quadratum}{G}$; разность будет $\dfrac{G\ in\ A\ planum - B\ inZ\ quadratum}{B\ in\ G}$.

В случае умножения:

Пусть требуется $\dfrac{A\ planum}{B}$ умножить на B; получится $A\ planum$.

Или [пусть] требуется $\frac{A\ planum}{B}$ умножить на Z; получится $\frac{A\ planum\ in\ Z}{B}$.

Или же, наконец, [пусть] требуется $\frac{A\ planum}{B}$ умножить на $\frac{Z\ quadratum}{G}$; получится $\frac{A\ planum\ in\ Z\ quadratum}{B\ in\ G}$.

В случае деления:

Пусть требуется $\frac{A\ cubum}{B}$ разделить на D; умножив каждую из величин на B, получим $\frac{A\ cubus}{B\ in\ D}$.

Или же, пусть требуется $B\ in\ G$ разделить на $\frac{A\ planum}{D}$; умножив каждую из величин на D, получим $\frac{B\ in\ G\ in\ D}{A\ plano}$.

Или же, наконец, [пусть] требуется $\frac{B\ cubum}{Z}$ разделить на $\frac{A\ cubum}{D\ plano}$; получится $\frac{B\ cubus\ in\ D\ planum}{Z\ in\ A\ cubum}$.

Глава V

О законах зететики (De legibus Zeteticis)

Образ действия (forma perficiendae) зететики, в целом, подчинен следующим законам:

1. Если спрашивается о «длине», а уравнение или пропорция сокрыты под покровом заданного [условием][16], то искомой длиной пусть будет «сторона».

2. Если спрашивается о плоской (величине), а уравнение или пропорция сокрыты под покровом заданного [условием], то искомой плоской (величиной) пусть будет «квадрат».

3. Если спрашивается о телесной (величине), а уравнение или пропорция сокрыты под покровом заданного [условием], то искомой телесной (величиной) пусть будет «куб». Таким образом, та [величина], которая ищется, будет восходить и нисходить в соответствии со своей природой по всевозможным ступеням величин, приравниваемых к ней.

4. Искомые и заданные величины уподобляются (adsimilantor) и приравниваются (camparantor) в соответствии с условием задачи при помощи сложения, вычитания, умножения или деления так, что [при этом] неизменно соблюдается закон однородности.

Таким образом, ясно, что, в конечном итоге, будет найдено нечто, равное искомой величине или же степени, в которую она восходит; и оно (это нечто) будет состоять либо целиком из заданных (известных) величин, либо частично из заданных [величин] и неизвестной искомой (или же ее более низких степеней)[17].

5. Чтобы с помощью искусства облегчить сей труд, [установим следующее]: пусть заданные величины отличаются от искомых посредством неизменных, вечных и совершенно ясных обозначений (symbolo); пусть, например, искомые величины обозначаются буквами (elemento) A или иными гласными E, I, O, U, Y, а заданные – буквами B, G, D или иными согласными[18].

6. Произведения, состоящие целиком из заданных величин, можно прибавлять одно к другому или вычитать одно из другого в соответствии со знаком их взаимного сочетания (juxta adfectionis notam); [в результате такого прибавления или вычитания] они «срастутся» в единое произведение, которое при приравнивании станет однородным, то есть будет построено в соответствии с заданной мерой; и оно будет [составлять] одну из частей уравнения[19].

7. Аналогично, произведения, состоящие из заданных величин и [величин] более низкой степени, можно прибавлять одно к другому или вычитать одно из другого, следуя знаку их взаимного сочетания; и [тем самым] они будут «срастаться» в единое произведение, которое будет либо однородным, либо «в сочетании», либо «в более низкой степени»[20].

8. Являющиеся однородными более низкой степени будут сопутствовать степени, с которой они сочетаются, и составлять вместе с этой степенью одну из частей уравнения. И таким образом, однородный [член, построенный] в соответствии с заданной мерой, будет выражен при помощи степени, исходя из присущего ей рода или порядка; проще: если эта [степень] свободна от сочетаний [с другими величинами], но [при этом] ей сопутствуют однородные «в сочетании», обозначаемые и знаком сочетания, и знаком степени, то величина, однородная по отношению к заданной мере, будет приравнена не только к этой степени, но и к степени, взятой вместе с [величинами,] являющимися произведениями степеней и коэффициентов[21].

9. И, следовательно, если однородной по отношению к заданной мере случится быть смешанной с однородной «в сочетании» (homogeneo sub gradu), то разрешено [произвести] антитезис[22].

Антитезис – это [операция, при которой] сочетающиеся величины переносятся из одной части уравнения в другую с изменением знака сочетания на противоположный. В результате этого действия уравнение не меняется. Однако это сейчас надо доказать.

Предложение I

Антитезис не изменяет уравнения

Пусть дано: «*A* quadratum minus *D* plano» приравнено (equari) «*G* quadrato minus *B* in *A*». Я говорю (утверждаю), что «*A* quadratum plus *B* in *A*» будет равно «*G* quadrato plus *D* plano», [иными словами,] что при подобном перемещении (transpositio), сопровождающемся изменением знака сочетания на противоположный, равенство не изменится. К обеим [частям уравнения] «*A* quadratum minus *D* plano» равно «*G* quadrato minus *B* in *A*» прибавим «*D* planum plus *B* in *A*». Из общего понятия следует: «*A* quadratum minus *D* plano plus *D* plano plus *B* in *A*» равно «*G* quadrato minus *B* in *A* plus *D* plano plus *B* in *A*». Но в обеих частях [данного] равенства сочетание [со знаком] отрицания (adfectio negata) «выталкивает» (elidat) сочетание [со знаком] утверждения (adfectio adfirmata): в одной части [равенства при этом] исчезает сочетание *D* plano, в другой – сочетание *B* in *A*, и остается: «*A* quadratum plus *B* in *A*» равно «*G* quadrato plus *D* plano».

10. А если случится, что все заданные величины умножены на степень (in gradum), и по этой причине однородность, определяемая общей для всех [величин] мерой, не проявляется явно (и сразу), то следует [произвести] гипобибазм[23].

Гипобибазм – есть одинаковое (одновременное) понижение [высшей] степени (aequa depressio potestatis) и более низких степеней с соблюдением порядка лествицы[, производимое] до тех пор, пока однородный [член], определяемый более низкой степенью, не совпадет с общей и для всех заданной однородностью, при помощи которой приравниваются оставшиеся [величины]. В результате этого действия уравнение не меняется. Однако это сейчас надо доказать.

Гипобибазм же отличается от параболизма только тем, что при гипобибазме обе части уравнения делятся на неизвестное количество, а при параболизме – на известное количество, что ясно видно из приводимых автором примеров.

Предложение II

Гипобибазм не изменяет уравнения

Пусть дано: «*A* cubus plus *B* in *A* quadratum» приравнено «*Z* plano in *A*». Я говорю, что результатом гипобибазма будет: «*A* quadratum plus *B* in *A*» равно «*Z* plano».

[Но это так,] ибо все «телесные» [величины] были поделены на один и тот же делитель, а эта операция, как было установлено, не изменяет уравнения.

11. А если же случится, что высшая степень (gradus), в которую восходит искомая величина, наличествует не сама по себе, но

лишь умноженная на некоторую заданную величину, то следует [произвести] параболизм[24].

Параболизм – есть деление всех входящих в уравнение однородных величин на заданную величину, на которую умножается высшая ступень (gradus) неизвестной величины; так что эта ступень (gradus) присваивает себе имя той степени (potestatis); в конечном итоге, уравнение остается в этой степени. В результате этого действия уравнение не меняется. Однако это сейчас надо доказать.

Предложение III

Параболизм не изменяет уравнения

Пусть дано: «*B* in *A* quadratum plus *D* plano in *A*» равно «*Z* solido». Я говорю, что результатом параболизма будет: «*A* quadratum plus $\frac{D\ plano}{B}$ in *A*» равно «$\frac{Z\ solido}{B}$». [Но это так,] ибо все «телесные» [величины] были поделены на один и тот же делитель *B*, а эта операция, как было установлено, не изменяет равенства.

12. И тогда следует назвать уравнение ясно выраженным и упорядоченным, [иными словами,] могущим быть сведенным к пропорции (ad analogismum); особенно же [следует обратить внимание] на соблюдение следующего условия (cautione): чтобы произведение крайних [членов] соответствовало степени, взятой в сочетании с однородными [членами]; а именно, [чтобы] произведение крайних [соответствовало] однородному члену, отвечающему заданной мере[25].

13. И тогда упорядоченная пропорция может быть определена как последовательность трех или четырех величин, выраженная при помощи простых [членов] или членов, находящихся в сочетании так, что все [члены,] за исключением искомого [члена] или его степени (potestatem) или более низкой степени (gradus), являются заданными [величинами].

14. И наконец, когда уравнение или пропорция упорядочены указанным образом, то будем считать, что зететика выполнила свою задачу.

Наиболее тонкое упражнение в зететике (в сравнении с другими) проделано Диофантом в книгах, которые посвященных арифметике. Однако, дабы его проницательность и остроумие вызвали еще большее восхищение, Диофант представил ее (зететику) посредством одних только чисел, а не видов (каковыми он, тем не менее, пользовался). Ибо те [приемы], которые представлялись для числовой логистики тончайшими и таинственнейшими, становятся абсолютно рутинными и тотчас же очевидными для [логистики] видовой.

Глава VI
Об исследовании теорем при помощи [искусства] пористики

Завершив зететический анализ, аналитик обращается от гипотезы к тезису и представляет найденные и упорядоченные им по [правилам] искусства теоремы в виде, определяемом подчинением их [следующим] законам: предицирование [должно] относится к «каждому представителю субъекта [предикации]», предицирование [должно] осуществляться «сущностным образом», и предицирование [должно] быть «соизмеримо с универсалией» (греч.)[26]. Эти теоремы, получающие от зететики свое доказательство и надежность, подчиняются, одновременно, закону синтеза, который считается более логическим (греч.) способом доказательства (via demonstrandi); всякий раз, когда решается задача, они (теоремы) доказываются с его помощью (закона синтеза), но [одновременно] и благодаря великому чуду искусства открытия/изобретения (magno artis inventricis miraculo). По этой причине следы, оставленные анализом (analyseos vestigia), проходятся [затем] в обратном порядке. И само оно (обратное прохождение) также является аналитическим, однако же, не благодаря тому, что было проведено при помощи видовой логистики, каковая [к этому моменту] уже выполнила возложенную на нее задачу. Ибо, если нечто постороннее, будучи найденным, предлагается [для доказательства] или [же] обретается случайно, и его истинность [еще] должна быть взвешена и исследована, то следует сначала испытать путь пористического [искусства]. С него можно [затем] легко вернуться к синтезу; соответствующие примеры были приведены Теоном в «Началах», Аполлонием Пергским в «Кониках», а также самим Архимедом в различных книгах.

Глава VII
Об обязанностях [искусства] ретики

После того, как уравнение упорядочено относительно неизвестной величины, ретика или экзегетика (греч.) – которая считается заключительной частью аналитики, наиболее подходящей для [осуществления] действий в соответствии с искусством (ибо две другие [ее части] относятся, скорее, к образцам (действия) (exemplorum), нежели к правилам, [исследование] которых следует поэтому оставить логикам) – приступает к исполнению своих обязанностей по отношению к числам (когда искомой является величина, выраженная в числах) или по отношению к длинам, поверхностям или телам (когда требуется предъявить величину как таковую). В последнем случае аналитик предстает в роли геометра, выполняя по сути задачу, подобную [аналитическому] решению [геометрической проблемы]; в первом же случае, [он предстает в качестве] логистика, разрешая всевозможные степени, чистые или в сочетании, выраженные посредством числа. Но и в арифметике, и в геометрии он воспроизводит образцы своего [аналитического] искусства, [действуя] в соответствии с условием найденного уравнения или пропорции, полученных из него (условия) согласно правилам упорядочивания.

На деле, не всякое геометрическое решение является изящным, но каждая задача обладает своей собственной [степенью] элегантности. Предпочтение перед другими отдается такому решению, которое сводится не к синтезу из уравнения, но к уравнению из синтеза (equalitatem ex compositione), ибо синтез является [одновременно и] доказательством [своей истинности]. Таким образом, искусный (artifex) геометр, хотя и является ученым аналитиком, скрывает это [обстоятельство], и, размышляя как будто лишь о доказательстве, которое требуется провести, [на деле] представляет и изъясняет поставленную задачу как синтетическую (profert suum syntheticum problema); затем, приходя на помощь логистикам, он осмысливает и доказывает теорему о пропорции или уравнении, которые усматриваются (adgnita) в ней (в синтетически представленной задаче).

Глава VIII

[Символическое] обозначение уравнений и эпилог [аналитического] искусства

1. В аналитике просто произнесенным словом (vox simpliciter prolata) «уравнение» (aequationis) принято обозначать равенство, упорядоченное установленным образом (rite ordinata) при помощи зететики.

2. Таким образом, уравнение (aequatio) есть приравнивание (comparatio) неизвестной и известной [величин].

3. Неизвестная величина есть корень или степень (radix vel potestas).

4. И снова, степень является либо чистой, либо в сочетании (pura vel adfecta).

5. Сочетание бывает посредством отрицания или утверждения (per negationem vel adfirmationem).

6. Если из степени вычитается однородное в сочетании, то [такое] вычитание есть прямое (directa).

7. Если же наоборот, степень вычитается из однородного в сочетании с более низкой степенью (sub gradu), то [такое] вычитание есть обратное (inversa).

8. Измеряющая под-ступень (subgradualis metiens) сама является мерой ступени, на которой находится однородное в сочетании.

9. Необходимо в той части уравнения, в которой находится неизвестное, указывать (designari) порядок как [максимальных], так

и более низких степеней, а также характер (qualitatem) или знак (notam) сочетания. Равным образом, следует задавать величины-коэффициенты под-ступеней.

10. Первой [величиной] более низкой ступени по отношению к степени является корень, который ищется. Последней [величиной более низкой ступени по отношению к степени является] та [величина,] степень которой меньше степени на одну ступень лествицы. Ее принято называть термином «эпанофора».

Так, «квадрат» является эпанофорой «куба», «куб» – «квадрато-квадрата», «квадрато-квадрат» – «квадрато-куба», и в том же порядке до бесконечности.

11. Величина более низкой степени является взаимно-обратной (reciprocus) к величине более низкой степени, если в результате умножения одной на другую получается степень. Таким образом, восполняющая [величина] является взаимно-обратной к ступени, которую она восполняет (sustinet) [до степени].

Так, если будет задана «сторона», имеющая более низкую степень по отношению к «кубу», то взаимно-обратной ступенью [для нее] будет «квадрат»; ибо из произведения «стороны» и «квадрата» получается «куб». Плоское же будет взаимно-обратным с линейным (sublaterale), ибо из произведения стороны и плоской [величины] получится «телесное», то есть величина той же ступени, что и «куб».

12. [Величины] более низкой степени, следующие за корнем и [возрастающие] посредством [присоединения] «длины», будут идентичны тем, что обозначены при помощи [ступеней] лествицы.

13. [Величины] более низкой [степени], следующие за корнем и [возрастающие] посредством [присоединения] «плоской» [величины], будут [такими]:

«квадрат» или «плоское»
«квадрато-квадрат»
«квадрат плоского»
«кубо-куб»
«куб плоского»
И так далее в таком порядке.

14. [Величины] более низкой [степени], следующие за корнем и [возрастающие] посредством [присоединения] «телесной» [величины], будут [такими]:

«куб» или «телесное»
«кубо-куб»
«квадрат телесного»
«кубо-кубо-куб»
«куб телесного»

15. «Квадрат», «квадрато-квадрат», «квадрато-кубо-куб» и те [величины], которые последовательно возникают из них в указанном порядке, являются простыми (simplicis) средними степенями; остальные же [величины могут быть описаны] многими (multiplicis) [способами].

Простые средние степени могут быть также определены так, что они станут [величинами], степени которых возрастают в геометрической прогрессии со знаменателем два (secundum proportionem geometricam subduplam). Так, степени «второй», «четвертой», «восьмой», «шестнадцатой» ступеней будут простыми средними степенями. Прочие [степени], находящиеся на промежуточных ступенях, будут [описываться] многими [способами].

16. Известная (certa) величина, к которой приравниваются остальные, является однородном [членом] уравнения.

Так, например, пусть A cubus + A in B quadratum равно B in Z planum. Тогда B in Z planum будет однородным [членом] уравнения (homogeneum comparationis).

A cubus будет степенью, в которую восходит неизвестная величина в соответствии со своей природой (vi sua).

A in B quadratum будет [степенью] однородной в сочетании.

A – более низкой степенью.

B quadratum – величиной под-ступени или параболой.

17. В случае чисел однородными [членами] уравнений являются единицы.

18. Уравнение, в котором искомый «корень» (radix), находящийся на основании, приравнивается заданной однородной величине, будет безусловно (absolute) простым.

19. Когда свободная от сочетаний степень искомого «корня» приравнивается заданной однородной [величине], уравнение будет простым лествичным (climactica).

20. Когда степень искомого «корня» находится в сочетании с [величиной] определенной ступени (sub designato gradu) совместно с заданным коэффициентом и [в таком виде] приравнивается заданной однородной величине, то уравнение в силу множественности и разнообразия сочетаемых является полиномиальным.

21. Степень может быть связана со стольким числом сочетаний, сколько существует ступеней, более низких по сравнению с этой степенью.

Так, «квадрат» может сочетаться [с величиной, находящейся на одной ступени] со «стороной»; «куб» – [с величиной, находящейся на одной ступени] со «стороной» или «квадратом»; «квадрато-квадрат» – [с величиной, находящейся на одной ступени] со «стороной», «квадратом» или «кубом»; «квадрато-куб» – [с величиной, находящейся на одной ступени] со «стороной», «квадратом», «кубом» или [«квадрато-квадратом»]; и так далее в таком порядке до бесконечности.

22. [Роды] пропорций различаются в соответствии с родами уравнений, в которые они разрешаются, и именуются согласно перечню (nomenclatura)[, установленному для последних].

23. Сведущий аналитик обучается экзегетике в [делах] арифметики (in arithmeticis).

К числу прибавить число.

Из числа вычесть число.

Число умножить на число.

Число разделить на число.

[Аналитическое] искусство осуществляет разрешение всех возможных степеней, как чистых, так и – чего не знали ни древние, ни новые [математики] – [находящихся] «в сочетании».

24. Что касается [задачи] экзегетики в [делах] геометрии, то [аналитическое искусство] выбирает и составляет перечень самых канонических процедур (effectiones magis canonicas), посредством которых могут быть полностью разъяснены уравнения, содержащие «стороны» и «квадраты».

25. Что касается «кубов» и «квадрато-квадратов», то [аналитическое искусство] требует (postulat), чтобы недостаток (defectus) геометрии был восполнен (suppleatur) как бы [средствами самой] геометрии.

Из произвольной точки можно провести прямую, пересекающую две заданные линии так, что та часть [этой прямой], которая [попадает] между ними (прямыми), будет равна произвольному заранее определенному (prefinito) отрезку между ними (intersegmento).

Приняв это [утверждение] (являющееся постулатом, который нетрудно удовлетворить), [анализ] искусно (греч.) разрешает [те] проблемы, которые считались до сих пор иррациональными (греч.), [в числе которых: вопрос о] мезографикуме [нахождение двух средних пропорциональных между двумя отрезками], [проблема] деления угла на три равные части, [вопрос о] нахождении стороны [правильного] семиугольника, а также всевозможные иные [задачи, содержание] которых может быть выражено путем приравнивания «кубов» «телесным (величинам)», [а] «квадрато-квадратов» – «плоско-плоским (величинам)», входящим [в уравнения] либо в чистых [степенях] либо в сочетании [с другими величинами].

26. Поскольку все величины являются или линиями, или поверхностями, или телами, то [можно ли представить себе] бóльшую пользу от применения (tantus usus) пропорций, состав-

ленных из тройных или даже четверных отношений, в делах человеческих (in rebus humanis), нежели та, [которую они приносят] при делении углов, [то есть,] когда требуется определить углы, исходя из [величин] сторон фигур, или стороны, исходя из [величин] углов?

27. Следовательно [анализ], будь то в арифметике или геометрии, раскрывает доселе никем не познанную тайну деления углов и учит [тому, как решать следующие задачи]:

При заданном отношении углов, найти отношение сторон.

Сделать так, чтобы отношение одного угла к другому было равно отношению числа к числу.

28. [При этом анализ] не приравнивает прямую и кривую линии, ибо угол есть нечто среднее между прямой линией и плоской фигурой. Такое [приравнивание] противоречит, по-видимому, закону однородных.

29. В результате, облеченное, наконец, в тройную форму зететики, пористики и экзегетики, аналитическое искусство по праву и самым надменным образом усвояет себе прерогативу [решения] задачи задач (problema problematum), а именно,

НЕ ОСТАВИТЬ НЕРЕШЕННОЙ НИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ (NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE).

Примечания

[1] Трактат Франсуа Виета «Введение в аналитическое искусство» («In artem analyticen Isagoge») был издан впервые в 1591 г. Настоящий перевод выполнен с посмертного издания, осуществленного Ф. ван Схотеном: *Francisci Vietæ.* Opera mathematica, in unum volumen congesta ac recognita, opera atque studio *Francisci a Schooten*. Officine de Bonaventure et Abraham Elzevier. Leyden, 1646. P.1–12. Воспроизведя текст трактата по изданию 1591 г., ван Схотен снабдил его комментариями, которые мы включили в предлагаемый перевод (комментарии набраны курсивом). Кроме того, в текст перевода включены дополнительные краткие замечания поясняющего характера (заключены в квадратные скобки). Более подробные комментарии приведены в примечаниях. «Введение в аналитическое искусство» является первым в истории математики теоретическим трактатом по алгебре. Отличающийся предельной краткостью, этот трактат содержит лишь самые основные положения символической алгебры, которую сам Виет называл «видовой логистикой». Возможности созданной им алгебраической техники Виет продемонстрировал в трактате «Пять книг зететики» (1591 г.), где привел алгебраические решения некоторых задач из «Арифметики» Диофанта.

[2] Словосочетание «зететика и пористика» Виет приводит по-гречески. Случаи употребления Виетом греческих терминов отмечены в переводе.

[3] Глагол *invenire*, имеющий значения *открывать* (уже существующее) или *изобретать* или *конструировать* (нечто новое), и, соответственно, отглагольное существительное *inventio*, является своего рода «визитной карточкой» математики и математического естествознания XVI–XVII вв. Они выражают парадоксальный характер познавательной парадигмы Нового времени, снимающей классическое противопоставление природы (natura) и искусства (ars). В отличие от своих античных предшественников творцы новой науки полагали, что *открытие* свойств *природных* объектов (независимых от познающего рассудка) достигается не посредством прямого изучения самих этих объектов, но при помощи некоторых *искусственных*

моделей, конструируемых самим рассудком. Это обстоятельство объясняет, в частности, ту непринужденность, с которой Виет использует словосочетание «аналитическое искусство». С точки зрения греческой классики данный термин представляет собой немыслимый оксюморон, ибо состоит из двух разнородных понятий – прилагательного «аналитическое», относящегося к сфере подлинного *знания* (episteme, mathema), и существительного «искусство», выражающего идею приблизительного *подобия или подражания* (techne).

[4] Схематично алгоритм решения математической задачи по Виету выглядит так: на этапе *зететики* задачу записывают в символической форме уравнения или пропорции, на этапе *пористики* эту пропорцию (или уравнение) приводят к каноническому виду, и, наконец, на этапе *ретики* или *экзегетики* находят решение, исходя из канонического вида.

[5] Речь идет об обозначении неопределенных чисел буквами A, B, C и т.д. Используемый Виетом термин species восходит, по видимому, к греческому понятию eidos, который в сходном контексте использовал Диофант в своей «Арифметике».

[6] Соглашения 2–4 соответствуют аксиомам 1–3 «Начал» Евклида [1, т.1, с.15]. Ряд других соглашений соответствует теоремам пятой книги «Начал». Так, первая часть соглашения 7 («обращение») есть следствие предложения 7 пятой книги [там же, с.152], вторая часть того же соглашения («перестановка») есть парафраза предложения 16 [там же, с.162–163], соглашение 8 представляет собой предложение 12 [там же, с.158–159], а соглашение 9 – предложение 17 [там же, с.163–164]. Остальные соглашения Виета не имеют прямых аналогов в «Началах» Евклида.

[7] Речь идет о традиционной для античной математики операции составления отношений.

[8] Здесь и далее выделенные курсивом фрагменты принадлежит Ф. ван Схотену.

[9] Термин «сравнение» (comparatio) означает сложение и вычитание величин при формировании алгебраического выражения, но также приравнивание величины к величине или выражения к выражению.

[10] Данное правило, смысл которого состоит в запрете на сложение и вычитание величин разной размерности, восходит к античной геометрической традиции. Помимо сложения и вычитания под аналогичное правило подпадают и отношения величин; ср. определение 3 кн. V «Начал» Евклида: «Отношение есть некоторая зависимость двух *однородных* величин по количеству» [1, т.1, с.142]. Данное определение говорит о том, что наличие математического отношения возможно только между величинами, которые являются одновременно линейными, плоскими или телесными. Виет, однако, вкладывает в понятие *однородности* более широкий смысл. Рассмотрим, например, пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{C}{D}$, связывающую между собой однородные линейные величины a и b и однородные телесные величины C и D. Согласно общему утверждению, сформулированному Виетом в гл.II, всякая пропорция *разрешается* в равенство. Соответственно, данная пропорция разрешается в равенство $aD = bC$, содержащее величины aD и bC, которые, согласно Виету, считаются однородными. Однако, с точки зрения греческой математики, данные выражения вообще не являются величинами, так как имеют размерность четыре. В этом пункте созданная Виетом «видовая логистика» выходит – несмотря на формальное соблюдение правила однородности – за рамки античной геометрической алгебры. Следующий шаг на пути развития символической алгебры, состоящий в полном отказе от принципа однородности, был сделан Р.Декартом. В его работах произошел окончательный отрыв символической алгебры от наглядной геометрии величин. Принцип однородности был использован нами при реконструкции архаичной теории отношения и пропорций [2].

[11] Адраст Афродисийский – древнегреческий философ-перипатетик и математик (II в. н.э.). Фрагменты его сочинения по гармонике воспроизведены в трактате Теона Смирнского «Изложение математических предметов, полезных при чтении Платона».

[12] Виет называет операцию вычитания юридическим термином multa, дословно означающим «отнятие собственности (вследствие наказания)».

[13] Впоследствии, в связи с введением в математику отрицательных величин, необходимость в использовании двух разных символов вычитания отпала. Отметим, что у Виета еще нет специального символа для обозначения равенства.

[14] Иными словами, $a(u+v)+a(x+y)=au+av+ax+ay$, или $a(z+y+z)=$ $=ax+ay+az$ (ср. «Начала» Евклида, кн.II, предл.1 [1, т.1, с.61–62]).

[15] Эта ошибка содержится в обоих изданиях трактата.

[16] Иными словами, если не получается «увидеть» сразу подходящее уравнение.

[17] В уравнении $x^2=ab$ неизвестной является величина x^2, к которой приравнивается величина ab, состоящая из заданных (известных) величин a и b. В уравнении $x^3=ax^2$ неизвестной является величина x^3, к которой приравнивается величина ax^2, состоящая из заданной (известной) величины a и неизвестной величины x^2, степень которой ниже, чем степень величины x^3.

[18] Виет обозначает неизвестные величины при помощи гласных букв, а константы и коэффициенты при неизвестных – при помощи согласных; в настоящее время неизвестные принято обозначать последними буквами латинского алфавита x, y, z, а константы и коэффициенты – первыми a, b, c, d и т.д.

[19] Например, в уравнении $x^2=ab+cd$ предполагается, что величины ab и cd являются величинами одного ранга, а именно, плоскими. Единицей измерения (мерой) является при этом единичный (плоский) квадрат.

[20] Речь идет о выражениях вида ax^2+bx^2 или ax^2-bx^2, которые являются однородными с x^3, а значит, могут составлять в сочетании с последним выражения $x^3+ax^2+bx^2$ или $x^3+ax^2-bx^2$.

[21] Смысл этого закона можно проиллюстрировать на примере уравнения $x^3=cd+e$. Для обеспечения однородности необходимо, чтобы одна из величин c или d была «длиной», а другая – «плоской (величиной)», и чтобы величина e была при этом «телесной».

[22] Антитезисом называется перенос членов из одной части уравнения в другую с изменением знака.

[23] Гипобибазмом (греч. «понижение») называется деление обеих частей уравнения на неизвестное.

[24] Параболизмом (греч. «приложение») называется деление обеих частей уравнения на коэффициент при неизвестном.

[25] Из уравнения $x^2+ax=bc+by$ следует пропорция $x:b=(c+y):(x+a)$.

[26] Виет имеет ввиду логические правила или предпосылки, сформулированные Аристотелем во «Второй аналитике» (кн.I, гл.4): «присущее всем», «присущее само по себе» и «общее» [3, с.263–266].

Список литературы

1. *Евклид*. Начала / Пер. и коммент. *Д.Д.Мордухай-Болтовского* при участии *М.Я.Выгодского* и *И.Н.Веселовского*. В 3-х томах. М.–Л., 1948–1950.
2. *Зайцев Е.А.* Логико-философские основания и историческая реконструкция архаичного варианта античной теории отношений и пропорций // Доказательство: Очевидность, достоверность и убедительность в математике / Труды Московского семинара по философии математики. Под ред. *В.А.Бажанова*, *А.Н.Кричевца*, *В.А.Шапошникова*. М., 2013. С.149–221.
3. *Аристотель*. Вторая аналитика // *Аристотель*. Сочинения. Т.2. М., 1978. С.255–346.

ПИСЬМО Л.С.ПОНТРЯГИНА Е.Ф.ПУРИЦ

Предисловие и публикация В.М.Тихомирова

Лев Семенович Понтрягин (1908–1988) – один из крупнейших математиков XX в., основные научные достижения которого относятся к топологии, теории дифференциальных уравнений и теории оптимального управления.

Елена Феликсовна Пуриц (1910–1997) родилась в семье присяжного поверенного в Санкт-Петербурге. Окончила немецкую школу (Анненшуле), Ленинградский педагогический институт им. А.И.Герцена. После аспирантуры преподавала в этом институте, занималась немецкой литературой, переводила Г.Гейне. Много лет заведовала кафедрой иностранных языков в Финансово-экономическом институте. У нее было много друзей как среди гуманитариев, так и среди представителей естественных наук. В 1930-е гг. познакомилась с Л.С.Понтрягиным, дружила и переписывалась с ним в 1930–1960 гг. Уже в преклонном возрасте стала писать воспоминания (фрагменты опубликованы в: [1; 2, с.171–183]).

Публикуемое письмо Л.С.Понтрягина Е.Ф.Пуриц датировано 14 апреля 1953 г. В нем три части, каждая из них выразительно характеризует и то время, и самого автора письма в важный период его жизни.

Во втором абзаце сказано, что «математики теперь дефицитный товар, и спрос на них всюду большой», и потому аспирантура лучше, чем работа, дающая немедленные материальные блага. В те времена после аспирантуры можно было рассчитывать на более счастливую судьбу, нежели работа в «ящике». В нынешние времена дела обстоят, увы, не так.

В первом и третьем абзацах человек, живший в те времена, улавливает некие потаенные мысли и суждения (говорить напрямую в те времена опасались). Письмо писалось в один из поворотных моментов в истории нашей страны. 5 марта 1953 г. умер Сталин, один из самых могущественных властителей в истории человечества. Будущее скрывал туман неопределенности. Но письмо Понтрягина свидетельствует о том, что сквозь этот туман автору просвечивал луч надежды на лучшее будущее. Так можно толковать слова «скорее, нужно думать хорошо, чем плохо».

И действительно, в эти самые дни в нашей стране происходили, выражаясь словами поэта, «неслыханные перемены». За два без малого месяца до смерти Сталина, 13 января 1953 г. несколько врачей (многие из них были евреями) подверглись аресту, им было предъявлено чудовищное обвинение в шпионаже и в заговоре с целью убить советское руководство. Среди арестованных были медицинские светила первой величины: В.Х.Василенко, В.Н.Виноградов, М.С.Вовси, А.М.Гринштейн, Б.Б.Коган, Б.С.Преображенский, А.И.Фельдман, Я.Г.Этингер. Начавшаяся в конце 1940-х гг. антисемитская кампания набирала обороты (Е.Ф.Пуриц как еврейку выгнали с работы), и многие ожидали в недалеком будущем чего-то страшного – погромов, репрессий, выселения в отдаленные районы…

Но уже совсем скоро после смерти Сталина обнаружилось, что ничего ужасного не происходит. Оплакивания и рыдания по случаю смерти Сталина длились недолго, и жизнь постепенно начала входить в нормальную колею. Появилась надежда на лучшее – что «скорее, нужно думать хорошо, чем плохо». 4 апреля произошло событие воистину невероятное: появилось сообщение о том, что арестованные врачи, большинство из которых признались в своих злодеяниях, на самом деле оказались невиновными и им возвращается их доброе имя. И всего через 10 дней после этого события в почтовый ящик бросается теплое дружеское письмо женщине, которая вместе с мужем Гершем Исааковичем Егудиным только-только начала приходить в себя после тягостных переживаний.

И Лев Семенович включает в свое письмо выдержанный в юмористическом стиле рассказ о своем излечении от мучивших его болезней, произошедшем прошлым летом. Это случилось благодаря усилиям Мирона Семеновича Вовси, только что освобожденного «отравителя», который летом прошлого года «принял решительные меры». В течение зимы, пишет Понтрягин, «я долго сомневался, не отравлен ли я, но теперь успокоился».

Последний абзац посвящен личной творческой проблеме. Великий тополог решил сменить свою профессию и «по указанию начальства <…> освоить новую область математики, имеющую прикладное значение». Ученики Льва Семеновича называли еще одну причину для такого решительного шага. Дело в том, что во время Второй мировой войны и в первые послевоенные годы, когда из-за опущенного «железного занавеса» научные контакты были ослаблены, во французскую математику пришло новое поколение. В начале 1950-х гг. выяснилось, что выдающиеся французские математики, такие как Ж.Лере и Ж.-П.Серр, добились больших успехов в топологии, в частности, в решении тех задач, над которыми думал Л.С.Понтрягин. А быть на вторых ролях он не привык. И Лев Семенович стал заниматься теорией дифференциальных уравнений с «приложениями к теории колебаний и теории регулирования». В этих областях он добился выдающихся успехов. Данное письмо – свидетельство перемены творческой судьбы Л.С.Понтрягина.

Сведения о Е.Ф.Пуриц были получены мною от Никиты Дмитриевны Введенской («Никишки»). Она окончила мехмат МГУ и пошла, как и советовал Л.С.Понтрягин, в аспирантуру Математического института им. В.А.Стеклова (ее научным руководителем была О.А.Олейник). Работала в Институте прикладной математики им. М.В.Келдыша АН СССР. Сейчас работает в Институте проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН. Доктор физико-математических наук. С Л.С.Понтрягиным ее познакомила Е.Ф.Пуриц в 1947 г. Она общалась с Понтрягиным в 1950–1960-е гг.

Н.Д.Введенская познакомилась с Е.Ф.Пуриц в 1942 г. в Ташкенте, когда Елена Феликсовна с мужем, математиком Гершем Исааковичем Егудиным, поселились «по уплотнению» в квартире ее отца – профессора Ташкентского медицинского института Дмитрия Алексеевича Введенского (семьи сдружились на всю жизнь).

Об источнике. Письмо представляет собою машинописный текст с мелкой рукописной правкой (в настоящей публикации не отражена). В данный момент оригинал письма Л.С.Понтрягина Е.Ф.Пуриц хранится в личном архиве Н.Д.Введенской. Письмо было передано автору Ольгой Гершевной Егудиной, дочерью Е.Ф.Пуриц.

Л.С.Понтрягин–Е.Ф.Пуриц
от 13 апреля 1953 г.

Дорогая Рыба-Килька, поздравляю Вас с днем рождения. Никишка говорила мне, что если я напишу Вам, то могу надеяться на ответ. Вдохновленный этим, я решил написать Вам. Опять же, Никишка говорит, что, быть может, Вы соберетесь в Москву; для всех наших друзей это было бы большой радостью. Приезжайте, Лиля, быть может, и для Вас это будет приятно, если не полезно. Относительно возможной пользы пока прогнозов делать невозможно, но, скорее, нужно думать хорошо, чем плохо.

Я теперь уговариваю Никишку поступить в аспирантуру, на что имеются весьма реальные возможности. Математики теперь дефицитный товар, и спрос на них всюду большой. Ввиду этого есть возможность поступать в аспирантуру, но Никишка сомневается, так как считает, что ей уже теперь следует зарабатывать деньги ввиду плохого здоровья ее отца. Объясните этой глупой девчонке, что ради будущего можно немного потерпеть. Кажется, в давние времена я объяснял это Вам. Воспользуйтесь своим авторитетом и скажите Никишке, что аспирантура лучше, чем секретная работа, даже с готовой комнатой.

Мы с Вами очень давно не разговаривали, и даже неизвестно, что сообщать. Отмечу важное событие. Прошедшим летом я, будучи на кавказском побережье, заболел плевропневмонией и, находясь в глухой грузинской деревне, где не было врача, решил спешно уехать в Кисловодск в санаторий АН СССР. Там меня хотели заморить врачи-гады, собрались лечить аспирином, но благодаря вмешательству начальства, приглашен был Вовси, который сразу же принял решительные меры, так что через две недели я уже встал с постели. В течение зимы я долго сомневался, не отравлен ли я, но теперь успокоился. Вовси попутно вылечил меня от субфебрильной температуры, но не вылечил от бессонницы, которая прогрессирует, так что я, в общем, довольно дохлый.

Ввиду того, что теперь всюду предъявляют большие требования в смысле выполнения служебных обязанностей и ввиду дохлости я взял отпуск в университете и тружусь только в Академии наук. По указанию начальства стараюсь освоить новую область математики, имеющую прикладное значение. Это обыкновенные дифференциальные уравнения и их приложения к теории колебаний и теории регулирования. Обыкновенные дифференциальные уравнения – это у нас в стране беспризорная область науки. Полагаю, что, будучи женой математика, Вы владеете терминологией, и потому позволяю себе высказываться по столь специальному вопросу.

Здоровье мамы для ее возраста удовлетворительно.

Шлю Вам сердечный привет. Пишите, миля Лиля, и еще лучше приезжайте в гости.

Лева

Список литературы

1. *Пуриц Е.Ф.* Воспоминания // Знамя. 1996. №5. С.159–177.
2. Советская жизнь Льва Ландау глазами очевидцев / Сост. *Г.Е.Горелик*, *Н.А.Шальникова*. М., 2009.

Abstracts

Tokareva T.A. **The Moscow Mathematical Society after the reorganization and during the Great Patriotic War.**

This work is released in the year of the 150^{th} anniversary of the Moscow Mathematical Society (MMS). It examines the activities of the Society after the reorganization in 1931, the results of which were presented at the Second All-Union Mathematician Congress (1934). In addition, the article provides information on the work of the MMS during the Great Patriotic War. The paper is based on the analysis of the Society's documents and published mathematical issues.

Tikhomirov V.M. **Leonid Vital'evich Kantorovich (on account of the 100^{th} anniversary).**

The article is dedicated to life and research of a great scientist and a remarkable individual Nobel prize laureate Leonid Vital'evich Kantorovich (1912–1986).

Andrianov A.L. **The Linear Programming Development in L.V.Kantorovich's Papers in $1930–1950^{\text{th}}$.**

The present paper is devoted to Kantorovich's works that followed his first economical article published in 1939. The special attention is given to the difficulties which have been encountered by his ideas on their road to success. The short overview of the definite place of his works and ideas and their connections with modern science, economical mathematics, optimization, functional analysis and discrete mathematics is also given.

Videnskii V.S. **The centenary of the discovery of Bernstein polynomials.**

In 1912 S.Bernstein found a very elegant explicit representation for approximation polynomials B_nf. In our paper we discuss the history of this discovery.

Shikin E.V. **The Little History of the Big Theorem. In memory of N.V.Efimoff.**

The important part of the scientific creation of N.V.Efimoff dedicates to investigations of the surfaces with negative Gaussian curvature K in three-dimensional Euclidean space E^3.

Moshchevitin N.G. **Khinchine's theorem on Tchebyshev's systems.**

We discuss Khintchine's theorem on regular matrices (1948) and its exposition in Cassels' book (1957). It turned out that these formulations are slightly different. We also compare these results with Jarnik's theorems (1941) and give a new statement.

Shchetnikov A.I. **How were found some solutions of the problem of duplication of cube?**

The author gives a new reconstruction of the ways on which the solutions of the problem of duplication of cube were found by Greek mathematicians and F.Viet. Rather than following the details of Eutocius' report, which provides demonstrations without explanation of how they were found, he makes his reconstructions using geometrical interpretations of the problem previously reformulated in terms of a continuous proportion.

Rozhanskaya M.M. **On some problems of the development of medieval algebra.**

The paper is dedicated to the problem of the origin of al-Khwarizmi's algebraic treatise. We proposed the hypothesis that it goes back to a special tradition that was developed in the Near East and the Middle East, in the region of the former Hellenistic world, and included the ingrained elements of ancient Babylonian and Greek scientific traditions.

Lyuter I.O. **The first results of the study of al-Abhari's treatise «Emendation of Euclid's "Elements"».**

The investigation of al-Abhari's «Emendation of Euclid's «Elements»» was carried out according to its Chester Beatty Library manuscript copy (CBL Ar 3424) studied in the beginning of the article. The main part of the work is a critical survey of the peculiarities of the definitions of the straight line, plane surface and parallels typical for medieval Arabic commentaries and editions of Euclid's «Elements». This research was conditioned by al-Abhari's enunciations of these definitions different from the ones given in the works of his Arabic predecessors and contemporaries and, as has been shown, had been borrowed from Ibn al-Haytham's commentary on the «Elements». The article contains also a commented Russian translation of al-Abhari's proof of the Vth postulate known before only through the commentary of al-Rumi on the treatise «Propositions of substantiation» by al-Samarqandi.

Simonov R.A. **The origins of numerical knowledge of Russia (7th–8th centuries).**

This article analyses the content of a counting tag (10th century) and of a writing on the birch bark №715 (13th century) found in Novgorod. The counting tag and the writing on the birch bark belong to the magic type of talisman and incantation, which indicates their archaic character. Both artifacts display numerical knowledge which goes back to some prototypes of the 7th–8th centuries from the region of the Northern Black Sea and the Sea of Azov (located to the south-east of what will become the Kievan Rus in the 9th century). Both sources are of a considerable value because their content suggests that the inhabitants of this region were in the 7th–8th centuries familiar with the Greco-Byzantine numbering system consisting of 27 letters. Authentic «bookkeeping» writings using this numbering system from the region have been preserved from the 9th–10th centuries.

Kuzmin A.V. **John Nepier: Logarithms of Trigonometrical Functions as a Model of Earth's Motion in Space.**

The paper presents an assumption that logarithmic method was invented as a result of consistent efforts to create a universal mathematical algorithm to describe the space-time dynamics of Earth's motion in cosmic space.

Demidov S.S. **The Risorgimento and the formation of Italian and international mathematical community.**

Events of Italian Risorgimento had a powerful impact on the social and cultural life of Europe and America. Galvanized the Italian society these events have influenced the development of science (particularly mathematics) not only in Italy but also far beyond its borders. This article discusses two examples of such influence – activities of *Circolo matematico di Palermo* in the first decades of its existence, as well as the activity of G.Peano for the dissemination of his ideas in the foundations of mathematics.Attempt to look at these processes with a very special way – participation in these processes of Russian mathematicians.

Kharlamova V.I., Kharlamov A.A., Malonek H.R. **Mathematical journals and their internationalization: the first Portuguese journal «Jornal das sciencias mathematicas e astronómicas».**

This work focuses on the conditions that inspired the formation of European scientific journals, the creation of general scientific journals including contributions on mathematics, firstly appearances of specialized mathematical journals and, secondly, journals aimed at specific directions of mathematics. An analysis was made on the historical evolution of mathematics in Portugal, its formation of the scientific communities and journals development between the second half of XVIIIth century to the beginning of XXth century. Using as an example the first Portuguese mathematical journal «Jornal de ciências matemáticas e astronómicas», founded by F.G.Teixeira in 1877, the evolution process from the scientific-informative journal to an international specialized scientific journal publishing original mathematical articles is analyzed. The contribution of this journal to the development of mathematical community in Portugal has been discussed. Internationalization of the relations with the leading European countries was the result of this activity. It is possible to conclude that the journal's objective of overcoming the scientific isolation of the country was very successful.

Antonyuk P.N. **The fractals history pages.**

The paper is devoted to the so called fractals or fractal sets. The term *fractal* was invented by B.B.Mandelbrot in 1975 year, but the history of such sets investigations is following almost some centuries. It is important that different objects in mathematics and physics have fractal structure.

Savvina O.A. **European scientific world through the eyes of the master of pure mathematics N.V.Bugaev.**

From the beginning of XIXth century the practice of scientific probation courses for future professors arose in the universities of Russia. One of the most successful and instructive probation courses was the mathematician N.V.Bugaev's trip to Europe, the result of which was preparation and defence of the thesis for degree of doctor. The article reconstructs the facts connected with this trip, reveals the names of German and French lecturers (Bertrand, Weierstrass, Kronecker, Kummer, Liouville and others), who made influence on the formation of scientific interests of the Russian scientist. The characteristics of mathematical courses delivered in the European institutions of higher education at that time is given through N.V.Bugaev's vision.

Monastyrsky M.I. **History of mathematics from a working mathematician's view.**

The role of the history of mathematics in the modern research is discussed. I analyze several examples selected from different fields of mathematics.

Brusentsov N.P. **Aristotelian necessary implication.**

The author argues against the use of material implication of modern two-valued logic and proposes to substitute for it necessary implication which goes back to Aristotle. He shows how necessary implication, which is three-valued, can be interpreted by means of a Carroll diagram.

Brusentsov N.P. **A three-valued generalization of the algebra of logic. The overcoming of the deficiencies of disjunctive normal form by means of a three-valued generalization of logic.**

The author shows the impossibility of using disjunctive normal form (DNF) of two-valued logic for expressing necessary implication and proposes to replace it with three-valued DNF of a generalized Boolean algebra.

Tutubalin V.N., Barabasheva Yu.M., Devyatkova G.N., Uger E.G. **Theological Approach Towards History of Science: Medical Data Analysis Case Study.**

The history and methodology of contemporary applied mathematics, namely the history and methodology, concerning development of statistical methods applications, is the subject of presented paper. Authors propose the principles, that allow for historian of mathematics to understand clearly, how it is better to research the present, recently founded achievements in case, if the achievements is not completely recognized yet, and what is possible to explore instead of so-called «results» of recently produced applied statistical research. The core of problem is: how to interpret the principles of mathematical models and data fitting, when data satisfy the model by miracle, without logical explanation. The proposed methodology leads toward the new interpretation of key notions of applied mathematics, as randomness, probability, randomization, and finally sets the vision of contemporary applied science that is goes out of the limits of rationalism (including positivism and post-positivism). The proposed vision in the article is called as «theological direction in the philosophy of science».

This approach is carried out on a specific example from the field of application of statistics in medicine in the study of simple risk score of contrast-induced nephropathy (CIN) after percutaneous coronary intervention (PCI). First on the scientific and popular level, this describes a medical problem, and then discusses approaches to address it.

Source materials for discussion are from the articles in American medical journals about this particular problem (there is a distinct impression that the American Mathematical Statistics, used in medicine, lost the understanding since 1960th). A hard question arises: Is suitable for anything the results of these studies? On the one hand, there are incompetent errors, but on the other – a large number of observations. Nevertheless attempt to use the results of these studies to test data obtained at the Institute of Transplantation is not unsuccessful.

***Mahavira.* Epitome of the essence of calculation: chapters 0 & 1 (Introduction, Russian translation from Sanskrit with comments by *G.G.Khmourkin*).**

It is a commented translation of two initial chapters (fragments) of Mahavira's treatise «Epitome of the essence of calculation», the earliest purely mathematical work in the history of Indian science.

***François Viète.* Introduction to the Analytical Art (In artem analyticen Isagoge) (Russian translation from Latin with comments by *E.A.Zaytsev*).**

This is the first translation into Russian with comments of a classical work of Western mathematics – a treatise by F.Viète dedicated to the exposition of the so called «logistics of species». First published in Latin in 1591, translated into French in 1630, and republished in Latin in 1646 within the largest posthumous collection of Viète's mathematical writings, this short book was a source of inspiration for the next generation of European mathematicians, active during the first half of the 17th century, who have finally created a novel highly efficient means of mathematical study – symbolic algebra. Having contributed to the overcoming of the shortages of Greek geometrical approach, Viète's ideas have considerably assisted in opening the way to the subsequent application of symbolic reasoning in various domains of mathematics, in particular, analysis. The translation is made using the posthumous edition: *Francisci Vietæ.* Opera mathematica, in unum volumen congesta ac recognita, opera atque studio *Francisci a Schooten*, Officine de Bonaventure et Abraham Elzevier. Leyden, 1646. P.1–12. Besides the text by Viète himself, the translation includes the comments by the editor of this collection – Frans van Schooten.

L.S.Pontryagin's letter to H.F.Pourits (Publication of *V.M.Tikhomirov*).

It is the publication of L.S.Pontryagin's letter to H.F.Pourits dated April 14, 1953, which clearly characterizes the time and the author himself in an important period of his life.

Именной указатель[1]

[1] Составители Т.А.Токарева и Г.Г.Хмуркин

Научное издание

Коллектив авторов

Историко-математические исследования. Вторая серия. Выпуск 15(50)

Сдано в набор 01.07.2014. Подписано в печать 30.07.2014.
Формат 60x88/16. Бумага офсетная №1. Печать офсетная.
Уч.-изд л. 24,25. Физ.п.л. 22,5. Тираж 300. Заказ № 1753

ООО «Издательство «Янус-К».
127411, Москва, ул. Учинская, д.1

Отпечатано в ФГУП «ПИК ВИНИТИ»,
140010, Люберцы, Октябрьский пр., д.403

ISBN 5-8037-0620-5