

**ФИЛОСОФЫ
РОССИИ
XX ВЕКА**

Д.Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ

**ФИЛОСОФИЯ
ПСИХОЛОГИЯ
МАТЕМАТИКА**



**МОСКВА
СЕРЕБРЯНЫЕ НИТИ
1998**

ББК 87.22

М.77

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского гуманитарного научного фонда
(РГНФ)

проект 96-03-16161

**Редакционная коллегия серии
“Философы России XX века”**

Степин В.С., *председатель*; **Блохер Ф.П.,** *ученый секретарь*;
Гусейнов А.А.; Зотов А.Ф.; Лекторский В.А.; Микешин Л.А.;
Огурцов А.П.

Составление, предисловие, библиография
А.В.Родин

Д.Д.Мордухай–Болтовской.

М77 Философия. Психология. Математика. М.: Серебряные нити,
1998. – 560 с.

Настоящая книга – сборник избранных работ выдающегося русского математика и философа Дмитрия Дмитриевича Мордухай–Болтовского (1876–1952). Учитывая широту диапазона его интересов – трудно найти историко–философско–математическую проблему, которую в той или иной форме он не затронул в своих многочисленных работах – перед составителями стояла проблема отбора тех его статей, которые наиболее адекватно отражают основные черты его творчества. В сборник включены работы, отражающие подход ученого к триаде: “Философия – Психология – Математика”. Материалы книги впервые публикуются для широкого ознакомления.

Книга рассчитана как на специалистов – философов, математиков, психологов, преподавателей школ и вузов. – так и на широкого читателя, интересующегося наукой и проблемами ее развития.

ISBN 5-89163-009-5



9 785891 630093 >

ББК 87.22

© Издательство “Серебряные нити”, 1998
© А.В. Родин, составление, 1998



ФИЛОСОФСКАЯ МАТЕМАТИКА ДМИТРИЯ ДМИТРИЕВИЧА МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОГО

Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской (1876–1952), как и многие ученые его времени не был узким специалистом. Его интересы не только охватывали ту науку, которой он жил и мыслил – а именно, математику – в ее целом, но и простирались за пределы обычно понятой математики и даже вовсе за пределы обычно понятой науки – “в сферу гипернауки, мистического опыта, предполагающего предпосылки, восполняющие положительную науку и даже противоречащие некоторым [ее] законам” (Проблема смерти). Было бы неправильно относить подобную широту интересов Дмитрия Дмитриевича на счет меньшего развития науки по сравнению с ее современным состоянием; и в начале нашего столетия в математике было много частных проблем, решением которых можно было заниматься всю жизнь. Но одно только решение частных задач не могло удовлетворить Дмитрия Дмитриевича хотя бы потому, что он мыслил свои занятия наукой не как частное, но как целое дело своей жизни. И поэтому мир науки Мордухай-Болтовского – это не часть целого мира, а сам мир целиком.

Все, с чем Дмитрий Дмитриевич сталкивается в жизни и в культуре – все, с чем он сталкивается в своей культурной жизни – втягивается в сферу его науки. И если искать для этой универсальной науки имя, ее прежде всего нужно назвать просто математикой. Математикой, взятой *universaliter* как *mathesis universalis*. По отношению к природе Мордухай-Болтовской не становится физиком, химиком или биологом – он остается математиком, когда пишет о космологии или о радиоляриях. Мы привыкли отождествлять научный взгляд на мир (мир науки) с физическим миром (миром физики), включающим в себя математику на правах своего инструмента – абстрактного языка описания. Очевидно, для Дмитрия Дмитриевича не геометрические формы являются инструментом описания радиолярии, а радиолярия является инструментом демонстрации геометрических форм. В этом смысле математический мир (и взгляд на него) следует отличать от физического. И его нужно считать научным наравне с физическим, если мы считаем математику наукой наравне с физикой. В данном случае речь идет не просто о том, чтобы использовать объекты других наук для иллюстрации тех или иных математических результатов, но, собственно, о том, чтобы сделать другие науки частями математики – таким же образом, как, например, сама математика является частью современной математической физики: если мы говорим, что математика является для современной физики инструментом, то это, конечно, не значит, что современная физика может существовать и без математики. Так, выясняя отношения математики с психологией, Мордухай-Болтовской только в качестве подготовитель-

ного этапа рассматривает возможность применения психологии в математике (в частности, для анализа убедительности доказательства) и математики в психологии (например, для описания процесса восприятия). Целью же оказывается построение “математической психологии” (см. *“Четыре лекции по философии математики”, лекция III*), которую вернее было бы назвать психологической математикой – математической дисциплины, предпосылки которой имели бы психологический смысл. То, что имеет в виду Мордухай–Болтовской, в данном случае оказывается легче понять, поскольку, по его словам, один раздел такой математической психологии уже разработан – это теория вероятности, аксиомы которой, по его мнению, имеют именно психологический смысл. По-видимому, в этом же духе нужно понимать у Дмитрия Дмитриевича и проект математической биологии: не математизация биологии вслед за математизацией физики, а превращение биологии в математическую дисциплину, имеющую свою особую аксиоматику.

Вопрос об отношении Мордухай–Болтовского к философии является для нас предметом особого интереса. Это отношение строится по той же предельной схеме: философия должна стать частью математики. Впрочем идея математической философии в начале века, похоже, витала в воздухе: этот термин использовал Рассел, к математической философии можно отнести всю полемику вокруг канторовской теории множеств. Мордухай–Болтовской опирался и на отечественную традицию математической философии, связанную с деятельностью Московского философско-математического общества (см. *“О законе непрерывности”*). Однако ни Рассел, ни московские математики–философы (например, Флоренский), похоже, не подходят к вопросу столь радикально, как он, отказывая философии в какой бы то ни было самостоятельности за пределами математики. Нематематическая философия, согласно Мордухай–Болтовскому во–первых, менее строга, чем математика: там, где математик доказывает, философ довольствуется убеждением. Это можно назвать классически аргументом против нематематической философии: вслед за Спинозой Дмитрий Дмитриевич считает необходимым придать философии математическую строгость. Отсюда – его несогласие с Кантом и Гегелем. Но более важным оказывается другой, неклассический аргумент: “в мышлении философа работа мысли идет только в сфере сознания, мало распространяясь в подсознательные области. Мышление математика, наоборот, глубоко внедряется в бессознательную сферу, то всплывая на ее поверхность [т.е. выходя в сознание – А.Р.], то погружаясь в глубину”. (“Психология математического мышления”). То есть и философ, и математик работают и в области сознания, и в области бессознательного, но только философ делает и то, и другое с меньшим размахом, чем математик: в области сознания философ не доходит до высот математической строгости, а в области бессознательного – до глубин математической интуиции. Из этого следует, что предметы, которыми занимается философия, могут и должны исследоваться математически: та-

кой род исследования и можно было бы назвать математической философией. Тем более Мордухай–Болтовской не допускает никакой независимой от математики логики: логика для него есть логика математическая. Для этого вывода могут быть, по-видимому, использованы те же аргументы.

Укорененность математики в бессознательном, которую постулирует Дмитрий Дмитриевич, позволяет отождествить математику с “гипернаукой”, которую он противопоставляет “положительной” науке (“Проблема смерти”). Сама приставка “гипер–” здесь, безусловно, математического происхождения – от “гиперплоскости” многомерного пространства. “Гипернаука” отличается от обычной науки расширением сферы сознательного опыта за счет сфер бессознательного опыта, в частности, мистического и гипнотического опыта. При этом соотношение сфер сознания и бессознательного Дмитрий Дмитриевич мыслит аналогично соотношению трехмерного и бесконечного числа n -мерных пространств: сознание – поверхность океана бессознательного, сознательный опыт – поверхность океана бессознательного гиперопыта, существующая эмпирическая наука – верхний слой гипернауки прошлого и будущего. Математика, укорененная в бессознательном оказывается или частью гипернауки, или гипернаукой в целом – после того, как она освоила процедуру собственного гиперрасширения. Это значит, что Мордухай–Болтовской понимает математику как гиперэмпирическую науку, включающую эмпирические науки как свой конечномерный частный случай.

Отдельно нужно сказать об отношении Дмитрия Дмитриевича к истории. Математический мир для него, это не мир современности, а мир культурной традиции. Перечитывание, пересказ, перевод (упомянем хотя бы перевод евклидовых “Начал”, который надолго останется классическим) неразрывно связаны в мышлении Дмитрия Дмитриевича с самым решительным ниспровержением основ и авангардным конструированием. Для него не существует ничего когда-то пройденного, к чему не стоило бы возвращаться – ни в истории, ни в своей собственной биографии. Уже будучи профессором и проводя невероятное число математических курсов одновременно в нескольких высших учебных заведениях, Мордухай–Болтовской находил еще время для работы со школьниками и, по-видимому, делал это с не меньшим интересом. Этот интерес к элементарной математике он сохраняет всю жизнь. Он не боится в своих работах повторять достаточно известный математически материал, просто пересказывать прочитанное. Похоже, что новоевропейский канон оригинального научного исследования не имеет для него безусловного значения, что позволяет ему избежать историцистских предрассудков: история у Дмитрия Дмитриевича это сложный многомерный генезис, а не линейная последовательность этапов развития. Сам он противопоставляет свой подход к истории математики как эмбриологический анатомическому и физиологическому подходам (“Исследования о происхождении некоторых основных идей современ-

ной математики.” Введение). Под анатомией истории он понимает кумулятивную хронологию открытий, под физиологией – изучение культурного контекста математики прошлого. Самого же Мордухай–Болтовского интересует внутреннее развитие математики, генезис самой математической мысли, сама математическая мысль как генезис. Конечно, в его эмбриологическом подходе существует прогрессистская предпосылка: развитие идет от простого к сложному, от зародыша к взрослому организму. Однако на деле картина получается более сложной, и во многих случаях Дмитрий Дмитриевич сам критикует прогрессистские представления о том, что исторически более поздние теории обесценивают более ранние. Как говорит Мордухай–Болтовской, эволюционирует не решение проблемы – от несовершенного решения к совершенному – эволюционирует сама проблема (“Аксиоматика XVII века”). Поэтому, как представляется, историю у Дмитрия Дмитриевича следовало бы считать не столько эмбриологией, сколько генеалогией мысли: исторический вопрос у него это именно вопрос о “происхождении”, а не вопрос о пути развития (см. также *“Биографический очерк”*).

Для изучения эволюции проблем Мордухай–Болтовской берет математические учебники, где самые элементарные и фундаментальные понятия только вводятся, а не предполагаются известными. И здесь, в области рождающихся, а не устоявшихся понятий математика смыкается с философией, понимаемой как пред-математика или как введение в математику. Для Дмитрия Дмитриевича философия в его исторических штудиях – это не просто некоторое культурное явление, существующее наряду с математикой и оказывающее на нее свое влияние – таков подход “исторической физиологии” – а это сама математика в свои началах. Отсюда же – его интерес к методике математики, преподаванию математики в школе. Методика для него – это школьная философия, школьная работа с элементарными понятиями.

Таким образом, отмеченный нами “математический радикализм” Дмитрия Дмитриевича, его понимание математики как универсальной науки, превосходящей философию по своим возможностям, оказывается согласным с традиционным пониманием философии как начала науки – во всей двусмысленности этого “начала”. Однако принципиально важно, что для Мордухай–Болтовского философия оказывается началом именно математики. С этой точки зрения его штудии приобретают несколько иной смысл: это не только история математики, прочитанная в своих началах и основаниях, то есть прочитанная философски, но это и история философии, прочитанная математически. Все основные проблемы европейской метафизики трактуются им как математические проблемы – не сводя философию к математике как к чему-то данному, не применяя математический аппарат для решения философских проблем, а открывая философское измерение в самой математике.

Философия у Дмитрия Дмитриевича это философская математика, а не математическая философия. И равным образом история математики — это историческое измерение математики, историческая математика, а не специальный раздел знания о прошлом. Математика сама оказывается у Мордухай–Болтовского историей и философией. Это и обуславливает тождество традиционализма и радикализма мышления Дмитрия Дмитриевича: он не изобретает какую-то новую неклассическую математику рядом с классической и не только расширяет классическую математику до неклассической, а исторически воспроизводит математику в ее первозданности там, где она не отличает себя ни от физики, ни от биологии, ни от философии, ни от логики, ни от самой истории.

Таковы, как представляется, те основные идеи, которые связывают в одно целое на первый взгляд очень разнородные тексты Мордухай–Болтовского, в том числе представленные в этой книге.

Мордухай–Болтовской, принадлежит к тому типу ученых XX века, для которых наука была чем-то большим, чем наука в том смысле, как мы привыкли говорить о науке сегодня. К такому типу ученых принадлежат Эйнштейн и Гейзенберг, Вейль и Пуанкаре (с Пуанкаре, насколько можно судить по публикациям, Дмитрий Дмитриевич находился в продолжительном внутреннем диалоге). Мы называем эти громкие имена не для того, чтобы уныло сетовать на новейшую отечественную историю, лишившую российских ученых той академической свободы, которой обладали их коллеги на Западе и которой обладали они сами до утверждения в России советской власти. И не для того, чтобы гадать, что значило бы сегодня имя Мордухай–Болтовского для мирового культурного сообщества, получи он в свое время возможность свободно передвигаться по миру или пользоваться Интернетом. (Те возможности общения, которые у Дмитрия Дмитриевича были, он использовал сполна. В частности, он долгое время поддерживал переписку с отечественными учеными того же самого “универсалистского” типа — астрономом Воронцовым–Вельяминовым и биологом Любичевым).

Мы соотносим Дмитрия Дмитриевича со знаменитыми учеными XX столетия с другой, чисто прагматической целью: чтобы сегодня правильно подойти к его наследию. Никто из перечисленных выше ученых не был школьным философом, каждый из них начинал работать в научной, а не в философской традиции (а к началу XX века это были разные, достаточно далекие друг от друга традиции), однако то, что они делали в науке, имеет и сегодня философское звучание. Очевидно, то, что придает работам Мордухай–Болтовского и его знаменитых западных коллег философское звучание, это сама тотальность их научных проектов, не допускающая существования рядом с собой никакой независимой научной дисциплины или философской системы. Математик остается математиком–ученым, когда имеет перед собой ограниченную предметную область, соседствующую с предметными областями других научных дисциплин. Но когда математик

старается сделать математическое мышление всеобщим, когда он последовательно преодолевает все дисциплинарные границы, он неизбежно философствует. Тогда даже специальные научные задачи он решает *more philosophico*. Такого рода философствование мы и находим у Мордухай-Болтовского.

Вообще говоря, ни из чего не следует, что такая философизация науки является абсолютным благом, что наука должна ставить себе цель “дорости до философии”. Для науки, которая хочет сохранить свою самостоятельность перед лицом философии (и не стать при этом самой философией – возможно ли это?) это является скорее злом. И сегодня, кажется, пути науки и философии вновь разошлись. Но это значит, что важная часть наследия ученых-философов XX века не была востребована научной традицией. И, следовательно, тем более это наследие должно быть востребовано философией.

Этой цели служит и настоящее издание, в котором мы собрали некоторые работы Дмитрия Дмитриевича, не относящиеся к числу специальных математических. Это именно те работы, по которым мы можем судить о его “философской математике”. Конечно, таким образом картина творчества Дмитрия Дмитриевича оказывается не просто неполной, но лишенной центральной ее части – специальных математических работ. Однако мы и не претендуем на полноту – издание специальных математических работ Мордухай-Болтовского представляет собой совершенно иную по своему характеру задачу. В настоящий том вошло большинство изданных (и ставших библиографической редкостью) работ, представляющих несомненный философский интерес. Некоторые из них представляют собой только резюме больших работ, имеющих в рукописном наследии. Издание обширного рукописного наследия Дмитрия Дмитриевича остается делом будущего: в данный том мы смогли включить только одну рукопись 1921 г. “Проблема смерти”, любезно переданную Эмилией Дмитриевной Болтовской.

Заметим еще, что многие вошедшие в этот том работы были ранее изданы в неподготовленном виде; фактически они представляли собой тиражированные рукописи, набранные с огромным количеством ошибок и не вычитанные. Даже если бы мы стремились везде сохранить стилистические, грамматические, орфографические и пунктуационные особенности автора, кстати сказать, часто очень далеко выходящие за рамки современного русского языка, мы бы не смогли этого сделать, не будучи в состоянии отделить эти особенности от ошибок машинистки. Тем более – когда речь идет о математических выкладках, где малейшая неточность приводит к бессмыслице. Поэтому составителю и редактору этой книги пришлось на свой страх и риск и в меру собственного понимания править тексты Дмитрия Дмитриевича. Мы также постарались везде, где это возможно, указать позднейшие русские переводы используемых автором текстов, кроме того, мы привели переводы иностранных слов, выражений и предложений, ко-

торые отсутствуют у Дмитрия Дмитриевича. Небольшой комментарий, выполненный в виде редакторских примечаний, преследует одну цель – сделать текст понятным; так, в ряде случаев мы более подробно провели те математические рассуждения, которые у автора сделаны своего рода намеками, требующими хорошего предварительного знакомства с предметом. В некоторых исключительных случаях мы сочли необходимым в нескольких словах пояснить мысль Дмитрия Дмитриевича.

А. Родин

БИОГРАФИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

По семейному преданию, пересказанному нам внучкой Дмитрия Дмитриевича Людмилой Филаретовной Болтовской, род Мордухай–Болтовских восходит к ордынскому вельможе по имени Кутлуб–ага, потомки которого перешли на русскую службу. Упоминаются также польские и литовские корни этого рода. По преданию, Мордухай–Болтовские имели родовое поместье в районе реки Сурош на территории нынешней Белоруссии. В семьях рождались преимущественно мальчики.¹

Несмотря на преследования аристократии при советской власти, Дмитрий Дмитриевич никогда не скрывал своего происхождения и более того, кажется, не мыслил себя вне своего отношения к роду. Происхождение, как представляется, было для него категорией не социальной, не культурной и не этической (“аристократия духа”), но конкретно–исторической. Свое происхождение Мордухай–Болтовской мыслил как собственную историю – историю, которая, с одной стороны, не вмещается в узкие рамки личной биографии, но которая, с другой стороны, чужда абстракциям всякой общей истории – общемировой или общенациональной. Именно на такой конкретной историчности, как мы уже говорили, у Дмитрия Дмитриевича, стоит все теоретическое мышление.

Перейдем теперь к более близким родственникам Дмитрия Дмитриевича. Его отец, Дмитрий Петрович, был известным железнодорожным инженером. Мать, Мария Ивановна (урожденная Власова), согласно семейному преданию, обладала способностями, которые сегодня называют экстрасенсорными. По–видимому, следуя примеру отца в своей приверженности к строгости и точности, Дмитрий Дмитриевич унаследовал также от матери богатое воображение, питавшее его интерес к мистике, к всякого рода неординарным психическим явлениям, к “бессознательному”.

Доминирование мужского начала, характерное для всего рода Мордухай–Болтовских, сказалось и в семье Дмитрия Дмитриевича, родившегося 27 июля 1876 года. У него было пятеро братьев: Иван, Александр, Константин, Петр и Владимир. А у самого Дмитрия Дмитриевича, впоследствии было три сына: Дмитрий, Филарет и Степан. Одна деталь из детства Дмитрия Дмитриевича и его братьев неожиданно приобретает первостепенное значение в советское время: в семье Болтовских находился в услужении Михаил Иванович Калинин, будущий председатель сначала ЦИК, а затем Президиума ВС СССР. Вот что передает по этому поводу со слов Дмитрия Дмитриевича Эмилия Дмитриевна Болтовская – жена Филарета Дмитриевича, прожившая вместе со своим мужем большую часть жизни под одной крышей с тестем:

“Пришла мать Калинина – из деревни. И слезно просила: “Муж – пьяница. Возьмите хорошего мальчика в услужение!” Сама попросила. В его обязанности входило: играть с детьми, немножко следить за одеждой... Поскольку семья была интеллигентная, можно сказать передовая, их отношения с Калининым были не отношениями слуги и барина, а просто дружеские: Миша читал, они разговаривали, Миша многим интересовался... Однажды при советской власти в газете появилась статья: кто-то написал о том, что, мол, Болтовские помещики, эксплуататоры и так далее. И вот Калинин, когда об этом узнал, поместил в газете опровержение, рассказав о том, что его отношения с братьями Болтовскими были дружескими.

Отец Дмитрия Дмитриевича помог Калинину устроиться в Питере на завод. Уже в 50-е годы к нам заходил кто-то из родственников Калинина и говорил, что они в своей семье очень почитают Мордухай-Болтовских”.

Приведем далее выдержку из автобиографии Дмитрия Дмитриевича, написанной в 1931 году. В нашем распоряжении оказалась рукописная копия этого документа.

“Среднее образование получил в С.-Петербургской 1-й классической гимназии, в которую поступил в 1886 и окончил которую в 1894 г. В том же году я поступил в число студентов физ.мат. факультета С.-Петербургского университета и окончил его весной 1898 года. Сейчас же по окончании Университета я был оставлен по представлению проф. К. А. Поссе при Университете для подготовки к профессорскому званию [так тогда называлась аспирантура – А.Р.] по кафедре Чистой Математики.

В этом же 1898 году (с 1 ноября) я начал свою преподавательскую деятельность в Варшавском Политехническом Институте в качестве преподавателя вначале нештатного, а с 1 октября 1899 года – штатного с функциями ассистента (при покойном профессоре Вороном, а затем также при В.А. Анисимове). Одновременно я готовился к магистерским [кандидатским – А.Р.] экзаменам, каковые и сдал при Петербургском Университете в 1900–1901 годы.

В 1906 году я вместе с частью преподавательского персонала Варшавского Политехнического Института был откомандирован в г. Новочеркасск для организации открывающегося здесь Донского Политехнического Института. Здесь я работал в качестве профессора, читая лекции и ведя практические занятия по разным отделам Высшей Математики.

С 1 июля 1909 года я был назначен, согласно избранию факультета, экстраординарным профессором Варшавского Университета, а в 1914 год утвержден в должности ординарного профессора”.

Кроме упомянутого Дмитрием Дмитриевичем К.А. Поссе его учителями на физико-математическом факультете Петербургского университета были А.М. Коркин, А.А. Марков, Ю.В. Сухоцкий. В 1906 Дмитрий Дмитриевич защитил магистерскую (кандидатскую) диссертацию на тему “О приведении абелевых интегралов к низшим трансцендентным”. Отсутствие в автобиографии упоминания о защите диссертации не случайно: в 1931, которым датирована автобиография, старые ученые степени еще не восстанавливались. В 1935 г. ученая степень Дмитрия Дмитриевича была восстановлена — как степень доктора математики.

Упомянем также произведение Мордухай-Болтовского в 1910 г. в статские советники — вскоре после получения должности в Варшавском университете. Разумеется, что в советское время об этом лучше было не упоминать. Далее в рукописной автобиографии Дмитрия Дмитриевича следует зачеркнутый текст:

“Эту кафедру я, собственно говоря, занимаю и по сей день, считая, что Донской, затем Севорокавказский Университет и, наконец, [Ростовский — А.Р.] Пединститут являются наследниками друг друга и при соответствующих реформах состав преподавателей оставался в общем тот же”.

Очевидно, последнее замечание Дмитрий Дмитриевич посчитал не соответствующим официальному стилю и назначению документа, но оно вполне отражало реальное положение дел. Созданный в 1869г. Императорский Варшавский Университет был в связи с обстоятельствами военного времени в 1915 г. эвакуирован в Ростов-на-Дону — город, добившийся к тому времени экономического процветания, но не имевший ранее своего университета. В мае 1917, когда стало ясно, что возвращение в Варшаву в ближайшем будущем невозможно, постановлением Временного правительства университет был переименован в Донской Государственный университет. В 1925 г. университет уже Советским правительством был переименован в Северо-Кавказский Государственный университет. В конце 1930 г., университет был фактически распущен: каждому из существовавших в то время трех факультетов — педагогическому, медицинскому и экономическому — был придан статус самостоятельного института. Это было сделано Советской властью, как представляется, из политических соображений — чтобы разобщить старую профессуру и уничтожить университет как крупный центр академического вольнодумства. Однако на этом реорганизация не закончилась, и в сентябре 1931 г. университет был вновь образован с новым составом факультетов и, разумеется, преподавателей (но прежним названием). Во вновь организованном университете появился физико-математический факультет, на котором впоследствии и работал Дмитрий

Дмитриевич. В 1934 г. в связи с административным разделением Северо-Кавказского края и Ростовской области университет был переименован в Ростовский Государственный университет. Это название университет сохраняет по сегодняшний день. Автобиография Дмитрия Дмитриевича, цитированная выше, датирована июнем 1931 г. – в это время университет был распушен и еще не восстановлен, и именно поэтому Дмитрий Дмитриевич называет Педагогический институт (бывший педагогический факультет) прямым наследником университета. Кстати, весьма вероятно, что нужда в написании автобиографии возникла у него именно в связи реорганизацией. По-видимому, вопрос состоял в том, будет ли Дмитрий Дмитриевич работать в восстановленном университете или останется в Педагогическом институте. Заметим еще, что существующий поныне Ростовский Педагогический институт является потомком не только бывшего педагогического факультета Донского университета, но и Ростовского Учительского института, с которым образованный в 1930 г. Педагогический институт был слит в 1947 г.

В Варшаве Дмитрий Дмитриевич познакомился со своей будущей женой Людмилой Филаретовной, урожденной Ганжулевич, отец которой был в Варшаве городским судьей. Они поженились 9 апреля 1906 г. и после свадьбы совершили недолгое путешествие по Европе. Были ли переезд Дмитрия Дмитриевича в Варшаву и его знакомство с Людмилой Филаретовной случайными? По воспоминаниям Татьяны Филаретовны, другой внучки Мордухай-Болтовского, молодых людей познакомили родственники. Возможно, здесь сыграли свою роль какие-то родственные и дружеские связи семьи Мордухай-Болтовских. Так или иначе, близкие люди подчеркивают необыкновенную нежность, с которой супруги относились друг к другу всю жизнь. Таким образом, к 1910 году жизнь Дмитрия Дмитриевича полностью сложилась: он женился, получил профессорскую должность в университете и чин статского советника.

Дмитрий Дмитриевич продолжает:

“За все это время [имеется в виду с 1909 по 1930 гг.] я прочел следующие курсы:

1) Аналитическая геометрия [...], 2) Интегральное исчисление, 3) Кратные интегралы, 4) Интегральные уравнения в частных производных, 5) Вариационное исчисление, 6) (неразборчиво), 7) Синтетическая Геометрия, 8) Проективная Геометрия, 9) Определенные интегралы, 10) Эллиптические функции, 11) Теория функции комплексного переменного, 12) Теория функции вещественного переменного (теория множеств), 13) Теория алгебраических кривых, 14) Математическая Логика, 15) Элементарная Математика с точки зрения Высшей, 16) Векторный Анализ, 17) История Физико-Математических наук (т.е. Математики, Механики, Физики и Астрономии), 18) История Математики, 19) Методика Математики, 20) Исчис-

ление конечных разностей, 21) Теория вероятностей, 22) Теоретическая Астрономия и Небесная Механика, 23) Сферическая Тригонометрия.

Одновременно с работой в университете я читал лекции:

- 1) в Варшавском Политехническом Институте (1909–1915),
- 1) на Варшавских Женских Курсах с 1909 по 1915,
- 3) на Ростовских В.Ж. курсах с 1915 до момента их слияния в 1920 г. с Университетом[...],
- 5) в Ростовском Практическом Политехникуме (1920–1924),
- 6) В электромонтажном Институте[...] (1930),
- 7) В Ростовском механическом институте путей сообщения (1930–1931).

В них кроме курса Анализа б[есконечно] м[алых] и Аналитической Геометрии по программе для Высших Технических заведений читал еще курсы Проективной Геометрии, Теории вероятностей, 24) Высшей Алгебры, 25) Номографии, 26) Методики начальной Арифметики, 27) Методики Алгебры, 28) Методики Геометрии.

Кроме того, я преподавал в ряде техникумов и средних учебных заведений различных городов, как то: 1) в Политехникуме [...] Водных Путей Сообщения, (2) Ростовском Индустриальном техникуме, 3) в Донской Гимназии для взрослых, 4) в Вечерней Школе повышенного типа им. Октябрьской Революции, 5) в 32-й Советской Трудовой Школе, 6) в [неразборчиво] Екатерининской Ж[енской] г[имназии] (ныне школе им. Покровского), 7) в Донском Женском Институте, 8) на курсах для преподавателей Красной Армии и др.

Читал систематические лекции по математике и 29) Астрономии (1) на общеобразовательных курсах при Варшавском Университете (1901–1903); 2) Народном Университете (29) Космологические гипотезы и 30) популярные лекции по Астрофизике; (3) читал лекции по 31) Философии Математики для преподавателей средней школы при Варшавском Учебном Округе летом 1912 г.; (4) лекции по 32) Методике Математики и Физике[...] в Нахичевани.

Административная деятельность:

- 1) с 7/XI 1912 по 11/XII 1915 состоял секретарем Физ.–Мат. Факультета Университета
- 2) 2 года – деканом Физ.–Мат. Факультета Ростовских и Д[онских] Высших Женских курсов
- 3) 2 года – деканом Физ.–Мат. Отд. Донских Педагогических курсов



Дмитрий Дмитриевич с родителями и братьями (крайний слева) на последнем курсе университета (1897 г.)



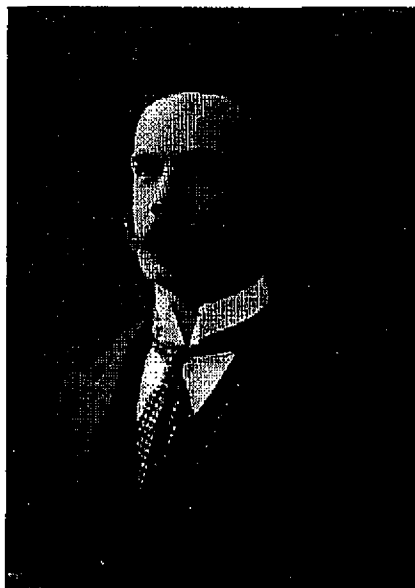
Братья Мордухай-Болтовские (слева направо): Иван, Дмитрий, Александр и Петр (1885 г.).



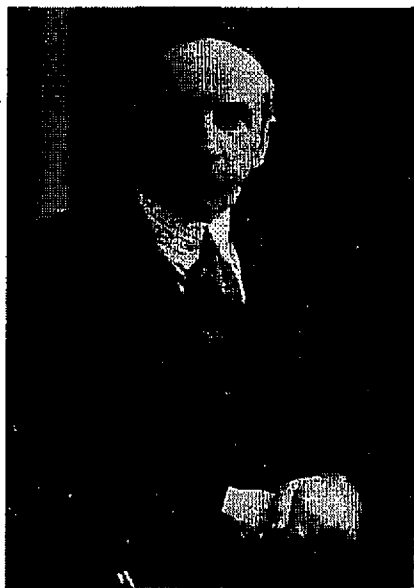
Мария Ивановна – мать Дмитрия Дмитриевича (1895 г.).



Дмитрий Дмитриевич с женой Людмилой Филаретовной и сыновьями
(слева направо) – Дмитрием, Филаретом и Степаном.



Дмитрий Дмитриевич в Варшаве
(1914 г.).



Дмитрий Дмитриевич в Ростове
(1929 г.).



Дмитрий Петрович – отец Дмитрия Дмитриевича (1908(9)г.).

4) 2 года – деканом Инженерно–Мелиоративного Факультета Ростовского Практического Политехникума

5) 1 год – директором Донской Гимназии для взрослых

6) полгода (1930) – ученым секретарем Электромонтажного Института

7) Председателем физико–математической испытательной комиссии в 1919 году при Донском Университете

8) Председателем родительского комитета 1–й Ростовской гимназии и др.

Организационная деятельность [помимо работы в уже упомянутых учебных заведениях – А.Р.]

[...]

9) Организация Математического кабинета в Варшаве с 1911 года

10) такого же, безусловно, наиболее богатого в СССР в Ростове начиная с 1919 г.

11) Семинарской библиотеки при физмате в Варшаве и в Ростове

12) Семинария в Варшаве и в Ростове

13) Математической Секции студенческого педагогического кружка при Варшавском, а затем Ростовском Университете

14) Ростовского, Новочеркасского и Варшавского методических математических кружков

15) Ростовского Педагогического Общества

16) в 1917 г. Математического Отделения Общества Естествоиспытателей при С[еверо–]К[авказском] Г[осударственном] У[ниверситете].

17) в 1920 г. Философского Общества в Ростове

18) в 1924 г. Методического Colloquium по Математике [...].

Таким образом, Дмитрий Дмитриевич дает нам образец публичного типа ученого, для которого живое академическое общение было во всяком случае не менее важно, чем кабинетная работа. Более того, Дмитрий Дмитриевич, очевидно, имел вкус к формальной стороне академической жизни, был увлечен институализацией академической среды. При этом условия, в которых ему приходилось работать, по большей части были весьма далекими от академического спокойствия. Вот что вспоминает ученик и коллега Мордухай–Болтовского М.Г. Хапланов о своем докладе на семинаре, которым руководил Дмитрий Дмитриевич осенью 1922 г.:

“В аудитории температура была ниже нуля, в разбитое окно задувал холодный ветер и пришлось перейти в другую аудиторию, где хотя бы стекла были целы. Дмитрий Дмитриевич просидел почти двухчасовой доклад, усы его покрылись ине-

см, руки и ноги у всех окоченели от холода... Однако, по окончании доклада Дмитрий Дмитриевич почти в течение часа с увлечением рассказывал о геометрии Лобачевского... Пальцы рук Дмитрия Дмитриевича так заокоченели, что он не мог держать в руках мел, часто клал его и дыханием отогревал пальцы".²

Всю жизнь Мордухай-Болтовского преследовали война и разрушение: сначала эвакуация из Варшавы (первая мировая война), затем гражданская война, имевшая на Дону особенно разрушительный характер, затем снова эвакуация, уже из Ростова (вторая мировая война). И это заставляло Дмитрия Дмитриевича быть готовым не только в любой момент все потерять, но и в любой момент начать все заново. Так он трижды создавал "геометрический кабинет" — собрание моделей, требующее огромного труда и внимания. Первый такой кабинет был создан в Варшаве и потерян при переезде в Ростов. Второй был создан в Ростове и пропал в 1942 г. во время бомбежки Ростова. После войны в возрасте 71 года Дмитрий Дмитриевич вновь принимается за организацию геометрического кабинета.

Ясно, что превознесение героического характера, которое мы находим в послевоенной статье "Средние века" (см. настоящее издание), не было для него только литературным увлечением. Героическим характером обладал он сам, не изменяя своим литературным увлечениям собственной жизнью.

Нам известно о нескольких героических эпизодах из жизни Дмитрия Дмитриевича. О первом, относящемся ко времени гражданской войны, Эмилия Дмитриевна Болтовская смогла только сообщить, но, к сожалению, не смогла рассказать ничего конкретного. Известно только, что когда в дом ворвался вооруженный красноармеец, Дмитрий Дмитриевич мужественно себя повел и сумел охладить его революционный пыл. Кстати сказать, по словам Эмилии Дмитриевны, Дмитрий Дмитриевич, несмотря на свое дворянство, не был безусловным сторонником старой власти, хорошо понимал необходимость перемен и даже мог быть причислен к "передовой интеллигенции". Вместе с тем, мы не находим никаких следов того, что Мордухай-Болтовский увлекался теми политическими теориями, которые были популярны среди "передовой интеллигенции" в начале века в России, и которые новая власть взяла на вооружение. Поэтому "передовым" Дмитрия Дмитриевича можно считать только в смысле его свободы от старой социальной догматики, но не в смысле скорейшего освоения новой.

Следующий эпизод носит скорее комический характер — в том смысле слова, когда речь идет о смехе на краю гибели. Рассказывает Эмилия Дмитриевна Болтовская:

"В 1937 г. проводили "чистку" профессоров. Все желающие послушать, как будут "чистить" профессоров, сидели в зале, профессоров вызывали на сцену, и они должны были изложить свою "идеологию", взгляды. Был у нас такой биолог Волков —

ему дали этикетку “ползучий эмпирик” – честно говоря, я совсем не понимаю, почему он оказался ползучим... Профессора выходили и высказывали свои взгляды. Когда очередь дошла до Дмитрия Дмитриевича, он сказал: “Я, пожалуй, воздержусь высказывать свои взгляды, потому что боюсь *соблазнить малых сих*”. Его не тронули...”

Возможно, что его не тронули благодаря вмешательству Калининна или благодаря силе одного имени Калининна, хотя Эмилия Дмитриевна этого не подтверждает. Такую версию приводит писатель Александр Исаевич Солженицын, который в 1936–41 гг. был студентом Мордухай–Болтовского³ и который вывел Дмитрия Дмитриевича под вымышленным именем Дмитрия Дмитриевича Горяинова–Шаховского в романе “В круге первом” (гл.10), что нам подтвердил сам писатель. Впрочем, как это видно по другим эпизодам, относящимся к жизни Дмитрия Дмитриевича, историческая правда в романе Солженицына настолько тонко переплетена с художественным вымыслом, то есть исторической неправдой, что его вряд ли можно принимать во внимание в качестве исторического свидетельства. Скорее всего, сам Солженицын или его источники в данном случае сами исходили из вероятности, а не из фактов.

Добавим еще, что идеологические нападки на Мордухай–Болтовского имели место и ранее. Так М. Выгодский в своей рецензии на “Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики”, опубликованной в 1931 году в сборнике “На борьбу за материалистическую диалектику в математике” – в целом, кстати сказать, весьма благожелательной – упрекает автора в том, что он “далек от материалистического понимания истории”.

Третий эпизод оказался трагическим. И это как раз тот случай, когда педантичность и героизм оказываются попросту одним и тем же. Рассказывает Эмилия Дмитриевна Болтовская:

“У него должна была быть лекция как раз во время бомбежки. Мы его отговаривали идти на лекцию, а он говорит: “Нет, я не могу не пойти, я все-таки пойду”. Мы все очень волновались. Через некоторое время один преподаватель из Университета приносит часы Дмитрия Дмитриевича и говорит, что Дмитрий Дмитриевич ранен в голеностопный сустав и в голову”.

Далее события развивались следующим образом (Эмилия Дмитриевна продолжает):

“Один из учеников Дмитрия Дмитриевича, который занимал в Армавире какой-то государственный пост, специально для Дмитрия Дмитриевича прислал вагон – во время войны, когда все это было невероятно трудно! В этом вагоне мы вывезли раненного Дмитрия Дмитриевича из Ростова, и поехали к моим родственникам в Ессентуки. Это было в 42-м году”.

Вероятно, это было 8 июля 1942 г., когда немецкая бомба попал в здание физ.-мата и убила 12 человек.

В Ростове сгорело все имущество Мордухай-Болтовского и его семьи, включая богатую личную библиотеку. Пропали и некоторые рукописи, хотя часть их был вывезена. Пропавшие рукописи Дмитрий Дмитриевич впоследствии кропотливо восстанавливал по памяти.

“Когда война кончилась и мы жили в Иваново, к нам на квартиру пришел страховой агент чтобы застраховать имущество. Тогда Дмитрий Дмитриевич достал подстаканник и сказал: “Вот мое имущество”.

Определенно можно судить о вмешательстве бывшего слуги, превратившегося в могущественного покровителя, в жизнь Дмитрия Дмитриевича на основании только одного эпизода:

“Когда мы жили в Эссентуках [1943 г. – А.Р.], то ужасно нуждались. Калинин узнал об этом от Владимира – брата Дмитрия Дмитриевича, который жил в Москве и часто с ним общался – и прислал нам 3000 р. В то время это были большие деньги. Я пошла на почту получать эти деньги, а мне говорят: “Эти деньги уже получили”. Смотрю – за эти деньги расписался другой человек. Оказалось, что кассирша сбежала с деньгами вместе с каким-то офицером, который и уговорил ее взять эти деньги. Когда Владимир узнал об этом, он пересказал эту историю Калинину. Калинин посмеялся и прислал деньги еще раз. На этот раз их принесли прямо на дом.

Старшего брата Дмитрия Дмитриевича, Ивана, по свидетельству Эмилии Дмитриевны, спасла от ареста стоявшая на его столе фотокарточка, на которой он бы запечатлен вместе с Калининным. Однако младшего брата, Владимира, который теснее своих братьев был связан с Калининным, это знакомство не только не оберегло от ареста, но может быть, наоборот, ему способствовало: после войны Владимир был арестован и сослан в Магадан. Что, конечно, неудивительно, поскольку в это же время находилась под арестом жена самого Калинина. Эмилия Дмитриевна продолжает:

Потом, когда Дмитрий Дмитриевич стал лучше себя чувствовать, ему предложили работу в пятигорском Педагогическом Институте. Он согласился [1943 г. – А.Р.]. Тогда нам стало немножко легче. Потом мы переехали в Иваново: там жила сестра жены Дмитрия Дмитриевича, у нее была большая квартира. Там Дмитрию Дмитриевичу дали место в ивановском пединституте [1944 г. – А.Р.] “.

В первый послевоенный учебный год Дмитрий Дмитриевич возвращается в разрушенный Ростов – возвращается в свой университет, к своему делу, за верность которому он чуть было не расплатился жизнью. Но здесь Дмитрий

Дмитриевич неожиданно оказывается в роли жертвы, а не победителя. С этой ролью он, похоже, не соглашается никогда.

“Но все-таки Дмитрий Дмитриевич стремился в Ростов и потом мы туда пересхали. И вот там совершилась самая большая трагедия. Поскольку какое-то время Дмитрий Дмитриевич и мой муж находились на оккупированной территории, это было ужасное пятно. На физику-математическом факультете университета был большой вестибюль, где висели портреты всех известных математиков университета. Там был и портрет Дмитрия Дмитриевича. Однажды Дмитрий Дмитриевич приходит в университет и видит, что его портрет сняли. Почему? Потому что он был на оккупированной территории. То, что он пострадал от немецкой бомбы, не считался ни с чем, пошел на лекцию и выполнил свой долг – не имело значения. Это переполнило чашу весов. Дмитрий Дмитриевич обиделся и написал в пятигорский пединститут, что он хочет туда вернуться. Дмитрий Дмитриевич уехал в Пятигорск, а мы с Филаретом Дмитриевичем остались в Ростове”.

Возможно, что именно вынужденные ограничения публичной активности позволили Дмитрию Дмитриевичу в этот последний период жизни закончить труд, который можно было бы назвать трудом его жизни, если бы только в его жизни не было других трудов, отличающихся по своему характеру, но не по своему масштабу – полный перевод на русский язык “Начал” Евклида с уникальными комментариями, в которых анализируется не только античная, но и европейская традиция геометрического учебника. Скончался Дмитрий Дмитриевич все-таки в Ростове – в городе, к которому бы особенно привязан.

“В 1952-м году Дмитрий Дмитриевич гостил у нас на каблуках. Однажды ночью ему внезапно стало плохо. Вызвали “скорую помощь”; когда врач приехал, все уже было кончено”.

А. Родин

ЧЕТЫРЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ¹

Введение

М.Г.²

Бесспорно, что одна из характерных черт современной математики – ее связи с науками философскими. В настоящее время математик, который не желает ограничить всю деятельность узкой сферой какого-нибудь специального исследования должен быть хотя бы немного философом. Математика и философия, можно сказать, два близнеца, родившиеся в одно время и в своем младенчестве лежавшие в одной колыбели. Судьба их то разъединяет, то снова приводит к тесному единению. Рационалисты XVII века все мировоззрение хотели построить *ordine geometrico* и математика служила образцом для их метафизических построений. Критицизм разбил эти прекрасные заблуждения и этим указал два далеко расходящиеся пути для философии и математики.

Спекулятивный идеализм смотрел свысока на математику, его диалектическая логика представлялась божественным откровением, заглушающим земной лепет силлогистической логики математиков. Представлялось, что философия не может заимствовать у математики ни ее метод, ни ее содержание.

В противоположность идеализму материализм очень любил выдвигать значение математики. Но материалистические похвалы математике – это похвалы чернорабочему, который работает для ряда наук, образующих иерархическую лестницу вплоть до той наивно-реалистической догматики, которая атом считает единственным объясняющим принципом. Но вот, эволюция мысли, идя по зигзагообразной кривой, снова возвращается к старым идеям. Рационализм возрождается в виде современных интеллектуалистических течений³. Чистый разум старается теперь разорвать те цепи, в которые его заковал критицизм.

Война все еще продолжается. Победа будет одержана рационализмом и чистый разум опять овладеет метафизическим царством, если будут взяты самые сильные крепости: будет опровергнуто кантовское учение о пространстве и геометрических аксиомах и будет отбита актуальная бесконечность.

Мы видим таким образом, что предметы, которые должны интересоваться гносеолога лежат в области математики. Если математик не глух и не слеп к тому, чем волнуется философская мысль, созидаящая синтез всех человеческих знаний, то он со своей стороны будет стараться выработать

определенный и ясный ответ на обращенные к нему запросы гносеолога и метафизика.

Мы выше сказали, что спекулятивный идеализм, совершающий свои построения с помощью высшей, диалектической логики смотрит свысока на ту логику, которая толчется на одном месте, маскируя на разные лады $A=A$.

Если диалектическую логику отвергнуть, то останется только эта бедная математическая логика и критицизм смело сможет утверждать, что с $A=A$ также нельзя доехать до Абсолюта, как барону Мюнхаузену вытащить себя за волосы из болота. Не будет ли единственным путем для защиты позиций создать новую логику, опирающуюся на математику, изыскать в математической логике другие принципы, чем $A=A$, не зависящие от последнего, усмотреть в Математике силы, не усмотренные Аристотелем и Кантом? Отсюда следует необходимость логическо-математических исследований, связь между логикой и математикой.

Но следует помнить, что связь между гносеологией и метафизикой с одной стороны и математикой [с другой] существовала и раньше. Совершенно новой представляется связь [математики] с психологией. Значение психологии для математики, впрочем, и теперь сознается довольно слабо. Едва ли вполне сознается, что все логические построения приобретают ценность только благодаря психологическому факту очевидности основных аксиом. Но уже одного этого факта достаточно, чтобы убедить в необходимости психологических исследований.

Эмпиризм, опирающийся на психологию, можно обсуждать лишь опираясь на эту последнюю. Психология мышления не должна совпадать с ассоциативной психологией. Необходимо ее более глубокое исследование и лучшие факты может дать математика.

Психологическое исследование дает особое значение истории математики. В последней мы приучаемся видеть не только прагматическую сторону, но и усматривать общие законы, которым подчиняется эволюция различных психологических элементов, приучаемся рассматривать историю математики только в связи с историей мысли в более общем смысле и даже с общей историей человечества.

Вместе с тем, мы приобретаем психологические основы для методических теорий. В настоящее время экспериментальное исследование служит основой последних, но экспериментальные факты следует пополнять, а в иных случаях и полностью заменять результатами психологического анализа, относящегося не только к истории различного рода открытий, но и к готовым математическим построениям.

Предметом наших лекций и послужит разбор тех философских и математических проблем, которые связывают логику, гносеологию, психологию, метафизику с математикой.

Лекция I. Логика и Математика

Существуют математические истины, которые не доказывают, в существовании которых убеждаются непосредственно путем интуиции. Эти истины высказываются в начале изложения системы математических положений. Это – *аксиомы*. Таковы следующие истины: “две величины, равные третьей, равны между собой”, “две прямые не могут заключать пространства”. Раз установив систему очевидных истин, к признанию других приводят с помощью доказательств, т.е. связывая каждую из них логической связью с непосредственно очевидными положениями. Устанавливая такую связь, мы, конечно, этим не делаем доказуемые положения очевидными, но истинность их становится для нас необходимой в силу того, что:

1) исходные положения очевидно имеют место

2) все те положения, которые связываются цепью силлогизмов с ними должны быть, как и он, истинны.

Из двух посылок силлогизмом извлекаем третье предложение – заключение. Если мы изобразим точками всю совокупность положений какой-либо математической дисциплины, например элементарной геометрии, и точку А, отвечающую какому-нибудь положению будем соединять прямыми с В, С, D... положениями, из которых А выводится, то получим сеть, которая начинается в точках, отвечающих начальным т.е. очевидным положениям. Можно сказать, что математика обычно интересуется не самой сетью, а только ее узлами. Для нее важно указать *какой-нибудь* путь, ведущий от очевидных положений А, В, С, D... к интересующему его положению G, существование которого почему-либо подозревается и, если этот путь найден, то математик со спокойной совестью может сказать, что положение G им доказано. Более же глубоким, но еще не успевшим внедриться во все области математики является взгляд, по которому исследование логической сети является не менее важным, чем исследование ее узлов. Нужно предполагать, что логический анализ в будущем будет приобретать все большее и большее значение и интеллектуальная совесть математика будущего времени будет гораздо чувствительнее, он будет искать не какой-нибудь путь от А, В, С... к G, а путь определенного типа, идущий от наперед заданной части аксиом через положения определенных типов.

На первый взгляд кажется, что подобные исследования не предмет математики, а предмет логики.

Конечно, основания подобных исследований черпаются в логике, но результаты, которые получаются путем логических исследований, относятся, тем не менее, к математике.

Возьмем силлогизм т.е. одно из звеньев упомянутой выше логической сети (например 1-ю фигуру)

А есть В

все В есть С

следовательно А есть С.

Им утверждается, что А присуще некоторое свойство (С) определяющее принадлежность А к классу и именно потому, что ему присуще свойство (В).

Можно сказать, что, делая это заключение мы пользуемся только одним из свойств объекта А. Но ведь тому же объекту А могут быть присущи еще другие свойства (Е), (F), (G)... отнюдь не necessarily связанные с (В). Эти последние в нашей логической операции остаются логически *не действующими*.

Объект А мы могли бы заменить другим объектом $\bar{A}$, которому было бы присуще свойство (В), но признаки (Е) (F) (G)... были бы заменены другими $(\bar{E}), (\bar{F}), (\bar{G})$...

Иван – человек,
все люди смертны:
следовательно Иван смертен.

Иван человек, но Иван может быть стар, высок, худ. Но я могу также сказать:

Петр – человек,
Все люди смертны
следовательно Петр смертен.

Хотя Петр в противоположность Ивану может быть молод, низок и толст.

Вместо одного звена, можно взять несколько звеньев, т.е. некоторую логическую цепь, начинающуюся аксиомами. Мы будем тогда доказывать, что объекту

А присущи свойства: a', a'', a''' ...
В b', b'', b''' ...
С c', c'', c''' ...

При этом мы можем использовать не все признаки А, В, С... а только

А $\alpha', \alpha'', \alpha'''$
В $\beta', \beta'', \beta'''$
С $\gamma', \gamma'', \gamma'''$

наличность которых утверждается системой использованных нами аксиом.

Таким образом нами будет доказываться, что А присущи свойства: a', a'', a''' ...

В: b', b'', b''' ... С: c', c'', c''' ... только потому, что А присущи: $\alpha', \alpha'', \alpha'''$... В: $\beta', \beta'', \beta'''$... С: $\gamma', \gamma'', \gamma'''$...

Если бы А, В, С... были присущи еще другие от взятых независимые свойства

$\alpha', \alpha'', \alpha'''$... $\beta', \beta'', \beta'''$... $\gamma', \gamma'', \gamma'''$...

то таковые следует признать логически не действующими. Заменяя их другими $\overline{\alpha'}, \overline{\alpha''}, \overline{\alpha'''} \dots \overline{\beta'}, \overline{\beta''}, \overline{\beta'''} \dots \overline{\gamma'}, \overline{\gamma''}, \overline{\gamma'''} \dots$, мы получаем вместо $A, B, C \dots$ новые объекты $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C} \dots$ относительно которых должны утверждать то же, что о $A, B, C \dots$, т.е. наличие для $\overline{A}$ свойства: $\overline{a'}, \overline{a''}, \overline{a'''} \dots$, для $\overline{B}$: $\overline{b'}, \overline{b''}, \overline{b'''} \dots$ для $\overline{C}$: $\overline{c'}, \overline{c''}, \overline{c'''} \dots$ и т.д.

Мы будем иметь таким образом одну логическую схему для различных объектов: $A, B, C \dots$ и $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C} \dots$

Можно назвать $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C} \dots)$ и $(A, B, C \dots)$ логическими эквивалентами относительно взятой системы постулатов.

В современной геометрии имеет огромное значение эквивалентность точки и прямой относительно одной группы аксиом. Все геометрические свойства можно разделить на две довольно обширные категории.

Теорема Пифагора устанавливает известную зависимость между длинами гипотенузы у катетов. Это не что иное, как соотношение между результатами некоторых измерений. Такие свойства, которые зависят от какого-либо сравнения или, лучше сказать, измерения величин, называются *метрическими*. Такого рода свойствами занимается почти исключительно низшая, элементарная геометрия.

Но существуют еще совершенно другого рода свойства. Эти последние совершенно не зависят от измерения. Это так называемые *зрительные* свойства.

Они определяются взаимным расположением геометрических объектов, но при этом предполагается, что это расположение определяется не измерением, а зрительной интуицией весьма общего типа.

На вопрос: "где точка?" — следует отвечать не "на таком-то расстоянии от прямой вправо или влево", а "на прямой, направо или налево".

На вопрос: "где прямая?" — следует отвечать, "на плоскости или в ту или другую сторону от нее" и т.д.

Ясное представление о зрительных свойствах дают уже зрительные аксиомы, относящиеся к основным элементам геометрии.

На плоскости:

Две точки определяют одну прямую, через них проходящую.

Две прямые определяют одну точку их пересечения.

Эти аксиомы обыкновенно формулируют так:

Две точки определяют прямую, им принадлежащую.

Две прямые определяют точку им принадлежащую.

В пространстве:

Три точки, не принадлежащие одной прямой, определяют плоскость.

Три плоскости, не принадлежащие одной прямой, определяют точку.

Две точки определяют прямую, им принадлежащую.

Две плоскости определяют прямую, им принадлежащую.

И другие.

Мы не будем перечислять все зрительные аксиомы, но отметим следующее их свойство, которое можно легко усмотреть и на четырех только что приведенных.

Каждой зрительной аксиоме отвечает ей взаимная, получаемая заменой плоскости на точку, точки на плоскости (прямая остается на месте).

Из системы зрительных аксиом выводится зрительная геометрия или *геометрия положения* — главная и важнейшая часть проективной геометрии.

Можно сказать теперь, что все те свойства точки, прямой и плоскости присущи им только потому, что точке, согласно зрительным аксиомам, присущи свойства α' , α'' , α''' ..., а плоскости β' , β'' , β''' ...

Таким образом, для доказательства зрительных теорем имсет значение не то, что плоскость представляется интуицией совершенно в ином виде, чем точка, а то, что три точки определяют плоскость, две точки — прямую и т.д.

Так как согласно двойственности аксиом мы можем приписать плоскости свойства α' , α'' , α''' ..., а точке [свойства] β' , β'' , β''' ..., то мы будем иметь логическую эквивалентность [А (точки), В (прямой), С (плоскости)] и [$\bar{A}$ (плоскости), $\bar{B}$ (прямой), $\bar{C}$ (точки)], взаимные положения будут существовать не только для аксиом, но и для всякой зрительной теоремы.

Мы, таким образом, получаем *закон двойственности*:

Каждому зрительному положению отвечает взаимное, получаемое заменой точки на плоскость и плоскости на точку.

Приведем примеры двух взаимных теорем.

Можно сказать, что прямые, между собой пересекающиеся, т.е. имеющие попарно общие точки и не лежащие на одной плоскости, проходят через одну точку.

Взаимная теорема:

Прямые, между собой пересекающиеся, т.е. лежащие попарно в одной плоскости и не проходящие через одну точку, лежат в одной плоскости.

Существует теорема плоской зрительной геометрии, которую доказывают стереометрическими соображениями — это теорема Дезарга. В двух треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ соответствующие вершины которых лежат на прямых, проходящих через одну точку, соответствующие стороны пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, и [существует] теорема ей обратная.

Эта теорема вместе с плоскостными зрительными теоремами представляет основание зрительной плоскостной геометрии. Легко усмотреть в этих основных положениях тоже двойственность, существование взаим-

ных положений, получаемых обменом точки и прямой. В плоскостной геометрии имеет место закон двойственности:

Каждому зрительному положению отвечает взаимное, получаемое взаимным обменом точки и прямой.

Теореме Паскаля: во вписанном в кривую второго порядка шестиугольнике противоположные стороны пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, отвечает, как взаимная, теорема Брианшона: в описанном около кривой второго класса (или, что то же самое, второго порядка) шестиугольнике прямые, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке¹.

Логический эквивалент является главным орудием исследования логической сети. Предположим, что мы имеем ряд независимых постулатов, т.е. таких, что ни один из них не может быть выведен из остальных. Каким образом решается следующая основная задача: теорема G выводится из постулатов $A, B, C, D, \dots$, как убедиться в том, что эта теорема не может быть выведена из меньшего числа постулатов, например, [из] A, B, C .

Для решения этого вопроса следует только подыскать к исследуемым объектам $P, Q, R, \dots$ их эквиваленты относительно постулатов:

$A, B, C : \bar{P}, \bar{Q}, \bar{R} \dots$ Если теперь для $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R} \dots$ не имеет места теорема G , то следует безусловно заключить, что G не может быть выведено из A, B, C .

Так можно доказать, что теорема Дезарга не может быть выведена из одних плоскостных зрительных аксиом. А именно, имеет место следующая альтернатива: или приходится доказывать эту теорему метрически, например, методом аналитической геометрии или же пользоваться зрительными пространственными аксиомами, отказавшись от самостоятельного, не зависящего от пространственной геометрии, обоснования плоскостной зрительной геометрии.

Чтобы убедиться в этом, можно употребить, согласно Гильберту, следующие логические эквиваленты прямой относительно системы зрительных аксиом.

Берем эллипс C , который назовем основной окружностью, и точку P (основную точку) вне ее. Назовем пропрямой такой объект, который совпадает со всякой прямой, не пересекающей основную окружность. Если же прямая пересекает основную окружность в точках A, B , то пропрямой будет объект, образованный частью прямой вне этого эллипса и кругом, проходящим через A , и основную точку P .

Пропрямая представляет [собой] эквивалент прямой, так как простые геометрические соображения убеждают, что при надлежащем выборе эллипса:

Две точки определяют пропрямую.

Две пропрямые определяют одну и только одну точку, им принадлежащую и т.д.

Если бы теорема Дезарга могла быть выведена из плоскостных зрительных аксиом, то соответствующие стороны—пропрямые двух треугольников пересекались бы в точках, лежащих на одной пропрямой, если соответствующие вершины лежат на пропрямых, проходящих через одну точку. Но пример, в котором вершины берут то внутри, то вне окружности S , легко убеждает нас в противном.

С помощью логических эквивалентов доказывается также возможность неевклидовых геометрий.

Неевклидовой геометрией называется геометрия, в основе которой лежит отрицание 11-й евклидовой аксиомы или ей равносильной аксиомы *о параллельных*, состоящей в том, что из данной точки можно провести только одну прямую, параллельную данной.

Если принять все аксиомы евклидовых “Начал”, кроме 11-й², то мы получим геометрию Лобачевского.

В этой геометрии из данной точки можно провести бесконечное множество прямых, не пересекающих данную, заключающихся между двумя предельными прямыми, которые Лобачевский называет параллельными.

Геометрия Лобачевского может быть развита, как и геометрия Евклида, не встречая логических противоречий, но приводя к теоремам, в большей или меньшей мере идущим против интуиции.

По геометрии Лобачевского, сумма углов в треугольнике меньше двух прямых и т.д.

Меньшая степень очевидности аксиомы о параллельных линиях (и еще меньшая 11-й евклидовой аксиомы) в сравнении с другими евклидовыми аксиомами убеждала математиков в ее зависимости от более очевидных положений.

Как известно, в продолжение 2000 лет математики старались ее доказать. Сперва делались попытки прямого доказательства, затем доказательства приведением к абсурду т.е. построения системы теорем, в основе которых лежало бы отрицание аксиомы о параллельных и которая приводила бы к логическому противоречию.

Труды Лобачевского составляют эпоху в геометрии, в них заложено зерно логическо-математических исследований. Лобачевский не доказал 11-й аксиомы, не доказал и невозможность такого доказательства, т.е. независимость этой аксиомы от других евклидовых аксиом. Он дал систему геометрии, вполне отвечающей евклидовой, в основе которой лежало отрицание аксиомы о параллельных и которая была свободна от всяких логических противоречий.

За его работой должно было последовать исследование, доказывающее, что и при дальнейшем своем продолжении геометрия Лобачевского не может встретить противоречия.

Для этого необходимо было отыскать объекты, реализованные в обыкновенной евклидовой геометрии, представляющие [собой] эквиваленты плоскостей, прямых и точек относительно тех зрительных и метрических аксиом евклидовой геометрии, которые остаются по исключении аксиомы о параллельных.

Путь, избранный Бельтрами (который ограничивался лишь плоской геометрией) был следующим: за эквиваленты прямых геометрии Лобачевского он принимал геодезические линии на некоторой поверхности (псевдосферы).

Эти геодезические линии определяются двумя точками, могут быть безгранично продолжены и т.д.

Через данную точку проходит бесконечное множество прямых, не пересекающих данную геодезическую линию и заключающихся между двумя геодезическими линиями. К сожалению, задача не была вполне решена. Бельтрами было доказано, что геометрия псевдосферы только в некоторой определенной области совпадает с геометрией Лобачевского.

Другие эквиваленты, например, указанные Клейном, более успешно привели к цели. Установив общую логическую схему для различных объектов

$A, B, C, \dots$ и $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$

естественно искать субстраты для этой схемы, понятия более широкого объема, чем $A, B, C, \dots$ $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$; классы, видами которых являются, как $A, B, C, \dots$ так и $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$

Упомянутые выше двойственные зрительные аксиомы и выводимые из них двойственные теоремы могут быть заменены единичными, объединяющими каждую пару, если установить чисто абстрактные объекты:

- 1) *элементы* – которыми могут быть как точки, так и плоскости
- 2) *носители* первой ступени – прямые
- второй ступени – плоскости или точки.

Тогда аксиомы об определяемости тремя точкам плоскости, и тремя плоскостями точки объединяются в следующей абстрактной аксиоме:

Три элемента, не принадлежащие одному носителю первой ступени, определяют носителя второй ступени.

Итак, наш логический анализ ведет нас к построению все более и более общих классов, ведет от объектов интуиции к все более и более абстрактным объектам.

Он вскрывает дальше, что некоторые математические понятия подходят под чисто логические понятия. И многие теоремы вытекают из некоторых свойств, наличие которых может быть установлена для этих логических объектов, не математизируя их.

В высокой степени интересна и поучительна история идеи группы, одной из кардинальных идей современной математики.

Предположим, что мы имеем совокупность некоторых объектов:

$$a_1, a_2, a_3 \dots a_n \dots (a)$$

и некоторую операцию P , которую мы производим над некоторыми числами этих объектов. Операция эта может дать, или не дать результата.

Если результат получается, то он может не принадлежать совокупности (a) . Если результаты операции P приводят всегда к объектам (a) , то последняя совокупность объектов будет *группой относительно операции P* .

Возьмем совокупность целых чисел. Мы будем иметь группы относительно сложения и вычитания, ибо сложение и вычитание целых чисел приводит опять к целым числам. Таким же образом целые положительные числа будут группой относительно сложения.

Совокупность рациональных чисел будет представлять группу относительно всех четырех арифметических действий.

Приведем еще геометрический пример. За операцию P будем считать определение по трем точкам четвертой гармонической: тогда совокупность всех точек прямой (пунктуал) будет представлять [собой] группу. Понятие группы, конечно, чисто логическое понятие. Это понятие, разумеется, более широкое, чем число, ибо только частью арифметических аксиом утверждается следующее свойство чисел: что их совокупность относительно 4-х арифметических действий образует группу.

Идея группы может выступить и там, где нет никакого намека на математику. Можно, например, сказать, что все человечество относительно брака образует группу.

За упомянутые объекты: $a_1, a_2, \dots$ можно принять также некоторые операции.

В этом случае P будет операцией над операциями. За P обычно принимают просто соединение двух операций, т.е. совершение двух операций в последовательном порядке.

Тогда определением группы будет условие:

$$a_1 a_k = a_g$$

т.е. последовательное совершение двух операций – совокупность (a) , равносильно одной операции (a) .

Группу операций образует совокупность всех проективных преобразований.

Проективное преобразование на прямой определяется формулой

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d},$$

связующей координату точки с координатой ее преобразования (образа). Совокупность двух проективных преобразований

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad x'' = \frac{a'x' + b'}{c'x' + d'}$$

дает проективное преобразование:

$$x'' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

Не останавливаясь на многочисленных примерах групп, укажем на то, что можно доказать ряд теорем, относящихся к группе, правда не наиболее общего типа, но столь общего, что под него подходят все те группы преобразований, с которыми до сих пор имела дело математика. Для этого следует установить ряд постулатов, определяющих тип группы, который можно назвать *нормальным*.

Можно написать их в символической форме, обозначая через операцию и имея в виду, что $a \circ b$ вообще отлично от $b \circ a$.

I) $a \circ b = c$, т. е. всегда имеется результат, причем, согласно определению группы, оно входит в совокупность $a, b, c, \dots$,

II) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (*ассоциативный закон*),

III) $i \circ i = i$

(постулируется существование *идемпотента* (т.е. каким является 1 для умножения, 0 или 1 для сложения))

IV) постулируется единственность идемпотента,

V) *модулей* направо и налево

$$a \circ i_a = a$$

$$i_a \circ a = a$$

VI) *взаимных* элементов

$$a \circ a'_a = i$$

$$a'_a \circ a = i$$

Это постулаты. Основываясь на них можно доказать теоремы:

Тождество обоих модулей и обоих взаимных элементов. Если $a \circ b = a \circ b'$ то $b = b'$.

Существование решения уравнения $a \circ x = b$ и т.д.

Отсюда мы видим, что, идя по пути обобщения, мы приходим к понятию чисто логическому; не меняя самого метода исследования, мы исследуем это понятие, доказываем ряд теорем, употребляя символику, подобную математической.

Отсюда вполне естественно вытекает стремление свести все математические понятия и аксиомы к чисто логическим, найти чисто логические субстраты тем логическим схемам, в которые укладывается арифметика и геометрия.

Это направление принадлежит школе логиков, [к которым относятся] Пеано, Рассел, Кутюра и т.д.

В основу арифметики и геометрии они кладут чисто логические аксиомы, арифметические и геометрические объекты они определяют логически.

Сводя операции формальной логики к нескольким основным, они приводят их к операциям над символами и таким образом в логике мыслят математически.

Таким образом, если так можно выразиться, производится одновременно и логизация математики и математизация логики.

Но это сближение, или это поглощение математики логикой, становится возможно только при расширении старой классической логики, при включении в нее новых элементов.

Прежде всего приходится развивать наряду с логикой классов, каковой является классическая логика, еще логику предложений.

Классическая логика изучает операции над классами. Классический силлогизм представляет [собой] включение и исключение индивидуумов и видов в классы и из классов.

“ a есть b , b есть c , следовательно, a есть c ” представляет [собой] такую операцию:

“ a , принадлежащее классу b , включается в класс c , ибо b принадлежит c ”.

Но в том же силлогизме можно видеть операцию над предложениями, установку связи между большой посылкой и заключением. Заключение вытекает из большой посылки в силу малой посылки.

Таким образом операция силлогизма подводится под весьма общее понятие *выведения*. Из предложения p может вытекать предложение q в силу малой посылки, но можно рассматривать этот вывод $p \rightarrow q$ совершенно независимо от того, что обуславливает этот вывод. Можно рассматривать вывод $p \rightarrow q$ просто как факт.

Логика предложений раскрывает нам, что не все логические операции сводятся к приложению принципов тождества и противоречия.

Но этого мало. Силлогизм устанавливает отношение индивидуума к классу. Понятие отношения — предмет логики, но не всякое отношение есть отношение индивидуума к классу. Необходимо поэтому логику предложений и логику классов дополнить логикой *отношений*.

Но логики имеют немало врагов.

Пуанкаре видит в их определениях ложный круг, определение неизвестного через неизвестное.

В особенности резким выступает это в определении Кутюром единицы:

4 “Один, — говорит Кутюра, — есть число элементов класса, два любых элемента которого тождественны”.

Один здесь определяется через два, и, если бы Кутюра попросили определить два, то, по мнению Пуанкаре, он определил бы два через единицу.

Мы не считаем, что логики были бы так виноваты, как это представляется Пуанкаре, чтобы все их определения грешили бы в том же отношении.

Приведенное выше словесное определение освободится от этого обвинения, если его несколько иначе выразить:

“Один есть число элементов класса со всеми тождественными элементами”.

Число два, неприятно резавшее ухо, исчезло.

Класс со всеми тождественными элементами — это вместе с тем [есть] тот [класс], в котором любые два элемента являются тождественными.

Обнаружимость тождественности любых двух элементов — это не характерный признак, служащий определением такого класса, а только лучший способ проверки, что данный класс именно таков.

Здесь делается такая же ошибка, как при определении равных треугольников их конгруэнтностью, т.е. возможностью полного положения одного на другой. На это последнее свойство следует смотреть как на свойство, определяемое некоторой аксиомой, имющей место для треугольников (в то время, как аналогичная аксиома не имеет места для тетраэдров): из нее вытекает способ для удостоверения в равенстве треугольников.

Но я вполне согласен, что логики не дали чисто логических определений арифметических объектов, да и не могут их дать.

Всякое истинное определение должно однозначно соответствовать определяемому объекту, но, конечно, такого соответствия в определениях логиков не имеется.

Говоря о логиках, мы приходим к вопросу о математических определениях, причем будем говорить только о геометрических определениях.

Вот два кардинальных вопроса, касающиеся математических определений: что можно определить и какую роль играет определение в математическом доказательстве?

Очевидно, не все может быть определено. Если логики и стараются логически определить число, то конечно, они не имеют никакого

намерения определить логические термины, входящие в их определение.

Основные геометрические элементы: плоскость, прямая и точки и связи между ними являются неопределимыми геометрическими объектами.

Можно выставлять как определение те основные постулаты, которым подчиняются эти элементы. Но постулаты эти не определяют ни каждый в отдельности, ни даже все вместе ни точки, ни прямой, ни плоскости.

Те признаки, которыми приходится дополнять признаки, задаваемые постулатами, определяются интуицией и выразить их логическими терминами настолько же возможно, как объяснить цвет слепому с помощью звуков.

Всякая попытка определить, например, точку, приводит в лучшем случае к определению точки с помощью других интуитивных данных, в худшем — к определению x через x .

Определения могут быть чисто словесными сокращениями — тогда [мы] будем иметь *номинальные* определения.

Пример номинального определения: *катет* — сторона прямоугольного треугольника, прилежащая к прямому углу.

Роль номинального определения вполне ясна. Номинальное определение сокращает изложение доказательства, дает возможность вместо того, чтобы каждый раз говорить “сторона прямоугольного треугольника” и т.д., употреблять одно слово “катет”.

Так что логического, в собственном смысле, значения номинальное определение не имеет.

Но, конечно, не все геометрические определения таковы. Нельзя назвать обычное определение круга номинальным.

Некоторые относят это определение к *генетическим* и считают, что кроме номинальных определений в геометрии возможны только генетические, т.е. такие, в которых дается способ образования определяемого объекта с помощью известных элементов.

Определяя окружность как геометрическое место точек, отстоящих на одно и тоже расстояние от данной точки, мы вовсе не указываем этим способ образования или вычерчивания круга (хотя это сейчас же выводится из его определения). Мы определяем совокупность точек (пунктуал), удовлетворяющих определенному условию. Этому пунктуалу отвечает одна и только одна определенная кривая — носитель этого пунктуала. Пунктуал не составляет кривой, но он однозначно с ней связан.

Таким образом дело обстоит так:

Объект B дается заданием объекта A , однозначно с ним связанного, т.е. таким, что, если дается A , то вместе с тем дан B и если дан B , то дан и A . Но связь между A и B не может быть определена в логических терминах, а дается только интуицией. В этом случае имеет место

логическая эквивалентность A и B , как для постулатов, так и для выводимых из них положений. Так, в предложении: "две точки определяют пунктуал", пунктуал можно заменить прямой и сказать: "две точки определяют прямую".

Литература к лекции I

На русском языке:

- 1) Кутюра. Принципы математики. Перев. Линда. Изд. Карбасникова. Спб. 1913. (богатая библиография).
- 2) Кутюра. Алгебра логики. "Матезис". Одесса. 1909.
- 3) Пуанкаре. Гипотеза и наука.
- 4) Пуанкаре. Метод и наука.
- 5) Фосс. О сущности математики. "Физика". Спб. 1911.
- 6) Каган. Основы геометрии. Одесса. 1905-07.
- 7) Бонола. Неевклидова геометрия.
- 8) Вебер-Вильшттейн. Энциклопедия элементарной математики. Т. 1. Матезис. Одесса. 1909.
- 9) Энрикес. Вопросы элементарной математики.
- 10) Ващенко-Захарченко. Начала Евклида с примечаниями.
- 11) Далеман. Проективная геометрия. Пер. Лагутинского.

На французском языке:

- 1) Peano. Formulaire de Mathematiques.
- 2) Peano. Notations de logique Mathematiques. Turin. 1894.
- 3) Padoa. La logique deductive. Paris. Gauthier Villars. 1912.
- 4) Liard. Definitions mathematiques. Paris. Alcan. 1903.
- 5) Favaro. Lecons de statique graphique t. I. Geometrie de Position. Paris. Gauthier Villars. 1879.

На немецком языке:

- 1) Hilbert. Grundlagen der Geometrie. Leipzig. Teubner. 1903.
- 2) Killing und Hovestadt. Handluch des Math. Unterrichts. t.I. Leipzig. Teubner. 1910 (библиография).
- 3) Genochi. Differentialrechnung und Integralrechnung. Anhang I. Teubner. 1899.

Лекция II. Гносеология и Математика.

В заключении находится только то, что дано в посылках. Не дают ли правила формальной логики одну тавтологию, маскировку тождеств A есть A . Не представляют ли логические схемы только мертвое орудие, оживить которое могут лишь интуиция и опыт? Пуанкаре отрицает, чтобы живое математическое рассуждение, ведущее нас от истин к новым истинам, представляло бы одну мертвую логическую схему. За живительный дух, кото-

рый движет математическое рассуждение вперед, он считает *полную математическую индукцию*, логически неопределимую. Шаг вперед делает математика всякий раз, когда принимает этот принцип:

Если какое-либо свойство справедливо для 1 и если установлено, что оно справедливо для $n+1$, коль скоро оно справедливо для n , то оно верно для всех целых чисел.

Пуанкаре считает, что применение этого принципа заключает в себе бесконечное множество силлогизмов:

Теорема верна для числа 1.

Если же она справедлива для 1, то верна и для 2.

Следовательно верна для 2.

Если верна для 2, то верна для 3.

Следовательно верна для 3 и т.д.

С таким мнением нельзя согласиться. Конечно, применение принципа полной индукции можно представить бесконечным числом силлогизмов, но все эти силлогизмы нетрудно свести к одному, если только признать принцип индукции или за определение целого конечного числа (как Кутюра) или за характерное свойство, обнаружимое одной из аксиом, к нему относящейся.

Неверно и то, что правила формальной логики дают только замаскированное тождество $A=A$. Ибо не только на этом принципе зиждутся эти правила.

Существуют принципы, отмечаемые новой логикой, совершенно не выводимые из этого принципа, как, например, принцип упрощения, относящийся к логике предложений, выражаемый логической формулой:

$$p \cap (q \cdot p) \cdot p$$

т.е. утверждение двух положений p, q влечет утверждение одного из них, содержащее в себе операцию логического умножения, которой нет в принципе тождества. Поэтому опасение, что математические построения по правилам формальной логики будут замаскированными утверждениями $A=A$ не имеет основания.

Трудность, а может быть, и полная невозможность чисто логического обоснования математики происходит вследствие следующих двух препятствий:

1) вначале выступает невозможность чисто логического определения математических понятий по причинам, указанным в первой лекции,

2) в дальнейшем чисто психологическая невозможность проведения чисто логических операций без обращения к интуиции.

Правда, нам кажется странной возможность построения всей математики только с помощью такого рода операций, нам кажется невероятным, чтобы математика представляла [собой] только комбинацию одних и тех же элементов.

Но причина такой кажущейся невероятности чисто психологическая, это факт скрытых аксиом, которые и дают нам своего рода ходунки при логических построениях. Полную систему аксиом нам трудно, а может быть, психологически и невозможно собрать.

Но, если мы предположим ее собранной, то можно утверждать, что выведение всех положений математики может быть совершенно по правилам формальной логики, при этом возможность эта рассматривается с логической точки зрения, а не с психологической.

То, что может быть невозможно психологически, возможно логически. Но логическая точка зрения отличается также и от гносеологической. Возможность выведения математических положений из аксиом не есть еще возможность их познания, ибо познание не дается одной логикой.

Установка логических аксиом для интуитивного материала, подведение последнего под логические категории требует операций, которые не могут быть выражены никакими логическими формулами.

Интеллектуализм Рассела и Кутюра заходит слишком далеко, утверждая, что построение всего математического знания возможно из чисто логических понятий и аксиом.

Кант называет *аналитическими* такие суждения, в которых только раскрывается содержание подлежащего, и *синтетическими* [те суждения] в которых подлежащему прибавляется нечто новое.

“Тело протяженно” — суждение аналитическое, ибо уже в понятие тела входит признак протяженности.

“Тело весомо” — суждение синтетическое.

Для обоснования интеллектуализма следует прежде всего доказать, что математические суждения не представляют [собой] суждений синтетических.

Для этого, конечно, открывается единственно возможный путь: доказать возможность чисто логических определений математических объектов и выведения из этих определений всех положений математики. Но легко увидеть, что этим Кант еще не опровергнут. Синтетический момент [состоит] отнюдь не в выведении из аксиом, относящихся к некоторым логическим признакам геометрических объектов (принимаемых логиками за определения), дальнейших положений, но в приписывании объекту, данному интуицией, определенных логических признаков.

Прямая дается нам интуицией, в этом интуитивно данному отнюдь не заключается определяемость прямой двумя точками или пересекаемость двух прямых в одной точке или аксиома о параллельных. Для этого необходим акт, приносящий нечто, не заключающееся в первоначально данном представлении прямой.

Синтетические суждения в геометрии именно и возможны, согласно Канту, благодаря пространственной интуиции. Гносеология поэтому

выдвигает на первый план проблему пространства и реальной (но не логической) возможности неевклидовых пространств.

В популярно-научных сочинениях, относящихся к неевклидовым геометриям, часто для оправдания существования последних приводятся аргументы в пользу возможности реального существования пространства с устанавливаемыми ими свойствами. Наиболее доступной для понимания является наивно-реалистическая и эмпирическая точка зрения. Пространство рассматривается как вещь, которая представляется нам почти такой же, какова она в действительности. Опыт знакомит нас со свойствами пространства совершенно так же, как он знакомит нас со свойствами окружающих предметов и совершенно так же, как мы можем сделать незначительную ошибку в каких-либо опытных измерениях, мы можем сделать или даже делаем в тех основных свойствах, которые мы на основании опыта приписываем пространству. Мы можем, например, ошибиться относительно аксиомы о параллельных, утверждая существование одной прямой, проведенной через точку *M* и не пересекающей данную *L*, не заметив бесконечного множества таких прямых, заключающихся в очень малом пространстве, или может быть совершенно недоступном опыту.

Согласно этому воззрению, математические знания становятся возможны только благодаря опытной индукции, предшествующей логическим построениям.

Эти взгляды развиты Гельмгольцем. По Гельмгольцу, например, аксиома свободной подвижности, утверждающая возможность неизменно-го передвижения геометрических фигур, лежащая в основе учения о конгруэнции, дается опытом, наблюдением твердых, не деформирующихся тел. Существо, живущее в мире быстро деформирующихся облаков и водных течений, не могло бы иметь подобной аксиомы.

Но уже в этом взгляде ясно выступает ошибка эмпириков. Измененность или деформация твердого тела сознается сравнением его формы с первоначальной, т.е. измерением. Измерение же само предполагает неизменную меру, т.е. логически постулирует свободную подвижность.

Но, если, стоя на реалистической точке зрения, признать пространство реально существующим, но не только субъективной формой нашей интуиции, как это делает Кант, то было бы разумнее предполагать ошибку в его восприятии гораздо больше, чем та, которая обнаруживается взамен действительно существующей геометрии Лобачевского “неточной” евклидовой геометрией.

При реалистических предпосылках несравненно последовательнее Дельбеф. По его мнению прямые, круги, параболы нашего ума не суть средние приближения, результаты опытной индукции, это типы, подражания реальным явлениям, то, что мы получаем первым, так сказать, грубым приближением, в предположении, что нет разнообразия в пространстве и времени. Поэтому, по Дельбефу, мы получаем два пространства: одно иде-

альное, геометрическое, другое эмпирическое, причем последнее есть вместе с тем и реальное.

Постулат возможности существования подобных фигур (аксиома Валлиса), эквивалентный постулату параллельных, выставляется Дельбефом как одно из основных свойств идеального пространства, как основной постулат *однородности* (гомогенности), который формулируется следующим образом:

“Всякий quantum можно рассматривать как уменьшенный или увеличенный образ большего и меньшего quantum “.

“Сказать, — замечает Дельбеф, — что пространство, которое мы населяем, евклидово, что фигуры могут быть вычерчены в различных масштабах, сводится к тому, чтобы сказать, что, если все измерения во Вселенной будут увеличены или уменьшены в одинаковом отношении, мы не будем в состоянии заметить этого изменения; это сказать: наша вселенная не имеет абсолютной величины, а только относительную”. Чтобы образно показать, что реальному пространству не присуще свойство гомогенности, Дельбеф заставляет фиктивное существо Мегамикрос совершать путешествие, изменяя свои размеры, переходя из нашего мира в мир лилипутов, но являясь в этом последнем не в роли Гулливера, а сокращаясь до размеров лилипута. Перелет Мегамикроса в это волшебное царство совершается во время его сна. Предположим, что в этой стране сохранена полная пропорциональность частей, что планета лилипутов представляет нашу землю во всех ее деталях, но только с радиусом, уменьшенным, скажем, в 20 раз.

Если эмпирическое пространство однородно, как геометрическое, то Мегамикрос никогда не догадается, что он совершил во время сна путешествие. Но на самом деле будет не так. На каждом шагу он будет встречаться с такими явлениями, которые совершенно ясно будут говорить ему, что он находится не на своей родине. Так например, если для утоления жажды на своей родине он выпивал ежедневно 4 стакана воды, то в стране лилипутов, он сейчас же заметит, что 4 лилипутовых стакана будет ему мало, ибо в то время как объем стакана уменьшился в $20^3 = 8000$ раз, поверхность тела его, а потому и скорость испарения, уменьшилась лишь в $20^2 = 400$ раз. Поэтому ему придется выпить не 4, а 80 стаканов.

Ясно, что при возвращении Дельбефа неевклидова геометрия не найдет себе места, ибо геометрическое пространство евклидово, а эмпирическое таково, что для него не может быть уже никакой геометрии. Но против Дельбефа можно выставить возражение, состоящее в том, что он опровергает однородность не пространства, а вселенной. Пространство получается только по исключении различного рода чисто физических свойств.

Мегамикрос должен был совершить прогулку в пространстве; как бесплотный геометрический дух, интересуясь только геометрическими фигурами. Если бы ему необходимо было создать более богатую обстановку, т.е. окружить эти фигуры вселенной, “подобной” настоящей, такой, что-

бы невозможно было уловить изменение, то необходимо было бы уменьшить в соответствующей пропорции молекулы, а в этом случае, как показал Лешаля, вычисления Дельбефа оказываются неверными.

Если Дельбеф отделяет геометрическое пространство от эмпирического и последнее признает реальным, то Лотце, тоже противник метагеометрии, отождествляет геометрическое с эмпирическим, противопоставляя ему реальное. У него тоже два пространства, причем второе еще менее походит на геометрическое, чем эмпирическое пространство Дельбефа. Оно, по выражению самого Лотце, также отличается от геометрического пространства, как интервал между двумя нотами отличается от прямой линии. Оно состоит во взаимоотношении между монадами, сознающими эти взаимоотношения, как модификацию их внутренних состояний. Таким образом это "второе" пространство таково, что для него какая-либо геометрия представляется невозможной. А так как первое пространство единственное, представляемое нами евклидовым, то отсюда вытекает невозможность других пространств, кроме евклидова.

Влияние Канта достаточно сильно в гносеологии, чтобы грубо реалистические и эмпирические взгляды могли бы долго выжить. Более глубокий анализ естественно приводит метагеометров к Канту. В основе гносеологических взглядов Канта лежит учение о пространстве и времени как априорных формах интуиции. По учению Канта пространство не дается нам опытом, а само предвеляет всякий опыт и, в противоположность учению Ньютона, не представляет собой находящееся вне нас вместилище вещей, [также как], в противоположность учению Лейбница, не является свойством этих последних, а представляет собой субъективную форму, находясь не вне нас, а внутри нас.

Аксиомы арифметики и геометрии даются интуицией и представляют [собой] синтетические суждения.

Защитники иного существования метагеометрии, чем логическое, должны были сделать уступки Канту. Сдаться ему вполне они не могли, ибо "чистый Кант" признавал только одну геометрию, т.е. ту евклидову геометрию, которая дается интуицией. Априорность пространств доказывалась Кантом аподиктичностью (т.е. характером безусловной необходимости) аксиом и, обратно, из априорности выводится аподиктичность аксиом.

Признавая другие геометрии, мы посягаем на аподиктичность аксиом и вместе с тем и на априорность пространства.

Поэтому следовало не во всем уступать Канту, необходимо было создать нового Канта или "полу-Канта".

Полукантианцем является Рассел, справедливо отделяющий гносеологическую точку зрения от психологической, смешения которых наблюдается у Канта. Отличая вопрос о субъективности пространства, как вопрос психологический, от вопроса об априорности, как вопроса гносео-

логического, Рассел исследует только последний, признавая только некоторые свойства пространства предваряющими опыт.

Но в то время, как для Канта пространство представляет [собой] голую интуицию, причем аксиомы геометрии даются только интуицией, по Расселу пространство предваряет опыт, как концепция, понятие, из которого вытекает логически ряд пространственных аксиом. Априорным пространством является только как концепция *формы внешности*, дающей возможность рассматривать объекты опыта, как находящиеся во внеположенности, одно вне другого. Все остальные признаки пространства не предваряют опыт, а являются элементами апостериорными, данными опытом.

Нельзя сказать, чтобы выводы априорных аксиом из концепции формы внешности можно было бы признать строгими и едва ли Рассел мог бы их уложить в строго логические схемы, построенные по правилам его формальной логики.

Аксиомами априорными являются прежде всего его зрительные аксиомы. Из аксиом метрических:

1) Аксиома свободного передвижения: пространственные величины могут быть перемещаемы без деформаций.

2) Аксиома измерений: пространство имеет конечное число измерений.

3) Аксиома расстояния: существует одно и только одно отношение между двумя точками.

Аксиома о параллельных является одной из апостериорных аксиом.

Нам представляется главным возражением против реальности неевклидовых геометрий то, что при эмпирическом взгляде Гельмгольца и полуэмпирическом взгляде Рассела остается необъясненной аподиктичность геометрических аксиом. Поэтому приходится или отрицать этот факт, или давать то объяснение якобы кажущейся аподиктичности аксиом, которое мы находили у Юма и недостаточность которого вполне доказана Кантом. Сколько бы раз ни повторялся опыт, он никогда не мог бы дать тот характер безусловной необходимости, который имеют геометрические аксиомы. Степень очевидности аксиомы о гомогенности пространств едва ли меньше, чем аксиомы об изогенности пространства, утверждаемой первой метрической аксиомой Рассела, и этот факт допускает единственное объяснение, что обе аксиомы имеют одно и тоже происхождение, одну и ту же гносеологическую ценность.

Как одну из аксиом, логически вытекающих из концепции формы внешности, Рассел выставляет аксиому измерений, требующую обязательно конечного числа измерений для пространства. Трехмерность же пространств, т.е. тот факт, что число измерений равно трем, Рассел считает за опытное данное. Вследствие того, что число измерений [есть] число целое, а эмпирическое пространство должно мало отличаться от действительно-

го, то трехмерность нашего пространства должна быть признана за достоверный факт.

Отсюда следует, что, например, геометрия четырехмерного пространства не может претендовать на того рода возможность, которая предоставляется геометрии Лобачевского. По Расселу и эмпирикам, евклидова геометрия может представлять и, вероятно, представляет приближение к "истинной" геометрии Лобачевского или Римана. Что касается четырехмерной геометрии, то она имеет исключительно логическое значение.

Нам кажется, что дело обстоит как раз наоборот. Если сознательная душевная жизнь не представляет всей полноты психической жизни, если сознание должно быть дополнено подсознанием, в котором психическими явлениями управляют те же законы, которые мы усматриваем в области, озаренной сознанием, то будет вполне естественно мыслить форму интуиции для расширенного опыта бессознательной психики тоже шире. Если сознанию доступна только гиперплоскость, или только поверхность четырехмерного пространства, то в глубине бессознательного может выступить интуиция четвертого измерения, не отвергающая трехмерную геометрию, а дополняющая ее.

Интуиция нам говорит, что то пространство, которое находится в нашем сознании, имеет три измерения, но она ничего не может сказать о четвертом измерении, которое оказывается под порогом сознания.

Совершенно иначе с неевклидовой трехмерной геометрией. Здесь прежде всего следует отвергнуть то, что утверждает в нашем сознании интуиция. Последняя дает нам не только факты, но вместе с тем и характер безусловной необходимости этих фактов.

Геометрия четырех измерений получается, если мы к основным геометрическим объектам: точке, прямой и плоскости присоединим еще гиперплоскость и дополним постулаты трехмерного пространства некоторыми постулатами, относящимися к четырехмерному. Найти последние нетрудно. Для этого следует усмотреть, каким образом совершается переход от постулатов двумерного к постулатам трехмерного пространства. Так, можно сказать: четыре точки, не лежащие в одной плоскости или на одной прямой, определяют гиперплоскость, и четыре гиперплоскости, не проходящие через одну плоскость или одну прямую, определяют точку.

Многие теоремы четырехмерного пространства могут быть построены непосредственно, как аналогоны соответствующих теорем трехмерного пространства. Примером ряда понятий-аналогонов может служить ряд простейших образов:

в пространстве
одного измерения — две точки,
двух — три прямые — треугольник,
трех — четыре плоскости — тетраэдр.

Следуя правилу, по которому переходили от одного аналогона к следующему, можем четвертым членом упомянутого ряда поставить:

в пространстве 4-х измерений,

четырёхмерное тело, образованное пятью гиперплоскостями — пентаэдроид.

Изучение пентаэдроида производится проектированием его в гиперплоскость, которую представляет все наше трёхмерное пространство.

Чтобы получить проекцию треугольника на прямую, надо взять три точки на прямой и отрезки ими образуемые,

тетраэдра на плоскости — четыре точки на плоскости и треугольники, ими образуемые.

Отсюда следует, что проекция пентаэдра получится, если взять пять точек в пространстве (гиперплоскости) и пять тетраэдров, ими образуемых.

Можно, следуя правилу аналогов, создать и механику четырёхмерного пространства.

По пути смелых обобщений можно идти и дальше, рассматривая время, как многообразие не одного, а двух измерений, мысля то, что относительно данного момента не представляет [собой] ни настоящее, ни прошедшее, ни будущее. В последнее время много шума наделали еще более смелые взгляды Минковского. В механике четырёхмерного пространства приходится, следуя аналогии трёхмерной механики, рассматривать при движении точки ее четыре координаты: x , y , z , u , как (функции времени t).

Движение будет происходить в гиперплоскости, т.е. в нашем трёхмерном пространстве, если x , y , z , u для всякого t связаны линейным соотношением:

$$Ax + By + Cz + Du + E = 0,$$

представляющими уравнение гиперплоскости.

Мы получим уравнение движения на некоторой гиперповерхности, если свяжем (x , y , z , u), общим уравнением:

$$\Omega(x, y, z, u) = 0 \quad (*)$$

Можно сделать такое предположение: наше пространство не гиперплоскость, а некоторая, отличная от нее гиперповерхность; для четырёхмерного пространства (а следовательно и для гиперплоскостей, в нем заключающихся) объемлющего эту гиперповерхность имеет место неевклидова геометрия. Источником ошибочного взгляда на наше пространство, как пространство евклидово, служит то, что мы некоторые кривые, мало отличающиеся от прямых, принимаем за прямые, приписывая последним те свойства, которые на самом деле присущи первым.

Воздерживаясь от возражений на эти взгляды, укажем, в каком направлении должно идти дальнейшее их обобщение. Для этого следует только уравнение (*) заменить более общим

$$\Omega(x, y, z, u, \tau) = 0$$

т.е. принять эту гиперповерхность деформирующейся в течение времени.

В этого рода пространстве и строится механика Минковского. Физические явления происходят в четырехмерном пространстве (x, y, z, u). Но, что представляет собой координата u ?

Этой координатой является время t , но только иное, чем упомянутое выше t .

В механике Минковского приходится различать абсолютное время t от собственного τ .

В этих воззрениях мы имеем не одно пространство, а особое сочетание пространство–время, находящееся в таком же отношении к геометрическому пространству и абсолютному времени, в каком у эмпириков–метагеометров неевклидово пространство находится в отношении к евклидову.

Возражения, упомянутые нами, остаются и здесь еще в большей силе.

Но воззрения Минковского имеют еще свой специальный недостаток: это чрезвычайная сложность и искусственность.

Если в них видеть нечто большее, чем одну геометрическую интерпретацию, то надо сознаться, что фигурирование четвертого измерения времени, наряду с однородными другими тремя измерениями, совершенно отличными от этого четвертого, уже достаточно для того, чтобы признать весь этот сложный аппарат хотя и гениально задуманным, но совершенно невероятным.

Литература к лекции II

На русском языке:

- 1) Кант. Критика чистого разума. Пер. Соколова. Спб. 1897.
- 2) Куно Фишер. История философии.
- 2) Челпанов. Проблема восприятия пространства. ч. II.
- 4) Богомолов. Современные воззрения на геометрию. Журнал Физико-химического общества. 1907.
- ⑤ Минковский. Пространство и время. "Физика". Спб. 1911.
- 6) Новые идеи физики. Закон относительности. Изд. "Образование".

На французском языке:

- 1) Russel. Les principes de geometrie trad. Cadenat. Paris. Gauthier Villars. 1901. (библиография).
- 2) Delboeuf. Prolegomenes de la geometrie et solution des postulats. Liege. 1860 и другие его сочинения (см. Russel).
- 2) Lechalas. Introduction a la geometrie generale.
- 4) Jouffret. Traite elementaire de geometrie a quatre dimensions. Paris. Gauthier Villars. 1903.
- 5) Bucher. Essai sur l'hyperespace. Paris. Alcan. 1905.

- 6) Brunschvigg. Les etapes de la philosophie mathematique. Paris. Alcan. 1912.

На немецком языке:

- 1) Rietmann. Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen. Werke. s. 255-268.
- 2) Erdmann. Die Axiome der Geometrie.

Лекция III. Психология и Математика

Может ли быть тесная связь между столь разнородными науками, как математика и психология? Я думаю, Вам покажется весьма странным мое намерение защитить в настоящей лекции следующий двойной тезис: математика, или, лучше скажу, будущая математика в своих доказательствах будет выполнять требования психологии, а будущая психология проникнется математикой.

Мы уже теперь довольно капризны к доказательствам. Мы ищем не *какое-либо* доказательство, а доказательство простое и изящное. Удовлетворить требованиям логики мало, необходимо принять во внимание и притязания психологии.

Изучая теорию функций комплексного переменного, мы интерпретируем геометрически комплексное переменное $z = x + yi$, представляя его точкой на плоскости с координатами (x, y) .

Изменение z мы представляем движением этой точки. Конечно, мы могли бы изучать комплексное переменное и чисто аналитически, не прибегая к геометрическому образу.

Теорему: "модуль суммы меньше или равен сумме модулей" мы можем доказать, не вводя геометрического представления комплексного числа, хотя всякий согласится [с тем], что эта теорема проще всего доказывается именно геометрически.

В настоящее время в анализе геометрический метод получил особенное распространение, главным образом благодаря идеям Ф. Клейна. В двух отделах чистой математики твердо установился геометрический характер мышления, в теории дифференциальных уравнений, благодаря теории характеристик, и в теории абелевых интегралов, благодаря исследованиям Клебша.

Абелев интеграл, т.е. интеграл от алгебраической функции можно представить в форме

$$\int F(x, y) dx,$$

где F — рациональная функция (x, y) , а y определяется алгебраическим уравнением

$$f(x, y) = 0$$

Говорят, что Абелев интеграл $\int F(x, y) dx$ определяется алгебраической кривой $f(x, y) = 0$, воображая точку (x, y) , определяемую координатами (x, y) . Введя этот геометрический язык, основную абелеву теорему можем сформулировать следующим образом:

“Если пересечь кривую $f(x, y) = 0$ некоторой деформирующейся кривой $\varphi(x, y) = 0$, то сумма интегралов первого рода

$$\sum \int_{(x_0, y_0)}^{(x_i, y_i)} F(x, y) dx,$$

относящихся к точкам пересечения этих кривых, сохраняет при деформировании постоянное значение”.

Не представляет труда освободить эту теорему от ее геометрической оболочки, не представляет труда и все вытекающие из нее теоремы переложить с геометрического языка на чисто алгебраической и можно продолжать мыслить, двигая вперед теорию абелевых интегралов, отказавшись от всяких геометрических образов.

От всех этих образов, с чисто логической точки зрения, мы не имеем никакой выгоды. Скажу более, есть известная невыгода. Здесь имеется своего рода грех против логики построения. С этой точки зрения анализ должен быть свободным от геометрических образов, черпая из одного определенного источника свои методы, но не забегая в области геометрии, которую анализ должен предварять.

Кроме того, легко видеть, что те образы, которые служат нам помощью при введении упомянутых выше геометрических интерпретаций есть, в сущности говоря, логически недозволенные образы. Пересекая кривую, определяющую абелев интеграл, какой-либо другой кривой, мы говорим и воображаем себе точки пересечения, как в том случае, когда эти точки вещественны, так и в том случае, когда они мнимы. Причина того бессилия логики, о котором говорит Пуанкаре, указывая, как на одну из побед, на выведение с помощью 27 уравнений результата: “единица есть число”, чисто психологическая.

Интуиция, а не формальная логика с логическими обозначениями представляет [собой] те крылья, на которых мы улетаем в самые отдаленные области абстракции. Эти крылья дает, в форме вышеупомянутых геометрических интерпретаций, психологическое чутье. Бессознательно наше мышление движется по линии наименьшего сопротивления. Но то, что мы теперь делаем бессознательно, в будущем может послужить предметом сознательного научного исследования и после может дать результаты, на основании которых мы будем предпочитать один путь другому, сознательно считаться с экономией мыслительной работы.

Почему нам так трудно идти исключительно логическим путем и почему мы чувствуем такое облегчение, когда параллельно умозрению раскладываются и соответствующие образы?

Отрешаясь от интуиции, мысль уподобляется человеку, который должен говорить со связанными руками и ногами. Способности души так тесно между собой связаны, что невозможно привести в действие одну, не затрагивая другой, и, стесняя одну, мы подвергаем стеснению и другие.

Психологическое исследование доказательств с точки зрения их восприимчивости имеет значение не только для преподавания, но имеет и научное значение.

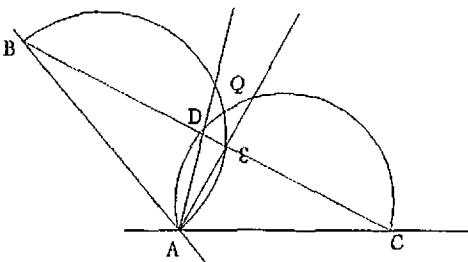
Жизнь коротка и наука должна позаботиться о том, чтобы в кратчайшее время и легчайшим путем были усвоены ее результаты для того, чтобы у ученого хватило времени не только на изучение сочинений других, но и на движение вперед научного исследования.

Но психологии суждено не только изыскивать средства, ведущие к большей усвояемости доказательств, но и пути, где, представлялось бы меньше вероятности ошибиться. Психология математических ошибок ждет психологов-исследователей; важным представляется даже один фактический материал, который должен послужить основанием для теоретических выводов, имеющих значение для психологии не только математического мышления, но и мышления в более широком смысле. Известные математические софизмы прежде всего дают такой материал.

Обыкновенно удовлетворяются только их опровержением. Но следует взглянуть на них несколько глубже и исследовать их происхождение.

Возьмем для примера следующий известный софизм. На сторонах AC , AB тупоугольного треугольника ABC опишем, как на диаметрах, полуокружности. Точки пересечения D , E с третьей стороной BC соединим с A . Углы ADB и AEC , как опирающиеся сторонами на диаметры – прямые. Откуда заключаем, что на прямую BC из точки A можно провести два перпендикуляра AD и AE .

Источник ошибки заключается в неправильности чертежа. Легко обнаружить, что прямая CB как раз проходит через точку Q пересечения полуокружностей и, конечно, в этом случае все наше доказательство о существовании двух перпендикуляров рушится.



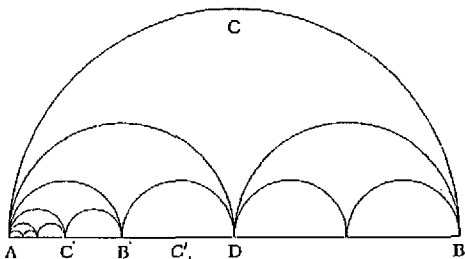
Ошибка произошла оттого, что мы употребили “недоказанный” чертеж, были слишком доверчивы к интуиции. Интуиция дает нам идеальные точки, прямые и плоскости, дает простейшие свойства, но более сложные взаимоотношения она определяет только в общих чертах. Она говорит

о пересечении кругов прямой СВ, но она ничего не говорит о том, что это пересечение будет именно в точке Q. Другой род софизмов основывается на смещении чисто интуитивных элементов с их чувственными образами, например, в смещении точек с очень малыми отрезками или кругами очень малых радиусов. Сюда относится ряд софизмов, указываемых Клейном, грубым представителем которых является следующий.

Взяв полуокружность ABC радиуса $=1$, получим для ее длины значение $=\pi$. Построим на ее радиусах как на диаметрах другие две полуокружности AC_1B_1 , B_1C_1D .

Для суммы их длин будем иметь значение опять $=\pi$. Поступая с этими полуокружностями так, как мы поступали с ACB, полуокружности диаметров $=\frac{1}{4}$ AC_1B_1 , AC_2B_1 , $B_1C_2B_1$, $B_1C_3B_2$, B_2C_4B , сумма длин которых $=\pi$. Продолжая таким образом дальше, доказываем, что длина полуокружности ABC равна длине кривой, образованной полуокружностями, построенными на частях AB, как бы малы ни были эти части. Но с уменьшением их диаметров кривая эта приближается к прямой AB, откуда заключаем о равенстве длины ACB (полуокружности) диаметру, т.е. приходим к явно абсурдному результату.

Конечно, ошибка кроется в утверждении, что предел исследуемой, составленной из полуокружностей, кривой равен AB, которое предполагает отождествление полуокружностей бесконечно малых радиусов с их диаметрами, бесконечно малыми отрезками



AB. Это ошибка не чистой интуиции, а грубого чувственного образа, ибо чистая интуиция при указанной выше операции приводит нас всегда от полуокружностей к полуокружностям, никогда не делая скачка к отрезку.

Однако чувственный образ, например тот, который мы получаем, вычерчивая упомянутые полуокружности чернилами, после некоторого числа операций дает уже не полуокружность, а маленькое чернильное пятно, т.е. тот образ, который отвечает бесконечно малому отрезку AB.

Такой же источник имеет тот неправильный взгляд, который рассматривает прямую состоящей из точек. Как бы мы ни делили прямую, мы никогда не получим точек. Прямая является только носителем точек. Она неизменно и однозначно связана с непрерывным рядом точек или пунктуалом, ей принадлежащим.

Если дан пунктуал, то дана и прямая, и если дана прямая, то вместе с тем дан и пунктуал.

Определить, в чем состоит эта "принадлежность" в логических терминах, конечно, невозможно.

Такого же рода заблуждение – отождествление отрезка прямой с прямоугольником бесконечно малого основания.

В младенческую эпоху исчисления бесконечно малых эти ошибки выступают у Кавальери в его “исчислении неделимых”. Криволинейная трапеция бесконечно близкими прямыми $\parallel$ ОУ разбивается им на “неделимые”, на бесконечно малые криволинейные трапеции, при вычислении предела суммы которых он совершенно правильно заменяет их входящими прямоугольниками. Но последние он уже совершенно неправильно отождествляет с отрезками прямых $\parallel$ ОУ и считает за определение суммы неделимых подсчет этих отрезков.

Этого рода ошибки чаще всего встречаются в рассуждениях философов-нематематиков, менее привыкших к чистой геометрической интуиции.

Интересным психологическим исследованием является исследование тех математических ошибок, которые происходят при самом процессе мышления. Такие математические ошибки [есть] не что иное, как погрешности памяти или внимания.

Вот схема математических ошибок довольно общего типа.

Объекту А приписывается признак α : означим это положение через (А, α). Внимание отвлекается от А к В, затем В приписывается признак β , отвлекаются от В к С, вспоминают (В, β). Ошибка состоит в том, что вместо (В, β) берут (В, α).

Но под этот тип еще не подходят все математические ошибки. В ошибках доказательств мы имеем следующий факт: посылка (А, α) заменяется другой, (А, β), где β не приписывался еще ни одному объекту, но по своему сходству или по смежности может легко смешаться в памяти с α . Наиболее частой и трудно избегаемой ошибкой является та, при которой β представляет более общий случай, чем α . Положение (А, β) сперва утверждается при некоторых, часто только подразумеваемых условиях. Об этом в дальнейшем ходе доказательства совершенно забывается и положение (А, β) берется во всей его общности.

Я говорю, что эти ошибки в математике весьма часты и трудно избегаемы, так как, если бы математик всякий раз упоминал об ограничениях, которые должны подразумеваться, он сделался бы слишком скучным, и, утруждая внимание отклонениями от основной темы, мог бы проиграть в ясности. Так, математики говорят в нескольких главах о функциях, подразумевая их непрерывными, хотя об этом ограничении упоминается только на первой странице первой главы. О том, что функция принадлежит к типу аналитических функций иногда не говорят совсем, считая такое предположение вполне естественным.

Ясно, что предпринимающий дальнейшие исследования читатель может совершенно забыть об этих ограничениях, в особенности, если применение положений, годных только при этих ограничениях, не только не приво-

дит его ни к каким противоречиям, но даже открывает новое широкое поле исследований.

К этим типам математических ошибок следует присоединить еще третий: *ошибки в обозначениях*.

Какой-нибудь объект A обозначается знаком a , другой B знаком b . Если между a и b есть сходство, то память может спутать и отнести b к A , а к B . Причина смешения может быть в восприятии: один знак можно принять за другой. Можно, например, греческую букву α , принять за латинское a . В то время как указанные выше два типа ошибок представляют [собой] ошибки памяти, ошибки последнего типа во второй своей форме представляют [собой] уже ошибки внимания.

Все эти психологические исследования относятся к тому пути, по которому движется мысль в поисках логических связей между различными положениями.

Но возможно другого рода исследование. Возможно сделать сами узлы логической сети, сами положения предметом психологического исследования. То, что делает возможным доказательство в смысле убеждаемости в той или другой истине, это психологический факт очевидности некоторых положений.

При этом эти положения обладают различной степенью очевидности. Так, геометрические аксиомы менее очевидны, чем чисто логические, и среди геометрических аксиом есть более и менее очевидные.

В высокой степени интересным является то, что устранение движения как средства доказательства конгруэнтности приводит к включению в систему аксиом положений, обладающих весьма невысокой степенью очевидности в сравнении с другими аксиомами той же системы.

Так, в системе аксиом Гильберта находится в качестве аксиомы положение о конгруэнтности треугольников, имеющих равные углы и прилежащие стороны. Бесспорным является независимость психологических свойств аксиом от логических [свойств]. Существуют положения очевидные, например, равенство прямых углов, которые могут быть доказаны в том смысле, что они могут быть связаны с системой очевидных положений, принятых за аксиомы. С другой стороны, те положения, которые обладают пониженной степенью очевидности, как, например, знаменитая 11-я Аксиома Евклида, являются независимыми от более очевидных аксиом.

Но довольно о психологии математики. Психологии предстоит довольно завоеваний в математике, если даже ограничиться только вышеизложенным. Посмотрим, каковы завоевания математики в психологии. Скажем несколько слов о математической психологии. Прежде всего коснемся психофизических формул. Это еще не математическая психология.

Это скорее преддверие ее. Психофизическая формула связывает не психологические элементы между собой, а психологические элементы со связанными с ними определенным образом физическими элементами.

Первая психофизическая проблема была поставлена математиками XVIII столетия в связи с задачей о безобидности игр.

Ограничиваясь для простоты случаем двух игроков, мы будем иметь следующее условие безобидности игры:

Если a, b ставки игроков, p, q их вероятности проиграть партии, то необходимо иметь

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \text{ или } aq - bp = 0$$

Называя $aq + (-b)p$, т.е. выигрыш, умноженный на вероятность выигрыша плюс проигрыш со знаком минус, умноженный на вероятность проигрыша *математическим ожиданием игрока*, можно сформулировать условия безобидности игры еще следующим образом:

Математические ожидания игроков равны нулю.

В частном случае, когда $p = q$, то $a = b$. Это условие безобидности игр, строго не доказуемое, приводит в большинстве случаев к следствиям, вполне согласным с указаниями здравого смысла.

Но существуют и такие случаи, которые заставляют усомниться в этом основном принципе безобидности игр.

Это те случаи, когда возможный проигрыш одного игрока ничтожен в сравнении с его состоянием, между тем как тот же проигрыш приводит его противника к разорению.

Возьмем богача с состоянием в 1 000 000 рублей и бедняка с состоянием в 10 рублей. Если мы заставим их играть в орлянку со ставкой 10 руб. для каждого, то при равной вероятности для обоих условие безобидности игры будет соблюдено, но вряд ли здравый смысл сочтет такую игру безобидной. По мнению Даниила Бернулли и других, подобная несообразность проистекает от того, что выигрыш и проигрыш оцениваются не числом выигранных или проигранных рублей, а тем нравственным удовлетворением α или неудовлетворением β , которое мы получаем от выигрыша или проигрыша. Таким образом предложено было ввести в теорию вероятностей некоторый *психический элемент*, чувство удовольствия или неудовольствия от приобретаемого или теряемого *физического* имущества. Принцип безобидности игр при этом получает следующую поправку: a, b следует заменить α, β , $aq - bp$ следует заменить $\alpha q - \beta p$, так называемым *нравственным ожиданием*. Входящие сюда величины α, β следует выразить через a, b , т.е. следует решить следующую *психофизическую* задачу:

В какой зависимости находятся нравственное имущество и отвечающее ему физическое имущество?

Математическая формулировка этой задачи будет следующей:

Обозначая через x физическое имущество, через y нравственное и полагая

$y = \varphi(x)$ найти функцию φ .

Психологический анализ дает нам некоторые общие свойства функции $\varphi(x)$.

Наиболее простой и согласной с этими данными является формула, данная Даниилом Бернулли

$$y = k \lg \frac{x}{a}, \text{ где } k, a - \text{ постоянные.}$$

Эйлеру принадлежит открытие другого психофизического закона, выражающего зависимость между *высотой тона* и *числом колебаний*, ему отвечающих.

На основании психологического опыта, который учит, что мы непосредственно ощущаем только отношение числа колебаний, но не абсолютные их разности, и что одинаковым отношениям чисел колебания отвечают одинаковые абсолютные различия в ощущении, Эйлер выводит логарифмическую зависимость:

$$y = k \lg \frac{x}{a}$$

между y – высотой тона и x – числом колебаний, ему соответствующим. Вебер установил при помощи психофизиологических измерений аналогичный закон, выражающий зависимость между ощущением давления и тяжестью, ему отвечающей.

Этот закон распространен исследованиями Фехнера на различного рода ощущений: зрительные, звуковые и осязательные. Для всех родов ощущений имеет место *закон Вебера–Фехнера*:

Ощущение выражается логарифмом раздражения.

Фехнер высказывает мысль о существовании универсального *основного психофизического закона*, обнимающего, как частные случаи, упомянутые законы Даниила Бернулли, Эйлера, Вебера и Фехнера, по которому *между физическими и телесными функциями существует логарифмическая зависимость*.

Но одна психофизическая формула не может быть источником математической психологии.

Только установив ряд психологических законов, выражаемых математическими формулами, можно получить цепь математических теорем.

Известная математическая психология Гербарта и начинается с установки таких законов. Но эти законы устанавливаются не путем наблюдений или измерений, а с помощью спекулятивных рассуждений, при этом недостаточно убедительных.

Основанием психической статики служит учение о *суммах задержек* представлений. Герbart рассматривает представления как объекты, находящиеся во взаимодействии, причем равновесие, к которому последнее приводит, устанавливается путем взаимной задержки интенсивностей у обоих представлений.

Простейшим случаем является случай противоположных представлений.

Если из двух представлений A, B напряженностей a, b ($a > b$) более слабое B не реагирует на A , стремящееся вытеснить B , тогда A уничтожит B , задержав таким образом b из суммы их напряженностей. Но B реагирует на A ; сумма задержек, которая должна быть распределена между A, B , т.е. не только B , но и A , должна потерять часть своей напряженности. Задержка должна быть распределена между A и B , при этом на более сильное, в виду большей с сс стороны реакции, должна пасть меньшая часть. Герbart предполагает, что части, на которые делится задержка, обратно пропорциональны напряженностям представлений, так что из A берутся $\frac{b^2}{a+b}$, из B $\frac{ab}{a+b}$ и

A остается в сознании с силой

$$a - \frac{b^2}{a+b}, \text{ а } B \text{ с силой } b - \frac{ab}{a+b} = \frac{b^2}{a+b}$$

Рассуждения Гербарта, имеющие по внешности математический характер, изложены неясно и неубедительно, в особенности, для читателя-математика. Скачок от факта, что если $x > y$, то $\varphi(x) < \varphi(y)$ к пропорции $x:y = \varphi(x):\varphi(y)$ не представляется еще смертельным для его теории. Но гораздо хуже ничуть не оправдываемое опытом и, в сущности говоря, произвольное положение о необходимости задержки $= b$.

Ученики Гербарта заменяли это основное допущение другими столь же произвольными. По Виттштейну от A задерживается $\frac{b^2}{a+b}$, от B $\frac{a^2}{a+b}$.

Гораздо более убедительна основная формула психической динамики, или учения о погружении задержки за порог сознания. Герbart дает формулу для усиления интенсивности представления при его возникновении в сознании, откуда выводится формула забывания.

Герbart доказывает то, что можно вполне признать за психологический факт: усиление представлено не пропорционально времени, но что оно асимптотически приближается к полной напряженности по следующему закону: бесконечно малое приращение напряжения, отвечающее дифференциалу времени, тем меньше, чем ближе представление к полной его силе, т.е. обратно пропорционально разности между полной напряженностью и напряженностью в данный момент. Это выражается формулой:

$$\beta(a-x)dt = dx.$$

Уравнение это даст:

$$\frac{dx}{a-x} = \beta dt,$$

откуда, имея в виду, что при

$$t = 0 \dots x = 0,$$

выводится, что

$$x = a(1 - e^{-\beta t})$$

Для получения формулы забывания нужно положить $a = 0$. Начальные же данные: $t = 0$, $x = \bar{a}$, где $\bar{a}$ первоначальная сила представления. В этом случае имеем:

$$x = \bar{a}e^{-\beta t}$$

Может быть, Вас очень удивит, если я вскрою Вам в одной из математических дисциплин, получивших полное право гражданства, предпосылку математической психологии или психофизики.

Среди математических дисциплин совершенно особняком стоит теория вероятностей, соединяя строго математический метод с неочевидными и не допускающими строго математического обоснования предположениями.

В ее основе лежит определение “вероятности”. Вероятность определяется как отношение числа благоприятных случаев к числу единственно возможных. Но, во-первых, это определение содержит ложный круг, ибо оно годно только в том случае, когда эти единственно возможные и благоприятные случаи равновозможны, т.е. обладают одинаковой степенью вероятности. А во-вторых, некоторое, может быть и темное понятие о вероятности мы имеем еще до установки этого “математического” определения вероятности, и мы создаем теорию вероятности, именно интересуясь вероятностью как известным понятием, а не числом. Указанное в определении число есть только “мера вероятности”.

Вероятность — отношение числа благоприятных случаев к числу единственно возможных — это не определение вероятности, а основная аксиома или, лучше сказать, постулат. Но что такое вероятность? Здесь следует отметить две точки зрения: *субъективную* и *объективную*. С первой точки зрения, вероятность это мера нашей веры в появление определенного события. Тогда теория вероятности представляется главой математической психологии.

С объективной точки зрения, вероятность получает смысл только в силу закона больших чисел, состоящего в том, что чем больше производится испытаний, тем отношение числа испытаний, при которых событие имело место, к числу всех испытаний $\frac{\mu}{v}$, ближе к мере вероятности, т.е. отношению числа благоприятных случаев к числу единственно возможных $\frac{m}{v}$.

Этот закон не доказывается математически, он дается опытом или выводится как следствие из стремления природы к разнообразию. Именно только благодаря ему и получает теория вероятностей объективный смысл. В популярных книжках по теории вероятностей этот закон часто смешивается с теоремой Якова Бернулли и изучающему кажется, что ма-

тематика может чудесным образом из вышеприведенного определения вероятности логическим путем выудить законы мироздания.

Теорема Бернулли вовсе не доказывает этот закон, а только указывает степень вероятности, с какой можно утверждать, что разность между двумя дробями $\frac{\mu}{v}$ и $\frac{m}{v}$ меньше заданного числа.

Но в силу закона больших чисел исчисление вероятностей имеет безусловно объективное значение, если мы имеем в виду заключение относительно частоты повторяемости события при большом числе испытаний.

Какое объективное значение может иметь исчисление вероятности одного события? Данное опытом мы всегда мыслим в категории причинности. Если актуальной причины мы не в состоянии усмотреть и событие относится только вследствие нашего незнания к типу случайных, то, тем не менее, мы мыслим его вероятность, т.е. как его причину мы ищем основания его существования в совокупности не действительных, но возможных событий.

Так как при отсутствии благоприятных случаев такую "причину" следовало бы принять равной нулю, а при всех возможных случаях, благоприятствующих событию — бесконечности, то правильнее было бы называть объективной вероятностью не число $\frac{m}{n}$, отношение числа благоприятных случаев к числу единственно возможных, а $\frac{m}{n-m}$ отношение числа благоприятных случаев к числу неблагоприятных.

Но откуда мы можем вывести ту или другую меру для объективной вероятности? Из закона больших чисел это не выводится, ибо он ничего не говорит относительно единичного испытания. Остается только психологический опыт. Этот последний дает субъективную вероятность, и для оправдания меры объективной вероятности следует сделать переход от первой ко второй. При этом в силу психофизического закона нельзя считать их равными, они должны быть связаны логарифмической зависимостью.

Если оценить объективную вероятность $\frac{m}{n-m}$, то субъективная будет не $\frac{m}{n-m}$ и не $\frac{m}{n}$, а

$$k \lg \frac{m}{(n-m)a}, (*)$$

где a — то малое значение $\frac{m}{n-m}$, при котором у нас не остается никакой веры в наступление события.

Если психологический анализ дает формулу (*) для субъективной вероятности (*), то объективная оказывается пропорциональной $\frac{m}{n-m}$. Психологический анализ не может доказать формулы (*), но он указыва-

ет, как в случае, формулы Даниила Бернулли, ряд свойств для этой функции вполне, согласных с теми, которые указываются этой формулой.

Так как

$$k \lg \left[\frac{1}{a \left(1 - \frac{m}{n} \right)} \right] = \frac{k}{a} \frac{m}{n} + \frac{k^2}{2a^2} \frac{m^2}{n^2} + \dots$$

то при $k = a$ дробь $\frac{m}{n}$ будет первым приближением для субъективной вероятности.

Литература к лекции III

На русском языке:

- 1) Обреимов. Софизмы. Изд. Павленкова.
- 2) Д. Мордухай-Болтовской. Психология математического мышления. Вопросы философии и психологии за 1908.
- 3) Буняковский. Теория вероятностей.
- 4) Гербарт. Психология.
- 5) Вундт. Душа человека и животных.
- 6) Вундт. Физиологическая психология, Москва, 1880-81.

На французском языке:

- 1) Delboeuf. Elements de psychophysique. Paris. Germer-Bailliere. 1883.
- 2) Klein. Conférences.

На немецком языке:

- 1) Fechner. Psychophysik. Leipzig. Breitkoff. 1889.
- 2) Drobich. Mathematische Psychologie.

Лекция IV. Метафизика и Математика.

В двух областях знания выступает идея бесконечности. В той, которая в силу особой строгости своих рассуждений считается образцом науки и в той где полет фантазии часто становится на место тщетно стремящегося к наиболее близкому сердцу мыслящего человечества неизвестному.

В математике мы говорим о бесконечно большом и бесконечно малом. В метафизике проблема актуальной бесконечности – это тот фокус, к которому сходятся лучи умозрения. На бесконечность можно взглянуть с двух сторон. Прежде всего со стороны *конечного*, рассматривая тот процесс постоянного возрастания, который ведет нас к бесконечности, никогда не приводя к последней, но известным образом ее характеризуя. Можно рассматривать бесконечное в становлении, количество способное расти выше всякого предела, про которое можно сказать словами Пуанкаре, что оно, перейдет все границы, но нельзя сказать, что оно их уже перешло¹. Одним словом, можно изучать бесконечно большие и вместе с тем бесконечно малые величины, и математика даст нам и беско-

нечно большие и бесконечно малые в анализе, т.е. в исчислении бесконечно малых.

Но на бесконечность можно взглянуть с противоположной стороны. Можно изучать ее, так сказать, *на самом месте*, глядя из бесконечности в конечное и изучая его сравнением с последним. Это изучение актуальной бесконечности, бесконечности, уже перешедшей через все границы.

Под анализом разумеют дробление целого на части для его изучения. Трудно познать целое непосредственно: необходимо предварительное разложение его на части более простые и более доступные для изучения, чем это целое. В этом смысле употребляется термин: „химический анализ”. Неизвестное сложное вещество для изучения разлагается на простейшие элементы.

В математическом анализе величина дробится на бесконечно малые элементы, кривая — на бесконечно малые дуги, площадь — на бесконечно малые площади.

Синтез состоит тогда в соединении элементов в целое. В математическом анализе при определении величины целого за анализом всегда следует синтез, целое дробится на малые части, определяются выражения для последних, после чего остается *суммировать* эти части, что достигается синтезом.

В исчислении бесконечно малых имеет место, как синтез, так и анализ, но первым всегда является анализ и там лежит центр тяжести всего метода, почему исчисление бесконечно малых и получило название „Анализа”.

Метод исчисления бесконечно малых скрытым образом содержится в главе элементарной геометрии „Измерение площади круга”.

Для определения этой последней, мы вписываем в круг правильный многоугольник и, удваивая число сторон последнего, получаем бесконечный ряд:

$$S_6, S_{12}, S_{24}, S_{48} \dots$$

площадей таким образом получаемых многоугольников.

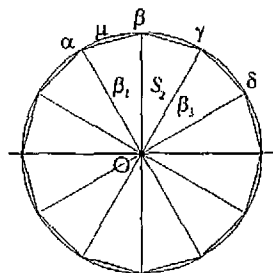
Предел членов этого ряда и будет [являться] площадью круга.

Каждая из площадей представляется суммой площадей $\beta_1, \beta_2 \dots$ треугольников $O\alpha\beta, O\gamma\delta \dots$ на которые с помощью радиусов, проведенных от вершин многоугольника к центру круга, можно разделить его.

Представим эту методу в такой форме, чтобы резко выступали моменты анализа и синтеза.

1) Разделив окружность на бесконечно великое число частей и соединя точки деления с центром, круг делится на бесконечно малые секторы.

Можно написать, что S (площадь круга) равна сумме этих секторов σ ,



$$S = \sum \sigma_i$$

или, что тоже, $S = \lim \sum \sigma_i$, ибо $\sum \sigma_i$ при уменьшении σ_i не меняется.

Круг разбили на сектора, но непосредственное суммирование секторов является невозможным. Необходимо найти такую сумму $\sum \beta_i$, чтобы предел $\sum \beta_i$ равнялся $\sum \sigma_i$ и чтобы в то время, как $\sum \sigma_i$ непосредственно найти невозможно, $\lim \sum \beta_i$ легко находился бы.

2) Таким образом изыскивают такие β_i , что $\lim \sum \beta_i = \lim \sum \sigma_i$.

Это операция дифференциального исчисления. По основной лемме

$$\lim \sum \beta_i = \lim \sum \sigma_i$$

если β_i, σ_i эквивалентны бесконечно малые т.е. такие, что $\lim \frac{\beta_i}{\sigma_i} = 1$.

В настоящем случае эквивалентны бесконечно малый сектор и вписанный в него треугольник.

Можно доказать, что площадь круга можно рассматривать не только как предел площадей вписанных или описанных многоугольников при удвоении числа сторон, но вообще как предел безразлично правильных или неправильных многоугольников при увеличении числа сторон и при уменьшении этих последних. Последнее выражение следует понимать следующим образом:

От многоугольника со сторонами:

$$\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_n^{(1)}$$

переходим к многоугольнику со сторонами

$$\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_n^{(2)}$$

причем, во-первых $n^{(2)} > n^{(1)}$, во-вторых наибольшая из величин $\alpha_1^{(1)} \dots \alpha_n^{(1)} > \alpha^{(2)}$ наибольшей величины из $\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \dots, \alpha_n^{(2)}$. От $\alpha^{(2)}, \alpha_2^{(2)} \dots \alpha_n^{(2)}$ переходим к $\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)} \dots \alpha_n^{(3)}$, где $n^{(3)} > n^{(2)}$; $\alpha^{(3)} < \alpha^{(2)}$ и т.д. Можно сказать, что площадь круга рассматривается, как предел бесконечно великого числа бесконечно малых.

Если σ_i площадь секторов $O\alpha\mu\beta$, то за β_i можно принять площади треугольников $O\alpha\beta$.

3) Остается произвести синтез. Найти

$$\lim \sum \beta_i$$

Это операция интегрального исчисления.

По идее Кавальери, задачу об определении площади, ограниченной одной или несколькими кривыми, стараются свести к определению площади так называемой криволинейной трапеции, т.е. площади ACDB, ограниченной

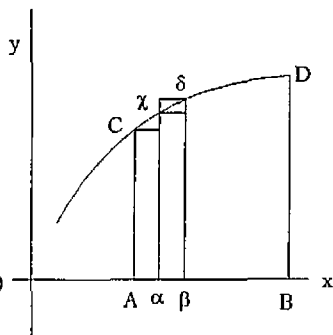
1) другой кривой CD:

$$y = f(x)$$

2) осью OX

3) двумя прямыми AC и BD $\parallel$ OY
на расстояниях $x=a$ и $x=b$

ACDB делят на элементы $\sigma_i = \alpha\beta\gamma\delta_i$,
разделив AB на равные части и проведя из
точек деления прямые $\alpha\gamma, \beta\delta, \dots \perp OX$.



Тогда площадь криволинейной трапеции

$$S = \sum \sigma_i = \lim \sum \sigma_i.$$

Если мы из точек C... γ ... D проведем прямые, параллельные OX, то получим ряд *входящих* и *выходящих* прямоугольников, площади которых обозначим через $\underline{\sigma}_i$ и $\overline{\sigma}_i$.

Но $\underline{\sigma}_i = \alpha\beta \cdot \underline{h}_i$, $\sigma_i = \alpha\beta \cdot \overline{h}_i$, обозначая через h_i высоту входящего, а через $\overline{h}_i$ выходящего прямоугольника.

$$\frac{\underline{\sigma}_i}{\sigma_i} = \frac{\underline{h}_i}{\overline{h}_i}$$

и в пределе, когда число делений AB бесконечно велико $\lim \frac{\underline{\sigma}_i}{\sigma_i} = 1$, откуда
следует эквивалентность $\underline{\sigma}_i$ и $\overline{\sigma}_i$.

$$\text{Но } \underline{\sigma}_i \leq \sigma_i \leq \overline{\sigma}_i$$

$$1 \leq \frac{\sigma_i}{\underline{\sigma}_i} \leq \frac{\overline{\sigma}_i}{\underline{\sigma}_i}$$

откуда будет следовать также и

$$\lim \frac{\sigma_i}{\underline{\sigma}_i} = 1 \text{ и } \lim \frac{\overline{\sigma}_i}{\sigma_i} = 1$$

т.е. σ_i и $\underline{\sigma}_i$, σ_i и $\overline{\sigma}_i$ эквиваленты. Можно написать

$$S = \lim \sum \underline{\sigma}_i$$

$$\text{или } S = \lim \sum \overline{\sigma}_i$$

т.е. можно рассматривать S , как предел суммы площадей, входящих или выходящих прямоугольников. Вводя символ определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j)(x_j - x_{j-1}).$$

можно написать, формулу

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Следует подчеркнуть, что идея интегрального исчисления гораздо шире, чем то ее частное осуществление, которое мы имеем в теории пределов этого типа сумм.

Не только само понятие интеграла, но и целый ряд теорем, относящихся к основам интегрального исчисления, могут быть рассматриваемы, как частные случаи более общих. Если интегральное исчисление выбирает ту сумму, предел которой представляет $\int_a^b f(x)dx$, то вычисление этого предела приводится к решению задачи, обратной задаче дифференциального исчисления, т.е. к нахождению функции по ее производной.

От анализа переходим к *теории множеств*. Каким образом изучаются бесконечные множества? Прежде всего следует заметить, что возможно изучать только такие [множества], для которых можно найти всю совокупность признаков, их вполне определяющих.

Всякое множество задается генетически, т.е. дается способ образования этого множества. Так как множества могут изучаться только с помощью сравнения, исследованием общих и необщих элементов, то для изучаемых множеств выставляется еще другое условие. Множество должно быть таково, что всегда имеется средство определить, принадлежит ли ему данное число или нет. Такое множество называется *определенным*. Исследуются только определенные множества.

Логическим определением равенства двух конечных целых чисел является однозначное соответствие между единицами. Это свойство может иметь место и для бесконечных множеств. Эквивалентностью (понятием, соответствующим равенству двух конечных множеств) будет однозначное соответствие между элементами этих множеств (т.е. каждому элементу одного множества отвечает один и только один другого и обратно).

Характерное свойство бесконечного множества состоит в том, что оно эквивалентно своей части.

Возьмем для примера бесконечный ряд натуральных чисел:

1, 2, 3, 4... n ...

Ряд 2, 3, 4... будет составлять его часть. Но эквивалентность обоих множеств очевидна, ибо возможно установить следующее соответствие между элементами

$$(1.2), (2.3), (3.4) \dots (n.n+1).$$

Для конечных же множеств, без сомнения, свойство это не может иметь место.

Это характерное свойство обыкновенно и служит математическим определением бесконечного множества.

Среди множеств особенное значение имеют так называемые *счетные* множества. Эти множества эквивалентны ряду натуральных чисел:

$$1, 2, 3 \dots n,$$

множества, элементы которых могут быть подвергнуты нумеровке, могут быть представлены в форме бесконечного ряда

$$a_1, a_2, a_3 \dots a_n \dots$$

Такое множество представляет из себя совокупность всех рациональных чисел. Чтобы убедиться в том, что рациональные дроби могут быть в действительности пронумерованы, следует только посмотреть следующую таблицу:

В этой сетке каждый квадратик отвечает дроби, знаменатель которой — номер строки, а числитель — номер столбца.

Легко убедиться также, что совокупность всех алгебраических чисел, т.е. чисел, определяемых уравнением:²

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

где a_i целые числа, представляет счетное множество.

Этот факт имеет огромное значение в математике, ибо дает возможность простейшим путем доказать существование бесконечного множества трансцендентных чисел.

Для этого следует только заметить, что, когда дается бесконечный ряд вещественных

чисел $u_1, u_2, u_3 \dots$, то между каждой парой из этих чисел u_{i-1} и u_i можно вставить бесконечное множество чисел.

Располагая в подобный ряд алгебраические числа, что возможно, так как эти числа образуют счетное множество, мы можем найти бесконечное множество чисел не алгебраических, т.е. трансцендентных. Можно получаемый таким образом результат выразить (правда, в грубой и не строгой форме) так: число всевозможных вещественных чисел в бесконечно раз больше числа алгебраических чисел.

Таким образом уже, так сказать, в первой главе теории множеств устанавливается два типа множеств:

	1	2	3	4	
1	1	3	6	10	
2	2	5	9		
3	4	8			
4	7				

Счетное – таково, например, множество, образуемое всей совокупностью алгебраических чисел.

Continuum – совокупность всех чисел, причем можно считать эквивалентной ему совокупность всех вещественных чисел в конечном промежутке (0, 1).

Предположим, что вселенная бесконечна. Мы получим тогда космологический пример: звезды будут представлять счетное множество, а точки мирового пространства *continuum*.

Рассмотрим теперь так называемое *линейное* множество, элементы которого могут быть представлены бесконечным множеством точек прямой. Сгущение этих точек в различных местах будет различно.

Точкой сгущения, или *предельной* точкой, будет такая, около которой будет бесконечное число точек множества. Исследование множества по точкам сгущения дает прежде всего понятие *производного* множества, образованного из точек сгущения, и затем понятия о *замкнутом* и о *совершенном* множествах. Замкнутое – это [множество], которое содержит свою производную, совершенное [множество] ему тождественно.

Простейшим (первого порядка) будет то множество, для которого нет точек сгущения, т.е. $P' = 0$.

Затем следует простейшее (простейшие второго порядка) то, для которого $P'' = 0$ и т.д.

Совокупность элементов, общих двум множествам P, Q образует наименьший делитель $D(P, Q)$ этих двух множеств. Нетрудно видеть, что производное множество всегда замкнутое, так что

$$D(P', P'') = P''$$

$$D(P'', P''') = P''' \text{ и т.д.}$$

$$\text{вообще } P^{(n)} = D(P', P'' \dots P^{(n)} \dots)$$

Среди множеств существуют и такие, что ряд производных может быть бесконечно продолжен. Изучение этого рода множеств и приводит к *трансфинитным* числам, к установке теории бесконечных чисел, различающихся между собой, как числа конечные и подвергающиеся некоторым операциям, соответствующим тем, которые производятся над конечными числами.

Для этих множеств

$$D(P', P'' \dots P^{(n)} \dots)$$

т.е. общий наибольший делитель бесконечного ряда производных можно рассматривать как производную бесконечного порядка

$$P^{(\infty)}$$

Каждое из конечных чисел: 1, 2, 3... n , служивших знаками P , можно получить из 1 последовательным прибавлением 1 или с помощью, так называемого, *первого принципа* образования.

Производное множество может служить также средством различения множеств с $P^{(\omega)}$ отличным от 0.

Возьмем последовательные производные от $P^{(\omega)}$:

$$P\omega' P\omega'' \dots$$

Может случиться, что один из членов этого рода нуль, но может случиться, что это не имеет места.

Тогда рассматриваем

$$(P\omega)\omega = D(P\omega', P\omega'' \dots)$$

Уже здесь мы видим необходимость обобщения числа, в рассмотрении бесконечных чисел, различных между собой, отвечающих $P\omega$, $P\omega'$, $P\omega''$ и т.д., из которых первое можно обозначить символом ω , а другие, получаемые с помощью опять первого принципа: $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$...

$(P\omega)\omega$ будет отвечать $\omega+\omega=2\omega$. Переход от конечных чисел к ω и от ω к 2ω производится не в силу первого принципа, а совершая, так сказать, скачок (через бесконечность) – в силу *второго принципа*. В то время как первый принцип дает число, которому предшествует определенное число, второй принцип дает число, предшествующее которому нельзя указать.

Так ω больше всех конечных чисел, а из конечных чисел нельзя указать наибольшее.

Совершенно таким же образом строятся числа

$2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots n\omega \dots \omega^2, \omega^2 + 2\omega \dots n_0\omega^m + \dots n_{m-1}\omega + n_m, \dots \omega^{\omega} \dots$ и т.д. все трансфинитные числа, получаемые первым и вторым принципом, образующие 1-ый класс трансфинитных чисел.

От трансфинитных чисел 1-го класса нетрудно перейти к трансфинитным числам 2-го класса. Первое из них будет число отвечающее $P^{(\omega)}$, общему наибольшему делителю всех P , отвечающих трансфинитным числам 1-го класса. Получается оно с помощью III-го принципа и т.д.

Мы видим теперь, каким образом изучение множества приводит нас к актуально-бесконечному числу.

Совершенно в таком же отношении, в каком находится метаматематика к гносеологическим предпосылкам, утверждаемым полным или частичным эмпиризмом, теория трансфинитных чисел находится к учению об актуальной бесконечности. Мы должны повторить, что, если было бы строго доказано, что актуальной бесконечности нет, что мир не бесконечен, что время не бесконечно и т.д., учение о трансфинитных числах ничуть не было бы поколеблено, если только ряд постулатов, лежащих в его основе, представляет систему совместимых положений.

Теория комплексных чисел не приводит к противоречию и представляет один из наиболее плодотворных отделов математического анализа, хотя комплексное число не имеет реального субстрата.

Но изучающему современное учение о математической бесконечности, конечно, трудно удержать свою мысль от полета из области чистой математики в область метафизики. Бесконечность имеет две стороны, одна обращена к математику, другая к философу и, конечно, философски настроенный математик пожелает осмотреть этот предмет со всех сторон.

Спор о реальном существовании актуальной бесконечности – это довольно старый метафизический спор.

Проблема, существует ли бесконечное число или бесконечное пространство, имеет, конечно, огромное космологическое значение, ибо представляется, что решение этой проблемы в отрицательном смысле приводит к необходимости признания конечности вселенной. Самым сильным аргументом против бесконечности вселенной в пространстве и во времени издавна считались неразрешимые парадоксы бесконечности. Невозможность существования актуального бесконечного числа доказывают вскрытием противоречий, якобы в нем заключающихся, таким образом посягают не только на реальное, но и на математическое, или логическое, существование бесконечности.

Финитисты (т.е. защитники существования исключительно конечных величин) указывают на то, что ∞ одновременно представляет ряд абсурдных свойств, оно [есть] куб, квадрат и половина самого себя – оно поэтому оказывается больше или меньше самое себя.

Но легко видеть, что подобные возражения отпадают, если вспомнить, что они основываются на тех свойствах, которые присущи только конечным числам. Квадрат целого числа a^2 больше самого a , это верно для $a=2, 3, 4, \dots$ и ничто нас не обязывает признать это верным для $a=\infty$.

Все доводы, за невозможность существования бесконечного числа, – говорит Кантор, – неверны, вследствие того, что они приписывают наперед бесконечному числу все свойства конечных чисел, что представляет уже противоречие, так как если бесконечное число существует, то только при условии обладания свойствами иными, чем конечные числа. Оно должно составлять род *нового числа* в противоположность конечному. Вводя в математику бесконечные актуальные числа, мы, конечно, должны признать неравны бесконечности, хотя бесконечность и означает одним символом ∞ .

Мерсенн возражает против существования бесконечной линии на том основании, что она должна была бы содержать бесконечное число аршин и сажень, причем сажень в три раза больше аршина, откуда следовало бы, что одна бесконечность больше другой, чего, говорит Мерсенн, быть не может. Что бесконечности все должны быть равны, Мерсенн и другие выводят из того, что так как бесконечное число наибольшее из всех чисел, то может быть только одно бесконечное число.

Но упомянутая выше теория трансфинитных чисел Кантора совершенно иначе смотрит на бесконечное число.

Трансфинитное число ω вовсе не наибольшее и не последнее из чисел конечных, наоборот, первое среди чисел бесконечных.

Совершенно верно указывает Кутюра на то, что все аргументы, направленные в продолжение нескольких веков против возможности бесконечного зиждутся на следующих двух ошибочных принципах:

- 1) Число бесконечное – наибольшее из всех чисел;
- 2) Все бесконечные числа равны.

Ошибочность второго принципа сознавал Лейбниц, первого – Кант.

Опровергнуть возражения против актуального бесконечного числа еще не значит доказать реальность этого числа. Это не значит, что этим доказана возможность существования трансфинитного числа небесных тел. Кантор расширяет область вещественных целых чисел, пополняя конечные числа, которым присущи некоторые свойства, например, что целое больше части, другими числами, которым не присуще уже это свойство, которые определяются меньшим числом независимых постулатов. Упомянутые выше опровержения доказывают только то, что эти последние не находятся между собой в противоречии. Но то же можно сделать и для комплексных чисел, но, конечно, было бы опрометчиво выводить отсюда существование совокупности предметов, определяемых комплексным числом.

Судьба трансфинитных чисел вовсе не находится в зависимости от решения, к которому придет метафизика относительно актуального бесконечного числа. Трансфинитное число осталось бы в математике даже в том случае, если бы удалось чудом найти строго математическое доказательство невозможности реальной бесконечности или если бы был вполне строго доказан закон Дюринга: закон *определенной численности*. По этому закону, число событий, происшедших по настоящей момент – число определенное и ограниченное, несмотря на то, что позади нас лежит целая вечность. Точно так же, число мировых тел в пространстве в данный момент [есть] число определенное и конечное, хотя пространство безгранично. Из этого закона Дюринг выводит, что мировой процесс должен иметь абсолютное начало во времени.

Возражения против существования бесконечно большой величины, например, бесконечно большого пространства или времени, обыкновенно основываются на невозможности актуального бесконечного числа, на невозможности бесконечного числа кубических сажений и бесконечного числа лет. При этом предполагается, что всякая величина, как конечная так и бесконечная, характеризуется числом. Но возможна и такая точка зрения, и ее весьма основательно защищает Мильхауд, по которой бесконечной величине нет соответствующего числа. Державин в оде “Бог”, находит весьма удачный эпитет бесконечному Богу, говоря, что в нем „числа и меры” нет. Не равенство целого части является характерным признаком беско-

нечной величины, а именно ее неизмеримость, невозможность определения ее числом.

Существуют и непосредственные выступления против бесконечности, носящие метафизический и гносеологический характер. Следует заметить, что в доказательствах гносеологического типа уже с самого начала обсуждения вопроса о том, существует ли идея бесконечности в нашем уме или нет, противники бесконечности выставляют против себя смертельный аргумент.

Могут ли они говорить о бесконечности, о том существует ли она в нашем разуме или нет, если по их мнению, они не имеют никакой идеи о бесконечности?

В гносеологических возражениях все вертится на том, что единственный путь, могущий привести нас к идее бесконечности — это процесс постоянного возрастания.

Идея о бесконечном может получиться только через прибавление к пространству, занимаемому нашей солнечной системой, такого же пространства и т.д. Но этим дается только никогда не прекращающийся процесс, и предположение актуальной бесконечности является невозможным, так как влечет за собой предположение законченности этого процесса.

Но бесконечность постигается *вне* этого процесса.

Вот что говорит Гегель о бесконечности. Рассудок, размышляя вообще о бесконечности, держится по преимуществу количественного бесконечного процесса. Но эта форма процесса выражает собой не истинную, а *дурную* бесконечность, которая не превышает понятия „долженствования” и постоянно остается в сфере конечного.

Спиноза называет эту бесконечность мнимой. Поэты, например Галлер и Клопшток, нередко пользовались этим представлением, чтобы наглядно изобразить бесконечность природы и самого Бога.

У Галлера мы встречаем знаменитое описание бесконечности Бога, где он говорит: „Я слагаю огромные числа, целые горы миллионов, я нагромождаю время на время и миры на миры, и когда, с этой страшной высоты, туманенный, я снова возвращаюсь к Тебе, это громадное число умноженное в тысячу раз, не составляет части Тебя”. К этому описанию дурной бесконечности Галлер прибавляет прекрасное заключение: „Я откидываю все эти числа и Ты весь передо мной” и в самом деле, истинное бесконечное лежит только за пределами конечного и чтобы привести его к сознанию, необходимо оставить бесконечный процесс.

Возражают, что идея бесконечности предполагала бы бесконечный разум. Но в таком наивном возражении на разум смотрят как на какую-то урну, которая для вмещения бесконечного числа шаров сама должна быть бесконечной.

Помощь актуальной бесконечности идет оттуда, откуда, казалось бы, менее всего ее можно было бы ожидать.

Космология, вырастающая из точного естествознания, имсющая свои корни в астрономии, возвышает свой голос за бесконечность вселенной во времени и в пространстве.

Спор о бесконечности вселенной ведется главным образом на логической и гносеологической почве; аргументы те, о которых мы говорили уже выше – решение проблемы о бесконечности вселенной в положительном или отрицательном смысле, становится в зависимость от того, признается ли актуальная бесконечность свободной от противоречия, познаваема она или нет.

Но против бесконечности вселенной существуют возражения, так сказать, чисто астрономического характера. Упомянем одно из них. Еще в 1826 году знаменитый астроном Ольберс сделал следующее замечание: „Если число тел Вселенной, испускающих тепло и свет бесконечно, то каждая точка пространства должна получить бесконечное число световых и тепловых лучей, и, поэтому, должно быть бесконечно [много] тепла и света”. Отсюда делается вывод, что число звезд не бесконечно велико, а конечно. Но при этом остается и другой выход, именно: предположение о поглощаемости световых и тепловых лучей межзвездным пространством.

Кант в споре о бесконечности вселенной занимает, так сказать, нейтральную позицию. Он считает, что два положения:

а) вселенная имеет начало во времени и границы в пространстве и
б) вселенная безначальна и безгранична в пространстве, – представляют так называемые антиномии.

Как первое положение (тезис), так и второе (антитезис) могут быть с равным успехом доказаны в предположении, что мировое целое, т.е. полный ряд явлений, в нем дан. Но как то, так и другое положение должны быть в действительности отвергнуты, поскольку мир сам по себе не существует. Мир, каков он во времени и в пространстве, – это только наше представление; мир как он [существует] в себе, (вещь в себе) недоступен нашему восприятию.

Мир во времени и в пространстве, это только ряд последовательных обзоров явлений. Часть вселенной в пределах нашей солнечной системы – это тоже только продолжение ряда восприятий. Говорить о бесконечном мире, значит признавать возможность беспредельного продолжения того же ряда восприятий.

Говорить о конечном мире, значит указывать границы этому ряду.

Мы не будем исследовать кантовское разрешение антиномий. По нашему мнению, ни тезис, ни антитезис не являются доказанными. Тезис доказывается логически. Кант основывается на невозможности актуального бесконечного числа. Об этого рода доказательствах мы уже говорили.

Но антитезис доказывается отнюдь не чисто логическим путем, а с помощью гносеологических исследований, т.е. учения о субъективности времени и пространства.

Литература к лекции IV

На русском языке:

- 1) Больцано. Парадоксы бесконечного. "Матезис". Одесса.
- 2) Дедекин. Непрерывность и иррациональные числа. Перев. Шатуновского. "Матезис". Одесса. 1909.
- 3) Васильев. Введение в анализ.
- 4) Жергалкин. Трансфинитивные числа. Москва. 1907.

На французском языке:

- 1) Carnot. Reflexions sur la methaphisique du calcul infinitesimal. Paris. Gauthier Villars. 1881.
- 2) Cauchy. Sept lecons de physique generale.
- 3) Conturat. L'infini mathematique (богатая библиография).
- 4) Evellin. Infinic et quantite. Gernier Baillere. 1880.
- 5) Borel. Theorie des fonctions. Paris. Gauthier Villars. 1898.

На немецком языке:

- 1) Cohn. Geschichte des Unendlichkeitsproblems. Leipzig. Engelmann. 1896.
- 2) H. Cohen. Das princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte. Berlin. 1883. (богатая библиография).
- 3) Du Bois-Reymond. Allgemeine Functionen theorie.
- 4) G. Cantor. Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre (einmathematisch-philosophischer dersuch in der Lehre des Unendlichen). Leipzig. Teubner. 1883. См. также его статьи в Mathematische Annalen t. V, XV, XVII, XX, XXI, Journal de Crelle: t. LXXXVII, LXXXIV, Acta Mathematica t. VII.
- 5) Geissler. Die Grundsatzte und das Wesen des Unendlichen in der Mathematikund Philosophie. Leipzig. Teubner. 1902.

ПСИХОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ.

Введение.

Современная эмпирическая психология, идя по пути других эмпирических наук, кропотливо собирает факты, чтобы не иначе, как опираясь на них, получить общие выводы, относящиеся к различным явлениям психической жизни. При этом очевидно, какое значение должны иметь для психологии всевозможные монографии, относящиеся к различным, порой весьма специального характера, явлениям.

Эти монографии являются часто драгоценными хранилищами фактических данных. Но этим не ограничивается их значение для более общего характера вопросов психологии.

Изучая какую-либо специальную душевную способность, например, талант художника или поэта, мы встречаемся с более яркими и более дифференцированными проявлениями различных психических способностей, чем те, которые мы можем заметить, наблюдая психическую жизнь с более общих точек зрения. Изучая, например, фантазии поэта, мы, правда, изучаем фантазии со специальной окраской, но бесспорно, что в этом изучении мы черпаем и более глубокие познания о фантазии вообще, так как поэзия – это именно та область, где эта способность является в наибольшем своем блеске.

Во французской психологической литературе мы находим отдельные психологии специальных способностей: Внимания, Памяти, Страсти (Рибо), Смеха, Трусости (Дюгас), Радости и Грусти (Дюма) и т.д., затем психологии различных профессий: музыканта (Дорьяко), художника (Арпеа) и т.д.

Нам представляется не лишенной интереса и значения и психология ученых разного рода, среди которых особенного внимания заслуживает *психология математика* и главным образом не психология характера, а *психология мышления*.

В виду совершенно специфического характера математического мышления и математического таланта, такого рода монография была бы в особенности интересна.

Чем ум математика отличается от ума другого ученого? Может ли всякий даровитый ученый стать хорошим математиком? Может ли способность к математике считаться мерилом ума?

Тот факт, что такие светила, как Гете и Дарвин, сознавались в полной своей неспособности к математике, указывает на то, что способность к математике не всегда присуща даже гениальным людям, что между мате-

математическим умом и нематематическим есть существенная разница, исследование которой представляет большой интерес для психологии.

Предлагаемый нами краткий труд на эту тему отнюдь не представляет собой работы вполне в духе французской психологической школы. Мы не имеем возможности собрать достаточно фактов. В то время, как поэты и художники о себе пишут много и порой даже слишком много, математики при своей объективности в противоположность субъективности поэтов, говорят о себе очень мало, а чаще даже совсем не говорят.

От недостатка фактических данных, а равным образом от того, что исследуемая область заключается в области на наш взгляд еще мало исследованной, а именно в психологии мышления, выводы наши могут местами показаться несколько смелыми и значительно выходящими за рамки намеченной нами темы.

Мы позволяем себе назвать психологию мышления малоисследованной, несмотря на широко развитую теорию ассоциаций, так как последняя, по нашему мнению, скорее относится к свободному течению представлений, к мышлению образами, но не к отвлеченному мышлению понятиями математика, и едва ли она дает разгадку тому, каким образом математик может с большей или меньшей скоростью и с большей или меньшей удачей вызывать в мысли длинную цепь умозаключений, ведущих его к намеченной цели. Нам кажется, что при всех этих недостатках предлагаемая в настоящей статье попытка может иметь некоторое значение главным образом потому, что она написана специалистом-математиком. На месте фактов, собранных от многих лиц, у нас стоит самонаблюдение, которое, конечно мы не претендуем считать равносильным тем богатым фактическим материалам, которые даются в вышеупомянутых французских монографиях. Мы льстили себя надеждой, что может быть эта еще не вполне совершенная попытка вызовет другие, более удачные, вызовет собирание более полного фактического материала и более строго на нем обоснованных выводов.

§1. Закулисная работа математической мысли.

В математическом мышлении следует различать два процесса: *постановку проблемы и ее решение*.

Первый процесс вовсе не сокращается до произвольного выбора. Научным математическим мышлением не может быть названо последовательное решение ряда уравнений, произвольно нами написанных. Взятая для решения проблема не выбирается, а скорей разыскивается. Научную ценность она приобретает только тогда, когда она полезна для науки.

Под пользой следует разуметь отнюдь не практическую жизненную пользу, а значение проблемы для стройности и простоты всей науки, как синтез различных дисциплин в том смысле, что решение этой пробле-

мы может создать большую гармонию между различными ее частями указывая, что

1) некоторые истины представляют только частные случаи более общих,

2) что части, на первый взгляд, грубые и разнородные, имеют между собой интимную связь и, наконец,

3) что к уже открытым истинам через ряд новых проблем открывается более простой и скорый путь.

Конечно, для успешной постановки подобного рода проблемы главным необходимым условием является творческое воображение. Оценка проблемы предполагает иногда как бы наперед ее решение. Для того, чтобы утверждать, что данное положение служит звеном, связующим более кратким путем два положения, следует знать это положение.

Относительно положения: "все В суть D", мы не можем утверждать, что его связует положение "А есть В и А есть С", раньше чем не узнаем, что все "D суть С". Таким образом, уже при самом выборе проблемы иногда необходимо делать *гипотезу*, необходима не точная цепь силлогизмов, а воображение.

Процесс разыскания решения поставленной проблемы начинается с составления *гипотетического плана ее решения*, разбивки ее на несколько частных вопросов, решение которых, по нашему расчету, приводит нас к решению интересующей нас проблемы. Так, при решении геометрической задачи на определение какой-либо геометрической величины через другие, мы рассчитываем прийти к определению неизвестного через последовательное определение других неизвестных. Приступая к решению первого вопроса, а затем, в случае удачи, второго и всех остальных вопросов, мы первым делом *прибегаем к памяти, стараясь подвести его, как частный случай, под уже известные нам проблемы*.

Только в случае неудачи, которая может явиться следствием как недостаточного запаса познаний, так и отсутствия вполне подходящих методов на современной стадии развития науки, мы приступаем к самостоятельному поиску решения. Если мы теперь проанализируем эти поиски, *то увидим, что закулисная сторона точного мышления носит совсем другой характер, чем тот ряд теорем в готовом и законченном виде, каждый член которого не колеблясь тянет последующие*.

Точный разум,двигающей эту цепь теорем, повернут спиной по направлению своего движения; он видит тот путь, который прошел, но не видит того, который ему следует пройти. Один он шел бы действительно вперед; из посылки он вполне точно выводил бы заключение, но он никогда бы не знал, куда идет, он не мог бы решить ни одной наперед поставленной задачи. Решение какой бы то ни было задачи, не подходящей прямо под общий случай, делающий решение чисто механическим, требует помощи *гипотезирующего и колеблющегося разума*. Мы делаем ряд попыток, более или менее удачных, при нахождении решения. Конечно, при

выборе различных путей для решения мы не предоставлены вполне игре воображения. Главным двигателем здесь является *аналогия*. Если нам приходит в голову та или иная попытка, так именно потому, что она приносила успех в аналогичных случаях. Что же касается степени аналогии данного случая со случаем известным, то эта аналогия может быть весьма поверхностной. Если нам дано какое-либо дифференциальное уравнение, то, отчаявшись подвести это уравнение под уже известные типы, мы стараемся проинтегрировать его, применяя различные методы, применявшиеся к интегрированию других аналогичных дифференциальных уравнений. Но очевидно, что те аналогии, которые заставляют блуждающую мысль остановиться на той или другой методе, часто не идут дальше внешнего вида предложенного уравнения. Вполне естественно, если математику в тот момент, когда он убедится, что уравнение:

$$(a_0x + b_0)y^{(n)} + (a_1x + b_1)y^{(n-1)} + \dots (a_{n-1}x + b_{n-1})y'y' + (a_nx + b_n)y = 0$$

не подходит ни под один из известных ему типов дифференциальных уравнений, придет на мысль попытка интегрировать это уравнение подстановкой $y=e^{ax}$, как линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Конечно, такая мысль придет только вследствие чисто внешней аналогии формы этих двух весьма различных по своим свойствам уравнений.

У опытного математика не будет детального проведения этой попытки, приводящей, конечно, к неудаче. Такая мысль пробежит в один момент поле его сознания, так как, при привычной ему быстроте в этой области соображения, неудача ему будет почти очевидна. Но начинающий воспроизведет все выкладки.

Возьмем более сложный пример. Известно, что эйлеровское уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{R(y)}},$$

где $R(x)$ полином 4-ой степени имеет алгебраический интеграл. Обобщение эйлеровских исследований на случай, когда $R(x)$ полином какой угодно степени, может иметь интерес и значение для науки. Бесспорно, что не один исследователь, до развития теории ультра-эллиптических интегралов, делал попытки обобщения, при этом конечно он вполне доверялся построенной им гипотезе о возможности существования алгебраического интеграла у обобщенного эйлеровского уравнения. Приступая затем к интегрированию такого уравнения, этот исследователь не обладал другим оружием, кроме заключения по аналогии, и конечно первой мыслью у него должна была бы явиться попытка применения к тому же уравнению тех методов, которые употреблял Эйлер для своего уравнения; эта попытка не увенчалась бы успехом, так как при производстве выкладок обнаружилось [бы], что успех метода Эйлера зависит от сокращения некоторых членов, которые не сократятся в общем случае, и поэтому в известном пункте цепь рассуждений обрывается. В этом примере мы видим не только ошибоч-

ность предположения, относящегося к методу решения предложенной проблемы, но и ошибочность сделанного предположения относительно результата, который придает главным образом ценность исследуемой проблеме.

Подобное описание механизма закулисной работы математической мысли согласно с показаниями математиков.

“В разговоре о роли воображения в научных трудах, — говорит Либих, — один великий французский математик выразил мнение, что *большинство математических истин приобретены не дедукцией, а воображением*”.

Цитируя это место, Рибо¹ справедливо замечает, что этот математик мог бы сказать “все”, не сделав ошибки.

“Всякое математическое открытие — сперва гипотеза, которую следует доказать, т.е. привести к общим принципам, предварительно установленным; перед решительным моментом рациональной проверки она только воображаема”...

Мы со своей стороны должны сделать только следующую поправку: эта гипотеза не только воображаема, она выбрана не пустой игрой воображения, она есть плод или аналогии, как мы упоминали выше, или индукции, как гипотеза эмпирической науки.

“Рассуждение, — говорит также Рибо, — это только средство контроля и проверки; оно преобразует труд воображения в следствия — допустимые и наличные. Если предварительно не воображали, метод без цели и без употребления, так как невозможно рассуждать о совершенно неизвестном.

Даже когда кажется, что проблема движется одна к решению одним рассуждением, воображение беспрестанно входит под формой ряда попыток...”.

§2. Синтез и анализ.

Обыкновенно различают две методы разыскания решений математических проблем: *анализ и синтез*.

Дюамель в “Методах умозрительных наук”, подвергая строгой критике различные определения анализа и синтеза, останавливается на следующем описании анализа:

1-я форма анализа. Метод для доказательства гипотез:

“Когда требуется найти доказательство данному предложению, то сначала ищется — может ли оно быть выведено как необходимое следствие из принятых предложений, и если так, то оно само должно быть принято и будет, следовательно, доказано. Если нельзя открыть, из каких известных предложений оно может быть выведено, то отыскивают, из какого неприятого еще предложения оно могло бы быть выведено, и тогда вопрос сводится к доказательству истины последнего предложения. Если оно может выводиться из принятых предложений, то будет признано истинным, сле-

довательно, и предложенное; если же нет, то нужно искать, из какого не принятого еще предложения оно могло бы быть выведено, и вопрос опять приводит к тому, чтобы доказать истину этого последнего. Таким образом следует продолжать до тех пор, пока не будет достигнуто предложение, признанное истинным, и тогда истина предложенного будет доказана. Отсюда видно, что метод, названный анализом, состоит в установлении цепи предложений, начинающейся с того, которое желают доказать и кончающейся известным; цепь составляется при этом такими предложениями, из которых каждое, начиная с первого, должно быть необходимым следствием последующего. Откуда происходит, что первое является следствием последнего и поэтому столь же истинно, как последнее" §5.

Анализ Дюамель называет *методом приведения*. Роль гипотезирующего разума здесь состоит в установлении следующих гипотез, требующих проверки:

1) Предположения, которое следует доказать. Это *основная гипотеза*, в которую мы не перестаем верить во все время анализируя.

2) Целого ряда гипотез, относящихся к каждому из предложений, которые мы хотим включить в цепь доказательства, которые во время процесса анализируя отстраняются одна за другой по причине или их ложности, или бесполезности для нашей цели, т.е. для нахождения связи предложенной гипотезы с известной, вплоть до того момента, когда удастся найти полный ряд подходящих промежуточных положений.

Отмечаемая Дюамелем другая форма анализа, названная "аналитической методой решения проблем", состоит в сведении предложенной для решения проблемы к другой, так что при решении ее первая будет решена, этой другой к третьей и т.д., пока не достигнем такой, решение которой известно §28; все в конце концов переходят в первую. Для того, чтобы судить о том, что та проблема, к которой сводится данная, проще нее, надо иметь хоть какое-либо представление о том, как она может быть решена, т.е. необходима гипотеза, к ней относящаяся, необходимо иметь доказательства, хотя бы спорные, для некоторых положений.

"Синтез, другая метода математического исследования, состоит, по Дюамелю, в том, что из предложений, принятых истинными, выводятся другие, как необходимые следствия, из этих новые и таким образом далее до тех пор, пока не достигнем данного, которое в этом случае само признается истинным". §38. Это, по мнению Дюамеля, метод *редуктивный*. Таким образом и в синтезе устанавливаются гипотезы для проверки:

1) *основная*, относительно истинности высказанной теоремы.

2) гипотеза, что данную известную теорему можно взять за исходный пункт, и что выводимые из нее другие теоремы идут в надлежащем направлении.

Относительно второй формы синтеза, указываемой Дюамелем, мы можем сделать совершенно то же замечание, как о второй форме анализа.

С какой методы свойственно математическому уму начинать свои исследования?

Вообразим себе, что мы перенесены с завязанными глазами в какое-либо неизвестное нам место, где мы видим ценные сокровища, которые мы желаем постепенно перетащить в свой дом. Должны ли мы искать тотчас дорогу домой или ждать, когда мы опять тем же образом попадем домой и начать поиски уже оттуда? Я думаю, что покуда нам не снимут с глаз повязки, мы не больше будем иметь надежды перенести к себе эти сокровища, чем в том случае, если бы мы их видели во сне. Если мы в конце концов благополучно решаем проблемы и к высказываемым нами теоремам приставляем доказательства, так это именно потому, что наши глаза не завязаны непроницаемой повязкой. До того, как лучи строгого и ясного познания осенят наш мозг, мы все-таки видим, хотя видим весьма мало и в густом тумане. Мы не можем сказать, начинается ли мысль с альфы или с омеги? Но мы наверное знаем, что она вначале указывает, хотя бы гипотетично, на основании самых поверхностных аналогий, что здесь альфа, а там омега, что высказанную теорему или заданную проблему можно связать именно с этим данным и уже известным положением или проблемой. Затем ошупью мы начинаем разыскивать и промежуточные звенья.

“За синтезом, — говорит Дюамель, — важная невыгода, что он не указывает причину, заставляющую выбирать пункт отправления, так и всякое из последовательных следствий”.

Поэтому может показаться, что мысль, чувствуя себя более колеблющейся при гипотезе, всегда предполагает начинать с более верной методы, именно с анализа. Но то же обвинение ложится и на анализ.

Откуда мы можем знать, что то положение, к которому приводится данное, ведет нас ближе к цели? Верно, что в синтезе гипотетична точка исхода, но нет сомнения, что в этом случае направление самого движения более определяется, чем в анализе. Ведь мы здесь находимся в том же положении, как в том случае, когда соединяем две точки линиями. В анализе же такая точка только одна, это то положение, к которому подыскиваем доказательство, и направление линии здесь находится еще в большей неопределенности, чем в первом случае.

Нам представляется совершенно ошибочным мнение Дюамеля, по которому “синтетический метод совершенно неприложим для открытия способа решения предложенных проблем, что им можно открывать только случайные проблемы”. Если бы это было так, то такой метод не имел бы никакой цены, как метод исследования, за ним оставалось бы значение только методы изложения и, притом, методы крайне искусственной. Ведь, как мы выше заметили, случайных проблем, не находящихся в связи с целым, наука не признает; мы не должны предаваться в науке свободному течению представлений. Из данной теоремы можно выводить бесконечную массу следствий, но вряд ли это можно признать за научное мышление.

На такой точке зрения относительно синтеза стоит пор-рояльская логика, считающая анализ за метод разрешения, а синтез за метод составления или метод доктрины.

Совершенно справедливо говорит Арно (Дюамель), что доказывать происхождение данного лица от Людовика Святого можно двояко: указывая его отца, деда и т.д. вплоть до Людовика (анализ), или, начиная с Людовика, переходить к его детям, внукам и т.д. вплоть до данного лица (синтез). Мы прибавим, что таким образом не только доказывают, что данное лицо – потомок Людовика Святого, но и разыскивают генеалогию данного лица. Для доказательства происхождения данного лица от Людовика, причем, конечно, до начала разыскания, должно быть какое-либо основание подозревать это высокое происхождение; не идут только в одном направлении от данного лица к его предкам, но стараются подробнее изучить и генеалогию Людовика, и именно в том направлении, в котором могут встретить какие-либо намеки на возможность происхождения фамилии данного лица от потомков Людовика. Вернее всего, что мысль поступает аналогично тому, как мы поступаем, желая продеть нитку в иголку: мы двигаем как ниткой, так и иголкой. Движение идет с обоих концов: мы попеременно и приводим и редуцируем.

Из известного положения, представляющегося нам подходящим, мы выводим следствия, обещающие привести нас к цели, неизвестное или недоказанное приводим к другим, тоже недоказанным, и так продолжаем, пока оба наши движения не столкнутся на одном общем положении и не обратятся в непрерывное течение.

§3. Сводятся ли математические способности к трудолюбию, соединенному с хорошей памятью?

Успех, более или менее быстрый, при разыскании решения задачи зависит от числа неудачных попыток и от большей или меньшей скорости отдельных проверок. Как то, так и другое находится в зависимости от памяти и содержания последней, т.е. в зависимости от более или менее сильных воспроизводительных способностей.

Отсюда следует, что хорошая, математическая способность, предполагает сильную память и причем, главным образом, на предметы того типа, с которым имеет дело математика. Следует заметить, что очень полное содержание памяти может до известной степени компенсировать слабость последней. Если много знающему трудно вспомнить какую-либо определенную методу, то в его распоряжении остается целый выбор других методов, из которых хотя бы одна придет ему на ум, и в этом случае может столько же выиграть как сильная, но бедная память, принужденная оставаться при одной в ней содержащейся методе.

Таким образом, на первый взгляд может показаться, что познание может вполне заменить способности или же, что последние, поскольку они касаются математики, сводятся только к большему или меньшему интересу к науке, соединенному с трудолюбием. К такому мнению приходит Шопенгауэр². Доказывая рядом фактов и подтверждая своими метафизическими соображениями наследование от матери интеллектуальных свойств, а от отца характера, он отмечает поразительный факт, [который], по его мнению, лишь видимо противоречит его теории.

Оказывается, что в то время, как биографии поэтов и философов на стороне Шопенгауэра, математики и представители ближайших к ней наук дают факты другого рода, якобы говорящие [в пользу] наследования ума от отца. Существуют целые семьи Бернулли, Кассини, Гершелей, Струве, в которых математические способности идут по мужской, а не по женской линии.

Шопенгауэр объясняет это тем, что “математика требует прежде всего прилежания и настойчивости”. Это—то и наследуется вместе с характером от отца, а что сверх этого, это столь ничтожно, что для этого особого наследования не требуется.

Против такого взгляда говорят те факты, что существуют лица, обладающие достаточным прилежанием и, тем не менее, с трудом усваивающие математические истины. Если объяснять это недостатком памяти и сводить способность к тому или другому роду мышления к памяти, то следует признать, как мы будем еще ниже иметь случай говорить, [существование] особой специфической памяти математика, так как лица, неспособные к математике могут обладать прекрасной памятью на события своей жизни или на музыкальные мотивы. Откладывая пока анализ математической памяти, мы постараемся теперь указать другие характерные черты математического мышления.

Большая быстрота одного ума в сравнении с другими в разыскании решений, при одинаковой эрудиции и опытности в математических изысканиях, указывает на то, что не одна только память является необходимым условием математической способности, что необходимо присутствие еще других специфических психологических элементов. В то время, как сильный математический ум мало отклоняется от прямого пути, ведущего к цели, делает мало неудачных попыток и в ложности каждой из них быстро и легко убеждается, ум более слабый долго блуждает среди тщетных попыток и детальных проверок, сделанных предположений.

§4. Необходимость для объяснения математического мышления введения в рассмотрение бессознательного мыслительного процесса.

Отчего в то время, как одному уму почти сразу является прямое решение, другой должен долго блуждать, прежде, чем придет к желанной цели? В чем состоит волшебное свойство тех людей, которые, как говорит Кант³, “как бы с волшебным жезлом в руках умеют отыскивать сокровища познания, хотя бы они никогда этому не учились. И этому они не могут научить и других, но только могут идти впереди них: это уже дар природы”.

Мы думаем, что на этот вопрос рефлексия нам вполне не может ответить. Поскольку мы анализируем сознательную мысль, мы в ней находим только большее или меньшее число гипотез и их вполне сознательных проверок. В сильном и быстром уме эти гипотезы создаются и гибнут с большой быстротой. Едва успевает такая гипотеза родиться, как ум наносит ей смертельный удар. Откуда появляются эти враги, борьба которых проектируется на экране сознания? Если мы вспомним, что многие психические явления находят свою разгадку в бессознательной психической деятельности, что наш ум способен, как крот под землей, производить не менее кропотливую и сложную работу в потемках подсознания, чем при свете сознания, то мы будем в состоянии дать следующее указание, где искать разгадку.

До того, как в работающую сознательную мысль приходит какое-либо предположение, в бессознательной мысли, всегда работающей параллельно сознанию, гибнет масса других предположений, только наиболее обещающие выступают за порог сознания.

В то время, как в слабом и медленном уме вся работа черне совершается в сознании, в сильном и быстром [уме] в мир сознания все является в почти готовом виде. Чудесный волшебный жезл следует искать в бессознательном мыслительном процессе.

§5. Роль бессознательного мыслительного процесса при проверке предварительных гипотез.

Проверка сделанного предположения обыкновенно бывает *не полной*. Принятая гипотеза отвергается, если имеется хоть один аргумент против нее, но этот аргумент в большинстве случаев бывает столь же неточного характера, как аргумент в пользу этой гипотезы.

Так, сделанная гипотеза об интегрируемости в конечном виде эллиптического интеграла, после большого числа попыток найти для него выражение, отвергается как ложная, и уже не возбуждает интереса математиков, доказательство же интегрируемости дается много позже. То же относится и к решению в радикалах буквенного уравнения пятой степени.

Здесь против сделанного предположения говорит только шаткий аргумент, состоящий в том, что масса опытных и, более того, гениальных математиков, произвели ряд тщетных попыток его решения, к которым присоединились, может быть, еще менее успешные попытки с нашей стороны. Впрочем, гипотеза может быть отвергнута не только как ложная, но и как бесполезная, в том случае, когда проверка ее требует решения проблем, заведомо очень трудных, которые мы никак не рассчитываем решить.

Если мы говорим, что только *наиболее обещающие* гипотезы всплывают в сознании, то нам незачем предполагать, что бессознательное мышление произвело их детальную и точную проверку, достаточно, чтобы на основании неточных заключений по аналогии оно остановилось на этих гипотезах.

Высказывая такое объяснение, мы находим необходимым изложить наш взгляд на свойства бессознательной мысли, может быть, несколько идущий вразрез с общепринятыми.

§6. Ошибается ли бессознательная мысль?

Характерное отличие сознательных и бессознательных актов состоит в меньшей погрешности последних. Все бессознательные действия отличаются особой правильностью и первый луч пробудившегося сознания часто является подобным тормозящему стержню, попавшему между спиц быстро и правильно вертящегося колеса. Шитье, игра на рояле и многие другие действия идут тогда наиболее успешно, когда те элементы, на которые они разлагаются, находятся на пороге сознания или спускаются еще ниже, т.е. представляют так называемые лейбницевы перцепции.

Мы охотно признаем только *меньшую погрешность* бессознательных актов, в частности бессознательного мышления, но мы будем оспаривать положение Гартмана о *безусловной безошибочности* бессознательных психических актов.

Наоборот, везде где [мы] стараемся дополнить сознательный процесс бессознательным, в последнем предполагаются свойства, присущие первому.

Внезапное появление в сознании готового решения какой-либо задачи, которую мы не могли долго решить, мы объясняем бессознательным мышлением, которое в то время, как сознание было занято посторонними вещами, продолжало заниматься [этой] задачей. Здесь возможны две гипотезы: или бессознательная мысль является, как *“deus ex machina”*, “не колеблется и не сомневается, но мгновенно обнимает в один и тот же момент и результат, и производящий его целый мыслительный процесс, мыслит все члены процесса зараз” (Гартман), или же эта мысль продолжает совершать ту же кропотливую работу, что сознательная мысль, переходя через ряд сомнений и ошибок к истине, *per aspera ad astra*. При первом предположении, стадия в которой получается верный результат, должна

сейчас же следовать за моментом, когда обсуждение задачи перешло из сознания в область бессознательного, процесс бессознательного мышления затем обрывается и через некоторое время задача опять воскресает в сознании: в психической жизни таким образом предполагается сомнительный разрыв.

Гораздо вероятнее второе предположение, при котором весь процесс предполагается непрерывно заполняющим все время, когда сознание не занято обсуждением задачи вплоть до результата, который всплывает за порог сознания.

Таким образом, по нашему мнению, бессознательное мышление так же ошибается (хотя и в меньшей степени), как сознательная мысль.

Большая быстрота и легкость бессознательной мысли зависит еще от следующих причин. В то время, как в сознании может быть в данный момент только одна мысль, бессознательная мысль может сразу совершать по несколько работ. Возможно в одно время слушать чтение и шить.

На этом основании можно предположить, что в напряженной мысли с главным, так сказать, центром притяжения, с главной системой движущихся психических элементов, представляющих сознание, образуются еще частные центры притяжения, частные системы. Между различными системами устанавливается сообщение только в критических случаях.

§7. Различные роли бессознательной мысли в мышлении математика и философа.

Если мы от математического мышления перейдем к философскому, которое, как математик, мыслит отвлеченно, причем в иных случаях пользуется, как математик, дедукцией, то легко увидим разницу в конструкции их мыслительных способностей, именно в том значении, которое имеет для мыслителей этих двух типов *подсознательная работа мысли*.

В то время, как математик *доказывает*, философ только *убеждает*. Как тот, так и другой начинают с гипотезы, но второй большей частью и кончает гипотезой.

Как тот, так и другой творческим воображением создают несколько предположений, из которых и производят выбор через проверку каждого. В математике проверка может быть признана вполне законченной лишь тогда, когда к проверяемым предположениям может быть приставлено строгое доказательство. В философии же порой эта проверка сводится лишь к *невозможности увидеть какие-либо противоречия, содержащиеся во взятом предположении*, и к способности этого предположения служить объяснением возможно широкого круга явлений.

Таким образом, философский ум в силу своей меньшей точности, чем ум математический, скорее и легче приходит к цели в этом закулисном выборе сперва только воображаемых, а затем— или строго доказуемых, или подтверждаемых рядом аргументов предположений. Но, кроме меньшей

точности философского ума, этот факт обуславливается еще другой причиной. Даже самый широкий творческий ум не в состоянии создать столько философских объяснений, сколько может прийти даже посредственному математическому уму различных предположений, относящихся к решению какой-либо задачи. В то время, как мысли в голове математика вспыхивают и тухнут, пока не зажжется, наконец, последняя и единственно истинная, философ зажигает и тушит одну иллюминацию за другой. Но можно наверно сказать, что таких иллюминаций бывает обыкновенно немного. Философ это полупоэт, полуученый; начинает он мыслить, как поэт; каждая его мысль при первом появлении — это фантазия поэта, и только затем она идет на суд философа-ученого.

Мышление философа представляет [собой] мышление меньшего напряжения, чем мышление математика, поскольку оно касается не первой своей стадии, именно, построения философской гипотезы, а второй — проверки ее или отыскания ряда подтверждающих ее аргументов.

Вполне естественно предполагать, что в мышлении философа работа мысли идет только в сфере сознания, мало распространяясь в подсознательные области. Мышление математика, наоборот, глубоко внедряется в бессознательную сферу, то всплывая на ее поверхность, то погружаясь в глубину.

Математик не сознает каждого шага своей мысли, как виртуоз — движения смычка.

Известны случаи, когда в состоянии эпилептических припадков продолжали играть на рояле или когда трудно разыскиваемое решение геометрической задачи всплывало с утренним пробуждением ото сна, в продолжение которого неусыпная бессознательная мысль продолжала работать; но нам неизвестны философские теории, созданные в эпилепсии или во сне.

§8. Разница между склонностью и способностью ума.

При анализе математической способности следует резко отличать: *склонность* к известному роду занятий от *способностей*. Мы думаем, что всякая стоящая выше нормы способность соединена с некоторой склонностью, избыток силы всегда стремится проявиться. Человек с сильными мускулами почти всегда имеет любовь к физическим упражнениям. Если сила не разряжается в серьезном деле, она находит себе выход в игре. Но мы не можем сказать обратного. Если человек выказывает к чему-либо особенную склонность, то эта склонность не является показателем особенной, выше нормы стоящей, способности. В иных случаях она указывает лишь на относительное превосходство одной способности над другой. Человек мыслит не всегда по доброй охоте, а часто лишь по принуждению неумолимых обстоятельств и, в таком случае, вполне естественно, что ум выбирает для своей цели легчайший путь, т.е. тот путь, к которому у него более всего

способностей. Но все-таки нельзя утверждать, что так именно всегда бывает. Характер человека откладывает свой отпечаток не только на чувствах и желаниях, влияние его распространяется даже на манеру мыслить.

Более или менее подвижный характер должен сказаться в тех или других склонностях даже самого отвлеченного ума.

Ипохондрик, живущий более своим внутренним миром, чем окружающим, будет иметь ум, более склонный к самоанализу, чем к наблюдению окружающей его природы; для него мышление отвлеченными понятиями будет более подходящей сферой, чем индукция естественных наук. Сколько людей рождается с характером и склонностями ученого, но с умом, едва достигающим будничной нормы.

Собственно говоря, большинство классификаций относится к склонностям, а не к способностям ума.

Выражения: *остроумный, глубокий, тупой, поверхностный и т.д.* определяют способности ума, ум *индуктивный и дедуктивный*, как мы постараемся доказать, определяют склонности.

Под какой из общеизвестных типов подвести математический ум?

§9. *Остроумие как одно из характерных свойств математической способности.*

Одна из трудностей при ответе на этот вопрос, это сравнительная неясность общепринятых терминов для свойств, характеризующих эти типы. Кант⁴ определяет *остроумие* следующим образом: “способность к общему правилу подыскивать частное есть способность суждения, способность для частного подыскивать общее есть остроумие”. С таким определением, сводящим остроумие к способности к индукции, мы едва ли можем согласиться.

Острый ум может, как меткая стрела, идя издалека, попадать в цель. Остряком называют человека, способного находить общие черты в видимо совершенно разнородных предметах; конечно, ему должна принадлежать способность идти от частного к общему, но центр тяжести его остроумия лежит не в этом, а в *способности обнимать умом сразу два совершенно разнородных предмета*. Таким образом, *остроумие — это способность обнимать в одном суждении понятия из двух малосвязанных областей мысли*. Психологический анализ математического мышления показывает, что *математикам главным образом присуще остроумие*. В предварительной работе над созданием и проверкой делаемых гипотез мысль математика должна перелетать к различным уже известным ему положениям и методам, отыскивая в них признаки по своей аналогии с теми, которые он находит в поставленной проблеме, дающие надежды на удачу. Отчаявшись найти помощь вблизи, ему приходится обращаться за ней в самые отдаленные области в сфере его математического мышления, связь которых с областью настоящего исследования, может быть, открывается впервые. Ма-

тематик должен быть остроумным, и лучшей школой остроумия является математика.

§10. Быстрота математического мышления.

Другое характерное свойство математического ума это его быстрота. Если читатель вспомнит наш взгляд на механизм математического мышления, то он легко увидит, что это свойство обуславливается той работой, которую совершает бессознательное мышление в помощь сознательному. Бесспорно, что из всех ученых наиболее быстро мыслят математики, но бесспорно также и то, что этот класс мыслителей—теоретиков значительно уступает в быстроте многим мыслителям—практикам, финансистам, политикам и полководцам.

В самом деле, последние гораздо более связаны временем, они должны прийти к окончательному результату не позже определенного дня и часа. Такого определенного ограничения времени для математика нет, он должен только недолго останавливаться на каждой гипотезе, так как иначе, вследствие огромного их числа, он слишком долго не мог бы дойти до результата.

Это свойство, обуславливаемое, как мы выше уже заметили, значительной ролью бессознательного мышления, не особенно выделяется в том случае, когда ум, не представляя чистый тип математического ума, приближается своим характером к философскому. Подобно тому, как всякое движение совершается быстро и без колебаний, если это движение автоматическое, без вмешательства сознания, точно так же и мышление, поскольку оно принимает во всех своих стадиях характер сознательного философского размышления, проигрывает в быстроте.

§11. Философ и математик.

Но есть одно свойство ума, которым вознаграждается менее быстрый, в сравнении с умом математическим, ум философский. Такова *широта* ума, если под последней разуместь *способность ума познавать в виде связанного целого широкие области*.

В то время как в быстром уме главную роль играет бессознательный момент, в широком уме главным двигателем является ясное, недремлющее сознание.

Заметим кстати, что остроумие более присуще философскому уму, чем быстрота мысли. Смелые и удачные скачки принадлежат иногда и философским умам. Но все-таки, остроумие принадлежит преимущественно к характерным свойствам математического ума. Если философ широк, в то время, как математик быстр, то вместе с тем философ *глубок*, в то время как математик *остроумен*.

Мы уже выше сказали, что в то время, как в математике главная трудность — в *доказательстве*, в оправдании сделанных предположений, в философии — не оправдание, а, главным образом, *построение этих предположений*, составляет затруднение. Затруднение это и устраняет *глубокомыслие* — способность делать *вперед* к намеченной цели большие шаги. При этом важна не столько строгость и простота доказательства, главную роль играет именно разыскание последовательного ряда проблем, прямо, не отклоняясь ни в одну сторону, ведущего в самые недра исследуемой области.

§12. Шахматист и математик.

Обнаруженные нашим анализом характерные свойства математического ума — остроты и быстрая сообразительность, не дают полной его характеристики. Эти свойства присущи также в большой степени и шахматисту, и другого рода игрокам, принужденным мыслить очень быстро в сфере огромного числа комбинаций.

Механизм мышления игрока, в сущности говоря, почти тот же, что у математика. Первая стадия — гипотеза, воображаемый ход, вторая — проверка, т.е. вывод некоторого более или менее длинного ряда последствий из него, и в случае присутствия явно неблагоприятных среди последних — отказ от этого хода. Но мы должны здесь отметить одно существенное различие.

В то время, как математик успокаивается окончательно лишь [тогда], когда будет найден весь комплект аргументов за сделанное предположение, игрок мирится с ними при более скромном требовании, чтобы не было никаких возражений против.

Конечно, в этом отношении математик находится в более затруднительном положении, ему трудно, так сказать, не находить около себя друзей, идти искать их в более далеким области, в то время как для игрока, важно только убедиться, что около него нет врагов. Таким образом, у математика будет перевес в остроте, в то время как у игрока, по тем же причинам, как у финансиста, полководца и т.д., перевес в быстрой сообразности.

§13. Поэт и математик.

Мы уже сказали, что математическое мышление начинается с воображения. Здесь мы должны отметить разницу, которая существует, по нашему мнению, между понятиями: *воображение* и *фантазия*. *Воображение* это деятельность, соединяющая в себе как воспроизведение, сознательное или произвольное, пережитых сложных впечатлений, так и воссоздание, при помощи разложения и комбинирования, составных частей, при помощи фантазии, в новые, еще не пережитые представления.

Таким образом, фантазию мы рассматриваем как составную часть воображения, именно воображение в его созидательном моменте.

Для того, чтобы быть хорошим математиком, нужно обладать хорошим воображением. Это же требование предъявляется и поэту. Вследствие своего могучего воображения, математик кажется поэтом среди других ученых.

Но отсюда слишком далеко до того, чтобы выводить, что поэтическое творчество родственно математическому.

“Я понимаю — пишет Шабельской Софья Ковалевская, — что вас так удивляет, что я могу заниматься зараз и литературой и математикой. Многие, которым никогда не представлялось случая более узнать математику, смешивают ее с арифметикой и считают наукой сухой. В сущности же это наука, *требующая наиболее фантазии*, и один из первых математиков нашего столетия говорит: совершенно верно, что *нельзя быть математиком, не будучи поэтом в душе*. Только, разумеется, чтобы понять верность этого определения, надо отказаться от старого предрассудка, что поэт должен что-то сочинять несуществующее, что фантазия и вымысел это одно и то же. Мне кажется, что поэт должен только видеть, чего не видят другие, видеть глубже других. И это же должен математик”.

Мы со своей стороны не считаем нужным выступать защитником математики от обвинения ее в сухости. Мы считаем, что *хороший математик в то время, когда он мыслит как математик, никогда не бывает поэтом*. Мы скорей склонны думать, что математическому воображению присущ совершенно специфический характер: существует огромная разница между воображением математика и поэта. Здесь нет ошибки, порожденной предрассудком, о которой говорит С. Ковалевская.

К тому же еще следует заметить, что фантазия и вымысел это не одно и то же — с этим легко согласиться, но что фантазия поэта должна быть без вымысла, что поэт должен видеть одну реальность, обратившись из художника в фотографа, это положение весьма спорно и во всяком случае совершенно не согласуется с фактическими данными психологии творчества поэтов.

Воображение математика и воображение поэта принадлежат к двум различным типам воображения, отмеченным Вундтом³.

“Индивидуальное воображение, — говорит Вундт, — может отличаться или способностью к чрезвычайно живым и ярким представлениям, или же способностью к весьма разнородному комбинированию представлений: первую форму фантазии можно назвать *воспринимающей*, вторую *комбинирующей*. Редко вообще бывает она развита в обоих этих направлениях. Чем значительнее чувственные силы представляющего воображения, тем труднее для апперцепции быстро переходить от одного представления к другому”.

Математикам, спекулятивным философам и изобретателям присуща, по Вундту, комбинирующая фантазия. Естествоиспытатели преимущественно обладают воспринимающей фантазией. Этого последнего типа фантазией вооружены и поэты. Классификация Вундта будет более полной, если тип воспринимающей фантазии [мы] распределим на два подтипа, но, смотря по тому, относится ли она к чувствам или к ощущениям, в первом случае она может быть названа *субъективной*, во втором случае *объективной*. Конечно, фантазия поэта должна быть отнесена к первому из этих подтипов.

Вундт из математиков выделяет геометров, которым приписывает вместо комбинирующей воспринимающую фантазию, которая должна быть, конечно, объективного характера.

В мнении Вундта, как нам кажется, правильно только то, что *геометр отличается от алгебриста большим развитием воспринимающей фантазии*. В этом смысле геометр ближе к поэту, чем алгебрист. Можно сказать, что в синтетической геометрии древних более поэзии, чем в современной аналитической. Все эти отличия создают совершенно различные облики умам поэта и математика, ставят их в виде двух различных полюсов на сфере человеческого мышления.

Математикам часто доставляет удовольствие, когда сравнивают их науку с поэзией, им представляется, что подобное сравнение служит только похвалой для их любимого занятия и снимает вечно тяготеющее над ними обвинение в сухости. Между тем сходство только в том, что как в поэзии, так и в математике необходима мощная сила воображения, и быстрое и энергичное течение в первом случае образов, во втором — отвлеченных мыслей, заставляет мыслителя позабыть об окружающем, улетать в надзвездные сферы. Фактические данные отнюдь не говорят за какое-либо интимное родство математики и поэзии. Наоборот, среди математиков слишком мало находится любителей поэзии. А среди поэтов, можно сказать не гиперболизируя, любителей математики совсем нет. Достаточно вспомнить Гете, Надсона и т.д.

§14. Активное и пассивное воображение.

Таким образом, не только поэту и математику не присуще одно и то же воображение, одна и та же фантазия, но различного рода математики, геометры и алгебристы, отличаются между собой характером своего воображения.

“Следует заметить, — говорит Рибо⁶, что не существует вообще научного воображения, что форма его должна меняться сообразно природе наук и что, следовательно, она разлагается на некоторое число родов или даже видов. Отсюда следует необходимость монографий, из которых каждая принадлежала бы лицу компетентному”.

Никто не сомневается, что математикам присущ особый род воображения, но это еще слишком общо. Арифметики, алгебристы и вообще аналитики, у которых открытие производится в самой абстрактной форме прерывных количественных символов и их взаимоотношений, не могут воображать, как геометр.

Можно ли думать, что творец начертательной геометрии Монж, который освободил своим трудом строителей, архитекторов, механиков от их рутинных правил, мог иметь то же воображение, как математик, посвящающий себя теории чисел.

Мы выше видели, что особые окраски воображения зависят от того, какая из фантазий, воспринимающая или комбинирующая, преобладает в них. Мы укажем сейчас еще другой пункт различия.

Согласно Вундту, у фантазии существует два рода деятельности, которые всегда бывают между собой перемешаны.

Пассивная деятельность фантазии состоит в том, что ум предается игре представлений, не делая в них сознательного выбора.

Активная деятельность состоит в том, что воля выбирает известные представления из конкретных элементов, на которые разложилось сложное представление, и таким образом соединяет эти элементы в стройное целое.

Характер той и другой деятельности определяется тем, в каком направлении может возбуждаться течение представлений в первом случае при *пассивном состоянии души*, а во втором — при *активном*.

Иначе говоря, пассивная деятельность воображения определяется главным образом характером *ассоциаций*, а активная — свойствами *памяти*. Фантазия представляется функцией именно этих двух переменных. Комбинациям различных родов этих способностей отвечают различные типы воображения.

Мы имеем теперь возможность отметить еще другое отличие между воображением научным, в частном случае математическим, и воображением поэта. Это отличие состоит, между прочим, и в *большем преобладании у поэта пассивной, а у ученого активной деятельности воображения*.

Конечно, ученый также начинает с пассивной деятельности; первым толчком бывает ассоциация (например, при открытии закона всемирного тяготения — падающее яблоко), но воля раньше вступает в свои права, и течение мыслей более в ее власти, чем это бывает у поэта, к которому поэтические образы слетаются часто без всяких усилий с его стороны.

§15. Роль пассивного воображения в математическом мышлении.

Весьма интересно исследовать участие бессознательной мысли в пассивной деятельности воображения.

Ассоциация идей распространяется не только на сознательную область, она может вызывать образы и представления, стоящие ниже сознания.

Такое утверждение может показаться необычайно парадоксальным. Мы предполагаем все области, сознательную и бессознательную, связанными между собой, так сказать, потенциально. Ощущения, находящиеся в сознании, вообще не вызывают тех ощущений, которые составляют предмет бессознательного мышления, но при некоторых особенных состояниях мозга порог сознания может значительно понизиться, бессознательные ощущения могут тогда дойти до той степени интенсивности, при которой они должны быть осознаны. В этот момент потенциальная связь переходит в актуальную, и эти ощущения могут войти в ассоциативную цепь и быть вызваны сознательными ощущениями, так как если бы эти ощущения сами были когда-либо сознательными.

Только таким именно образом объясняется факт, что в процесс сознательного мышления могут проникнуть результаты бессознательной мыслительной деятельности.

Эти результаты находились у самого порога сознания, который постоянно находится в состоянии колебания, то понижаясь, то повышаясь. В том случае, когда порог сознания настолько понизился, что результат этот поднялся над порогом сознания, то может всегда случиться, что какая-либо сознательная мысль, имеющая какое-либо сходство с этим результатом, вызовет его в сознание по ассоциации.

Отсюда мы видим, сколь важную роль играет пассивная деятельность воображения в математическом мышлении. Мысля, мы то натягиваем, то распускаем воюжки, то наша мысль направляется актом воли по определенному направлению, то она пассивно отдается свободному течению мыслей.

Момент соприкосновения сознания с бессознательной мыслительной деятельностью это, в сущности говоря, вторая фаза процесса творения по схеме Рибо, которая состоит в следующем:

1 фаза. Приготовление (бессознательная деятельность).

2 фаза. Появление в уме идеи, вдохновение, вторжение (irruption).
(Переходный момент).

3 фаза. Период построения и развития (сознательная деятельность).

Более крупные математические способности предполагают больше связей между сознательной и бессознательной областями. Для этого необходима более энергичная, более интенсивная бессознательная деятель-

ность, при которой большое количество результатов придвигается к самому порогу сознания.

Здесь будет уместно также упомянуть, в каком смысле ассоциация идей может явиться тормозящей причиной для математического мышления. А именно, она заставляет мысль, как только воля распускает вожжи, возвращаться в те же дурные области. Здесь замечается особый *автоматизм* мысли. Мысль, от отвергнутой новой идеи по ассоциации, невольно возвращается к одной из старых и, попав на нее, затем автоматически быстро и легко движется по старой дороге, повторяя все те же ошибки. Во избежание этого необходимо постоянное вмешательство воли, управляемой сознательной памятью.

§16. Психология математических ошибок.

Исследование конструкции математического мышления приводит нас естественно к вопросу о психологических причинах математических ошибок.

Вопрос о заблуждениях очень стар, если заблуждения рассматривать с логической точки зрения. В этом смысле он рассматривался еще Аристотелем. Первое же психологическое исследование может быть отнесено только к Бэкону, которому принадлежит известное учение об идолах (обманчивых признаках истины, иллюзиях). Но ясно, что все классифицированные Бэконом заблуждения могут касаться только неточного мышления, когда нет еще речи о доказательствах. Все эти заблуждения если и могут иметь место при процессе подыскивания предварительных гипотез, то во всяком случае, окончательно фильтруются производимой затем проверкой и влияние аффектов, даже высших интеллектуальных типов, сводится к нулю.

Математические ошибки суть не что иное, как погрешности памяти или внимания.

Чтобы понять это, возьмем простейший пример. Проанализируем, в чем состоит ошибка при вычислении, например, при сложении нескольких многозначных чисел.

Желая сложить три числа

53890987

34567848

55166239

мы складываем сперва в уме $7+8+9$ и фиксируем в памяти вторую цифру полученного числа 24. Затем складываем $8+4+3=15$, прикладываем к нему вторую цифру фиксированного первого числа — 2.

Далее ход мысли следующий: $15+2=17$, единица фиксируется, складываем $9+8+2=19$, $19+1=20$ и так далее.

Когда мы дойдем до сложения седьмого столбца, т.е. цифр 3, 4, 5 у нас в памяти будут следующие цифры: от первого сложения 2, от второго 1, от третьего 2, от четвертого 1, от пятого 2, от шестого 1. Бесспорно, что при производстве действий интенсивность нашего внимания сильно колеблется, а вследствие этого колеблется и сила, с которой запоминаются упомянутые выше числа, и они вспоминаются с различной степенью легкости. При быстром вычислении импульс воли для вызова в памяти желаемой цифры ничтожно мал, участие воли можно сравнить с рукой, которая отклоняет на секунду упругий стержень, чтобы этот последний сам собой принял первоначальное свое положение. Фиксируя цифру 1 при 6-м сложении, мы на секунду отвлекаем внимание, чтобы написать цифру 6, когда же мы перестаем думать о ней, единица сразу всплывает в нашей памяти.

Такой акт вполне аналогичен следующему: мы смотрим в окно, затем отвлекаем наше внимание, смотрим, например, на лежащую перед нами книгу, затем закрываем глаза — перед нами восстает без усилия воли образ окна. Если теперь при падении внимания цифра 1 недостаточно фиксировалась памятью, она уже не может восстановиться. Тогда в сознание проникают другие цифры, более резкие отпечатки результатов других, только что сделанных вычислений при более интенсивном внимании. Обычно одна из таких цифр, а именно та, которая является первой, т.е. та, которая резко сохранилась памятью, и принимается за искомую.

Подобного же рода ошибка, хотя более редко, может быть при сложении цифр одного столбца без перехода к следующему. По сложении 7 с 8 запоминается число 15, для прочтения 9 употребляется краткий промежуток времени, в который 15 может забыться.

Помимо этой погрешности элементарной памяти, т.е. памяти, связующей элементарные звенья мыслительного процесса, возможна еще погрешность удерживающей памяти. Мы можем недостаточно хорошо вспомнить в краткий промежуток времени, употребленный на вычисление, тот пункт таблицы сложения или умножения, который нам необходим. Подобная ошибка, невозможная в спокойном состоянии достаточно опытного в вычислениях ума, не представляется невозможной, когда при быстром вычислении сознание постоянно наполняется различными мыслями. Среди массы незнакомых лиц можно легко не узнать и хорошо знакомого, как это часто с нами случается на улице. В сущности, все то, что мы сказали об ошибке в сложении, дает полную схему весьма общего типа математических ошибок. Вот в общем виде эта схема:

Объекту А приписывается признак α , означили это положение через (А, α). Внимание отвлекается от А к В, затем возвращается к А, причем припоминается (А, α), затем В приписывается признак β , отвлекаются от В к С, вспоминают (В, β). Ошибка состоит в том, что вместо (В, β) берут (В, α).

Но под этот тип вполне подходят далеко не все математические ошибки. В отличие от ошибок, о которых сейчас велась речь и которые могут быть названы *ошибками исчисления*, ошибки, о которых мы сейчас будем говорить, могут быть названы *ошибками доказательства*. Они состоят в том, что *посылка* (A, α) заменяется другой (A, β), где β не приписывалось еще ни одному объекту, но по своему сходству или по смежности может легко быть смешано памятью с α . Наиболее частой и наиболее трудно избегаемой ошибкой является та, при которой β представляет более общий случай, чем α . Положенне (A, β) при этом утверждается при некоторых, часто только подразумеваемых условиях. Об этом в дальнейшем ходе доказательства совершенно забывается, и положение (A, β) берется во всей его общности.

Я говорю, что эти ошибки в математике весьма часты и трудно избегаемы, так как, если бы математик всякий раз упоминал об ограничениях, которые должны подразумеваться, он сделался бы слишком скучным и, утруждая внимание отклонениями от основной темы, мог бы проиграть в ясности. Так, математики говорят в нескольких главах о функциях, подразумевая их непрерывными, хотя об этом ограничении упоминается только на первой странице первой главы. О том, что функция принадлежит типу аналитических функций, об этом иногда и не говорят совсем, считая вполне естественным такое предположение.

Ясно, что предпринимающий дальнейшие исследования читатель может совершенно забыть об этих ограничениях, в особенности, если применение положений, годных только при этих ограничениях, к общему случаю, не только не приводит его ни к каким противоречиям, но и открывает новое широкое поле исследований.

К этим типам математических ошибок следует присоединить еще третий: *ошибки в обозначениях*.

Какой-нибудь объект A обозначается знаком а, другой B знаком в. Если между а и в есть сходство, то память может спутать их и относить в к А и а к В. Причина смешения может быть в восприятии: один знак можно просто принять за другой.

Можно, например, греческую α принять за латинское а. В то время, как указанные выше два типа ошибок представляют ошибки памяти, ошибки последнего типа, во второй своей форме, представляют уже ошибки внимания.

Мы еще укажем один тип ошибок внимания, совершенно иного рода.

Знакомому с научными математическими мемуарами хорошо известно, что в этих мемуарах доказывається не все, ведь в противном случае и маленький мемуар вырос бы в целый том. Не доказываются мелочи, не доказываются такие утверждения, в которых каждому опытному читателю не доставляет большого труда убедиться. Таким образом, некоторые звенья

в цепи умозаключений пропускаются, их следует вставить уже самому читателю.

Но нам кажется, что таким же образом до известной степени поступает не только читатель, но и сам автор.

Доказательство теоремы составляется следующим образом. Сперва [набрасываются] эскизы, намечаются главные пункты, которые следует доказать. Доказываются сперва они вчерне, т.е. так, что детали пока остаются без рассмотрения, остается еще кое-что спорное, кое-что недоказанное. Только постепенно обезвреживаются всевозможные возражения и производится проверка различных второстепенных утверждений. При несколько раз производимой проверке всего построения, мы не разбираемся в некоторых выставленных нами положениях, доказательство которых нам представляется простым и обычным, мы проходим мимо них с мыслью, что здесь именно все обстоит благополучно, не воспроизводя для каждого из них всего доказательства. Случается, что даже при последней окончательной проверке мы оказываем то же пренебрежение на вид обычным и простым положениям, но тающим в себе смертельный яд и гибель для всего организма нашего построения.

Иногда к подобному пренебрежению деталями нас склоняют и другие факторы. В геометрии, например, такую роль может играть чертеж, на котором случайно пересеклись какие-нибудь две прямые, пересечение которых нам представляется очевидным в том смысле, что доказательство этого так просто и обычно, что нечего себя им утруждать.

Не такого ли рода ошибка Декарта, утверждавшего, что нормали к двум плоским кривым, именно к проекциям, линии двойной кривизны, сами будут проекциями нормали этой кривой. Вот психология подобной ошибки:

1) Доказательство этого неверного положения показалось Декарту настолько же простым, насколько просто доказательство подобного положения для касательных.

2) Весьма вероятно, что в этом его убедило и неправильно представленное геометрическое построение.

Подобного рода ошибки могут быть и при вычислении, когда мы отбрасываем различные члены в виде упрощения. Нам кажется очевидным, что такое отбрасывание мало повлияет на результат, причем кажется, что доказательство этого так просто, что не стоит на нем останавливаться, а между тем это часто ведет к роковым ошибкам.

§17. Ум математика как ум дедуктивный.

Существуют, помимо намеченных выше типов, еще два типа, на которые принято делить умы и таланты. Эти два типа выражаются терминами: де-

дуктивный и индуктивный. К первому типу относят математиков и философов.

“Важнейшие индивидуальные различия, — говорит Вундт⁷ — в направлении умственной деятельности обуславливаются *соединением известных сторон способности воображения с известными сторонами способности собственно мыслительной*. Происходящее отсюда умственное предрасположение называется обыкновенно талантом. Соответственно двум направлениям воображения и двум направлениям ума можно различать четыре главных формы таланта”.

О различных типах воображения мы уже говорили выше. Направление же ума по Вундту следующее: *индуктивный* ум склонен связывать отдельные факты, т.е. отдельные объекты наших представлений в форме понятий. *Дедуктивный* же ум, напротив, в высшей степени склонен подводить отдельные факты под общие формы, созданные мышлением. Первый стремится собрать наблюдения и обобщить их, второй выводит следствие из общих понятий и правил, или, взяв общий принцип, разлагает его на отдельные частные случаи. Если классификация умов по типам воображения является классификацией по способностям, то деление на ум индуктивный и дедуктивный отвечает скорее делению по *склонностям*. *Способности к чистой дедукции или силлогизму, как главному двигателю ее, нет*. Не требуется особой способности, чтобы из фактов: люди смертны и Петр человек, вывести, что Петр умрет. Трудность дедуктивного мышления состоит в направлении ряда силлогизмов к намеченной цели, в подведении данного случая под тот из более общих, к каждому из которых он принадлежит, который приводил бы к решению интересующих мыслителя проблем. Иначе говоря, *от дедуктивного мыслителя требуются только тогда особые способности, когда он перестает быть дедуктивным мыслителем*.

Ведь для такой цели, как мы выше видели, ум пользуется воображением, индукцией и аналогией. Поэтому нельзя противопоставлять математика и философа натуралиста, как умы способные к двум противоположного рода операциям: дедукции и индукции. Математик в своей закулисной работе — мыслитель индуктивный; различие его способностей от способностей натуралиста лежит только в специфических видах воображения и в способности приводить в движение при закулисной работе бессознательную мысль в самых широких размерах.

Классификация умов и талантов на дедуктивные и индуктивные, таким образом, есть классификация по склонностям ума. Как мы выше сказали, такие склонности могут обуславливаться характером человека.

§18. Некоторые соображения, относящиеся к памяти вообще.

Мы уже упоминали, что характер воображения зависит от свойства памяти. Для воспроизведения пережитых впечатлений мыслителем необходима память, причем именно такая, которая могла бы вызвать именно того рода впечатления, которые относятся к области его мышления. Музыкальное воображение не может существовать без музыкальной памяти. Математическое воображение не может быть без математической памяти. Поэтому вполне естественно, коснувшись специфических свойств математического воображения, перейти к анализу математической памяти.

Этому анализу мы предпосылаем некоторые соображения, относящиеся к памяти вообще. Необходимым условием мышления во всех его разновидностях является память, которая, как цемент, связывает различные звенья мыслительного процесса.

В памяти могут быть отмечены три момента:

- 1) Усвоение памятью известного состояния.*
- 2) Сохранение воспринятого в потенциальной форме.*
- 3) Воспроизведение его.*

Различные ощущения, чувства и мысли могут нами запоминаться с различной степенью легкости на различные сроки, с различной ясностью сохраняться в памяти и, наконец, более или менее легко могут быть ею вызваны.

Мы различаем первый и второй момент как два различных момента. Некоторые состояния, хотя и вполне нами сознаваемые, могут быть совершенно не усвоенными памятью. Произнесенное подряд большое число цифр или слов не может быть нами воспроизведено, хотя бы мы пожелали это сделать тотчас по их произнесении. Этот акт усвоения содержания сознания памятью отнюдь не тождествен с переходом данного состояния за порог сознания. Произносимые слова ясно сознаются нами не только как совокупность определенных звуков, но как знаки определенно и ясно сознаваемых нами понятий.

Если взять обычное сравнение памяти с отпечатком на мягкой поверхности, то бессознательному акту будет соответствовать движение отпечатываемого предмета в некотором отдалении от этой поверхности, сознательному акту, не усвояемому памятью, соприкосновение с данной поверхностью без оставления на ней следа. Если же предполагать, что тот же предмет производит давление на эту поверхность, то соответственно тому, принадлежит ли эта поверхность вполне упругому телу, после давления возвращающемуся тотчас к первоначальной форме, или, в силу некоторой неупругости, оставляющему на себе след от давления, мы получаем два явления, отвечающие или одному первому моменту, или совокупности двух первых.

Мысля, мы связываем памятью различные звенья мыслительного процесса. Для того, чтобы вывести умозаключение, нужно помнить, покуда оно не выведено, отдельные посылки. Эту самую первичную форму памяти, которая проявляется в каждом, даже наиболее грубом, мыслительном процессе и действие которой не идет дальше простого связывания отдельных моментов мышления, мы называем *элементарной памятью*⁸.

В элементарной памяти, позволяющей перейти от одной посылки к последующей, второй момент, можно сказать, почти исчезает, получаемый промежуточный член усваивается для того, чтобы тотчас воспроизвестись и затем подвергнуться забвению. Для того, чтобы хорошо мыслить, необходимо, чтобы весь мыслительный процесс представлял неразрывную и крепкую цепь, необходима известная чувствительность некоторых нервных элементов, но эти последние могут обладать большой степенью упругости и могут воспроизводить данное состояние достаточно сильно только в скором времени от момента усвоения, сохраняя эти состояния на более или менее долгое время. Для того, чтобы шахматист играл хорошо или математик хорошо вычислял, необходимо, чтобы первый помнил свои ходы, а второй свои числа; но по окончании игры или вычисления, и те и другие могут совершенно стереться из памяти.

Большим или меньшим развитием способности сохранения данного восприятием содержания обуславливается развитие человека. В то время, как для человека дела эта способность не играет существенной роли, ученый без памяти, как хранилища необходимых познаний, является совершенно бессильным.

§19. Удерживающая память математика.

Но не у всех ученых *удерживающей* памяти дано то же значение. Ясно, что чем более связи между различными объектами, запечатлеваемыми памятью, тем легче их запомнить. Всякая связь делает необходимым запоминание только части их числа, так как часть может уже без усилия воли вызвать и всю остальную совокупность. Математику нет необходимости удерживать в памяти все доказательство теоремы, необходимо лишь помнить исходный и конечный пункт, и идею доказательства.

Правда, ученый-математик должен удерживать в памяти огромное число формул и метод, но объем его памяти должен быть гораздо меньше, чем у натуралиста или историка.

В то время, как математик, утерав в памяти что-либо, может это искать, восстанавливая промежуточные логические звенья между вспомнутым и забытым, натуралист, историк, химик и т.д., имея часто дело с совершенно обособленными и не находящимся между собой в связи объектами, должны совершенно в этом отчаяться.

Быстрое соображение, дающее возможность произвести подобные розыски в самое короткое время, позволяет математику и при сравнительно ничтожном объеме удерживающей памяти хорошо мыслить, между тем как, например, натуралист без памяти огромного числа фактов и терминов своей обширной номенклатуры совершенно бессилён.

От памяти математика требуется главным образом чувствительность, требуется, чтобы она быстро усваивала каждое звено той длинной цепи, через которую проходит мысль, и чтобы быстро и в неискаженном виде воспроизводила его при переходе к последующим звеньям.

От математика требуется главным образом элементарная, а не удерживающая память, требуется не 2-й, а 1-й и 3-й вышеупомянутые моменты акта запоминания.

Взяв приведенное выше сравнение, можно сказать, что память математика должна быть подобна гибкой и упругой поверхности.

§20. Различные роды памяти.

Нельзя сказать, что в этом исключительно состоит отличие математической памяти. Нельзя сказать, что память совершенно равнодушна к содержанию.

Иной легко запоминает музыкальные мотивы, другой, лишенный этой способности, быстро запоминает цифры.

Правда, память, как мускулы, развивается упражнением, но для существования памяти к известному классу восприятий, необходимо, все-таки, наличие некоторых элементов. Известно, что с музыкальной памятью рождаются, и из двух братьев, слышавших одни и те же мотивы, один может запомнить все, а другой ни одного.

“Фактические данные современной психологии, — говорит Рибо⁹, — говорят против воззрения, приводимого Дюгальдом Стюартом, что неравенства в способности сохранения памятью состояний различных типов зависит от неравенства употребляемого нами внимания по отношению к различным предметам и выбора, который ум делает из явлений и вещей, обращающих на себя внимание. Мы имеем случаи удивительной зрительной памяти художников Горация Верне и Густава Доре, рисующих портреты на память, шахматистов, могущих а l'aveugle¹⁰ играть несколько партий, знаменитых счетчиков вроде Дюаманди и Иноди, производящих в уме большие вычисления <...>.

Психологический анализ, таким образом, показывает, что не существует единичной памяти, а есть только память множественная; точно также нет и какого-либо определенного местонахождения памяти, а есть столько различных мест, сколько [есть] различных видов памяти”.

Воспоминание вовсе не находится, как часто говорят, в душе, оно пребывает в месте своего возникновения в той или другой части нервной системы.

Для такого рода частных памятей необходимо поэтому особое анатомическое устройство (например, органа зрения), соответствующее данному чувству.

§21. Классификация родов памяти.

Какая память главным образом свойственна математику? Психологический анализ не может удовольствоваться одним признанием существования специфической математической памяти, он должен исследовать простейшие элементы, на которые разлагается этот сложный психический акт, дав возможность с различных точек зрения отнести ее к более общим видам памяти.

Прежде, чем провести на наш взгляд наиболее естественную классификацию видов памяти, мы сделаем одно замечание, на первый взгляд представляющееся парадоксальным.

Память не сохраняет непосредственно отвлеченных понятий, она сохраняет лишь ощущения, которые при своем воспроизведении заставляют нас мыслить об этих понятиях.

Процесс воспоминания представляет движение от центральной нервной системы к периферической, где, по мнению Рибо, мы и находим искомое, но, прибавим, не мысль, а лишь отпечаток пережитого периферическим нервом ощущения, и только через обратное центростремительное движение воскресает понятие. Желая вспомнить, в чем состоит система Спинозы, мы вспоминаем раньше термины: субстанция, атрибут, модус и т.д., которыми пользовался Спиноза, и только затем, постепенно, по ассоциации идей, воскресают в нашей голове различные пункты его системы. Желая вспомнить математическую теорему, мы сперва вспоминаем или алгебраическую формулу, или чертеж.

Такой взгляд нас склоняет к признанию *стольких видов памяти, сколько существует видов ощущений*. Но помимо этого, за ту же классификацию говорят и факты, ясно обнаруживающие специфический и независимый характер, слуховой, зрительной и т.д., к отдельным видам ощущений относящихся памятей. А именно, возможно, например, существование сильной слуховой памяти при слабой зрительной, и обратно.

Итак, мы говорим, что *существуют памяти: слуховая, зрительная, обонятельная, осязательная, вкусовая и мышечная.*

Содержание обоняния, вкуса и осязания является слишком редким предметом отвлеченного мышления.

Слова запоминаются некоторыми лицами *слуховой* памятью, так что они вспоминают ухом, так сказать, слышат то слово, которое желают вспомнить. Другие лица, вспоминая, вызывают зрительный образ напи-

санного слова. Это лица с преимущественным развитием *зрительной* памяти. К этим двум типам, отмеченным некоторыми психологами, присоединяем еще третий, когда запоминаются не звуки, не изображение ряда букв, а манера писать данное слово, т.е. ряд мышечных ощущений руки. Этому типу свойственна *мышечная* память.

В виду того, что форма и размеры предмета познаются как собственно зрительными ощущениями, т.е. действием на нервные элементы, соединенные с сетчаткой оболочкой глаза, так и мышечными чувствами, непосредственно связанными с аккомодацией и конвергенцией глаза, то и память о форме и размерах предметов может быть как зрительной, так и мышечной, вследствие чего легко возможно смешение обоих видов памяти.

Пространственная память, или память на взаимное расположение предметов в пространстве, (в частном случае, их расстояние) есть частный случай мышечной памяти.

§22. Пространственная память математика.

Геометру необходима именно этого рода, т.е. пространственная память, его элементарная память должна быстро усваивать и легко воспроизводить геометрические построения.

Память геометра — не зрительная память, геометр не помнит зрительный образ чертежа, он помнит только *взаимное расположение линий и поверхностей, или их частей*.

Следует заметить, что, хотя память зрительная и пространственная представляют различные виды памяти, как различны ощущения цвета и ощущения мышечные, тем не менее, они могут быть смешаны. Организм человека не имеет безупречной гармонии в том смысле, что ко всякому движению, направленному к известной цели, присоединяются вторичные автоматические движения, которые от низшей стадии развития до высшей постепенно сокращаются, никогда, впрочем, окончательно не уничтожаясь.

Ребенок, начинающий писать, совершенно не может производить движения только рукой, он двигает, обыкновенно, и языком, и мускулами лица, и даже ногой, но мало-помалу он перестает делать эти излишние движения. Точно таким же образом, желая запомнить фигуру, мы запоминаем невольно и цвета и тратим на последнее психическую энергию напрасно. Бесспорно, что у шахматиста, как и математика, центр тяжести лежит в пространственной памяти, но к ней частью примешивается и зрительная.

Впрочем, в иных случаях, те движения, которые являются до известного момента вторичными, могут потом заменить главные. Душа, стремясь по линии наименьшего сопротивления, может поступить таким образом с целью легчайшего достижения известной цели. "Между шахматис-

тами-игроками, — говорит Бинз¹¹, имеющими способность играть, не глядя на доску, существует огромное число говорящих, что во время игры они воображают шахматную доску и фигуры, как будто бы их видели. Иные видят формы фигур, даже цвет”.

Бинз называет их память *конкретной зрительной* памятью.

По нашему мнению, цвет и фигуры в большинстве случаев — это только вторичная память. Игроку достаточно помнить расположение коня относительно пешки, но не цвет или те, или другие, особенности формы этих фигур. Зрительная память, таким образом, большей частью здесь является бесполезной, но с другой стороны, бывает, что с ее помощью мысль игрока бессознательно выбирает кратчайший, легчайший способ фиксирования и различения фигуры. Ей нет необходимости всегда помнить ход; ей достаточно до поры до времени помнить только цвет и, хотя бы в очень неясной форме, фигуру, и только в случае необходимости, по цвету и фигуре восстанавливать ее ход. Впрочем, в виду того, что несколько пешек, два коня, две туры и т. д. — одного цвета, необходимы еще другие признаки их различения, которые, вероятно, всегда исключительно пространственного характера, так, правая тура, т. е. стоящая с правой руки, отличается от левой.

Эту конкретную зрительную память Бинз отличает от *зрительной геометрической* памяти тех шахматистов, которые, воображая шахматную доску, не видят ни цвета, ни форм фигуры.

Единственным различием фигуры является тот путь, который она должна сделать, чтобы достигнуть армии неприятеля. Такая зрительная геометрическая память сводится к почти чистой пространственной памяти; зрительная память имеет очень слабый эффект.

Тем не менее она действует побочно и воспоминанием ходов различных фигур воскрешает вид шахматной доски; эти шахматные игроки все-таки видят.

Исследование Бинз устанавливает, что к пространственной памяти шахматиста примешивается еще зрительная. Тот же факт имеет место и у геометра. Вспоминая доказательство какой-либо теоремы, он мысленно чертит чертеж таким именно образом и вспоминает взаимное расположение его частей; в этом воспоминании непрерывного ряда мышечных ощущений и состоит геометрическая память. Но к этой памяти безусловно, как в вышеприведенном примере шахматиста, примешивается и зрительная память. Геометр часто видит чертеж, как видит шахматист доску при обеих разновидностях шахматной памяти.

Здесь, как и в мышлении шахматиста, могут быть как полезные, так и вредные элементы. Вместе с необходимым запоминаются и затем воспроизводятся памятью обозначения различных точек и углов, и другие детали, являющиеся лишь балластом при мышлении. Но иногда переход

от мысленного черчения к видению есть акт полезный для души: это бес-
сознательный выбор линии наименьшего сопротивления.

В то время, как пространственная память разлагается на ряд мы-
шечных ощущений во времени и подобно осязанию ощупывает предмет,
зрение схватывает его во всей его целостности. Мысленное черчение дает
нам действительно чертеж, который мы видим в воображении и который
может сохраняться зрительной памятью.

Сделаем еще одно важное замечание, относящееся к математичес-
кой памяти.

На первый взгляд представляется, что математикам свойственны
два рода памяти: память геометрическая, т.е. память к геометрическим
построениям, и алгебраическая, т.е. память к алгебраическим формулам и
цифрам.

Но мы думаем, что память алгебраическая ничем существенно не
отличается от геометрической, и представляет ту же пространственную
память.

Мы ведь запоминаем не зрительный образ формулы

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b \text{ и т.д.}$$

а запоминаем эти формулы совершенно так же, как геометрические пост-
роения, т.е. как известное расположение букв а, в и цифры 2 по отношению
друг к другу.

То же самое относится и к цифровой памяти.

§23. Педагогическое значение математики.

В связи с психологическим исследованием математической способности
находится разрешение вопроса о педагогическом значении преподавания
математики.

Специфический характер математической способности является
причиной существования у некоторых лиц других умственных способнос-
тей, значительно превосходящих норму, с почти полным отсутствием ма-
тематических способностей. Достаточно вспомнить два глубоко философ-
ских ума, широкие области которых, хотя и соприкасались между собой,
но в общем не совпадали. Я говорю о Гете и Дарвине.

Более того, наше исследование нам показало, что философский и
математический умы обладают психологическими элементами, находящи-
мися друг с другом в антагонизме. Философу, мысль которого работает все-
цело в лучах сознания, математические открытия могут показаться рядом
каких-то фокусов. Он согласится с доказательствами математика, но ему
покажется естественным задать вопрос (как [это делал] Шопенгауэр), от-
чего при доказательстве теоремы проводят ту или другую линию, и он не

удовлетворится разъяснением, что такое действие потом приведет к желанной цели. Ведь мы, куда ведем исследование, скажет он, еще не знаем этой цели. Что это за суфлер, который раньше времени нам все подсказывает? Этот суфлер, как мы показали выше, это неточное мышление, глубоко заходящее в подсознательные области.

Повторяем, математик подобен музыканту, который часть своих быстрых и ловких движений должен совершать бессознательно, и для которого сознание может явиться лишь тормозом.

Математик мыслит быстро, математику присуще остроумие, но *мы не можем назвать математический ум умом высшей ценности.*

Математический ум не видит того, что видит ум философский. Он не видит, да и не стремится увидеть, весь предмет; он видит только часть его, ту часть, которая служит как бы крючком, на который он прицепляет те логические цепки, при помощи которых желает связать все им мыслимое.

Обычное заблуждение, присущее математикам, состоит в смешении всего предмета с этой небольшой частью, доступной их взору, в смешении математических определений, скользящих, так сказать, только по поверхности, с самой сущностью предмета. Разве понятие о вероятности совпадает с понятием о некоторой дроби, которая служит в математике определением вероятности? Понятие о кривизне шире, чем то определение, которое дает геометрия. Математики с трудом могут примириться [с тем], чтобы даже в геометрических аксиомах находилось что-либо, не поддающееся математической формулировке, что-либо кроме крючков, за которые можно было бы привесить длинную цепь доказательств. Знаменитый математик Пуанкаре¹² доходит до того, что совершенно забывает созерцательный характер геометрических аксиом и считает их за скрытые определения... ergo, между геометриями четырех и трех измерений нет существенной разницы!

Таким образом, ум в своем *сознательном* развитии, в стремлении объять окружающий мир более глубоким и широким взором, не найдет себе в математике подходящей сферы. Такой ум должен необходимо выйти за границы логических определений и математических терминов и доказательств, он должен видеть в предмете также и то, что не может быть выражено никакими математическими формулами, то, для чего не только формула, но и слово может служить только намеком.

Таким образом, математические способности — ненадежное мерило ценности ума.

Такое мерило аналогично оценке богатств человека по одному количеству десятин земли, забывая другое движимое и недвижимое имущество, которое может существовать совершенно независимо от земли и давать еще лучший доход. Специфический характер математической способности делает математику доступной не всем: некоторый, и довольно большой, процент ее совершенно не понимает, у некоторых ее изучение почти сводится к одному заучиванию механических действий над символами.

Чисто интеллектуальный ее характер, не говорящий ничего чувству, делает ее интересной только крайне ограниченному кругу учеников.

Таким образом, не все могут ею заниматься и очень немногие желают ею заниматься.

Поэтому в общем цикле преподавания в общеобразовательных заведениях (а таковыми должны быть средние учебные заведения) *математические науки не должны представлять основу общего среднего образования*. Мы должны стараться, чтобы в предметах, ближайших к математике (таковы физика и космография) и неспособный к математике приобрел максимум познаний.

Педагогическое значение предмета может быть трояко:

- 1) предмет может быть полезен,
- 2) может давать гимнастику ума, упражнением развивающую его гибкость и другие качества,
- 3) может развивать, расширяя кругозор учащегося.

Удовлетворяя первым двум требованиям, математика вряд ли удовлетворяет третьему.

Едва ли математика, этот фундамент, но не вершина наук, может расширить кругозор. Можно знать математику и кроме нее не знать ни одной науки. Между тем, как физику необходимо до известной степени знать также и математику.

Существование совершенно юных математических гениев, вроде 12-летнего Клеро, представляющего свой мемуар академии, или 20-летнего Галуа, создающего один из величайших отделов алгебры, указывает, при каком узком кругозоре можно быть не только хорошим, но и гениальным математиком.

Мы слишком далеки от мнения Платона, начертавшего при входе в свою академию слова: *“Αγεωμετρητος μηδεις εἰσσιτο”* (да не входит не знающий геометрии). Если бы в душе самого хозяина академии не уживался рядом с геометром еще поэт, который контрабандой, вопреки вывеске вошел в академию, то мы не имели бы платоновской философии. Но этот случай уживания в одной душе геометра и поэта, создающего двойственность души, случай очень редкий, явление вроде двойственности сознания. Обыкновенно звук каждой из этих струн души заглушает другую.

Не полагая математику основой среднего образования, мы тем не менее далеки от взгляда Шопенгауэра, по мнению которого единственная непосредственная польза математики заключается в том, что она может приучить рассеянный и легкомысленный ум сосредоточивать свое внимание.

Главное педагогическое значение математики состоит в том, что в математике, преимущественно перед другими предметами, ученику предоставляется самостоятельная умственная работа.

В других предметах ему главным образом приходится *понимать мысли других*, в математике при решении задач ему приходится мыслить самостоятельно.

СЛУЧАЙ И БЕССОЗНАТЕЛЬНОЕ.

§1. Теория вероятностей и будущее.

По теореме Якова Бернулли, по вероятности какого-либо события можно судить о том, насколько часто будет появляться это событие при предстоящем ряде испытаний. Если вероятность игрока выиграть партию равна $\frac{1}{2}$, то следует ожидать на две партии одного выигрыша.

Если последнее правило будет *систематически* нарушаться, если у игрока будут непрерывные полосы проигрышей по 20–30 раз, то мы сочтем такое явление настолько исключительным, настолько противоречащим выводам теории вероятностей, которая в подобных элементарных выводах является здравым смыслом, выраженным математическими формулами, что будем вынуждены прийти к убеждению, что не случай определяет исход событий, а нечестные действия партнеров.

Вероятность есть отношение числа благоприятных событию случаев к числу всех единственно возможных случаев, причем *все случаи предполагаются равновозможными*. Если в урне 10 белых и 10 черных шаров, то вероятность вынуть черный (или белый) шар равна $10/20 = \frac{1}{2}$. При этом предполагается, что вероятность выхода каждого *определенного* шара одна и та же. Но если игрок *сознательно* вынимает белый шар, руководствуясь осязанием по царапинам, предварительно нанесенным на каждом из черных шаров, то равновозможность случаев уже не имеет места, вероятность уже не определяется числом $\frac{1}{2}$, и белый шар не следует ожидать 1 раз на 2 выхода.

Равновозможность случаев мы устанавливаем при предположении совершенно идеальной обстановки, предполагая отсутствие каких-либо факторов, действующих в строго определенном направлении, в сторону появления событий какой-либо определенной категории. При определении вероятности выхода черного шара из урны, где находятся как черные, так и белые шары, мы предполагаем, что эти шары мы не видим, что мы не можем осязанием различить черного от белого, что шары не положены в урну преднамеренно нами же в таком порядке, что белые шары оказываются наверху, а черные – внизу, и потому белые первыми попадают под руку.

Несходство действительно наблюдаемого числа появлений событий, например, появления черного шара при последовательных выниманиях шаров из урны, с тем, которое дается теорией вероятностей, указывает на наличие факторов, нарушающих эту идеальную обстановку, которые

ми мы при нашем вычислении вероятности и предвычислении ожидаемого числа появлений события не могли пренебречь вследствие значительно-го их влияния.

Обстановка, при которой производились испытания, оказывается значительно отклоняющейся от той *математической схемы*, с которой она отождествляется в теории вероятностей.

Теория вероятностей учит, что вероятность последовательного появления счастливой карты равняется произведению вероятностей ее появления в каждой из партий, что эта вероятность мала, что *случаи, когда игрок выигрывает несколько раз подряд, очень редки*. Если вероятность выигрыша при одной партии α , то вероятность последовательных выигрышей при n партиях равна α^n . Но теория вероятностей смотрит на вероятность событий, как геометр — на тела, или как механик — на движение, принимая в расчет только наиболее значительные силы. Теория вероятностей предполагает, что ход игры зависит только от числа благоприятных комбинаций карт и пренебрегает теми факторами, которые, хотя и имеют место, ибо мы имеем дело с действительностью, а не с идеальной схемой, но оказывают слишком слабое влияние на исход игры.

§2. Математическая схема жизни и действительность.

Но столь ли незначительны те силы, которые выводят действительность за рамки этой геометрической схемы? Факты, о которых говорит и народная мудрость, и горький опыт тех, которые имеют постоянное дело с случаем, иногда резко идут против принципов теории вероятностей, указывая, что геометрическая схема слишком тесна для жизни, мрачную глубину которой нельзя ни измерить, ни вычислить.

Они учат о *полосах, счастливых и несчастных случаев*, о неумолимой и капризной судьбе, имеющей своих любимцев и пасынков. Во всех этих случаях мы должны признать действие силы, которую теория вероятностей не в состоянии изловить и выразить в числах.

Если вероятность выиграть в первую партию α , то, по теории вероятностей, вероятность последовательных выигрышей в n партий равна α^n . Но, вследствие действия неведомого фактора, склоняющего судьбу в сторону игрока, вероятность во вторую партию не α , а $\alpha + \varepsilon_2$, где ε_2 хотя и малая, но некоторая, отличная от нуля, положительная величина, при третьей партии вероятность не α и не $\alpha + \varepsilon_2$, а $\alpha + \varepsilon_3$, где $\varepsilon_3 > \varepsilon_2$, затем $\alpha + \varepsilon_4$, $\varepsilon_4 > \varepsilon_2$ и т.д. Вероятность n последовательных выигрышей

$$\alpha(\alpha + \varepsilon_2)(\alpha + \varepsilon_3) \dots (\alpha + \varepsilon_{n-1}) > \alpha^n$$

и может быть значительно больше α^n и даже очень велика, если члены ряда

$$\varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots \varepsilon_{n-1}$$

быстро возрастают. Под действием такой силы, вероятность выигрыша (или проигрыша) при последовательных партиях возрастает.

Но такое действие, как учит горький опыт, имеет место лишь пока полосы несчастных и счастливых событий продолжают. Как известно каждому, эти полосы *обрываются сразу*, игрок подобен канатному плясуну, который каждую минуту рискует оборваться; он движется шаг за шагом, счастливый шаг дает ему уверенность в новом шаге, пока не дойдет до последнего рокового шага, который и свергнет его в пропасть. Счастье игрока подобно приятному сновидению, которое внезапно обрывается, возвращая его к прежней действительности. Посмотрим, что говорит “игрок” Достоевского.

“Не помню я уже тут ни расчета, ни порядка моих ставок. Помню только, как во сне, что я уже выиграл, кажется, тысяч шестнадцать флоринов, вдруг *три* несчастными ударами спустил из них двенадцать; потом двинул последние четыре тысячи в “раз” (но уже почти ничего не ощущал при этом, я только был каким-то механизмом бессмысленным) опять *выиграл, затем выиграл четыре раза сряду*. Помню только, что я забирал деньги тысячами, запоминаю я тоже, что *чаще всех выходило двенадцать средних*, к которым я и привязывался. Они выходили как-то *регулярно, непременно раза три, четыре сряду*, потом исчезали на два раза и потом возвращались опять раза на три или четыре сряду. Эта удивительная регулярность встречается иногда полосами и вот это-то и сбивает с толку записных игроков, рассчитывающих с карандашом в руках¹.

Эти факты отнюдь не приводят нас к признанию метафизического элемента, действия трансцендентной сущности, живущей вне времени и пространства и направляющей судьбу игрока разумно к выполнению своих, нам неведомых целей.

Нам представляется совершенно *бесцельным* и бессмысленным *распределение* даров фортуны, как между различными людьми, так и для одного человека в различное время.

Эти полосы счастливых и несчастных случаев представляют [собой] *нелепые подражания однажды происшедшему*, причем не носят на себе никакой печати разумной целесообразности и какого-либо интереса к тому, несут ли они счастье или гибель человеку.

Здесь невольно возникает образ обезьяны или идиота, который тупо повторяет телодвижения стоящего перед ним человека.

“Математическая” точка зрения устанавливается теорией вероятностей и на всю человеческую жизнь, которую можно рассматривать как ряд игр в том широком смысле слова, каким пользуется теория вероятностей, где игроком является сам человек, ставящий себя на карту по своему

желанию или по принуждению безжалостных случайных обстоятельств, в которые он попадает на жизненном пути. С этой “математической” точки зрения судьба не представляется жестоким существом; она может блестяще оправдать себя от неприятных обвинений с помощью теории вероятностей.

Вот два человека: Павел и Петр, приблизительно одной и той же среды, с одной и той же жизнеспособностью. Павел и Петр – это два игрока, выигрыш которых определяется выходом [для] первого – белых, [для] второго – черных шаров из урны, причем в урне [находится] одинаковое число белых и черных шаров. Если на голову Павла повалятся несчастья, то причиной этому не гнев богов, а только то, что этот человек или слаб и не может вынести то, что другие выносят, не может побеждать и должен быть побежден, или то, что он безумно смел и рискует там, где не следует рисковать.

Василий Фивейский не укладывается в математическую схему, как и бедный Макар русской пословицы.

Но жизнь много глубже, много трагичнее и злей, чем наша схема, в которую мы желаем ее всунуть. Она смеется над математическими расчетами там, где результаты последних ожидаются с наибольшей уверенностью. Иногда с жестокой настойчивостью тянутся полосы удач и неудач, и все усилия человека порвать их не достигают цели. Перстень Поликрата, брошенный в море, возвращается снова к Поликрату хотя бы [и] чудесным путем.

§3. Мое и не мое.

Всякое сознательное действие слагается из элементарных актов, из которых только часть сознается, большинство же находится под порогом сознания. Когда я иду по дороге к наперед намеченному мною месту, то совершаю ряд шагов, из которых большинство совершается бессознательно, как движение смычком музыканта. Во время ходьбы мое сознание может быть всецело занято каким-либо размышлением, которое прерывается время от времени в те моменты, когда процесс ходьбы всплывает в сознании. Встреченный по дороге человек, перед которым следует посторониться, неровная почва, препятствующая ровной ходьбе и т.д. являются причинами таких разрывов. Независимо от прогресса мышления, протекающего в сознании, бессознательная мысль свершает свою работу, управляя ходьбой, как бы по данному приказанию или инструкциям сознания, и только в исключительных случаях обращается за помощью к высшей инстанции.

Всю цепь элементарных актов, из которых, слагаются наши действия, можно представить себе в виде неровного дна реки, то поднимающегося над уровнем воды, то опускающегося вглубь.

Направление наших бессознательных шагов, даже, более того, средняя их скорость определяется некоторой сознательной целью, которая определяет сознательное действие. Но, конечно, сознание заинтересовано только общим направлением шагов, в иных случаях их скоростью, но для него являются *безразличными* детали, оно *допускает произвольность в известных границах*; шаги могут быть то меньше, то больше, движение может отклоняться то влево, то вправо, не направляясь с геометрической точностью по одному направлению, отмеченному сознательной волей.

Таким образом, *элементарные акты определяются сознанием не вполне, а только частично*. Чем определяется эта остающаяся, независимая от сознания часть? Следует ли предполагать, что бессознательная деятельность только слепо выполняет то, что ей приказывает сознание, что, например при ходьбе, ее деятельность сводится только к производству шага в данном направлении и с данной скоростью, намеченными сознанием? Следует ли думать, что, если один из ряда актов отличается от другого, то это только вследствие того, что тот механизм, который находится в распоряжении бессознательной психики, не вполне совершенен и не дает возможности в точности выполнять ей веления высшей инстанции?

Или, наоборот, следует предположить некоторую *автономность* в деятельности бессознательной психики, признать, что существует некоторая область, на которую не распространяется власть сознания, в которой *бессознательное эмансипируется*, где направление и характер действий определяется не выставленной сознанием целью, а другими целями, лежащими ниже порога сознания?

§4. Механизм бессознательных актов.

Для решения этого вопроса нам кажется необходимым установить особую точку зрения на бессознательные процессы. Нам представляется, что только тогда введение в рассмотрение бессознательных актов является в науке плодотворным, если предполагать, что механизм их совершенно тот же, что механизм сознательных актов. Мы должны совершенно отбросить взгляд на бессознательную психическую деятельность, как на непосредственное проявление Абсолюта, этот источник самых серьезных заблуждений. По этому учению под порогом сознания мы носим какого-то бога, который безошибочно, с искусством, завидным для вечно колеблющегося и полного ошибок сознания, работает для [реализации] своих метафизических целей. Это драгоценное свойство бессознательной деятельности, служащее печатью трансцендентного происхождения бессознательной психики, должно быть раз и навсегда отвергнуто. Если мы теперь проследим все те случаи, где является необходимым для объяснения введение бессознательных процессов, то легко увидим необходимость представления их вполне аналогичными сознательным, с единственным различием в том,

что в них отсутствует сознание. Приходится говорить и о бессознательном мышлении, и о бессознательных воле и ощущениях.

“Бессознательная деятельность,— говорит Гейфдинг,² — несет на себе отпечаток тех же принципов и законов, которые управляют и сознательной работой”.

Противникам введения в психологию понятия о бессознательной психической деятельности необходимость признания бессознательного ощущения наряду с бессознательным мышлением, с которым еще, может быть, их можно примирить, может показаться доказательством *Reductio ad absurdum* ложности этого учения. Можно ли ощущать, не сознавая этого ощущения? Не представляется ли это воплощенным абсурдом, так как сознание должно явиться неотъемлемой частью каждого ощущения, и только через сознание мы узнаем, что такое ощущение?

§5. Низшие сознания.

В споре о бессознательном возможно примирение во многих отношениях между противными сторонами. [Это возможно], если сгладить и последнее различие между бессознательной и сознательной психической деятельностью, если признать, что то, что мы называем бессознательной деятельностью, лишено не вообще сознания, а того сознания, которое определяет единство нашей личности, если признать, что порог сознания не указывает конец сознания, что те ощущения, интенсивность которых опускается ниже границы, отвечающей порогу сознания, могут существовать в области низшего порядка сознания. На этой точке зрения и становится Э. Гельтман в своем учении об относительном бессознательном в противоположность Абсолютному.

Тот же вывод делает и Гейфдинг, основываясь на психофизическом параллелизме. “Бессознательное, — по его мнению, — как таковое, понятие чисто отрицательное, ничего не объясняющее; положительное в этом понятии есть *сознательная душевная жизнь в низших центрах сознания*, и только после признания этого положения, бессознательное становится положительным объяснительным принципом. Физиологически это объясняется тем, что каждое раздражение, доходящее до большого мозга, разветвляясь на пути, вызывает также и в подчиненных нервных центрах возбуждения, которые, отчасти, самостоятельно превращаются в движения, а отчасти вновь посылают модифицированные раздражения к большому мозгу”. Того же мнения придерживается и Паульсен.

Итак, наряду с главным, властвующим, царственным сознанием мы признаем другие сознания низших порядков.

Мы рассматриваем психическую жизнь состоящей из целого ряда психических центров, около которых группируются системы психических актов.

Да не покажется странным признание таких ощущений, которые *мы не сознаем*, но которые тем не менее *сознаются*. Ощущения Павла не сознаются Петром, но тем не менее Петр не имеет основания отрицать ощущения Павла. В то время как то, что называют сознательной психической деятельностью, представляет [собой] систему основного центра С, совокупность низших центров определяет бессознательную или, лучше сказать, подсознательную жизнь.

Взаимоотношения между этими центрами следует понимать отнюдь не в смысле какой-либо социалистической общины, каждый член которой пользуется равными правами или, лучше сказать, равным бесправием, служа всецело безопасности и благосостоянию этой общины. С представляет [собой] тирана, захватившего власть, но каждый момент рискующего потерять ее, если не во всем своем царстве, то хотя бы в небольших его частях. Борьба с самим собой – вот главное содержание жизни. Это – борьба ангелов и дьяволов, живущих не вне нас, а в нас самих, это война различных душ, различных сознаний. Это ряд заговоров рабов против повелителей, усмирение их или гибельная для господина и них самих победа! Но даже бесправный раб имеет свое, хотя бы и весьма жалкое, имущество, имеет хотя бы и весьма узкую область, в который уже он является неограниченным владыкой. Низшее сознание, или, как мы будем называть, низшая психика, в силу присущей ей воли к власти, должна захватить ту область, которая оставлена ей господином без внимания. То, что в элементарных актах не определяется центральным сознанием, принадлежит низшим сознаниям. Итак, моим телом владеет не одно Я, а многие, ведя время от времени борьбу за обладание, и не инстинкт самосохранения, а воля к власти – главный фактор этой борьбы. Как богач, заняв квартиру в двенадцать комнат, загоняет бедняка в подвальную каморку, так и центральное Я, овладев главной частью организма, оставляет низшему Я незаметную ему область, которая тем не менее может таить в себе то, что может послужить к его гибели.

§6. Гиперстезия низших сознаний.

Есть области, где порог сознания низшей психики ниже, чем для С, и это является причиной того, что эти ощущения нами не сознаются. Низшая психика может слышать и видеть, когда С ничего не видит и не слышит. Как центральная психика в своей широкой области, так и низшая в своих узких, эволюционируют, и низшая психика, связанная, например, с нервами осязания, может, будучи в остальном неизмеримо ниже центральной, лучше осязать и знать то, чего не знает эта последняя.

Орел со своим ничтожным мозгом обладает зрением, о котором не может мечтать ни один человек, и которое служит ему не для раскрытия тайн пестрой природы, его окружающей, а для выслеживания с тех огром-

ных высот, на которые он поднимается, тех жертв, которые служат ему пищей.

Что такое предчувствие, как не результат большей чувствительности одной из низших психик? Начало процесса — первое ощущение и ряд умозаключений находится под порогом сознания, и только конец, то сильное чувство, которое является как бы заключительным аккордом, всплывает, как туманное предчувствие, в область сознания.

Этот взгляд дает возможность представить в ясной форме то объяснение вещих снов, которое дает Вундт, опираясь на факт бессознательной психической жизни.

Вундт рассказывает о библиотекаре, который три ночи подряд видел во сне пожар вверенной ему библиотеки, пока, наконец, не заметил одно место на полке, где книги, прилегая к печной трубе, начинали тлеть. Таким образом во сне библиотекарь получил как бы предупреждение и, если бы он, под влиянием сновидения, не произвел тщательного осмотра, то сон мог бы оказаться вещим.

Явление это объясняется так. Запах гари был настолько слаб, что не мог быть ощущаем библиотекарем в бодрственном состоянии. Запах гари был *недоступен сознанию, но тот же запах ощущался низшим сознанием*, которое и создавало ряд отвечающих ему образов.

Во сне произошло колебание порога сознания С, и в него устремилось содержимое низшего сознания.

Во сне имеет место понижение деятельности только главной, основной психики, но психики низших порядков могут проявить, наоборот, повышенную, в сравнении с нормальной, деятельность. Когда хозяин спит, слуги чувствуют себя хозяевами.

Во сне колеблется единство личности; в сознании вышлывают такие образы, ощущения и мысли, которые не могут быть связаны со всей системой психических элементов, образующих нашу личность. Эти образы, ощущения и мысли принадлежат низшим психикам. Из темных недр души на светлую поверхность сознания происходят извержения.

Случается, что во сне предлагают нам какой-либо вопрос или загадку, на которую мы не можем ответить, но на нее отвечают другие, и в верности их ответа мы точно убеждаемся во сне или по пробуждении.

Можно было бы стараться объяснить это воспоминанием. Загадку, может быть, мы знали раньше и знали также и ее решение. В образах сновидения проектируются только наши воспоминания. Но подобное объяснение является неправильным в том случае, когда наверняка известно, что такой загадки мы не могли прочесть и весьма мало вероятно, чтобы могли ее от кого-либо услышать.

Автору пришлось увидеть следующее сновидение: войдя в комнату, он увидел своих братьев, которые предложили ему шараду: "первый слог — известный трагик, второй — предлог, третий — местоимение, а все вместе — лошадь" и, когда автор, по размышлении, не смог ответить, ему

была дана разгадка: “Россинато”. Очевидно, в этой шараде ошибка: лошадь Дон-Кихота – не Россинато, а Россинант, “нан” не может быть предлогом. Такой шарады, конечно, не приходилось ни читать, ни слышать и вряд ли приходилось и самому сочинять, так как тотчас по пробуждении была найдена ошибка. Продолжая начатую сознанием перед началом сна работу, низшая психика продолжала ее тогда, когда сознание было полно образами сновидений.

Колеблясь около порога сознания, мыслительная работа низшей психики только частью проникла в сознание. Сперва проникло задание загадки и проектировалось в образы сновидений, затем, под давлением течения образов, всплывает и разгадка.

Строение низшей психики то же, что и высшей. Она желает, ощущает и мыслит. Будучи в общем ниже по развитию, она может, тем не менее, проявить некоторые специальные способности, равные и даже превосходящие соответствующие способности высшей психики.

§7. Убожество низшей психики.

Мы считаем необходимым подчеркнуть тот факт, что общее развитие низшей психики очень низко.

Из того, что в величайших открытиях принимала участие, бессознательная мысль, не следует ей, главным образом, приписывать в этом заслугу. Выстроен тысячами рабочих храм, – но не рабочих, а архитектора мы должны признать творцом этого храма. Выиграно сражение, кто же главным образом победитель: сражавшиеся солдаты или их гениальный полководец? Архитектор без рабочих, полководец без солдат – ничто, так как их идеи остаются неосуществленными.

Бесспорно, что огромная часть мыслительной работы совершается в тайниках подсознательной жизни, рядом с главной психикой прыдут свою пряжу и низшие психики. Но работа последних определяется высшей. Если задача, не решенная сознанием, решается в подсознательной области, то отнюдь не потому, что за порогом сознания сидит лучший, более смысленный работник, а только потому, что здесь, хотя и лучший, да только один, а там их тысячи, хотя эти тысячи хуже мыслят и кругозор их *уже*, но на тысячу неудач может быть одна удача, и эта – то удача и всплывает в сознание. Вот как характеризует Бинз³ бессознательную жизнь нормального человека: “ходить, садиться, перевернуть страницу книги, – это все акты, которые мы совершаем, не думая, но довольно трудно изучить у человека нормального бессознательную деятельность: и, более того, эта деятельность представляется консервативной, состоящей из *привычек, живущей повторениями*, вообще она выдумывает мало, иногда кажется судящей и рассуждающей, но эти суждения и заключения – старые, которые она *повторяет*, и почти никогда не возвышается до ступени независимой личности”.

§8. Вторичное Я истеричных.

В нормальном состоянии центральное Я властвует над другими, низшими Я, властвует, как неограниченный монарх. Но может случиться, что рядом с тираном встанет узурпатор части или даже всей его власти. Обе руки поднимаются велением основного центрального сознания. Боль от укола руки доходит до него, как сигнал об опасности, и, в свою очередь, мышцы производят то, что отвечает решению, принятому главным Я для отражения опасности. Но, когда равновесие нервной системы нарушено, когда мы имеем не нормального, здорового человека, а истерика, то может случиться, что рука не почувствует боли и не будет повиноваться сознательному желанию.

Власть над ней отнята от центрального Я. *Она не принадлежит ему.* Владения тирана разделены. Здесь мое, но рядом с моим есть то, что не Я, что другое Я считает своим.

Нечувствительная рука истеричного нечувствительна только для центрального сознания, но она чувствительна для другого сознания, для того, которое узурпировало власть главной психики. Именно на эту точку зрения становится Бинэ при своих объяснениях явлений сомнамбулизма.

В явлениях истеричной нечувствительности, когда, по мнению Бинэ, мы имеем, так сказать, перед нашими глазами, два сознания, одно, хотя и потеряло часть своей власти, но еще настолько сильно, что составляет независимую личность, другое находится наполовину в эмбриональном состоянии, подобное ребенку, который, выйдя из утробной жизни, еще не все видит и не все слышит. И вот, изучая эти сознания, мы можем, так сказать, воочию наблюдать подтверждения того, что выше сказано о низших психиках.

Прежде всего резко выступает возможность *гиперстезии*. Низшие психики могут лучше видеть, лучше слышать, чем основные.

“В явлениях отрицательных галлюцинаций (или, как ее называет Бинэ, систематической анестезии) субъект по внушению, сделанному ему в гипнотическом состоянии, не видит определенных, указанных в этом состоянии предметов.

Так, например, не видит из пяти карт одну определенную карту, например, туза пик. Совершенно справедливо замечает Бинэ, что для того, чтобы субъект не видел определенной карты, необходимо, чтобы он предварительно ее узнал, необходимо, чтобы подсознательное Я его видело. Все это весьма ясно доказывает, — говорит Бинэ, — что субъект поступает, как личность, имеющая желание, волю не видеть невидимый объект, он устанавливает себя так, чтобы не видеть, он приспособляет себя к этому: и он стремится в особенности не смешать его с тем, который ему оставлен, он различает его от других, он его узнает, но иногда ошибается, это значит — не узнал его”.

§9. Тенденция к подражанию низшей психики.

В тех же явлениях видно и общее низкое развитие вторичного сознания в сравнении с главным. Действия его определяются большей частью не сознательными целями, а только *волевыми представлениями*. Образ или идея влечет его к соответствующему действию так же, как движения человека влекут обезьяну или ребенка к подражанию им или взгляд с высоты горы или высокой башни влечет нас к падению. В основе *недоразвитая* и только односторонне гиперстезированная низшая психика обнаруживает резко склонность к *подражанию* и *повторению*. Вот простейшие опыты над истеричными, о которых упоминает Бинз⁵.

“Пусть нечувствительная рука субъекта спрятана за экраном. Дадим этой руке медленное или быстрое правильное движение, например, движение ко рту и обратно, или будем вертеть руку около локтя или будем сгибать палец. Если мы теперь внезапно остановим член во время движения, то увидим продолжающимся некоторое время движение, которое будет различно для разных субъектов. У одних сообщенное движение продолжится очень мало, палец, который сгибали несколько раз, разгибается очень трудно, если его оставить: движение слабо и неустойчиво. Наоборот, у других больных сообщенное движение может повторяться несколько раз подряд, и мы видели истеричных, у которых повторение имело место сто раз без перерыва”.

Эта склонность к повторению замечается и при более высоких актах подсознательного. Это можно усмотреть и в автоматическом письме истеричных.

Особа пишет по несколько раз одну и ту же букву.

В указанных нами опытах подсознательное повторяло свое, но можно указать случаи, когда оно повторяет то, что начало сознательное⁶. Можно попросить истеричного написать несколько раз букву А, и затем остановить, — вопреки его желанию рука продолжает писать, и часто можно прекратить это, лишь отбросив перо в сторону. Если чувствительная рука истеричного выводит какие-либо буквы, то нечувствительная рука вложенным в нее карандашом пишет те же буквы.

Низшее сознание, управляющее ею, не понимает их, оно не может о них судить и рассуждать, оно только тупо подражает тому, что делает главное сознание.

§10. Раздвоение личности.

Может случиться, что гордый тиран, сверженный узурпатором, уступит хотя бы на короткое время свое место этому последнему. Тогда прежнее Я заменится новым Я, и это новое Я, как и прежнее, обратится в личность, оно притянет к себе иные, чем прежнее Я, элементы, оно начнет новую жизнь в чужом жилище. Мы будем иметь тогда не два сознания, а две личности, мы будем иметь две жизни в одном теле, последовательно друг друга сме-

няющих. Сегодня эта голова, эти руки и эти ноги принадлежали А, который имеет свой характер, завтра это же принадлежит В, который не знает А, который помнит то, что не помнит В, который весел, когда А угрюм, который нравственен, когда А полон самых грязных пороков. Во многих психологических сочинениях можно найти описание известных наблюдений доктора Азама над некоей Фелицией, которая жила двумя жизнями, разделенными между собой истеричным припадком и сном. То же случилось и с одной американкой. При этом при переходе из одного состояния в другое ей приходилось всему снова учиться, так что вторичное сознание все-таки и по одержании полной победы осталось значительно ниже развитым в сравнении с первичным.

§11. Уроды.

Там, где само высшее сознание не высоко, низшее сознание может по его исчезновении легко занять его место, хотя бы на короткое время. Организм будет продолжать жить совершенно так же, как продолжает существовать и идти к цели отряд солдат, в котором убитого офицера замещает один из солдат.

Животное⁷, лишенное всего головного мозга, может приспособлять свои движения к изменившимся внешним условиям и притом приспособляя так, что, если бы мы имели право видеть здесь сознание и волю, мы должны были предположить у лягушки полное знание положения как всего тела, так и отдельных его частей.

Если у лягушки отрезана нога на той стороне, на которой действует на тело кислота, то лягушка сначала делает бесплодные попытки стереть раздражающую жидкость кулечей, но потом употребляет ножку другой стороны тела. Если положить обезглавленную лягушку на спину и помазать кислотой внутреннюю сторону одного из бедер, то она, стараясь удалить кислоту, трет бедрами друг о друга: если при этом оттянуть одно бедро в сторону, то, после некоторых попыток в прежнем роде, она вытягивает другое бедро по направлению к первому и снова достает им до раздраженного места и т.д.

Но самостоятельное положение двух сознаний в одних и тех же областях может проявиться и одновременно, именно тогда, когда анатомическое строение организма дает повторение одних и тех же органов, т.е., когда мы имеем дело с уродом.

“У уродов паразитного типа, — говорит Рибо, — по мере того, как организация делается почти единичною, все жизненные отправления, все проявления воли совершаются почти также, как и у нормальных существ. Меньший из двух индивидуумов, являясь придатком и инертной частью большого, имеет на него лишь очень слабое влияние, ограничивающееся самыми малыми из отправлений”.

Урод, известный под названием “*Ericone de Home*”, имел одну паразитную голову, которая представляла [собой] лишь весьма несовершенный очерк нормальной жизни. “Я не есть, — заключает Рибо⁸, — сущность, действующая как и где ей угодно, произвольно управляющая органами и произвольно ограничивающая свою область... Область ее определяется анатомическими связями с мозгом и оно представляет то целое тело, за изъятием одной нераздельной части, то половину тела, то такую ничтожную область, как у уродов паразитного типа, что не может существовать и обречено на гибель”.

§12. Низшая психика в элементарных действиях.

Для того, чтобы уяснить, каким образом можно найти фактор, изменяющий вероятности случаев видимо равно возможных и создающий полосы счастья и несчастий в бессознательной жизни, в деятельности тех низших психик, о которых мы говорили, возьмем сперва явление, так сказать, простейшего механизма. Возвратимся к процессам ходьбы. Предположим, что, свершая свой обычный путь от квартиры до университета, я однажды споткнулся на каком-либо месте. Неудачный шаг был также (относительно) бессознателен, как и большинство остальных шагов. Вина в неудачном шаге лежит на низшем сознании, которое, как мы уже не раз утверждали, может ошибаться так же, как и главное сознание. Расчет длины шага был неправильно сделан. Если эта ошибка повторится второй раз, то она *еще легче* повторится и третий, а затем и четвертый раз, если только не вмешается сознание, т.е. я не обращаю на это внимание, сознательно не сделаюсь более осторожным. Опыт показывает, что низшая психика имеет склонность повторять ошибки, действовать не в направлении пользы и безопасности всего организма, а слепо воспроизводить несколько раз свершившееся вредное действие. Таким образом поступает низшая психика Горбуновского ямщика, сваливающего тарантас “кажинный раз на этом месте”⁹.

Такая повторяемость является возможной вследствие автономности низшей психики в известных границах, правда довольно тесных. Сознание *C.*, как нами было показано, не интересуется деталями, оно требует ряда шагов, совершаемых в намеченном направлении, не интересуясь механизмом каждого шага. Споткнуться или не споткнуться, пока сознательное внимание не направлено на движение ноги, всецело зависит от психики низшего порядка.

Если эта последняя находится под властью какого-либо довольно сильного представления, способного вызвать соответствующий ему волевой импульс, то действие ее может оказаться вполне неразумным. Она может направить все то, что поручено ей высшей психикой, к опасности. Она может под очаровывающим действием какого-либо образа увлечь ее и себя к окончательной гибели.

§13. В силке подсознательного.

Передо мной опять находится урна с 10 белыми и черными шарами. Вероятность вынуть белый шар равна вероятности вынуть черный. Вынимая последовательно на удачу один шар за другим и возвращая его в урну, я должен рассчитывать, что черный и белый шары будут выходить одинаково часто. Условившись с кем-либо получать с него 1 рубль за белый и отдавать 1 рубль за черный, я должен ожидать, что не буду ни в большом проигрыше, ни в большом выигрыше. Такая игра должна быть признана безобидной для меня и для моего партнера. И мы выше указали, что такие выводы имеют место только если выходом руководит *случай*, если действительность близко подходит к математической схеме, если Я не знает, где белый и где черный шар, или, точнее, если никто из власти имущих над моей рукой [этого] не знает.

Но то, чего не знает главное я, то может быть известно низшему Я, что не известно начальству, то может знать подчиненный. Движения руки в урне, которые приводят к поднятию того или другого шара, это и есть те малые движения, которые не подчинены центральному Я, но про которые еще нельзя сказать, что это движения чисто механические, что человек в этих движениях — автомат, наподобие декартовых животных.

Эта область принадлежит низшему Я, это тот угол, в который победитель, торжествующий своей неограниченной властью, центральное Я, загнал своего побежденного врага. Но там, в этом темном углу, в этой скрытой засаде, враг *лучше видит, и больше знает*, чем его победитель. Он может оказаться именно таким низшим сознанием, которое в известных отношениях обладает большей силой, гиперстезией каких-либо способностей. Как вторичное Я спящего или сомнамбула оно может обладать более тонким осязанием, различающим поверхность черного шара от поверхности белого, может иметь и такие способности, которые у главного Я или [пребывают] в эмбриональном состоянии или даже совершенно отсутствуют.

Где белый и где черный шар? Центральное Я этого не знает. Но ведь “Я” библиотекаря, о котором мы выше говорили, не слышало того запаха, что был доступен другому Я, вызвавшему образы его в сновидении. Низшее Я, властитель моей руки, которое по существу ничем не отличается в тот момент, когда я вынимаю шар, от вторичного Я сомнамбулы, оно именно и является помехой для законов случайности. Вмешательство этого низшего Я и нарушает приблизительную правильность поочередных выходов белого и черного шара, создавая полосы последовательных удач и неудач.

Оно знает, что сейчас вышел черный шар два раза, и его тянет направить руку, чтобы снова вышел черный шар, место которого оно знает. И опять за выходом черного шара оно направляется к новому черному шару

и продолжает так, пока не ошибется, ибо ему свойственно ошибаться также, как и высшему Я. Но если низшее Я знает, где белый и где черный шар, если оно может вынуть тот, который оно пожелает, то отчего же оно не вынимает тот, который является наиболее желательным центральному Я и тот, который, может быть, является необходимым и полезным всем Я, как высшему, так и низшим. Это происходит только потому, что это Я именно *низшее* и не только низшее в том смысле, как низшим является подчиненный к своему начальнику, но и в том смысле, что в общем (а не в некотором специальном направлении) оно менее развито, оно не может так мыслить, как мыслит центральное Я. Если оно поступает предательски, то не потому, чтобы оно желало сгубить своего монарха и себя самого; оно поступает так потому, что на той низкой степени развития, на которой оно находится, оно не может иначе поступать, оно, как вторичное Я сомнамбулы, главным образом должно *повторять* в своей автономной области.

При этом эта тенденция к повторению тем сильнее, чем сильнее тот образ черного шара, который опускается в низшее Я из сознательного Я, все более и более волнующегося то страхом, то отчаянием, при следующих друг за другом проигрышах, и все возрастая, он выступает все более и более могущественной силой против случая. Но весь ужас, как грозная туча окружающий в сознании образ черного шара, остается наверху, ибо низшее Я уже не способно ни бояться, ни отчаиваться так, как боится и отчаивается его властитель. Происходит то же, что с рукой сомнамбулы, но только в обратном направлении. Анестезированную руку сомнамбулы подвергают девяти уколам, в сознании его ярко возникает *идея девяти*, которую он не знает, куда отнести. В автоматическом письме¹⁰ главное сознание думает о слове, а вторичное сознание пишет слово; ассоциация идей совершается между сознаниями, но каждое из них остается в своих границах: сознание А ничего не знает об идеях и движении, производимых в В. Из А в В проникает только *очищенная идея*, без указания на то, что ее окружает, и она в В производит действие, ей отвечающее. Сомнамбула иногда вспоминает явления бодрственной жизни, но не приписывает их себе, она говорит о бодрственной личности, как о посторонней, она вспоминает ее, *как другую*, ибо в сознание ее проникли лишь образы из жизни последних, очищенные от чувств, с ними связанных.

Совершенно такое же явление наблюдается в тех случаях, когда страх перед каким-либо явлением и все вытекающие отсюда старания центрального сознания избежать его, роковым образом разбиваются при встрече с какой-то более могучей силой, которая быстро возрастает вместе со страхом.

Достигая необычайной яркости при конвульсивных постоянных возвращениях трепещущего по нему под давлением ужаса сознания, представление опускается в низшее сознание, обращаясь в волевое представление, влеча последнее к действию, соответствующему ему. Идиот Достоевс-

кого¹¹ боится разбить китайскую вазу, столь дорогую Аглае, и вот страх роковым образом приводит к тому, что то из движений его, которое было для него бессознательным, совершает столь страшную для него катастрофу.

Итак, мы видим, что сознание, отдавая себя случаю, отдает себя во власть низшим сознаниям, незаметно для себя выпуская из клетки диких зверей, добычей которых и делается. Подобно тому, как стадо коров, убежав от пастуха, мчится по полотну железной дороги, влекомое не инстинктом самосохранения, а очарованное огненными глазами приближающегося чудовища, под влиянием одного, все время возрастающего образа, сознание низшего порядка с упорством воспроизводит все те же действия в той узкой области, которая была обойдена вниманием его властителя и от которой зависит теперь его судьба, с упорством движется навстречу тем событиям, которые несут гибель ему вместе с его опрометчивым господином.

О ЗАКОНЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ.

*Natura non facit saltus*¹ – это одно из тех положений, в которые крепко верит современное естествознание.

Бесспорно, что эта вера или, что то же, недоверие к кажущимся скачкам в ходе явлений оказала бесценные услуги науке. Действительно, очень часто непрерывное течение явлений представлялось нам прерывистым только вследствие того, что не все его стадии проходили через наше сознание. Лейбниц², которому принадлежит открытие закона непрерывности, предлагает им руководствоваться в метафизических и естественно-научных исследованиях. “Замечая, – говорит он, – нечувствительную постепенность в частях мироздания, начиная с человека до самых низших частей, на основании правила аналогии мы должны считать вероятным существование той же постепенности и выше нас, вне сферы нашего наблюдения, и этот род вероятности, – заключает Лейбниц, – есть великое основание разумных гипотез”.

Закон непрерывности может быть строго сформулирован в двух следующих постулатах: первый относится к исследованию группы неизменных объектов, второй – к исследованию изменений во времени и в пространстве.

I. Наблюдая в объектах ABC... некоторый признак *a*, имеющий последовательно значения

$$a > b > c \dots,$$

мы должны предполагать существование объектов A'B'C'..., признаки которых имеют значения a'b'c'...; промежуточные между (a b) (b c), сколь бы малы ни были эти промежутки.

Собирая, например, в роще листья и размещая их в ряд по их длине, я убежден в том, что, продолжая сбор листьев, я заполню промежутки в том ряду.

Зная двух сильных людей, из которых А побеждает В, я убежден в существовании где-нибудь третьего С, который, как и А, побеждает В, [но] как и В, побеждается сам А.

II. Наблюдая при различных значениях одного признака *x* объекта А: $x_1 x_2 \dots$ изменение другого *y*, последовательные значения которого:

$$y_1 > y_2 > y_3 \dots$$

мы должны предполагать в промежутках $(x_1 x_2) (x_2 x_3) \dots$ такие значения $x' x'' \dots$, для которых *y* имеет значения $y' y'' \dots$, заключающиеся в промежутках: $(y_1 y_2) (y_2 y_3) \dots$, сколь бы ни были малы эти промежутки.

Так, например, при различном количестве топлива моя печь развивает различную температуру. При *x*, пудах топлива температура *y*, при

x_2 она возросла до y_2 , но, вне сомнения, мне удастся положить столько топлива, чтобы температура была больше y_1 и меньше y_2 .

Частными случаями II-го постулата являются два следующих:

IIa. Наблюдая в различные моменты времени t_1, t_2 изменение a признака объекта А, последовательные значения которого

$$a_1 > a_2 > a_3 \dots$$

мы должны предполагать в промежутках (t_1, t_2) (t_2, t_3) ..., моменты t', t'' ..., для которых a имеет значения: a', a'' ..., промежуточные между (a_1, a_2) (a_2, a_3) ..., сколь бы малы ни были эти промежутки.

IIb. Наблюдая в различных точках x_1, x_2 ... изменение признака объекта А, значение которого последовательно:

$$a_1 > a_2 > a_3 \dots$$

мы должны предполагать на расстояниях (x_1, x_2) (x_2, x_3) ... точки x', x'' ..., для которых a имеет значение a', a'' ..., промежуточные между (a_1, a_2) (a_2, a_3) ..., сколь бы малы ни были эти промежутки.

Математическая формулировка этих законов будет следующей:

I) *Область изменения признаков объектов непрерывна.*

II) *Все законы природы выражаются непрерывными функциями, в частности, непрерывными функциями от*

IIa) времени,

IIb) координат в пространстве.

Положение IIa ясно сознается Лейбницем, который выводит из него необходимость существования бессознательной психической деятельности, заполняющей разрывы между сознательными актами.

Положение IIb смутно сознается Декартом, утверждающим невозможность существования пустого пространства.

Но уже здесь возникают возражения против универсальности закона непрерывности.

При принятии гипотезы бессознательной психической деятельности достигается непрерывность психической деятельности, но факт прерывности сознательной деятельности остается налицо.

Что же касается до утверждаемого на основании закона непрерывности пустого пространства, то ньютоновская физика и атомистическая теория окончательно нас разубедили в этом.

Вопреки положению IIb представляется следующая альтернатива:

Или, признавая единство материи, признать пустое пространство, т.е. разрывы между его отдельными частями, атомами или молекулами.

Или же, признавая различные роды материи, например, эфир и собственно материю, признать промежутки между частями первой заполненными второй.

Последняя гипотеза будет аналогична теории бессознательного мышления в психической деятельности.

В обеих гипотезах мы идем вразрез с выше сформулированным законом непрерывности.

Многие другие примеры из естествознания также говорят против универсального значения закона непрерывности.

Сила природы, обратно пропорциональная квадрату расстояния, выражается функцией, непрерывной для всех значений расстояния, кроме равного нулю, когда она обращается в бесконечность. Будем менять угол отклонения в выражении времени, потребного для отклонения маятника на этот угол. Дойдя до известной величины, мы получим для времени уже мнимое значение, т.е. функция, выражающая время, претерпевает разрыв.

Сам Лейбниц утверждает, что разрывы в природе — лишь одна видимость.

“Все в природе, — утверждает он³, — идет постепенно, а не скачками, и это правило относительно изменений является частью моего закона непрерывности. Но красота природы, требующая различающихся впечатлений, требует видимости скачков или, так сказать, музыкальные интервалы в явлениях, и соединяет вместе различные ступени. Так, хотя в некотором мире и могут обретаться виды, промежуточные между человеком и животным и, по-видимому, где-нибудь находятся разумные животные, за нами следующие, — природа сочла лучшим отделить их от нас, чтобы дать нам без помех превосходство на нашем земном шаре”.

Но если согласиться с Лейбницем, что в естественных науках разрыв может быть только видимостью, в метафизических и теологических исследованиях мы должны признать хотя бы один разрыв между высшей из монад и следующей за монадой монадой, т.е. Богом и этой последней.

Таким образом:

Функции, выражающие законы природы, не для всех значений переменных непрерывны.

Но мы можем также прибавить:

Область изменения переменных не всегда непрерывна.

Некоторые признаки предметов, например, температура не может быть ниже известного предела (-273°).

Кроме того, некоторые признаки объекта могут определяться только целыми числами, числами однородных объектов, агрегат которых представляет данный объект. В этом случае законы изменения других признаков могут выражаться функциями от переменного, переходящего только через целые значения. *Natura facit saltus* — природа делает скачки, но эти скачки — редкое исключение из общего правила.

Функции, выражающие законы природы, непрерывны, за исключением некоторых отдельных значений их. Такие функции представляют предмет исследования математического анализа, почему они и называются аналитическими функциями.

Таким образом, мы приходим к следующей формулировке закона непрерывности, принадлежащей Н. В. Бугаеву¹, подвергнутому остроумной критике закон непрерывности.

Законы природы выражаются аналитическими функциями.

Научное мировоззрение, основанное на этом законе, справедливо названо Н. В. Бугаевым *аналитическим*. Это направление до сих пор сказывалось во всех областях знания, всякое изменение в природе рассматривалось им как результат ничтожных изменений во времени, без резких и сильных переворотов. Если в иных случаях трудно было избежать признания крупных переворотов в сравнительно короткое время, то эти перевороты признавались за особые исключения из общего правила.

Лучшим выразителем этого направления является эволюционная теории Дарвина: происхождение высших видов из низших при помощи ряда ничтожных изменений их признаков под действием естественного отбора и борьбы за существование. Конечно, этот закон не является научным доказательством теории Дарвина, но все-таки положение: "*natura non facit saltus*" представляет своего рода философский аргумент в ее пользу [и] может служить лишней причиной пристрастия к ней.

В том же направлении идет и современная геология, признающая медленное и постепенное течение геологических процессов в противоположность прежним теориям катаклизмов.

Горячим защитником этого направления и непреложности закона непрерывности является Дюринг; автор "Философии Действительности"².

"Если настоящее делается мерилom прошедшего и будущего, и если настоящий способ действия сил в природе представляет единственный образец для всех действий, то мировых катастроф в точном смысле слова нет.

Во всяком физическом процессе природы эпоха, за которой наступает перемена в свойствах процесса, готовится посредством медленного, постепенного повышения в количественных переходах".

С односторонностью аналитического направления в науке вступает в борьбу Московская философско-математическая школа⁶ с покойным Н.В. Бугаевым во главе. Ей представляется возможным и необходимым соединить это направление с другим, с направлением *аритмологическим*, признающим возможность выражения некоторых законов природы численными функциями. Вместо того, чтобы считать разрывы только исключениями из общего правила, она справедливо признает в иных случаях их общим правилом. Она указывает, что не всякому отношению атомных весов двух химических элементов соответствует существующее соединение, а только некоторому определенному конечному числу его значений. Не всякому атомному весу отвечает химический элемент. Не всякое сочетание звуков производит гармонию, а только тоны, в которых высоты звуков находятся в определенных соотношениях.

Не определяются ли все эти законы числовыми функциями и не представляют ли они случаи, где применение аналитических функций для их объяснения является невозможным?

При таком взгляде, не отказываясь окончательно от аналитического объяснения явлений, мы можем предполагать существование и таких явлений, при которых этот взгляд может быть признан несостоятельным. Независимо от опытных данных, подтверждающих или опровергающих теорию Дарвина, мы должны отказаться от пристрастия к ней, к которому призывает нас принцип "*Natura non facit saltus*", так как в иных случаях природа совершает скачки через ряд промежуточных значений между значениями некоторой численной функции.

Желание философско-математической школы вселить в науку веру в возможность численных соотношений между различными элементами природы идет дальше химии и теории Дарвина.

Так, В.Г. Алексеев⁷ видимо желает видеть эту аритмологическую закономерность и в истории, делая намек на некоторые численные законы в истории. Н.В. Бугаев⁸ делает возражения против детерминизма, предполагая в психических явлениях возможность систематических разрывов.

Нет сомнения, что к этому новому направлению, которое может быть названо возродившимся пифагорейством, приводит столько же желание подвести неподдававшиеся до сих пор математическому исследованию явления, сколь и желание нанести удар принципам позитивного знания, выступившим против дорогих сердцу исследователя идеалов, желание, по выражению Н.В. Бугаева, "уничтожить опасность с этической и эстетической точек зрения" аналитического мировоззрения.

Московская философско-математическая школа верит, что аритмологическое направление убьет и детерминизм, и эволюционную теорию Дарвина, и железную закономерность социальных явлений, сделает волю человека свободной, человека оторвет от низших форм а промежутки между клочками природы, доступные исследованию науки, заполнит предметами веры. Вера в возможность этой победы красной нитью проходит через все сочинения Бугаева, Алексеева и Некрасова.

"С вопросами аритмологическими, — говорит Н.В. Бугаев, — часто связываются самые возвышенные интересы человека. Философ не может отказаться от них во имя одностороннего аналитического мировоззрения. Целесообразность и гармония не могут быть выброшены за борт из истинного научно-философского мирозерцания. При изучении явлений природы следует также с ними считаться. Аритмологическое мирозерцание указывает, что целесообразность также играет роль в мировых явлениях. Оно приводит к убеждению, что добро и зло, красота, справедливость и свобода — не только иллюзии, созданные воображением человека. Оно убеждает нас, что корни их лежат в самой сущности вещей, в самой природе мировых явлений, что они имеют не фиктивную, а реальную подкладку.

Аритмологическое мирозерцание не принуждает нас понимать течение событий только в их роковой и необходимой последовательности. Оно освобождает нас от фатализма”.

Нам кажется весьма сомнительным такое чудотворное значение аритмологического направления. Столь ненавистный Н.В. Бугаеву и В.Г. Алексееву детерминизм состоит в закономерности психических явлений, которые вовсе не устраняются заменой непрерывных функций численными. Я буду одинаково несвободен, заставит ли меня непрерывно двигаться по дороге или перескакивать с одного камня на другой.

Аритмолог может оказаться таким же детерминистом, как аналитик, причем именно детерминизм аритмолога должен быть по преимуществу назван фатализмом. В самом деле, по его мнению, его поступки определяются не только мотивами, зависящими от внешних обстоятельств и его собственной природы, прежними его хотениями и действиями, но еще какими-то фатальными аритмологическими законами.

Можно, например, представить себе аритмолога, который будет утверждать, что желание сделать какой-либо добрый поступок у него по непременному аритмологическому закону должно являться в четные дни недели.

Он может вообразить еще целую массу таких законов, может, наконец, признать свою волю вполне определяемой совокупностью таких законов. Не будет ли такой детерминизм большим фатализмом, чем, например, детерминизм Вундта, строго проводящей разницу между механической причинностью и психической мотивацией.

Приверженцы аритмологического направления стараются убедить в его истинности двояким путем:

1) указывая на ряд явлений, в которых можно предвидеть аритмологические законы и

2) указывая, что принятие этого направления приводит нас к религиозным и нравственным понятиям, полезным для жизни, в противоположность тем, которые создает аналитическое направление.

Но при этом только аргументы первого рода могут иметь значение. Что касается до аргументов второго рода, то, во-первых, как мы уже выше заметили, сомнительно, что аритмологическое воззрение может дать для защиты религиозных и нравственных идеалов больше, чем аналитическое, если эти идеалы ставить, как Н.В. Бугаев, в зависимость от решения проблемы о свободе воли, во-вторых, если бы это и удалось, все-таки оставалось бы недоказанным, что истинное знание есть вместе с тем и наиболее полезное. Нам представляется, что философу следует брать себе примером ту самую математику, к содействию которой обращается Н.В. Бугаев в своих умозрениях. Разве, определяя площадь квадрата, мы должны при выборе для этого формулы руководствоваться ее полезностью, а не выбирать просто ту, которая истинна? Разве для геометрии имеет значение

то, что эта формула может нас убедить в том, что принадлежащее нам поле меньше, чем мы предполагали раньше к нашей гордости и удовольствию?

Что же касается до примеров, приводимых в пользу аритмологического воззрения, то можно также усомниться в их убедительности. Из того, что химические элементы могут соединяться в определенных пропорциях, вытекает ли, что эти пропорции должны определяться численной функцией? При решении некоторой математической задачи мы получаем четыре решения, вытекает ли отсюда, что при решении ее мы пользовались численными функциями, что полученный результат определяется как численная функция заданных величин? Гораздо естественнее ожидать, что мы обычными путями, т.е. пользуясь только аналитическими функциями, решили это уравнение и получили четыре решения.

При решении механической задачи об определении положения равновесия системы точек или тела мы получили четыре решения для расстояния одной из точек системы от начала координат; философу—аритмологу едва ли уместно было бы вводить здесь численные функции. Пользуясь законами механики, выражаемыми исключительно аналитическими функциями, мы составили бы уравнение четвертой степени, откуда и получили бы четыре решения.

Во всех примерах, которые приводятся аритмологами, мы имеем дело с явлениями равновесия, не менее подчиненными закономерностям, чем явления движения.

Сомневаясь в возможности введения в естественные науки численных функций, мы тем не менее разделяем взгляд Московской философско-математической школы, что существуют явления, в которых правилом является не непрерывность, а разрыв. В этом именно и состоит, по нашему мнению, заслуга покойного Н.В. Бугаева.

Ошибки современного естественно—научного мировоззрения следует искать не в применении исключительно аналитических функций, а в одностороннем пристрастии к эволюции, в желании видеть непрерывные переходы там, где имеет место только явление равновесия и его нарушение.

Уничтожение этих ошибок дает не соединение аналитического направления с аритмологическим, а динамического воззрения со статическим. То, что мы рассматривали как непрерывное движение в одном направлении, мы должны рассматривать как ряд скачков через положения равновесия.

Таким образом, ошибка [заключается] не в применении ненадлежащего типа функций, а в ненадлежащем способе их применения. Формулировка закона непрерывности Бугаева остается в силе, но должна быть дополнена следующим образом.

Законы природы, выражаются аналитическими функциями в следующем смысле:

1) *Задается уравнение, составленное при помощи аналитических функций, решениями которого будут некоторые признаки объектов;*

2) *или же один признак задается в аналитической функции от других.*

При истинном синтезе динамического и статического мировоззрений мы должны отказаться от слишком оптимистического и самодовольного взгляда на устойчивость мироздания, по которому все и всегда обстоит благополучно, так как возможные изменения всегда будут ничтожно малы. Не будем обещать вместе с Дюрингом, что “если бы в самом деле планеты когда-либо прикоснулись к солнцу, то поперечники их орбит изменились бы понемногу и постоянно, так что мыслимо даже постоянное приспособление к новым обстоятельствам живущих на этих планетах организмов...”⁹.

Не будем улетать на планеты, которые должны обратиться в газ от таких катастроф, как взрыв водорода на солнце, которым, например, объясняется появление некоторых новых звезд, не будем искать примеров и на нашем земном шаре, где в несколько часов под вулканической лавой гибнут цветущие города и деревни.

Нам кажется, что уже одна жизнь человеческая опровергает эту непрерывную приспособляемость к обстоятельствам, и горе и болезнь, подступая к человеку неслышными шагами, хватают его сразу за горло и проявляют не большую предупредительность к своей жертве, чем Везувий к Помпеям.

Аритмологическое мировоззрение подвергает критике эволюционную теорию Дарвина и дает новые аргументы в пользу старой теории неизменности видов¹⁰. При переходе от одного вида к другому существует возможный при этом мировоззрении скачок. Вся эта совокупность отделенных друг от друга животных видов существует или вечно, или с момента создания их Творцом.

Во взглядах защитников неизменности видов вид рассматривается как устойчивое равновесие. Равновесие может быть двух родов. В то время, как в неустойчивом равновесии малейшие отклонения приводят к полному его нарушению, в устойчивом — они влекут за собой возвращение системы к первоначальному положению.

Относя вид к равновесию этого последнего рода, мы получаем возможность ничтожных отклонений от нормального вида, но таких, после которых вид стремится возвратиться к своей первоначальной форме. Такие отклонения не отрицаются и некоторыми защитниками неизменности видов.

В то время, как ничтожные отклонения приводят устойчивую систему в прежнее положение, более крупные могут ее совершенно вывести из равновесия или привести к новому положению равновесия. Переход от одного вида к другому, этот *salvus* совершается самой природой и представляет просто переход от одного положения равновесия к другому. Не-

прерывное изменение видов должно быть заменено прерывистым рядом скачков через ряд единственно возможных форм. Этот именно взгляд и проводится в теории гетерогенезиса Коржинского и других, защищаемой Гартманом в его знаменитой критике дарвинизма, по мнению которого, все факторы изменения видов, отличающиеся Дарвином: борьба за существование и естественный отбор, в состоянии произвести лишь ничтожные отклонения, не могущие произвести прогрессивное развитие видов. Крупные же изменения признаков следует искать в перерождениях зародыша.

“Изменяемость, производимая естественным отбором, – говорит Гартман, – не может быть названа *расширением* в бесконечность, напротив того, заслуживает определения *колебательного качания вокруг центра – нормального типа*”.

Естественный отбор сводится только к удержанию вида на высоте достигнутого равновесия в приспособлении. Генетическое превращение одного типа в другой в большинстве, и притом наиболее важных, случаев совершается не путем постепенного изменения, а скачками, гетерогенным зарождением при помощи закономерно развивающейся метаморфозы.

Таким образом, здесь изменение признаков вида представляет [собой] не сумму ничтожно малых изменений через длинный ряд поколений, а скачок, совершаемый при одном переходе от родителей к ребенку.

Подобного рода теории (мутационная теория де Фриза и теория гетерогенезиса Коржинского) неправильно называются В.Г. Алексеевым *аритмологическими*. Если бы возможно было здесь применение математических функций, то эти функции были бы отнюдь не численными, а теми же самыми аналитическими функциями, которые мы встречаем в каждой задаче статистики.

Заметим, что и возражения Тейхмюллера против дарвинизма сводятся только к возражениям против непрерывного развития.

“Непрерывные и незаметные переходы, – цитирует Алексеев Тейхмюллера, – возможны только там, где мы не имеем дела с системами и где рассматриваемые элементы трактуются только по их абсолютной, а не относительной величине, как например, падающие капли постепенно выдалбливают углубления в камне, но, если падают на негашеную известь, то на ряду с механическим действием, производят также и химическое, которое подлежит объяснению из другого закона. Даже в чисто физической области можно указать качественные точки, например, в кристаллизации непрерывное убывание теплоты действует при образовании льда не непрерывно, а скачкообразно”.

Эти *качественные* точки Тейхмюллера – это те точки, в которых от динамики мы должны обратиться к статике.

Какие силы заставляют производить при развитии видов существенные и важные для последнего отклонения – этот вопрос выходит за преде-

лы настоящей статьи. Мы только указываем на общую схему эволюции видов.

Существуют положения устойчивого равновесия, около которых происходят колебания, которые, возрастая под действием некоторых сил, главным образом проявляющихся при начале формирования особи, могут достигнуть размеров, при которых равновесие нарушается или переходит в другую форму устойчивого равновесия.

Та же схема годится и для исторических событий, в которых не всегда может быть усмотрена непрерывная эволюция. В своих действиях государства или общественные группы консервативны в том смысле, что все новые создаваемые ими законоположения не выходят из некоторых границ, определяемых основными законами и обычаями, и разрушение которых грозит гибелью тех форм, в которых они существуют. Все отклонения от этих форм обычно приводят их к первоначальному положению устойчивого равновесия. История и этнография дают нам примеры инертности обычаев и законов, в особенности на низших стадиях культуры, характерным выражением которых является виденная в Бубасте Диодором Сицилийским колонна, на которой было начертано: "Я Изида, царица сей страны, воспитанница Гермеса, я установила законы, которые ничто не может изменить".

"Как отдельный индивидуум, — замечает Ломброзо, — так и, в особенности, общество инертно в своих взглядах, оно боится всего нового, мизонезизм — это одно из характерных свойств нормальной жизни"¹¹. Ренан нашел, что в Сирии [сохранились] те же права и обычаи, которые господствовали во время Великой Империи. Дореволюционный период характеризуется возрастанием отклонений от прежних форм. Под действием экономических и идеологических факторов общая воля все дальше и дальше отклоняется от косных привычек, увлекая за собой консервативные элементы. При достижении этими отклонениями известных границ становятся возможными два исхода: или гибель государства, или внезапный переход его к новым, столь же устойчивым, как и первоначальные, формам. История государства есть история революций, между краткими периодами которых тянутся длинные периоды застоя.

Подобный скачкообразный прогресс замечается не только в развитии политических форм государства, но и в научном, нравственном и религиозном развитии человечества.

В психическом росте человека при переходе его через различные возрасты жизни мы видим то же развитие скачками. В течение довольно длинного периода ребенок играет в одни и те же игры, и, как сравнительно краток тот промежуток времени, в который он переселяется из мира детской фантазии в реальный мир.

Если внешние обстоятельства играют более или менее важную роль в создании характера человека, то действие их должно представляться в

следующем виде: в тусклой и однообразной в своем нормальном течении жизни отдельные события мало и на короткое время меняют отдельные черты человеческого характера, жизненная неприятность превращает веселого человека в меланхолика, но время возвращает ему прежнюю веселость и в душе восстанавливается прежнее равновесие. Когда же на жизненном небосклоне разражается настоящая гроза, тогда гнев, печаль или безмерная радость доводят душу до крайних границ напряжения, для которых представляется только следующая альтернатива: или гибель, разрушение в виде сумасшествия, смерти, или перерождение характера, как это произошло с апостолом Павлом, св. Августином и другими.

Сознательная жизнь — это течение представлений, начинающееся с внезапного появления какого-либо ощущения или представления и прерываемое другими, более сильными течениями, всплывающими из недр бессознательной души. Эта прерывность сознательной жизни находит себе объяснение в смысле статического воззрения.

На такой именно точке зрения стоит Авенариус, по взглядам которого сознательный акт является только переходом от одного положения устойчивого равновесия к другому. Явление, начинающее физиологический жизненный ряд, есть нарушение какой-либо из частных нервных систем одного элемента всей нервной системы организма, грозящее его жизни, явление, завершающее ряд, — это реакция, приводящая эту систему к первоначальному положению или к дегенерации этой системы в другую.

В этом случае, когда отклонения или жизнеразности достигают размеров, грозящих жизни не только частной, но и центральной нервной системе, сознательный акт служит для устранения этой жизнеразности и, соответственно, или возвращает систему в первоначальное положение, или переводит ее в новое положение устойчивого равновесия.

Аналогичный этому взгляд на явления сознания проводит в своей психофизике Дельбеф, по которому, с точки зрения физиологической: *“чувствование есть нарушение равновесия”*.

“Организм, — говорит Дельбеф,¹² — подобен эластичному телу, молекулы которого способны различно располагаться между некоторыми границами, но предоставленные самим себе возвращаются в свое прежнее положение”.

Графически всякое изменение y в зависимости от x может быть представлено, как движение точки по некоторой кривой, если за y принимать одну координату точки, т.е. расстояние ее от одной из двух взаимно перпендикулярных прямых, а за x другую координату. Таким образом можно представлять развитие различных способностей индивидуума, общественной группы или, наконец, всего человечества.

При признании закона непрерывности эта кривая должна быть непрерывной, а при формулировке Н.В. Бугасва — аналитической кривой. Всякое возрастание мы можем представлять в конкретной форме движе-

ния различных элементов, образующих систему. Таким представлением и соответствующим языком пользуются, когда говорят о движении науки, искусства и т.д.

Пользуясь этим языком и резюмируя теперь все вышесказанное, мы можем утверждать, что *ошибка аналитического воззрения состоит не в пренебрежении численными функциями, а в ошибочном взгляде на некоторые явления, как на поступательное непрерывное движение элементов, в то время, как они представляют собой только ряд скачков через положения равновесия.*

Но было бы также односторонне предполагать, что всякое движение идет скачками.

Общая схема для исследования явления должна дать следующие элементы:

- 1) *находящиеся в непрерывном движении;*
- 2) *колеблющиеся около положения устойчивого равновесия;*
- 3) *неподвижные, эти элементы могут находиться в положении неустойчивого равновесия.*

Под эту схему подходит следующий конкретный пример.

Ветер гонит по земле осенние листья. Листья — это элементы второго рода — поддуваемые ветром, скачут по земле. Воздух, находящийся в непрерывном движении, это элемент первого рода, наконец, неподвижная земля — элемент третьего рода. Обычную погрешность мировоззрения следует искать в упущении из виду элементов второй категории. Но было бы также ошибкой одностороннего статического воззрения строить мир только на элементах второго и третьего рода. Ошибочным было бы мировоззрение, в котором бы мир рассматривался, как ряд колебаний около положений равновесия.

При таком мировоззрении, возрастание отклонений от положений равновесия, влекущее скачок от одного положения равновесия к другому, оставалось бы неразъясненным. Мы всегда должны предполагать элементы непрерывно прогрессирующие и именно эти элементы, неизменно связанные с другими, колеблющимися около положения равновесия, заставляют возрастать колебания последних и доводят их до размеров, приводящих их в новое положение равновесия, или мы должны признать непрерывно действующую силу, увеличивающую отклонения колеблющихся элементов. Так, при движении по земле листьев, мы должны признать ветер и воздух [находящимися] в непрерывном движении. В исторической эволюции, в действительности, усматриваются элементы непрерывно прогрессирующие в то время, как другие находятся в колебании. В то время, как наши формы общежития колеблются в тесных границах, наш ум и чувствительность непрерывно прогрессируют.

Если в заслугу Авенариусу может быть поставлена оригинальная идея рассматривать явления сознания со статической точки зрения, то, с

другой стороны, нельзя не усмотреть односторонности, состоящей в исключении элементов первого рода нашей схемы. Состоят ли все явления сознания в одном возвращении к первоначальному положению равновесия? Нет, и Авенариус находит возможной дегенерацию систем, переход к новым положениям равновесия. А если это так, то не следует ли искать этому объяснения в элементах непрерывно-прогрессирующих или в непрерывно действующей силе?

Не находят ли все эти явления объяснение в том, что к принципу самосохранения должен быть прибавлен другой принцип, который может находиться с первым в антагонизме? Стараясь все явления психической жизни объяснить из принципа самосохранения всего организма или частных нервных систем, не уподобляемся ли мы физиологу, который, признав функцию питания, упустил бы из виду непрерывный рост организма? Невозможность подвести все явления психической жизни под односторонний принцип самосохранения, в особенности ясно осознан величайшими современными индивидуалистами: Ницше и Гюйо.

Правда, философия Ницше берет начала в философии Шопенгауэра и эволюционной теории Дарвина, но в последних стадиях своего развития она уже становится к ним во враждебное отношение.

Пессимизм и аскетизм Шопенгауэра исчезает перед верой в явление сверхчеловека. Принцип непрерывности развития отвергается признанием внезапного обращения человека в сверхчеловека через уничтожение человеческой морали, борьба за существование уже не главный фактор эволюции, ведущий от низших форм через человека к сверхчеловеку, самосохранение уже не представляет единственную цель индивидуума. Ницше отмечает новый двигатель, это стихийное стремление к проявлению своего могущества, стремление, которое может встать в противоречие с сохранением целостности индивидуума. Еще яснее сознается недостаток одного принципа самосохранения Гюйо, который отмечает в человеке стремления, идущие вразрез с эгоизмом, по мнению которого наши нравственные действия имеют своим источником стремление нашей души к более интенсивной и экстенсивной жизни, стремление, ведущее нас к риску и к самопожертвованию.

Итак, выражение “природа не делает скачков” мы заменим следующим:

Природа делает скачки не видимые, а действительные. Мы видим преимущественно те ее элементы, которые инертны ко всякому движению и которые, приняв положение устойчивого равновесия, с упорством его сохраняют. Но в то же время, невидимые нами силы совершают непрерывную работу, до поры не влияющую на перемену положения инертных элементов, и только в момент достижения известных границ выводящую их из положения равновесия для разложения или приведения в новое устойчивое равновесие.

НЕНАТУРАЛЬНОЕ И АПАГОГИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО В ПРОШЕДШЕМ И БУДУЩЕМ.

§ 1. Два типа логических операций.

Следует различать два типа логических операций. Первый — анализ и синтез понятий. Понятие *A* не строится, но находится уже *готовым*, и путем рефлексии определяются существенные признаки: *a, b, c...*, с помощью которых оно относится к определенным классам.

Наряду с признаками *a, b, c*, наличие которых представляется непосредственно очевидной, вскрываются еще признаки: *α, β, γ...*, наличие которых является уже *спорной*, так как эти признаки как бы освещены колеблющимся светом, при одном употреблении понятия погружаются в мрак, при других — всплывают на свет. Исследование этих смутных элементов анализа состоит в определении, т.е. в исследовании *правомочности* и *неправомочности* этих признаков путем подбора наиболее убедительных случаев, в которых при особенно ясном выступлении контуров этого понятия спорные признаки совершенно ступшеваются или же, наоборот, вполне определенно выступают на свет.

С анализом связуется и *синтез*, выводящий из элементов анализа понятия *A* другие понятия *B, C...*, тоже обретающиеся в разуме, как и *A*, уже *готовыми*.

Такого рода анализ понятий мы очень часто производим. Например, когда решаем вопрос о том, что такое *глупость* и что такое *тупость*, мы ищем типичные случаи, в которых мы определенно говорим: это — глупый человек, и такие, где мы скажем: тупой человек.

Другим примером является исследование определений *злости* и *черствости*, *скупости* и *жадности*, которые иногда смешиваются между собой. Юридическое¹ мышление во всяком случае принадлежит к этому типу. Оно ищет определения понятий, которые находит в мысли уже готовыми. Этот тип может быть назван схоластическим², так как он характеризует схоластику, которая занимается почти исключительно определениями.

Ко второму типу относятся операции силлогистические, пополняющие признаки *a, b, c...* другими неочевидными, но, в силу законов логики, неизменно связанными с *a, b, c...* В этой операции внимание направлено не *во внутрь* понятия, а *вне* его. Сперва понятие *a* берется как оно есть, даже без анализа, очищающего его от неправомочных признаков *α, β, γ...*, и из совокупности *a, b, c...* *α, β, γ...* и свойств, присущих классам, к которым относятся эти признаки, извлекаются другие

свойства А: $a', b', c' \dots \alpha', \beta', \gamma' \dots$ Жизнь понятия здесь существенно отличается от жизни в среде операций первого типа.

Этот второй тип мышления присущ *математике*. Но было бы ошибочно думать, что при *убеждении* в чем-либо (а к убеждению и сводится доказательство в *обычном* смысле слова) действует только эта вторая, силлогистическая операция.

Раньше всего необходимо разобраться в понятиях, выявить определение того, о чем идет речь, и здесь — то мы имеем, конечно, не вторую, а первую операцию; ведь в каждом споре мы раньше всего, да и больше всего являемся *схоластиками*. Сами же выводы мы делаем, не смешивая силлогистические операции с различными приемами, большей частью чисто психологического характера, заставляющими наших противников или учеников склоняться к признанию положений, нами не доказываемых, но представляющихся нам верными в то время, как другим — неверными или только спорными.

Вся история математики³ от средневековья до настоящего времени идет по пути от анализа живых понятий к оперированию над *мертвыми* символами, от схоластического спора к формальному, алгебраическому аппарату, от убеждения к доказательству в смысле только установки формально-логических связей.

В начале кустарное производство ковров, в конце — фабричное их производство.

Рамус⁴ и рамисты — это схоластики-математики. Декарт и рационалисты⁵ еще на полпути, они уже имеют аппарат, который работает над элементарными понятиями, которые еще остаются понятиями, и подход к ним чисто схоластический. Пеано и логики оперируют уже только символами.

Резче всего эта смена настроения выражается в физике. Средневековые живут аристотелевской физикой, анализируя свойства материи. Рационалисты эти свойства сводят к движению и комбинациям элементов-атомов, или монад. В новейшей же физике эта “модель” расширяется в формально математический аппарат.

§ 2. Аристотель и схоластика.

Обычно принято отказывать схоластикам⁶ в *оригинальности*, сводить всю деятельность схоластики к комментированию уже данных Аристотелем⁷ решений им же самим поставленных проблем.

В указанной мной схоластической проблеме об определении тогда можно видеть только проблему самого Аристотеля, т.е. не средневековья, а античной мысли. Но более глубокий анализ Аристотеля и схоластики вскрывает глубокое между ними различие, хотя это различие и скрывается под аналогичной внешней формой словесной формулировки проблем.

В противоположность схоластике Аристотель в случае нескольких понятий, означаемых одним и тем же словом, не ищет то, которое он должен считать правомочным на это название. Он говорит о субстанциях с *различных точек зрения*. Он даже говорит о том, что больше и что меньше является субстанцией. Математические сущности, говорит он, менее субстанции, чем чувственные тела.

Для Аристотеля характерны *двойственные* положения: с одной стороны, А есть В, с другой стороны, А не есть В.

Первое положение отвечает одному смыслу В, второе другому.

“То, что более просто, — говорит Аристотель, — то *скорее принцип*, чем то, что менее просто. Но последние виды, заключающиеся в родах, более просты, чем роды, так как они неделимы, в то время как род может делиться на большое число различных видов; поэтому, как мне кажется, виды — более принципы, чем роды. Но, с другой стороны, в виду того, что уничтожение рода влечет уничтожение вида, роды имеют в большей мере характер принципов, так как то является принципом, что влечет за собой другое”.³

Таким образом, здесь принцип понимается в *двух* смыслах: во-первых, то, что не может быть разделено, во-вторых, то, что влечет другое.

Сам Аристотель не ставит проблемы: что такое *принцип*? Это уже схоластическая проблема. Схоластический комментарий к этому аристотелевскому рассуждению должен состоять в решении проблемы: что такое принцип, каково содержание смутного понятия о принципе, вскрываемого в душе и проявляемого с помощью тщательного анализа, с которым смешиваются другие смутные, колеблющиеся понятия, не допускающие такого прояснения.

Единственное⁹ решение этой проблемы и будет отвечать верному из двух намечаемых Аристотелем положений. Другое же должно быть безусловно отброшено.

А называется В, С, D ..., и каждое положение: А есть В, А есть С, А есть D — по Аристотелю — верно со *своей* точки зрения.

“Подобными”¹⁰, — говорит Аристотель, — мы называем вещи, которые, не будучи абсолютно тождественны, различаются в отношении субъекта, но тождественны относительно формы. Четырехугольник больший подобен меньшему, неравные прямые подобны между собой, хотя и не абсолютно тождественны.

Но называют также *подобными* вещи, которые, имея ту же сущность и будучи в состоянии делаться больше или меньше, тем не менее не делаются ни больше, ни меньше, иначе говоря, качество которых специфически одно и то же. Именно в этом смысле говорят, что очень белое подобно тому, что менее бело, так как в них единство рода. Наконец, называют подобными вещи, представляющие больше сходства, чем различия, абсо-

лотно или только по видимости; так, свинец больше походит на серебро, чем на золото; золото походит на огонь своим красноватым цветом и т.д.”

Таким образом, Аристотель только *наблюдает*, и наблюдения его дают эти три смысла подобия, но он не решает проблемы, что такое истинное подобие, которая является уже схоластической проблемой. Сущность античного мышления и состоит в собирании с помощью наблюдения признаков изучаемой вещи и выключения тех признаков, которые находятся между собой в противоречии, с отнесением их к *обману чувств*, в определении той совокупности признаков, которые выявляют, так сказать, *реальный скелет* вещи.

Античная мысль не *реализует* абстракции, как это делает средневековая. Платоновские идеи¹¹ – это вовсе не реализованные универсалии, это *образцы*, которым подражают реальные единичные вещи, образцы, тоже реально существующие, но в каком-то другом мире. У Аристотеля эти идеи обращаются в *формы* и уже в нашем мире, в самих вещах, так сказать, души вещей, носители определяемых ими целей. В схоластическом реализме общее понятие – универсалия – получает реальное существование, проблема об определении приобретает *онтологическое* значение.

Что такое А? – с античной точки зрения, это – что в А – обман чувств, и что – правда?

На вопрос, что такое субстанция, Аристотель не отвечает ее определением. Но перед постановкой этой проблемы он дает определение субстанции. Это, говорит он, первое сущее, при этом не тот или другой модус сущего, но сущее, взятое в абсолютном смысле, прибавляя, что понятие первого понимается в различных смыслах в отношении понятия, знания, времени и природы.

Вполне сознавая несовершенство определения, он разбирает различные смыслы слова “субстанция”. Субстанция¹², говорят, – сущее, сущность относят также к субстанциям, субстанцией является род, и субстанция – субъект. На этом последнем он более всего и останавливается, поясняя, что субъект есть то, чему все остальное является атрибутами, но сам он не является атрибутом чего-либо. Выбрав именно этот последний смысл, Аристотель исследует, что из признанного им реально сущим может быть названо в этом смысле субстанцией, и если приходит к заключению, что материя не вполне может быть названа субстанцией, то потому, что ей, как обладающей только потенциальным бытием, он не дает всей полноты реального существования.

Что такое А? – со схоластической точки зрения, это – какие характерные свойства присущи сущности, означаемой нами словом А, и наиболее стойкое из всех означаемых тем же словом.

Античная мысль¹³ воспринимаемое *извне* перерабатывает внутренней работой. Средневековая – смотрит *внутрь*, вполне доверяя своему внутреннему зору, проецирует его материал вовне, в сферу реального транс-

субъективного существования. Всякая проблема для нее имеет онтологическое значение, оно раскрывает содержание *реальной* сущности, разъясняя то, что в первый момент рефлексии представляется в смутном виде.

Вот все это следует хорошо продумать, чтобы понять, почему логика схоластическая и рамическая, которая ближе к первой, чем о ней думают, относится *так враждебно* к Евклиду, который является кровью от крови, плотью от плоти аристотелевской логики.

Для Аристотеля и Евклида определение вовсе не имеет того значения, которое ей приписывает Рамус. Евклид вовсе не строит *системы* геометрии, ни в смысле Рамуса¹⁴ и Арно, развертывая ее соответственно определенной иерархии понятий, ни в смысле Гильберта¹⁵, выводя все ее содержание как формально-логические следствия групп постулатов. Он только *убеждает* в том, что некоторые геометрические факты, им наблюдаемые, часто представляющиеся совершенно очевидными, не представляют обмана чувств, а в действительности имеют место, причем большинство из них имеют только *посредственное* значение для установки свойств правильных тел, имеющих кардинальное значение в платоновско-пифагорейском мировоззрении и без изучения которых нельзя войти в святилище метафизики.

§ 3. Схоластика в современной науке.

Для нас интересней *положительная*, а не отрицательная сторона прошлого. Пройденный нами путь — это не ряд одних заблуждений, это скорее ряд истин, хотя и смешанных с заблуждениями. Чистая истина недоступна уму человеческому. Познаваемое всегда представляется в искаженном виде, но искажения эти весьма различны, так как сильно меняется *точка зрения*, с которой мы смотрим. Можно сделать сравнение с предметом, который мы не можем обнять одним взором и который отделен от нас туманом, мы ходим вокруг него, рассматривая его с различных сторон и ни с одной стороны мы не видим его *полностью* и во всей чистоте.

Схоластическая точка зрения, вызываемая схоластическим типом мышления, вовсе не даст одних заблуждений. И теперь может ставиться схоластическая проблема, но она уже не будет привлекать того внимания, что раньше, вследствие того, что человеческий интеллект *изменился* и в своих вкусах, и в своих способностях.

Схоластическое исследование было бы не больше, чем подражанием средневековой схолистике, совершенно таким же образом, как современная католическая архитектура является подражанием готике. Речь может идти не о восстановлении схоластической науки, а только о схоластическом элементе, который не может быть совершенно изъят из современной науки. Существует область, где в довольно широких размерах должна еще жить схоластическая проблема определения, а именно в *методике*.

Здесь *формальная точка зрения совершенно невозможна*. То, что изучается, должно быть определено, причем именно в *схоластическом* смысле.

Определение¹⁶ здесь не может быть только ярлыком, наклеиваемым на совокупность признаков.

Взяв понятие как *оно есть*, в своем смутном виде, в душе учащегося, следует вместе с ним проанализировать его и вскрыть его характерные признаки и очистить его с помощью последних. Мы не будем говорить, *каким образом* учащийся приводится к *окончательному* определению и какие из определений основных математических понятий являются наиболее подходящими. Это все проблемы методики, важность которых современной методикой вполне осознана.

Но и в чистой научной области чистый формализм все-таки недостижим; все определения не сводятся к *чисто номинальным*. Конечной целью науки является познание вещей, которые некоторым образом уже частично познаны, так как мы, приступая к научному познанию, уже знаем, к чему его прилагать. Мы не будем сейчас заниматься *гносеологическим* вопросом, каким образом это первичное до-научное знание приобретает, но мы укажем только на то, что оно есть и что оно дает познаваемую вещь как цель, переизложенной и еще не выраженной в логических терминах.

Проблема определения состоит в изыскании характерных признаков *a, b, c ...*, но не следует думать, что вскрытие признаков дает полностью эквивалент определенному. В конечном итоге все познаваемые вещи *неопределимы*.

Схоластическая проблема даст не полное, а только *приближенное* значение.

То, к чему относятся определения, аксиомы и выводимые отсюда положения, никогда целиком не совпадает с тем, к чему относятся выставляемые наукой проблемы. Пересечение двух кривых не может быть определено. Геометрия говорит об *общей точке* кривых, а не об их пересечении.

§ 4. Доказательства: что это так, и почему это так.

Аристотелевское определение¹⁷: “знать – это иметь доказательство не из акциденций”, схоластикой толкуется *уже*, чем его понимал сам Аристотель, разумея акциденцию в чисто логическом смысле.

Акцидентальное, случайное свойство, по Аристотелю, то, которое может оказаться в виде, принадлежащем роду *A*, и может не оказаться.

Ему противопоставляется существенное свойство, присущее только видам рода *A*.

Аристотель привносит в логику элемент времени. Самая формулировка закона противоречия, отвергающая возможность вещи в одно и то

же время быть и не быть, содержит этот *временной* момент. Вне сомнения и понятие случайности носит этот характер и понимается в том смысле, что свойство *не всегда* присуще А; такова, например, болезненность, отнесенная Аристотелем к *случайным* свойствам не только потому, что она присуща и птицам, но и потому, что каждый человек может быть сегодня болен, а завтра здоров.

От существенных свойств Аристотель требует, чтобы они были присущи видам только данного рода, причем *всегда*.

Схоластическая мысль, с одной стороны, освобождается от пут времени, с другой стороны, идет дальше в смысле предъявления требований к существенным свойствам как основе знания.

Она ищет не только устойчивые признаки, могущие служить определением, но и такие, которые обладают своего рода *приоритетом*, выступая в мысли и раньше и выпуклее, претендуя достигнуть, так сказать, нутра вещи. Из них другие свойства вещей должны выводиться.

Понятие о существенных свойствах подвергается метаморфозе, при которой переступается сфера чисто логического анализа даже с аристотелевским временным элементом и за существенными свойствами усматривается уже *онтологическое* значение.

После этой длинной характеристики схоластического настроения читатель поймет атиматематиков¹⁸ XVI и XVII веков. С яростью набрасываясь на математику, они приводят в пользу своих антиматематических взглядов авторитеты древних, толкуя их, конечно, по-своему.

Прежде всего приводятся слова Прокла: "геометрия менее всего познает причины".

Всякое знание разъясняет (*demonstrat*) причину по эффекту, эффект — по причине (*causam per effectum, vel effectum per causam*). У Прокла *causa* и *effectus* понимается в физическом смысле и противопоставляется логическому основанию и следствию, из него вытекающему, а антиматематиками — именно в этом последнем смысле, так что математик обвиняется в том, что даст не те логические обоснования, какие следует дать.

Ссылаются и на Сенеку, который говорит, что аргументы геометрии не убеждают, а вынуждают. Соглашаясь с первой аксиомой "Начал" Евклида, антиматематик недоволен доказательством, на ней основанным. Он не видит в нем знания, ибо всякое знание — это изучение существенных причин (*principia per se*).

Причина равенства А и В вовсе не это третье, но только их количество, и не существуя это третье, они все равно были бы равны. Отношение равенств А к С, В к С с чисто аристотелевской точки зрения можно отнести к существенным свойствам, но схоластическая мысль видит тут внешний характер, ничего не говорящий о сущности А и В и относит их к несущественным свойствам.

Характерна критика I-й теоремы I книги "Начал" Евклида.

“Здесь, — говорит Симплиций¹⁹, — доказывается, что треугольник равносторонний, из того, что он построен между тремя кругами и имеет все свои стороны проходящими через центры окружности. Никто здесь не видит истинной причины существования. Ведь не потому треугольник равносторонний, что он построен между тремя окружностями, ибо, если бы он и не был построен между ними, все равно был бы равносторонним. Откуда следует, что такая причина — только случайная причина этого свойства. — Вот идеал математики: она должна, определив треугольник его существенными свойствами, затем извлечь оттуда и все его свойства совершенно так, как схоластик из определения бога²⁰, как совершеннейшего существа, извлекает его бытие, единство и т.д. К чему Евклиду проводить круг, когда истинная причина всех свойств треугольника лежит в нем самом?”

Характерно также возражение Валлиса²¹ уже в XVII веке. Он соглашается с тем, что это так, что математики часто оперируют не *per veram proximam causam* (не через истинную ближайшую причину), но прибавляет, что все-таки математика *достаточно* научна, ибо она выводит все из природы вещи *per medium necessarium* (через среднее необходимое), т.е. все-таки выполняет хотя бы часть предъявляемых Аристотелем требований.

Он соглашается, что доказательство первого положения “Начал” Евклида во всей своей целостности есть *то оти* (что это так) и что идеалом доказательства является *то диоти* (почему это так)²², и отмечает, что у Евклида имеются и последнего рода доказательства.

Но какой пример он приводит?

Вывод из определения: “круг — плоская фигура, заключенная в кривой с точками, равноотстоящими от центра”, — заключение: *радиусы равны*.

Самая природа круга, говорит Валлис, требует, чтобы точки окружности равно отстояли от центра; немедленно отсюда следует уже по истинной и ближайшей причине, что все радиусы, которыми измеряются эти расстояния, равны. Анализируя доказательство положения Евклида, Валлис приходит к заключению, что и здесь *последний* вывод делается из истинной причины. Равносторонность треугольника выводится из того, что *стороны равны*, а вовсе не из того, что он оказывается в трех равных кругах, а равенство сторон, действительно, выводится из этого последнего, так что только промежуточные доказательства делаются не *per veram causam*.

Савилий, ссылаясь на Геминуса, находит, что ярким примером, когда математик учит не только тому, что есть, но и тому, почему это так, является исследование пяти платановых тел; в то время, как в окружность можно вписать правильные многоугольники с *каким угодно* числом сторон, в сферу можно вписать только *пять* правильных тел, математик дает

разъяснение, почему это так, исходя из существенных свойств многогранников.

§ 5. Требования пор-роялевской логики.

С течением времени доказательство “это так” все меньше смущают ум, и у рационалистов сомнение касается только доказательства от противного, которое у них не только получило полное право гражданства, но и представляет наше главное орудие доказательства.

Но отзвуки этих нападений антиматематиков имеются у Арно.

Арно²³ вооружается не только против апагогического доказательства, но и против доказательств *слишком удаленных* (*Demonstrations par des voies trop éloignées*).

“Этот недостаток, – говорит он, – общий для всех геометров. Они вообще не заботятся о том, откуда их аргументы берутся, лишь бы они были убедительны, но между тем это – доказывать вещи очень несовершенно, если доказывать с помощью *чуждых* им путей, откуда они не вытекают согласно их *природе*”.

Здесь, конечно, заключается нечто совершенно иное, чем *лежандрово требование простоты доказательства*.

Как доказательство, грешащее против этого правила, Арно выставляет евклидово доказательство:

I. 5-го положения I книги “Начал” (на школьном средневековом жаргоне: *elefugia*).

В равнобедренном $\triangle ABC$:

- 1) углы ABC и ACB при основании BC равны между собой;
- 2) если продолжить равные стороны AB и BC , то углы, образованные ниже основания, DBC и ECB , будут также равны.

Евклид доказывает, беря на продолжении BD стороны AB произвольную точку F и на AE точку G так, что $AG = AF$, соединяя прямыми F с C и G с B и затем доказывая, что $\triangle ACF \cong \triangle ABG$ и $\triangle FBC \cong \triangle CBG$.²⁴

II. 47-го положения I книги, т.е. теоремы Пифагора.

Арно представляется совершенно *невероятным*, чтобы доказательство равенства углов при основании равнобедренного треугольника, т.е. такой простой, почти очевидный факт, требовало столь сложного логического аппарата, зависящего от иных, чем данный, треугольников, получаемых через продолжение сторон данного, как это делает Евклид²⁵. Арно кажется очевидным, что *простая истина и просто доказывается*.

Впрочем, в это верили и Лежандр²⁶ и его современники.

Но Арно верит и в то, во что уже не верил Лежандр, а именно, что для всякого простого положения должно быть не только простое, но и *натуральное* доказательство.

Что такое натуральное доказательство, Арно не определяет, но видно, что это что-то приближающееся к доказательству “почему?”, о котором мы выше говорили, но в котором “существенность” свойств и причин заменена их “простотой” и “естественностью” – элементами, включающими, как и картезианская “очевидность”, моменты психологические.

По Арно, доказательство пифагоровой теоремы у Евклида совершенно не натурально, ибо равенство квадратов, о котором в этом доказательстве говорится, в простейшей, натуральной зависимости находится не от равенства треугольников, употребляемых при доказательстве, а от *пропорциональности* линий, которую следует доказать, не прибегая ни к какой линии, кроме перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на основание треугольника.²⁷

Здесь Арно говорит как будто в духе Симплициуса, но его натуральное доказательство – это не что иное, чем вывод свойств бога из его определения. Рекомендуемым им перпендикуляром антиматематик XVI века остался бы так же недоволен, как кругами в первом положении “Начал” Евклида.

§ 6. Апагогическое доказательство у Евклида.

Евклид довольно широко пользуется так называемым приведением к абсурду, иначе говоря, апагогическим доказательством, состоящим в том, что положение А доказывается опровержением противного не-А с помощью вывода из последнего невозможного следствия. Этот прием доказательства, конечно, пускает свои корни с софистики²⁸. И в самом деле, именно он является наиболее удобным для софиста. К признанию высказанного софистом положения собеседник приводится, доходя вместе с софистом от противоположного своему положению к абсурдному следствию. Именно этот способ давал наиболее легкий способ *одурачивания*: принуждением его остановиться на явно нелепом положении, возбуждающем улыбки присутствующих. В разделительном силлогизме: первая посылка – А есть или В или С или D – давалась *неполной*, опуская почему-либо менее бросающееся в глаза “... или E”. Вторая посылка – D не есть ни В, ни С – доказывалась извлечением из “А есть В”, “А есть С” нелепостей. Тогда заключением этого условного силлогизма (*modus tollendo ponens*) получалось “А есть D”, откуда тотчас выводилась нелепость, являющаяся непосредственно очевидной.

Начало апагогического доказательства должно отнести к элейцам. Этим приемом Парменид доказывает, что бытие не происходит и не уничтожается. Основная аксиома: небытие не может быть бытием (*ex nihilo nihil fit*). Если А происходит из В, то В становится А, т.е. небытие становится бытием. Бытие не уничтожается, так как бытие всегда есть бытие.

Античная математика не заботится о *системе* геометрии, о каких-либо принципах или общих свойствах пространства, из которых вытекают свойства геометрических фигур. Она только старается убедить читателя в истинности подмеченных свойств.

Можно сказать, что математик эпохи Платона, Аристотеля, Евклида *терроризован* софистами, он боится каждую минуту попасть в расставленные последними силки и борется или, вернее, строит укрепление против их нападений по всем правилам искусства, ими же самими выработанным.

Чтобы заставить согласиться со своими теоремами, он должен прежде всего заставить, не приводя доказательства, согласиться со своими аксиомами и постулатами, и, конечно, он может тем скорее рассчитывать на это согласие, чем меньше этих аксиом и постулатов. Но сокращение последних должно вести к ограничению свободы выбора логических путей, ведущих от них к теоремам: наряду с прямыми доказательствами приходится применять и косвенные, апологические.

Современный математик (вне сферы чисто *аксиоматической* работы) заинтересован не столько в сокращении начальных звеньев логической цепи, сколько в умножении конечных.

Трудность выставляемых современными математиками проблем является другой причиной трудности разыскания логических путей и необходимости привлечения [наряду] с *прямыми* доказательствами в широкой мере и *косвенных*.

§ 7. Типы апологических доказательств.

Апологическое доказательство отличается от прямого тем, что оно наряду с математическими аксиомами пользуется логической аксиомой, которой не пользуется прямое.

Всякое апологическое доказательство предполагает приложение закона *исключенного третьего*.

Следует доказать A . Предполагается, что имеет место не- A и отсюда выводится абсурд — отрицание верного положения C — не- C . Таким образом, уже в начале доказательства утверждается альтернатива: A или не- A , и ничего третьего. Обратно, если в начале или в самом ходе доказательства применяется закон исключенного третьего, то или доказательство ведется от противного, или последнее содержится в доказательстве как составная часть. В самом деле, приложение его предполагает в начале и в ходе доказательства альтернативу B или не- B и снятие одного члена альтернативы путем доказательства его невозможности. Если снимается не- B тем, что не- B приводит к не- C , к отрицанию заведомо верного положения, то можем сказать, что положение доказывается апологически. Если снимается B , то имеем апологическое доказательство в замаскированной форме.

Заменой В через не-(не-В) мы получаем его в чистой форме: не-В доказывается приведением не-(не-В) к не-С (абсурду).

Получаемый в конце апagogического доказательства абсурд может быть трех родов:

1) противоречие с уже признанной аксиомой или уже доказанным положением;

2) противоречие с *условием* теоремы;

3) противоречие со сделанным предположением.

Чтобы яснее и глубже вникнуть в конструкцию каждого из этих типов, мы ограничимся только *простыми* апagogическими доказательствами с *единичным* приложением в самом начале закона исключенного третьего.

Доказать А.

Предположим не-А – абсурд.

Если принять обозначение:

Если В, то А через В, А,

то можно для первого типа наметить схему:

В, А; В – не-А – не-С.

В “Началах” Евклида²⁹ пример такого простого *разомкнутого* доказательства – 27-е положение книги I: о параллельности прямых при равенстве накрестлежащих углов. Отрицание приводит к противоречию с теоремой о внешнем угле треугольника.

Десятая теорема III книги – о пересекаемости кругов не более, чем в двух точках. Отрицание приводит к противоречию с 5-й теоремой III кн. о неимении у пересекающихся кругов общего центра.

17-я теорема XI книги – о перпендикулярности прямой пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к третьей, к этой последней. Отрицание против 13-го положения XI кн. (о возможности восстановления только одного перпендикуляра к плоскости). Примеров простых разомкнутых доказательств, приводящих к отрицанию аксиом, очень много. У Евклида обычно такой аксиомой является 9-я I книги: целое больше части, причем доказательство носит полунинтуитивный характер. Таковы доказательства предложения 2-го III книги о том, что прямая, соединяющая две точки окружности, лежит внутри ее, предложение 11-е о прохождении линии центров через точку касания кругов, предложение 18-е и 19-е книги III и 36-е книги VII о том, что наименьшее число, содержащее простые числа А, В, есть произведение АВ, – отрицание приводит к тому, что меньшее число содержит большее; к тому же приводит и отрицание 1-го положения книги VIII.

Второй тип апagogического доказательства, *сомкнутый на условии*:

В, А В, не-А – не-В, не-А.

Примеры: 25-е положение VII книги: если два числа взаимно просты, то число, содержащееся в одном из них, будет взаимно простым с другим. Отрицание приводит к признанию А и В не взаимно простыми.

Того же типа 26-е и 30-е положения III книги.

Третий очень редкий тип – сомкнутый на заключении, причем может быть два типа:

В, А – В, не-А – А.

Этот тип встречается у Евклида³⁰ только один раз, а именно в доказательстве 12-го положения IX книги “Начал”: “Пусть будет сколько ни есть от единицы непрерывно-пропорциональных чисел ABCD, говорю, что всякие первые числа, кои содержатся в D, будут содержаться и в А”.

Говоря современным языком,

1, А, В, С, D –

члены геометрической прогрессии

$1 : A = A : B = B : C = C : D$;

следует доказать, что всякий простой делитель D – делит также и А.

Евклид предполагает противное, что E не делит А, и опровергает это предположение, выводя из него: E делит А.

Этот редкий прием употребляется и Саккери в его “Euclides ab omni naevo restitutus” при его попытке доказать 5-й евклидов постулат. Саккери принимает за данные 26 первых положений “Начал”, допускает предположительно ложность этого постулата и старается вывести из этого положения верность самого постулата.

Второй подтип – замкнутый не в начале.

Из не-А извлекаются двумя путями два противоположных заключения: E и не-E.

Первый подтип можно рассматривать как предельный ко второму, когда E совпадает с А

В, А

В – не-А – E,

В – не-А – не-E

Пример: положение 7-е I книги: “Если концы соединить с точками С и D по одну сторону, то расстояния СА и СВ точки С от концов АВ не могут быть равны, каждое каждому, расстояниям DA и DB точки D от концов АВ”.

$AD = AC$; $\angle ACD = \angle ADC$, $\angle ADC < \angle BDC$, $\angle BDC > \angle BCD$;

$BD = DC$; $\angle BDC = \angle BCD$,

что противоречит предыдущему.

Сложному апагогическому доказательству второго порядка отвечает схема:

В, А;

В, не-А – D, C – абсурд.

D, не-C – абсурд.

Доказательство может быть дважды разомкнутым, когда оба колена приводят к отрицанию доказанного положения или аксиомы.

Может быть замкнуто-разомкнутым, если в одном колене имеется замкнутое, в другом разомкнутое апагогическое доказательство.

Наконец, возможен дважды замкнутый тип.

При этом будем иметь подтип, смотря по тому:

- 1) имеет ли место замыкание на условии или на заключении,
- 2) на D, на B или ином положении E.

Дважды разомкнутое доказательство употребляется Евклидом в положении 24–м III книги: подобные сегменты ACB и CDF, построенные на $AB = CE$, равны.

Если нет, то C: один вмещает другой; если не–C, – пересекаются.

Первое предположение приводит к противоречию с 23–м положением III книги, второе – с 10–м III книги.

Пример замкнутого на условии: так обычно доказывается теорема, обратная теореме: в выпуклом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов $= 2d$.

А именно, если сумма $= 2d$, то можно описать около четырехугольника окружность. Проводя окружность через три вершины, мы должны иметь четырехугольник внутри или вне круга; в обоих случаях доказываемся, что сумма противоположных углов $\neq 2d$.

Пример замкнутого на положении E доказательства дает метод исчерпывания Евклида (предложения 1, 5, 11, 12 XII книги).

§ 8. Борьба против апagogического доказательства.

Аристотель³¹ только довольно робко выдвигает преимущество прямого доказательства перед косвенным.

При этом его аргументы, как совершенно не гармонирующие с настроением умов XVI, а тем более XVII века, в эту эпоху уже не повторяются.

По его мнению, более *согласны с природой* выводы, в которых мы от включения или выключения из класса B переходим к включению или выключению из класса C, *объемлющего B*.

Положение “ни одно A не есть C” первее, чем “ни одно A не есть B”, мы в нем ближе поднимаемся к принципам.

В апagogическом доказательстве порядок обратный:

Следует доказать, что A не есть B.

Предполагаем: некоторые A суть B. Все B суть C. Заклучаем: некоторые A суть C, что неверно, и поэтому ни одно A не есть B.

Но, по Аристотелю, все–таки тем или другим путем достигается цель науки – построение связи между вещами и общими положениями, выставляемыми в начале науки.

Крайняя неприязнь рационалистов к косвенным доказательствам вытекает из их общего мировоззрения, старающегося все многообразие вселенной вывести из *одного* мирового принципа с помощью постепенного ряда ограничений, созидающих, как логическое следствие из простых,

так же легко формулируемых, как теоремы геометрии, свойств божества, все содержание вселенной.

В глазах рационалиста вся вселенная представляется как ряд взаимоотношений, вытекающих из небольшого числа аксиом, относящихся к простейшим отношениям. В своих построениях, как метафизических, так и математических, он задался целью не только убедить, но и *объяснить*, т.е. представить ряд доказанных положений как *связную систему истин* в порядке, отвечающем установленной им иерархии истин.

Комментатор "Начал" Евклида этой эпохи занят *выпрямлением* евклидовых апагогических доказательств, что достигается введением явно и неявно *новых* аксиом.

В выпрямленные доказательства III книги "Начал" Озавама³² приходят в *скрытом* виде аксиомы теории пределов.

Вообще исчисление бесконечно малых³³ со всей системой аксиом, на которых оно основывается, является как *система выпрямленных доказательств* вместо более сложного апагогического метода исчерпывания.

В XVI веке нападки на апагогические доказательства ведутся как против доказательств "это так", идущих через *несущественные свойства*.

Но с ними легче мирятся, чем в XVII веке³⁴.

Савилий³⁵, возражая Иосифу Скалигеру на его нападки против апагогического доказательства, объявляет, что "оно равно прямому в отношении истинности и необходимости, но ниже в отношении происхождения и достоинства" (*scientiae generatione et dignitate inferior*).

Совершенно в духе XVI века кладя центр тяжести интереса в *методах изыскания истин*, он не может признать (как он выражается) односторонней геометрии, он ждет от сокращения методов и сокращения области обретаемых истин, но не потому, что их нельзя вообще добыть прямым доказательством, а потому, что этого нельзя сделать сейчас. В апагогических доказательствах он видит целый арсенал орудий.

§ 9. Полная математическая индукция.

На что указывает история доказательств?

На то, что приходится все понижать требования, к ним предъявляемые. Сперва желали доказывать не только прямым путем, но еще и натуральным, понимая это в смысле доказательств "почему", т.е. адекватными, существенными и непосредственными причинами. Потом, примирившись с ненатуральными доказательствами, требовали прямых, т.е. обходящихся без аксиомы исключенного третьего. Но пришлось и от этого требования отказаться. Более того, именно апагогическое доказательство явилось главным двигателем в лаборатории математической логики.

Возведение принципа полной³⁶ математической индукции в определение целых чисел совершенно затушевывает его истинное значение, выявляемое его историей³⁷, как *логического постулата*.

Это вовсе не свойство конечных целых чисел, а постулат, которым мы должны восполнить систему логических постулатов, чтобы быть в состоянии относительно чисел доказать то, что мы не можем доказать аристотелевской логикой.

Обоснованность такого рода рассуждений, как справедливо замечает Пуанкаре³⁸, сводящегося к заключению из *бесконечного ряда силлогизмов*, могла быть признана только тогда, когда математическая мысль вполне свыклась с *бесконечными операциями* и установила постулаты, определяющие получение определенных результатов с помощью этих операций.

Это, конечно, *не математическая аксиома*, относящаяся к свойствам чисел или пространств, но и как логическая аксиома она *коренным образом* отличается от так называемых *логических законов*: тождества, противоречия и исключенного третьего.

Это, положение того же рода, что аксиома силлогизма, утверждающая истинность заключения при истинности посылок.

У верно. V верно. Из U и V выводится W. W верно, как U и V.

Отсюда вытекает более общего характера положение, которое тоже признается за очевидное. Если из $U_1, U_2, \dots, U_n$ *конечным* числом силлогизмов выводится W, то при истинности $U_1, U_2, \dots, U_n$ истинно также и W.

Из этой аксиомы ничего не выводится, она вовсе не включается в систему основных постулатов, а стоит совершенно *особняком*, санкционируя правила формальной логики, на основании которых совершается вывод.

Античными мыслителями признавались только те выводы, которые в действительности *произведены*, в которых прослежены все посылки и заключения.

В полной математической индукции узакониваются выводы через *бесконечный ряд силлогизмов*.

Входящие в этот процесс силлогизмы не осуществляются в действительности, ибо нельзя произвести бесконечное число силлогизмов, но утверждается, что если U и W можно связать бесконечным рядом силлогизмов — $U_1, U_2, \dots, U_\infty$ и закон образования можно ясно уразуметь, то при истинности U следует признать и истинность W.

При этом в положении: “если U истинно и существуют силлогизмы $U_1, U_2, \dots, U_n$, связующие U с W, то W истинно” понятие “существовать” подвергается эволюции.

В глазах *античного* математика существование не присуще актуальной бесконечности, противоречия которой доказывают ее *небытие*.

Поэтому такая аксиома для $n = \infty$ не только не была бы им признана очевидной, но более того – была бы признана совсем *не имеющей смысла*, ибо относилась бы к тому, что невозможно.

Аристотель³⁹ вполне определенно говорит, что в положительных доказательствах не может быть бесконечного ряда ни при восхождении к высшему, ни при нисхождении к низшему понятию. Предполагая бесконечность доказательного пути, мы отвергаем самую возможность доказательства.

§ 10. Логика доказательств в будущем.

Удивительно, что и теперь еще не все математики осознали, что основная проблема о доказательстве в смысле вывода истинного положения А из системы постулатов, обладающих *психологическим* свойством очевидности, совершенно того же рода⁴⁰, что задача об интегрировании в конечном виде или построении с помощью циркуля и линейки. Она может разрешаться, может и не разрешаться, причем в большинстве случаев обычно не разрешается. Постулатов очевидных просто может оказаться недостаточно для вывода.

В XVI веке выставлялось требование доказывать, только оперируя существенными свойствами, в XVII – только прямым путем. Это очень интересные проблемы, и опыт показал, что они *едва ли* разрешимы. В будущем математики к ним вернуться, превратив их в *аксиоматические* проблемы, формулируя их следующим образом:

1) Можно ли положение А вывести из постулатов $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$ (безразлично, зависимых или независимых), которые не включают определенных объектов $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ и, если возможно, построить этот вывод.

2) Можно ли положение А вывести из $P_1, P_2 \dots P_n$, прямым путем и, если возможно, построить этот вывод⁴¹.

Проблема о доказательстве с помощью принципа полной математической индукции будет ставиться таким образом:

Возможен ли вывод А из $P_1, P_2 \dots P_n$, (вообще из *очевидных* постулатов) 1) с помощью *конечного* числа силлогизмов? 2) с помощью *счетного* их множества?

При этом и последняя проблема не всегда явится разрешимой.

Мы определенно предсказываем, что будущей математикой будет вполне осознана невозможность установки связей между *всеми* истинными положениями. Эта связь будет устанавливаться только в некоторых группах, причем основными, исходными положениями группы вовсе не будут обязательно *очевидные* положения, что будут скорее просто более простые, легче проверяемые.

Но, как и в других случаях, проблема о выражении через элементы определенного класса по оснований ее неразрешимости должна эволюци-

онировать в другую, более общую проблему, получаемую путем расширения той области элементов, в которой ищется решение.

Изыскание связи между положениями будет пониматься в *более широком* смысле изыскания связей, определяемых не только формальными законами логики, но и другими формальными законами, аналогичными первым, но уже не имеющими *логического смысла*, – металогическими. Зачатки такой металогики мы уже имеем в логике трансфинитной, в которой устраняется закон исключенного третьего: кроме A и $\neg A$ выступает еще нечто третье, причем это третье мыслится как определенная третья возможность наряду с A и $\neg A$.

Можно построить формальный аппарат такой металогики¹², которая так будет относиться к логике, как четырехмерное пространство относится к трехмерному.

Такие выводы уже ничего не будут содержать из “почему”, но правильные результаты, ими получаемые, будут говорить, что и в других случаях аппарат будет говорить: “это так”.

Метаалгебра ставит целью исследование системы чисто формальных операций, являющихся аналогом той системы, которая лежит в основе арифметики и алгебры. Буквы в ней не имеют определенно выраженного смысла. Эти буквы, называемые нами *гиперчислами*, определяются чисто внешним образом с помощью *постулатов*, относящихся к формальным операциям над ними, вполне соответствующим операциям над числами.

Низшая ступень метаалгебры – это формализация внешнего отношения между гиперчислами. На этой степени еще нет их *сравнения*. – Формальный аппарат действует только аналогично гильбертовским аксиомам счета, которые лучше называть *постулатами операций*.

Эти операции в настоящем случае (в метаалгебре тройственных отношений) трех родов: *гиперумножения* abc , *гиперсложения* 1-го рода $\overline{abc}$, *гиперсложения* 2-го рода $\underline{abc}$.

Вот основные постулаты (в которых следует отличать знак тождества $\equiv$ от знака равенства $=$, который вносится только с введением сравнения).

1. Циркулярный закон 1-го рода

$$\begin{aligned} abc &\equiv bca \equiv cab \\ \overline{abc} &\equiv \overline{bca} \equiv \overline{cab} \\ \underline{abc} &\equiv \underline{bca} \equiv \underline{cab} \end{aligned} \quad (1)$$

2. Циркулярный закон 2-го рода

$$(abc)de \equiv bcd(ea) \quad (2)$$

эта формула справедлива для двух других действий.

3. *Дистрибутивный закон 1-го рода*. Этот закон показывает на несимметричность метаалгебры в отношении основных операций.

$$\overline{agh \cdot bgh \cdot cgh} \equiv \overline{abc \cdot gh} \quad (3)$$

$$\underline{agh \cdot bgh \cdot cgh} \equiv \underline{abc \cdot gh} \quad (3)$$

$$\overline{\underline{agh \cdot bgh \cdot cgh}} \equiv \overline{\underline{abc \cdot gh}} \quad (3)$$

4. Дистрибутивный закон 2-го рода

$$abc \cdot def \cdot ghi \equiv adg \cdot beh \cdot cfi \quad (4)$$

и другие, такие же формулы для гиперсложений.

5. Ассоциативный закон

$$[(abc)de] \cdot fg \equiv a \cdot bdf \cdot ceg \quad (5)$$

и такие же формулы для гиперсложений.

К этим пяти постулатам еще прибавляется постулат.

6. *О единственности решений уравнений:*

$$1. \ xab = A; \overline{xab} = A; \underline{xab} = A \quad (6)$$

§ 6. Формальный аппарат мстаалгебры приводится в движение в теории гипердроби, т.е. решений уравнений:

$$x\alpha\alpha' \equiv a \quad (7)$$

которые мы будем означать символом

$$x \equiv \frac{a}{\alpha|\alpha'}$$

Гипердроби, в случае гиперсложения, отвечают гиперразности 1-го и 2-го рода

$$x \equiv \frac{a}{\alpha|\alpha'}, \quad x \equiv \frac{a}{\underline{\alpha|\alpha'}}$$

Постулат (4) дает формулу умножения гипердроби:

$$\frac{a}{\alpha|\alpha'} \cdot \frac{b}{\beta|\beta'} \cdot \frac{c}{\gamma|\gamma'} = \frac{abc}{\alpha\beta\gamma|\alpha'\beta'\gamma'} \quad (8)$$

Аналогичные формулы получаем и для гиперразностей. Дистрибутивный закон дает общую формулу сложения гипердроби (а также умножения гиперразностей и т.д.)

$$\frac{a}{\alpha|\alpha'} \cdot \frac{b}{\beta|\beta'} \cdot \frac{c}{\gamma|\gamma'} = \frac{(aA_1A_2)A'_1A'_2 + (bB_1B_2)B'_1B'_2 + (cC_1C_2)C'_1C'_2}{M|M'} \quad (9)$$

где М (аналогон наименьшего кратного) определяется системой

$$\alpha A_1 A_2 \equiv \beta B_1 B_2 \equiv \gamma C_1 C_2 = M$$

$$\alpha' A'_1 A'_2 \equiv \beta' B'_1 B'_2 \equiv \gamma' C'_1 C'_2 = M'$$

Выводятся и другие формулы:

1. Аналогон

$$\frac{\frac{a}{b}}{\alpha} = \frac{\alpha a}{b}$$

в форме

$$\frac{\frac{a}{\frac{b}{\alpha|\alpha'}} \cdot \frac{c}{\beta|\beta'}}{\alpha|\alpha'} = \frac{(a\alpha\beta)\alpha'\beta'}{b|c}$$

2. Формулы сокращения:

$$\frac{a}{\alpha|\alpha'} = \frac{m}{e|e'}$$

если

$$\alpha = e\beta\beta'; \quad \alpha' = e'\gamma\gamma'$$

$$\alpha = (m\beta\beta')\gamma\gamma'$$

3. Формулы для решения гиперуравнения 1-й степени

$$\overline{(xab)}cd = b$$

и более общего:

$$\overline{[(xab)cd][(\overline{xa'b'})c'd''][(\overline{xa''b''})c''d'']} = b$$

Наряду с теорией *простых гипердробей* развивается и теория *квадратичных*, т.е. решений уравнений $axx \equiv c$ и т.д.

§ 3. Следующая ступень мстаалгебры – формализация отношений *сравнения*. Здесь прежде всего постулируются свойства *гиперравенства*.

1. Циркулярное:

$$a = b = c \rightarrow b = c = a \rightarrow c = a = b \quad (10)$$

2. Транзитивное:

$$\left| \begin{array}{l} a = b = c \\ b = d = e \\ c = f = g \end{array} \right| \rightarrow a = d = g \quad (11)$$

Понятиям “*больше*” и “*меньше*” отвечают шесть следующих символов, по три для каждого из двух равенств:

$$\begin{array}{ccccc} a = b = c & \xleftarrow{abc} & \xleftarrow{bca} & \xleftarrow{cab} & \\ c = b = a & \xrightarrow{cba} & \xrightarrow{acb} & \xrightarrow{bac} & \end{array}$$

при этом стоящие в одном столбце должны быть совместны, а в различных не совместны.

Аналогон III₃, гильбертовской аксиомы!

Из

$$\xleftarrow{abc} \text{ и } \alpha = \beta = \gamma; \quad \alpha' = \beta' = \gamma'$$

вытекает

$$\overline{a\alpha\alpha'} \cdot \overline{b\beta\beta'} \cdot \overline{c\gamma\gamma'}$$

Постулируя *транзитивность*

$$\left(\begin{array}{l} \overleftarrow{abc} \\ \overleftarrow{bde} \\ \overleftarrow{cfg} \end{array} \right) \rightarrow \overleftarrow{adg} \quad (12)$$

мы выводим, что при

$$\overleftarrow{\alpha\beta\gamma}, \overleftarrow{\alpha'\beta'\gamma'}$$

имеем

$$\overleftarrow{\overleftarrow{\alpha\alpha'}, \overleftarrow{b\beta\beta'}, \overleftarrow{c\gamma\gamma'}}$$

§ 4. Третья ступень ставит аналогоны аксиом существования, постулируя чисто *имманентное* существование в смысле только *полагания*.

Аналогом I_2 гильбертовской аксиомы являются следующие постулаты: уравнение $x\alpha\alpha' \equiv a$ имеет одно определенное решение только при

$$\overleftarrow{\alpha\alpha\alpha'}, \text{ а } x\alpha\alpha' \equiv a \text{ при } \overleftarrow{\alpha\alpha\alpha'} \text{ или } \overleftarrow{\alpha\alpha\alpha'}.$$

Расширение области гиперчисел совершается совершенно так же, как расширение области чисел, и за *существующие* принимаются только *натуральные гиперчисла*, тогда как *ненатуральные* рассматриваются только как *символы операций над тройками* натуральных гиперчисел.

Доказательства правильности постулатов для ненатуральных гиперчисел проводятся совершенно также, как в формальной теории рациональных дробей, в которой операции над обобщенными числами сводятся к операциям над парами натуральных.

Можно, например, определить сумму:

$$(a.\alpha|\alpha')(b.\beta|\beta')(c.\gamma|\gamma')$$

как

$$[(a\beta\gamma)\beta'\gamma' (b\alpha)\gamma'\alpha'. (c\alpha\beta)\alpha'\beta'. \alpha\beta\gamma |\alpha'\beta'\gamma'] \text{ и т.д.}$$

§ 5. Выше этой ступени поднимаемся, устанавливая процесс образования гиперчисел из трех *идемпотентов* $|\top\perp$ отвечающих 1,0.

При этом постулируется 1) $|\top\perp \equiv |$ 2) *наличность* в $abc \top$ без $\perp$ приводит к $\top$, мы будем это обозначать так $\frac{\top\perp\perp}{abc} \equiv \top$

$$3) \frac{\top\perp}{abc} \equiv \perp$$

$$4) \frac{\top\perp\perp}{abc} \equiv |$$

$$5) \frac{\top\perp\perp\perp}{abc} \equiv \top$$

$$6) \frac{\perp\perp}{abc} \equiv \perp$$

$$7) \frac{\perp|\perp\top}{abc} \equiv |$$

$$8) \frac{\top\perp\perp\perp}{abc} \equiv \perp$$

$$9) \frac{\perp\perp\perp\perp}{abc} \equiv \perp$$

Из этих идемпотентов и образуются гиперчисла с помощью гиперсложений 1-го и 2-го рода, причем можно доказать, что *новые* гиперчисла получаются только с помощью операций одного рода.

§ 6. Теория гиперчисел, аналогичная, грассмановой теории чисел строится, полагая в основе аналогоны грассмановским аксиомам, например, аналогон первый:

$$(a+b)+1 = a+(b+1)$$

являются формулы:

$$\overline{abc.} \equiv \overline{a.bc.} \equiv \overline{a.b.c.} \quad (13)$$

$$\underline{\underline{abc.}} \equiv a.\underline{bc.} \equiv a.b.\underline{c.} \quad (\overline{13})$$

$$\underline{abc. \overline{TT}} \equiv \underline{a. bc \overline{T. T}} \equiv \underline{a. b. c \overline{TT}} \quad (\overline{13})$$

и принципом полной индукции: если формулы

1) верны для $\mid$ и будут верны для a , верны для $\overline{a\mid}$, то верны для всех a , полученных сложением 1-го рода.

II) верны для λ и будут верны для a , верны для $\underline{a}$, то верны для всех a , построенных сложением 2-го рода.

III) верна для T и будучи верна для a будет верна для aTT то будет верна для всех a , полученных сложением 2-го рода.

Укажем переход от частного случая ассоциативности к общему. То, что формула, верная для γ

$$\overline{abc.y} \equiv a.bcy.1 \equiv a.b.cy.1$$

будет верна и для $\overline{\gamma}|$, это выясняется цепью тождеств

$$\overline{abc}.\overline{\gamma}||.1 \equiv \overline{abc}.\overline{\gamma} . 1.|| \equiv \overline{a} . \overline{bc\gamma} 1.|| \equiv \overline{a} . \overline{bc} . \overline{\gamma} ||.1$$

А то, что и второй идемпотент можно заменить каким угодно гиперчислом δ , выяснено тождествами:

$$\overline{abc.\gamma.\delta} \equiv b.\overline{bc\gamma.\delta} \equiv a.b\overline{c\gamma.\delta} \equiv a.\overline{bc\gamma.\delta}$$

Литература:

I. Hilbert, Grundlagen der Geometrie.

2. Hermann Grassmann. Lehrbuch der Arithmetik, Berlin, 1861.

3. Васильев. Введение в анализ, т. I.

(Доложено на заседаниях Совета Института 22 марта 1936 г.)

О ЧИСЛОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ УТВЕРЖДАЕМОГО ТОЖДЕСТВА.

§ 1. Астроном, определяя эфемериды кометы А и находя элементы движения ее очень близкими к элементам одной из раньше наблюдаемых комет В, заключает отсюда о тождестве А и В.

Это и аналогичные, весьма важные в астрономии, заключения, подводятся под следующую общую схему:

При каждом из наблюдений наблюдается объект некоторого определенного класса Ω ; $A^{(j)}$ с признаками $a, b, c, \dots e$.

Значения же этих признаков нам точно неизвестны. Когда мы приписываем a для $A^{(j)}$ значение $a^{(j)}$, то a может иметь значение ряда:

$$a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \dots, a_n^{(j)} \quad (a)$$

и когда мы приписываем b значение $b^{(j)}$ то b может иметь значение

$$b_1^{(j)}, b_2^{(j)}, \dots, b_n^{(j)} \quad (b)$$

вообще значения

$$e^{(j)}, e_2^{(j)}, \dots, e_n^{(j)} \quad (e)$$

Вместе с $A^{(j)}$ наблюдается и $A^{(o)}$, для которого a придется значение $a^{(o)}$ тоже не точно, так что возможны все значения ряда

$$a_1^{(o)}, a_2^{(o)}, \dots, a_n^{(o)} \quad (a^{(o)})$$

$$b, \dots, b_1^{(o)}, b_2^{(o)}, \dots, b_n^{(o)} \quad (b^{(o)})$$

$$e, \dots, e_1^{(o)}, e_2^{(o)}, \dots, e_n^{(o)} \quad (e^{(o)})$$

Заключается тождество:

$$A^{(o)} \equiv A^{(j)}$$

От этого случая *дискретных* конечных совокупностей значений $a, b, c, \dots e$ можно перейти к случаю *непрерывных* областей значений, что и имеет место в приведенном выше примере отождествления двух комет, так как элементы движения кометы определены *не точно* и поэтому возможны не только те значения, которые находятся в эфемеридах, но и близкие к ним.

Какой же *числовой* характеристикой охарактеризовать такое утверждение?

Бесспорно, что такое утверждение при различных обстоятельствах будет иметь различную цену.

А именно, если около $a^{(o)}, b^{(o)}, c^{(o)}, \dots e^{(o)}$ имеет место *сгущение* значения $a, b, c, \dots e$ для различных $A^{(j)}$, то ценность будет меньше, чем в

том случае, когда имеет место *разрежение*, в особенности, когда близкими к $a^{(0)}$, $b^{(0)}$, ... $c^{(0)}$ значениями a , b , c ... e являются только $a^{(0)}$, $b^{(0)}$, ... $c^{(0)}$.

Принципы *исчисления вероятностей* не дают здесь определенной числовой характеристики.

Для *исчисления вероятности* такого тождества мы не имеем достаточно данных, невозможен подсчет *благоприятных случаев*. Единственное заключение, совершаемое на основании принципов *исчисления вероятностей* — это вывод *вероятности нового появления* $A^{(0)}$ из того, что $A^{(0)}$ уже раз появилось, дающее для этой вероятности значение $\frac{2}{3}$ независимо от вышеупомянутых обстоятельств, влияющих на оценку утверждаемых тождеств.

§ 2. Следует начинать с самого простого случая, так как при нем *новые*, не находящиеся в теории вероятностей *постулаты* представляются более убедительными и открывают в других, более сложных случаях путь аналогий.

Берем случай только *одного признака* a .

Предполагаем *высшую* степень разрежения — полное отсутствие совпадающих значений a для $A^{(0)}$ и $A^{(0)}$.

Чем больше совпадающих значений признаков $A^{(0)}$ и $A^{(0)}$, тем утверждение имеет больше цены.

Совершенно таким же образом, как в теории вероятностей из очевидного положения о *возрастании вероятности вместе с числом благоприятных случаев*, делается переход к *математической мере вероятности* как отношению числа благоприятных случаев к числу единственно возможных, так и в настоящем случае мы от упомянутого выше очевидного аналогичного положения о вероятности, переходим к *математической характеристике* положения о тождестве, как *отношения* числа совпадающих возможных значений a , в $A^{(0)}$ и $A^{(0)}$ к числу всех возможных:

$$n = C \frac{n^{(0)}}{n} \quad (1)$$

С это *высшая мера оценки*. Для различных классов она различна. Совпадение признаков не есть еще доказательство безусловной *тождественности* носителей этих признаков.

При этом постулируется *равноценность* совпадения возможных значений a совершенно так же, как при установке меры вероятности постулируется *равновозможность* случаев.

Но такая *равноценность* не может быть признана, если значения a не равновероятны. Цена больше, если вероятность больше.

Эта *вторая оценка* численно определяется вероятностью $p^{(0)}$ для исчисляемых в знаменателе (1) значений a для $A^{(0)}$. Но для значений $A^{(0)}$, совпадающих с $A^{(0)}$

$$a_{1,}^{(0)} a_{2,}^{(0)} \dots a_{n^{(0)}}^{(0)}$$

оценку следует производить иначе.

Как признак $A^{(0)}$ они получают определенную оценку $P_g^{(0)}$ (вероятность $a_g^{(0)}$ как $a^{(0)}$) как признак $A^{(0)} \dots \pi_g^{(0)}$ (вероятность $a_g^{(0)}$, как $a^{(0)}$). Полная оценка определится числом $P_g^{(0)} \pi_g^{(0)}$.

Замечая, что $\sum p_g^{(i)} = 1$, получаем:

$$\omega = \frac{\sum p_g^{(0)} \pi_g^{(0)}}{\sum p_g^{(i)}} = \sum p_g^{(0)} \dots \pi_g^{(0)} \quad (2)$$

§ 3. В том случае, когда $a^{(0)}$ может принимать всевозможные значения в промежутке $a^{(j\phi)} + \alpha \dots a^{(ja)} + \alpha$, где $a^{(j\phi)}$ выводится из наблюдений значений $a^{(j)}$, а $a^{(j\phi)}$ значение $a^{(j\phi)} - \alpha \dots a^{(j\phi)} + \alpha$, то, обозначая через $\varphi(\varepsilon) d\varepsilon$ вероятность отклонения от $\underline{a}^{(j)}$ на $\varepsilon = \underline{a}^{(j)} a^{(j)}$, получаем из⁽²⁾ переходя к пределу

$$\omega = C \int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi(a^{(j\phi)} - \xi) \varphi(a^{(j)} - \xi) d\xi \quad (3)$$

Принимая же закон ошибок Гаусса

$$\omega = C \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \left[(a^{(j)} - \xi)^2 + (a^{(j\phi)} - \xi)^2 \right]} d\xi = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 (\alpha \xi^2 + \lambda \xi + \gamma)} d\xi$$

$$\text{где } \alpha = 2, \beta = -\left(\underline{a}^{(j)} + \underline{a}^{(j\phi)}\right), \gamma = \underline{a}^{(j)2} + \underline{a}^{(j\phi)2}$$

Полагая $\xi + k = \eta$, $\alpha \xi = \eta$ имеем

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 [\alpha \xi^2 + \beta \xi + \gamma]} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 [\alpha \eta^2 + \gamma']} d\eta$$

$$\text{если положить } k = -\frac{\beta}{\alpha}, \gamma' = \alpha k^2 + 2\beta k + \gamma = \frac{\Delta}{\alpha} \Delta = \alpha \gamma - \beta^2$$

$$J = e^{\frac{h^2 \Delta}{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \eta^2} d\eta = \frac{e^{\frac{h^2 \Delta}{\alpha}} \sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

или

$$\omega = C \frac{h}{\sqrt{2}} e^{-\frac{h^2}{2} (\underline{a}^{(j)} - \underline{a}^{(j_0)})^2} \quad (4)$$

Такова числовая оценка утверждения:

$$A^{(o)} \equiv A^{(j)}$$

§ 4. Перейдем теперь к более сложному случаю совпадающих значений признака a для $A^{(j)}$ и $A^{(k)}$.

Число совпадающих значений a следует сравнивать не с $n^{(j)}$ значениями $A^{(j)}$, но с числом *большим*, так как совпадение значения a для $A^{(o)}$ со значением a , совпадающим для $A^{(j)}$ и $A^{(k)}$, является показателем возможности не только $A^{(o)} \equiv A^{(j)}$, но и $A^{(o)} \equiv A^{(k)}$.

Мы постулируем, что *цена утверждения* $A^{(o)} \equiv A^{[j]}$ не меняется, если значение признака a для $A^{[k]}$, совпадающего с $A^{[j]}$ заменить тем же числом новых значений a для $A^{[j]}$.

На основании этого постулат в (1) следует заменить $n^{(j)}$ через $n^{(j)} + \sum_k n^{(jk)}$, где $n^{(jk)}$ число совпадающих признаков $A^{(k)}$ и $A^{(j)}$.

Формула (2) заменяется следующей

$$\omega = C \frac{\sum p^{(oj)} \pi^{(oj)}}{1 + \sum p^{(jk)} \pi^{(jk)}} \quad (5)$$

которая в случае непрерывной области будет

$$\omega = C \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi(\underline{a}^{(j_0)} - \xi) \varphi(\underline{a}^{(j)} - \xi) d\xi}{1 + \int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi(\underline{a}^{(jk)} - \xi) \varphi(\underline{a}^{(j)} - \xi) d\xi} \quad (6)$$

а при законе ошибок Гаусса:

$$\omega = C \frac{\frac{h}{\sqrt{2}} e^{-\frac{h^2}{2} (\underline{a}^{(j)} - \underline{a}^{(j_0)})^2}}{1 + \sum \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{h^2}{2} (\underline{a}^{(j)} - \underline{a}^{(j_0)})^2}} \quad (7)$$

Когда имеется много объектов с совпадающими признаками (*сильное сгущение*) и разность $\underline{a}^{(j)} - \underline{a}^{(j+1)}$ колеблется около λ (*равномер-*

ное сгущение), то получаем из (7) приближенную формулу, заменяя суммы в знаменателе (7) интегралами

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h^2(a^{(j)} - \xi)^2}{2}} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} \quad \omega = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{h^2}{2} \delta^2} \quad C = \delta = a^{(j)} - a^{(j^0)}$$

так как ω мало, $\frac{1}{\omega}$ велико в сравнении с 1.

Взяв $C = \sqrt{2\pi}$ имеем:

$$\omega = h \lambda e^{-\frac{h^2}{2} \delta^2} \quad (8)$$

§ 5. Случай нескольких признаков сводится к рассмотренному случаю одного признака, а именно всю совокупность (a, b, c ... e) можно мыслить, как один признак, охарактеризованный несколькими числами.

Число возможных систем значений равно произведению чисел значений этих признаков.

На этом основании, обозначая признаки через a_g , а их значение через $a^{(g)}$ g можем обобщить формулу (1) так:

$$\omega = C \prod_g \sum_i p_g^{(ij)} \pi_g^{(ij)} \quad (9)$$

Где $\prod_g$ распространяется на все признаки. Таким же образом, обобщением формул (5) и (6) является

$$\omega = C \prod_g \frac{\sum_i p_g^{(ij)} \pi_g^{(ij)}}{1 + \sum_k p_g^{(jk)} \pi_g^{(jk)}} \quad (10)$$

$$\omega = C \prod_g \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi(a^{(jo)} - \xi) \varphi(a^{(j)} - \xi) d\xi}{1 + \int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi(a^{(jk)} - \xi) \varphi(a^{(j)} - \xi) a \xi} \quad (11)$$

и приближенно форм (№ 8)

$$\omega = h_1 h_2 \dots h_3, h_1 h_2 h_3 e^{-\frac{h^2}{2} (h_1^2 \delta_1^2 + h_2^2 \delta_2^2 + \dots h_3^2 \delta_3^2)} \quad (12)$$

ЛОБАЧЕВСКИЙ И ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ В МАТЕМАТИКЕ¹.

§ 1. Одно из характерных свойств, отличающих человека от животного, состоит в том, что человек стремится к недостижимому, между тем, животное ищет только то, что по его силам. Но всегда наступает момент, когда он сворачивает с пути к недостижимому в силу ли того, что им осознана недостижимость проблемы или в силу каких-то иных психологических факторов, ослабивших привлекательность проблемы. В своем пути к недостижимому человечество созидает, но всегда созидает не то, что оно желало создать. Созидаящий не знает для чего он создает. Эволюция целей управляется отмечаемым Вундтом² в своей этике законом гетерогонии целей: *средство В для достижения какой-либо цели А превращается в новую цель В*.

Прямой путь от С к А заменяется ломаным от С к В и от В к А, но последний путь забывается. Сосредоточение внимания на пути к В ослабляет интерес к уходящему в даль пути от В к А, и В овладевает психикой, стремясь сделаться самодовлеющей целью. Если в начале ценой всевозможных лишений копят сбережения для получения тех жизненных благ, которые оправдывают все понесенные лишения, то затем эта первоначальная цель рассеивается, и деньги обращаются в конечную цель. Математическая физика ставит чистой математике проблему на решение, например, задачу Дирихле. Но эта задача становится чисто математической задачей, при решении которой уже забываются интересы физики.

К поставленной проблеме вначале всегда *некритическое отношение*, изыскание решения всегда начинается с наивной и совершенно необоснованной веры³ в то, что решение проблемы существует. Насколько теоретический ум относится *доверчиво* ко всякой проблеме, в этом можно убедиться с помощью простого эксперимента: в редких случаях лицо, которому предлагается задача, содержащая в своих условиях нелепость, начинает с *анализа условий задачи*, а не с изыскания решения, только неудача последнего наводит его на мысль, что он одурачен.

Но, более того, вместе с *некритическим* отношением к проблеме, не вызывающим анализа совместности данных проблемы, выступает и ослабленное внимание к самому содержанию проблемы, влекущее *неясность* и *неопределенность*, так что сама проблема не является неподвижной, но колеблется в некоторых границах.

Исследователи расходятся не только в своих попытках решить проблему, но и в самом *понимании* этой проблемы.

Спор идет не только о правильности предлагаемых решений, но и о *сущности самой проблемы*. Часто прекращение этих колебаний, строгая

устойчивая установка смысла вопроса осуществляется незадолго до критического анализа данных проблемы, приводящего к упразднению самой проблемы, как невозможной⁴.

История математики, да и история науки вообще, в настоящее время – это только сырой материал, правда, очень богатый, но в будущем история науки вскроет *законы*, которым следует ум человеческий, идя к решению проблемы через тернии заблуждений, причем история проблемы должна быть не только историей решения ее, но и историей ее *метаморфозы*.

Этическая проблема из нормативной проблемы о логическом выводе моральных норм из одного принципа превращается в *генетическую* о происхождении этих норм из одного корня⁵.

Алхимическая проблема о превращении неблагородного металла в благородный так, чтобы потраченная на этот неблагородный металл масса и труд стоил бы меньше, чем полученная масса благородного металла, эволюционирует из экономической проблемы в чисто *естественно-научную*, о превращении одного элемента в другой, причем мы находимся у порога решения этой проблемы, в то время как первая – неразрешима, как квадратура круга⁶.

Основная физическая проблема о механистическом объяснении чисто физических явлений эволюционирует в проблему объяснения физических явлений с помощью простых электромагнитных явлений в элементарных частицах материи⁷.

Задача об интегрировании дифференциальных уравнений в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных или квадратур, превращается в исследование особенностей функции, определяемой дифференциальным уравнением определенного типа^{8,9}.

§ 2. Совершенно ошибочно думать, что 2000 лет велось размышление об 11-й аксиоме Евклида¹⁰. В связи с этой аксиомой ставились совершенно различные проблемы. В эпоху Возрождения Клавий вовсе не пытается вытянуть доказательство этого положения из объявленных Евклидом в I книге “Начал” – аксиом и постулатов. Основная проблема того времени¹¹ это еще чисто *схоластическая проблема определений*. Выявление правомочных и неправомочных признаков путем подбора наиболее убедительных случаев, в которых при особенно ясном выступлении контуров понятия, эти основные признаки ступшеывались бы или вполне выступали бы на свет. Математикам того времени менее всего нравились *евклидовы определения*, в частности, определение *параллельности*.

Согласно основной идее схоластико-аристотелевской логики они старались все определения развить per genus proximum et differentiam specificam.

Понятию параллельности прямых Рамус предпосылает понятие параллельности *вообще*, выводя первое через ограничение второго¹².

Принятие новых неевклидовых определений влечет изменение и в системе аксиом.

Если доказательство Клавия следует признать не разрешающим проблемы о параллельных прямых, то не в том смысле, как это теперь понимаем мы, т.е. усмотрев невозможность вывода использованных им положений без аксиомы о параллельных или эквивалентной ей аксиомы, а в том смысле, что поставленная Рамусом и рамистами проблема об исправлении геометрических определений, в частности, об определении параллелизма вообще и выводе отсюда параллелизма прямых, не решена им и даже, более того, и не может быть решена.

У математиков же XVII века, т.е. *рационалистической* эпохи, место этой проблемы занимает *другая*: не о выводе этого положения из евклидовых аксиом, а о переработке этой системы, замене евклидовых очевидных истин – другими, *более очевидными*¹³.

К этому требованию присоединяется еще и другое – требование *естественного порядка*, идущего, согласно правилам Декарта и идеям пор-роялевской логики, *от более простого к более сложному*¹⁴.

Отсюда сдвиг теории параллельных к началу геометрии до теорем конгруэнции треугольников в сочинении Арио и в учебниках *арнольдианского типа*.

Эта проблема совершенно иная, чем лежандрова и риманова. Проблема остается тоже *неразрешенной* и тоже принадлежит к числу *неразрешимых* проблем, ибо евклидова геометрия является невыводимой из системы аксиом, не содержащей аксиомы *той же степени очевидности, что и 11-я евклидова аксиома*, если только не прибегнуть к общим положениям, может быть и более очевидным, но относящимся к чрезвычайно общим понятиям, не поддающимся уже чисто математической обработке.

Я считаю необходимым резко подчеркнуть различие этой рационалистической проблемы:

“Дано положение Q , можно ли его вывести из положений P_1, P_2, P_3, P_n , (не ограничивая их числа и не ставя ограничения их независимости) более очевидных, чем положения R_1, R_2, R_3, R_n , из которых мы уже умеем вывести Q ” и проблемы: “Дана система независимых постулатов $P_1, P_2 \dots P_n$, требуется из нее без введения новых постулатов вывести положения Q ”.

В первой проблеме $P_1, P_2 \dots P_n$ искомые, а Q задано, во второй проблеме Q – искомые, $P_1, P_2 \dots P_n$ определено заданы.

Нельзя сказать, что Лагранж занят решением этой второй проблемы.

Лагранжева геометрия без аксиом¹⁵.

Упомянутые в некоторых изданиях 5 аксиом, в других совершенно исчезают.

Рационалистическое направление в это время заменяется *эмпирическим*, аксиомы из откровений натурального света обращаются в опытное знание. Геометрия этого времени не желает искать скрытых аксиом.

Основным требованием Лагранжа является *простота*. Он ищет доказательства, опирающиеся на *возможно меньшее* число аксиом, которые приходится упоминать, оставляя под порогом сознания какое угодно число других аксиом, увеличение которого не может усложнить доказательств.

Мы здесь, конечно, стоим уже близко к строгой и вполне определенной постановке проблемы, невозможность которой доказывается аксиоматикой.

Эмпирическое направление второй половины XVIII века перенесло интерес к очевидности лежащих в основе геометрии положений на их простоту¹⁶.

Более простые факты и легче наблюдаются, и легче выверяются, очевидность простых фактов имеет меньше шансов оказаться иллюзией, чем очевидность сложных.

Истинное и недостаточно очевидное положение оставалось в глазах рационалиста таким же откровением свыше, что и вполне очевидная истина; разница заключалась только в силе освещения *натурального света*.

Иное дело для эмпирика. Здесь уже недостаточность очевидности является показателем *недостаточной проверенности* истины в ряде наблюдений, устанавливающих эту истину.

Отсюда мысль, что это недостаточно очевидное положение, осложняющее геометрию, в действительности *неправильно*, что из данной точки можно провести не одну прямую, не пересекающую данной, а бесконечное число, но в таких границах, что при той точности наблюдений, с которой устанавливаются основные положения геометрии, эти прямые оказываются неразличимыми.

Попытка построения "воображаемой" геометрии, той, которая должна заменить евклидову, в случае, если евклидов постулат о параллельных оказался бы неправильным, возможность чего в глазах математиков все возрастает, является попытками изыскания *истинной геометрии* определения свойств *действительного* пространства.

§ 3. Лобачевский стоит еще именно на этой точке зрения¹⁷. Он ищет истинное пространство¹⁸. Устранив постулат о параллельных, он строит геометрию, чуждую противоречий. Пространство более общего типа без свойства, выражаемого этим постулатом, имеет более шансов на существование. Только потому, что мы имеем дело с малыми измерениями, мы не можем заметить, что существует не только одна, а целый пучок прямых, не пересекающих данной, что сумма углов в треугольнике не два прямых [угла], а несколько меньше.

Не следует думать, что мысли о построении неевклидовой геометрии впервые пришли Лобачевскому¹⁹. Но следует хорошо помнить, что до Ламберта математики из евклидовой системы постулатов с устранением 11-й аксиомы или заменой ее противоположной выводит положение только с целью привести к противоречию, т.е. с целью построения апagogического доказательства этого постулата.

Так делает Саккери²⁰, который, конечно, не достигает цели.

Так поступает и Ламберт²¹, но ему удастся из двух гипотез о существовании четырехугольника с 3 прямыми [углами] и одним не прямым, тупым или острым опровергнуть только первую.

Но что касается до второй, то у нас уже является мысль, но довольно робкая, о логической возможности геометрии при этой гипотезе.

Гаусс идет дальше, он делает несколько замечаний, относящихся к такой геометрии. Независимо от Лобачевского, но позже его, к построению неевклидовой геометрии приходит венгерский математик Больяй²². Лобачевский и Больяй взаимно дополняют друг друга.

Лобачевский обращает главным образом внимание на *отличие* неевклидовой геометрии от евклидовой, на те положения, которые не имеют места в евклидовой геометрии, которые выводятся из предположения, что из данной точки можно провести пучок не пересекающих данной прямую прямых, между тем Больяй занят преимущественно тем, что является общим как для евклидовой, так и для неевклидовой геометрий, тем, что по его мнению составляет содержание абсолютной науки о *пространстве*, и, таким образом, он становится ближе к аксиоматическим исследованиям.

То, что и предшественниками Лобачевского проблема разумеется в указанном смысле, явствует из самого названия, которое дает Швейкарт такого рода геометрии, называя ее астральной. Эта геометрия — учение о пространстве (как в то время определяли геометрию), но о пространстве *звездном*, свойства которого таковы, что сумма углов в треугольнике меньше $2d$, что невозможно безграничное возрастание высоты равностороннего треугольника и т.д. И для Лобачевского эта геометрия прежде всего астральная. Он свои теоретические исследования сопровождает попытками путем измерения элементов больших треугольников, образованных звездами, [определить] суммы углов в этих треугольниках и таким образом решить вопрос о том, какая геометрия в действительности имеет место. Он, мысля пространство не как форму интуиции, а по-ньютоновски, какместилище вещей, старается определить свойства этогоместилища в области как микрокосмоса, так и макрокосмоса, отражающегося на вмещаемих им вещах.

Микромегас, совершающий путешествие с изменением своего объема из мира млечных путей через окружающую нас обстановку в миры инфузорий и в миры молекул и атомов, будет видеть не только изменение тех

форм, в которые облачается материал, но и простейших их геометрических свойств.

§ 4. Но создающий никогда не знает, для чего он создает. Работая в этом эмпирическом направлении, отыскивая истину *в небесах*, Лобачевский ее находит *в самом себе*.

Геометрия Лобачевского бессмертна не как астральная геометрия, а как геометрия *воображаемая* или, лучше сказать, как *мыслимая*, но не воображаемая, разумея под последней термин в современном смысле.

Тот путь, по которому шел Лобачевский, не только не может дать доказательства того, что его геометрия представляет истинную геометрию, но даже и того, что она может быть таковой, так как сами операции измерения должны уже предполагать какую-либо геометрию.

Заслуга Лобачевского не в том, что он научил нас мыслить о том, чего мы не можем вообразить, но что существует, — его заслуга в том, что он научил мыслить о том, чего нельзя вообразить и чего не только нет, но и быть не может, и довел до полной ограниченности различие между реальной и логической возможностями.

Ни один из математиков до Лобачевского не имел смелости освободить разум от целей интуиций, сковывающих его, и дать полную систему геометрии, против которой говорил здравый смысл, но которая вела нас в широкие ворота царства разума.

Что важнее в науке — *анализ* или *синтез*?

Выводить следствия из причин или наоборот, подыматься к причинам, разыскивать силы, которые производят данное явление, или указать какие эффекты производятся данными силами? Оба направления равноценны. Есть великие аналитики, как Ньютон, вскрывающие путем анализа основные законы вселенной, есть и великие синтетика, как Лобачевский, извлекающие из неполной системы евклидовых аксиом не менее логичную и стройную, чем евклидовы “Начала”, систему геометрии.

Но за синтезом идет всегда анализ.

Система Лобачевского не встречает противоречий. Почему? Можно ли сказать, что это происходит потому, что она относится к реальному пространству?

Герbart, относя вместе с Кантом геометрическое пространство к духу, т.е. объявляя его нереальным, вне этого духа в сфере *вещи в самой себе*, находит другое *умопостижимое* пространство, уже реальное, которому присуще не только субъективное, но и трансубъективное существование.

Он получает это пространство своим обычным приемом *исправления понятий*, т.е. выбрасывая некоторые признаки и внося новые так, чтобы противоречия уже не оставалось.

Все пространство Гербарта возникает из понятий *совместности*, *смежности* и *раздельности*, продолжением в обе стороны, последователь-

ным разделением двух сначала совместных объектов А и В посредством В, и воссоединением посредством A^2 .

Гербартово пространство тщетно пытается выкарабкаться из смутной интуиции в области чисто логических понятий, является совершенно немощным для логической дедукции.

Конечно, не может быть никакой речи о геометрии такого умпостигаемого гербартовского пространства.

Но это математическое нежизненное пространство является матерью грассмановского противления, уже поддающегося некоторой математической обработке и, в свою очередь, вызвавшего математическое изучение "самого общего" пространственного многообразия, объемлющего пространства Евклида и Лобачевского, как частные виды (в работах Гельмгольца, Римана, Софуса Ли)²⁴.

У Гербарта только одно пространство логически возможно, чуждо противоречий, оно и должно совпадать с постулируемым им реальным пространством. Но около пространства Лобачевского скоро родятся и другие пространства, прежде всего римановское, в котором устранена 12-я евклидова аксиома, что две прямые не могут заключать пространство, а затем и другие, так называемые *патологические* пространства. Все эти пространства предъявляют право на свое транссубъективное существование, но все эти пространства обязаны доказать свое право не на реальное, а на чисто логическое существование.

Доказательство даже нескольких сот положений $R_1, R_2, R_3 \dots R_n$ из системы постулатов:

$$P_1, P_2, P_3 \dots P_n$$

без встречи на своем пути логических противоречий еще не гарантируют от таких противоречий в дальнейшем, еще не доказывает *совместности* этих постулатов.

§ 5. Вот мы видим, как наша по существу *метафизическая*, или *космологическая* проблема, превращается в *чисто логическую* проблему об оправдании той или иной системы геометрии. От познания тех форм, в которых содержится вселенная, мы обращаемся к тем формам, которыми мыслит наш разум. В истории человеческого разума это момент наибольшего самоуглубления. Разум направляет свой взор не туда, вверх, в блестящие мириады солнц пространства, а в темную бездну души и зараз постигает и свою силу и свою слабость. С одной стороны, он видит, что те схемы, в которых разворачивается его построение, более однообразны, чем это раньше казалось, что в одни и те же схемы вкладываются совершенно различные объекты, но, с другой стороны, разум может, экономизируя свой труд, мыслить сразу о совершенно различных вещах, прилагая эти схемы к абстрактным понятиям, совершенно отвлекаясь от пространственных представлений, более того, разум может мыслить и о смутных понятиях и даже о противоречиях.

Ибо теперь определенно осознано, что не все признаки вещей являются *логически действующими*, что все те, которые не затрагиваются формально-логическим аппаратом, могут быть и смутны и противоречивы.

Эти мысли нас естественно возвращают к вере в разум, который может мыслить и о таких вещах, о которых раньше отказывались мыслить, считая контуры их слишком смутными.

Проблема доказательства *логической возможности* системы геометрии решается с помощью *логических эквивалентов*, т.е. таких объектов A, B, C , которые обладают логически действующими признаками, удовлетворяющими тем же постулатам, что объекты нашей системы A, B, C .

Но они могут содержать много признаков и чуждых A, B, C , но только обязательно *логически не действующих*. Если A, B, C , принадлежат такой области (например, евклидову пространству), где мы отвергаем возможность противоречия, то система геометрии тоже не может содержать противоречия.

Путь, избранный Бельтрами²⁵ (ограничиваясь только плоской геометрией), был следующий: за эквиваленты прямых геометрии Лобачевского были приняты геодезические линии на некоторой поверхности (псевдосфере), эти геодезические линии определяются двумя точками, могут быть безгранично продолжены и т.д. Через данную точку проходит бесконечное множество прямых, не пересекающих данную геодезическую линию и заключенных между двумя такими геодезическими линиями.

К сожалению, задача не была вполне решена.

Бельтрами было доказано, что геометрия псевдосферы только в некоторой конечной области совпадает с геометрией Лобачевского.

Другие эквиваленты, указываемые Клейном²⁶ и Пуанкаре²⁷, более успешно привели к цели.

§6. Основная проблема *аксиоматики* — доказательство совместности и несовместности аксиом, — сперва, это *средство* чтобы оправдать систему геометрии, установить, правда, не действительность, а только ее возможность. Теперь средство обращается в цель: аксиоматика приобретает право на вполне самостоятельное и независимое существование.

Математика интересует не только *звенья* логической сети, но и *сама* логическая сеть, ставится проблема не только доказать положение, но доказать *определенным образом*, исходя из определенной *группы постулатов*.

Такова Гильбертова проблема о знаменитой теореме Дезарга²⁸: в двух треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ соответствующие вершины которых $(A, A_1), (B, B_1), (C, C_1)$ лежат на прямых $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, сходящихся в одной точке

О, соответствующие стороны (a, a_1) (b, b_1) (c, c_1) пересекаются в точках $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$, лежащих на одной прямой О и обратная теорема.

Эта теорема вместе с плоскостными зрительными аксиомами представляет основание зрительной плоской геометрии, иначе геометрии положения.

Доказательство ее фузионистическое, для чего приходится пользоваться *стереометрическими* зрительными аксиомами. Но есть ли в этом необходимость? Можно ли эту планиметрическую теорему вывести только из плоских зрительных аксиом?

Вот аксиоматическая проблема, которая ставится Гильбертом – типичная задача современной аксиоматики, для которой он получает отрицательное решение, подбирая очень остроумно логические эквиваленты прямых точек.

Задача Гильберта – типичная задача современной аксиоматики.

Логические эквиваленты для объектов геометрии Лобачевского ищут в евклидовом пространстве; эквиваленты объектов евклидова пространства – арифметические.

Для оправдания арифметики эквиваленты следовало бы искать в чисто логической сфере.

§ 7. Я не буду говорить о том, как далеко пошли в этом направлении, но я намету другого рода проблемы, которые еще никем не решались, но которые, вне сомнения, явятся проблемами будущего и при этом, прибавлю, недалекого будущего.

Прежде всего, выдвигается проблема *об апагогических доказательствах*. Всякое апагогическое доказательство предлагает приложение закона исключенного третьего: может быть А или не-А и ничего третьего. Предполагается, что имеет место не-А и отсюда выводится абсурд – отрицание верного положения С – не-С. Таким образом, в начале доказательства утверждается альтернатива: А или не-А.

Обратно, если в начале или в самом ходе доказательств прилагается закон исключенного третьего, то или доказательство ведется от противного, или последнее содержится в доказательстве, как составная часть. В самом деле, приложение его предполагает в начале или в ходе доказательств альтернативу В или не-В и снятие одного числа альтернативы путем доказательств его невозможности. Если снимаете В, то В приводится к С, к отрицанию заведомо верного положения, то можно сказать, что положение В доказывается апагогически. Если снимаете не-В, то имеем опять апагогическое доказательство в замаскированном виде. Заменяя В через не-В, получаем его в явной форме, не-В доказывается приведением не-(не-В) к не-С (абсурду)²⁹.

Аксиоматическая задача о том, можно ли привести доказательство какого-либо положения А исключительно *прямым* путем, сводится к зада-

че о выводимости А из данной системы постулатов с помощью только двух законов формальной логики: закона тождества и закона противоречия (без закона исключенного третьего).

Эта аксиоматическая проблема представляется частным случаем следующей более общей.

Все постулаты разделяются на три группы:

(A): A_1, A_2, A_3, A_n

(B): B_1, B_2, B_3, B_n

(C): C_1, C_2, C_3, C_n

Спращивается, возможно ли вывести теорему Н только из группы (A) и (B), причем к группе (A) прилагается, а к (B) не прилагается закона исключенного третьего.

§8. Выпрямление евклидовых доказательств достигается только путем введения новых аксиом, относящихся к бесконечности³⁰.

Логическая сеть, образованная косвенными доказательствами, богаче сети, образованной прямыми, если в основе той и другой лежат те же *математические постулаты*, ибо косвенные доказательства вводят логическую аксиому исключенного третьего и для обогащения второй требуется вначале этой сети поставить один из новых математических постулатов.

Современная математика движется, главным образом, апагогическими доказательствами³¹, но она упорно остается при наследии прошлого – версе в возможность хотя бы не прямых доказательств всякого истинного положения. Стараясь выпутаться из затруднений, она присоединяет к бесспорно очевидным постулатам другие, уже сомнительной степени очевидности, уменьшая и даже уничтожая убеждающую силу доказательств, сводя последнее к логическому выводу более сложных положений из более простых, но уже не очевидных.

Так, Гильберт в своих “Основаниях Геометрии”, стараясь дать строго формально–логическое построение геометрии отказывается от евклидовых доказательств методом положения первого случая конгруэнтности треугольников, возводя это положение в постулат³¹.

Неравенство в степени очевидности различных очевидных положений – это психологический факт, который был вначале определенно подчеркнут рационалистами и с которым следует считаться.

Положим, что некоторое положение Н выводится из постулатов А, В, С, D, Е, но не выводится из укороченной системы В, С, D, Е. Эти постулаты различной степени очевидности, пусть А – то, которое имеет наименьшую степень очевидности.

Измените одновременно в разных отношениях степени очевидности всех постулатов, и очевидность А окажется под *порогом сознания*, Н окажется уже *не выводимым* из очевидной аксиомы, мы получаем *недоказуемое*, но во всяком, случае истинное, положение. Чисто психоло-

гический признак очевидности вряд ли связан с чисто логическими свойствами сети, образуемой положениями.

Психологическая гипотеза, что то конечное число положений, из которых выводятся логически все остальные, принадлежит к очевидным, маловероятна.

Недоказуемость некоторых положений теории чисел, за правильность которых довольно красноречиво говорят факты, находит свое объяснение не в слабости нашего ума, а в том, что те положения, на которых стараются обосновать доказательства, всегда выбираемые с признаком очевидности (ибо иначе невозможно было бы убедить), каковыми являются положения, лежащие в основе арифметики, недостаточны для этого.

Задача о выводе из очевидных постулатов теоремы Р является также неразрешимой, как ее вывод из некоторой другой группы постулатов³¹.

Приводимый Гильбертом взгляд на разрешимость в положительном или отрицательном смысле *всякой* поставленной математиками проблемы, следует признать *неправильным*.

Не две только возможности: знаменитое уравнение Ферма имеет еще неизвестные для нас решения или существует доказательство отсутствия таких решений, но еще и третья: невозможность и решения этого уравнения и доказательства этой невозможности.

Проблема о логическом обосновании положения должна ставиться не так: доказать это положение, понимая под этим вывод его из очевидных положений, а так: определить, может ли данное положение быть доказано, т.е. выведено из очевидных положений, если это возможно, найти этот вывод³². Совершенно таким же образом задача о решении уравнения 5-й степени должна ставиться не так: решить уравнение, а так: может ли данное уравнение разрешиться в радикалах и, если может, то найти выражение для корня; или задача об интегрировании в конечном виде должна ставиться не так: найти данный интеграл, а так: может ли данный интеграл выразиться в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных и, если может, найти для него выражение³².

Аксиоматика³³ воспитывает человеческий ум в критическом отношении к проблемам³⁴.

Лобачевский является величайшим революционером в области абстрактных наук, хотя он и не вполне сознавал, в чем состоял революционный характер его начинаний.

Революция Эйнштейна по внешности крупней, она охватывает большие области знания, но первый толчок был более глубокий — он принадлежит Лобачевскому, и Эйнштейн только продолжает дело Лобачевского.

Но, зная судьбу революции Лобачевского, можно предсказать и судьбу революции Эйнштейна, которая, впрочем, в последние годы начинает вырисовываться.

У нас осталась евклидова геометрия как геометрия здравого смысла. Ни Лобачевский, ни Эйнштейн не дали новое решение старой проблемы, старые решения остались правильными, но они поставили *новые проблемы*, открыв пути к их разрешению, – они не разрушили старых зданий, но положили основу для новых, еще более прекрасных³⁵.

§ 1. Учение о формах и наглядная геометрия.

Следует выдвинуть как основной методический вопрос – вопрос о *характере* школьной геометрии и при этом остерегаться одностороннего решения. Я считаю ошибкой требовать осуществления в школе во всей чистоте одного из трех типов, о которых я собираюсь говорить. В школьную геометрию должны войти элементы из каждого из них и при этом в дозах, определяемых возрастом учащегося.

Первый тип – это наука о *пространственных формах*¹.

На вопрос, что изучает геометрия, с этой точки зрения следует сказать: треугольники, четырехугольники, круг, цилиндр, конус, сферу и т.д.

Эту геометрию можно уподобить ботанике или зоологии. В основе ее лежат некоторые простейшие истины, относящиеся к геометрическим фигурам и телам; из этих истин она извлекает следствие уже дедуктивным методом.

Конечно, эта геометрия всегда будет представлять основную часть школьной геометрии, в особенности на низших ее ступенях. Геометрия, раньше чем сделаться логической, должна быть опытной или наглядной².

Понятно, учение о формах и наглядная геометрия – понятия, которые не вполне совпадают. Но, вне сомнения, они теснейшим образом между собой связаны. Наглядная геометрия, конечно, будет говорить не о свойствах пространства, а лишь о фигурах и телах, и, с другой стороны, геометрия с таким разрозненным содержанием, естественно, идет по пути естествознания и не отрывается от опыта.

Но приемлем ли взгляд, согласно которому *наглядная геометрия* является только примитивной формой геометрии, что *логическая* геометрия, как форма более совершенная, устраняет ее? Я думаю, что это неверно.

Наглядная геометрия ставит определенную цель, восполнить данную конфигурацию или так ее преобразовать, что в полученной новой конфигурации возможно ярко и убедительно увидеть некоторые геометрические свойства.

Конечно, если бы математика стала *доказывать* все истины, исходя из очевидных аксиом, то за такой наукой действительно оставалось бы лишь *методическое* и *эвристическое* значение. Но разве можно поручиться, что это так, что таких очевидных истин достаточно, чтобы доказать, пользуясь только ими, ее истинные геометрические положения? Но если их недостаточно, то области логической и наглядной геометрии только частично друг на друга накладываются.

Существуют положения, в которых мы убеждаемся лишь с помощью интуитивного характера операций.

§ 2. Учение о пространстве и рационалистическая геометрия.

Вторым типом геометрии я выдвигаю учение о пространстве³. Такая геометрия может быть уподоблена разве только общей биологии, исследующей, что такое жизнь. Здесь уже совсем определенно должно выступить требование *дедуктивности* вывода. Признаем ли мы аксиомы за простые очевидные истины или будем считать их за результат индукции? Мы вначале, как Евклид⁴, должны все их собрать и выводить из них как следствие другие свойства *силлогистически*.

Правда, мы будем проходить через те теоремы, которые находим в наглядной геометрии, относящиеся к треугольнику и т.д., но фокус внимания будет не в них, а в том, что характеризует пространство: в общих преобразованиях, в инвариантах этих преобразований и т.д.

В качестве аксиом будут выдвигаться не случайные положения, а только те, которые выражают основную структуру пространства.

Возможна ли такая геометрия в школе? Частично не только возможна, но и должна быть.

Во всяком случае этой точкой зрения должен определяться в некоторой мере подход к аксиомам, которые в начале обучения могут большей частью оставаться в скрытом состоянии, но затем должны быть выявлены.

Аксиомы не должны выбираться по степени их очевидности или по большей легкости опытной проверки, но, с другой стороны, к ним в школе не должны предъявляться требования, которые ставятся формально-логической геометрией.

Можно сказать, что совершенно так же, как учение о формах облечается в наглядную геометрию, учение о пространстве становится *рационалистической* геометрией⁵.

Рационалистическая геометрия настолько же логична, как философия рационалистов Декарта⁶ и Спинозы⁷. Облечение таких выводов в символическую форму математической логики является совершенно невозможным. Чисто формально-логического аппарата в ней нет. Оперируют они с не вполне ясными понятиями. Признаки вещей, о которых в них говорится, не выявлены в их определениях полностью. Они выступают уже в ходе самого рассуждения, и положения, к ним относящиеся, вовсе не всегда выводятся силлогистически из определенных, наперед высказанных постулатов. Они в ходе рассуждения выступают или с достаточной очевидностью, или с такой степенью ее, которая повышается с помощью особых приемов, состоящих, главным образом, в пояснении признаков, к которым они относятся.

Как на примеры таких философско-геометрических рассуждений, можно указать на рассуждения Рассела⁸ в его “Основаниях геометрии” или Дельбсффа⁹, о которых ниже будем говорить.

Имеет ли научное значение такая рационалистическая геометрия? Не должна ли ее совершенно вытеснить та, которая старается осуществить чистоту своих логических выводов, вовсе не стараясь начинать с общих характерных свойств пространства, а просто стараясь убедить в геометрических истинах, путем формально-логических выводов из возможно меньшего числа специальных и мало характерных неочевидных положений? Рационалистическая геометрия дает ответы на вопрос “почему”, решает ту проблему, которую не берется решать формально-логическая геометрия, которая пока еще не превратилась в *гипотетическую*, а только старается убедить, что *это так*.

В истории геометрического учебника мы находим жаркие споры о доказательствах: “почему это так” и “это так”, о неестественных и естественных доказательствах¹⁰. Конечно, неформально-логическая геометрия стремится к выявлению причин, т.е. к построению естественных доказательств, но которые не могут оказаться в смысле формально-логической геометрии безупречными.

§ 3. Формально-логическая и гипотетическая геометрия.

Третья геометрия – это гипотетически-формальная¹¹. Ее формула: “если, то потому”.

Очевидностью аксиом она не заинтересована, она исследует не формы и не пространство, а логическую схему, в которую укладываются пространственные положения. Она интересуется не тем, что доказывается, а тем, как доказывается. Она заинтересована не узлами логической сети, а самой этой сетью.

К такой геометрии склоняется всякая геометрия, старающаяся выдержать логическую строгость и чистоту формально-логических построений. Было бы неправильно совершенно отвергать эту точку зрения в школьной геометрии. По мере роста геометрического образования учащегося, он должен все глубже проникать в конструкцию доказательств, все яснее представлять себе эту логическую сеть. На общую методическую задачу о степени проникновения школьной геометрии этой точки зрения составляющий учебник должен обратить внимание.

Я уже выше отметил, что эта третья геометрия, даже как научная геометрия, не единственна. Но я должен отметить, что формально-гипотетическая геометрия не во всей чистоте является *такой*. Она должна совершенно освободиться от тех целей, которые ставятся геометрией, изучающей формы, или геометрией, изучающей пространства.

Очевидные положения $P, Q, R...$ не должны иметь с ее точки зрения больше цены, чем неочевидные, из них извлекаемые. Задачи о логической сети не будут вполне исследованы, если мы будем знать пути, ведущие от $P, Q, R...$ к $P', Q', R'...$, но не будем знать путей, ведущих обратно от $P', Q', R'...$ к P, Q, R . Мы должны указать не только наименьшее число из $P, Q, R...$, достаточное для построения системы геометрии, но также и наименьшее число из P', Q', R' , пригодное для этой цели.

Но и в том случае, если после такого исследования, относящегося к $P, Q, R...$, мы провели бы его в отношении к $P', Q', R'...$ мы, все-таки, не освободились бы от зависимости от очевидных положений, логическая сеть оказалась бы действительно исследованной во всех *направлениях*, но только такая, которая прикреплена к $P, Q, R...$

Мы можем мыслить не только $P', Q', R'...$ получаемые из очевидных положений $P, Q, R...$, но и $P', Q', R'...$, не получаемые из них и, конечно, начиная с них сеть, мы получаем иное.

Но откуда мы должны выбирать такие положения:

P', Q', R'

$P'', Q'', R''...$?

Конечно, из тех, которые выводятся из $P, Q, R...$

Нам ничего не остается, кроме *интуиции*. Мы приходим к парадоксальному выводу о зависимости гипотетической формальной геометрии от геометрии интуитивной.

§ 4. Равенство

Мы будем говорить теперь о втором из указанных типов геометрии, причем возьмем ее на той ступени, когда она еще не является определенно выраженным учением о *пространстве*.

Пространство как ясная концепция еще не выступает в науке. Геометрия говорит скорее о *формах*, чем о *самом пространстве*, но общие принципы, из которых она исходит в своих логических выводах, по существу представляют уже характерные свойства пространства, которые только должны быть облечены в более подходящие формы.

Попытка идти именно в таком направлении принадлежит еще Лейбницу¹².

Идя в этом направлении, сильно отклоняясь от Евклида, не следует подробно доказывать даже такие теоремы, как: два треугольника ABC и $A'B'C'$ равны, если

$$\angle A = \angle A', B = A'B', AC = A'C'$$

Вместо того чтобы применять метод наложения, подвергаемый нападкам рационалистов, достаточно установить общие принципы: *два геометрических объекта P и Q равны, если получают одинаковым построением, производимым над равными объектами p, p', p'' и q, q', q'' .*

При этом равенство не должно быть понимаемо в смысле конгруэнции, т.е. *наложимости*. Наложимость – это только следствие равенства, устанавливаемое аксиомой: “Равные объекты при наложении совпадают своими частями”.

Разные – это во всех отношениях, кроме положения, одинаковые. Мы говорим, что $\Delta A'B'C'$ равен ΔABC , если это та же фигура, но только в другом месте.

Определение это резко отличается от того, которым пользуется евклидова геометрия. В последней объект определяется только конечным числом признаков a, b, c .

У Евклида наличие a, b, c определенно решает то, что данный объект – P . У Лейбница же определение таково, что нельзя *вывернуть*, есть ли данный объект – P , но ряд признаков a, b, c бесконечен и он не может быть исчерпан. При выводах же, бесконечное множество a, b, c заменяется таким же конечным, но это делается без доказательств. Так, в треугольнике берутся только углы A, B, C и стороны a, b, c .

Правда, число признаков, по которому можем судить о равенстве, понижается с помощью теорем, которые доказываются, исходя из общего принципа, выше нами формулированного. Термин “одинаковые” может быть истолкован различно: в смысле Евклида это будут построения только с помощью циркуля и линейки, с точки зрения Лежандра – это какие угодно операции, с помощью которых по данным строится новый объект.

Чтобы показать, каким образом прилагается общий принцип к выводу теорем, возьмем типичный пример.

Почему в двух равных треугольниках медианы равных углов равны? По Евклиду, следует поступать так: доказывать, что $\Delta AMC \cong \Delta A'M'C'$, ибо $\angle A = \angle A'$, $AB = A'B'$ и $AM = A'M'$ в силу равенства ΔABC и $\Delta A'B'C'$. Рационалистическая геометрия отвечает: потому, что все построения для получения медиан AM и $A'M'$ в одинаковых треугольниках одинаковы¹³.

Более сложный пример: в треугольники вписаны круги, центры их соединены с пересечением медиан прямыми OE и $O'E'$ – если треугольники ABC и $A'B'C'$ равны, то $OE = O'E'$ ¹⁴.

Почему? Согласно Евклиду, пришлось бы устанавливать ряд пар равных треугольников. Но можно сказать: потому, что все построения одинаковы.

§ 5. Подобие.

Совершенно таким же образом рассматривается подобие, которое следует рассматривать, как *одинаковость формы при различных размерах*.

Х. Вольф определяет подобие так: “Подобие есть тождество тех признаков, которыми вещи друг от друга отличаются”. В схолии Вольф

дает пояснения: “Возьми, говорит он, две вещи А и В, направь свое внимание на признаки, которые могут наблюдаться в А, и наблюдение запиши. С равным вниманием отметь и признаки В, которые в ней можем распознать. Если теперь окажутся все признаки, отмеченные в А и В, одинаковыми, то вещи А и В окажутся подобными”. Но при этом исключен *quantitas* (размер), который нельзя формулировать в словах. Приведенный общий принцип равенства заменяется у Лейбница следующим:

Два объекта Р и Q подобны, если получены подобным построением над подобными объектами.

Это определение содержится в аксиоме Вольфа¹⁵: “Если две фигуры или линии одинаковым путем производятся, и при том, те элементы, с помощью которых они производятся, подобны, то подобны также эти линии”. Необходимо пояснить, что у Вольфа для общих фигур предполагается по одному элементу, подвергающемуся одинаковым операциям.

Эта вольфианская аксиома может лечь в основание теорем подобия, если только признать подобие некоторых геометрических объектов, например, прямолинейных отрезков. Следует заметить, что углы следовало бы считать также подобными объектами.

Но Вольф не признает углы за элементы, а представляет только операциями над отрезками. Тогда в силу подобия отрезков прямых, принимаемых за радиусы двух кругов C_1 и C_2 и вследствие тождественных действий при описании этих кругов и, следовательно, подобия C_1 и C_2 , треугольники Δ_1 и Δ_2 с парой соответственно равных углов $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$ должны быть признаны подобными, ибо оба производятся с помощью построения в конце отрезков a_1 и a_2 соответственно равных углов¹⁶.

По этой же причине подобны два отрезка с отложенными на их концах равными углами.

Если пересечь две пересекающиеся прямые двумя параллельными, то пары отрезков (a, b) , (a', b') ,¹⁷ получаемых на сторонах, следует считать, на основании аксиомы Вольфа, подобными, вследствие чего все признаки эти, как и, следовательно, их взаимные зависимости, в частном случае те, которые получаются при их количественном сравнении, одинаковы:

$$a : a' = b : b'$$

Отсюда выводится пропорциональность сторон в подобных треугольниках.

Чтобы показать, какое значение имеет аксиома Вольфа, приводим пример.

Взяв два подобных треугольника ABC и $A'B'C'$ и вписав в них круги, соединяем точки касания со сторонами. Полученные таким образом треугольники EFQ и $E'F'Q'$ подобны. Почему? Потому, что операции в обоих случаях подобны. А именно производится:

1) деление углов треугольника,

2) опускание из точки пересечения перпендикуляров на стороны, разлагаемые на элементарные подобные операции,

3) соединение оснований перпендикуляров прямыми¹⁸.

§ 6. Постулат де Левека.

Бесспорно, что Х. Вольф имел влияние и на французскую методическую литературу. В тех ранних французских учебниках начала XIX столетия, в которых отклоняются от лежандрова типа, можно усмотреть влияние Х. Вольфа. Это влияние можно отметить, например, в книге Сюзанна¹⁹.

Следует обратить внимание на доказательства равновеликости пирамид с равновеликими основаниями и равными высотами. В методическом отношении теоремы эти представляют большой интерес.

Деном и Каганом доказана невозможность вывода этой теоремы методом разложения на равновеликие части. Отсюда вытекает необходимость применения метода исчисления бесконечно малых (методы исчерпывания „чертовой лестницы” или принципа Кавальери). Сюзанн находит особый путь, обходящий “чертову лестницу”, по которому идет Лежандр. В основе своего доказательства он ставит постулат де Левека. По всей вероятности, эта аксиома пускает свои корни в вольфианские идеи. То, что де Левек и Сюзанн называют операциями, *определяемыми только формой, а не размерами*. Вольф называет короче: *одинаковыми операциями*.

Согласно его аксиоме, если подобны Q и Q' , P и P' , то подобны также и пары (P, Q) и (P', Q') и потому отношения $P:Q$ и $P':Q'$ одинаковы. Постулат де Левека можно обобщенно сформулировать таким образом: *если мы имеем две подобные фигуры S и S' и с помощью одинаковых построений получаем из них (отрезки, площади, объемы) P и P' , а затем одинаковыми построениями — Q и Q' , то:*

$$P:Q = P':Q'.$$

§ 7. Общее определение изогенности.

Основное свойство, присущее не только евклидову пространству, но и пространству Лобачевского и Римана, может быть выражено в следующих словах:

“Пространство здесь таково же, как там, т.е. не существует в пространстве какой-либо абсолютной точки, с удалением от которой свойства пространства подвергаются изменению”.

Если теорема Пифагора верна здесь, на этом столе, на котором я пишу, то она остается справедливой и в другой комнате, и в другом доме, и в Берлине и, наконец, на Марсе. Это свойство будем называть *изогенностью*²⁰ пространства. Можно утверждать, что существуют такие изогенные пространства, в которых сумма углов треугольника не равна двум прямым,

но в изогенных пространствах эта сумма зависит не от положения треугольника, а только от его формы и размера, она — функция длины сторон, но вовсе не координат определяющих положение вершин. Среди неизогенных пространств следует выделить *изотропные* пространства, каковым, конечно, является евклидово.

§ 8. Л. Бертран об изогенности пространства.

Изогенность пространства впервые выдвигается Л. Бертраном²¹.

Его „охотник”, путем опыта вскрывающий одну за другой основные геометрические истины, отмечает прежде всего наиболее характерное, так сказать бросающееся в глаза, свойство нашего пространства: его изогенность, тождественность его свойств в различных частях: „Часть пространства, говорит Бертран, которое заняло бы тело в одном месте, не отличается от того, которое оно заняло бы в другом, к чему мы еще прибавим, что пространство около всякого тела то же, что пространство около того же тела, помещенного в другом месте”.

В высокой степени интересно, как Бертран устанавливает понятие о *плоскости и прямой*.

Изогенность пространства — это первое, что дается наблюдением. Второе, это возможность деления пространства на две изогенные относительно границы части. „Пространство можно разделить на две части такие, что нельзя будет ничего сказать об одной, что равным образом нельзя сказать о другой, и более того, — таких, что их общая граница будет иметь с каждой из них те же отношения в целом и частях”.

Такая граница и определяется Бертраном как *плоскость*. Точно таким же образом прямая определяется, как граница, разделяющая плоскость на изогенные части.

Следует, однако, заметить, что аксиома об изогенности пространства и определение плоскости и прямой (или аксиомы о плоскости и прямой), как изогенных границ, не представляют у Бертрана рабочих аксиом. В теоремах они забываются. Бертран много ближе к Евклиду, чем это можно было бы ожидать. Между тем эти аксиомы он мог бы широко использовать.

Отчего окружность делится диаметром пополам? Потому, что обе полуокружности совершенно одинаково получаются с помощью диаметров. В обоих случаях центр, из которого описывается дуга, берется в одной и той же точке на диаметре, радиус один и тот же и границы те же на диаметре, но все это вполне определяет окружность.

Отчего равноудаленные от перпендикуляра наклонные равны? Потому, что для получения их в изогенных частях, на которые делит плоскость прямая, перпендикулярная данной, производится одни и те же операции, вполне определяющие эти наклонные²²: восстанавливается перпен-

дикуляр из одной и той же точки на прямую, откладываются на них одинаковые отрезки DB и DA , и соединяются концы их с той же точкой прямой²³.

Но если взять *изотропное*, но не *изогенное пространство*, то указанное свойство будет наверняка иметь место только для случая прохождения перпендикуляра CD через центр изотропности O . Но если этот перпендикуляр CD не пройдет через O , то при $CA=CB$, DA вообще окажется не равным DB . Если длина отрезка убывает при вращении его около неподвижного конца с удалением другого от O , то $DB < DA$.

Отчего биссектриса двух прямых – геометрическое место точек, равноудаленных от этих прямых? Потому, что обе прямые одинаково расположены относительно биссектрисы и построения для получения перпендикуляров, измеряющих расстояние, одинаковы в изогенных частях плоскости.

В случае неизогенного пространства, но только изотропного, теорема верна, если прямые пересекаются в точке O – центре изотропности.

Из общей *аксиомы об изогенности* вытекает возможность построения симметричных фигур (относительно плоскости в пространстве и прямой на плоскости), но это положение уже, чем приведенная аксиома.

§ 9. Гомогенность пространства.

Другое общее основное свойство евклидова пространства – его гомогенность²⁴. Оно остается неизменным и при изменении масштаба. Если все геометрические объекты уменьшить или увеличить в одной и той же пропорции, то свойства их остаются те же.

Валлис²⁵ доказывал *постулат о параллельных*, устанавливая аксиому о возможности построения треугольника, подобного данному (или точнее, имеющего углы, равные углам данного). Но аксиома о возможности построения подобных фигур – это уже аксиома о гомогенности. Это свойство вскользь отмечается Лапласом²⁶, который говорит: „Восприятие пространства заключает в себе особенное свойство, которое само по себе очевидно и без которого нельзя строго обосновать свойство параллельных линий. Представление об ограниченном протяжении, например о круге, не содержит в себе ничего, что зависело бы от его абсолютной величины. Но если мы мысленно уменьшим его радиус, то мы непреодолимо должны будем уменьшить в том же отношении его окружность и стороны вписанных фигур. Эта пропорциональность представляется мне постулатом более естественным, нежели евклидов²⁷“. Вполне определенно и ясно гомогенность пространства выдвигается бельгийским философом Дельбефом²⁸. Для него, как для крайнего сенсуалиста, математическое пространство представляет *близкое* к истинному пространство, данное опытом с некоторой *небольшой погрешностью*. Для него *истинное* пространство совпадает с

эмпирическим, а математическое коренным образом отличается от эмпирического.

В то время, как эмпирическое пространство не изогенно – ибо нельзя сказать, что мир небесных тел таков же, как мир инфузорий – математическое пространство и изогенно, и гомогенно (т.е. фигуры его сохраняют свои свойства при всяком уменьшении масштаба). Математическое пространство по Дельбефу – это *схема эмпирического пространства*, в котором последнее является *упрощенным* и, благодаря этому упрощению, – способным подвергнуться математической обработке. Интересно сравнить определение Л. Бертрана прямой линии, с определением Дельбефа, в общем приближающееся к евклидову²⁹, “Прямая линия – это линия однородная (гомогенная), т.е. такая, части которой, безразлично как взятые, подобны между собой или различаются только по длине”. На это можно возразить, что то же свойство однородности присуще и кругу, но если вникнуть в выражение: “различаются только по длине” (или, что то же, только по величине), и принять в соображение, что Дельбеф выдвигает три элемента, по которым части линии различаются – *форму, величину и направление*, то возражение это отпадает, ибо у прямой формы и направление в различных точках одно и то же, части прямой различаются поэтому *только по величине*.

Основной операцией при разрешении Дельбефом постулатов (т.е. вывод постулатов евклидовой геометрии из свойств изогенности и гомогенности пространства) является увеличение или уменьшение фигуры при сохранении ее формы, что мы будем называть *преобразованием подобия*. Доказательство Дельбефа того, что прямая определяется двумя точками из гомогенности пространства, можно представить в следующей форме:

1. В силу гомогенности прямой, всякий отрезок получается через подобное преобразование отрезка АВ так, что форма всякого отрезка определяется формой АВ и направление – направлением АВ. Совокупность всевозможных отрезков прямой, иначе говоря, сама прямая, определится, таким образом, отрезком.

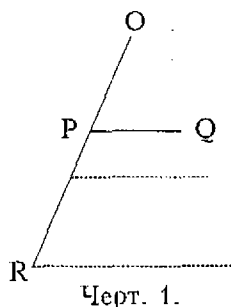
2. Но такого рода преобразование достигается движением А или В по одному направлению, так что преобразование подобия сводится к вполне определенному движению точек А и В (раздвижению или сближению концов, по выражению самого Дельбефа) и поэтому задание А и В вполне определяет бесконечную совокупность отрезков, т.е. *всю прямую*. Определяя параллельные, как *прямые одного направления*, Дельбеф легко выводит равенство соответственных углов при пересечении двух параллельных третьей. Но ему приходится доказывать эквивалентность этого определения обычному евклидову. А именно, что:

1) две параллельные (в смысле Дельбефа) прямые не могут пересечься, как далеко мы их ни продолжили бы;

2) две прямые не параллельные (в смысле Дельбефа), т.е. имеющие различные направления, встречаются.

С первой частью Дельбеф легко справляется, замечая, что в противном случае эти прямые образовали бы различные направления. Вторая же часть устанавливается с помощью преобразования подобия.

Пусть OR , PQ — различные направления, через точку r проводим rq того же направления, что и OR , и заставляем возрастать фигуру Orq . Тогда, вследствие сохранения Orq формы, Or будет возрастать, rq — сохранять направление. В результате rq обратится в PQ , причем точка пересечения rq и Or , сохраняясь при преобразовании, останется и тогда rq обратится в PQ , т.е. PQ пересечет OR в некоторой точке R (черт. 1).



§ 10. Пространства неизогенно-гомогенные и негомогенно-изогенные.

В противоположность евклидову пространству, пространства Лобачевского и Римана не гомогенны (изогенно-негомогенные), сумма углов в треугольнике зависит не только от формы треугольника, но и от его размеров. Чем меньше треугольник, тем сумма эта ближе к $2d$.

Но может ли быть пространство гомогенным, но не изогенным? Таким пространством является *зрительное* пространство, в котором расстояние между точками определяется углом зрения. В движении от глаза расстояние между концами неизменяющегося отрезка будет убывать, при движении к глазу будет возрастать. Но такое пространство не будет зависеть от абсолютной длины (*параметра*), как пространство Лобачевского, и уменьшение и увеличение геометрической фигуры не будет влиять на его свойства, если только ко всякой фигуре будет присоединяться центр изотропности (в настоящем случае глаз), так что ABC всегда будет рассматриваться как часть $\square ABCD$.

Пространство парносвязно³⁰, если оно характеризуется взаимоотношением двух точек (аксиомой расстояния Рассела). В изогенном пространстве есть такие передвижения этих точек, при которых это взаимоотношение остается неизменным.

Пространство *арифметизировано*, если всякое такое отношение выражается числом. Это число получается операцией над расстоянием M_1M_2 и каким-то другим расстоянием $AB=d$. В пространстве гомогенном и изогенном нет абсолютного d ; A и B берутся произвольно. В пространстве изотропном, но гомогенном, абсолютной меры тоже нет³¹. В пространстве неизогенном, в указанном выше смысле, парносвязности быть не может, взаимоотношение всегда рассматривается, как отношение трех точек и цен-

тра пространства O . Здесь следует отметить, что изотропность можно понимать еще в ином смысле, чем в § 7. Расстояние обращается в 4-членное отношение $(M_1 M_2 OS)$. (O и S); при такого рода изотропности (относительно прямой) нет гомогенности и за абсолютную меру можно принять OS .

§ 11. Теория параллельности Лейбница.

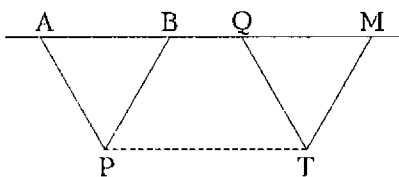
Против евклидова определения параллельности как прямых, не пересекающихся при своем продолжении, выступал еще в XII веке Рамус³². Он подчеркивал полное несоответствие этого определения общему понятию параллельности каких угодно линий, которые, оставаясь параллельными, могут вместе с тем и пересекаться³³.

Он определяет параллельные (и при этом не только прямые, но и какие угодно линии), как равноотстоящие. При этом, расстояние между двумя линиями им мыслится по прямой перпендикулярной (мы скажем теперь: по нормали к двум линиям). При таком *рамическом* определении параллельных нам нет необходимости вводить 11 евклидову аксиому.

Все свойства параллельных выводятся просто из этого определения. Но определение это именно предполагает эквивалентную аксиому о том, что геометрическое место точек, равностоящих от прямой, представляет прямую. Как известно, в геометрии Лобачевского это геометрическое место, кривая — гиперцикл. Лейбницянское³⁴ определение, конечно, предполагает такую скрытую аксиому.

“Параллельные, — говорит Лейбниц, — это те, которые везде находятся взаимно в том же отношении”.

„Parallelae possunt definiri rectae qualesvis ubique habent eodem modo”.



Черт. 2.

Лейбницянское определение предполагает, что не только операции восстановления перпендикуляров в различных точках прямой и откладывание равных отрезков дают параллельную прямую, но и что вообще одинаковые построения, производимые над прямой в различных точках, дают также параллельную прямую.

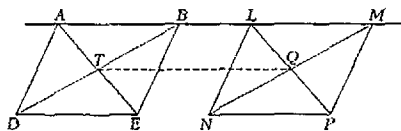
Так, например, если мы в одном месте отложим отрезок AB и в другом месте такой же отрезок QM и построим на них равносторонние треугольники, то все вершины этих треугольников окажутся на параллельной прямой (черт. 2).

Вместо этого построения можно взять и другое. Можно строить равные параллелограммы $ABDE$, $LMNP$ и брать точки пересечения их диагоналей T и Q .

То, что существует такое геометрическое место, такое, что каждое из построений, возможное в одном месте, возможно и в другом, — это

выводится из *изогенности пространства*, из того, что пространство *здесь* таково же, как *там*. Но из изогенности пространства, как это кажется Лейбницу, вовсе не вытекает то, что это геометрическое место — прямая.

По Лейбницу, из того, что геометрическое место находится в том же отношении к прямой, вытекает ее однородность, но только не в смысле *гомогенности*, а в смысле *изогенности* — одинаковые построения в различных местах должны давать те же результаты. Но подобные построения могут давать различные результаты.



Черт. 3.

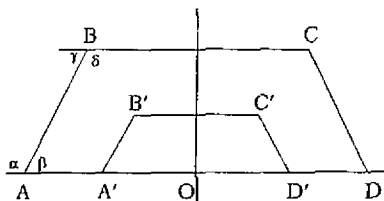
Если на концах отрезка AD построить перпендикуляры $AB=DC$, то в силу *изогенности* пространства, следует ожидать, что углы B и C будут равны. Но равенство углов B и A,

D и C отсюда не вытекает, оно вытекает из *гомогенности* пространства.

Дальше Лейбницу следовало бы так рассуждать:

Если вместо AD взять $A'D'$ и на нем построить четырехугольник $A'D'B'C'$ с прямыми углами при основании и с равными боковыми сторонами, то должны получить угол B' равный B.

Уменьшая $A'D'$, мы должны будем признать, что и в том случае, когда $A'D'$ обратится в точку a, $B'C'$ пойдет по AD, углы, смежные углам B' , C' , окажутся равными углам, смежными с A' и D'. Как и при доказательстве Валлиса, собственно одной гомогенности пространства оказывается недостаточно. Необходимо еще применить общий принцип пределов: то, что остается неизменным при изменении переменных X, Y, Z..., остается верным и в *пределе*. Это Лейбницем высказано в форме очень общего положения, имевшего у него более *метафизический*, чем *математический* характер³⁵. По существу оно совпадает с первой половиной принципа непрерывности Понселэ: *если какое-нибудь положение доказано при ограничении так, что некоторые величины a, b, c... не обращаются ни в нуль, ни в бесконечность и не принимают мнимых значений, то оно остается верно и тогда, когда эти ограничения сняты*.



Черт. 4.

Но Лейбниц сам к этому принципу не прибегает. Он говорит, что в виду того, что смежные углы при A равны, нет основания чтобы они при B оказались неравными. Это довольно темно и требует разъяснения. Лейбницу представляется почему-то очевидным, что

$$\frac{\gamma}{\delta} \text{ может зависеть только от } \frac{\beta}{\alpha} \text{ и если } \beta = \alpha, \text{ то обязательно } \gamma = \delta.$$

§ 12 Валлис.

Принцип изогенности пространства, конечно, шире, чем принцип § 4, а гомогенности — чем принцип § 5.

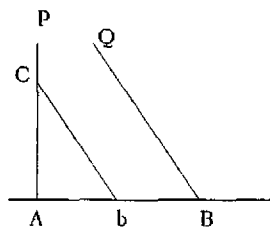
Аксиома § 4 вовсе не постулирует существование где угодно объектов, равных данным, а только указывает условие равенства *уже данных*, она вовсе не постулирует возможность производства какой-либо операции где угодно. Аксиома § 5 вовсе не постулирует возможности уменьшения в какой угодно мере с сохранением формы.

Но можно сказать, что возможность передвижения и возможность уменьшения объекта — положения тоже более узкие, чем принципы изогенности и гомогенности тел, когда это передвижение указывается в определенном направлении или уменьшение в определенных размерах.

Теорема параллельных Валлиса постулирует возможность построения на каком угодно отрезке треугольника, подобного данному, но он может требовать и меньшего, — только возможности построения такого на *продолжении стороны*, и при этом только прямоугольного.

Чтобы доказать, что наклонная BQ пересекается с перпендикуляром AP, Валлис строит с тем же углом прямоугольный треугольник AbC так, чтобы он пересек перпендикуляр. Затем на AB строит прямоугольный треугольник, существование которого доказывает пересекаемость BQ и AP в силу того, что BQ пойдет вдоль bC.

При этом и здесь неизбежно применяется общий принцип теории пределов. Возможность пересечения bC с AP доказывается тем, что если бы это не было возможно ни при каком Ab, сколь мало оно ни было, оно было бы невозможно и при $Ab=0$, т.е. когда BC проходит через A.



Черт. 5.

ИЗ ПРОШЛОГО ПЯТОЙ КНИГИ “НАЧАЛ” ЕВКЛИДА.

§1. История 5-й книги “Начал” Евклида, содержащей античную теорию пропорций, это – история арифметизации геометрии, история эволюции идеи числа.

Для Евклида число – это “собрание единиц” (кн. 7, опр. 2), так что и дробь для него еще не является числом. Между геометрическими величинами и числами еще нет взаимно-однозначного соответствия: отношение двух отрезков площадей или объемов $a : b$ еще не сводится к отношению двух чисел. Евклиду придется строить две теории пропорций: величин в 5-й книге и чисел в 7-й. С нашей точки зрения ему, приходится повторяться.

Но это только с нашей точки зрения, а не с точки зрения Евклида. У Евклида не только нет взаимно-однозначного соответствия между геометрическими величинами и характеризующими их числами, у него нет идеи рода, охватывающего видовые понятия геометрической величины и числа, которое является результатом только дальнейшей эволюции математической мысли.

Чисто формальная точка зрения противна Евклиду, определение класса совокупностью формальных законов ему чуждо.

Число и прямолинейный отрезок (в его терминологии – прямую) он не решается отнести к одному классу в силу тождественности формальных законов, которым подчиняются соответствующие операции над ними. Величины в I книге (см. акс. 8) взаимно налагаются.

Аксиомы: 1, 2, 3 ...

“Величины, равные одной и той же величине, равны между собой”.

“Если к величинам равным придадим равные, то получим равные суммы”.

“Если от величин равных отнимем равные, то получим равные ...” и т.д. все относятся не к числам, а к геометрическим величинам, к классу, в который отнюдь не входят числа.

Но что является в высокой степени интересным – это то, что эти и другие аксиомы лежат в основе арифметики Евклида, так как все арифметические действия над целыми числами Евклид сводит к действиям над особым классом отрезков, составленных из одного определенного, отвечающего единице.

Между отрезками этого класса и целыми числами существует взаимно-однозначное соответствие и оно позволяет Евклиду, идя в обратном

современному направлению, свести не геометрию к арифметике, а арифметику к геометрии¹.

§2. Понятия об отношении чисел у Евклида нет, но есть понятие об отношении величин.

Опред. 3 – 5-й книги.

Отношение есть взаимная некая зависимость двух однородных величин по их количеству (пер. Петрушевского).

Понятие же о пропорциональности имеется как для величин, так и для чисел.

Для величин: опред. 6 5-й книги².

Пропорциональными называются величины, имеющие то же отношение.

Для чисел: опр. 20 7-й книги.

Числа пропорциональны, если первое второго и третье четвертого составляет то же кратное или ту же долю $\left(\frac{1}{n}\right)$ или ту же дробь $\left(\frac{m}{n}\right)$.

7-я книга проводится независимо³ от 5-й, так что не будучи в силах охватить эти два понятия пропорциональности чисел и пропорциональности величин в одном общем их объемлющем понятии пропорциональности вообще, конечно, в слитной форме у него имевшейся, Евклид дает эти понятия раздельно, так что общим у них остается только название.

Определение отношения величин, как и определения точки и прямой в первой книге, остается у Евклида мертвым, логически не действующим.

Рабочим определением является определение 5-е 5-й книги, определение тождественности отношений. “Величины, говорится, суть в том же отношении, первая ко второй и третья к четвертой, когда равнократные первой величины и третьей, и равнократные второй величины и четвертой, взятые по какому-либо кратствованию, суть таковы, что попеременно каждая каждой, или купно равны, или купно больше, или купно меньше”.

На алгебраическом языке

$$a:b=c:d$$

если при всяких целых числах m, n таких, что

$$ma > nb \text{ также } mc > nd$$

$$ma < nb \text{ также } mc < nd$$

$$ma = nb \text{ также } mc = nd$$

Что такое отношение – Евклид определяет⁴. Но тогда следует считать известным и то, что представляет тождественность, или одинаковость отношений.

Положение здесь то же, что с прямыми углами и площадями, равенства которых Евклид не определяет, но дает аксиомой 8-й 1-й книги⁵ *признак равенства*.

В духе самого Евклида следовало бы признать определение 5-е не определением, а *аксиомой*.

То же самое относится и к определению большего и меньшего отношения (опред. 5-й книги), выражаемое в алгебраической символике так:

$$a:b > c:d$$

если для некоторых целых m, n :

$$ma > nb$$

$$mc < nd$$

История создания “Начал” Евклида для нас, собственно говоря, закрытая книга. Тем не менее, можно иногда, так сказать, ощупать психологию некоторых явлений, относящихся к “Началам”.

Что произошло бы, если бы 5-е определение было объявлено аксиомой? Пришлось бы ее помещать в начале 1-й книги, пришлось бы пополнять систему определений этой книги и без того очень длинную, и идти против ясно выраженной тенденции помещать в начале книги только минимум определений и, вместе с тем, в силу методических затруднений — невозможности читателем обнять памятью всю эту таблицу — быть вынужденным опять повторять эти определения в начале 5-й книги.

Да и сама та аксиома обладала бы степенью очевидности еще меньшей, чем 11-я 1-й книги⁶. Автор, можно сказать, инстинктивно сделал то, что современные математики делают уже вполне сознательно: возвел не очевидную истину в определение, объявив: “называется A то, чему присущи свойства $a, b, c, \dots$ ”, между тем, как до тех пор называлось A то, чему были присущи свойства $a', b', c', \dots$, и из наличности $a', b', c', \dots$, уже извлекалась наличность $a, b, c, \dots$ или интуицией, или выводом, не укладывавшимся в строго логичную форму.

§ 3. Определение 5-е пускается в ход в теореме 4-й, а затем только в 7-й. 1, 2, 3, 5, 6.⁷ Теоремы выводятся независимо от него и относятся к свойствам равнократных.

Доказанные на основании опр. 5-го свойства пропорций располагаются в таблицу:

I) $a:b=c:d \rightarrow ma:nb=mc:nd$	теор. 4
II) $a=b \leftrightarrow a:c=b:c$	теор. 7,9
III) $a \geq b \leftrightarrow a:c \geq b:c$	теор. 8,10
IV) $ab:c:d; c:d=e:f \rightarrow n:b=e:f$	теор. 11
V) $a:b=c:d \leftrightarrow a:b=c:d=(a+c):(b+d)$	теор. 12

VI) $a:b=c:d; c:d > e:f \rightarrow a:b > e:f$ теор. 13

VII) $a:b=c:d; a \geq c \rightarrow b \geq d$ теор. 14

VIII) $a:b=na:nb$ теор. 15

IX) $a:b=c:d \rightarrow a:c=b:d$ теор. 16

X) $a:b=d:e \quad b:c=e:f \rightarrow a:c=d:f$ теор. 22

XI) $a:b=e:f \quad b:c=d:e \rightarrow a:c=d:f$ теор. 23*

Приводим для ознакомления с характером доказательств 5-й книги доказательство 11-го предложения (т.е. IV свойства).

Берутся равнократные

$$a, c, e - \bar{a}, \bar{c}, \bar{e} \quad (\text{т.е. } ma, mc, me)$$

$$b, d, f - \bar{b}, \bar{d}, \bar{f} \quad (\text{т.е. } nb, nd, nf)$$

Так как $a:b=c:d$, то, согласно 5-му определению, если $\bar{a} \geq \bar{b}$, то $\bar{c} \geq \bar{d}$.

Далее в силу того, что $c:d=e:f$, то по тому же определению, если

$$\bar{c} \geq \bar{d}, \text{ то } \bar{e} \geq \bar{f},$$

откуда извлекаем, что при $\bar{a} \geq \bar{b}$, и $\bar{e} \geq \bar{f}$

и согласно определению 5-му, что

$$a:b=e:f.$$

Приводим также доказательство положения 16 (IX-го свойства).

Взяв равнократные

$$a, b \quad \bar{a}, \bar{b} \quad (\text{т.е. } ma, mb)$$

$$c, d \quad \bar{c}, \bar{d} \quad (\text{т.е. } nc, nd)$$

мы имеем по свойству (VIII)

$$a:b=\bar{a}:\bar{b}$$

$$a:b=c:d$$

откуда по свойству (IV)

$$c:d=\bar{a}:\bar{b}.$$

Но, так как $c:d=\bar{c}:\bar{d}$, то $\bar{a}:\bar{b}=\bar{c}:\bar{d}$ откуда в силу (VII св.) при $\bar{a} \geq \bar{c}$ также $\bar{b} \geq \bar{d}$, что согласно 5-му определению, дает:

$$a:c=b:d.$$

Эта теорема о перемене отношений может иметь смысл только в случае однородности всех четырех величин

(a, b, c, d).

Если взглянуть дальше в 6-ю книгу, то ясно представится, что Евклид признает пропорциональность только между величинами *одного рода*, а равенство отношений также между разнородными величинами. 1-е предложение 6-й книги формулируется так: "Два треугольника или два параллелограмма имеющие ту же высоту относятся, как основания. Но во 2-м предложении мы имеем на сторонах треугольника, пересекаемого параллельно основанию, пропорциональные отрезки, то же в 3-й теореме, где мы имеем четыре пропорциональные величины: стороны треугольника и отрезки, отсекаемые на третьей стороне биссектрисой. В 33-й теореме имеем равенство отношений углов и соответственных дуг. Следует думать, что в дальнейшем понятие пропорциональности подверглось обобщению. Неоднородные величины (a, b, c, d) стали называть пропорциональными, если

$$a:b=c:d,$$

например, углы и соответствующие дуги.

Известны две версии 8-го определения 5-й книги⁹:

Пропорция – тождество отношений.

Пропорция – подобие отношений.

Первое – отвечает случаю однородности пар (a, b) (c, d), второе – неоднородности.

В определении 6-м пропорциональных величин, как имеющих равное отношение, вне сомнения недостает условия однородности.

В седьмой книге для чисел доказывается свойство IV (теор. 5, 6, 7, 8, 11), причем отдельно исследуются случаи доли и дроби, затем свойство IX (теор. 9, 10, 13) и свойство XI (т. 22).

Я выше сказал, что 7-я книга проводится *независимо* от 5-й. На это можно было бы возразить ссылкой на доказательство положения 19-го 7-й книги.

Если $a:b=c:d$, то $ad=bc$ и обратно. Доказательство первой части ведется следующим образом. Положим $ad=e$, $bc=f$, $ac=g$.

Тогда согласно доказанному в 7-й книге независимо от 5-й: $g:e=c:d$ и $a:b=g:f$.

Но согласно условию $a:b=c:d$, поэтому $g:e=g:f$, откуда $e=f$.

В издании Лоренца¹⁰ здесь стоит ссылка на теоремы 11 и 9 первой книги, устанавливающие свойства II и IV пропорций, которой в переводе Петрушевского не имеется. Если сам Евклид имел в виду эти ссылки, т.е. применение результатов теории пропорции 5-й книги к числам в 7-й, считая числа входящими в класс величин 5-й книги, то является в высокой

степени странным, почему ему тогда понадобилось выводить другие свойства чисел, которые можно было бы получить из той же 5-й книги.

Верней всего, что Евклидом применялась здесь скрытая арифметическая аксиома (этого рода аксиомы все находились под порогом сознания).

1) Если a составляет ту же часть b , что $c - d$, а c ту же часть d , что $e - f$, то a составляет ту же часть b , что $e - f$.

2) Если g составляет ту же часть e , что и f , то e и f равны.

§ 4. В противоположность математикам XVII века, Клавий¹¹ (известный комментатор Евклида XVI в.) больше всего говорит не о 5-м, а 4-м определении 5-й книги “Начал”. “Величины называются имеющими отношение одна к другой, кои, будучи взяты кратно, могут быть больше одна другой”.

Определение же 3 излагается пространнее с пояснением примерами понятия однородности: “Когда две величины одного рода, как два числа, две линии, две поверхности и два тела и т.д. между собой сравниваются относительно количества, т.е. того, что одно больше или меньше, или равно другому, то называется это сравнение или взаимная зависимость — отношением (*Ratio sive proportio*).

Определение 4-е представляет загадку более трудную.

Едва ли можно считать это другим определением того же, что дается уже 3-м определением.

Как и в других случаях, скорее всего здесь за определением *рода* следует определение вида.

Отношение одной величины к другой (опр. 4) — вид. Отношение (опр. 3) — род.

Какое отличие между этими двумя отношениями? Если в том, что первое есть отношение не вообще однородных величин, а однородных величин специального типа, причем такого, который определяется свойством: кои, будучи взяты кратно, могут быть больше одна другой, то придется признать, что Евклид ясно сознавал постулат Архимеда¹² и возможность величин, ему неудовлетворяющих. Между тем везде и в 5-й, и в 6-й, и в 10-й книгах он приводит неявно, в виде скрытой аксиомы, которых было очень много под порогом сознания Евклида.

Вашенко-Захарченко¹³ основательно думает, что свойство, отмечаемое определением 4-м, приписывалось Евклидом *всем* однородным величинам, но едва ли единственное назначение определения 4-го — это резко подчеркнуть то, что уже упомянуто в предшествующем определении, а именно, однородность величин. Следует еще отметить, что перевод М. Е. Вашенко-Захарченко... “если меньшую из них можно повторить столько раз, чтобы результат был равен или больше большей” нечто весьма отличное от того, что стоит у Петрушевского или Лоренца:

“Ein Verhältniss zu einander haben Grossen welche vervielfaltigt einander übertreffen können”¹⁴. В алгебраической символике, по Ващенко-Захарченко, утверждается существование целого m такого, что

$$mA \geq B \quad (m-1)A < B$$

по Петрушевскому и Лоренцу для данного целого n – такое целое m , что

$$mA \geq nB \quad (m-1)A < nB$$

При таком понимании, естественным является предположение, что “отношение 4-го определения” относится к таким же величинам, что “отношение 3-го определения”. Сравнение количеств двух величин самого общего характера дает нам уже отношение. Таковым является отношение, дающееся элементарным сравнением, выражаемым словами больше или меньше.

$$A > B$$

$$B < A.$$

Таким также является отношение, которое представляет результат того уже более определенного сравнения, который мы в наше время выражаем *числом*. Это сравнение разбивается на бесконечное число сравнений элементарного типа, относящихся не только к самим A и B , но и их кратным, в алгебраической символике, к определению для всех n таких m , что

$$mA \geq nB \quad (m-1)A < nB$$

Можно сказать так: как только для всех n мы будем мыслить такие m , что $mA \geq nB$, $(m-1)A < nB$ мы получим не отношение, вообще, а отношение $A:B$.

Совершенно иначе разъясняет эту загадку Клавий.

По Клавия, что такое отношение, вполне разъясняется третьим определением. За этим определением ставится вопрос: все ли однородные величины имеют отношение?

В определении 4-м – Клавий видит отрицательный ответ.

Род величин он разбивает на два вида – находящиеся и не находящиеся между собой в отношении.

Первые это те, которые удовлетворяют постулату Архимеда, каковы прямолинейные отрезки, площади, объемы, прямолинейные углы. Вторые это те, которым присуще прекрасное свойство, состоящее в том, что прибавление к a – a , $a \dots$ не дает возможности превзойти b .

Таковыми величинами, по мнению Клавия, является угол касания¹⁵, образуемый двумя касающимися кругами, и прямолинейный угол. Присоединение к углу касания других ему равных углов касания никогда не может, якобы на основании 16 теор. III книги дать прямолинейный угол или угол больший его.

“Неправильно, замечает Клавий, думают те, которые под выражением “величина одного рода” в евклидовом определении понимают те, которые заключаются в одном ближайшем роде (*sub eodem genere proximo sive infimo*), так как для углов касания и прямолинейного угла таким *genus proximus*¹⁶ является угол”.

§ 5. Комментаторы Евклида XVI века не критикуют, а разъясняют Евклида; высказываемое ими мнение выдается или за мнение Евклида, или за мнение, согласное с его взглядами.

В XVII веке выступает *Euclides restitutus*¹⁷. Евклида не только комментируют, его *исправляют*. Пополняют систему аксиом, исправляют определения, меняют части всей логической постройки и делают попытки полной ее перестройки.

Арце¹⁸, Озанам¹⁹, Такз²⁰, Борелли²¹, Саккери²², Арно – вот ряд ступеней все более и более существенных перестроек “Начал”. Борелли обращает особенное внимание на 5-ю книгу. Имя его связано с историей теории параллельных ввиду очевидного влияния его на Саккери. Но сам он здесь находится еще в большей зависимости от Клавия, и вероятно, и от своих современников.

В его *Euclides restitutus* интереснее и оригинальнее всего исправленная 5-я книга Евклида.

Он резко критикует 5-е определение 5-й книги.

Всякое научное определение должно ясно изложить природу определяемой вещи через свойство возможное, истинное, первое и известнейшее, которым определяется вещь и отличается от какого-либо другого объекта. Свойство же, излагаемое в евклидовом определении таково, что “*нельзя узнать, дается ли оно в действительности*”, так как мы не можем определить дается ли это бесконечное число равнократных одновременно больших или одновременно меньших остальных, так что не знаем, верно ли оно...”. В определении же отношения и пропорции он видит неопределенность и неясность, он подчеркивает неопределенное “*quidam*”²³ в определении отношения, указывая на возможность не одного, захватываемого определением, а многих взаимных зависимостей и то, что здесь дело идет о *специального типа* зависимости и равным образом в определении пропорциональности имеется в виду подобие определенного частного типа. Интересна критика Борелли, относящаяся к, так сказать, *преждевременной* арифметизации теории пропорций, сводящей определение пропорциональности к равенству показателей отношений (*denominatores proportionis*), получаемых делением *a* на *b* и *c* на *d*.

Говоря в своей критике о числах, Борелли понимает под иррациональными числами только корни из рациональных чисел.

Невозможность представления всякого показателя отношения *таким* числом приводит его к заключению, что *неверно, что всякое иррациональное отношение можно считать числовым*.

Пропорции чисел и геометрических величин у него включаются в пропорции величин вообще, к которым и относится исправленная 5-я книга "Начал".

Соизмеримая пропорциональность, т.е. пропорциональность двух пар соизмеримых величин (a, b) (c, d) им определяется так, как Евклид определяет в 7-й книге пропорциональность чисел²⁴.

Соединительным звеном между соизмеримой и несоизмеримой пропорциональностью является определение неравенства отношений:

$$a : b \gtrless c : d,$$

где a, b несоизмеримы, a и d соизмеримы.

В алгебраической символике это определение выражается так:

$$a \gtrless \frac{m}{n} b,$$

если $c : d = m : n$, где m и n целые числа.

Словесная формулировка: отношение a к b больше, чем c к d , если a больше той части b , какую составляет c от d .

Дальше идет определение $a : b \gtrless c : d$ в случае несоизмеримости a и b , c и d с помощью вспомогательного соизмеримого отношения $e : f$

$$a : b > c : d,$$

если при $a : b > e : f$ имеем $c : d < e : f$.

Наконец, пропорциональность определяется таким образом:

$$a : b \text{ не } > c : d \text{ и не } < c : d$$

согласно указанным выше определениям.

§ 6. Критику Борелли интересно сравнить с критикой Такэ²⁵, который становится на другую точку зрения. Борелли, выступая против определения, основанного на операциях над бесконечным классом, собственно говоря, старается исправить Евклида в духе самого Евклида, признающего только то, что может быть в действительности получено построением. Такэ же старается исправить Евклида так, чтобы он согласовался с логическими идеями того времени, так ярко позже очерченными в пор-роялевской логике²⁶.

По мнению Такэ, учение Евклида встречает следующие затруднения.

1) Его определение равенства отношений (т.е. 5-е определение) и зависящее от него определение пропорции (6-е), дает не *сущность* пропорции, а только один из его *признаков*.

2) То, что доказывает дальше Евклид относительно пропорций, опираясь на свое определение, не может быть *без доказательства* (т.е. без доказательства, что указанное им свойство действительно присуще равенству отношений) распространено на *абсолютное равенство* отношений, т.е. то *истинное* равенство отношений, идея которого предваряет всякое математическое исследование.

По мнению Такэ, “одно сказать, что отношение площадей треугольников с равными высотами ABC и DEF равно отношению оснований AC и DF и другое – сказать, что для всяких m , n для которых

$$mABC \geq nDCF, \text{ а также и } mAC \geq nDF,$$

и незаконно утверждать, что, если второе доказано, то доказано и первое, без особого оправдания евклидова определения пропорции”. Определение же самого Такэ равенства отношений оказывается столь же мертвым, как определение отношения Евклида.

“Два отношения (a к b и c к d) подобны или равны, когда предыдущее a равно (aeque) или также (т.е. не больше и не меньше) содержит свое последующее b , как предыдущее c содержит последующее d , или короче, сколько b содержится в a , столько d в c ”. Входящее сюда понятие “содержания” Такэ разъясняет для случая рациональных отношений, а для иррациональных он не дает разъяснения, считая это само собой понятным: “Если пропорция иррациональная, то эта вещь не может и не должна разъясняться”.

Так как из своего мертвого определения Такэ ничего не может извлечь, то к этому определению приходится приклеить аксиому, которую Дешаль²⁷ возвел в определение, заменяющее евклидово.

“Отношения (a к b и c к d) равны, если последующие (т.е. b и d) и их подобные части (partes aliquotae), каковы бы они ни были, равное число раз содержатся в предыдущих (т.е. a и c)”.

В алгебраической символике это истолковывается следующим образом:

$$a : b = c : d,$$

если, обозначая через

$$(b_1, d_1), (b_2, d_2) \dots (b_j, d_j) \dots$$

такие величины, что

$$b = m_j b_j \quad d = m_j d_j$$

где m_j целые числа, и в то же время

$$a = n_j b_j + a_j \quad c = p_j d_j + c_j \quad (*)$$

где

$$a_j < b_j \quad c_j < d_j$$

n_j, p_j целые числа, то

$$n_j = p_j^{28}.$$

Что касается до системы положений теории пропорций, то средством ее упрощения у Такэ является обычный в XVIII векс способ обращения доказывавшихся раньше положений в очевидные истины.

В этом отношении существует большое сходство между рационалистами XVII века и современными логистиками²⁹, разница лишь в том, что ту роль, которую раньше играли аксиомы, играют теперь определения, к которым не предъявляется других требований, кроме тех, чтобы из них могли бы извлечь наперед заданные теоремы.

К 4-му определению Евклида Такэ присоединяет в качестве опять аксиомы положение о равенстве величин, имеющих к одной и той же величине (или к равным величинам) одно и то же отношение, и обратное положение, а также аналогичное положение, относящееся к неравенству: отношения, равные одному и тому же отношению, равны между собой.

Взгляды Такэ на 12-е и 15-е положения не вполне ясны. Он не называет их аксиомами, но поступает с ними так, как если бы это были теоремы, доказательства которых так просты, что их и не стоит приводить.

О 15-м положении:

“Две величины имеют между собой такое же отношение, какое имеют их равнократные”, он говорит: “Это положение можно было бы принять и за аксиому”.

Вне сомнения, такое обращение целого ряда раньше доказывавшихся положений в очевидные истины обусловливается не одним стремлением к сокращению теории пропорции для более легкого усвоения ее начинающими изучать Евклида; следует при объяснении этого факта учесть и то, что эти положения с постепенной арифметизацией ума стали приобретать хотя бы и не в сильной степени, ту очевидность, которая раньше им не была присуща.

Область понятия числа далеко расширилась за пределы евклидовых, т.е. целых чисел. Общность формальных законов, присущих отношениям и числам этой эпохи, прекрасно сознавалась математиками, она, можно сказать, каждую минуту вставала перед их глазами, они, так сказать, против воли приучались мыслить отношение, как число, и вследствие создававшегося через это настроения ума возникали иллюзии очевидности.

§ 7. Сам Евклид не мог бы признать обеих этих теорий. У Евклида геометрический объект получает право на существование только при условии доказанности его построения. Деление отрезка на n частей устанавливается

только в 6 книге. Для $\frac{m}{n}b$ Борелли и (b, d) Такэ не дается построений и поэтому, с точки зрения Евклида, (кстати говоря, чуждой XVII в.) все эти теории являются незаконченными, и более того, они и не могут быть закончены.

Можно отметить различие в *аксиоматическом* отношении между теорией Такэ и евклидовой. Теория пропорций Евклида зависит от архимедова постулата, ибо на нем зиждется доказательство 8-го и 9-го положений.

Но независимы от него доказательства теорем 10–17 и независимо от него определение 5–е, которое *сохраняет смысл* и в том случае, если постулат Архимеда не выполнен. А именно, можно мыслить, что не для всяких n существует такое m , что $ma > nb$, но что существуют значения n без соответствующих m , и относить условия

$$ma \neq nb \rightarrow mc \neq nd$$

только к тем (m, n) , для которых возможно первое неравенство.

Иное дело теория Такэ–Дешали. Само определение уже предполагает возможность таких a_j и c_j , что

$$a_j < b_j \quad c_j < d_j,$$

что сводится к постулату Архимеда.

§ 8. Арно³⁰ является еще в большей степени арифметизированным, чем Такэ.

Таблица аксиом у него еще дальше расширяется.

Следующие 10 истин по его мнению очевидны.

1. $(a + b + c) : d = (a : d) + (b : d) + (c : d).$

2. $a : d = (a - b) : d + (b : d).$

3. $a : (b : m) > a : b$, где m целое число.

4. $(a : c) : (b : c) = a : b.$

5. $(c : a) : (c : b) = b : a.$

6. $\left. \begin{array}{l} a : b = c : d \\ e : f = c : d \end{array} \right\} \rightarrow a : b = e : f.$

7. $a : b = c : b \rightarrow a = c.$

8. Два из следующих условий влекут уже третье

$a = c \quad a : b = c : d \quad b = d$

9. $\left. \begin{array}{l} a : b = c : d \\ e : f = g : h \end{array} \right\} \rightarrow (a : e) : (b : f) = (c : g) : (d : h).$

10. $a : b = c : d \rightarrow c : d = a : b.$

Хотя некоторые он вследствие недостаточно сильной очевидности доказывает или, вернее, разъясняет.

Достаточно бросить взгляд на эту таблицу, чтобы усмотреть, что для Арно отношения уже величины, которые, как и числа, отрезки, площади, объемы и т.д. могут между собой складываться и вычитаться. Но только это *величины относительные*, в то время, как последние величины абсолютные³¹.

Для каждого типа величин можно выделить оба эти рода.

Числами абсолютными у Арно называются только целые числа, относительные же — это дроби $\frac{5}{6}, \frac{7}{8} \dots$

Таким образом, *дробь начинает рассматриваться, как отношение.*

“Так как отношение есть величина, хотя бы и относительная, говорит Арно, то все, что *относится к величине, вообще относится и к отношениям.*

Две величины $(c : b)$ и $(c : d)$, замечает Арно, хотя и относительные, мы можем подвергнуть, как a и b , *сравнению*, дающему или равенство или неравенство.

В случае равенства имеем пропорцию $a : b = c : d$. Случай неравенства дает то, что мы могли бы назвать относительной величиной уже второго порядка

$$(a : b) : (c : d)$$

и сравнение пары таких новых относительных величин дает опять пропорцию

$$(a : b) : (c : d) = (e : f) : (g : h)$$

или то, что можно было бы назвать относительными величинами *высших* порядков и т.д.

Приведенная выше аксиома Такэ, обращенная Дешалем в *определение*, становится у Арно теоремой.

Интересно доказательство этой теоремы для случая несоизмеримости; в этом доказательстве ярко выступает лежандровское настрояние. Следует заметить, что в формулировке теоремы у Арно имеется несущественное изменение в сравнении с Такэ; предыдущее поставлено на место последующего и обратно.

“Если всякие подобные аликвотные³² части последующих b и d равно (т.е. равное число раз) содержатся в предыдущих, то $a : b$ и $c : d$ равны

$$a : b = c : d.$$

Доказательство:

Положим, что $a : b \neq c : d$.

Тогда $a : b > c : d$, или $a : b < c : d$.

Конечно, можно ограничиться первым случаем, ибо второй будет рассматриваться аналогично. Тогда, замечает Арно (пользуясь неявно аксиомой Клавия, о которой мы ниже еще будем говорить), к b можно прибавить такое ξ , что

$$a : (b + \xi) = c : d.$$

Но этого быть не может, ибо можно взять от a такую аликвотную часть α , что α будет меньше ξ и тогда ξ будет содержаться в b не столько

раз, сколько γ (подобная алиquotная часть d) содержится в c , а на единицу больше, что противно условию³³.

§ 9. Теорема о том, что произведение крайних членов пропорции равно произведению средних, входящая в современную арифметическую и алгебраическую теорию пропорций, у Евклида оказывается в 6-й книге, причем очень далеко от начала (16-е предл.) и в 7-й книге (19-е предл.).

Доказывается она только для отрезков и целых чисел, причем для случая отрезков формулируется таким образом:

“Если четыре прямые линии пропорциональны, то прямоугольник, построенный на крайних прямых, равен прямоугольнику, построенному на средних и обратно”. Буквенная алгебра дает возможность выразить символически эту теорему.

Если $a : b = c : d$, то $ad = bc$ (*).

Под буквой вне сомнения разумелось раньше (даже в XVIII в.) не то, что мы теперь разумеем, не число, а величина (*magnitudo in genere*)³⁴, объемлющая как непрерывные, так и дискретные величины. Это можно усмотреть уже из самих старых определений алгебры, например:

Рейхер (1703)

Чистая математика делится на общую (*Universalis*), называемую алгеброй, исследующую абстрактное количество (*quantitas abstracta*), и частную, включающую геометрию, исследующую непрерывную величину и арифметику, исследующую множество или число.

Через 60 лет.

Лакайль (1762)³⁵.

Алгебра, это, так сказать, общая арифметика или наука вообще о величинах, как арифметика – наука о числах.

При этом Лакайль отмечает, что *quantitas vel magnitudo*³⁶ может быть дискретно (*partibus separatis*) – такие величины исследует арифметика – и непрерывно (*continuae*), которыми занимается геометрия.

Еще в XVII веке алгебра помещается после арифметики и геометрии. Из “*ars inveniendi*”³⁷, находящего свое обоснование только в геометрии, алгебра не скоро обратилась в систему общего учения о величинах.

Она содержала правила формальных операций и вытекающие из этих правил следствия, но смысл их совершенно различно истолковывался для геометрических величин, чем для чисел.

Для геометрических величин в равенстве (*) ad и bc истолковывались, как площади треугольников, построенных на ad и bc . Если a, b, c, d ..., это прямолинейные отрезки или, как выражались, *линейные* величины, то ab, cd ... – *плоские*, abc ... – *телесные*.

Что касается до $abcd$, то это величина, воображаемая, мнимая, то же, что для нас $\sqrt{-1}$. Так что одна и та же формальная алгебраическая операция могла привести или к реальному, или к мнимому результату.

Смотря по тому, производится ли она над числами или геометрическими величинами, например, отрезками.

Если $a = 2, 3, \frac{5}{7} \dots$ то $a_2, a_3, a_4, a_5 \dots$ имеют конкретный смысл.

Но если a отрезок, то a_2 площадь квадрата, a_3 объем куба, а a_4 — в сущности говоря, то же, что $\sqrt{-1}$. Это *коссическая* величина. “Существует, говорит Херигон,³⁸ только 3 рода величин вещественных (reelles): линии, поверхность и тело, но *мнимых* (d’imaginaires) — бесконечность: квадрат—квадрат, квадрат—куб, куб—куб и т.д.”.

§ 10. Открытие аналитической геометрии вызвало отнюдь не окончательную арифметизацию геометрии, а ее *алгебраизацию*.

Координата у Декарта³⁹ ни в каком случае не число, а прямолинейный отрезок. Роль чисел у него играют прямолинейные отрезки, между которыми и всякими геометрическими величинами устанавливается взаимно—однозначное соответствие, и все операции над геометрическими величинами сводятся к операциям над отрезками; $ab, abc, x, x^2, x^3 \dots$ понимаются, как величины одного рода — отрезки; $abcd \dots x^4, x^5$ получают такой же реальный смысл. Для этого оказывается достаточно истолковать ab , не как площадь, а как отрезок, получаемый построением:

на OP откладывается $OB=b$

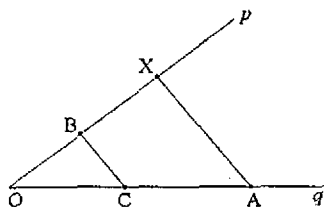
на OQ откладывается $OA=a$

$OC=1$

C соединяется с B

$AX \parallel CB \rightarrow OX=x$

так, что $x : a = b : 1$



такой отрезок x и считается произведением a на b .

В основе этого определения лежит аксиома, которой пользуется Евклид так же неявно, как постулатом Архимеда и которую вскрыл Клавий: *существует четвертая пропорциональная*, т.е. существует такое x , что при данных a, b, c ,

$$x : a = b : c.$$

Эта аксиома применяется в доказательстве 18—го предл. 5—й книги:

$$a : b = c : d \rightarrow (a + b) : b = (c + a) : d.$$

Доказательство ведется от противного с помощью предыдущей обратной теоремы

$$(a + b) : b = (c + d) : d \rightarrow a : b = c : d.$$

Предполагается, что

$$(a + b) : b \neq (c + d) : d,$$

$$a = (c + d) : e, \text{ где } e \geq d.$$

В первом случае, на основании теоремы 17,

$$a : b = (c + d - e) : e,$$

откуда $(c + d) : d = (c + d - e) : e$, а так как $c + d > c + d - e$, то должны иметь и $d > e$, что противно условию.

Таким же образом устраняется и второй случай.

Подлинность этого доказательства оспаривается Робертом Симпсоном.

Вайлати¹⁰ доказывает это утверждение ссылкой на то, что в латинском издании “Начал” Компануса¹¹, составленном по арабскому переводу, содержится другое доказательство, не зависящее от постулата Клавия.

Мы не будем приводить доказательство Компануса, дополненного Вайлати, отсылая читателя к статье последнего. В истории эволюции идеи числа это доказательство не играло роли.

Между тем, как метод доказательства 18 предл. 5-й книги составляет, именно, тот метод, который был применен Арно к доказательству аксиомы Такэ, а позднейшими математиками – к доказательству пропорциональности углов и дуг (в случае несоизмеримости) и других аналогичных положений (теор. 33 6-й книги).

Аксиома Клавия должна была оказать большой толчок в направлении арифметизации числа.

Как мы выше заметили, едва ли сам Евклид включал числа и геометрические величины в один класс. Но такое включение совершенно определенным образом свершилось при создании буквенного счисления.

Для Евклида пропорция (равенство отношений) $a : b = c : d$ определяется или для геометрических величин разного рода (5-я книга), или для чисел (7-я книга). Для позднейших же математиков (a, b) и (c, d) – величины вообще, *magnitudines in genere*, и может быть случай, что (a, b) геометрические величины, а (c, d) числа, но при этом, если (a, b) одного рода, то и (c, d) одного рода.

Постулат Клавия тогда постулирует возможность к геометрическим величинам (b, c) и числу a найти такое число x , что

$$x : a = b : c.$$

Возьмем $a = 1$ и мы будем приведены к необходимости признать всякое отношение, даже несоизмеримых величин, за отношение числа к единице.

Если за c принять единицу меры, то результат измерения $b : 1$ представится отношением числа к 1. Остается отождествить отношение с числом, чтобы получить взаимно-однозначное соответствие между геометрическими величинами и характеризующими их числами.

§ 11. Не меньшую роль в арифметизации теории пропорций сыграло 5-е определение 6-й книги “Начал”.

“Отношение называется сложным (составленным) из отношений, когда количества сих отношений в них кратковременные делают некое количество” (не вернее ли – отношение?)¹².

Оставляя в стороне вопрос о точности перевода Петрушевского, я не могу не признать, что, если этот перевод точен, то сам оригинал представляет какое-то искажение евклидова определения, об истинном содержании которого приходится строить предположение, пользуясь, например, вольным переводом Лоренца:

“Из трех или многих величин $a, b, c, d, \dots$, из которых каждое предыдущее находится в отношении к последующему

$$(a : b), (b : c), (c : d) \dots$$

отношение первого к последнему называется составленным из всех этих отношений”.

Перевод Ващенко–Захарченко:⁴³

“Отношение называется составленным из отношений, когда эти отношения, будучи перемножены, дают отношение”. Причем это поясняется рядом равенств в современной символической форме:

$$\frac{a}{b} = \frac{k}{l}, \frac{b}{c} = \frac{m}{n}, \frac{c}{d} = \frac{s}{r}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{k}{l} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{s}{r}$$

Видимо этого рода понимание было у математиков второй половины XVII века с уже отчасти арифметизированным математическим мышлением.

Евклид нигде не оперирует с отношениями как с числами, в духе Арно. С его точки зрения не может быть *умножения* отношений.

Поэтому, если такой перевод правилен, то, как справедливо замечает Вайлати, – это определение не может быть признано подлинным.

Но в этом случае и предложение 23–е 6–й книги⁴⁴ (о котором, видимо, Вайлати забывает) должно быть признано не подлинным.

Подробно анализируя доказательство этой теоремы, мы легко видим, что формулировка Лоренца не охватывает содержания того определения, которое лежит в основе этого доказательства.

Отношение $a : d$ называется составленным не только из

$$(a : b), (b : c), (c : d),$$

но и из

$$(\bar{a} : \bar{b}), (\bar{b} : \bar{c}), (\bar{c} : \bar{d})$$

если

$$a : b = \bar{a} : \bar{b}, b : c = \bar{b} : \bar{c}, c : d = \bar{c} : \bar{d}.$$

Евклидово отношение было ближе к общему *логическому* понятию отношения, лежащему в основе современной логики отношений, чем к *математическому* отношению чисел, но, вероятно, у самого Евклида не было вполне ясного понимания отношения⁴⁵.

В высшей степени интересно, как на промежуточной декартовой точке зрения, не объявляя еще отношение числом, математики старались, не скажу *истолковать*, а скорее *исправить* Евклида в этом месте.

За декартовым истолкованием умножения отрезков a на b и вытекающего отсюда истолкования $\frac{a}{b}$ или $a : b$, истолковывалось также умножение отношений (или частных) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$, так как $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ представлялись отрезками.

Джордано Витале⁴⁶ устанавливает для $a : b$ или $\frac{a}{b}$ ряд формальных законов, которым подчинены числа.

1. $a : b = ac : bc$
2. $a : b = c : d \rightarrow ad = bc$
3. $a(bc) = (ab)c$
4. $\frac{a}{b} \cdot b = a$.

§ 12. Открытие Пифагором несоизмеримых величин положило конец наивному представлению о взаимно-однозначном соответствии между геометрическими величинами и рациональными числами (или, вернее, отношениями целых чисел).

Брюнсвиг⁴⁷, по всей вероятности, правильно предполагает целый ряд попыток выражения диагонали квадрата, со стороной $=1$, числом, раньше чем была установлена неразрешимость этой задачи.

Само пифагорейское мировоззрение должно было располагать к вере в *разрешимость* этой проблемы и открытие неразрешимости должно было нанести ему неисцелимую рану.

Интересно отметить, что установке *логически* не обоснованной, но *психологически* объяснимой, взаимно-однозначного соответствия между геометрическими величинами и числами, путем расширения идеи числа, предшествует краткий период *особого* понимания,

$ab, abc \dots$

в котором постулируют взаимно-однозначное соответствие между геометрическими величинами и числами, при этом числами не только рациональными, но и целыми.

Но эти целые числа — это актуально бесконечные числа, которыми определяется сколько раз *неделимое* (актуально-бесконечно малое XVII и начала XVIII в.) содержится в конечной геометрической величине.

“Линия, говорит Ривар⁴⁸ в своих “Элементах Математики”, умножается на другую линию, если *первая берется столько раз, сколько точек*

во второй: например, чтобы умножить AC на CD, следует линию AC взять столько раз, сколько точек в линии CD, т.е. чтобы иметь произведение AC на CD, следует представить себе, что проведены линии равные и параллельные AC: они заполняют пространство ACDB, вот почему произведение одной линии на другую образует прямоугольник”.

§ 13. Арно, Луи Бертран⁴⁹, Лежандр⁵⁰ – вот три ступени арифметизации геометрии.

То, что у Бертрана высказывается в робкой форме, у Лежандра высказано уже вполне категорически.

Лежандр и авторы учебников⁵¹ лежандровского типа, всякое действие над отрезками заменяют соответствующим действием над числами, *ab* понимается только как произведение двух чисел

$$(AB + BC)^2 = AB^2 + 2AB \cdot BC + BC^2$$

ибо

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

где *a* число определяющее *AB*, *b* – *BC*.

Вполне понятно, что именно Лежандр, лучшие труды которого относятся к теории чисел, должен был дойти до крайнего предела арифметизации геометрии.

$$a : b = c : d$$

поэтому $ad = bc$.

Эта истина, говорит Лежандр, в *числах* верна, она верна и при всяких других величинах, лишь бы только они изображались через числа, что *всегда можно положить*.

Например, если *A*, *B*, *C*, *D* – 4 линии, то можно вообразить, что одна из них служит мерой; тогда как *A*, *B*, *C* соизмеримы и несоизмеримы, и во всех случаях они выражаются числами, в первом случае соизмеримыми (рациональными), во втором несоизмеримыми (иррациональными).

Что касается чисто арифметического обоснования теории иррациональных чисел, математики в этом отношении и после Лежандра чувствовали себя несколько неловко в критических местах элементарного курса геометрии – это можно видеть в примечаниях учебника Лакруа⁵², в которых он как бы старается оправдаться перед читателем в своих арифметических тенденциях:

“Испытывается, говорит Лакруа, некоторое затруднение в перенесении на части пространства понятия отношения в таком виде, как оно понимается для чисел, в особенности, когда дело идет о несоизмеримых между собой линиях, но *темнота рассеется*, если обратить внимание на то, что сравнивать две линии возможно только относя их к общей мере, и тогда их отношение есть, действительно, число или дробь, члены которой, выраженные числами, представляют то, сколько раз мера заключается в

каждой линии. Хотя эту дробь невозможно точно указать в том случае, когда соотношение несоизмеримо, но она тем не менее существует”.

§ 14. 5-я книга кончает свое существование. Арифметика побеждает геометрию и ставит последнюю в зависимость от себя.

Но с началом логистических тенденций еще в 70 и 80 гг. прошлого столетия в Италии раздается призыв к возврату к Евклиду, к освобождению геометрии от арифметики.

Но полного возврата к прошлому не бывает. Евклид итальянских геометров — это псевдо-Евклид.

Для Евклида в геометрии существует только то, что может быть *построено*, для Лежандра то, что может быть *вычислено*, для математиков-логистов то, что *не содержит противоречий*.

Уже в силу этого, иррациональные числа не существовали, да и не могли существовать для Евклида. Для Лежандра они, только они, были достаточны, ибо все вычисления над геометрическими величинами можно было свести к операциям над числами.

Логист не только имеет основания отказаться от иррациональных чисел, но естественно *логизирует* понятие иррационального числа и создает идею таких объектов, которые, не служа уже *орудием вычисления*, вкладываются в логические схемы арифметики.

Логист остается при взаимно-однозначном соответствии геометрических величин и чисел, и не подчеркиваемый им до последней главы факт существования такого взаимно-однозначного соответствия и делает возможным оперирование с отрезками, площадями и т.д. так, как оперируют в арифметике и алгебре с числами. Все, что приносится им как новое, в “Началах” Евклида — это в доказательствах — *алгебраическое*, а именно, прилагается алгебраическая техника доказательств в приложении к величинам, которые не признаны алгебраическими (причем алгебра=алгебра чисел), в постулатах — *экономическое* сокращение числа их, стремление осуществить логический минимум, хотя бы в ущерб очевидности, в определениях — *логистическое* — переработка определений с сокращением интуитивного материала, в них входящего.

Первое совершенно чуждо Евклиду и потому дает не возврат от Лежандра к Евклиду, а дальнейшую за Лежандром стадию эволюции.

Второе бесспорно имелось в виду и Евклидом, но не интересовало Лежандра. Для Евклида, чем меньше аксиом, тем меньше сомнений со стороны софистов, поэтому Евклид доказывает иногда совершенно очевидные истины.

Третье же в равной мере совершенно чуждо и Евклиду, и Лежандру.

Но для Евклида на первом плане очевидность, на втором минимум, для логиста же наоборот, он всегда готов принести в жертву очевидность минимуму.

Теории пропорций Саньо д'Овидио⁵³ и Веронезе⁵⁴ отнюдь не следует рассматривать как продолжения того удерживавшего арифметизацию геометрии течения возврата к Евклиду, которое проходит через д'Аламбера и Гурьева⁵⁵, а, как совершенно новое течение, представляющее продолжение основного потока, идущего через Арно и Лежандра.

МЕТОД ИСЧЕРПЫВАНИЯ.

§ 1. Античная мысль и бесконечность.

Античная мысль не знает в нашем смысле математической бесконечности. Бесконечность как актуальная¹, т.е. бесконечность множеств и трансфинитных чисел, так и потенциальная бесконечность предела вышли из средневекового схоластического мышления. Бесконечность медленно отвоевывала себе права. Долго в схоластике держится доказательство, которое можно назвать *reductio ad infinitum*², которое существование объекта, небытие которого следует доказать, ставит в зависимость от существования недопустимой актуальной бесконечности. Актуальная бесконечность сперва Бога, затем вселенной и, наконец, числа.

Для античной мысли, носящей определенно *статический*³ характер, совершенством может обладать только вполне ограниченная форма; снятие границ ведет к неопределенности, к несовершенству. Это, конечно, точка зрения как раз противоположная Спинозовской и Канторовской, для которых конечное получается из бесконечного путем наложения границ на более совершенное. Более того, бесконечность, которая всегда приравнивается безграничному, теряет свое право на существование в силу вскрываемых противоречий.

В признании Аристотелем *потенциальной бесконечности* можно было видеть зародыш идеи предела.

Представляет ли эта бесконечность то, что вещь стремится достигнуть, но не достигает?

Но такая формулировка совсем не в античном духе, античная мысль не знает движущейся переменной величины. Да, кроме того, идея предела характеризуется не только одним стремлением к ней, но и сколь угодно близким приближением, поэтому бесконечность и не может быть признана в собственном смысле пределом.

У Аристотеля актуально бесконечное — это снятие *всех* границ, потенциальное — это только возможность снятия всякой определенной границы, при этом вовсе не мыслится вся совокупность этих возможностей. Античный математик никогда не берет бесконечный ряд. Весь ряд у него мыслится конечным. Он только говорит, что в ряду $A_1, A_2, A_3 \dots$ он может вы брать такое A_n , что разность $A - A_n$ окажется меньше наперед заданной

величины $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000} \dots$. Он 1) вовсе не мыслит переменного X , про-

ходящего через значения A_1, A_2, A_3 и стремящегося к A ; 2) вовсе не мыслит всей бесконечной совокупности $A_1, A_2, A_3 \dots$, а только конечное число

операций, достигающих цели. На первый взгляд кажется, что внесение понятия предела в д'аламберовском⁴ смысле ничего не дает, что все доказательства, выдвигаемые методом пределов, при более строгой обработке в конечном итоге сводятся к античной методе.

Если признать, что идея предела в строгой обработке должна выпасть, являясь логически не действующей, то и тогда за ней следует признать большое значение уже в *эвристическом* смысле, признать, что эта общая идея явилась основной при построении, может быть, и недостаточно обоснованных методов, сменивших античные, носившие более случайный характер.

Но не трудно видеть и то, что такое возвращение к античной методе при требовании логической стройности не достигает цели.

Понятие предела содержит больше, чем то, что определяется условием, что $A-X$ может быть сделано менее всякой заданной величины; это большее выражается обычным в настоящее время добавлением: "и в дальнейшем остается меньше этой величины"^{5,6}.

Это прибавление дает возможность выделить случай, когда ряд $A_1, A_2, A_3, \dots$ имеет только одну точку сгущения среди случаев, когда этих точек вообще много, и даже бесконечно много. Но при этом необходимо то, что совершенно чуждо и Евклиду и Архимеду: необходима мысль о *всем* бесконечном множестве $A_1, A_2, A_3, \dots$. Собственно говоря, замена актуальной бесконечности метода неделимых потенциальной бесконечностью теории пределов вовсе не уничтожает первой, она ее, так сказать, загоняет в подполье, она существует сперва скрытно, а потом выступает явно. А именно, во всяком пределе мыслится весь процесс приближения к пределу в его целом. Процесс этот во времени всегда незакончен, а в мысли он является, как нечто существующее во всей своей полноте, и определяет так называемый фундаментальный ряд Кантора⁷. Там, где множество содержит бесконечное число точек сгущения, например, в случае континуума, метод древних всегда будет дефектным. Постулирование существования четвертой пропорциональной X в пропорции⁸:

$$A : X = a_1 : a_2$$

определяет некоторое соотношение между множествами A_1 и a_1 , и поэтому обоснование его ведет к рассмотрению непрерывных множеств.

Древние мыслили актуальную бесконечность пространства и числа, но отрицали их реальное существование. Но что касается до актуальной бесконечности какого-либо процесса, то здесь дело шло еще дальше: они не могли и мыслить об этом. Этим разрешается следующая интересная загадка: Аристотель, отрицая бесконечность вселенной в пространстве, признает вечность ее во времени⁹. Чтобы понять это, следует хорошо продумать Аристотеля. Дело в том, что он очень далек от эмансипации математических и логических понятий, от элементов времени и пространства.

Аристотель, как и Евклид, мыслил только числа и величины геометрические; прошло не мало времени до появления понятия алгебраической величины, объемлющей как класс и дискретные, и непрерывные величины.

Формулировка основных логических аксиом содержит время: А не может быть в одно и то же время А и не А¹⁰.

Все данное является данным *во времени*.

Всякое доказательство относится к существованию чего-либо в *определенный момент*.

Бытие безотносительно ко времени не существует у Аристотеля. Поэтому и вопрос о существовании или несуществовании бесконечного времени им не может быть поставлен. Утверждение, что мир вечен, не следует понимать так: время бесконечно, а только так, что ко всякому моменту времени можно прибавить еще следующий момент. И Аристотель никогда не прибавляет: и так до бесконечности, ибо никакой бесконечности он здесь не мыслит. Бесконечное пространство мыслится, хотя без права на существование.

Но бесконечное время и мыслиться не может, ибо нет для него момента времени.

Эта немощность вневременного мышления явно выявляется в зеноновских парадоксах¹¹. Берется бесконечный процесс, с помощью которого строится бесконечное множество, [что признается немыслимым].

Мы объявляем, что *все* элементы действительно строятся, и этот процесс мыслим как нечто целое и вне времени, в которое мы этот процесс вполне можем осуществить. Иное дело – античный мыслитель. Он утверждает, что *не все* элементы осуществляются этим процессом, причем при этом утверждении он не может отрешиться от субъективного бессилия, от невозможности конкретно достигнуть отделенных элементов¹².

10-е положение “Начал” Евклида¹³: “Даны две величины А, а, и от большей А берется более половины, от остатка опять более половины и т.д. Всегда можно прийти к остатку, который будет меньше данной величины а”, на котором основывается апагогическое доказательство метода исчерпывания, вовсе не утверждает, что этим алгоритмом достигаются все случаи: $< 0,1$, $< 0,01$ $< 0,001$...

§ 2. Евклидова форма метода исчерпывания¹⁴.

Общая схема метода исчерпывания в его первой стадии развития, той, которая имеет место в “Началах” Евклида, следующая: Следует доказать, что

$$A : B = a : b \quad (1)$$

Доказательство разделяется на две части. Если пропорция (1) не выполняется, то возможны два случая:

$$\begin{aligned} 1) A : X &= a : b, \text{ где } X < B \\ 2) A : X &= a : b, \text{ где } X > B \end{aligned} \quad (2)$$

Для исключения первого случая пользуются рядом величин:

$$P_a^{(1)}, P_a^{(2)}, P_a^{(3)} \dots$$

ного рода, чем A , но таких, что все члены будут: 1) меньше A и 2) разность $A - P_n^{(n)}$ при надлежащем выборе n может быть сделана меньше любой величины (можно сказать, в какой угодно мере *исчерпана*¹⁵).

Такой же ряд берется и для B :

$$P_b^{(1)}, P_b^{(2)}, P_b^{(3)}$$

и доказывається, что

$$P_a^{(n)} : P_b^{(n)} = A : X \quad (3)$$

Но тогда n можно взять настолько большим, что будет иметь $P_b^{(n)} X$, ибо X и B будет какая-либо разность, меньше которой можно сделать $B - P_b^{(n)}$. Но, с другой стороны, по предположению:

$$P_a^{(n)} < A$$

Сравнение пропорций (2) и (3) дает:

$$P_a^{(n)} : P_b^{(n)} = A : X$$

Это же при $P_a^{(n)} < A$, $P_b^{(n)} > X$ невозможно, как это следует из теории пропорций Евклида (5-ая книга "Начал").

Совершенно таким же образом с помощью рядов:

$$Q_a^{(1)}, Q_a^{(2)} \dots Q_a^{(n)} \quad Q_a^{(n)} > A$$

$$Q_b^{(1)}, Q_b^{(2)} \dots Q_b^{(n)} \quad Q_b^{(n)} > B$$

таких, что разности $Q_a^{(n)} - A$, $Q_b^{(n)} - B$ могут быть исчерпаны, исключается и второй случай.

Метод исчерпывания в "Началах" Евклида применяется для доказательства следующих положений:

1) Площади кругов относятся между собой как квадраты диаметров (XII книга,

2-е положение).

Здесь A и B — площади кругов, a и b — квадраты их радиусов, $P_a^{(n)}$ — площадь правильного вписанного многоугольника, $Q_a^{(n)}$ — описанного.

Паппус¹⁶ отсюда выводит теорему, что окружности кругов относятся как их диаметры, замечая, что это может быть выведено из того, что периметры подобных многоугольников с равным числом сторон относятся, как диаметры вписанных или описанных кругов.

2) Трехсторонние пирамиды равных высот относятся, как основания (XII₃).

A и B — объемы пирамид, a и b — площади оснований, P_a — объем суммы входящих, Q_a — выходящих призмочек.

3) Конус равен $\frac{1}{3}$ цилиндра с одной с ним высотой и тем же осно-

ванием (XII₁₀).

A – объем конуса, B – цилиндра, P_a – вписанной, Q_a – описанной пирамиды, P_b – вписанной, Q_b – описанной около цилиндра призмы.

4) Конусы и цилиндры с одной высотой относятся как основания (XII₁₁).

5) Подобные конусы и цилиндры находятся в тройном отношении как диаметров их оснований (XII₁₂).

6) Сферы находятся в тройном отношении их диаметров (XII₁₃).

Тем же методом Архимед доказывает, что площадь эллипса относится к площади круга наибольшей оси как малая ось к большой – путем сравнения вписанных многоугольников с вершинами на перпендикулярах к большой оси.

Эта форма метода исчерпывания применяется часто в учебниках лежандровского типа, например, у Давидова при доказательствах¹⁷:

1) пропорциональности центральных углов и дуг,

2) пропорциональности площадей прямоугольников с равными высотами,

3) пропорциональности отрезков, отсекаемых на прямых параллельными,

4) пропорциональности двугранных и линейных углов,

5) пропорциональности объемов параллелепипедов с равновеликими основаниями и высотами.

Форма Евклидова метода исчерпывания с привлечением идеи предела и при соответствующей переработке превращается в прямой метод по схеме:

$$\begin{array}{l} U < A < V \\ S < B < T \end{array} \quad U : S = a : b$$

$$\lim U = \lim V \rightarrow \begin{cases} \lim U = A \\ \lim V = A \end{cases} \quad \lim S = \lim T \rightarrow \begin{cases} \lim S = B \\ \lim T = B \end{cases}$$

$$U : S = a : b \rightarrow \begin{cases} \lim U : \lim S = a : b \\ \lim U : \lim T = a : b \end{cases} \rightarrow A : B = a : b$$

и вызывает следующие идеи:

1) принцип Гурьева¹⁸: если

$$U < A < V$$

и $\lim U = \lim V = C$, то $A = C$,

или в более общей форме:

$$U < W < V$$

$\lim U = \lim V = C$, то $\lim W = C$.

2) Если $U : S = a : b$, то $\lim U : \lim S = a : b$.

В методе неделимых этих идей нет, он пользуется актуально бесконечно малым, идет по другой линии.

§ 3. Первая архимедова форма метода исчерпывания.

Метод исчерпывания подвергается дальнейшей эволюции у Архимеда¹⁹. Исчерпывается не разность между данной величиной A и членами ряда, дающего его приближенные значения:

$$P_a^{(1)}, P_a^{(2)}, \dots, P_a^{(n)} \dots (P_a),$$

а разность между соответствующими членами ряда (P_a) , дающего приближение по недостатку, и ряда:

$$Q_a^{(1)}, Q_a^{(2)}, \dots, Q_a^{(n)} \dots (Q_a),$$

дающего приближение по избытку.

Следует доказать, что $A=B$.

Для устранения предположения $B > A$ пользуются двумя парами рядов:

$$\begin{array}{l} P_a^{(1)} < P_a^{(2)} < \dots < P_a^{(m)} \\ Q_a^{(1)} > Q_a^{(2)} > \dots > Q_a^{(m)} \end{array} \left| \begin{array}{l} R_b^{(1)} < R_b^{(2)} < \dots < R_b^{(n)} \\ S_b^{(1)} > S_b^{(2)} > \dots > S_b^{(n)} \end{array} \right.$$

для которых

$$\begin{array}{l} P_a^{(m)} \leq A \leq Q_a^{(m)} \\ R_b^{(n)} \leq B \leq S_b^{(n)} \end{array} \quad (5)$$

при чем устанавливается возможность исчерпывания разностей $Q_a^{(m)} - P_a^{(m)}$, $S_b^{(n)} - R_b^{(n)}$ и отсюда выводится, что отношения

$$Q_a^{(m)} : P_a^{(m)}, S_b^{(n)} : R_b^{(n)}$$

можно предполагать при надлежаще выбранных m , n меньше всякого отношения $C : A$, где $C > A$. Далее обнаруживается, что всегда при n можно выбрать m так, что

$$P_a^{(m)} \leq R_b^{(n)}, Q_a^{(m)} \geq S_b^{(n)}.$$

Полагая $B = A'$, где A' — величина того же рода, что A , имеем тогда при некотором n

$$S_b^{(n)} : P_a^{(m)} < A' : A.$$

Но это невозможно, ибо

$$S_b^{(n)} > A' = B$$

$$P_a^{(m)} < A' = B.$$

Таким же образом устраняется и случай

$$B < A.$$

По этой схеме ведется Архимедом доказательство ему принадлежащей (и потому в евклидовы "Начала" не входящей) теоремы:

Круг равновелик треугольнику с основанием, равным длине окружности, и с высотой, равной радиусу.

A — площадь круга,

B — площадь треугольника,

$P_a^{(n)}$ — вписанный правильный многоугольник,

$Q_a^{(n)}$ — описанный правильный многоугольник,

$R_a^{(n)}$ — треугольник с основанием, равным периметру первого и с высотой, равной радиусу,

$S_b^{(n)}$ — треугольник с основанием, равным периметру второго, и с высотой, равной радиусу.

2) Другой пример — это 13-е положение книги о конусе и цилиндре²⁰ о том, что боковая поверхность цилиндра равна площади круга, диаметр которого — среднепропорциональное между стороной (т.е. образующей) и диаметром цилиндра.

Здесь A — поверхность цилиндра, B — круга,

$P_a^{(m)}$ — поверхность вписанной призмы, $Q_b^{(m)}$ — описанной,

$R_a^{(m)}$ — вписанного в круг многоугольника, $R_b^{(m)}$ — описанного.

3) Положение 15-е: поверхность конуса равна площади круга, имеющего радиусом среднепропорциональное между стороной конуса и радиусом его основания.

4) Поверхность шара равна учетверенной площади большого круга (положение 31-е).

За $P_a^{(m)}$, $Q_a^{(m)}$ принимаются поверхности, описываемые вращением вписанного и описанного в полукруг многоугольника.

5) Объем шара равен учетверенному объему конуса, основанием которого служит большой круг шара и высота которого равна его радиусу.

6) Поверхность сегмента шарового, меньше полусферы, равна площади круга, имеющего радиусом прямую, идущую от вершины сегмента к окружности основания (положение 40-е).

7) Объем сегмента равен объему конуса, основание которого равно поверхности сегмента, а высота — радиусу шара (положение 42-е).

Этот метод дает следующую формулу соответствующей теории пределов:

$$U < A < V$$

$$S < B < T$$

$U < S < T < V$; $\lim U = \lim V \rightarrow \lim S = \lim T = \lim U = \lim V \rightarrow A = B$
и таким образом включающий принцип более общий, чем упомянутый выше принцип Гурьева.

§ 4. Вторая архимедова форма метода исчерпывания²¹.

В этой форме неравенства (5) заменяются более простыми

$$\begin{aligned} P_a^{(m)} &\leq A \leq Q_a^{(m)} \\ P_a^{(m)} &\leq B \leq Q_a^{(m)}, \end{aligned}$$

причем P и Q выбирается так, что

$$\begin{aligned} P_a^{(m)} &= \alpha_1^{(m)} + \alpha_2^{(m)} + \dots + \alpha_{p-1}^{(m)} \\ Q_a^{(m)} &= \alpha_1^{(m)} + \alpha_2^{(m)} + \dots + \alpha_{p-1}^{(m)} + \alpha_p^{(m)} \end{aligned}$$

где $\alpha^{(m)}$ по мере возрастания m убывает.

Разность $Q_a^{(m)} - P_a^{(m)}$, как равная $\alpha_p^{(m)}$ может быть сделана как угодно малой.

Так поступает Архимед при определении объема *коноида* (тела вращения параболы): α_j представляет входящие и выходящие цилиндры,

$P_a^{(m)}$, $Q_a^{(m)}$ представляют цилиндры, равновеликие сумме этих элементарных цилиндров, B – объем цилиндра, основание которого – это основание коноида, а высота – половина высоты коноидов.

Этот метод применяется при выводе объема гиперболического конуса (гиперболоида вращения) и площади архимедовой спирали.

Этот метод и теперь применяется в школьной литературе при так называемой “чертовой лестнице”, т.е. доказательстве равновеликости двух пирамид с равными высотами и равновеликими основаниями. Но только в этом случае Архимедов метод представляется в несколько видоизмененном виде.

$$\begin{aligned} P_a^{(m)} &< A < Q_a^{(m)} \\ \bar{P}_a^{(m)} &< B < \bar{Q}_a^{(m)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_a^{(m)} &= \bar{\alpha}_1^{(m)} + \bar{\alpha}_2^{(m)} + \dots + \bar{\alpha}_{p-1}^{(m)} \\ \bar{Q}_a^{(m)} &= \bar{\alpha}_1^{(m)} + \bar{\alpha}_2^{(m)} + \dots + \bar{\alpha}_{p-1}^{(m)} + \bar{\alpha}_p^{(m)} \end{aligned}$$

Доказывается, что $\bar{a}_j^{(m)} = a_j^{(m)}$, откуда $P_a^{(m)} = \bar{P}_a^{(m)}$, $Q_a^{(m)} = \bar{Q}_a^{(m)}$.

Архимеду приходится делать то, что избегается в этой последней форме, суммировать

$$\sigma_{p-1} = \alpha_0^{(m)} + \alpha_1^{(m)} + \dots + \alpha_{p-1}^{(m)}$$

находить такую величину определенного рода, например, в первом примере цилиндра, для которой σ_{p-1} служила приближением по недостатку, а сумма σ_p – по избытку. Ему приходится суммировать

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Ему не удастся этим методом найти площадь сегмента параболы, так как приходится встречаться с суммой

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n},$$

которую он, конечно, не может просуммировать.

Этот метод в обработке идеей предела приводит к основной идее интегрального исчисления²² в том виде, как она ныне (а не во время существования метода неделимых) представляется, а именно к представлению величины A как предела суммы бесконечно великого числа бесконечно малых элементов. Тогда указанная выше форма сводится к следующей схеме:

$$A = \lim \sum \alpha_j \dots\dots\dots (\text{анализ})$$

$$\lim \sum \alpha_j = \lim \sum \beta_j \dots\dots\dots (\text{синтез})$$

$$\sum \beta_j = B \dots\dots\dots$$

$$A = B$$

Указанное выше видоизменение архимедовского метода приводит к схеме:

$$A = \lim \sum \alpha_j$$

$$B = \lim \sum \beta_j$$

$$\alpha_j = \beta_j \rightarrow A = B.$$

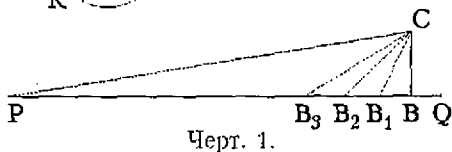
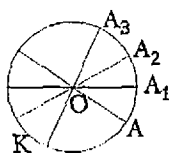
§ 5. Метод неделимых как выпрямление метода исчерпывания.

Характерная черта мысли эпохи Возрождения состоит в том, что в науке прежде всего существенен *ars inveniendi*, метод изыскания²³ истин, а в несравненно меньшей мере – *ars demonstrandi*, метод доказательства. Метод неделимых²⁴, который нарождается в XVIII веке, вполне отвечает этой черте.

Он мало убеждает и современников, но много обещает открыть.

Берем его наиболее примитивную форму, которая находится у Кеплера.

Для определения площади круга Кеплер делит круг радиусами на равные бесконечно малые секторы (черт. 1). Эти бесконечно малые секторы он признает тождественными бесконечно малым треугольникам с высотой, равной радиусу, и основанием, равным дуге сектора К. К прямой РВ он восстанавливает перпендикуляр ВС = ОА



Черт. 1.

и откладывает $BB_1 = AA_1$, $B_1B_2 = A_1A_2$ и т.д. В силу равенствости треугольников $A_1A_2C_1$, BB_1C , и т.д. он получает, что площадь круга равна сумме площадей треугольников $B_{n-j}CB_n = BCP$, т.е. теореме Архимеда.

В этом рассуждении признается существование *актуально-бесконечно малых элементов круга*, и при этом признается, что те признаки двух элементов, об уменьшении разности которых свидетельствует интуиция, для бесконечно малых элементов совершенно сравниваются.

Это доказательство *прямое* в противоположность *апагогическому* методу исчерпывания.

На это следует обратить внимание. Вне сомнения, в дальнейшем при нападках рационалистов на апагогические доказательства²⁵ развитие метода неделимых способствует не столько его простота и практичность, как прямой характер его выводов.

В дальнейшем у Кавальери косвенная схема метода исчерпывания превращается в более простую схему метода исчерпывания.

Чтобы доказать, что

$$A : B = a : b,$$

А и В разбиваются, согласно идее второго метода Архимеда, на части, причем неделимые части (такое понятие, конечно, чуждо Архимеду)

$$A = \sum \alpha_j, B = \sum \beta_j.$$

Доказывается, что для всякого j

$$\alpha_j : \beta_j = a : b$$

путем отождествления

$$\alpha_j \text{ и } \beta_j, \bar{\alpha}_j \text{ и } \bar{\beta}_j$$

для которых не трудно установить пропорцию

$$\bar{\alpha}_j : \bar{\beta}_j = a : b$$

Легко видеть, какому изменению подвергается эта схема при установке понятия бесконечно малого в современном смысле – как переменного с пределом $= 0$.

Имеем, $A = \lim \sum \alpha_j$, $B = \lim \sum \beta_j$. Далее, $\bar{\alpha}_j$, $\bar{\beta}_j$ не тождественны, а только эквивалентны²⁶, α_j и β_j т.е. $\lim \frac{\bar{\alpha}_j}{\alpha_j} = 1$, $\lim \frac{\bar{\beta}_j}{\beta_j} = 1$, поэтому на основании второй леммы анализа

$$A = \lim \sum \bar{\alpha}_j \quad B = \lim \sum \bar{\beta}_j,$$

а так как $\bar{\alpha}_j : \bar{\beta}_j = a : b$, то

$$A : B = a : b.$$

С точки зрения Кавальери $\bar{\alpha}_j$ и $\bar{\beta}_j$ суть не эквиваленты частей A и B , а суть сами эти части, A и B – не пределы суммы, а сами суммы α_j и β_j или, что то же $\bar{\alpha}_j$ и $\bar{\beta}_j$.

Отсюда вытекает принцип Кавальери²⁷, устанавливающий равенство величин из равенства их неделимых, равенство двух тел между двумя параллельными плоскостями из равенства площадей их сечений параллельными этим плоскостям плоскостями и т.д.

Этот метод совершенно чужд античной мысли.

Торичелли²⁸ старается убедить в том, что метод неделимых служил у античных математиков методом открытия, который не совпадал с методом доказательств, но с этим едва ли можно согласиться.

В действительности же психология открытий тех теорем, которые доказывались Евклидом и Архимедом аналогичным путем, много проще, чем думал Торичелли. 2-е положение XII книги “Начал” – естественное распространение того, что уже доказано для подобных прямолинейных фигур и вообще подобных фигур. Таково же происхождение и 18-го положения XII книги.

Теорема Архимеда о площади круга составлена по образцу теорем, относящихся к площадям правильных многоугольников. Значения поверхностей и объемов конусов и цилиндров верней всего были найдены разворачиванием их в плоскости, что, конечно, проще метода неделимых.

Совершенно невероятно, чтобы этот метод, совершенно неудобный при нахождении объема и поверхности сферы, применялся Архимедом в этих случаях как эвристический.

Впрочем, сам Архимед в упомянутом выше сочинении совершенно ясно говорит об истории своих открытий. Аналогон круга – сфера, тре-

угольника – конус. Вот эта мысль и руководит Архимедом в поисках вывода, конечно ошупью, формулы для объема шара.

Архимед²⁹ говорит: “Благодаря изложенной теории о том, что шар в четыре раза больше конуса, которого основанием служит большой круг, а высота равна радиусу круга, мне пришла в голову мысль, что поверхность шара в четыре раза больше его большого круга, причем я исходил из представления, что как круг равен треугольнику, основанием которого служит периферия круга, а высота равна радиусу круга, так и шар равен конусу, которого основанием служит поверхность шара, а высота равна радиусу этого шара”.

В сочинении “О шаре и цилиндре” Архимед строит строгое доказательство (причем апологически) этих положений.

Аналогон параболы – параболоид (коноид) и теоремы об объеме сегмента коноида – аналогон раньше открытой теоремы о площади параболического сегмента.

Теорема о сфероидах – естественное обобщение теоремы о сфере.

§ 6. Третья архимедова форма метода исчерпывания.

В третьем методе Архимедова неравенства (5) заменяются:

$$P_a^{(m)} < A$$

$$P_b^{(m)} < B.$$

То, что $A - P_a^{(m)}$ может быть сделано как угодно мало, выясняется построением.

$P_a^{(m)}$ образуется из частей, каждая последующая из которых получается из предыдущей делением последней по определенному закону:

$$P_a^{(m)} = P_{a_1} + P_{a_2} + \dots + P_{a_m}$$

$$P_{a_1} > P_{a_2} > P_{a_3} > \dots > P_{a_m}.$$

Дальше доказывается, что при взятии достаточного числа членов P_{a_i} – разность $B - P_a^{(m)}$ может быть тоже сделана сколь угодно малой. Невозможно, чтобы $A < B$, ибо тогда

$$B - P_a^{(m)} > B - A$$

и невозможно, чтобы $A > B$, ибо тогда

$$A - P_a^{(m)} > A - B.$$

В известном выводе Архимеда площади сегмента параболы за P_{a_1} принимается площадь ΔAOB , вписанного в сегмент, за P_{a_2} – ΔOFB , вершина F которого на $FM \perp AB$ и $MC = MB$ и другого аналогичного треугольника, за P_{a_3} – ΔFNB , где $HN \perp CB$ и $MN = NB$ и других аналогичных треугольников и т.д.

К этой форме больше всего подходит название “метод исчерпывания”.

Представление $P_a^{(m)}$ суммой

$\sum P_{aj}$ представляет не что иное, как приближенное вычисление $P_a^{(m)}$.

Берется величина P_{a1} близкая к $P_a^{(m)}$, которая может быть признана за *первое ее приближение*. Это будет то, что можно назвать *первым черпком*. Затем берут остаток $P_a^{(m)} - P_{a1}$ и ищут его приближение P_{a2} .

Это будет *второй черпок*. Рассматривая новый остаток $P_a^{(m)} - P_{a1} - P_{a2}$, находим его приближение P_{a3} и т.д. С некоторым черпком $P_a^{(m)}$ окончательно исчерпывается, получается полное значение.

Но те же черпки служат и для приближенного вычисления A , но здесь точное значение уже не достигается. Внося идею предела, можно сказать, что предел суммы таких черпков будет точно равняться исчерпываемой величине A , которая, таким образом, является *пределом суммы бесконечно великого числа слагаемых, бесконечно убывающих, начиная с первого*.

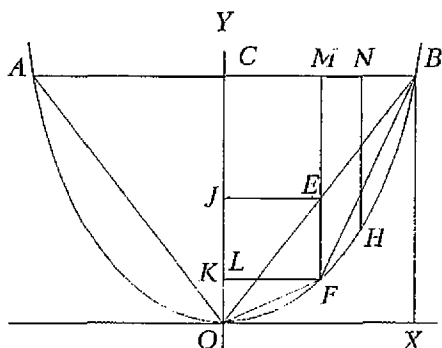
Чтобы выявить, каким образом эта форма приводит к этой другой точке зрения анализа, рождающей на ряду с интегралом еще ряды, мы представим способ Архимеда определения площади сегмента параболы в переработанном виде с привлечением понятия предела. Первое приближение (черт. 2) площадей, вписанных в параболу $y^2 = x$ ΔAOB ($BC=1$, $OC=1$), т.е. 1. Остаток – площадь сегментов AO и BO .

Приближение их – площадь треугольников, в них вписанных. Удобнее всего брать OBF , где E середина CB и $EF \parallel OY$

$$\frac{OE}{BC} = \frac{OE}{OB}, OE = \frac{1}{2}. \text{ КОС (как у при } x = KF = FE = \frac{1}{2}) \text{ равняется } \frac{1}{4}$$

$$\frac{KL}{BC} = \frac{KO}{OC}, KL = \frac{1}{4}, LF = KF - KL = OE - KL = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$\frac{\text{пл. } OBF}{\text{пл. } OBC} = \frac{h}{H}$, как высоты, опущенные на общую сторону OB , но последние относятся как параллельные отрезки $LF = BC$, т.е. как 1:4.



Черт. 2.

Таким образом приближение первого остатка $\frac{1}{4}$.

Второй остаток – остальные еще меньшие сегменты, с которыми поступаем так же.

Сумма этих площадей оказывается равной $\frac{1}{4^2}$ и т.д.

$$\text{пл. OAB} = \lim \left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} \right] \text{ или}$$

$$\text{пл. OAB} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

ИЗ ИСТОРИИ МЕТОДА НАЛОЖЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Евклид и Лежандр.

Элементарный учебник геометрии в большей или меньшей мере представляет из себя методическую переработку евклидовых “Начал”¹, правда, дополненных некоторым новым материалом. Можно сказать, что изучение геометрии мы начинаем с Евклида. Но только этому положению следует придавать правильный смысл. Верно то, что мы изучаем те теоремы, что большей частью находятся у Евклида, но если глубже вникнуть в евклидовы “Начала”, то увидим, что мы далеко отошли от них в самом существенном, в понимании основной проблемы – доказательства выставляемых положений, образующих систему геометрии.

Понятие о сущности математического доказательства подверглось через толщу веков глубочайшему изменению, хотя это изменение и не было заметно самим исследователям так, как не заметно старение стареющему человеку. То, что Лежандр считает доказательством, не могло быть признано за доказательство Евклидом и, с другой стороны, Лежандр не мог начать свои “Элементы” с построения равностороннего треугольника, как это делает Евклид.

Не следует думать, что Лежандр² в своих *упрощенных* доказательствах додумался до тех более простых доказательств, которые *ускользнули* от Евклида. Евклид, очень может быть, знал эти доказательства, но отверг их как *негодные*, как находящиеся в решительном противоречии с его взглядами на доказательство. Почему ему не поступать так, как Лежандр, при доказательстве основного свойства равнобедренного треугольника, состоящего в том, что углы, противолежащие равным сторонам, равны?

Ведь, кажется, нет ничего проще, как соединить середину стороны $BC-D$ с вершиной A и доказать на основании третьего случая конгруэнтности равенство треугольников ABD и ADC ³.

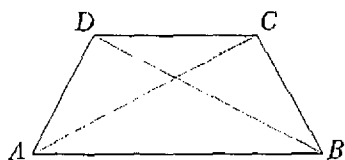
Между тем, Евклид излагает другое, более сложное доказательство (так называемое *elefiga*). Ответим: потому, что *Евклид признавал существование только тех объектов, которые могут быть построены*.

Он потребовал бы от Лежандра *указать* построение точки D – середины отрезка BC . Но построение это (предл. X, 1 книги) основывается на 9-м положении о делении угла на две равные части, последнее же – на третьем случае конгруэнтности, а третий случай конгруэнтности доказывается от противного на основании 7-го положения⁴.

“Если мы соединим концы основания AB с двумя точками C и D , лежащими по одну сторону прямой AB , то расстояния CA и CB точки C от

концов основания AB не могут быть равны каждому расстоянию DA и DB от тех же концов AB ".

Для доказательства невозможности одновременного существования равенств $AC=AD$, $DB=BC$ Евклид (черт. 1), пользуясь *elefuga*, доказывает, что $\angle ADC = \angle ACD$ и вторично применяя *elefuga*, что $\angle CDB = \angle DCB$, обнаруживает несовмест-



Черт. 1.

ность этих двух равенств углов, так как $\angle ADC > \angle CDB$ и $\angle BCD < \angle ACD$ (мы берем только тот случай, когда D вне ABC).

И только благодаря коренному изменению требований, предъявляемых к доказательству, Лежандр получает возможность упростить геометрическую систему и перевернуть порядок теорем.

Он начинает с положения:

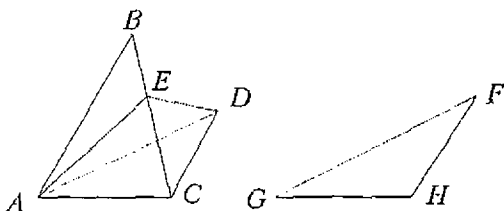
"Если две стороны одного треугольника равны соответственно сторонам другого и если в то же время угол между первыми более угла, заключенного между вторыми, то третья сторона первого будет больше третьей стороны второго".

Но это только 24-я теорема I книги "Начал" Евклида, т.е. весьма отдаленная от начала теорема, которая доказывается на основании третьего случая конгруэнтности треугольников.

Для доказательства того, что

$$\left. \begin{array}{l} AB = FG \\ AC = GH \\ \angle BAC > \angle FGH \end{array} \right\} \text{также и } BC > FH$$

Лежандр¹, откладывая (черт. 2) угол $\angle CAD = \angle FGH$ и $AD=FG$ строит треугольник CAD , равный FGH (на основании 1 случая конгруэнтности), проводит биссектрису AE угла BAD и соединяет E с D и доказывает равенство треугольников BAE и EAD . $CD < ED + EC$, откуда $CD < BE + EC$, $CD < BC$ или $FH < BC$.



Черт. 2.

Эта теорема дает сейчас же возможность вывести (апагогически) третий случай конгруэнтности.

Доказательство это, конечно, не может быть принято Евклидом, ибо построение биссектрисы является необоснованным.

Античное доказательство вовсе не чисто логическое. Античный математик убеждает не одним *силлогизмом*, но и *актом*, *вычерчивающим геометрическую фигуру*.

Выражения Аристотеля⁶ очень напоминают Шопенгауэра⁷. Согласно Аристотелю, свойства геометрических фигур открываются приведением к *актуальному существованию* геометрической фигуры, вызывающим разложение данных фигур. Если фигуры уже даны разложением, то свойство уже очевидно, оно просто видно глазу. Но если они не разложены, то находятся только в потенции (лучше было бы сказать – их знание в потенции).

Почему сумма углов треугольника равна двум прямым?

Потому, что сумма углов, образованных около данной точки на одной линии, равна двум прямым углам. Если образовать внешний угол, продолжая стороны треугольника, непосредственное доказательство очевидно.

Почему угол, вписанный в полуокружность, неизменно прямой? Это потому, что имеет место равенство для трех линий: двух половин основания и прямой, проведенной от центра круга к вершине угла, противолежащего основанию: это то равенство, которое дает возможность познать свойство вписанного угла⁸.

§ 2. Постулаты.

Евклид, как и Аристотель, не задавался целью вывести все свои положения силлогистически из немногих высказанных им определений, постулатов и аксиом. Его целью было лишь убедить читателя в определенных истинах, но он вовсе не считал единственным способом убеждения формально-логический вывод положений из признанных читателем в начале истин. Очевидность (*lux naturalis*, естественный свет) только рационалистами⁹ XVII века вполне определенно признана за критерий истинности положений, в аристотелевской же логике¹⁰ она не играет этой роли.

За правильность предпосылок, с которых начинается цепь доказательств, говорит скорее общее их признание, вследствие чего аксиомы и называются *κοιναι λογικαι* (*communes rationes*). Доказательства Евклида вполне отвечают схемам, выработанным *софистикой*.

В начале следует привести противника к признанию некоторых положений, отнюдь не апеллируя к очевидности, ибо противник мог бы поднять вопрос об относительности понятия очевидности и признать для себя не очевидным то, что для противника – является вполне очевидным.

Более сильным фактором являлась *общепризнанность* необходимых для дальнейшего положений, необходимость противнику при их отрицании его встать в смешное положение. Отсюда стягивание аксиом к началу сочинения.

Но что такое постулаты, выставленные Евклидом тоже в начале сочинения наряду с аксиомами¹¹.

Неправильно относить к аксиомам очевидные положения общего характера, т.е. положения, относящиеся к величинам вообще, а не только к геометрическим, какова, например, первая евклидова аксиома: “величины, равные одной и той же, равны между собой”, и отождествлять постулаты¹² с *геометрическими* аксиомами. 11-я аксиома фигурирует иногда 5-м постулатом, а 10-я (о равенстве прямых углов) 4-м, но 12-я (две прямые линии не заключают пространства) и 8-я (о равенстве совпадающих при наложении фигур) – всегда аксиомы.

Только отказавшись от проектирования в прошлое современных формально-логических тенденций, мы будем в состоянии понять, что представляют для Евклида постулаты. Евклид геометрическим объектам вовсе не приписывает идеального существования. Доказывающий какую-либо теорему сам вызывал к существованию геометрическую фигуру, с какового момента она и начинала свое существование.

Признание возможности существования прямой, круга и т.д. являлось равносильным признанию акта, их производящего, что и представляет содержание постулата¹³. Более того, признание этого акта вынуждало признание некоторых истин, например, признание третьим постулатом возможности описания кругов вызывало признание пересеклемости кругов, проходящих, через центры друг друга

Следующее объяснение дает Геминус¹⁴, согласное с нашим. “Постулат, – говорит он, – представляет требование найти или сделать (*fabricari*) то, что достигается просто и непосредственно, в чем ум не затрудняется ни в понимании, ни в построении”.

Прокл, говоря о различии теорем и проблем и отмечая, что цель первых – познать, вторых – сделать, приводит в соответствие с первыми аксиомы, со вторыми постулаты, определя последние близко к Геминусу. Гоббс¹⁵ вполне ясно выражает нашу мысль. То, что называется постулатами, это истинные принципы, но не доказательства, а построения поэтому не знания, а потенции.

§ 3. Метод наложения у Евклида.

Большим диссонансом с общими тенденциями “Начал” представляется метод наложения при доказательстве первого случая равенства треугольников, если этот метод понимать так, как мы обычно его понимаем.

Здесь не мы имеем идеальное существование начерченных геометрических фигур с идеальным их перенесением с одного места на другое, [как обычно считают].

Но мне представляется, что как мы, так и целый ряд предшествующих поколений, совершенно неправильно здесь понимают Евклида.

Положения 2 и 3, предшествующие положению, доказываемому наложением, наводят на мысль, что сам Евклид здесь вовсе не разумеет наложение в нашем лежандровом смысле.

Положение 2–е:¹⁶ *Из данной точки А провести прямую, равную данной прямой ВС.*

Почему Евклид не делает так, как мы делаем и как рекомендовали это сделать некоторые авторы XVII века¹⁷: проведя через А какую-нибудь прямую, *не переносят в нашем смысле отрезок ВС?*

Почему он не может сделать с одним *отрезком* то, что в четвертом положении он делает с *целым треугольником*?

Отвечу: потому что он не признает в *нашем смысле* перенесения, потому что то, что мы считаем перенесением *идеального* треугольника, — для него является *построением тождественного данному треугольника в ином месте, чем он задан.*

Евклид строит на АВ, на основании первой теоремы “Начал”, равнобедренный треугольник ABD, из В описывает радиусом ВС окружность до пересечения с b в G; из D описывает радиусом DG окружность до пересечения с AD в К. Если бы мы желали “перенести” ВС на определенную прямую AL, проходящую через L, то пришлось бы описать еще третью окружность радиусом АК до пересечения с AL в L (согласно предл. 3)¹⁸.

Наложение DEF на ABC представляет:

1) построение на АВ отрезка, равного DE, начиная с А,

2) проведение другой прямой под тем же наклоном к АВ, что АС (согласно 8–му определению – угла), откуда следует, что DF пойдет по АС и

3) построение отрезка, равного DF на АС, откуда следует, что F совпадет с С. Легко видеть, что в этот момент, т.е. при заключении, что соединение точек Е и F прямой, т.е. построение третьей стороны EF дает АВ, должен возникнуть скачок. Софист возразит: “Я позволил от одной точки к другой провести прямую, но откуда мы знаем, что в одном случае получится одна, а в другом опять та же прямая?”. Здесь становится необходимым подчеркнуть еще одно общепризнанное положение – 12–ю аксиому: “Две прямые не могут заключать пространства”¹⁹.

Идеальное существование геометрических объектов – плод *схоластического реализма*²⁰. Такое существование за ними закрепилось и в математической мысли XVI века. Математик XVI века понимает наложение уже в нашем смысле и обнаруживает тенденцию пользоваться им шире, чем Евклид.

У Клавия мы находим разновидность этого метода, чуждую Евклиду.

Верный духу своего времени, Клавий²¹ заменяет косвенное доказательство теоремы 6 1–й книги (обратной *elefuga*) прямым наложением $\triangle ACB$ на $\triangle ABC$ ($\angle B = \angle C$), так, что треугольник подвергается *мыслен-*

ному раздвоению. Вместе с тем эволюционирует и само понимание равенства²². Это уже не равенство количества, по нашему *равновеликость, а тождество форм и размеров; равные фигуры – это тождественные фигуры, помещенные в различных местах.*

Аксиома 8-я обращается; наложимость является и достаточным и необходимым условием равенства.

На первый взгляд может показаться, что если Аристотель и Евклид не могли бы признать *наложение с переносом идеального треугольника*, то такая операция могла бы оказаться во вкусе Платона, объектировавшего идеи и геометрические формы. Видимо, Цейтен²³ так и думает. Он говорит, что математические истины древним представлялись или как *теоремы*, или как *проблемы*. Первая точка зрения поддерживалась последователями Платона, думавшими, что проблема только устанавливает то, что уже предварительно существовало, независимо от того факта, строится оно или нет, более того, построить что-либо, например, разносторонний треугольник, можно только потому, что идея *равностороннего* треугольника имеет существование, предваряющее всякое построение.

Вторая точка зрения у учеников Евдокса; для них существенное – обнаружение истины построением.

В “Началах” Евклида Цейтен видит примирение этих точек зрения. Но для того, чтобы Платон и его ученики понимали геометрию так, как понимал ее, например, Декарт, для этого мало ему было признать идеальное существование геометрических фигур в каком-то другом мире, (τοποῦ νοητοῦ)²⁴ том мире, бледным отражением или тенью которого является настоящий. Необходимо было признать их в этом мире, в самих вещах. При методе наложения переносится не платоновский идеальный треугольник из другого мира, а на *этот*, первый *тот* второй треугольник и не материальный, а идеальный, который, так сказать, живет в первом.

§ 4. Рационалисты против метода наложения.

С развитием рационалистической²⁵ логики и гносеологии, философы и математики XVII века становятся в явно враждебное отношение к этому методу доказательства. Этот метод, по их мнению, убеждает с помощью *обращения к чувствам*, а не к *чистому разуму*, который только один и является судьей.

Первый случай конгруэнтности доставляет много хлопот. Мы видим ряд попыток замены обычного доказательства наложением – другим, без этой “механической операции”, столь противной складу рационалистической мысли.

В “Элементах Евклида” Дешаля²⁶ евклидово доказательство 8-й теоремы I книги “Начал” предваряет другое, про которое, впрочем, и сам автор говорит: “В виду того, что это доказательство не представляется убе-

дательным, привожу также и обычное (т.е. наложением). В своем доказательстве Дешаль старается убедить, что расстояние между точками двух пересекающихся прямых может зависеть только от угла между ними и расстояния этих точек от вершины угла.

Томас Симпсон относит первый случай конгруэнтности к аксиомам совершенно также, как Гильберт²⁷, который в группу аксиом конгруэнтности вводит: III. Если для двух треугольников ABC и A'B'C' имеют место конгруэнции

$$AB = A'B', AC = A'C', \angle BAC = \angle B'A'C'$$

то всегда имеют место и конгруэнции

$$ABC = A'B'C', ACB = A'C'B'$$

Арно вводит новую аксиому: если две точки прямой равно отстоят от двух точек A и B, то то же относится и ко всем другим точкам прямой. Цель ее введения — не только установка арнольдианского порядка²⁸, но и освобождение от метода наложения, что достигается Арно тем, что ему приходится пользоваться наиболее простым положением, относящимся к равенству прямоугольных треугольников, избегая слова “треугольник”, а именно положением о равенстве прямоугольных треугольников, у которых катеты равны, как чем-то вроде более низкой степени очевидности аксиомы с объяснением, повышающим эту степень²⁹.

Еще в XVI веке делают опыты построения доказательств равенства треугольников без метода наложения.

Доказательство Кандаля³⁰ первого случая конгруэнтности треугольников, критикуемое Савилем, состоит в следующем. Так как по предположению в треугольниках $\alpha\beta\gamma$, $\delta\epsilon\zeta$ прямые $\alpha\beta$ и $\delta\epsilon$ равны, то равны и расстояния точек (α и β) и (δ и ϵ). (Здесь Кандаля берет определение прямых Прокла, которое последний считает эквивалентным евклидовскому, а именно, что прямая линия между двумя точками равна их расстоянию).

С другой стороны, прямые ($\alpha\beta$, $\alpha\gamma$) и ($\delta\epsilon$, $\delta\zeta$), как содержащие равные углы, согласно восьмому определению Евклида³¹ равнонаклонены. Так как равенство углов зависит от равенства наклонов, то следует, что (β и γ) и (ϵ и ζ) находятся в тех же расстояниях. Поэтому и прямые $\beta\gamma$ и $\epsilon\zeta$ равны. Но если отдельные элементы (qualitates) треугольников $\alpha\beta\gamma$, $\delta\epsilon\zeta$ соответственно равны, то $\alpha\beta\gamma$ и $\delta\epsilon\zeta$ равны по восьмой аксиоме. Поэтому и остальные элементы равны, т.е. углы β и γ соответственно равны ϵ и ζ ³².

Не будем останавливаться на критике Савилля, смотрящего на это доказательство как на неубедительное, как основанное на положениях не

более очевидных, чем доказуемое. Заметим только, что из защиты Савилия метода наложения видно, что при выработанной схоластическим реализмом объективации геометрических форм операция наложения сперва не представляется недопустимой. Идеальный треугольник переносится не в действительности, так как его нельзя взять в руки, но только в воображении.

По Савилию,³³ это вполне возможно в теореме (но не в проблеме), так как в теореме не требуется никакого действия, требуется только обнаружить истинное или ложное, и нет ничего ложного в том перенесении, которое делаем только одним воображением, а не руками или операцией, употребляемой при построении.

К невозможности перенесения приводит лишь дальнейшее размышление об идеальных объектах, которые объявляются не только не ощущаемыми, но в собственном смысле и не воображаемыми.

Все действия над воображаемыми фигурами представляются как действия не над идеальными фигурами, а *образами материальных тел*.

Геометрия, наконец, объявляется возможной без чертежа не только конкретного, но и воображаемого.

ФИЛОСОФСКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИДЕИ XVI ВЕКА.

Введение.

Говорить о философско-математических идеях XVI века, это еще не значит говорить только о XVI веке. Предмет настоящего очерка я назвал идеями XVI века, потому, что именно в XVI веке эти идеи, выйдя из метафизического состояния, начали математизироваться, сделались предметом философских размышлений *математиков* и стали ложиться в основу новых, но еще несовершенных методов. Но я считаю необходимым говорить о генезисе этих идей и их дальнейшей судьбе. Для меня ясно, что метафизический период математической идеи — это ее утробная жизнь; эту жизнь следует изучать, но изучать ее, конечно, трудно.

В этой области утреннего тумана так трудно понять правильные очертания предметов. Мы так склонны проецировать настоящее в прошлое, мы склонны там, где не видим самих себя, видеть только отрицание наших идей, одну пустоту вместо богатства идей, окруженных атмосферой нам совершенно чуждого настроения и выраженных непривычным для нас языком. Неужели от Евклида до Декарта, как это думает Брюнсвиг¹, нет ничего достойного внимания, неужели средневековая схоластика это одно заблуждение, о котором следует забыть, и вся христианская математика с ее глубокими идеями извлечена из ничего гением одного Декарта? Я говорю о XVII веке не меньше, чем о XVI. Проследив судьбу философско-математических идей XVI века до их вытеснения новыми идеями, стараюсь обрисовать различия двух эпох: эпохи живого, наивно доверчивого и чуждого критики, несколько боязливого детства и смелого, верующего в свои силы и в будущее, юношества.

Очень может быть, что в нарисованной мной картине этого отдаленного прошлого не все правильно, но и у хорошего художника сходство в редких случаях с первого раза полное. Может быть мне, а может быть другим удастся в будущем замазать неправильно уловленные черты другими, приближающимися к большему сходству.

Но я все таки льщу себя, что и мой несовершенный очерк может оказаться полезным.

Этот очерк — один из целой серии очерков, к которым принадлежит и моя статья “Из прошлого пятой книги “Начал” Евклида”, помещенная в журнале “Математическое Образование” за 1916 г. — результат изучения старой учебной литературы, т.е. нижнего течения математической мысли, в котором простота материала дает возможность ясней проследить эволюцию идей.

В заключение считаю необходимым выразить свою благодарность приват-доценту Императорского Московского Университета В.В. Бобынину за ряд для меня полезных советов и указаний, библиотекарю того же университета и помощнику его за любезную помощь при моей работе в библиотеке этого университета, Факультету и Совету Императорского Варшавского Университета за средства к напечатанию этой работы.

Проф. Д. Мордухай-Болтовской.
г. Ростов-на-Дону. Октябрь 1916 г.

§ 1. Общая характеристика мысли XVI века.

Нельзя отрицать своеобразной физиономии XVI века, во многом отличающейся как от средневековья, так и от рационализма XVII века. Это эпоха борьбы с авторитетом, эпоха юности, возрождающейся от гнета научной мысли.

Чисто юношеская жажда знания заставляет ее устремляться в те области, доступ в которые в позднейшее время рационалистического отрезвления был окончательно закрыт.

Уму философа XVI века круг научных исследований представляется много шире, чем позднейшим поколениям. В его глазах порядок материального мира чудесно переплетается с порядками других, нематериальных, трансцендентальных миров. Явления всех этих порядков могут быть наблюдаемы и должны составить части одного великого здания "Пансофии"², универсальной науки.

Не убедить, а узнать — вот главная цель деятельности юного духа возрождения.

Сочинение Кардана "De Subtilitate"³, о котором мы будем говорить ниже содержит в себе наряду с заметками о геометрических парадоксах и заговоры от болезней, и описание явлений демонов его современниками. Обычное, будничное у него переплетается с чудесным. Тем же *механическим* законам, которым подчинены камни, подчиняются и сверхъестественные духи. Три мира Парацельса: земной, звездный и духовный находятся в симпатической зависимости, и медицина зависит от астрологии. Штифель в своей алгебре занимается доказательством того, что папа Лев X представляет из себя апокалиптического зверя с помощью операции над буквами его имени, получая апокалиптическое число 666.

Ум, который *привык* верить, перестав верить в то, во что он раньше горячо верил, ищет новой пищи для своей веры. Этой наивной веры уже нет у мыслителя XVII века, который, сохранив только пламенную веру в разум, старается всю вселенную заключить в бесспорно узкие для нее рамки геометрической логики.

Если у мыслителя XVI века *ars inveniendi*⁴ стоит на первом плане, заслоняя собой *ars demonstrandi*⁵, то в конце XVII века в пустых содержа-

нием и водянистых вольфианских сочинениях *ars demonstrandi* выдвигается на первое место.

Увидеть самому, а не услышать от других это — характерное желание мыслителя XVI века. Но то, что ему приходится видеть, он как ребенок не подвергает критике; для него нет иллюзий, а только истины, более или менее воспринимаемые его умом.

Что характерно для математиков XVI века, это недостаток их *artis demonstrandi*; они хороши, когда ищут новые методы, ибо *эти* методы их оказываются правильными и могут быть обоснованы, но сами они не могут, да и не особенно стараются их обосновать. Как сын остается похожим на отца, хотя бы находился с ним в самых враждебных отношениях, так и рамизм XVI века, враг схоластики, похож на схоластику, из которой он в конце концов вышел. Ваддингтон⁶ указывает три принципа, характеризующие рамизм: право разума на свободное исследование, борьба с крайностями средних веков и упрощение наук употреблением правильных методов.

Но это, конечно, характеристика *деятельности*, а не *мировоззрения* рамизма.

С последней точки зрения, он не далеко от схоластики. *Естественная* логика, которая им противопоставляется логике Аристотеля, представляет ту же, но только несколько видоизмененную логику Аристотеля, изменение которой в то время казалось огромным, а в настоящее время ничтожным. Метод исследования остается по существу *схоластическим*.

Зачаткам новой философии, говорит Виндельбанд⁷ свойственна инстинктивная оппозиция против “схоластики” и наивное непонимание общей зависимости, в которой сами они находятся от какой-либо ее традиции”.

§ 2. Эволюция иерархического принципа в оптиологии.

Согласно Аристотелю, конечная цель науки — это выведение частного из общего, которое выражается определением *per genus et differentiam*, с помощью родового понятия и специфического признака. Этот взгляд сохранился и в схоластическом мировоззрении.

Но у Аристотеля нет идеала иерархии классов, представляющих собой пирамиду, в основании своей имеющую индивидуумов, а в вершине *genus generalissimum*⁸.

Этот идеал, конечно, создан средневековым *реализмом*, видевшим в возрастающей общности классов, возвышающиеся степени существования, так что *genus generalissimum* является вместе с тем и одаренным наибольшей полнотой существования.

Легко отсюда видим, какое значение в глазах средневекового мыслителя имело определение.

И для рамниста, по существу не изменившего взгляд на сущность знания – определение должно было иметь тоже значение.

В высокой степени интересно проследить эволюцию основного принципа, лежащего в основе иерархической лестницы существ. Вне сомнения, иерархические идеи пускают свои корни в политеистическое мировоззрение еще самых низших ступеней развития человека.

Далее – платоновские идеи образуют иерархическую лестницу, которая завершается высшей идеей – идеей блага. Вне сомнения при такой иерархии идей имеется в виду *аксиологическая* точка зрения. Идеи являются здесь не столько *universalia*, сколько прототипами и образцами, *подражанием* которых является действительность. Идеализм Платона должен был пройти длинный путь через Аристотеля и неоплатонизм, чтобы превратиться в схоластический реализм. У Аристотеля эта иерархия обращается в *иерархию форм*, начинающуюся с низшего вида реальности – лишней формы (*αἰορφοῦ*) материи (*ὑλῆ*), и поднимающуюся через ряд промежуточных ступеней к Богу, к чистой форме.

Здесь уже реже выступает *онтологическая* точка зрения. Но она еще резче в неоплатонизме, где Божество то *πρῶτον*⁹, абсолютное единство недоступное никакому определению, откуда истекают различные сущности умопостижимого и материального, мира с постепенным ограничением в реальности вполне до материи как *μη οὐ*¹⁰.

Этот живой и красочный мир Платона, в атмосфере схоластики, обращается в бесцветный и безжизненный мир абстракции, в восходящую до пустого понятия бытия иерархию терпящих в своем содержании и вынуждающих в объеме соподчиненных друг другу универсалий, за которыми оставались, как за их предками, постепенно возвышающиеся степени реальности.

В борьбе *реализма*, проектировавшего *universalia*¹¹ вне нас, если не в особый умопостижимый мир Платона, то в самые вещи *наиминализма*, объявлявшего идеи – словами (*flatus vocis*)¹², победителем оказался третий – концептуализм, нашедший универсалии в духе и приведший к последнему, как исходной точке метафизических исследований. То течение, которое могучим потоком идет от Декарта к Канту, идет не от Ансельма или Росцелина, а от Абеляра через Оккама и Рамуса.

С окончательным падением реализма в XIII–XIV вв. поколебалось и основание указанной выше иерархии, ибо большей общности уже перестала отвечать большая степень реальности.

Но в XV и XVI веках старались влить новое вино в старые меха, живую вселенную, которая открылась им, освобожденным от средневекового тумана глазам, включить в выработанные схоластикой омертвевшие формы.

XVI век стоит уже не далеко от того момента, когда гений Декарта разбил эти формы.

Наступает момент ясного сознания, что в основе науки должны лежать не столько *определения*, сколько аксиомы¹³, что наряду с Божественным Откровением мы несем в своем разуме еще другое откровение: это ряд истин, постигаемых нами с помощью своего рода интуиции, что наука не может развиваться с помощью одних аналитических суждений, извлекаемых из определений: то, что может быть таким образом выведено, так же пусто, как пуст источник.

Наряду с *логикой классов* схоластиков, у рационалистов выступает *логика отношений*. Лежащие в основе науки аксиомы говорят не столько об отношении данного объекта или вида к определенному классу, сколько о взаимоотношении различных объектов.

Иерархия истин теперь определяется не возрастающей общностью классов, а убывающей простотой отношений. Вся вселенная получается из основного мирового принципа с помощью постепенного ряда ограничений, созидающих как логическое следствие из простых, так же легко формулируемых, как теоремы геометрии свойств Божества все разнообразие Вселенной. Все вытекает из сущности Бога так, как теорема о сумме углов треугольника вытекает из сущности последнего¹⁴.

Глазам рационалиста вся вселенная представляется, как ряд взаимоотношений, вытекающих из небольшого числа аксиом, относящихся к простейшим отношениям.

Но эта иерархия строится на некрепком материале, ибо понятие простоты – нечто более неопределенное, чем понятие общности. В дальнейшем ей суждено распасться. XVIII век – это век демократизации истин, в которой значение их определяется только их полезностью (не только в грубоутилитарном смысле, но и в этическом).

§ 3. Логические идеи Рамуса.

Рамус¹⁵ различает две части диалектики (иначе логики), одна – *учение об открытии*, другая – *учение о суждении*. Из этих двух частей, первое получает – первенствующее значение в XVI веке.

В математике на первый план выступает алгебра, в которой первая часть ее – *эвристическая метода* – резко отграничена от доказательства. Только для изыскания решения математик XVI века пользуется чистой алгеброй, при доказательстве он, как и арабы, прибегает к геометрическому языку, переводя алгебраическую формулу на язык геометрии¹⁶.

Математика XVI века преимущественно интересуется задачами. Но при решении их он не проявляет критического отношения к постановке проблемы, ни к ее решению.

Вторая часть логики – *учение о суждении* – вовсе не сводится в глазах мыслителей XVI века к учению о доказательстве. Суждение у Рамуса проходит три ступени: от простого рассматривания предмета с данной

точки зрения дающего “enonciation”¹⁷, через силлогизм оно идет к “методе”, при помощи определений и разграничений, объединяющей однородное знание в одно систематическое целое. Таким образом силлогистическое доказательство, т.е. *ars demonstrandi*, и здесь отступает на второй план, выше его становится *Систематика* знаний, основанная на определениях его, которые и составляют наиболее существенное в знании.

Родословное дерево классов можно всегда привести к *диахотомной схеме*. Род R, разделяющийся на виды A, B, C, соответствующие признакам a, b, c единственно возможным и несовместным можно разделить на два вида A и $\neg A$ с признаком и без признака a. В свою очередь $\neg A$ можно разделить на B и $\neg B$ с b и без b, причем $\neg B$ тождественно с C.

Так, например, вместо того, чтобы делить треугольники на прямоугольные, косоугольные и остроугольные, можно их делить теперь на прямоугольные и непрямоугольные, а затем последние на косоугольные и остроугольные.

Это та схема, которую проводит Рамус во всех своих классификациях. Эту схему отметил еще Боэций¹⁸, как отвечающую делению рода на ближайшие виды.

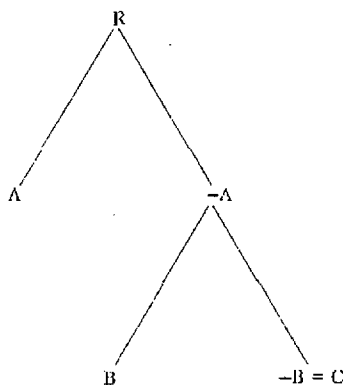
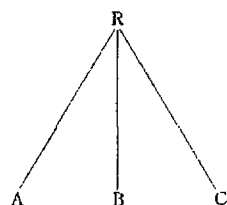
Именно эта схема должна была оказаться больше всего по сердцу *концептуалисту*.

Если Абеляр¹⁹ выдвигал возможность такого диахотомного деления, как аргумент против крайнего *номинализма* Росцелина, указывая, что согласно ей, виды могут существовать независимо от имен, так как деление R на A и $\neg A$ ведь имеет место, хотя $\neg A$ может и не иметь специального названия.

С другой стороны, эта же схема менее всего подходит к *реализму*, ибо вид $\neg A$ предстает искусственным созданием ума, который, можно сказать, всем существом своим противится приписанию $\neg A$ равной реальности с A, B, C. Только крайние реалисты могли отважиться включить в их мир универсалий “не-человека” или “не-треугольник”.

С концептуалистической точки зрения, как A так и не A суть только модусы мыслящего духа и обладают, так сказать, равными правами. Поэтому для концептуалиста является весьма естественным остановиться именно на рамической диахотомной схеме, правильность и простота строения которой дает уже не онтологическую, а логическую проблему.

Интересно, что у Рамуса *ars inveniendi*, даже в области естественных наук, носит чисто схоластический характер. Основным методом все-



гда является *дедукция*. Он приглашает сперва изучать общее — небо, затем частное — метеоры, сперва животных, затем человека.

Но позже, поиски естественно-научных методов увенчиваются учением об опытной индукции Фрэнсиса Бэкона и переходом от жившего методами прошлого и ищущего методов будущего гуманитарного периода, к периоду естественно-научному.

Рамус выступает не только против Аристотеля, но и против Евклида. Он не ограничивается одной критикой, он старается дать образец *исправленных* “Начал”.

“Если бы, говорит Рамус, Евклид был бы настолько логиком, насколько был математиком, то на вопрос Птолемея: “Не существует ли к математической философии более короткого пути, чем тот, который дают “Начала”, я думаю, никогда не ответил бы, что нет такого царственного пути.

Ибо царственный путь может быть не только более кратким, более *плановым* (*planior*) и более широким (*amplior*), но при этом, необходимым логический аппарат, легкий для познания и трудный для осуществления. Путь можно исправить, но для этого необходим труд больший, чем это кажется”.

Рамус вполне сознает, как трудно вогнать геометрию в узкие схоластические рамки аристотеле-рамической логики. Задача им поставленная много трудней, чем задачи рационалиста Арно, эмпирика Бертрана или логистов Саньо и д’Овидио.

Геометрия Рамуса представляет не что иное, как комментарии к “Началам” Евклида, не соединенные с переводом последних, как, например, комментарии его современника Клавия²⁰, а изданные отдельно от “Начал”.

Конечно, для Рамуса самым важным в геометрии являются определения, а за ними [логический] план геометрии.

В чем главный недостаток Евклида?

В том, что он идет от частного к общему вместо того, чтобы идти от общего к частному. С точки зрения Рамуса и его современников именно в *определении* происходит наиболее важный акт.

Всякий вид представляется носителем некоторого комплекса качеств, из которых каждое относит его к определенному классу. Всякому индивидууму присущи наряду с этими качествами еще другие — несущественные, изменяющиеся при переходе от одного индивидуума к другому.

Математический объект дается *готовым* исследователю, последний должен только произвести логический анализ так, как ныне химик производит анализ воды. Он должен вскрыть *существенные* свойства объекта, позволяющие его отнести к определенному классу. Это для Рамуса — важная и трудная проблема. Этой проблемы *теперь* почти нет. Мы верим в то, что математические объекты мы сами строили, что судьба определения

вполне от нас зависит и со стройностью наших логических построений уживается хаос определений. Рамус возражает против евклидова определения параллельных как прямых, находящихся в одной плоскости и не пересылающихся при своем продолжении.

Мы скажем: “Да не все ли равно, как определять параллельные; лишь бы все, что затем следует [из определения], было бы правильно выведено”.

“Нет!”, возразил бы Рамус, “математика имеет целью, как всякая другая наука, исследование свойств вещей, которые некоторым образом уже даны до начала математического исследования”.

Концептуализм перевел идеи из внешнего мира в наш дух, но не перестал на них смотреть, как на неподвижные и неизменные сущности, изначально обретающиеся в нем, но не органически из него развивающиеся.

Последний взгляд был достоинством отдаленного будущего.

§ 4. Рамус о геометрических определениях.

Обратимся к геометрии Рамуса. Возьмем определение круга. Здесь и в настоящее время существует некоторая словесная путаница: “круг” употребляется и в смысле *кривой*, и в смысле *площади*, ограниченной этой кривой согласно 15-му определению I кн. “Начал”²¹: “Круг есть плоская фигура, содержащаяся одной линией, называемой окружностью, к которой все прямые, исходящие от одной из точек, внутри сей фигуры лежащих, взаимно равны”.

Для кривой, ограничивающей круг, согласно этому переводу, остается термин: “окружность”. Но тогда следует говорить в 3-й книге о касании и пересечении в двух точках не кругов, а окружностей. Вообще вся третья книга должна быть отнесена к окружности. Рамус дает [следующее] определение окружности: “Окружность — та кривая, которая отстоит равно от середины заключаемого в ней пространства”.

Мы не вполне выразим то, что хочет Рамус, если скажем, что окружность — это кривая, равноотстоящая всеми своими точками от некоторой точки ее плоскости. Это определение *per genus et differentiam*.²²

Правильней его выразить так: окружность принадлежит к классу центральных кривых (которые имеют *medium*, или центр), но при этом это такая кривая, что расстояния от центра [до всех точек кривой] равны.

И Рамус говорит не только о центре круга, он говорит вообще о центрах.

Каждый из нас отнесет к одному классу и центр квадрата, и центр круга.

Все это центры — симметрии, о которых мы получаем идею много раньше, чем в состоянии облечь ее в научное определение.

Евклид, если и имел эту идею, то все-таки выключил ее из своих “Начал”, так как она ему оказалась не нужной для выводимой цепи положений. Рамус же не мог обойти этот обобщенный центр при присущем тому времени стремлении к построению иерархий объемлющих друг друга классов.

Определение центра у него [следующее]:

Centrum est punctum in figura medium.

Центр [есть] середина фигуры.

Т.е. им предполагается, что то, что нужно считать серединой (в тех, конечно, фигурах, где эта середина есть) каждый знает, и снабжает эту точку названием: центр.

Радиус [по Рамусу, есть] не только у круга.

Радиус [есть] у всякой фигуры, имеющей центр. Это – прямая, идущая от центра к периметру (отсюда выводится, что центр [находится] в пересечении диаметров).

Угол понимается Рамусом не в евклидовом смысле: как наклонения двух линий, которые встречаются в плоскости и имеют различные направления: как и у Евклида, [у Рамуса] (в противоположность современному взгляду), в понятии угла заключается и смешанный угол (напр. угол сегмента, заключенный между дугой и прямой, согласно определению 6. III книги “Начал”). Но выше вида: угол “стоит” род: *lineatum* – соединение линий.

Angulus est lineatum in communi sectione terminorum.

Угол есть *линеатум* в общем сечении членов.

Параллелизм прямых подводится под общее понятие параллелизма линий (как прямых, так и кривых). Параллельными являются не только прямые, но, например, два концентричных круга (или, вернее, окружности).

Под род параллельных линий подводится два вида: параллельные кривые и параллельные прямые. Определять следует не “прямые параллельные”, а вообще параллельные линии, из какого класса “прямые параллельные” выделяются благодаря признаку *прямызны*. Но, как основательно замечает Рамус, та идея о параллелизме, которую мы находим в себе, менее всего характеризуется *несхождением* прямых. Кривые не параллельные могут не сходиться, какова, например, конхоида или гипербола с их асимптотами.

Можно было бы добавить к тому, что говорит Рамус, и обратное: что параллельные могут сходиться, если, впрочем, взять такие кривые, которые самому Рамусу вероятно не приходили в голову (см. черт. 1). Характерным признаком параллелизма является *рав-*



Черт. 1.

ноудаленность друг от друга. Lineae parallelae sunt quae ubique distant aequaliter.^{23,24}

При этом свойство, что две линии, параллельные каждой третьей, параллельны между собой, распространяется и на случай кривых параллельных.

[У Рамуса] определяется не *высота треугольника* и затем *высота призмы* и т.д., а *высота вообще*.

Altitudo est perpendicularis a vertice figurae ad basin.

Высота – перпендикуляр от вершины фигуры до основания.

По Евклиду²⁵:

“Когда прямая, поставленная на другую прямую, делает смежные углы взаимно равными, то каждый из равных углов называется прямым; а поставленная прямая называется перпендикулярной или отвесной к той, на которую поставлена”.

По Рамусу:

“Прямые взаимно-перпендикулярны, если одна, падая на другую, равномерно между ними лежит (aequaliter interjacet)”.

Рамус не может определить перпендикулярность с помощью смежных углов, ибо, согласно его плану, общие свойства линий следует излагать раньше, чем свойства угла – одного из видов lineatum.

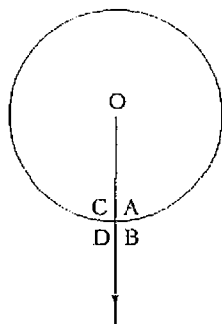
Как следует понимать aequaliter?

Конечно, не в смысле равенства смежных углов. Это значит – по одну сторону от падающей кривой (или прямой) то же, что по другую. Это безусловно верно для двух взаимно-перпендикулярных пересекающихся прямых. Радиус же круга и окружность удовлетворяют, так сказать, только наполовину этому требованию. Часть А такая же как С, но не такая же как В, так что отношение перпендикулярности [по Рамусу] является несимметричным: радиус перпендикулярен к окружности, но окружность не перпендикулярна к радиусу.

Для того, чтобы подвести подобие окружностей под общее определение подобия, которое берется из евклидова определения *прямолинейных подобных фигур* (см. I опред. 6 книги “Начал” – *Figurae similes sunt figurae aequiangulae et proportionalibus cruribus aequarum angulorum*).²⁶ Рамус мыслит круг как *многоугольник с бесконечным числом сторон*.

Circuli autem et Sphaerae similes intelliguntur ex illo polygone infinitorum laterum ut suo loco de singulis intelligitur²⁷.

То, что у Рамуса является следствием совершенно определенных взглядов на сущность определения, в комментариях Клавия²⁸ выступает в форме, может быть, и не вполне ясной тенденции.



Черт. 2.

Он не вооружается против евклидовых *генетических* определений, но выставляет в комментариях другие, не евклидова типа определения.

Евклид дает для шара, определение совсем не то, которое соответствует приведенному выше евклидову определению круга.

Такое определение дает Клавий в своих комментариях в дополнение к евклидову:

Sphaera est figura solida una superficie comprehensa ad quam ab uno puncto eo rum quae intra figuram sunt posita cadentes rectae lineae inter se sunt aequales.

“Шар — телесная фигура, заключающаяся в поверхности, от которой идут к некоторой точке внутри фигуры прямые, все равные между собой.”

Не трудно видеть, отчего Евклид не мог дать это определение, а дал другое:

14 опред. XI книги “Начал”:

“Шар есть тело, производимое через обращение полукружия на неподвижном его поперечнике, пока оно опять восставится там, откуда началось его обращение”.

В самом деле, Евклиду при определении Клавия, пришлось бы, как и к приведенному выше определению круга приставить постулат о возможности описания данным радиусом шара²⁹.

Но такое *описание* производилось бы не движением прямой, а бесконечной совокупностью движений. Нет никакого сомнения, что Евклидом признавался один способ образования геометрических фигур на плоскости — с помощью черчения их циркулем и линейкой, сводящегося к образованию кривой, движущейся точкой, и площади, движущейся прямой. В стереометрии это представление получило естественное продолжение в смысле образования тел движущейся площадью.

Средневековое мышление положило свой отпечаток на понятие о геометрическом существовании, которое подверглось незаметной для самих математиков метаморфозе.

В то время, как существование геометрических объектов у Евклида определяется возможностью их построения, у математиков XVI и XVII веков, это существование признавалось в смысле существования проектировавшихся во вселенную универсалий средневековых реалистов³⁰.

§ 5. Порядок геометрии по Рамусу.

В “Началах” Евклида все аксиомы стянуты к началу I книги.

Вспомним эпоху Евклида, вспомним, что “Начала” Евклида являлись своего рода крепостью, которая должна была быть готова выдержать тяжелые орудия софистов.

Не трудно уяснить себе стратегические приемы софистов.

Чтобы победить противника, следовало прежде всего вырвать от него признания нескольких общепризнанных истин³¹.

Их должно было быть немного и с ними следовало, как можно скорее покончить.

Без сомнения, для софиста было в высокой степени выгодно делать это не *в начале*, а потом, при ходе дальнейшего изложения или спора требовать от собеседника или противника признания не высказанных раньше аксиом.

Вне сомнения, что чем позиция его противника становилась опасней и спор казался ближе к окончанию для противника неблагоприятному, тем менее последний становился чувствительнее к этим общепризнанным истинам.

Вся евклидова логика, как и логика Сократа и Платона вышла из софистической логики совершенно так же, как логика Рамуса из схоластической.

Та схема, в которую облеклись начала геометрии это схема — софистических споров.

Определения, в противоположность аксиомам оказываются распределенными между различными книгами.

Нужные для данной книги определения помещаются в начале ее.

Собственно говоря, и определение тоже следовало помещать в начале книги. Вероятно, так это и делалось бы, если бы “Начала” были меньше. Но в таком большом труде, как “Начала” Евклида это было бы уже невозможно, так как читатель не был бы в состоянии удержать в своей памяти всю ту массу необходимых определений, которые выставляет Евклид.

Такой порядок аксиом и определений в настоящее время является недопустимым. Система определений должна постепенно развертываться с цепью теорем.

Если мы определяем A совокупностью признаков: $a, b, c, \dots$, то мы должны предварительно доказать совместность этих признаков $a, b, c, \dots$, что возможно сделать только протянув уже часть цепи друг за другом следующих положений.

Необходимость *оправдания определений* некоторыми начала признаваться еще в XVII веке.

Борелли, определяя параллельные прямые как равноотстоящие, доказывает *предварительно*, что все точки, равноотстоящие от данной прямой лежат тоже на прямой.

Но проблема обоснования геометрических истин, вплоть до второй половины XIX века, сводилась к выводу положений из системы очевидных категорических суждений.

Если к категорическим суждениям присоединить условные, то дело изменится.

За аксиому можно было бы признать положение: “Если имеет место А, то также имеет место и В”.

Но наличие А может быть не очевидной, и приходится доказывать ее из других уже очевидных категорических суждений. В таком случае аксиомы уже рассеиваются по всей сети доказываемых положений.

Это рассеивание будет еще большим, если идти дальше и признать своей целью вывод положений не из очевидных истин, а только из простейших положений – постулатов, не предъявляя к последним требований очевидности.

Рамус тоже вооружается против евклидова порядка, но, исходя из совершенно иных, нам совершенно чуждых идей.

“Природа, говорит Рамус, не создает лес таким образом, что производит сразу для всех деревьев корни, а затем к ним стволы; архитектор не будет строить город таким образом, что для всех домов сперва воздвигнет фундаменты, а затем займется самими постройками.

...Евклид должен определить треугольник там, где он начинает теорию треугольников, четырехугольник там, где начинает говорить о четырехугольнике”.

Рамус представляет себе сперва родословное дерево соподчиненных родов и видов. Каждый член этого родословного дерева получает определение. Это, так сказать, ствол дерева с его ветвями.

Теоремы – это листва, его украшающая. Это не столько *оправдания* определений (эта эпоха более далека от такой *критической* точки зрения), как просто полезные или любопытные сведения. Вследствие этого и геометрия Рамуса получает внешнюю физиономию практической геометрии, сближающей ее с геометрией Дюрера³².

“Для Рамуса, говорит Клейн, практические интересы стоят на первом плане, лишь на втором стоят у него *логические дедукции*, не как самоцель, а лишь как средство для нахождения новых практически полезных предметов, которые могут быть получены непосредственно из наблюдений”³³.

Но Клейн забывает сказать главное: еще выше практических интересов у Рамуса стоят *схоластические* интересы, построение *delineatio*³⁴ геометрии, родословного дерева геометрических классов с удовлетворяющими его логике определениями.

О раמיствах – последователях Рамуса мы еще будем говорить. У них идеи Рамуса получают дальнейшее развитие. Что же касается до геометров – предшественников, у которых те же схоластические идеи обнаруживались в менее развитой форме, то ограничимся упоминанием более близкого к Рамусу (XIII в.) Иордана Неморарнуса и более отдаленного Псела (XII в.). Последний в своем *Quadrivium*, можно сказать, дает ствол и очень мало веток, почти без листьев.

Это все – определения и определения; но в этих определениях Вы не чувствуете стремления связать их в одну стройную систему, установить основной род, определяющий вид с помощью специфического признака. Мы имеем там по несколько определений к одной вещи.

Punctum est cuius nulla pars existit. Linea cuius partes sunt puncta. Superficies cuius partes sunt lineae. Corpus cuius partes sunt superficies: vel aliter: Punctum est momentum quod non fluit, linea punctum fluens... iterum punctum est quod omni dimensione vacat и т.д.³⁵

Определения же Неморариуса³⁶ совершенно другого характера – он уже ясно указывает на стремление подняться к высшим родам, не затрагиваемым Евклидом.

Таково определение *continuitas* (непрерывности или, вернее, непрерывного геометрического образа), объемлющего собой виды линий, поверхности, тела...

“Continuitas est indiscrecio terminorum cum terminandi potentia”.

Непрерывность – неразличимость границ с возможностью ограничения.

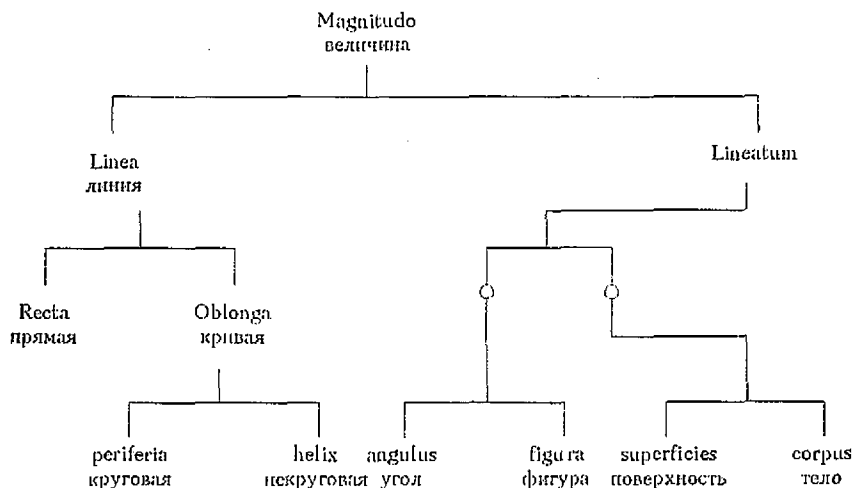
Angulus est continuatum in continuitatis termine convencium.

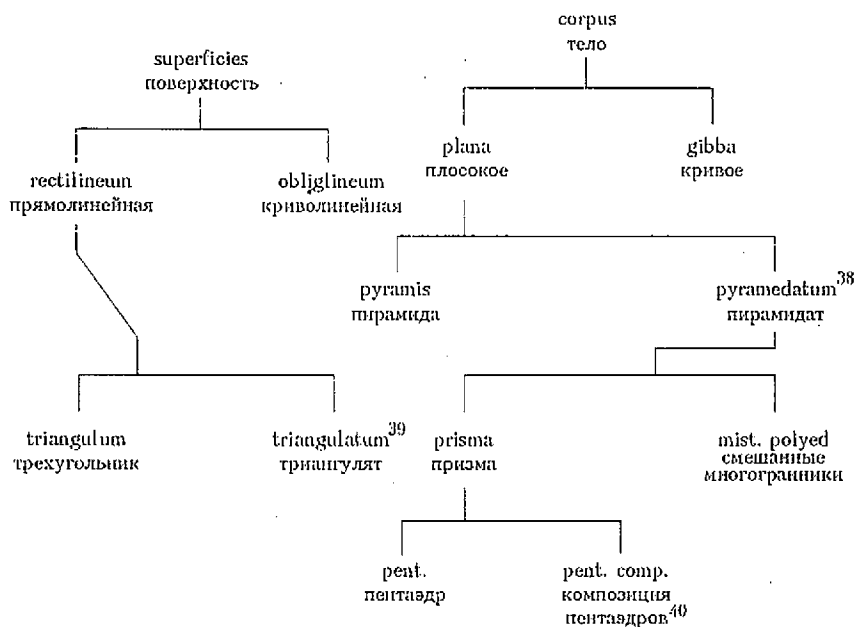
Угол – схождение непрерывностей в непрерывной границе³⁷.

§ 6. *Delineatio geometrii Ramusa.*

Вот родословная классов, которую можно извлечь из геометрии Рамуса.

Соответственно этой *delineatio* порядок геометрии Рамуса такой: сперва говорится о наиболее общем, о том, что такое величина (*magnitudo*), о границах ее, о наложимости, как условию равенства. Затем о линиях вообще, об их перпендикулярности и параллельности, отнюдь не только пря-





мых. От *linea* следует перейти к *lineatum* и, прежде всего, к углам: исследовать условия равенства углов и различные виды углов.

За углом же следует фигура вообще, но не частный ее тип, образованный тремя прямыми. Говорится о центре и диаметре вообще фигур или, лучше сказать, о фигурах, имеющих центр и диаметры. На нашем языке по этому плану приходится говорить прежде о симметрии вообще, а затем уже перейти к изучению треугольников, что и делается в некоторых современных учебниках⁴¹. Затем идут подобные и изопериметрические фигуры.

Термин треугольник, "*triangulus*", употребляется только в евклидовском смысле площади, ограниченной тремя прямыми. Треугольник поэтому принадлежит к роду *planum*, а не *lineatum*⁴² и, согласно *delineatio* Рамуса, о нем приходится говорить значительно позже.

Но теоремы 24 и 25 I книги евклидовых "Начал"⁴³:

"Ежели два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам, каждую каждой; а угол одного больше угла другого, а именно, кон содержатся теми равными прямыми: то и основание одного будет больше основания другого".

"Ежели два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам, каждую каждой; а основание одного, больше основания другого, то и угол одного, будет больше угла другого, а именно, кон содержатся теми равными прямыми". Рамус помещает в начале геометрии в форме свободной от понятия треугольника.

Si angulus angulo aequicrurus est maior basi est aequalis et si est aequalis aequatur basi. Если основания двух равнобоčných углов равны, то углы равны и обратно, если равнобочные углы равны, то равны и их основания.

Si angulus angulo aequicrurus est maior basi est maior et si maior est maior basi. Если для двух равнобоčných углов основание первого угла больше основания второго, то и первый угол больше второго и обратно.

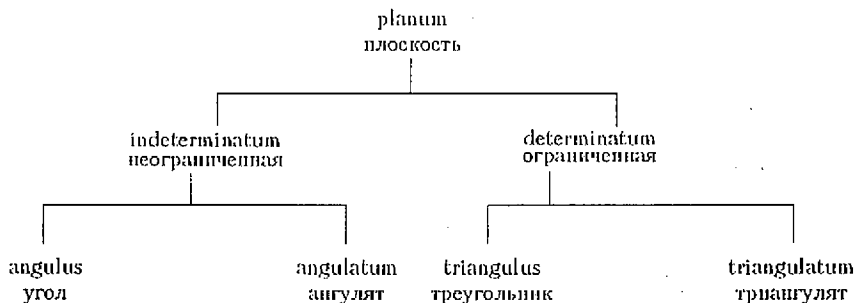
Точно таким же образом и теорема 21:

“Ежели на одной из сторон треугольника, от концов ее, будут составлены внутри его прямые, то составленные прямые будут меньше прочих двух сторон треугольника, кои больший угол содержать будет” облекает в аналогичную форму:

Si aequatur basi est minor interioribus cruribus est maior¹⁴.

Это изменение в I книге “Начал” Евклида имеет длинную историю, тянущуюся через Арно¹⁵ до Остроградского¹⁶. Треугольник – ограниченная плоскость, поэтому следует говорить сперва о площади неограниченной, плоскости вообще, а раньше еще и о поверхности вообще.

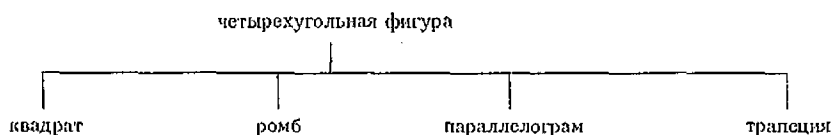
Может быть, Рамус и имел это в мысли, излагая за общими свойствами поверхностей вообще и плоскости, сечение угла на две равные части, свойство пар перпендикулярных прямых (деление плоскости на 2 и 4 равные части), свойства параллельных. Следующие главы (по Рамусу --



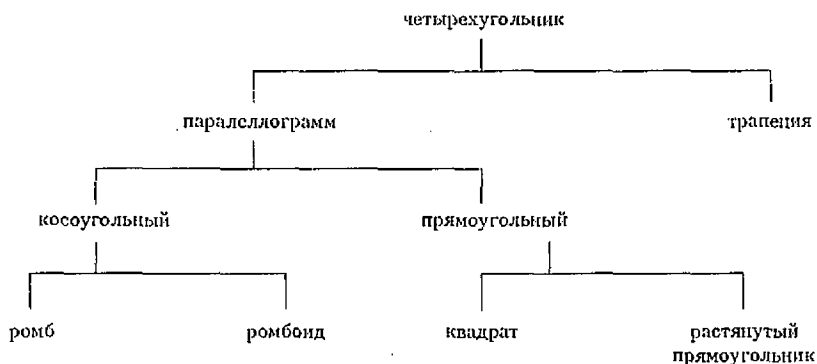
книги) о треугольниках и их сравнении (вообще), о различных родах треугольников, о геодезии прямоугольных треугольников, о подобии прямоугольных треугольников, о triangulatum, параллелограмме, прямоугольнике, квадрате и растянутом прямоугольнике (oblongo).

Ромб – четырехугольник, в котором все стороны равны, но углы не прямые. Параллелограмм – четырехугольник, в котором равны противоположные стороны и углы, но при этом – не ромб и не прямоугольник. Все прочие четырехугольные фигуры называются у Евклида трапециями.

По Евклиду:



По Рамусу же:



Некоторое несогласие с планом представляет помещение следующей книгой *De lineis in circulo*¹⁷, что следовало бы отнести к изучению линий, а не ограниченной плоскости (*planum*).

То же следует сказать и о следующих главах: *De circuli segmentis, de descriptione circuli et trianguli, de adscriptione trianguli*¹⁸. Согласно схеме, дальше идут главы о поверхностях и телах вообще, о пирамидах вообще, о *rugamidatum*, куда входит и призма, которая и изучается сперва в общем виде, а затем в виде параллелепипеда, в частности куба. Кривые поверхности сперва изучаются вообще — затем идут сфера, конус, цилиндр (*varia*).

Коническую и цилиндрическую поверхности Рамус отличает от конуса и цилиндра. *Conus est quod a conico et basi comprehenditur Cylindrus est quod a cilindrico et oppositis basibus comprehenditur*¹⁹.

Определение *varium* — это определение линейчатой поверхности²⁰.

*Varium est gibbum cuius basis est peripheria, iactus recta a termino vertici in terminum basibus*²¹.

Если *peripheria* употреблено в узком смысле окружности, то мы имеем только один вид линейчатых поверхностей.

Вне сомнения род *gibbum* и в том случае, если под *peripheria* разумеется вообще кривая и под *varium* — все линейчатые поверхности, является исполними, ибо некуда поместить например, эллипсоид.

У Евклида конус и цилиндр, для которых даны *генетические* определения (вращением треугольника и прямоугольника) не подводятся под один класс поверхностей.

У Рамуса же определение цилиндра *per genus (variūm) et differentiam latera*³² (т.е. прямолинейно-образующие направлены от точек верхнего основания к нижнему – все под одним и тем же углом).

Конус – тоже *variūm*, но в котором они направлены от вершины к точкам основания³³.

§ 7. *Delineatio* других рамистов.

Рамическая классификация получает дальнейшее развитие у учеников Рамуса. В рамических учебниках она выступает как главная и существенная части геометрии. Альстед³⁴ (учитель Амоса Коменского) развертывает перед учеником, *delineatio*, напоминающее диалектическое развитие идеи у Гегеля.

Геометрия существует специальная и общая, и последняя трактует типы и принципы, или атрибуты вещей.

Типами являются линии и объекты, образованные с помощью линий (*lineata*).

Атрибуты же или абсолютны, или относительны (т.е. определяют только относительно некоторых других объектов).

Lineatum – или угол, или фигура (образование из углов).

Фигура может быть образом (*species*), или “совокупностью свойств” (например, треугольник можно рассматривать как площадь, ограниченную тремя прямыми, или как совокупность трех прямых, не пересекающихся в одной точке). Фигуры – *species*, могут быть или телом, или поверхностью и т.д. Как и у Рамуса, *Delineatio* Альстеда³⁵ отвечает выставляемым в “*Speculum*” требованиям:

1) Во всякой науке только то должно быть помещаемо, что имеет отношение к ее цели.

(Этим определяется характер признаков, на основании коих вид выделяется из рода).

2) Содержание должно быть расположено по степени общности, начиная с самого общего и кончая наиболее частным (чем постулируется направление *delineatio*).

3) Отдельно объясняемые части должны быть чем либо связаны (чем постулируется закон образования различных ветвей *delineatio*, логика построения системы).

Еще дальше идеи Рамуса эволюционируют в “*Quaestiones*” Riffa³⁶.

Дихотомная схема проводится и для *Data specierum definitionum*³⁷ иначе говоря, для геометрических объектов и для *Quaesita datarum magnitudinum adjuncte sive habitudines*³⁸, для их свойств.

Свойства могут быть общие и специальные, относящиеся к геометрическому объекту вообще и относящиеся к специальным объектам. Затем, одни – это те, которые получаются через рассмотрение геометри-

ческих объектов *в самих себе*, независимо от других, другие – через сравнение объектов между собой. Конечно, и первые и вторые определяют некоторое взаимоотношение исследуемого объекта А с другими а, b, с... Но в первом случае а, b, с ... лежат вне А, никаким образом с ним не связаны, во втором же случае они все в А, они граничат А или производят А.

Первый род взаимоотношения дает учение о границах (terminatio), каковыми являются точки для отрезка, кривая для площади, поверхность для тела и т.д. Второй род – учение о том, что в современной терминологии можно назвать производителями и носителями, таковы точки, производящие прямую, прямые плоскости и т.д.

Внешние взаимоотношения могут быть или *прерывными* (Discretae) или *непрерывными* (Continuae). В первом случае сравниваемые объекты А, В распадаются на дискретное число частей $A - a_1, a_2, a_3, \dots$ $B - b_1, b_2, b_3, \dots$. Взаимоотношение имеет место между a_j, b_k . Оно может быть, между их *положениями* или между их *размерами*. Первое дает симметрию (Symmetria), второе – отношение (Ratio).

Для специальных свойств опять имеется два случая, сравнение внешних друг другу объектов и сравнение объектов, некоторым образом связанных и образующих один объект.

Первый случай дает Lineamentum Eutymetria³⁹, второй – Lineamentum.

Под первый случай подходит перпендикулярность и параллельность, которые, конечно, понимаются не в узком евклидовом смысле перпендикулярности и параллельности прямых, а в широком, рамическом смысле.

Lineamentum может быть углом или фигурой, в первом случае объект не вполне определяется, во втором он определен вполне. Собственно говоря, здесь следует употребить иные термины вместо терминов “угол” и “фигура”. Речь идет не о геометрическом объекте, а о свойстве. Других терминов, как режущих ухо и несколько смешных – “угольность” и “фигурность” я не нахожу. Первое свойство присуще двум пересекающимся линиям, параболе... Второе кругу, эллипсу...

“Фигурность” можно рассматривать общую и специальную.

Первую – саму в себе, и вторую – в взаимоотношении с другими внешними объектами.

Фигурность сама в себе может рассматриваться с трех точек зрения:

1) расположении элементов (ordinatio)

пример:

взаимная параллельность противоположных сторон параллелограмма;

2) свойства этих элементов (primatus)

пример:

свойство октаэдра обладать треугольными гранями;

3) относительных размеров элементов (ratio)

пример:

равенство углов равнобедренного треугольника.

Специальными *lineamentum* являются поверхностность и телесность и т.д.

Как я уже отметил, такое построение ума нам чуждо, но оно родственно диалектической логике Гегеля⁶⁰.

В естествознании мы обычно желаем видеть только одну сторону вселенной, только *каузальные* связи между явлениями. Мы не можем понять и не желаем признать, что параллельно каузальным связям идут *телеологические*, которые должны получить то же право гражданства, что и первые.

В умозрительных науках мы признаем только дедукцию, только логический вывод одного положения из другого. Но существует особая диалектическая логика, устанавливающая между понятиями особые связи, позволяющие развернуть систему этих понятий, где каждое понятие получает свое определенное место, как это имеет место в схемах Рамуса и Гегеля, основанных на совершенно различных принципах.

§ 8. Арно и Рамус.

То, что если не сам Рамус, то его современники, мыслившие так, как он сам, оставили след в математической мысли, можно заключить из того, что никто из нас не будет пользоваться определениями вроде определения 4-го III книги "Начал":

"В круге прямые называются равноотстоящими от центра, когда от центра проведенные перпендикулярные к ним суть равны", а будет сперва определять расстояние точки от прямой вообще.

Не будем говорить:

"Отрезок (сегмент) круга есть тот, который содержится [между] прямою и окружностью круга", а будет определять сегмент вообще и т.д. Схема Рамуса была забыта, но критика порядка положений "Начал", или, вернее, осуждение бессистемности последних не было забыто.

За Рамусом через одно столетие последовал Арно⁶¹. Это уже не комментатор Евклида. Он не намечает порядок теоремам, перечисляя их вместе со своими комментариями, он старается дать ряд положений с обосновывающими их доказательствами в порядке, определяемом некоторыми общими принципами.

Время Арно проникнуто уже другими настроениями.

Это время расцвета рационализма.

Это время, когда центр тяжести был перенесен с определений на аксиомы, на те очевидные истины, которые в глазах рационалистов суть своего рода откровения свыше, открывающиеся нашему уму непосредственно, как только рассеется окружающий его туман чувственности.

Эти сто лет оказались вполне достаточны, чтобы привести к сознанию, что логики классов недостаточно, что необходима еще логика отношений, что иерархию истины следует строить, основываясь не на соподчинении вида классу, а на возрастающем осложнении отношений.

Нельзя сказать, чтобы Арию строго держался этой точки зрения, иногда он стоит еще на точке зрения Рамуса. Евклид, по мнению Арио, не идет от более простого к более сложному, ибо в первых четырех книгах он излагает ряд теорем на плоскости, доходит уже в первой книге до *magisterium matheseos* (Повелителя математических наук (лат., метаф.)) — теоремы Пифагора.

В пятой книге он вдруг возвращается к теории пропорции, относящейся ко *всем величинам*.

Так что, он идет от частного к общему, вместо того, чтобы идти от общего к частному.

От более сложного — фигур, например, треугольников — он идет к более простому — параллельности и перпендикулярности двух прямых, вместо того, чтобы от более простого — изучения взаимоотношений двух прямых — идти к более сложному — к фигурам, ограниченным тремя прямыми. В 6-й книге Евклид возвращается к плоским кривым, но не для того, чтобы покончить с этими вещами, а чтобы в 7, 8, 9 книгах заняться арифметикой.

Но принцип движения от простого к более сложному весьма часто находится в антагонизме с принципом движения от общего к частному.

С точки зрения рационалистов XVII века, кривая всегда есть нечто более сложное, чем прямая, ибо кривая разлагается на бесконечное число прямолинейных элементов. По плану Арио, изучение кривой вообще должно идти во всяком случае, после изучения прямой.

Во взглядах на кривую в особенности ярко выступает разница между математическими умами этих двух эпох. Для Рамуса линия — это прежде всего *класс*, объемлющий прямые и не прямые (кривые); для Арио же линия это прежде всего *совокупность* прямых, находящихся в некоторых взаимоотношениях⁶².

Кривая — носитель точек, раньше не смешивалась с совокупностью производителей⁶³ — с пунктуалом; в глазах же приверженцев метода неделимых, именно, имеет место это смешение.

Этот взгляд все резче и резче выступает, пока метафизика неделимых, наконец, не приводится в лабиринт несурзностей.

У де Лакайля⁶⁴ прямая определяется так:

“Конечная прямая линия — это ряд бесконечного числа бесконечно малых прямых, которые в отдельности прямо положены без всякого сгибания, без наклонения друг к другу, кривая — ряд бесконечно малых, имеющих различное положение”.

Это очень характерное определение.

Это не рамическое определение *per genus et differentiam*.

Не думайте, что первая часть этого определения – грубый *circulus vitiosus*⁶⁵, в котором прямая определяется с помощью прямой. Бесконечно малый прямолинейный отрезок здесь – некоторая концепция разума, но не чувственный элемент, из которого складывается как прямая, так и кривая.

Здесь определение обещает вскрыть сущность определяемого объекта, его внутреннюю структуру: прямая вполне определяется двумя точками, она кратчайшая [линия] между двумя точками и т.д. – это все свойства, уже вытекающие из ее структуры и ни в коем случае не могущие служить определением прямой.

Предпослав учение о величинах вообще, Арно прежде всего рассматривает прямые, а вовсе не линии вообще.

Параллелизм линий вообще для него *не простое* понятие, а понятие *разложимое*. Простым является параллелизм прямых, а параллелизм кривых разлагается на бесконечное число параллелизмов между прямолинейными бесконечно малыми элементами, на которых разлагается кривая.

Как и у Рамуса угол фигурирует в двух видах: как *lineatum* и *planum*. Угол – *lineatum*, помещается раньше угла *planum*, потому что в первом случае, мы имеем более простое взаимоотношение двух прямых, между тем как во втором случае – взаимоотношение двух прямых и плоскости.

Но в противоположность Рамусу, термин “угол” Арно относит не к углу *lineatum*, а к углу *planum*.

Это определение очень типично для той эпохи и резко отличается от рамических определений. Это – описание характерных свойств, которые чистый разум должен с помощью своего рода рефлексии узреть: “Прямолинейный угол, говорит Арно, это площадь, заключенная между двумя прямыми, сходящимися в одной точке с той стороны, куда они сближаются, неограниченные и неопределенные (*indefinie et indeterminées*) по одному из измерений, а, именно, тому, которое отвечает длине прямых его обнимающих, и определенный по другому [измерению] с помощью пропорциональных частей круга, центр которого точка, где сходятся эти прямые”. Это определение, вероятно, ведет свое происхождение от взглядов Рамуса, чуждых “Началам” Евклида и, в свою очередь, из него происходит определение угла Бертрана Женевского, вошедшее во многие учебники лежандровского типа⁶⁶.

Смешанные углы касания и угол касания, так беспокоивший математиков XVI века, о котором мы будем говорить ниже, исчезли в XVII веке.

Согласно Арно, угол представляет более простое взаимоотношение элементов, чем треугольник, где мы имеем не два, а три элемента, поэтому и изучение углов должно вестись раньше изучения треугольников.

Углы изучаются с помощью дуг и хорд (или синусов).

Сейчас же за определением угла Арно устанавливает понятие основания угла, т.е. прямой, соединяющей две точки на сторонах угла (так-

же, как Рамус, но с той разницей, что Рамус говорит об основании угла вообще, а Арно ограничивается простейшим прямолинейным углом):

Истинной мерой угла является *дуга* круга, но ввиду невозможности измерения кривой приходится измерять углы синусами и хордами.

Арно находит необходимым говорить о всех трех родах измерения углов. За теоремой о прямой пропорциональности углов и соответствующих дуге следует теорема о хордах, отвечающих равным и неравным углам.

Арно приходится (как Рамусу), не называя это своим настоящим именем, доказывать 2 случая контрэнгтности треугольников.

“Два неравносторонних угла равны, если соответствующие стороны и основания равны”. Два равных и равносторонних угла имеют равные основания”.

От этих несовершенных методов следует перейти к измерению дугами кругов, но с центрами уже не в вершинах, т.е. рассмотреть главу о вписанных и описанных углах.

От изучения углов, т.е. площадей, ограниченных пересекающимися прямыми, Арно переходит к изучению *параллельных* пространств или полос, образованных не пересекающимися прямыми⁶⁷ (*espaces paralleles*) которые представляются ему, как тип более сложного взаимоотношения, чем то, которое дается плоскостью и двумя пересекающимися прямыми, (ибо вводится ограничение, которого раньше не было).

Как при изучении углов рассматривались их основания, так при изучении параллельных полос должны рассматриваться отрезки прямых между ними.

Как синусу, так и хорде отвечает *расстояние между параллельными*.

Основаниям двух углов отвечают прямые равнонаклоненные к сторонам двух полос.

Основным положением теории пропорциональных линий является следующее:

“Когда две прямые равнонаклонены в двух параллельных полосах, они относятся между собой, как перпендикуляры этих полос (т.е. ширины последних) и как их удаления от перпендикуляров”.

Отметим, что в дальнейшем изложении этой главы у Арно можно найти доказательство основной теоремы теории пропорциональных линий (об отрезках отсекаемых параллельными на двух пересекающихся прямых), которой не существовало и у Евклида, и которой нет у Лежандра и которое только начиная с Лакруа⁶⁸ входит в геометрические учебники.

За теорией пропорциональных линий по Арно, следует перейти к тому, что *образовано* во всей определенности с помощью прямых, т.е. к прямолинейным фигурам.

Дальнейший порядок очевиден: сперва следует рассматривать фигуры *сами по себе*, затем — в сравнении с другими.

Следовало бы ожидать, что за треугольниками последуют четырехугольники и, наконец, многоугольники.

Ибо первый проще второго, второй третьего и т.д., и многоугольник можно рассматривать состоящим из треугольников.

Но здесь выступает другой принцип — от общего к частному — и Арно сперва говорит о фигурах вообще, сообщая некоторые сведения о вписанных и описанных правильных многоугольниках.

Только в 13-й книге у Арно говорится о конгруэнции треугольников, и, конечно, все оказывается уже готовым, и только приходится полученный в предшествующих книгах материал перекладывать на язык треугольников.

Арно доказывает теорему о том, что большему углу отвечает большая сторона, описывая окружность около треугольника и ссылаясь на то, что большей дуге отвечает большая хорда.

Интересно здесь отметить, что в XVIII веке, когда в изложении учебников в большей или меньшей мере сказывался порядок Арно (*ordo Agnioldianus*)⁶⁹, вместо обычного евклидова доказательства теоремы о сумме углов треугольника, проводилось доказательство того же, с помощью описанного круга и ссылкой на теорему о вписанных в круг углах.

В теории треугольников обнаруживается опять тенденция идти от общего к частному, например от треугольников общего типа к равнобедренным треугольникам.

Геометрия Арно заканчивается определением площадей и, таким образом, является не законченной, представляя только образец для построения полного курса геометрии, согласно проводимым в ней принципам.

Новый порядок требует от Арно признания за аксиому положения:

“Если две точки прямой равно отстоят от двух точек А и В, то то же относится и ко всем точкам [прямой]”.

Но этого мало. Одна эта аксиома не может заменить первого случая конгруэнтности треугольников, доказываемого наложением, которой Арно старается избегнуть⁷⁰.

Необходимо ввести все-таки наиболее простое положение о конгруэнтности, относящееся к треугольникам, настолько простое, чтобы, согласно требованиям Арно, минуя процесс наложения, можно было бы выдать его за положение *очевидное*.

Так как в первой книге по причинам, которые мы выше изложили, Арно находит недозволенным говорить о треугольниках, это положение формулируется так, что слово: “треугольник” совершенно избегается.

При этом, положение это даже не выдвинуто, как особая аксиома, и отмечено в *Avertissement*⁷¹.

“Это то же самое, говорит Арно, рассуждать о двух наклонных прямых, рассматривая их или проведенными из одной точки на одну прямую, или из двух различных на две различные прямые, при том условии, что расстояния до этих точек от прямых равны”, что сводится к утверждению равенства катетов прямоугольных треугольников, у которых другие катеты и гипотенузы равны.

§ 9. Теория параллельных от Рамуса до Саккери.

В отношении к евклидовой теории параллельных математиков XVI века можно также ясно усмотреть характерные черты.

Эта теория основывается на 35-ом определении I книги “Начал”.

“Параллельные прямые суть те, кои будут на той же плоскости, и продолженные в обе стороны беспредельно, нигде взаимно не встречаются” и на 11-й аксиоме²² той же книги: “Если на две прямые падает третья прямая, и делает углы внутренние и на ту же сторону, меньше двух прямых, то оные две прямые линии, продолженные беспредельно, взаимно встретятся на ту сторону, на которую углы меньше двух прямых”, представлявшейся не достаточно очевидной или даже не очевидной, и поэтому являющейся своего рода пятном на “Началах” Евклида.

Проблема о параллельных состояла в отыскании недостающих звеньев между 11-й аксиомой, которую следовало отнести к теоремам, и остающимися аксиомами “Начал”. Эта проблема, интересовавшая античных математиков, не была проблемой XVI века.

Для них проблема о параллельных сводилась к исправлению евклидова определения 35-го и к выводу из нового определения согласного с требованиями их логики, 11-ой аксиомы и теорем “Начал”, относящихся к параллельным.

При этом, в том, как понимать этот вывод, остается некоторая неопределенность.

Но в дальнейшем устанавливается такой смысл: кроме определения могут быть использованы только аксиомы более высокой степени очевидности чем 11-я аксиома Евклида и другие аксиомы, которыми она заменялась античными математиками. Определение параллельных прямых, как равноотносящих, вошло во все теории параллельных XVI и XVII веков.

Сперва занимались только одним определением. Опровергали евклидово определение с помощью различных аргументов, вроде конхонды и гиперболы, не параллельных своим асимптотам, но никогда их не пересекающих. Этот прием повторяется во всех комментариях XVII века.

Его же приводит и Клавий в своей критике прокловой теории параллельных. Интересно отметить, что анализ этого определения параллельных приводит Клавия к сознанию необходимости оправдания этого опре-

деления: “Следует убедиться, что линия, все точки которой равноудалены от прямой, тоже прямая”. В этом состоит первое положение теории параллельных Клавия.

Но при этом положении в собственном смысле, нет доказательства, а только пояснение, имеющее целью повысить степень очевидности этого почти очевидного положения. Все сводится к ссылке на то, что линия такая, что $AC = EF = DB = \dots$ должна обладать однородностью, равно лежать всеми точками. Делается попытка пустить в ход определение 4-й книги “Начал”, остающееся у самого Евклида без употребления⁷³.

Положение: “Если к прямой AB восстановить два перпендикуляра $AC = BD$, равные между собой и соединить концы их прямой CD , то перпендикуляр EF , опущенный из всякой точки этой прямой будет равен AC и BD ”. Ибо иначе построив прямую CGD с точками равноотстоящими от AB , в случае ее несовпадения с CD будем иметь две прямые CED и CGD заключающие пространство, что противостоит 12-й аксиоме I книги “Начал”⁷⁴.

Дальше идет теорема: “Если к прямой восстановить два перпендикуляра, равные между собой, и соединить концы их прямой, то эта прямая будет образовывать с общим перпендикуляром прямые углы”. У Дешаля⁷⁵ эта теорема, заимствованная у Клавия, формулируется так:

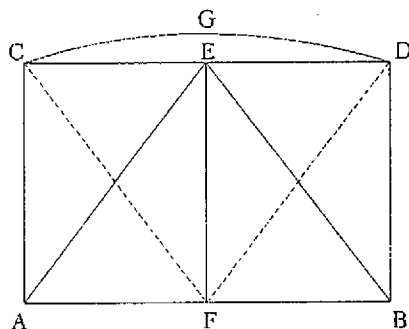
Перпендикуляр к одной из параллельных AB вместе с тем перпендикуляром и к другой CD .

Клавий в своем доказательстве устанавливает сперва (отложив от F FA и FB равные между собой и проведя AC и $BD \perp AB$) равенство треугол.

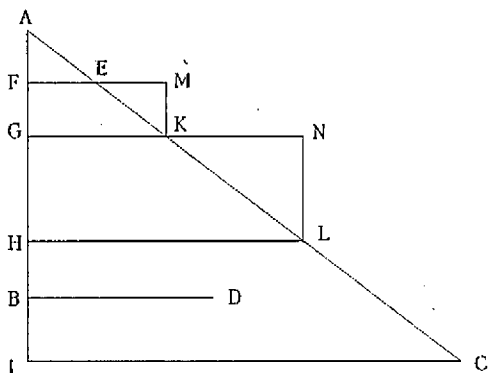
AEF и FEB ($AF=FB$, $EF=EF$ и $\angle AFE = \angle EFB$). Отсюда выводится, что $\angle AEF = \angle FEB$ и $\angle CAE = \angle EBD$.

Далее устанавливается, что $\triangle CAE \cong \triangle EBD$ откуда $\angle AEC = \angle BED$
 $\angle AEF + \angle AEC = \angle FEB + \angle BEF$,
 т.е. углы при E равны и $FF \perp CD$.

Постулат о параллельных может быть заменен посту-



Черт. 3.



Черт. 4.

латом о пересечении перпендикуляра и наклонной.

Это последнее положение и доказывается Клавием.

Следует доказать, что AC и BD пересекаются между собой.

От A по AB откладывается AF, затем $AG = 2AF$, затем $AH = 2AG$ и т.д. пока не дойдут до точки I находящейся за B на AB.

Проведем $FE \perp AB$. Откладываем по AC $AK = 2AE$, $AL = 2AK$ и т.д. Из K проводим $KM \perp FE$, из L $LN \perp GK$ и т.д. Тогда на основании доказанного выше убеждаемся, что углы G и K прямые, $GN \perp AI$. Точно таким же образом убеждаемся, что K и L прямые и т.д. Отсюда следует, что IC $\perp$ AI пересекает AC, а тем более с AC пересекается BD⁷⁶.

Через сто лет после Клавия вид этой главы геометрии совершенно меняется. Центр тяжести переносится с определения на аксиомы. Уже не ищется определение истинное, удовлетворяющее требованиям логики, среди возможных определений, но берется такое, исходя из которого можно было бы дойти до цели, пройдя через *наиболее очевидные* аксиомы, вовсе не выставляя современного требования minimum'a, совершенно чуждого XVIII веку.

У Борелли⁷⁷, параллельные прямые (но не линии вообще) определяются, как перпендикуляры к одной и той же прямой.

Первое положение Клавия объявляется аксиомой и доказывается положение: "Если к двум прямым, лежащим в одной плоскости, перпендикулярна одна прямая, то всякая прямая, перпендикулярная к первой, тем самым будет перпендикулярна и ко второй. Доказательство ведется от противного. По условию $EF \perp CD$ и $\perp AB$.

Откладываем $CF = FD$ и проводим AC и $BD \perp CD$.

Пусть GH прямая, которая описывается перпендикуляром к CD равным EF⁷⁸, тогда $GC = EF = HD$; $\triangle GCF \cong \triangle FHD$ откуда $GF = FH$, $\angle GFE = \angle EFH$, и $\angle GEF = \angle FEH$ чего, очевидно, быть не может.

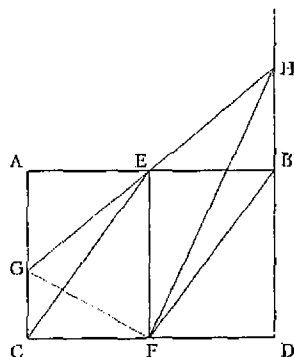
Из равенства $\triangle AEC$ и CFE следует, что $\angle A$ прямой, и таким же образом, что $\angle B$ прямой.

Отсюда сейчас же извлекается равенство внутренних накрест лежащих углов (см. черт. 6 – из равенства $\triangle ADC$ и ABD).

Если теперь обойти первое положение Клавия, объявленное Борелли аксиомой, то нам удастся вместе с Саккери⁷⁹ доказать только, что $\angle A = \angle B$, но не то, что $\angle A$ и $\angle B$ прямые.

Нам придется вместе с Саккери рассматривать три гипотезы:

1) тупых углов A и B,

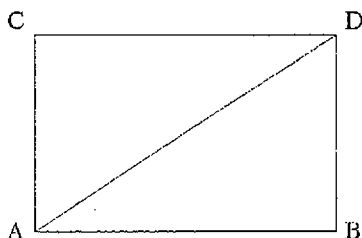


Черт. 5.

- 2) острых и
- 3) прямых.

Первую гипотезу Саккери удастся отвергнуть, исследование же второй не приводит к доказательству абсурдности, удовлетворяющему автора и содержит скрытым образом основы геометрии Лобачевского, геометрии “острого угла”.

В этом исследовании ярко выступают свойства геометрического места равных расстояний в той геометрии, где такое геометрическое место не представляется уже прямой.



Черт. 6.

Часто, приходится читать, что геометры две тысячи лет размышляли над доказательством постулата о параллельных, что на попытки решения этого закорючавшего вопроса пошла колоссальная энергия многих веков.

Но это иллюзия, которая получается проектированием недавнего прошлого в отдаленное прошедшее, нами почти забытое.

Можно сказать, что вплоть до Ламберта, начиная с возрождения геометрии в XVI веке, геометры относились в общем довольно легкомысленно к этому вопросу.

Саккери в XVII веке — один из немногих исследователей в этой области, почему ему и не суждено было заслужить внимания у современников.

В человеческом уме есть склонность обращать положения.

“То, что содержит противоречие, не может существовать”, это — основная аксиома при построении метафизических систем рационалистов, в особенности в последнем периоде, когда уже возникли первые разочарования в разуме, когда *прямые* доказательства уже стали пополниться косвенными.

“То, что не существует, то не существует потому, что содержит противоречие”, это — обратное положение, в которое можно вполне не верить, прекрасно вери в первое.

Разуму присуще особое самомнение, вера в возможность все доказывать как существование чего-либо другого, так и не существование чего-либо другого.

Так как наиболее сильным орудием его доказательств является приведение к абсурду, вскрытие противоречий в объекте несуществования которого он подозревает, то вполне естественно верить, что *всякое* несуществование обуславливается именно *абсурдностью*. Поэтому признание *других* геометрий, не содержащими противоречий, из которых некоторые должны не существовать, когда существует евклидова геометрия, это нечто такое, к чему разум мог лишь долго и с большим трудом приучиться.

Рационалистический период пришел к сознанию *различной степени очевидности* той груды аксиом, которые он вскрыл.

Недостаточная очевидность постулата о параллельных и его эквивалентов — вот что побуждало математиков XVIII века так много размышлять об этом предмете.

Положение:

“Те положения, которые логически выводятся из очевидных истин, менее очевидны, чем эти истины” обращается в естественном заблуждении разума в положение: “Все менее очевидные положения должны выводиться из более очевидных” и отсюда начинается изыскание этих выводов⁸⁰.

Но при этом истина постулата о параллельных как бы начинает терять часть своей очевидности, она уже не представляется столь очевидной, как раньше, отвержение ее не кажется столь невозможным, как это казалось в XVII веке и при этом преимущественно в глазах эмпирически настроенных умов.

Идею о возможности построения чуждой логических противоречий неевклидовой геометрии мы находим впервые у Ламберта.

§ 10. История сменанных углов.

В то время, как восхождение от вида параллельных прямых к роду параллельных линий приводило к чуждому Евклиду определению о параллельных и в общих чертах сходным теориям параллельных у различных математиков, основанным на этом определении, восхождение от прямолинейного угла к роду его объемлющему, к углу вообще, вело к жестокой проблеме о касательном угле (*angulus contingentiae*), к ожесточенной полемике, родственной полемике об *universalia* в XI веке.

Совершенно верно, что метод схоластической философии отличается от метода той философии, которая развивается от Декарта до Канта. Утробная жизнь человека отличается от жизни человека уже родившегося и уже не связанного с материнским организмом. Жизнь трехмесячного плода отличается от жизни девятимесячного, но в так мало похожем на человека эмбрионе можно усмотреть уже некоторым образом дифференцированными те части, из которых должны затем развиваться определенные более важные органы.

Совершенно таким же образом и в схоластической философии можно увидеть в искаженном виде все важные идеи, из нее эволюционировавшей философской мысли.

Бесконечно малое в неясной форме выступает и в тумане средневековой мысли.

Этот туман начинает рассеиваться в эпоху возрождения. Метафизическое бесконечно малое начинает свою математическую жизнь.

В эпоху Петра Рамуса Вы видите не эмбрион современной научной мысли, а ребенка, правда, еще очень слабого, не могущего самостоятельно стоять на ногах. Прислушайтесь к тому, что говорят комментаторы Евклида, который является для математика XVI века таким же безошибочным, как Аристотель для философов XI века, и Вы легко усмотрите, откуда произошло неделимое, бесконечно малое XVII века.

До Кеплера и Кавальери следует изучить Кардана, Клавия и Пелетария, а в особенности ожесточенный спор последних о 16-й теореме 3-й книги “Начал” Евклида⁸¹.

“Прямая, проведенная от конца поперечника круга под прямыми к нему углами, падает вне круга; в пространства же между прямой и окружностью не может упасть другая прямая; и угол полуокружности есть больше всякого прямолинейного угла, а остальной меньше”.

Доказательство Евклидом ведется от противного.

Предполагается, что перпендикуляр из точки A к диаметру AC лежит внутри круга. Соединяя C и A мы находим, что угол C равен A (т.к. ACO – равнобед. треугол.) и поэтому сумма углов в треугольнике больше двух прямых (противно т. 17 I книги).

Предполагая между окружностью и AF прямую AG, не встречающую окружности, из O опускаем перпендикуляр OD на AG. Тогда OA (как наклонная) > OD, чего быть не может, ибо OD > OA.

Отсюда выводится уже не Евклидом, а Проклом⁸² следствие, что угол САТ касания менее всякого прямолинейного угла.

Такой угол, меньший всякого прямолинейного угла представляет ли собой величину?

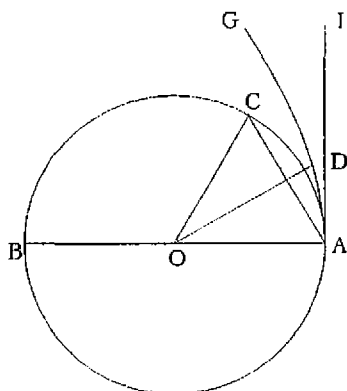
Вот математическая проблема XVI века, в обсуждении которой они пользовались чисто *схоластическим методом*.

Проблема идет о возможности подведения угла касания под класс *величины*.

Но самый класс величин не определяется, он извлекается путем своего рода рефлексии уже готовым, и различные его свойства еще полней его определяющие извлекаются по мере надобности.

Это большое заблуждение – приравнивать схоластические споры к словесным спорам и видеть решение их проблем в надлежащем выборе терминов.

Если мы теперь не рассуждаем об угле касания, то вовсе не потому, что мы имеем правильное решение проблемы, волновавшей Клавия и Пе-



Черт. 7.

летария, а просто потому, что мы такого рода проблемы исключили из области математических исследований, мы разочаровались в возможности математизации сравнения прямолинейных и криволинейных углов, хотя в нематематизированном мышлении мы производим такое сравнение.

Нельзя считать решением ссылку на то, что угол между прямой и кривой — это угол между этой прямой и касательной к кривой, на основании которой все углы касания равны нулю. То, что мы назовем до начала математического изучения и следовательно то, что дается упомянутой выше рефлексией — углом между кривыми (хотя бы мы и не были в силах это точно формулировать словами), конечно, не тождественно углу между их касательными.

Эти два угла равны только в том случае, если признать угол касания равным нулю, так что упомянутый выше аргумент может родить только ложный круг.

“Угол между кривыми есть угол между касательными” — это или чисто номинальное определение, где термин “угол” употребляется в смысле безусловно расходящемся с тем, которое уже находилось раньше в нашем уме, или же представляет положение, выдаваемое за аксиому, что *наклонение двух кривых измеряется наклонением их касательных*.

Но при этом, в этой формулировке, содержится гораздо больше, чем то, что может быть признано очевидным.

Очевидна не пропорциональность этих наклонов, которую невозможно было бы установить, ибо для этого необходим был бы *третий член* — мера наклона двух кривых, соответствующая дуге-мере наклона двух прямых. Очевидно только то, что с возрастанием наклона касательных, возрастает наклонение кривых и обратно.

В 3-й книге “Начал” Евклида есть две интересные загадки:

Определения 7 и 11-е.

7-е. Угол отрезка (сегмента) есть тот, который содержится прямою и окружностью круга.

Так что этот *смешанный* угол, образованный дугой круга и прямой, *угол сегмента*, не следует смешивать с углом в сегменте, о котором говорится в определении 8.

8-е. Когда на дуге отрезка, возьмется какая ни есть точка, и от оной к концам прямой, которая есть основание отрезка протянутся прямые, то содержащий протянутыми прямыми угол называется углом в отрезке (в сегменте).

11-е. Подобные отрезки круга суть те, кои вмещают равные углы, или в конх углы взаимно равны.

Ни в одном из своих доказательств Евклид не пользуется смешанным углом.

Теорему 24: “На равных прямых подобные отрезки (сегменты) кругов равны”, Евклид доказывает на основании 23-й: “На той же прямой и

по ту же ее сторону не могут быть составлены два отрезка кругов подобные и неравные”.

В 11-м определении совершенно непонятное повторение одного и того же определения. Мне представляется весьма вероятной следующая гипотеза: “Сперва определение подобия сегментов было: “кои имеют равные углы” соответственно определению подобия треугольников 6-й книге “Начал”.

Теорема 24-я о равенстве подобных сегментов на равных прямых доказывалась наложением (в роде т. 4 I книги).

Причем, как в теор. 4 для прямолинейных углов, так и здесь для смешанных обращалась 8 аксиома I-й книги: “Совмещающиеся взаимно взаимно равны”, т.е. при равенстве углов постулировалась возможность их совмещения.

Возражения против очевидности такого совмещения и вынудили произвести изменение, подставить на место определения (см. вторую часть опред. 11) то, что раньше являлось теоремой, непосредственно вытекающей из упомянутого выше положения.

Одним словом, по моему мнению, определение 7-е — это рудимент, свидетельствующий о прошлой истории 3-й книги.

Первая же часть — тоже рудимент, но подвергшийся некоторому перерождению, запущевавшему его прежнюю историю как полезного органа.

Здесь уместно сказать несколько слов о 8-й аксиоме I книги.

Тот факт, что Евклид в теореме 4 и других пользуется обращением этой аксиомы, заставляет эту аксиому и в системе аксиом представить в прямом и обращенном виде. Две совмещающиеся величины равны и две равные величины совмещаются, что вызвало возражение Марделз⁸³.

Вне сомнения, что сам Евклид не имел в мыслях обращения аксиомы 8-й в *общем случае*, а только для углов и отрезков.

Тут было только бессознательное пользование скрытыми аксиомами, наряду с многими другими. Следует помнить, что Евклид совершенно не пользуется *нашей* идеей равенства геометрических фигур, которое состоит в тождестве формы и размеров при различии в положении.

Положение 4 формулируется так:

“Ежели два треугольника имеют две стороны равные двум сторонам, каждую каждой; и один угол равный одному углу, а именно, кои содержатся сами равными прямыми; то и основание будет иметь равное основание; и треугольник будет равен треугольнику, и прочие углы будут равны прочим углам, каждый каждому, кои противолежат равным сторонам”.

См. также положения VIII и XXVI.

“Равны” употребляется здесь в смысле “*равновелики*”, так что Евклидом утверждается:

- 1) равновеликость упомянутых треугольников,
- 2) равенство некоторых их элементов.

Когда же Клавий обращает 8 аксиому то он становится на нашу точку зрения⁸⁴, он уже понимает равенство в нашем смысле, и в этом смысле, конечно, 8 аксиома обратима, на что и указывает ее дальнейшая судьба, а именно, превращение ее в *определение*.

Таким образом, судьба смешанного угла мне представляется в таком виде: "Смешанный угол пользовался раньше всеми правами. Но евклидова строгость доказательства, вызванная софистической логикой, изгнала его из геометрии. Но схоластическая логика вернула его обратно, чтобы через сто лет он снова сошел бы со сцены и на тот раз, видимо, на очень долгое время..."

Смешанный угол последний раз выплывает при борьбе математиков-рационалистов с доказательством с помощью наложения.

Арце, стараясь избежать метода наложения, развивает доказательство 5-й теор. 1 книги, указанное Аристотелем⁸⁵.

"Углы равнобедренного треугольника при основании равны".

К евклидовым аксиомам Арце прибавляет еще 6 новых, в числе которых 17-я: "In uno eodemque circulo omnes anguli semicirculi sunt invicem aequales".

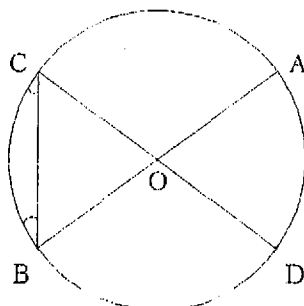
В одной и той же полуокружности все полуокружные углы равны.

Таким образом, Арце считает возможным говорить о смешанных углах, не определяя их с помощью определенных касательными прямолинейных.

Другой аксиомой утверждается: "18 Cuiuslibet segmenti duo anguli sunt invicem aequales. В каждом сегменте оба угла равны.

($\angle BCB = \angle CBC$)

Чтобы доказать упомянутую выше теорему Арце из О описывает окружность радиусом равным $OB = OC$ и замечая, что на основании аксиомы 17: $\angle BCO = \angle CBO$ на основании аксиомы 18: $\angle BCB = \angle CBC$, откуда согласно евклидовой аксиомы: $\angle BCO = \angle CBO$, что и т.д.



Черт. 8.

ИССЛЕДОВАНИЯ О ПРОИСХОЖДЕНИИ НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ ИДЕЙ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ.

Введение.

В истории математики хорошо разработана та часть, которую можно назвать *анатомией*: хронология открытий, элементы заимствованные и оригинальные в математике данного культурного периода. Разработана и *физиология*: развитие различных математических теорий мы представляем в зависимости от хода развития других явлений культурной жизни.

Но еще очень слабо затронуто то, что можно назвать *эмбриологией*, т.е. генезис математических идей, начиная с их зарождения. В таком исследовании, чрезвычайно деликатном, приходится прибегать к тем источникам, которые обычно обходит историк математики: прежде всего следует обратить внимание не только на *верхнее*, но и на *нижнее* течение математической мысли, не только на научные произведения, но и на забытые большей частью теперь учебники, ибо в них—то резче всего сказывается настроение мысли, кладущее свой отпечаток больше всего на понимание основ науки; во-вторых, приходится обратиться и к философским мировоззрениям исследуемой эпохи, в которых, конечно, следует искать эмбрионы основных научных идей.

Исследование происхождения основных идей анализа бесконечно малых ведет к изучению ныне забытых комментариев Евклида с исправленными *выпрямленными* доказательствами, осуществляемыми введением постулатов уже анализа в скрытой или явной форме, и к изучению философии актуальной и потенциальной бесконечности от Аристотеля через схоластику до рационализма XVII века.

Исследование основных современных геометрических идей ведет нас к изучению ныне забытых учебников конца XVIII в. и начала XIX в. и, с другой стороны, к изучению кантианства и гегельянства, кладущих свой отпечаток на эти учебники.

Повторяю, что исследования эти должны быть очень деликатны. Очень легко впасть здесь в иллюзию, и историческую эволюцию увидеть в искаженном виде. Это, между прочим, имеет место у математиков с недостаточно развитым историческим чутьем относительно XVII века, *внешний* облик которого может быть и похож на современную эпоху, но только *внешний*, так как более глубокое исследование вскрывает непроходимую пропасть.

Я предлагаю читателю ряд очерков из истории математических идей. Эти очерки могут иметь не только историческое значение, но и *методическое*. Идеи забытые — не всегда идеи ложные, а часто только такие, которые не находят применения в ходе современной научной работы, при незначительном в этом смысле научном значении они могут иметь значение педагогическое. Преподаватель, прочтя настоящие очерки, может над многим задуматься.

Эти очерки составляют только небольшую часть моего большого многолетнего труда по истории математики в указанном сейчас направлении. Пройденный мной длинный путь я вспоминаю с признательностью к многим лицам и учреждениям, помогавшим мне в этой, порой нелегкой, работе.

Прежде всего приношу свою благодарность Правлению Северо-Кавказского Государственного Университета и Президиуму Ассоциации Исследовательских Институтов за ежегодные командировки для работы в библиотеках, богатых старыми книгами. Затем приношу свою благодарность профессорам Н. И. Порфирьеву и И. Н. Парфеньеву, благодаря которым в 1926 году я получил возможность пользоваться при исключительно удобной обстановке богатой книжной сокровищницей геометрического кабинета Казанского Университета. Не могу также не отметить того предупредительного и внимательного ко мне отношения, которое я всегда встречал в библиотеке Московского Университета, а также исключительно любезное ко мне отношение в 1924 г. заведующей математическим отделением Ленинградской Публичной библиотеки.

Наконец, особенную благодарность выражаю Правлению Северо-Кавказского Университета, дающему мне возможность увидеть в печати хотя бы часть этого особенно близкого мне моего духовного детища, причем как раз в столь знаменательное для меня время 30-летнего юбилея моей научной и педагогической деятельности. Приношу такую свою благодарность Н. М. Несторовичу, любезно взявшему на себя большую часть труда по исправлению корректуры.

Май 1928 г. Ростов-Дон.
Д. Мордохай-Болтовской.

І. Два основных источника методов решения уравнений. (XII век).

§ 1. Простое фальшивое правило¹.

Самые интересные, но, конечно, и самые трудные проблемы истории математики это те, которые относятся к *эмбриологии* идей.

Обычно история математики исследует ход развития идеи уже во вполне оформленном виде. Хорошо известны все факты, относящиеся к

истории числовых уравнений, но не делаются попытки пойти вглубь — исследовать самые корни идей, лежащих в основе этих методов.

Попытки таких исследований я хочу дать. Я хочу показать, что эти идеи с психологической необходимостью должны были развиваться из основных свойств нашего ума, причем хочу проследить, как самые примитивные методы должны были обратиться в современные совершенные.

Самый примитивный способ (но, конечно, не метод) решения задачи — ряд попыток; неизвестное просто подбирается так, чтобы оно удовлетворило поставленным условиям.

Берется произвольное значение для неизвестного, согласно арабской терминологии: *предположение*; производится над ним все те операции, которые должны дать определенный результат. Если полученный *результат* не совпадает с данным или, как говорят арабы, отклонение не нуль, то переходят к другому и так дальше, пока не *наталкиваются* на решение. Так древние египтяне решили, вероятно, задолго до Ахмеса² задачу следующей:

Разделить 1000 рублей между тремя лицами А, В, С, так, чтобы В получил в $1\frac{1}{2}$ раза больше А, С — $\frac{1}{5}$ того, что А и В вместе и еще 40 руб.

Ход решения состоял в том, что последовательно предполагают, что А получает 100, 200, 300 р. и определяют, сколько получит В и С и, наконец, все вместе.

Первая идея, которая должна была прийти в голову, такова: в том случае, когда результат получается слишком большим, когда отклонение положительно, нужно брать следующее предположение меньше, в противном случае — больше; благодаря этой идее получают все более узкие области пробуемых предположений.

Конечно, этот уже более совершенный способ основывается на признании, что результат d_0 возрастает вместе с предположением x_0 . Но эта вера не только не обоснована, но, в общем, и неверна.

Это один из законов, управляющих эволюцией идей: всякая истина содержит заблуждение; необходимо всегда признать что-либо неправильное, чтобы продвинуться к правильному.

Такого же рода заблуждение является стимулом и дальнейшего продвижения.

Вторым заблуждением является признание двух величин x и y , одновременно возрастающих, пропорциональными.

Эта ошибка: в отождествлении монотонности с прямой или обратной пропорциональностью, вместе с тем — источник ошибок как ученических, так и тех, которые дает нам история математики. Но эта ошибка вызвала *regula falsi*³, фальшивое правило в его простейшем виде.

Вне сомнения, простейшее фальшивое правило, применимое ко всем задачам, не обосновывается, так как обосновать его, конечно, раньше не было возможности. Ошибка в отождествлении монотонности и пропорциональности не замечалась, так как в первых простейших задачах это действительно имеет место и применение правила было вполне законно.

Открытие *regula falsi* — бесспорно крупное *открытие* в младенческий период математики; оно дает возможность, так сказать, *одним ударом* превратить неправильное решение в правильное.

Если при взятном предположении x_0 результат d_0 вдвое менее данного d , то искомое x вдвое более x_0 ; если

$$d_0 = 3d, \text{ то и } x_0 = 3x \text{ и т.д.}$$

Приведенная выше задача так решается по простому фальшивому правилу:

Отняв от 1000 р. — 40 р. (т.е. прибавку, полученную С сверх $\frac{1}{5}$ части А и В), т.е. взяв 960 руб., будем делить так, что В получит в $1\frac{1}{2}$ раза более А, С — $\frac{1}{5}$ того, что А и В вместе.

Предположим, что А получит 4, тогда В — 6, а С — 2; все вместе — 12, вместо 960 р., т.е. в 80 раз меньше. Отсюда делается заключение, что ошибочный слишком малый результат получился потому, что предположение взяли слишком малое. Если возьмем в 80 раз больше, то В и С получат в 80 раз больше и сама сумма будет в 80 раз больше, т.е. 960 рублей.

В алгебраической символике правило это будет представлять метод решения уравнения первой степени:

$$ax + bx + c(a'x + b'x) = d \quad (1)$$

без соединения подобных членов.

А именно, берется для x какое-нибудь значение $x = x_0$ и определяется число d_0 , которому равен результат подстановки в левую часть уравнения (1) этого решения $x = x_0$, так что

$$ax_0 + bx_0 + c(a'x_0 + b'x_0) = d; \quad (2)$$

x определяется по формуле:

$$x = x_0 \frac{d}{d_0} \quad (3)$$

которую нетрудно вывести из (1) и (2).

Для разобранного нами примера имеем уравнение:

$$x + \frac{3}{2}x + \frac{1}{5}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 960$$

x_0 полагается равным 4;

$$d_0 = 12, \quad \frac{d}{d_0} = 80.$$

$$x = 4.80 = 320.$$

Пропорция $x : x_0 = d : d_0$ является в глазах старых математиков чем-то самым по себе *очевидным* и не доказывается.

Но если бы пожелали ее строго доказать, то пришлось бы делать то, что мы избегаем с помощью этого метода, т.е. соединение подобных членов в уравнениях (1) и (2).

§ 2. Сложное фальшивое правило.

Если теперь вместо уравнения (1) взять:

$$e[ax + bx + g + c(a'x + b'x + h)] = d$$

и соответствующие ему арифметические задачи, то и в этом случае делалось заключение:

$$x = x_0 \frac{d}{d_0},$$

если

$$e[ax_0 + bx_0 + g + c(a'x_0 + b'x_0 + h)] = d_0 \quad (4)$$

что давало, конечно, неправильный результат

$$(\text{если } g + ch \geq 0) .$$

Уже в риторической алгебре арабов мы видим понимание неприменимости к этим случаям простого фальшивого правила (хотя не отмечается признак, позволяющий отделить первый случай от второго) и замену простого *regula falsi* сложным¹. Здесь *regula falsi* уже не арифметический метод решения, а *риторическая формула*.

Берем формулировку Бэг-Эддина:

“За неизвестное бери произвольное и назови его первым предположением и вычисли с помощью его предложенную задачу, если совпадает, то это и есть решение.

Если отклонится в одну или другую сторону, то получишь первое отклонение.

Возьми другое число и назови его вторым предположением, если произойдет отклонение, то это будет второе отклонение.

Помножь первое предположение на второе отклонение, назови это первым результатом. Затем второе предположение на первое отклонение – вторым результатом. Если оба отклонения одновременно положительны или отрицательны, раздели разность обоих результатов на разность отклонений, если же они различны, раздели сумму результатов на сумму отклонений – частное будет искомое число”.

Откуда

$$x = \frac{x_2 \delta_1 - x_1 \delta_2}{\delta_1 - \delta_2} \quad (5)$$

$$\delta_1 = d - d_1, \quad \delta_2 = d - d_2$$

что, конечно, в символической алгебре не представляет затруднений доказать.

Еще в учебник XVIII столетия фальшивое правило входило в таком виде⁵.

Приведем пример из учебника Магницкого:

“Вопроси некто учителя своего глаголя: повеждь ми, колико имаши учеников у себе во училище, понеже имам сына отдать во училище и хошу уведати о числе учеников твоих. Учитель же отвечае рече ему: еще придет ми учеников толкико же, елико имам, и полтолкико, и четвертая часть, еще же и твой сын, и тогда будет у мене учеников 100”.

Решение Магницкого:

Пусть учеников 24 – первое предположение:

$$24 + 24 + 12 + 6 + 1 = 67$$

ошибка 33.

Пусть учеников 32 – второе предположение:

$$32 + 32 + 16 + 8 + 1 = 89$$

ошибка 11.

$$24 \times 11 = 264 \text{ (первый результат)}$$

$$32 \times 33 = 1056 \text{ (второй результат).}$$

По общему правилу решение равно

$$\frac{792}{22} = 36$$

§ 3. Способ приближенного решения уравнений.

Regula falsi, бесспорно, родоначальник приближенных методов вычисления. Сущность простого фальшивого правила можно представить следующим образом: полагая в уравнении

$$A(x) = K \quad (6)$$

$$x = x_0; \text{ имеем}$$

$$A(x_0) = K_0 \quad (6)_0$$

Решение тогда определяем из пропорции

$$\frac{x}{x_0} = \frac{K}{K_0}$$

Если нельзя указать точное значение для x , естественно довольствоваться приближительным, которое как можно меньше отличается от первого.

Такое неточное значение x находится примитивным способом проб, как это указано в § 1.

Предположим, что система операции $A(x)$ разлагается на $C(x)$ и $D(x)$; уравнение (6) символически представляется в следующем виде:

$$[C(x), D(x)] = K \quad (7)$$

Пусть все затруднение в $D(x)$.

Задачу $C(x) = K$ мы решили бы просто. (8)

Конечно, первое, что приходит на мысль, это просто отбросить $D(x)$ и решать ур. (8).

Этот прием может дать приближенное решение, но как получить еще *более точное*?

Тут выступаст благотворная идея.

При разыскании более точного значения x не отбрасывать $D(x)$, а производить эти операции над первым приближением $x = a$, т.е. решать уравнение

$$[C(x), D(a)] = K \quad (9)$$

В этом и состоит выправление неточного решения в более точное $x = b$.

Следующий момент состоит в решении уравнения

$$[C(x), D(b)] = K \quad (10)$$

и т.д.

И здесь метод обоснован верой в то (что в общем случае, конечно, неправильно), что ряд $a, b, c, \dots$ сходится к корню заданного уравнения (7).

В то время, как в первоначальном виде *выправление* ложного предложения на основании полученного при нем результата производилось до *точного* значения неизвестного, при переходе от точного решения уравнения к приближенному понятие о выправлении ложного предложения обратилось в полученное из этого ложного предложения другого, тоже ложного, но более, чем первое приближающегося к истинному.

Для решения уравнения Кеплера

$$x - \epsilon \sin x = u \quad (11)$$

где u, ϵ даны, причем ϵ мало, берут $x = u$ за первое предположение — первое грубое приближение x_0 .

Выправление этого грубого приближения совершается с помощью уравнения

$$x - \epsilon \sin x_0 = u$$

дающего тоже неточное, но, вообще, более полное, чем первое, приближение.

Эта же идея прилагается и Жерардом⁶ к решению уравнения третьей степени

$$x^3 - m^2 \Gamma^2 x - m^2 \Gamma^3 = 0 \quad (12)$$

к которому сводится всякое уравнение типа

$$x^3 - px - q = 0$$

$$\text{Полагая } \sin^2 \omega = \frac{x}{r}$$

приводим (12) к виду

$$\sin 2\omega + 2m = 2\operatorname{tg}\omega.$$

Для получения последовательных приближений, берем $\omega = x$ (приближ. полученного пробамн).

Второе получаем из уравнения $\sin 2\omega + 2m = 2\operatorname{tg}\alpha$, третье из $\sin 2\omega + 2m = 2\operatorname{tg}\beta$.

В этом виде *regula falsi* избегают даже в высших технических заведениях, вследствие невозможности строгого обоснования этого метода.

Конечно, это большая ошибка, ибо высшее техническое заведение должно обращать внимание на те отделы математики, в которых нуждаются технические науки, и лучше дать технику в руки плохо обоснованный метод решения трансцендентных уравнений, чем не дать ничего.

С развитием разложения в ряды как орудия исследования, *regula falsi* принимает такую форму: $x = x_0$ — грубое приближение корня уравнения

$$f(x) = 0 \tag{13}$$

так что точное значение будет:

$$x = x_0 + h.$$

Уравнение (13) представляется в форме разложения

$$a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots = 0$$

К этому—то уравнению и применяется та операция, которую мы прилагаем к уравнению Кеплера, т.е. отбрасывание членов:

$$a_2 h^2 + a_3 h^3 + \dots$$

и определяется первое приближение

$$h_1 = -\frac{a_0}{a_1}.$$

Полагая

$$x = x_0 + h_1 + h' = x_1 + h',$$

мы аналогично определяем уравнение для h' ; с помощью его приближаемого значения, получаемого отбрасыванием членов $a'_2 h'^2 + \dots$, исправляем x_1 до более точного значения $x_1 + h'_2$ и т.д.

Формула Тейлора дает возможность написать для h, h', h'' , так сказать, готовые формулы и установить так называемый *метод Ньютона* приближенного определения корней уравнения.

§ 4. *Regula infusa в арифметике.*

В чем состоит трудность чисто *арифметического* решения задач?

Конечно, в наглядно-риторическом истолковании дистрибутивных операций, выраженных формулой:

$$(a+b)c = ac + bc$$

если a , b , c целые числа, то это не представляет затруднений.

Легко убедить, что если

5 мужчин получает в день по 2 р.

7 женщин получают в день по 2 р.,

то рассчитать всю полученную ими сумму можно двойко: сперва рассчитывая сумму, полученную мужчинами, $2 \text{ р.} \cdot 5 = 10 \text{ р.}$, затем женщинами $2 \text{ р.} \cdot 7 = 14 \text{ р.}$ или же, соединив всех, брать $2 \text{ р.} \cdot 12 = 24 \text{ р.}$

Но возьмем задачу: мальчик получил от отца на расходы в начале недели некоторую сумму денег и в продолжение недели истратил 2 рубля. На одну треть оставшейся у него части и на подарок 50 к. от дяди в конце месяца он купил воздушный змей за 1 р. 50 к.

Сколько он получил денег от отца?

Уравнение, разрешающее вопрос:

$$\frac{1}{3}(x - 2) + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Решение его

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

и т.д.

Но эта операция арифметически не истолковывается, так как $2/3$ руб. не имеют конкретного смысла.

Нетрудно видеть, каким образом мы должны построить решение этой задачи, совершенно не соответствующее обычному методу решения уравнений первой степени.

Мы должны идти по тому пути, который соответствует решению уравнения 1-й степени в арабской алгебре в позднейших стадиях ее развития, названному Абрахамом Эзра⁷ Regula infusa, иначе — методом подстановки.

Уравнение:

$$\left(x - \frac{1}{3}x - 4\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{3}x - 4\right) = 20. \quad (20)$$

Эзра решает (если ввести современный символический язык алгебры), полагая

$$x - \frac{1}{3}x - 4 = y, \quad (21)$$

что приводит уравнение (21) к более простому:

$$y - \frac{1}{4}y = 20, \quad (22)$$

которое уже не трудно разрешить.

В приведенной нами задаче за неизвестное следует принять не сумму, полученную мальчиком от отца, а то, что у него осталось после траты 2

рублей; $\frac{1}{3}$ этой суммы равна $1\frac{1}{2}$ рубля без дядиных $\frac{1}{2}$ р., т.е. 1 рублю.

Значит, это новое искомое равно 3 р., а первоначальное поэтому = 5 р.

Я укажу на одну очень интересную и в методическом отношении *нелегкую задачу*:

У двух мальчиков, Ивана и Петра, имеются орехи. Если Петр даст Ивану один орех, у них оказывается поровну. Если же Иван даст Петру один орех, у Петра оказывается вдвое больше, чем у Ивана.

Здесь путь решения идет, конечно, через *regula infusa*. За неизвестное следует принимать не число орехов у Петра, а то число, которое будет иметь Иван, когда у него отнимут один орех, или Петр, когда отнимут у него три.

§ 5. Генезис и основная идея *regula infusa*.

Я нарочно начинаю с рассмотрения *методического* значения *regula infusa*, чтобы подчеркнуть, что в то время, как *regula falsi* имело огромное значение в истории *необоснованных*, чисто *автоматических решений*, *regula infusa* имело значение в построении *обоснованных решений*.

Идея состоит в том, что задачи решаются в два или более, чем два, приема. Вместо того, чтобы определять x , мы определяем y , хорошо зная, что узнав y , узнаем также и x .

Мы хорошо знаем, что ученик всегда за x принимает то, о чем спрашивают, между тем как во многих задачах следует принимать за неизвестное нечто иное и, уже найдя последнее искомое, найдем ответ на вопрос.

Эта идея покажется нам и проще и менее значительной, чем та, что лежит в основе *regula falsi*.

Но если выикнуть глубже, то будет видно, что она определяет уже более высокое математическое развитие и уже в силу этого должна была явиться позже.

Мыслить единым то, что является в многообразии, всегда представляет затруднения.

Учитель хорошо знает затруднения, которые встречаются при применении формулы:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

к выражениям

$$4x^2y^2 - 81z^4 \\ [2x^3y^2 + 5xy^4]^2$$

и т.д.

Вот уравнения, решение которых представляет методический интерес (в какой-то форме прилагается *regula infusa*, предоставляем продумать читателю):

$$1) 2,1345(x - 0,5678) + 1,3356 = 7,7391.$$

$$2) 3(x + y + 0,689) + 2(x - y - 0,689) = 14.$$

$$x + y = 3,311.$$

$$3) 5,07833(0,56896x + 2) + 4,72167(0,56896x + 3) = 20.$$

Здесь следует положить

$$0,56896x + h = y$$

и искать h так, чтобы исчез свободный член.

§ 6. Диофант⁸.

Дальнейшая стадия развития *regula infusa* состоит в том, что задача об определении x сводится к задаче об определении y из задачи, условия которой подбираются так, что эта последняя задача разрешается и при этом простейшим образом.

Эта идея и лежит в основе диофантовых методов.

У Диофанта нигде нет проблемы, которая выражалась бы в нашей символике уравнениями:

$$ax^2 + bx = c$$

или

$$ax^2 = bx + c$$

и т.д.

Некоторые историки математики предполагают, что та часть сочинения Диофанта, в которой излагается решение квадратного уравнения, до нас не дошла. Но едва ли это так, ибо иначе там, где Диофант имеет дело с квадратным уравнением, он делал бы ссылки на утерянную часть сочинения. Читая соответствующие места, мы получаем скорее впечатление того, что Диофант не сознает, что некоторый класс рассматриваемых им проблем сводится к одной и той же проблеме решения квадратного уравнения.

Во всех весьма многочисленных проблемах, сводящихся как к определенным, так и неопределенным уравнениям, Диофант признает только следующие пути:

1) В системе

$$f(x, y, z, \dots) = 0$$

$$h(x, y, z, \dots) = 0$$

.....

$$g(x, y, z, \dots) = 0$$

подобрать для $x, y, z \dots$ такие выражения

$$x = \alpha\xi + \beta, \quad y = \gamma\xi + \delta, \quad z = \varepsilon\xi + \zeta \dots$$

чтобы удовлетворились все уравнения, кроме последнего, а последнее свелось бы к уравнению первой степени

$$M\xi + N = P\xi + Q. \quad (23)$$

2) Тем же путем, той же заменой или заменой

$$x = a\xi^2 + b, \quad y = c\xi^2 + d, \quad z = e\xi^2 + f$$

удовлетворить все уравнения, кроме последнего, приведя последнее к уравнению высшего порядка, но такого, которое по сокращении на ξ^2 сводилось бы или к уравнению первой степени, или к уравнению:

$$M\xi^2 + N = P\xi^2 + Q \quad (24)$$

До 29-й задачи I книги мы имеем только системы уравнений первого порядка.

Система задачи 29-й:

$$ax = y^2 \quad bx = y$$

приводится к уравнению

$$ax = b^2x^2$$

сокращение которого на x (гипобибазм) дает уравнение первой степени.

30-я задача:

$$x + y = a, \quad xy = b,$$

т.е. задача об определении чисел по сумме и произведению решается так для случая системы избранных Диофантом числовых значений:

$$x + y = 20, \quad xy = 96$$

Принимается разность $x - y$ за 2ξ ,

тогда полуразность равна ξ .

Но полусумма $= 10$ вместе с полуразностью ξ составляет большее число, так что большее число есть $\xi + 10$.

Полусумма без полуразности — это меньшее число, так что оно равно $10 - \xi$, затем на основании тождества:

$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b),$$

известного Диофанту, произведение их равно

$$100 - \xi^2,$$

так что

$$100 - \xi^2 = 96,$$

откуда

$$\xi^2 = 4 \text{ и } \xi = 2.$$

§ 7. Генезис чирнгаузеновского преобразования.

Совершенно иначе обстоит дело у индусских математиков: мы здесь имеем и совершенно определенное правило, определяющее ряд формальных операций над уравнением, и окончательную формулу для корня уравнения

$$ax^2 + bx = c$$

в риторической форме.

Правило Кридхара:

“Следует умножить на 4 раза число квадратов оба члена и прибавить квадрат числа неизвестных”, т.е. от

$$ax^2 + bx = c$$

следует перейти к...

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac,$$

а отсюда к

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac,$$

дающему

$$(2ax + b)^2 = b^2 + 4ac$$

$$2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac}$$

Конечно, и здесь осуществляется идея *regula infusa*, но в простейшей форме; подстановка дается в полной определенности. Дальнейшее развитие должно пойти по тому пути, который указывается методами Диофанта, в которых дается лишь форма подстановки, значения же параметров подбираются надлежащим образом.

Мы предлагаем наши обычные методы (индусского и арабского происхождения) Визы сравнить с методом Диофанта, который, полагая в уравнении

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$x = y + m$, приводит его подлежащим подбором к чистому уравнению

$$\alpha y^2 + \beta = 0$$

Это, конечно, начало чирнгаузеновского преобразования.

От

$$x = m + y$$

естественно переход к

$$x^2 = mx + n + y \quad (25)$$

$$x^3 = mx^2 + nx + h + y \quad (26)$$

Чирнгаузен⁹ решает уравнение третьей степени

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad (27)$$

сводя его с помощью (25) к уравнению

$$y^3 + Py^2 + Qy + R = 0; \quad (28)$$

и, п определяются из уравнений $P = 0$, $Q = 0$ (первой и второй степени), так что (28) сводится к двухчленному уравнению

$$y^3 + R = 0.$$

II. Генезис современного числа. (XIII век).

§ 1. Количество у Аристотеля и у схоластиков.

Аристотель в своих "Категориях" отмечает три свойства количества¹⁰. Первое: количество не имеет себе противного. Второе: количество не принимает больше или меньше¹¹. Это последнее утверждение может родить большие недоразумения. Здесь как будто утверждается нечто совершенно нелепое: невозможность прямой площади, объему быть больше другой такой же величины. Но Аристотель хочет сказать только следующее: эти прямые не могут быть больше прямой, чем та, эта площадь больше площадью, чем та. Будет ли площадь содержать 1000 кв. метров или 0,001 кв. метров, все равно она будет оставаться площадью. Нельзя сказать "*haec linea est magis linea quam illa*" (эта линия больше линии, чем другая), но можно сказать "*possit esse maior illa*" (может быть больше той). Это, разъясняет Аристотель, имеет место, когда одно количество в различных частях *распространяется* больше или меньше.

Понимание Аристотеля здесь затруднительно вследствие того, что понятие, означенное русским словом количество¹², не вполне отвечает аристотелевской категории.

Мы говорим о количестве часто в смысле числа, между тем, по Аристотелю, количество является тем, к чему прилагается число или, вернее, величина.

В каждой вещи есть качественное содержание и величина. А и В только тогда можно отнести к одному роду количества, если это качественное содержание у них одинаково, если нет ничего в А больше, чем в В.

Третье свойство — это равенство и неравенство¹³, существующее между двумя количествами. При этом Аристотель приводит различные равенства и неравенства в *массе и совершенстве*¹⁴. Так как сами категории являются совершенно неопределенными, то проблема о сущности количеств, по мнению схоластиков, должна пониматься как проблема о разыскании только *характерного признака количеств*. Указанные Аристотелем признаки, может быть, во всей совокупности и охарактеризовывают количество, но в отдельности они таковы, что каждое относится не к одному, а к нескольким категориям.

Схоластическая¹⁵ мысль здесь далеко шагает за границы чисто аристотелевских воззрений. Как и в других случаях, схоластическая¹⁶ точка зрения *прогрессивна*, томистическая¹⁷ — *консервативна*. Последняя старает-

ся путем компромиссов закрепить старые теории и, с одной стороны, стоит ближе к старому аристотелевскому мировоззрению, с другой стороны, к далекому грядущему XVII веку рационализма¹⁸.

Сущность количества по Фоме Аквинскому состоит в *распространении частей в порядке друг относительно друга*¹⁹. Порядок частей характеризует количество. Это первое, что воспринимается в количестве, корень всех его свойств. Отсюда вытекает и его *делимость*, и его *протяженность*, и *проницаемость*, благодаря чему оно способно быть изменено. Говоря современным языком, Фома стоит за приоритет ординального, а не кардинального числа.

Отсюда в дальнейшем должен быть сделан вывод о существовании неделимых *количеств*, ибо делимость вовсе не первичное, а только вторичное производное свойство количества. Идею актуально бесконечно малого как неделимости, идею Кеплера²⁰ и Кавальери²¹ порождает направление именно Фомы, а не Скотта, которое можно назвать *функциональным*, в котором можно усмотреть эмбрионы идей переменного, предела и т.д., которое безграничную делимость материи полагает не только в нашем уме, но еще как бы частично объективирует, помещая ее в особой промежуточной плоскости существования, отмечаемой скоттистами термином "formaliter ex natura rei" (формально по природе вещи)²².

Но *томистическое* количество уже не совпадает с *античным*, чисто *пространственным*. Уже ко времени Фомы схоластическая мысль в большей мере произвела абстрагирование, эмансипацию от пространственных пут²³. Согласно томистическому воззрению, геометрические объекты определяются по *характеру связей между частями*. Линия — не длина без ширины и глубины²⁴, как этого желает Евклид, а количество, распространенное в длину, части которого связываются обеими точками²⁵. Фомой смутно сознается, что в линии более существенным, чем ее длина, являются те свойства, которые определяются аксиомами порядка, относящимися к ее точкам. Поверхность — не величина, имеющая длину и ширину без глубины²⁶, а количество, распространенное в длину и ширину, части которого связываются линиями. Тело — не величина, имеющая длину, ширину и глубину²⁷, а количество, распространенное в длину, ширину и глубину, части которого соединяются поверхностями.

§ 2. Делимость и измеряемость количества.

Другие схоластики²⁸ выдвигают именно *делимость*²⁹, как характерное свойство количества. Спор о том, представляет ли делимость сущность или, точнее, по схоластической терминологии, формальное понятие количества, особенно ярко выявляет способность схоластической мысли к тонкому различению понятий.

Одно из возражений состоит в том, что деление является чем-то *относительным*, что оно мыслится, как отделение одного от другого и абсолютная категория ни в коем случае не может характеризоваться таким относительным признаком.

В определении Фомы, порядок является тоже относительным понятием, но там он выставляется только как признак, характеризующий распространённость.

Разбор возражений ведет к различению деления в этом относительном смысле, т.е. в смысле отделения от деления в смысле дробления целого на части. Схоластический анализ разлагает деление на два акта: первый определяет границы частей, и разделенный этим первым актом отрезок мыслится как ограниченный двумя точками, с точками между ними. Второй акт раздробляет целое на однородные части, он дает вместо данного *отрезка совокупность уже разделенных* аналогичных отрезков. Конечно, такое различение вполне правильно. Будем делить отрезок на части $1/2$, $1/4$, $1/8$... Каждая часть у нас отделится от целого после конечного числа операций, но вся совокупность операций, ведущих к раздроблению, будет бесконечна.

В этом интересном возражении отмечается, что если бы *делимость*³⁰ была сущностью количества, то во всяком количестве оно было бы или только в *потенции*, т.е. способностью к делению, или только *актом*, т.е. производимым или произведенным делением, между тем как в *непрерывном* мы имеем первое, возможность деления, а в *числе* второе, [акт деления], так как число в мысли является уже разделенным на единицы.

В высокой степени интересны аргументы в пользу *измеряемости*³¹ как характерного признака. Измерение мыслится как операции последовательного прибавления частей до получения *полного* целого или последовательного вычитания их из того, частью чего является данное.

Этой операции можно противопоставить операцию получения совокупности уже разделенных частей для получения данного.

Если первой операции соответствует суммирование сходящихся рядов, и она может быть поставлена в основе архимедова метода³² определения площади параболы³³, если этот метод исследования переработать в современную теорию пределов, то второй отвечает точке зрения исчисления бесконечно малых, смотрящей на конечную величину, как на сумму (или вернее предел суммы) бесконечно малых, т.е. точке зрения Кеплера и Кавальери.

Утверждение, что измеряемость является характерным признаком количества, сводится к тому, что количество постигается только сравнением с *единицей*, предполагающим ряд операций, приводящих от этой единицы к целому.

Защитники этой точки зрения указывают в свою пользу на то, что только измерением различается место³⁴ от занимающей это место поверхности, а именно: первое измеряется *изнутри*, второе *извне*, т.е. первое получается прибавлением, второе вычитанием.

В возражениях на эти взгляды смутно выступает переменное количество как количество остающееся, несмотря на то, что оно теряет свою измеримость; таким переменным является в этих возражениях бесконечно продолжаемая прямая.

§ 3. Виды количества.

Другая важная схоластическая проблема, ведущая в том же направлении абстрагирования числа, это проблема о *видах количества*.

Аристотель различает величины, составленные из частей, имеющих взаимное расположение, от величины из частей без взаимного расположения³⁵.

К первым он относит линии, поверхности тела, а ко второму число, время и слово. Такое деление совпадает с делением на пространственные и непространственные.

Но эта классификация отнюдь не совпадает с другой, в которой количество делится на *непрерывные* и *дискретные* (*continua, discreta*).

Чистой непрерывной непространственной величины у Аристотеля нет³⁶. Ее нет и у Фомы.

Третье аристотелевское деление — на остающиеся (*permanens*) и последовательные³⁷ (*successiva*).

Первое то, части которого существуют в одно и то же время, как, например, прямая линия, второе — части которого полагаются в постоянном течении как время.

В первой аристотелевской классификации усматривается очень ранний эмбрион *абстрактных* величин, противопоставляемых *геометрическим*.

К первому роду сам Аристотель может отнести только целое число, но в будущем этот род пополняется числами дробными, рациональными и, наконец, иррациональными.

Во второй классификации *непрерывная* геометрическая величина противопоставляется прерывному целому числу. В далеком будущем арифметизация математики разрушает эту перегородку, устанавливая непрерывность чисел.

Наконец, третья классификация дает источник идеи, противопоставляющей *постоянное* *переменному*.

Время в раннем периоде развития математического анализа является *первым* независимым переменным (напр. у Ньютона)³⁸.

Но только, конечно, комментирующие Аристотеля схоластики мыслят последовательную величину в *нашем* смысле *переменной*.

Здесь мыслится только способ образования постоянного, образование определенного промежутка времени путем последовательного наложения составляющих его частей: $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$, но не мыслится еще [величина], последовательно проходящая через свои значения.

У Аристотеля, как и в его учении о субстанции³⁹, [в учении о количестве наряду] с *полноправными* величинами выступают еще и *неполноправные*, дающие богатую пищу для схоластических размышлений.

Наряду с собственно-количеством Аристотель указывает то, что может быть признано таковым только по случайности (*per accidens*)⁴⁰.

Белое не представляет в собственном смысле количества: большая или меньшая белизна определяется только большей или меньшей поверхностью.

Тщательный анализ Фомы Аквинского приводит его к признанию только *трех* непрерывных собственно-количеств, причем все три являются пространственными: линия, поверхность, тело⁴¹.

Время⁴² само по себе не является распространенным. Распространенным является только *движение*. Продолжение во времени распространено в частях только в смысле продолжающейся и в своем бытии пребывающей вещи.

Но и само движение⁴³ Фомой не признается в собственном смысле количеством. Спор о *правах времени*: в корне спор между зарождающимся [мировоззрением] функциональным и мировоззрением окристаллизованной величины.

Почему же время не признается *полноправным* количеством?

Оно *неполносущее* (*Ens incomplet*) как и движение, которое измеряет, которое является только стремлением к конечному члену. Здесь схолистическое *incompletus*⁴⁴ скользит около идеи *переметного*.

§ 4. Единица и единство.

История числа – это вместе с тем и история единицы и нуля, постепенное завоевание этими арифметическими пасынками прав гражданства.

Евклид в VII книге⁴⁵ “Начал” говорит: “единица есть то, в рассуждении чего вещь называется единой”, а число – “собрание единиц”. Здесь единица еще не число, а само число только *собрание единиц*.⁴⁶ Для того, чтобы число подверглось дальнейшей эволюции, чтобы оно стало дробью, а дробь превратилась в число иррациональное, необходимо, чтобы оно подверглось *реализации*, чтобы было признано сперва в *реалистическом*⁴⁷, затем в *концептуалистическом*⁴⁸ смысле *самостоятельное* его существование, для чего в числе необходимо было найти нечто, не заключающееся в его единицах. В собрании предметы объединяются, собрание является

единством предметов, но вне сомнения существуют единства, различающиеся более или менее тесным сплочением объединенных единиц, и различные роды единств имеют различные права на существование.

Сам Аристотель различает два рода единств⁴⁹: одно *через себя* (*ipsum per se*), другое *случайное* (*per accidens*). Тело человеческое является таким *ipsum per se* в силу *связности его членов*.

Другим основанием является родовое *отношение*. Индивидуум или вид, принадлежащие к одному роду, образуют тогда тоже единство первого рода. Такое же единство дает *неделимое*, образующее единицу, производящую число.

Здесь следует отметить, что Аристотель, как и в других случаях, не отказывает, что перечисленные им типы *единственные*, он никогда не стремится к построению системы, но пользуется методом умозрительно-наблюдательным⁵⁰.

Каким же единством в глазах Аристотеля является число?

Несмотря на все старания схоластиков-реалистов выставить авторитет Аристотеля на своей стороне, Аристотель здесь должен быть признан *номиналистом*.

Число, как собрание единиц, должно быть признано *акцидентальным* единством, а такое единство не обладает реальным существованием, оно не находится вне нашего разума.

Другие более определенно высказывают чисто номиналистическое воззрение на число, по которому число будет единством *per accidens* и представляет лишь вещь разума (*ens rationis*).

Реалисты опровергают это мнение указанием на то, что семь планет остаются семью планетами, хотя бы никто о них и не думал; что сказать: “вещей много” и таким образом утверждать их численно — это значит признать их *различными* — но такими они тогда признаются и *вне нашего разума*; наконец, что считать — это значит не делать число, а только определять, каково оно.

§ 5. Абстрактное и конкретное число.

Проблема о существовании числа вполне аналогична проблеме об универсалиях, и она получает в схоластике решение, примиряющее враждующие стороны (хотя число вовсе не фигурирует как универсалия). Но самого Аристотеля интересовала проблема, совершенно не входящая в область схоластических исследований: “могут ли числа быть признаны идеями”⁵¹.

Могут ли они быть отнесены к умопостигаемому платоновскому миру, представившему по существу переработку философской мыслью политеистического мира богов, отвергаемого христианством?

Чисто платоновское мировоззрение отличается от платоновско-пифагорейского именно тем, что идеи пополняются в последнем *числами*. По

словам Аристотеля, пифагорейцы мыслили числа пространственно. Числа платоно-пифагорейские, так называемые идеальные числа, отличаются от *математических*, для античных мыслителей *всегда* конкретных, как идея отличается от ее отображения в мире материи; но вместе с тем они отличаются и от *абстрактных* чисел, совершенно чуждых античной мысли, совершенно так же, как идеи Платона отличаются от схоластических универсалий.

Аристотелевское опровержение реального существования таких идеальных чисел³² основывается на том, что в мире идей каждая единица должна быть *индивидуализирована*, в мире идей единицы поэтому не могут быть однородны, но каждая должна быть образцом как идея, а при таком положении не может уже образоваться число. Вследствие того же число приходится спустить вниз, оно может быть только конкретным числом.

И не идеальное число Платона, а это конкретное число Аристотеля, состоящее, по его словам, из *смешиваемых* и *однородных*, но обязательно конкретных единиц, эволюционирует в схоластической мысли в *абстрактное* число, состоящее тоже из смешиваемых и однородных, но уже абстрактных единиц.

Еще Альберт Великий³³ раздваивает число, отделяя *формальное*, акциденциальное от *абстрактного*, из которых первое, *приложенное* к вещам, остается в *них*, а последнее переводится в душу.

Если мы имеем пять вещей, то число три, приложенное к трем вещам, обязательно должно рассматриваться, как *часть* пяти, между тем, как абстрактное число, ему соответствующее, должно рассматриваться вполне самостоятельно, а не как часть объемлющего его числа.

Так как вещей может быть не пять, а семь, девять и т.д., то возникает странная мысль рассматривать приложенное число всегда как часть восходящего над ним числа, и наконец, *наибольшего конкретного* числа, которое утверждается с отрицанием, согласно Аристотелю, актуально-бесконечного.

Здесь схоластическая мысль приближается к точке зрения современных логиков, определяющих конечное число бесконечным³⁴.

Но бесспорно, что *это половинчатое* признание реального числа, т.е. признание реальности приложенного, по нашей терминологии, конкретного числа, не устраняет всех затруднений. Как только что указано, с признанием реальности только приложенных чисел ставится высшая граница для реальных чисел.

Но вместе с тем открывается и брешь в другом месте, через которую входит отвергаемая Аристотелем бесконечность.

Получается актуальная бесконечность пар, троек, четверок. Если существует пара камней и пара людей, то есть и пары пар и т.д. до бесконечности.

Один выход из этого затруднения – признать реальность абстрактного числа, признать то, что одно и то же “два” заключается и в паре камней, и в паре людей и, наконец, в паре пар.

Но некоторые схоластики находят другую лазейку: пара разнородных пар уже не признается парой, для такой пары не усматривается *числового единства*, за ней признается *только единство трансцендентное*⁵⁵.

Точно таким же образом разрешается вопрос и о рефлексивности⁵⁶ числа, чуждой реальным вещам.

Свойство это состоит в том, что операция, произведение которой над элементами $a, b, c, \dots$ дает $A, B, C, \dots$, будучи приложено к A, B, C , дает $A_1, B_1, C_1, \dots$ той же совокупности.

Здесь схоластическая мысль проходит около современной идеи *группы*⁵⁷: группой, относящейся к операции Ω , в современном смысле называется такая совокупность объектов, что операция Ω , произведенная над несколькими из них, дает объект той же совокупности.

Нет белизны белизны, но пара пар, такое же число, как и просто пара. Это, конечно, верно для абстрактных чисел. Но для чисел приложенных это неверно, и приходится возражать, что две пары уже не число, а только *множество*, связанное не числовым, а только *трансцендентным* единством.

§ 6. Реальность числа.

Схоластический спор о реальности числа дает начало *арифметизации* математики.

За непрерывным количеством, всегда понимаемым пространственно, признается безусловная реальность, и судьба *дискретного* числа иногда ставится в зависимость от решения вопроса, *представляет ли число вид количества*⁵⁸.

Если за существенный признак количества признать вслед за Фомой Аквинским *упорядоченную распространенность* частей, то такой признак будет принадлежать как непрерывному, так и дискретному количеству, видовое различие для первого будет состоять в связности частей, согласно аристотелевскому определению непрерывности, для второго же в *раздельности* их.

Но на это возражают: распространенность в частях числа не простая, как это должно быть. Части числа – это единицы, из которых число состоит. Эти единицы не только части целого; они обладают не только свойствами целого, как, например, части площади, но содержат больше, чем целое, это сущности, заполняемые некоторым содержанием.

Это возражение в свою очередь отбивается указанием возможности двух точек зрения на единицы, образующее число: их можно рассматривать как *полные и цельные* объекты и как *неполные*, абстрагированные

от всех свойств, содержащихся в целом. Эта последняя точка зрения и имеет место при образовании чисел.

Как ни стараются полностью использовать аристотелевский авторитет для укрепления своей позиции, Аристотель очень туго поддается их комментированию, ибо он остается античным мыслителем, чуждым всякой арифметизации.

Для него число, как он сам резко выражается, *не единое, а куча*⁵⁹.

Это только схоластическая мысль настаивает на необходимости этого цемента, склеивающего разрозненные многие, и проектирует его в реальный мир. Фома подчеркивает, что двойственность это не две единицы, ибо в противном случае нечто, составленное из двух единиц, иначе, число два не было бы сущностью самой по себе и истинной, а только случайной, как то, что *накапливается*.

В числе имеет место то, чего нет в куче, которая едина случайно, но есть в человеке, единство которого [скрепляет] его душа.

Проблема о реальности числа претворяется таким образом в проблему о реальности единств совокупностей предметов и тождества этих единств совокупностям.

Проблема о числе приводит схоластику к ее старой проблеме, — проблеме Росцеллина⁶⁰ о различении целого и частей, объединяемых этим целым.

Соединение в сложном в действительности ли различно от его частей? (*An unio in composito sit realiter distincta ab extremis?*)⁶¹

Соединение элементов в целом не только ли *мыслится*, как единое целое, а в действительности в этом соединении элементы остаются такими же *внешними* друг к другу, как это имеет место до их соединения⁶²? Аргументация против: все признаки реального различения присущи частям. Они раздельны: одна погибает при сохранении другой. Если части отличаются от целого, которое наряду с частями обладает реальным существованием, то адекватно или неадекватно? Первое невозможно, т.е. невозможно отличие адекватное полное, так как части входят в целое. Второе невозможно, ибо деление было бы тогда неполным, целое делилось бы не только на то, что мы принимаем за части.

Другая аргументация: если кроме частей (а, b) еще имеем и некоторую форму *целостности* с, прибавление которой к а и b дает целое, то все три элемента (а, b, c) требуют еще новой формы целостности d и таким образом открывается невозможный бесконечный процесс.

§ 7. Схоластическое кардинальное и ординальное число.

Здесь скоттическое мировоззрение *реализует* то, что томисты относят к разуму. Соединение формы и материи не есть только форма и материя, разделение их уничтожает не каждую из них, а их соединение. Вместе —

simul⁶³ — это, так сказать, тот цемент, который склеивает разнородные элементы и обладает тоже реальностью, хотя, может быть, в меньшей степени, чем склеиваемые им элементы.

Но именно такой цемент и отвергается томистами. Соединение формы и материала — это только *материал* и *форма*, и ничего более. Связь идет от *самой материи*, вовсе не индифферентной к форме, но только благодаря этой форме и существующей, причем, отвечающей вполне определенной форме.

Соединение материала и формы объясняется действием объединяющих факторов: *активного* — со стороны агента, производящего этот факт, и *пассивного* — со стороны материи⁶⁴, которая представляет *расположение* (appetitus) материи.

В этих исследованиях схоластика углубляется в анализ различных объединенных совокупностей соответственно различию числового и трансцендентного единства, она различает *трансцендентное* и *числовое* множество, первое — просто *множество*, второе — *число*.

Нельзя сказать, что схоластические понятия числа и множества вполне отвечают современным.

Если отбросить особые по своим свойствам *трансфинитные*⁶⁵ числа, то характерный для чисел признак конечности оказывается не присущим множеству; более того, рассматриваемые современной математикой множества — именно *бесконечные множества*⁶⁶.

Схоластическое множество (multitudo)⁶⁷ тоже может быть бесконечным (хотя потенциально), число же всегда конечно. Но различие между множеством и числом в том, что первое является родом, второе видом и ниже его.

Видовая разность не в способе образования совокупности элементов, чем определяются современные множества, а в *характере* самих элементов. Схоластическое множество относится к *неоднородным* элементам, а число к — *однородным*.

Так как схоластика реальным признает только *конкретное* число, по схоластической терминологии — *приложимое*, то число может быть в пяти человеках, в шести камнях, в семи звездах и т.д. Но два человека вместе с двумя камнями образуют только множество с трансцендентным, а не числовым единством. Отметим, что кроме однородности единиц, большинство схоластиков выставляет еще другое условие — материальность составляющих число единиц.

В схолистике мы видим такую борьбу *количественной* и *порядковой* точек зрения на число, но теории, защищающие первую точку зрения, далеко не соответствуют современной количественной теории чисел.

Некоторые схоластики, но не все, мысля сущность числа с помощью обычной аристотелево-схоластической схемы (форма — материя), ищут *форму чисел*⁶⁸, т.е. то, что дает ему *актуальное* существование, мысля вме-

сте с тем и *потенциальное*, незаконченное бытие числа, вроде бытия материи, не наделенной формой. По мнению одних эта форма дается тем, что все определяемые числом вещи мыслятся соединенно в одном *континууме*⁶⁹. Пять камней потому, или с того момента, *пять*, как мыслятся составляющими как бы один непрерывный камень, разделенный на части. Это, конечно, *количественная* точка зрения. Число мыслится здесь вне *порядка* составляющих его элементов. Но в то время как современная количественная теория чисел идет от дискретного множества к континууму, здесь путь как раз *обратный*: континуум кладется в основу дискретной величины, которая рассматривается как нечто *производное*, как соединение дискретной материи с непрерывной формой.

По мнению же других, формой числа является *последняя единица*⁷⁰. Число завершается тогда, когда кончается счет, который кончается этой последней единицей.

Это, конечно, *порядковая* точка зрения.

Против первой, т.е. количественной точки зрения, приводится явная противоположность дискретного и непрерывного, при которой второе ни в коем случае не может служить формой первого.

Указывается также на *потенциальность* такой непрерывности, ибо ее в действительности нет, так как камни все-таки остаются *разделенными* и непрерывность возникает только при действительном их сплавлении.

Против второй точки зрения выдвигается независимость числа от *порядка* элементов (a, b, c, d); ведь такое же число составляют (a, b, c, d), (d, a, b, c) и т.д.; указывается также, что формой числа не может явиться последняя единица вследствие того, что первое и последнее только в уме, что вне его — только их расположение. В числе нет последней единицы. Нет ее ни во времени, ни в природе, ни в смысле конечной цели, ни по достоинству.

Последнюю единицу можно сравнить только с крышей дома, которую ни в коем случае нельзя признать за ее форму.

Отметим, что первый взгляд отвечает возражению на измерение как на сущность количеств, второе же — томистическому взгляду, берущему на место измерения *распорядок*. Согласно первому, число обнаруживается измерением единиц, согласно второму — расположением частей, причем в обоих случаях схоластика не может освободиться от пространственного мышления.

Первый взгляд ближе к Аристотелю, который определяет число как *множество, измеренное единицей*⁷¹. Единица здесь является мерой и, как уже выше заметили, ни в коем случае не телом.

Отсюда вытекает, что множества различных родов различны; что для Аристотеля, как уже было отмечено, существуют только конкретные числа: пять камней — *другое* число, чем пять человек.

Ординальная точка зрения здесь, конечно, шагает вперед в направлении к абстрактным числам.

§ 8. Метафизика нуля.

Эмбриональная жизнь математического нуля наблюдается в схоластических исследованиях о творении. Античная аксиома Анаксагора⁷² “из ничего не происходит ничего”⁷³ отвергает превращение нуля во что-нибудь, включение его в ряд чисел. Схоластики, конечно, в целях защиты основных христианских догматов должны выступить во всеоружии против этой языческой аксиомы, отвергающей возможность божественного творения из ничего.

Сперва средневековая мысль старается обойти это положение, устанавливая творения без нарушения этой аксиомы, которой дается объяснение не в смысле отвергания творчества, а в смысле лишь невозможности перехода ничто во что-нибудь.

Так, по св. Ансельму⁷⁴, при творении ничто не переходит в что-нибудь, а сперва — ничто, а затем создается что-нибудь.

Но этим средневековая мысль не удовлетворяется. Она постоянно возвращается к гнетущей ее идее — предваряющей божественное творение материи. То, что становится, должно быть раньше возможным. Но истинно возможным является только чистая потенция, т.е. материя.

Фома Аквинскому⁷⁵ приходит мысль заменить в настоящем случае аристотелевскую метафизическую возможность — абстрактной, чисто логической.

Только то, что совершается естественными силами, сперва фигурирует в виде такой метафизической возможности, но то, что происходит сверхъестественно, что приводится к бытию только одной силой и называется возможным только поскольку может быть представляемо.

Из этих метафизических размышлений выходит ничто, как возможность чего-либо, родится взгляд на нуль, как на член ряда, к которому принадлежат натуральные числа: 1, 2, 3, 4, 5...

Только в этом потенциальном существовании получается разрешение того противоречия, которое отмечается еще Фредегениусом в форме, которая может показаться на первый взгляд нелепой. Если “всякое конечное имя что-нибудь обозначает, как человек, камень, дерево, то и ничто что-нибудь обозначает. Таким образом ничто только тогда может мыслиться, когда оно уже есть что-нибудь”.

Нуль, таким образом, это только возможность, но реализующая абстракции средневековая мысль поднимает эту возможность высоко над плоскостью чисто логического бытия.

Другие средневековые возражения против творения являются метафизическими представителями следующих математических возражений против признания нуля числом:

1) не существует такого числа, от прибавления которого к A получалось бы A , но таков нуль ($A+0=A$), поэтому нуль не число;

2) в области непрерывных количеств: нуль ведет к признанию некоторой величины, непосредственно стоящей за нулем, так как возрастание с нуля дает противоречие: нуль является тогда – и ничем и уже чем-то – отрицанием количества и его началом.

Первое метафизическое возражение против творения⁷⁶: если что-нибудь становится чем-нибудь, например, белый человек становится черным, то что-нибудь в нем бывшее должно оставаться. Если признать, что из ничего становится что-нибудь, ничего или часть “ничто” должно остаться в чем-нибудь, так что последнее затем является и чем-нибудь и ничем.

Схоластика углубляется в тонкое различие *творчества и рожденья* (Creatio, generatio)⁷⁷. Творение – это производство из ничего, а рождение – из чего-нибудь. Рождение – это выведение (формы из потенции материи, и материя должна некоторым образом измениться, чтобы воспринять всю сущность формы.

В позднейшую эпоху схоластическая мысль приходит к учению о четырех моментах⁷⁸: *primum esse et primum non esse*, *ultimum esse et ultimum non esse* – это метафизические предки числителей и знаменателей ньютоновских первых и последних частных. *Primum esse* (первое бытие) – это положительный момент, внутренний, в котором вещь есть и только что ее не было; *ultimum non esse* (последнее небытие) – внешний отрицательный, в котором вещи нет и тотчас после этого будет, *ultimum esse* (последнее бытие), в котором вещь есть, тотчас после этого ее нет, *primum non esse* (первое небытие) вещь не есть, а тотчас была.

§ 9. Метафизика отрицательного.

Посмотрим еще, каким образом схоластическая мысль заходит за нуль, т.е. в область отрицательных величин.

Вспомним, что античная мысль по преимуществу дуалистична, в то время как современная монистична. Все античные мыслители⁷⁹ представляют принципами вещей противоположности. Даже элеаты, объявляя все единым и неподвижным, вводят в него противоположности как причины, объясняющие различные явления: Парменид – холод и тепло, Фалес и Анаксимен – грубое и тонкое, Пифагор – равное и неравное, Эмпедокл – любовь и вражду, Гераклит – сухое и мокрое, Демокрит – наполненное и пустое. Аристотель идет еще дальше: по его мнению, все явления природы происходят из противоположностей и переходят в противоположности, по-

этому и принципы их суть противоположности. Это основное аристотелевское положение резко подчеркивает различие между античным и современным мировоззрением.

Первый родоначальник а, — не-а и нуля — аристотелевская противоположность со средним⁸⁰. Прежде всего Аристотель резко подчеркивает различие между противоречием и противоположностью.

Он отмечает, что не может быть среднего между утверждением и отрицанием, в то время, как противоположности могут допускать среднее.

Следует сказать "*могут*", так как по Аристотелю есть противоположности и без среднего.

Когда же существует среднее противоположностей?

Только тогда, когда, говорит Аристотель⁸¹, среднее (А, В) принадлежит к *одному роду* с А и В.

Это следует понимать так. Можно утверждать существование среднего только в том случае, если составив по А, В понятие этого среднего, мы будем в состоянии его отнести вместе с А и В к одному роду.

Для нашей цели важно указать на положение Аристотеля о *простоте экстремов*⁸², являющихся простыми началами и о необходимой сложности среднего, которое должно содержать каким-то образом противоположности (вроде гегелевского⁸³ синтеза, соединяющего тезис с анти-тезисом).

То, что больше Р и меньше Q, должно содержать Р и Q.

Как А, переходя к В, принадлежит всегда к одному роду Ω и становится С, которое не А и не В и вместе с тем и А, и В? — вот проблема, в сущности своей представляющая проблему об отрицательном числе и нуле.

Другим предком отрицательного числа является чисто *онтологическое* понятие лишения (*privatio*)⁸⁴.

На более высоких стадиях развития схоластики это вполне определенно не *ничто* (*nilhil*). Из субъекта изъята некоторая акциденция А, при этом естественно мыслится состояние субъекта *иное*, чем то, которое имеет место при ее наличности.

Противоположение *лишения* (*privatio*) *обладанию* (*habitus*) соответствует противоположности отрицательного положительному и проблема о переходе лишения к обладанию (*a privatione ad habitum*) является метафизическим представителем математической проблемы о непрерывно изменяющейся величине, проходящей от отрицательных значений через нуль к положительным.

У самого Аристотеля лишение скорее понимается как реализованный нуль. Его положение, что от обладания к лишению может быть изменение, но от лишения к обладанию не может быть, сводится к постулату Анаксагора: *Ex nihilo nihil fit*⁸⁵.

В исследованиях возможности перехода от лишения к наличности (*regressus a privatione ad habitum*) вскрывается различие между двумя ро-

дами лишений: одного, при котором нет ничего положительного, каково лишение света и слепота зрения, и другого, при котором имеется положительная форма, соединенная с лишением другой. Примером последнего приводится не тьма, а чернота, как отсутствие белизны. Здесь – не только отсутствие белизны, но и присутствие *другого цвета*. Только лишение в этом втором смысле признается начальным членом (*egminus a quo*) трансмутации, что соответствует переходу от отрицательного к положительному.

Та же мысль выражается еще иначе: признается возможность перехода лишения в наличие при условии соединения лишения с противной формой, примером чего может служить переход холода в тепло. В определениях Фомы Аквинского⁸⁶ лишение является уже вполне определенно метафизическим представителем отрицательных величин. *Materia nunquam est sine privatione* – материя никогда не бывает без лишения. *Privatio non est aliqua aptitudo ad formam vel inchoatio formae vel aliquod principium imperfectum activum, ut quidem dicunt, sed ipsa carentia formae, vel contrarium formae, quod subsecro accidit* – лишение не представляет какое-либо прилаживание к форме или начало ее, или какой-либо вообще несовершенный активный принцип, как некоторые говорят, но отказ от формы или противное формы присущее субъекту.

Материя это то, что может быть чем-нибудь; это метафизический представитель $a=0$.

Лишение это то, что не то, что должно быть ($a < 0$).

Форма – то, через что становится что-нибудь действительным ($a > 0$).

Можно вполне ясно проследить влияние схоластических споров о лишении на эволюцию понятия об отрицательных величинах у натурфилософов эпохи Возрождения, мысль которых поднималась над уровнем схоластики, пуская глубоко туда свои корни.

Если Телезий рассматривает два элемента – тепло и холод⁸⁷ – как различные величины, Кардан⁸⁸ уже признает одно только тепло, считая холод только лишением тепла. Очевидно, понятие лишения должно пониматься здесь не в чисто аристотелевском смысле, а в схоластическом смысле, так как в первом случае возникает возражение, что лишение не принимает ни больше, ни меньше, в то время как холод может быть и больше и меньше.

Так как столько же основания считать холод лишением тепла, как и тепло лишением холода, то тепло и холод [оказываются взаимно] лишениями одно другого и в дальнейшем эволюционируют в относительные величины.

§ 10. Отношение.

Чтобы проследить в схоластике эмбрионы *иррационального* числа, следует сказать несколько слов о категории отношения в схоластике.

Аристотель в каждом отношении различает субъект, конечный член, основание⁸⁹ (*subjectum, terminus, fundamentum*). В отческом отношении⁹⁰ субъект это отец А, конечный член – сын В. Основания различаются: *ближайшее и дальнейшее* (*proximum et remotum*). В нашем примере ближайшим основанием является факт рождения отцом сына, дальнейшим – производительная способность отца (*potentia genitiva*).

Для *математического* отношения $A : B$, А субъект, В – конечный член, основанием является *количество*.

Альберт Великий⁹¹, кажется, первый подвергает глубокому исследованию четвертую аристотелевскую категорию. Он выдвигает проблему о реальности отношения. Куда следует отнести бытие отношений – к вещам или к разуму?

Если признать, что величины или числа А, В существуют, то можно ли сказать, что и их отношение существует? При этом существование можно понимать в различном смысле и проблему можно ставить шире: представляет ли отношение $A : B$ нечто большее, чем символ?

Против реализации отношения говорит тот факт, что при уничтожении одного члена отношения, другой член В не претерпевает никакого изменения. Если А отец, В сын, то между ними существует отношение отца к сыну. По смерти отца А сын В остается неизменным. Поэтому отношение не находится в В. Таким же образом доказывается, что оно не находится и в А.

Альберт думает выйти из затруднения, мысли отношение как цепь с кольцами в А и В и находя возможным реализовать только эти кольца, а не всю цепь. То, что он называет связью их, он относит к разуму, а собственно отношение полагает в вещах и утверждает, что в приведенном выше случае такие кольца находятся и в отце, и в сыне: по смерти отца первое кольцо вместе с ним исчезает, но остается другое в В – сын сохраняет сходство с отцом. При таком воззрении $A : B$ еще не является самостоятельным математическим объектом с тем же правом на существование, что А и В в отдельности, без чего оно не может претвориться затем в число.

Если $A : B = 3$, то во сколько раз А больше В (А в 3 раза больше В – первое кольцо), то во столько же раз В меньше А (В в 3 раза меньше – второе кольцо).

Фома Аквинский подробно исследует условия реальности отношений и находит следующие – необходимые, но не достаточные: субъект должен существовать, конечный член должен быть реально отличным от него, основание должно быть положительно и реально, и различно в обоих членах отношения.

Он вместе с Аристотелем различает отношения: *категорическое* (Secundum esse) и *условное* (Secundum dici). Первое относится к чистым терминам, оно может быть между всякими вещами, не предполагая особых условных обстоятельств, только при которых оно может иметь место.

Примерами могут служить отношения тождества и различия, относящиеся к категории субстанций, равенств и неравенств (количество), подобия и неподобия (качество), причины и действия (потенции).

Все эти отношения ни от чего третьего не зависят. они всегда при всяких условиях имеют или не имеют места.

Примерами условного отношения служит отношение науки к познаваемому, движущегося к движению.

Категорическое отношение дает кроме упомянутых выше трех условий еще четвертое: реальное существование обоих членов отношения.

Отношение $A : B$ теряет смысл, когда A и B не существуют.

Математическое отношение должно быть отнесено к категорическим. $B A : B$ оба A и B постулируются существующими. $A : O$ не имеет смысла как и $O : B$.

Фома защищает реальность только категорического отношения. Равенство, неравенство, подобие даются и при отсутствии мыслящего существа, их воспринимающего.

Еще до Фомы путем компромиссов идет Авиценна²², признающий реальное бытие не за всеми, а только за некоторыми отношениями.

Таким отношением он считает отчество, не перестающее существовать, хотя бы оно и не воспринималось бы душой. Таково же отношение "направо — налево".

Именно за всеми отношениями, носителем которых является один субъект, Авиценна признает реальное существование. Если A отец, B сын, то в B уже не отцовское, а сыновнее отношение.

По современной терминологии, это не коммутативные отношения. Коммутативные отношения подобия, равенства и т.д. Авиценой не относятся к реальным. Поэтому, с точки зрения Авиценны, математическое отношение не следовало бы признавать реальным.

Но математическое отношение схоластики менее всего жалует. Обычно оно выставляется как не выходящее из души отношение. Указывают²³, что вещь имеет бесконечное число отношений к своей половине, к трети, к четверти и, таким образом, является носителем актуальной бесконечности отношений.

В тесной связи с проблемой о реальности отношения стоит следующая проблема: при одинаковом отношении A к B , C ... следует ли считать в A одно отношение или несколько (AB) (AC) (AD)...?

Согласно Фоме только одно. Согласно Скотту много.

Переводя на плоскость математики: можно ли пропорцию $A : B = A : C$ при $B=C$ рассматривать, как тождество?

В этой постановке вопроса не спрашивается, есть ли А:В число, а спрашивается, нельзя ли равенство отношений при равенстве членов рассматривать также как равенство чисел, для которых А:В понимается так: число А то же, что В.

За проблемой о реальности отношения, получающей компромиссное решение, стоит другая проблема: о тождественности или различии членов отношения от самого отношения⁹⁴.

Фома Аквинский отделяет в сфере реального существования субъект от отношения, разделяя субъект на собственно субъект и лежащее в нем отношение. Хервей⁹⁵, оставаясь при таком разделении, отвергает отношение как составной элемент субъекта. Диоран⁹⁶ дает различные решения, смотря по тому, имеет ли он дело с логическим отношением, содержащимся только в понятиях (*relatio praedicamentalis*), или с реальным.

Для первого — отношение не различается от субъекта, для второго — такое различие имеет место, и отношение отделяется от субъекта так, что последний остается без второго.

Для первого А понимается в более широком и более узком смыслах. С более широкой точки зрения можно читать $A = A : 1$.

Для второго — это всегда невозможно.

Различаемость отношения от членов отношения Д. Скотт⁹⁷ доказывает на основании аксиомы: “каждая вещь различна от другой, которая может существовать без нее, не рождая противоречия”.

Так Платон отличается реально от Сократа, ибо нет противоречия, чтобы один существовал без другого.

Но существуют многие отношения, такие, что вещи, к которым они относятся, могут, не рождая противоречий, существовать без них. Так, о каждой можно что-нибудь знать и не знать.

Другое доказательство Д. Скотта основывается на аксиоме: ни одно конечное существо не может в себе содержать противоположные вещи без внутреннего различия от них. А содержит В и С, противоположные друг другу, но при этом обязательно А отличается от В и от С.

Подобие и неподобие, равенство и неравенство с какими-либо вещами противоположны, но подобие В и неподобие С, равенство В и неравенство С могут находиться в одном субъекте А.

Отсюда следует, что А отлично от отношения подобия с В и от отношения подобия с С, от равенств с В и неравенств.

Вне сомнения, это признание самостоятельности А:В в направлении арифметизированного отношения.

§ 11. Иррациональное число как отношение⁹⁸.

У Евклида математическое отношение это не число, это один из видов аристотелевского отношения. Евклид дает ему следующее определение:

“Это некая взаимная зависимость двух однородных величин по их количеству”⁹⁹.

Но определение это остается логически не действующим.

Рабочим является 5-е определение – тождественности отношений¹⁰⁰. “Величины, – говорится, – суть в том же отношении, первое ко второй и третьей к четвертой, когда равнократные второй и четвертой, взятые по какому-либо краткованию, суть таковы, что попеременно каждая каждой или купно равны или купно больше или купно меньше”.

На алгебраическом языке

$$a : b = c : d$$

если при всяких целых числах, т.е. таких, что

$$ma > nb \text{ также } mc > nd$$

$$ma < nb \text{ также } mc < nd$$

$$ma = nb \text{ также } mc = nd$$

Для Евклида, как мы уже выше заметили, число – это собрание единиц, так, что и дробь для него не является еще числом. Между геометрическими величинами и числами еще нет взаимно-однозначного соответствия; отношение двух отрезков, площадей или объемов $a:b$ еще не сводится к отношению двух чисел.

Евклиду приходится строить две теории пропорций: величин в 5-й книге и чисел в 7-й книге.

С нашей точки зрения, ему приходится повторяться. Но это только с нашей точки зрения, а не с точки зрения самого Евклида. У него не только нет взаимнооднородного соответствия между геометрическими величинами и характеризующими их числами, у него нет и идеи, объемлющей видовые понятия геометрической величины и числа, которая является результатом дальнейшей эволюции математической мысли.

Чисто формальная точка зрения противна Евклиду, определение совокупностью формальных законов ему чуждо.

Число и прямолинейный отрезок (в его терминологии – прямую) он не решается отнести к одному классу в силу тождественности формальных законов, которым подчиняются соответствующие операции над ними.

Величины в I книге (см. акс. 8) взаимно налагаются.

Аксиомы 1, 2, 3¹⁰¹:

“Величины, равные одной и той же величине, равны между собой”.

“Если к величинам равным придадим равные, то получим равные суммы”.

“Если от величин равных отнимем равные, то получим равные” и т.д. все относится не к числам, а к геометрическим величинам, т.е. к классу, в который отнюдь не входят числа.

Что является в высокой степени интересным – это то, что эти и другие аксиомы лежат в основе арифметики¹⁰² Евклида, так как все ариф-

метические действия над целыми числами Евклид сводит к действиям над особым классом отрезков, *составленных из одного определенного, отвечающего единице.*

Между отрезками этого класса и целыми числами существует взаимно-однозначное соответствие, и оно позволяет Евклиду, идя в обратном современному направлении, свести не геометрию к арифметике, а арифметику к геометрии.

В дальнейшей эволюции математической мысли отношение становится числом. Оба понятия сливаются между собой, потому что законы соответствующих формальных операций над ними оказываются теми же. Здесь начинается тот математический формализм, который в конечном итоге одерживает окончательную победу над противоположным схоластическим направлением, в котором центр тяжести кладется в анализ понятия, а не в формальные операции.

Схоластика резко противопоставляет число отношению.

Число это *абсолютная акциденция*. Число – количество, а как таковое, согласно Аристотелю, формально абсолютно.

О количестве говорится не как об *относящемся к чему-либо*, но как о *количестве* чего-либо.

Нельзя сказать, что число берется относительно единицы, как измеренное относительно меры, так как число есть не само отношение, а то, на чем последнее основывается – 5 и $5 : 1$ представляют собой различные сущности. Если ввести символ “=”, то $5 = 5 : 1$, во всяком случае, не абсолютное тождество; 5 , согласно более поздней терминологии, число-индекс¹⁰³ отношения $5 : 1$, 2 – число-индекс отношения $6 : 3$, причем, такой индекс не всегда существует. Он не существует для случая отношения величин несоизмеримых, например, диагонали и стороны квадрата.

Только у Арно¹⁰⁴ отношение становится величиной, хотя еще и с эпитетом “относительной”, так что количеству отказывается в безусловной абсолютности.

Но Ньютон уже всякое число рассматривает как отношение.

“Под числом, – говорит Ньютон¹⁰⁵, – разумеют не собрание многих единиц, а скорее отношение абстрактное одного количества к другому того же рода, которое рассматривается как единица”.

Для того, чтобы и всякое отношение оказалось числом, необходима была арифметизация.

Геометрия, которая через Бертрана¹⁰⁶ шла к Лежандру¹⁰⁷, уже постулирующему взаимно-однозначное соответствие между числами и геометрическими величинами. Для Лежандра всякое отношение – число рациональное или иррациональное.

Теория геометрической пропорции у него сливается с арифметической.

Можно указать следующую схему эволюции мысли, ведущей к иррациональному числу из Евклидова отношения:

- 1) Реализация отношения: отношение отвоевывает себе право на существование наряду с членами отношения.
- 2) Оно становится количеством — относительной величиной, не будучи еще числом.
- 3) Всякое число становится отношением. всякое отношение числом.

III. Первые шаги буквенной алгебры. (Конец XVI века).

§ 1. Числовая и буквенная алгебра с методической точки зрения.

Обычно начинают изучение алгебры с буквенных формул, сперва учатся определять их числовое значение, затем производить над ними действия, а *числовая алгебра* является уже позже¹⁰⁸.

Но мне представляется это методической ошибкой. Решение числового уравнения усваивается целиком гораздо легче, чем решение уравнения буквенного. Обозначение неизвестного каким-либо символом — более простая идея, чем обозначение символами различных величин, предполагаемых заданными, но тем не менее имеющими произвольное значение.

Каждый из учителей знает то затруднение, которое возникает при решении буквенных уравнений признание членов a^3x , $2a^3x$, ax подобными в противоречии с раньше устанавливаемым понятием подобия.

К числовой алгебре следует подводить уже при решении арифметических задач, согласно историческому ходу алгебры, представляя решение сперва в риторической¹⁰⁹ затем *синкопированной*¹¹⁰ и, наконец, *символической* форме, но производя те именно операции, которыми задачи эти решает алгебра.

Привожу примеры¹¹¹:

10 грифелей и 20 карандашей стоят 1 р. 20 к.

10 грифелей и 25 карандашей стоят 1 р. 45 к.

Что стоит грифель и что стоит карандаш?

Решение в форме *наглядно-риторической*: так как во втором случае приходится платить больше и притом на 1 р. 45 к. — 1 р. 20 к. = 25 к., то это потому, что было $25 - 20 = 5$ лишних карандашей. Значит 5 карандашей стоят 25 к., а один $25 : 5 = 5$ к.

От этой формы легко перейти к форме

10 гр. + 20 кр. = 120

$$10 \text{ р.} + 25 \text{ кр.} = 145$$

и путем вычитания получить

$$5 \text{ кр.} = 25 \text{ коп.}$$

и, наконец, в форме чисто символической:

$$10x + 20y = 120$$

$$10x + 25y = 145$$

$$5y = 25$$

$$y = 5$$

Следующим типом являются задачи, определяемые уравнениями:

$$kax + b_1y = c$$

$$ax + b_2y = d$$

25 мер овса и 20 пудов сена стоят 16 р. 50 к.

5 мер овса и 12 пудов сена стоят 4 р. 90 к.

Устанавливается, что 25 мер овса и 60 пудов сена стоят 24 р. 50 к., а разность, т.е. 40 пудов сена, стоят 8 руб., поэтому 1 пуд. — 20 к. От наглядно-риторического решения переходим к символическому решению уравнений:

$$25x + 20y = 1650$$

$$5x + 12y = 490$$

обычными приемами.

Наконец приходим к типу, отвечающему общему случаю:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

За 7 груш и 11 яблок уплачено 29 к.

За 9 груш и 12 яблок уплачено 33 к.

Сколько стоит груша и яблоко?

Следует отметить еще одно затруднение при прохождении буквенной алгебры.

Под $a, b, c \dots$ разумеются числа¹¹².

Но какие числа? В иных случаях самый ход действий предполагает, что $a, b, c \dots$ обязательно целые числа, когда, например, находим общий наибольший делитель 50, a^3, b^4, c^4 , и 75, a^2, b^3, c^2 , объявляя его равным $25a^2b^3c^2$. В других же случаях, например, при определении числовых значений формулы, a, b, c имеют и дробные рациональные значения. В дальнейшем a, b, c — уже какие угодно числа, как рациональные, так и иррациональные.

§ 2. Величины различных измерений старой алгебры.

Методические изыскания должны идти параллельно историческим. В иных случаях, хотя далеко не всегда, история может кое-чему научить методиста. Я подчеркиваю: не всегда, так как великий биогенетический закон, приравнивающий филогенетическое¹¹³ развитие онтогенетическому¹¹⁴, — это

только грубое приближение. Бесспорно, что кое-что в алгебре давалось трудно алгебраистам XVI века по тем же причинам, почему и учеником оно трудно усваивается.

Так, повторяю, идея числовой алгебры проще, а потому и хронологически алгебра *числовая* предшествовала *буквенной*.

Но прибавлю, что много затруднений возникло и от основного взгляда на алгебру, на понимание смысла ее символов, причем через это понимание теперь, при арифметизированной с самых азов алгебре, ученик не должен проходить.

Когда предлагается *буквенное* уравнение

$$ax^2 + bx = c,$$

что означают буквы a , b , c и x (то, что в старой алгебре называлось *характеристиками*)? У нас такой ответ: a , b , c ... *известные числа*, x – *неизвестное число*. Но если мы возвратимся к XVII и XVIII вв., то увидим другое положение.

Алгебраическая величина – это класс, объемлющий два вида *непрерывных* величин, каковыми являются геометрические величины: длины, поверхности, объемы и *дискретные*, т.е. числа, причем понятие числа не идет дальше рациональной области¹¹⁵, а b понимается или как результат умножения числа a на число b , или как результат умножения отрезка a на отрезок b , причем это последнее подвергается также эволюции: в первоначальном понимании это площадь прямоугольника, настроенного на a и b (между a и b , как говорит Евклид)¹¹⁶.

Но над этими понятиями стоит объемлющее их понятие умножения (*multiplicatio*), понимаемое как *получение количества*, которое к умножаемому имеет то же отношение, какое множитель к единице (Ренальдини¹¹⁷ говорит – “*к positum*”, т.е. положенному, избегая говорить “к единице”, относя последнюю только к числам).

Виэта¹¹⁸ говорит: числовая логистика (по нашему алгебра) это та, которая оперирует с числами, специфическая же оперирует видами (*especies*) или формами, как буквами алфавита.

Виэта различает величины различных порядков:

линейные

площади – *planum*

телесные – *solidum*.

Что они теряют свой первоначальный геометрический смысл, это следует из того, что Виэтой признается и *solidum-planum* и *planum-planum*¹¹⁹ и т. д.

Но, во всяком случае, это *разнородные* величины, которые нельзя складывать и вычитать¹²⁰.

Но возможно *умножение* и *деление*, а так же понятие *равенства отношений*, или *пропорции*; отношения, как к однородным, так и к неоднородным величинам.

Можно писать пропорции

$x \text{ plan} : A \text{ plan} = B \text{ sol} : 1 \text{ solid}$,

дающую, согласно определению умножения:

$x = A \text{ plan} \cdot B \text{ sol}$.

Умножение алгебраическое ни в коем случае не сводится к сложению. Эта мысль выявляется и в принятой Визтой символике:

18Q это 18 раз взятый квадрат:

$Q + Q + Q + \dots$ всего 18 раз.

Произведение же A на B пишется так

A in B.

Насколько серьезное затруднение рождает этот взгляд, можно видеть из следующего характерного примера. Визта выдвигает операцию: "protonesciation"¹²¹, ведущую к превращению первого члена в последний и обратно.

С нашей точки зрения это весьма элементарная операция: преобразование уравнения:

$$x^3 - bx = a \quad (1)$$

подстановкой

$$x = \frac{a}{y} \quad (2)$$

Подстановка эта дает сперва

$$\frac{a^3}{y^3} - \frac{ba}{y} = a,$$

а по сокращении на a и умножении на y^3

$$a^2 - by^2 = y^3.$$

или

$$y^3 + by^2 = a^2$$

Но Визта так не может поступать. Во-первых, при его понимании характеристик уравнение (1) просто не имеет смысла: из объема вычитается площадь и в результате получается длина.

Следует заметить, что неизвестные у Визты означаются не последними буквами алфавита, а гласными.

Уравнение (1) представляется¹²² в следующей синкопированной форме:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Acubus} \\ \text{- B plano in A} \end{array} \right\} \text{aequal} . Z \text{ solido}$$

Если положим A^{123} равным $\frac{Z \text{ sol}}{E \text{ pl}}$, то куб A будет

$$\frac{Z \text{solido} \cdot \text{solido} \cdot \text{solido}}{E \text{plano} \cdot \text{plano} \cdot \text{plano}};$$

$\frac{Z \text{solido}}{E \text{plano}}$ умножается на В в алгебраическом смысле.

Согласно терминологии Визты – *ducetur in B planum*; в результате уравнение обращается в следующее:

$$\frac{Z \text{sol} \cdot \text{sol} \cdot \text{sol}}{E \text{pl} \cdot \text{pl} \cdot \text{pl} \cdot \text{pl}} - B \text{pl} \frac{\text{in } Z \text{sol}}{E \text{pl}} \text{ aeq} \cdot Z \text{solido}$$

Дальше идет умножение на $E \text{pl} \cdot \text{pl} \cdot \text{pl}$, *Antithesis* (или перенос второго числа в первую с измененным знаком) и перестановка частей уравнения.

$E \text{pl} \cdot \text{cubus} + B \text{plano in } E \text{plano quadrato} \text{ aequatur } Z \text{solidi quadrato}$
или

$E \text{ cub} + B \text{ plan aeq } Z \text{ solidi quadrato}$

Понимая же Е как величину *итого измерения*, чем А, получается довольно серьезное затруднение. Обычно во второй части ставится $Z \text{solid}$, неизвестные всегда *линейные* величины, а преобразование приводит к уравнению, в котором корень понимается уже в *новом* смысле.

§ 3. Различные понимания характеристик.

Между этими примитивными взглядами и *арифметизацией* алгебры, сделавшейся возможной только по установке взаимно-однозначного соответствия между числами и геометрическими величинами, усматривается промежуточный момент, когда а рассматривается, как *прямолинейный отрезок*¹²⁴ и всякие действия над буквами, например, ab сводятся к действию над отрезками.

На ОА и ОС откладывается $OA = a$, $OC = 1$ длины; проводится АС; на ОС откладывается $OB = b$ и из В проводится $BD \parallel AC$; тогда $OD = x = ab$, так как

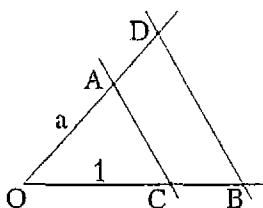
$$x : a = b : 1$$

Возможность приложения буквенной алгебры к числам в этом смысле обуславливается тем, что формальные законы операций: сложения, вычитания, умножения и деления отрезков те же, что соответствующих действий над числами¹²⁵.

Картезианский взгляд позволяет же отбросить *planum* и *solidum*.

Уравнение в современном чистом виде

$$x^3 - ax = b$$



Черт. 1.

имеет теперь определенный смысл: разность двух отрезков, определенным образом построенных с помощью неизвестного отрезка, равна данному.

Так Декарт понимает и уравнение между двумя величинами x , y , определяющее кривые.

§ 4. Число индусов и греков.

Первые последователи Визы резко отличали *числовую* алгебру (*algebra*) от буквенной (*speciosa*).

Первая всегда изменялась *раньше* второй и мы видели, что переход от первой ко второй представлял некоторые затруднения, которых в настоящее время, когда характеристикам дается значение численное, уже нет.

Численный характер алгебры, как мы уже заметили, становится возможным только по установке взаимно-однозначного соответствия между геометрическими величинами и числами (в частности только отрезками и числами)¹²⁶, т.е. соответствующим расширением понятия числа, включающим в области чисел и числа иррациональные. Это можно отнести только к Лежандру¹²⁷, т.е. это произошло гораздо позже, чем обычно думают.

У *индусов* алгебра говорит о *рациональных* числах. Как и наша алгебра, все действия она относит к числам, но при этом берет только числа рациональные; из двух вышеупомянутых видов алгебраической величины она берет только первое.

Греки старались *убеждать*, в то время как индусы стремились только *показать*.

И те и другие выводили числовые тождества, как $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ из геометрического чертежа, но с той разницей, что у греков чертеж сопровождался словесным доказательством, а у индусов *он сам говорил*. Но говорил ли он о совершенно одном и том же или нет?

Если вникнуть глубже в характер индусского и греческого мышления, то придется признать, что для индуса положения II книги “Начал” могли быть только средством для установки числового закона, выраженного в *риторической форме*, в то время как для грека это чисто *геометрические теоремы*, которые заменяют необходимое в настоящее время приложение алгебры (например, при доказательстве обобщенной теоремы Пифагора).

Вспомним, что у греков арифметика как учение об исчислении (или лучше сказать логистика, ибо арифметику, как учение *о свойствах чисел*, они отличали от науки о методах вычисления), развивалась очень медленно; к четырем арифметическим действиям они не могли прибавлять еще действий извлечения корней, нахождения по рациональному числу такого, которое в квадрате даст это рациональное число, ибо признать иррациональные числа они *еще не могли*; но и верить в то, что $\sqrt{A}$ число рациона-

нальное, т.е. такое, которое античный мир только и признавал, они тоже не могли, так как для некоторых случаев уже имелось доказательство того, что это невозможно, и имелось достаточно аргументов за то, что это и вообще невозможно.

Иное дело индусы¹²⁸. Вероятно, у них была вера во взаимно-однозначное соответствие между числами и геометрическими величинами, но только не как у нас, в области рациональных и иррациональных чисел, а только чисел *рациональных*. Геометрическая проблема у них сводится к алгебраической проблеме решения уравнений. Последнее же разрешается с помощью ряда операций, которые являются следствием общих риторических формул; из них только некоторые устанавливались с помощью чертежа в указанном выше смысле.

§ 5. Алгебра арабов.

Арабская математика¹²⁹ это синтез греческой и индусской.

У арабов нет взаимно-однозначного соответствия между числами и геометрическими величинами. Отсюда *раздвоенность* их алгебры.

Числовые уравнения определяют неизвестные числа, но эти же уравнения можно мыслить и как определяющие *неизвестные* геометрические *величины*.

Риторическая формулировка Амаями уравнений: "Квадрат и десять корней равны тридцати девяти; ($x^2 + 10x = 39$ — прим. ред.) здесь квадрат то же, что *δυνάμις* (степень) у Диофанта, результат перемножения самого на себя; корень это само неизвестное число, названное так по геометрическому решению, потому что когда число определяет площадь квадрата, корень определяет его сторону.

Этим уравнениям можно придать форму в визтовской символике:

$$Q + 10R = 39,$$

но уравнение это относится и к *геометрическим* величинам, т.е. мыслится как

$$AQ + 10 \text{ in } A = 39 \text{ sol},$$

причем решив последнее, можно решить и первое, но первое может не иметь решения, когда второе его имеет.

Амаями, высказывая для уравнения

$$x^2 + px = q$$

общую риторическую формулу

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2},$$

замечает, что если вопрос *арифметический*, то необходимо выполнение двух условий: 1) чтобы число корней, т.е. p было четное (т.е. делимое на

2, для получения $\frac{p}{2}$ целым), и 2) чтобы квадрат половины числа корней p и число q составляли в сумме полный квадрат; в противном случае вопрос арифметически невозможен, но *геометрически* не представляет затруднения.

Арабами устанавливаются геометрические выводы¹³⁰ общих формул или общих правил разрешения уравнения. В до-алгебраический период геометрические задачи, разрешаемые с помощью уравнений 2-й степени, сводятся к одной исследованной Евклидом задаче. Впрочем, сам Евклид это не всегда сознает. Задачи второго порядка у него сводятся к различным геометрическим задачам, им разрешаемым.

Видимо, эта возможность была признана только арабами, заменившими общую задачу Евклида более частной и более простой.

Из этой задачи и извлекались сперва формулы решения квадратного уравнения.

Дальнейшая стадия, это замена ее выводом, аналогичным доказательствам II-й книги "Начал" Евклида, это доказательство приводит возможность установления, по образцу II-й книги, основных законов формальных алгебраических операций и вывода отсюда только с помощью этих операций алгебраических формул.

Таковыми доказательствами пользуются еще и Виета¹³¹ для уравнения:

$$x^2 + px = q \quad p > 0$$

Берется чертеж (2).

Здесь

$$AB = x, AG = p$$

AG делится пополам, $GD = DA$ и на DB строится квадрат.

Если отложить на EG $\perp GB$ $EG = x$ и привести $EL \parallel AB$, то диагональ BH пересечет EL в вершине K квадрата $ABKL = x^2$.

Формула

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \frac{p^2}{4},$$

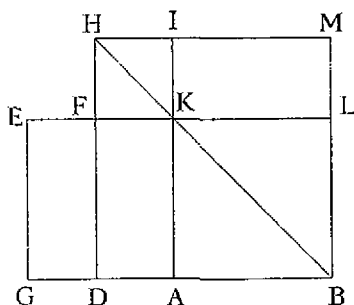
дающая

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$$

доказывается тем, что, если

$$q = DBMKF,$$

то, с одной стороны,



Черт. 2.

$q = ABLK + KLMI + DAKF = x^2 + px$,
а с другой стороны,

$$DBMH = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2, \text{ т.е. } DB = x + \frac{p}{2}$$

и вместе с тем

$$DBMIKF + FKIH = q + \frac{p^2}{4}$$

§ 6. Отрицательные числа.

Одно из самых серьезных затруднений у старых алгебраистов в том, что они не имеют в нашем смысле (т.е. количественном) *отрицательных*¹³² величин. Правило перемножения знаков носит исключительно операционный характер и основывается на тождестве:

$$(a - b)(c - d) = ac + bd - ad - bc,$$

выводимом геометрически¹³³, в силу чего оно относится только к случаю, когда

$$a > b > 0, c > d > 0.$$

Это, конечно, усложняет уже и числовую алгебру, заставляя рассматривать особо каждый из таких случаев¹³⁴:

$$x^2 + px = q$$

$$x^2 - px = q$$

$$px - x^2 = q$$

Следует отметить, что так как геометрическое доказательство ведется только с положительными величинами, то если бы кто-либо из старых алгебраистов и дошел бы до отрицательных величин в нашем смысле, то он мало бы выиграл, так как для каждого из упомянутых трех случаев пришлось бы строить особое доказательство.

Отрицательные корни рассматриваются поэтому, как решения *невозможные*.

Если характеристики у старых алгебраистов не числа, а величины в более широком понимании, то, с другой стороны, они означают только *положительные* величины, вследствие чего и для *буквенных* уравнений приходится рассматривать различные типы, соответствующие различным знакам коэффициентов.

У нас разность $A - B$ всегда имеет смысл, у Виэты¹³⁵ только тогда, когда $A > B$.

Конечно, при этом возникает большое затруднение: при произведении вычисления растет число ограничительных условий. Если $A - B$ имеет смысл при $A > B$, то $(A - B) - (C - D)$ уже при $A > B$, $C > D$ и $A - B > C - D$.

Только при таких ограничительных условиях имеет смысл и доказывается тождество

$$(A - B) - (C - D) = A - B - C + D.$$

Ринальдини выход из этого затруднения находит не в отрицательных числах, а в операциях, объемлющих их

$$A - B \text{ при } A > B \text{ и } B - A \text{ при } A < B$$

и означаемых через $A - B$.

Она дает возможность некоторые (но далеко не все) тождества представить уже в буквенных формулах:

$$(A - B)C = AC - BC \text{ при } A > B$$

$$(B - A)C = BC - AC \text{ при } A < B$$

но

$$(A - - B)C = AC - - BC \text{ всегда}$$

$$A - B - (C - D) = (A + D) - (B + C) \text{ при } A > B, C > D, A + D > B + C$$

$$B - A - (D - C) = (B + C) - (A + D) \text{ при } B > A, D > C, B + C > A + D$$

$$\text{но } (A - - B) - (C - - D) = (A + D) - - (B + C) \text{ всегда и т.д.}$$

§ 7. Основные алгебраические операции Виэты.

Методы Виэты, конечно, весьма примитивны в сравнении с нашими, но они необыкновенно интересны как эмбрионы наших совершенных методов.

Я уже заметил, что для учащегося трудным моментом является деление на буквенный коэффициент при неизвестном. Этот момент и старым алгебраистам не представлялся столь простым, как нам, и Виэта выставляет эту операцию как основную, называя ее *parabolismus*¹³⁶, в то время как перенос члена из одной части в другую им называется *antithesis*¹³⁷.

Третья операция Виэты *hyperbolismus*¹³⁸ — деление на неизвестное, приведение, например, уравнения $ax^2 = bx$ к уравнению $ax = b$.

Но он сознает недостаточность этих трех операций для получения формально-алгебраическим путем, а не геометрическим рассуждением, корней квадратных и кубических уравнений, и он применяет *подстановку*, которая является *прототипом чирнгаузеновского преобразования*.

Эта операция называется им *plasma*¹³⁹ — плазма имеет целью упростить уравнение; для квадратного уравнения — приведением его к чистому.

Не желая читателя затруднять символикой Виэты, я выражу его мысль на нашем языке. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ подстановкой $x = y + h$ (*) приводится при надлежаще выбранном h к

$$\alpha y^2 + \beta = 0.$$

То же преобразование применяется Виэтой¹⁴⁰ и к упрощению уравнений высших степеней.

Кроме преобразования $x = y + h$ рассматриваются еще следующие:

$$x = \frac{y}{b}, x = by, x = \frac{by}{g}, x = \frac{bg}{y}, x = \frac{d - y^2}{y}.$$

Последнее употребляется Визтой для решения уравнений 3-й степени, а именно через приведение его при $3d = p$ к уравнению:

$$y^6 - gy^3 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

Так называемое *exrignatio per unicas*¹⁴¹ – сведение к уравнению, освобожденному от некоторых степеней, и *protonesciation*¹⁴², о котором мы выше говорили, представляют здесь, собственно, такого же типа операции, но направленные на *определенные* члены: *isometria*¹⁴³ – умножение дробности подстановкой $y = x$, *anastrophe*¹⁴⁴ – преобразование *коррелятивных* уравнений одно в другое.

При этом под коррелятивными уравнениями разумеются:

$$bx - x^2 = c \qquad by - y^2 = c$$

$$x^2 + bx = c \qquad y^2 - by = c$$

$$bx - x^2 = c \qquad y^2 - by = c$$

§ 8. Странности старой алгебры.

Интересно отметить, что второй операцией после антитезы выставляется *превращение уравнения в пропорцию*¹⁴⁵.

В настоящее время применяется обратная операция: пропорция

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ сводится к } AD = BC.$$

Теперь никто уже не решится сводить квадратное уравнение

$$x^2 + ax = b^2 \text{ к пропорции } \frac{x}{b} = \frac{b}{a+x}$$

Мы легко поймем эту страшность, если вспомним что у Визты алгебра еще не освободилась от геометрии, что решение уравнений легче иногда сводится к задачам геометрии, в которых пропорция играет важную роль, входя во многие теоремы. Значит пропорция здесь открывает не путь к формальным алгебраическим операциям, дающим решение, а к выводу решения чисто *геометрическим* путем.

Другая странность обнаруживается в той форме, в которую облачается известное и столь видную роль играющее в элементарной алгебре положение о сумме корней квадратного уравнения. Мы скажем, что, если x_1 и x_2 – корни уравнения

$$bx - x^2 = C,$$

то

$$x_1 + x_2 = b$$

Но форма выражения у старых алгебраистов совсем другая¹⁴⁶:

Даны два уравнения

$$bx - x^2 = c \quad by - y^2 = c,$$

если x корень первого, y – второго, то

или $x = y$, или $x + y = b$.

Не будем забывать, что отрицательных корней нет у Виэты¹⁴⁷, поэтому положение для уравнений

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

не имеет смысла.

Но можно сказать, что, если x определяется уравнением

$$x^2 - x - 6 = 0,$$

а y уравнением

$$y^2 - y - 6 = 0,$$

то или $x = y$, или $x + y = 1$, причем следует брать именно *первый* случай.

Указанное свойство берется не особняком, а как одно из свойств пар коррелятивных уравнений.

Для уравнений

$$x^2 + bx = c \quad y^2 - by = c$$

получаем

$$x = y \text{ или } x - y = -b$$

для уравнений

$$bx - x^2 = c \quad y^2 - by = c$$

$$x - y = -b$$

Операции, которые приводят к намеченным результатам, это те, которые в школьной практике применяются к решению систем уравнений с двумя неизвестными.

Интересно еще отметить, что Виэта не выводит раз навсегда формулы

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (**)$$

для того, чтобы, как делаем мы, например, находя

$$(x^3 - bx^2)^2,$$

подставлять в **(**)** x^3 вместо a и $-bx^2$ вместо b .

Учащиеся всегда именно в этом пункте встречаются затруднения. Необходимо поработать над учеником, чтобы он научился свободно оперировать *целыми выражениями как буквами*. Но, я думаю, причину этой странности следует искать не только в непривычке оперирования буквенными выражениями как буквами, но в некотором видимом противоречии общности формулы с пониманием самих характеристик.

Закон **(**)** просто нельзя было выразить *одной* формулой.

Для B, C линейных можно писать

$$(B + C) \text{ in } (B + C) = BQ + B \text{ in } C.2 + CQ$$

Но, если они *планит*, то получается формула совершенно иная:

$(Bpl + Cpl) \text{ in } (Bpl + Cpl) = Bpl.Bpl \text{ in } Cpl.2 + Cpl, Cpl \text{ и т.д.}$

Кроме того, различно следует их писать для случая, когда величины известны и когда неизвестны, ибо принято обозначать гласными неизвестные, согласными известные.

Этот закон, невыражаемый т.о. формулой символически, не выражается и риторически; результат всегда получается процессом умножения.

Чаше всего приходится встречаться с этим в приведении к *климатической симметрии*¹⁴⁸, что теперь называется освобождением от иррациональностей.

Приводим в виэтовской символике ход действий над уравнением:
 $AC - Bpl \text{ in } A \text{ aeq } RZ \text{ sol. sol}$

здесь $RZ = \sqrt{Z}$

$AC - Bpl \text{ in } A$

$AC - Bpl \text{ in } A$

$- Bpl \text{ in } AQQ + Bpl.pl \text{ in } AQ$

$ACC - Bpl \text{ in } AQQ$

$ACC - Bpl \text{ in } AQQ.2 + Bpl.pl \text{ in } AQ$

(коэффициент всегда пишется на последнем месте).

Наконец

$A \text{ cubus. cubus}$

$+ B \text{ plano. plano in } AQ$

$- B \text{ plano in } AQQ \text{ bis aeq } Z \text{ solido. solido}^{149}$

Отметим, что дальнейшее упрощение символики осуществляется тремя принципами:

1) буквы, поставленные друг около друга без знаков + или -, должны *перемножаться*

2) AQ обозначается в силу этого через AA , AC через AAA , затем AAA через A^3 и т.д.;

3) коэффициенты пишутся, во избежание возможного смешения A^2 и $A2$, в начале.

В первом издании своего труда Ренальдини еще вполне следует виэтовской символике, но в 1665 году он уже пишет:

$a^2 + 2ae + e^2 + bpl$

$$\frac{a + e}{a^2e + 2ae^2 + e^3 + bpl.e}$$

$$\frac{a^3 + 2a^2e + ae^2 + bpl.a}{a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3 + bpl.e + bpl.a} \quad 150$$

§ 9. Синкопированная буквенная алгебра.

Числовая алгебра прошла три стадии: *риторическую*, в которой все высказывалось словами, *синкопированную*, где слово смешивалось с символом, и наконец *символическую*, в которой слово заменялось письменным символом. Можно сказать, что буквенная алгебра у Виэты находится еще в синкопированном периоде и если сравнить изложение – хотя бы решение квадратного уравнения числового и буквенного – то бросится в глаза *словесность* последнего.

Приводим это место из Виэты сперва на латинском языке, затем в переводе на русский:

I.Si A quadr. + B.2 in A aequantur Z plano

A + B est E

Igitur E quad.aequabitur Z plano + B quadr.

Consectarium.Itaque $\sqrt{Z\text{плоск.} + B\text{квадр.}} - B$

fit A de qua primum quaerebatur.

Sit B 1 Z planum 20 A 1 N

1 Q + 2 N aequatur 20 et fit 1 N $\sqrt{21} - 1$.

Если A квадрат + B2 на A равняется Z плоскому; A + B пусть E.

Итак E квадр. будет равняться Z плоск. + B квадр. Следствие.

Итак

$\sqrt{Z \text{ плоск.} + B \text{ квадр.}} - B$ будет A

которое и требовалось найти.

Пусть B 1. Z плоск. 20 A 1 N 1Q + 2N будет равняться 20 и будет

1N $\sqrt{21} - 1$.¹⁵¹

Было бы неправильно представлять ход развития буквенной алгебры совершенно аналогичным ходу развития числовой алгебры.

В числовой алгебре слово играет роль не только обозначения; это словесный символ, над которым производятся те формальные операции, которые затем производятся над письменными символами.

С “вещью” производят то же, что с x: ее переносят из одной части в другую с измененным знаком, вещи складывают и вычитают и т.д.

Приводим пример из Бэг-Эддина¹⁵²:

“Кто-то спросил, сколько времени прошло ночью? Он ответил: треть прошедшего времени равна четверти остающегося. Сколько прошло времени и сколько осталось?”

Прими прошедшее время за вещь, тогда остается 12 без вещи; отсюда треть протекшего времени равна 3 без четверти вещи. После приложения “algebr” треть и четверть протекшего времени равны 3.

Частное 5 и одна седьмая есть число протекших часов; осталось 6 и шесть седьмых часа”.

Но если коэффициенты остаются произвольными, т.е. если в нашей символике имеем уравнение:

$$ax + b = cx + d,$$

то не существовало такой риторической буквенной алгебры, которая выражала бы в словах следующие операции:

$$ax - cx = d - b$$

$$(a - c) x = d - b$$

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

Но существовали общие *риторические формулы*, выраженные собственно не как формулы, а как *правила* последовательных операций для получения конечных результатов. Например, общая риторическая формула решения квадратного уравнения¹⁵³:

Si res et census numero aequantur a rebus,

Dimidio sumpto census producere rebus,

Addere numero eius, a radice totiens

Tone semis rerum censu latusque redibit.

Если вещи (px) и квадрат (x^2) равны числу, то взяв половину вещей ($\frac{p}{2}$) и возведя в квадрат $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, прибавь ее к числу (q) и из корня из всего полученного вычти половину вещей $\left(\frac{p}{2}\right)^{154}$.

§10. Арифметические правила как риторическо-алгебраические формулы.

В точном смысле слова поэтому нельзя отнести арифметические правила, имеющие столь важное значение в старой арифметике, к риторической алгебре. Риторическая алгебра начинается только там, где мы начинаем операции над символами, выражающими *данные* величины, а не только неизвестные, а такой риторической алгебры, отвечающей буквенной, как мы заметили, вовсе не было.

В настоящее время мы имеем скорее *типы* задач на тройное, смешанное и т.д. правила, чем сами правила, которые еще в XVII веке были не чем иным, как риторическими формулами, введенными в арифметику только вследствие их практического значения в жизни.

“Тройное правило прямое — способ к данным трем первым числам найти четвертое пропорциональное”¹⁵⁵.

Понятие о тройном простом правиле — к данным трем первым числам сыскивается четвертое пропорциональное того же рода; из данных трех

чисел последние два умножить между собой и произведение их разделить на первое: частное будет четвертое пропорциональное.

Правило *товарищества* есть способ, с помощью которого данное число разделяется на части, другим данным числам пропорциональные.

Первый случай, когда данные числа даны без всяких обстоятельств.

1) Данные числа сложи и

2) сумму их поставь на первом месте, на втором – общее число, а на третьем – одно из данных чисел из данных и

3) тройное простое правило повтори столько раз, сколько данных чисел.

Только эти два правила дают общие риторические формулы для уравнений:

$$1) a : b = c : x$$

$$2) \begin{cases} x : y = a : b \\ x + y = c \end{cases}$$

независимо от конкретного значения.

Все же другие правила дают риторические формулы с точным указанием конкретного содержания задачи, а не риторического уравнения. Так что для двух различных по конкретному содержанию задач мы будем иметь различные правила, хотя уравнение будет тем же.

Так, правило смешанное дает возможность определить, сколько следует взять вещества данных ценностей, чтобы смесь имела данный вес и данную цену.

Но задача: N проехал всю дорогу в 190 верст от своего имени до города за 9 часов, причем ехал сперва на лошадях, делая 10 верст в час, затем по железной дороге, делая 35 верст в час; сколько времени он ехал на лошадях, сколько на поезде? – хотя и приводящая к совершенно той же системе уравнений

$$\begin{cases} ax + by = c \\ x + y = d \end{cases}$$

тем не менее не относится к правилу смешения.

Если иметь в виду купца, которого желательно научить производить с выгодой или, по меньшей мере, без убытка для себя, махинации с винами и другими товарами, то нельзя отрицать полезности изучения формул, решающих этого рода задачи.

Но в настоящее время арифметический учебник составляется для *детей* и при этом на первый план ставится не научное значение, а развитие ума.

С этой точки зрения все эти правила в значительной мере теряют свое значение. Их место должны по большей части занимать *типы* ариф-

метических задач, т.е. наглядно-риторических решений, причем типы должны определяться характером логических операций, а отнюдь не конкретным содержанием задачи.

Упомянутая только что задача должна быть отнесена к той же группе задач, что задачи на смешение вин, к задачам с решением, представляющим *арифметизированное* решение простейшей системы уравнений:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ x + y = d \end{cases}$$

по методу сложения и вычитания.

В ряде задач с наглядно-риторическими решениями, отвечающими течению совершенно различных образцов, учащийся должен прощупать одну и ту же схему логического мышления и научиться ее применять и в других подходящих случаях.

Но не следует отсюда делать заключения о необходимости исключения “правил” из арифметики.

Вне сомнения, что буквенная алгебра пускает свои корни именно в эти правила: в них именно впервые математики пытаются выразить в общей форме хотя бы *результат*, будучи еще не в силах сделать то же с самим ходом решения, общность которого они уже сознают. Совершенно таким же образом, как согласно § 1, следует от арифметических решений перейти к числовым уравнениям, от правил т.е. словесной формулы, следует перейти к буквенной формуле, но последняя не есть еще буквенная алгебра, а только преддверие в ее.

IV. Аксиоматика XVII века. (Первая половина XVII века).

§ 1. История новой аксиоматики.

История неевклидовой геометрии дает богатейший материал для психологических размышлений. Как и в других случаях, мы здесь наблюдаем эволюцию не только решения поставленной проблемы, но и самой ее постановки, так что в позднейшей стадии своего развития проблема так же мало похожа на то, чем она была раньше, как старик похож на годовалого ребенка.

Сперва это задача только о дополнении Евклида¹⁵⁶, о доказательстве недоказанной теоремы, принятой, скрепя сердце, за постулат или аксиому (Геминус, Насир-Эддин); затем об исправлении Евклида путем замены сперва его системы определений, а затем системы аксиом другими, более согласующимися с идеалами сперва рамической (Рамус¹⁵⁷, Клавий¹⁵⁸), а затем картезианской логики (Борелли¹⁵⁹, Арно¹⁶⁰). Сенсуалистическая гносеология, по которой всякое знание, даже геометрическое, вытекает из

опыта, создает мысль о возможности ошибки в постулатах евклидовой геометрии и возможности другой, более приближающейся к истине геометрии.

Таким образом возникает проблема о доказательстве истинности евклидовой геометрии (Саккери¹⁶¹, Ламберт¹⁶², Лежандр¹⁶³). Перед математиками выступают три системы геометрии, из которых две стараются исключить путем вскрытия в них противоречия.

Далее – проблема о строении неевклидовой системы геометрии, не удовлетворяющей 5-му евклидову постулату, построение логически возможных пространств, построение “*Summum genus*” – высшего рода, объемлющего эти пространства (Грассман¹⁶⁴, Риман¹⁶⁵, Гельмгольц¹⁶⁶ и Ли¹⁶⁷). Но отсутствие противоречия в геометрической системе, развиваемой в одном из этих пространств еще не доказывает, что это пространство может существовать, ибо противоречие может оказаться в тех положениях, которые не вошли в эту систему.

Здесь проблема из онтологической – о реальном пространстве, обращается в чисто логическое аксиоматическое исследование (Бельтрами¹⁶⁸, Клейн¹⁶⁹, Гильберт¹⁷⁰), в исследование совместности положенных в основании геометрической системы постулатов.

Можно сказать, что вместе с тем с глаз математиков спадает пелена, закрывавшая более широкие взгляды на задачи математики. В то время, как раньше интересовали только узлы той сети, которую образуют математические положения со связующими их логическими связями, и требовалось указать хотя бы один путь от постулатов к теореме, теперь интерес переносится на саму сеть.

В начале этой сети ряд аксиом: А, В, С... D; дальше положения Р, Q, R... Эти последние требуется не только вывести из А, В, С... D, но и требуется разузнать всевозможные системы путей, идущих от А, В, С... D и вытекающих в Р, Q, R... S, требуется определить, возможно ли доказать положения Р, Q, R... S с помощью только части выставляемых постулатов А, В, С... D. Но это еще не все. Из очевидных постулатов (таких, которые поэтому могут быть названы аксиомами) требуется найти минимум, из которого выводятся определенная система положений.

Но ту же проблему можно отнести и к неочевидным положениям и, задав ряд положений Р, Q, R... S искать, идя, так сказать, против течения в логической сети, минимум неочевидных положений, из которых, идя через различные узлы сети, можно вывести положения Р, Q... S.

Проблема: “доказать положения Р, Q, R... S” обращается в следующую:

Определить, возможно ли вывести Р, Q, R... S из положений А, В, С... D и если возможно, указать этот вывод (и даже более того, всевозможные выводы Р, Q, R... S из А, В, С... D).

Психологическое, а отнюдь не логическое свойство очевидности некоторых постулатов не дает никакого аргумента за то, что из системы очевидных постулатов можно вывести всякое положение. Поэтому, конечно, существуют *верные, но недоказуемые положения*, если доказуемость понимать так, что конечным ее результатом должны явиться убеждения в правильности выставленного положения.

Основной проблемой поэтому является следующая. Возможно ли *доказать* положение $P, Q, R \dots S$ и, если возможно, то построить доказательство, при этом изыскать среди нескольких возможных доказательств то, которое отвечает минимуму очевидных постулатов.

§2. Правила Паскаля.

Вот вкратце происхождение современной аксиоматики и ее частью решенные, частью нерешенные проблемы.

Мы стоим теперь там, где логика сходит с психологией, где уже чувствуется разочарование в идеалах чисто логической математики, где психологический анализ вскрывает, что то, что представляется чисто логическими операциями, оказывается иллюзией, приводящей к чисто психологической проблеме.

Прошедшее всегда подвергается искажению проецированием на него настоящего, многие видят в рационализме XVII века логистические тенденции последнего времени.

Верно только то, что во времена Лежандра и еще более в первой половине XIX века об аксиомах не любили говорить, и как характерное свойство лежандровых учебников¹⁷¹ можно выставить отсутствие аксиом; в XVII веке своеобразная аксиоматика занимала почетное место. Нельзя отрицать того, что математиков того времени интересовали аксиомы как и нас. Но только в них интересовало именно то, что нас в настоящее время менее всего интересует.

Это было время, в которое не логика с психологией, а метафизика сходилась с математикой, *математизировались метафизические идеи*, которым при дальнейшей эволюции математической мысли суждено было *логизироваться*.

Очевидные истины, лежащие в основе знания, представлялись тогда своего рода откровениями свыше, врожденными человеческому разуму, который при конечности опыта несет в себе не извлекаемую из опыта идею бесконечности.

Основной аксиоматической проблемой являлась поэтому не логическая проблема совместности и независимости аксиом, а *метафизическая проблема собирания полной коллекции очевидных истин*.

Рядом с этой проблемой стояла другая – о разыскании средств для повышения степени очевидности этих, правда, очевидных, но только не в равной мере очевидных истин.

Следует вдуматься в правила Паскаля¹⁷² чтобы ясно представить характер этой совершенно чуждой нам эпохи.

I. Не следует ничего определять, что само по себе так известно, что не может быть определено с помощью более простых выражений.

Это значительно уменьшает определения того значения, которое придется ему схоластической эпохой. Таким образом не следует возиться с точкой, стараясь ее тем или другим способом определить, а тем более нагружать ее несколькими определениями. Точка – нечто настолько простое, что достаточно только отрешиться от чувственности, чтобы увидеть ее, так сказать, как на ладони.

Неопределимость некоторых простейших объектов признается и логистическим направлением, но вовсе не потому, что этот объект признается постигаемым непосредственным прозрением, но потому, что это пустой символ, жизнь которому в нормально-гипотетической науке дают только относящиеся к нему постулаты.

II. Не следует оставлять без определения ни одного темного или рождающего двусмысленность выражения.

III. Следует при определениях употреблять только такие слова, которые или вполне известны, или которые тут же вполне разъяснены.

Эти два правила разъясняют сущность идеографических опытов XVII века, о которых ниже будем говорить.

Следующее правило отражает в себе рационалистический взгляд на аксиомы:

IV. Не следует проходить мимо какого-либо основного положения, как бы оно не было ясно и очевидно, без вопроса: можно ли это положение признать за аксиому.

V. За аксиомы следует принимать только то, что совершенно очевидно.

Таким образом, предполагается какой-то особый акт, с помощью которого определяется степень очевидности положения и возможность отнесения его к совершенно очевидным истинам, т.е. аксиомам.

Отсюда, конечно, один шаг до признания положений с очевидностью, колеблющейся около порога совершенной очевидности, и изыскания средств для закрепления его над этим порогом, о чем мы будем еще говорить.

В шестом правиле Паскаль отступает от Евклида, но остается столь же далек и от современной математики.

VI. Не следует ничего доказывать, что и так очевидно, что не нуждается ни в каком более ясном средстве доказательства.

Доказательство еще не является самоцелью, логическая сеть, связующая математические истины, еще не служит предметом исследования.

Совершенно не важно, связаны ли между собой логически очевидные истины.

Эти правила, не выдумка самого Паскаля, а выражение лишь того, что в его время думали, разъясняя сущность идеографических опытов XVII века, например Херигона.

Идеография XVII века — это изыскание хорошего безошибочного языка, в котором каждая вещь и каждая операция обозначаются точным символом.

Проблема логического автомата мало интересует мыслителей того времени. Характерной чертой рационалистической эпохи, в особенности более ранней, является то, что интересуются не столько методами изыскания истины, сколько методами избежания ошибок¹⁷³. В сущности говоря, как Бэкон не исследовал сущности индуктивного метода, [так и] Декарт — дедуктивного. Но оба они, главным образом, занимались ошибками, возникающими при индуктивном и дедуктивном родах мышления.

§ 3. Правила Декарта

В параллель правилам Паскаля можно здесь упомянуть и о правилах Декарта¹⁷⁴, которые представляют советы, как избежать ошибок при дедукции.

1. Первое правило позволяет принимать за истинное только то, что познано таковым *навверняка и очевидно* (*certe et evidentement*), это значит, прибавляет Декарт, следует избегать спешки в заключениях.

2. *Трудные проблемы следует расчленять на несколько, и каждую решать в отдельности.*

3. *Следует идти от более простого к более сложному.*

4. *Следует зорко следить, как бы не упустить какого-либо элемента в рассуждении.*

Можно сказать, что целью идеографии XVII века является именно избежание ошибок согласно правилам Декарта: фиксируя символами, заменяющими, вообще, с колеблющимся смыслом слова, вещи и операции над ними, расчленяя сложные на простые элементы и последние означая простыми символами, а первые их комбинациями, не пропускать ни одного важного понятия, не означив его символом.

§ 4. Операции повышения степени очевидности.

Следует обратить особое внимание на то, что рационалисты XVII и XVIII вв. признавали различную степень очевидности основных положений, признавали, что в иных случаях разум можно поставить в такое положение,

при котором степень очевидности какого-либо истинного положения возрастает.

Для этого необходимо очищение разума от чувственности, закрывающей лучи его натурального света своего рода туманом. И если мы теперь обратимся к рассуждениям рационалистов, то легко усмотрим присутствие в них особого рода доказательств, имеющих своим содержанием не строго логический вывод исследуемого положения из положений очевидных или же выведенных из очевидных, но различного рода пояснения, настраивающие так, что положения, очевидные для автора, после этих пояснений становятся в равной мере очевидными и для читателя.

Возьмем основную аксиому Арно¹⁷⁵, введение которой позволяет ему избежать неприятного для рационалистов XVII века метода наложения.

Она состоит в том, что если двум точкам C и D прямой присуще свойство равноудаленности от A и B , то то же свойство присуще всем точкам прямой CD ¹⁷⁶.

Другие авторы, делая уступку методу наложения, но желая сохранить оригинальный порядок теорем по Арно (*ordo Arnoldiani*), доказывали это положение не с помощью теорем о конгруэнтности треугольников, а с помощью сгибания, т.е. методом наложения¹⁷⁷. Арно, с одной стороны, сознавая, что он не сможет, минуя метод наложения, доказать это положение, с другой стороны, сознавая и то, что оно уступает в очевидности другим его аксиомам, вынужден употребить упомянутое выше средство убеждения, или увеличения степени очевидности.

Приводим его шесть аргументов:

“Я утверждаю, — говорит он, — что только одно созерцание (*consideration*) природы прямой линии заставляет видеть истинность этого положения и что без него невозможно сохранить в геометрии естественный порядок вещей.

Ибо: 1) Так как положение прямой зависит только от двух точек, и при задании этих двух точек оно все дано, т.е. положение всякой другой точки определено, видно (*il est visible*), что положение этих двух точек секущей линии, из которых каждая представляет равно отстоящую от двух точек, определяет все точки так, что они тоже равно отстоят”.

Это, конечно, не логическое доказательство и Арно за таковое его не выдает.

Пусть точка C находится на расстоянии d от точки A , пусть другая точка D находится на том же расстоянии d от точки A . Рассуждая по Арно, нужно было бы заключить, что и всякая другая точка E прямой CD находится на том же расстоянии d от A ¹⁷⁸.

Действие этого шаткого аргумента усиливается другим:

2) “Если бы была какая-либо точка E , более близкая к A чем к B , то прямая необходимо была бы согнута в эту сторону”.

Здесь разум приглашается к особому рода операции, к попытке построения прямой с противным аксиоме свойством.

3) “Нет основания тому, почему бы этой точке приблизиться к одной стороне предположительно перед другой, ни тому, почему приблизиться на то или другое количество.

Ибо положение данных точек, определяющих и все остальные точки прямой, может их определить только с равными расстояниями, ибо для них самих существует это равенство”.

Это весьма туманное изложение вероятно следует понимать так:

Точки С и D вполне определяют прямую CD. Плоскость ею разбивается на две части Р и Q. Если бы мы не имели $CA = CB$ и $DA = DB$, то обе стороны Р и Q различались бы по своим свойствам относительно прямой С и точек А и В, и причиной сему было бы то, что пара расстояний от А (d_1, d_2) была бы иной, чем пара расстояний от В (d'_1, d'_2)¹⁷⁹.

Но раз $(d_1, d_2)(d'_1, d'_2)$ одинаковы для обеих сторон, то и все свойства одинаковы, ибо все свойства определяются, если будут даны расстояния Е и D от А и В.

Это, конечно, не математическое доказательство. Это обращение к общим свойствам пространства, которые как бы смутно нами чувствуются, а не зрятся, как частные свойства фигур, определяемые аксиомами.

Рационалист Арно, конечно, отвергает, что какое-либо ложное положение может когда-либо сделаться очевидным.

Если положение не всегда очевидно, но *когда-либо* бывает таковым, то оно истинно, ибо существуют моменты, когда туман чувственности, застилающий истину, расходится и разум с полным внутренним прозрением постигает истину.

4) “Все геометры, — продолжает Арно, — видимо сходятся на очевидности этого положения, ибо при решении всех проблем, касающихся перпендикуляров, все их дело сводится к разысканию двух точек секущей, из которых каждая отстоит одинаково от двух точек прямой.

И какими бы рассуждениями они ни старались доказать, что их проблемы таким образом разрешаются, тем не менее ясно, что по природе вещей только именно это их решило”.

Арно хочет сказать, что тот факт, что решение ведется всегда через явно или неявно использованную его аксиому, которую при окончательном обосновании стараются обойти, указывает на лежащую уже в уме некоторую тенденцию к ее признанию.

В 5-м аргументе Арно просто апеллируется к *особому вниманию* — своего рода апперцепции очевидности.

Особенно интересен 6-й аргумент. Вера Арно в разум так велика, что он признает возможность не только вывода всех положений из очевидных, как Гильберт, но и возможность строгого проведения всей системы

доказуемых положений в некотором естественном порядке, отвечающем установленной им иерархии геометрических объектов по степени их простоты.

В 6-м аргументе он выставляет необходимость установления в основе геометрии его аксиомы для осуществления естественного порядка как доказательства не только истинности, но и очевидности этого положения, т.е. наличия какого-то тумана у тех, для кого это положение неясно само по себе.

б) “То, что должно уничтожить сомнение в том, что положение это можно принять как ясное само по себе (*claire d'elle meme*), это то, что иначе пришлось бы нарушить естественный порядок вещей и употребить треугольники для доказательства свойств линий, т.е. с помощью более сложного объяснять более простое, что совершенно противно истинной методе”.

§ 5. Херигон и Гильберт.

Если рационалисты XVII века заботились больше об очевидности основных положений, а наши современники об их минимуме, то вовсе не следует думать, что первые совсем исключили требование минимума, а вторые остаются глухи к требованиям очевидности.

Как можно меньше аксиом со слабой степенью очевидности – вот требование минимума XVII и XVIII в.в. Гильберту же при выборе своей минимальной системы постулатов приходится все-таки ограничиваться положениями очевидными, ибо иначе геометрия перестала бы убеждать. Он позволяет только быть менее требовательным в этом отношении. Если бы он отверг требование очевидности, то, может быть, достиг бы еще большего сокращения основных постулатов, но его геометрия тогда никого не убедила бы.

Попыток построения геометрии при минимуме основных неочевидных положений еще не было сделано. Но они были бы необычайно интересны: в наличии тех или иных теорем они никого не убедили бы, но они дали бы знание, с точки зрения будущей науки не менее ценное, – знание логических связей между положениями геометрии иных, чем те, с помощью которых убеждаются в их истинности.

В XVII в. ту роль, которую в недавнее время сыграл Гильберт, выполнил Херигон¹⁸⁰.

Аксиоматика Херигона сводится к коллекционированию очевидных истин, и он вполне уверен, что ему удастся, пополнив надлежащим образом Евклида, собрать полную коллекцию аксиом. Он совершенно не интересуется вопросом: зависимы или независимы аксиомы его системы, и бесспорно, что в его системе аксиом существуют зависящие между собой.

Но он интересуется тем, чем современная аксиоматика менее всего интересуется. Он еще интересуется тем, чем интересовался схоластик, смотревший вглубь понятий и различавший их не столько с точки зрения *операциональной*, сколько с точки зрения *внутреннего содержания*. Существуют геометрические объекты, играющие совершенно одинаковую роль в формально-логических операциях, *логические эквиваленты* относительно большей или меньшей части аксиом, лежащих в основе геометрии, но, бесспорно, различные между собой, хотя различие определяется такими признаками, которые не укладываются в логические термины и при развертывании геометрической системы являются логически недействующими. С логической точки зрения непрерывная система точек (пунктуал), которую несет на себе окружность, и сама окружность могут быть отождествлены, ибо, например, три точки определяют этот пунктуал и вместе с тем и его носитель — окружность; прямая может иметь с ней не больше двух точек и с этим пунктуалом и с окружностью, хотя совокупность, хотя бы и бесконечная, точек и кривая, бесспорно, — две различные вещи.

То же относится и к углу как наклонению и к углу в бертрановском смысле, как неопределенному пространству, ограниченному двумя пересекающимися прямыми¹⁸¹ и т.д.

Если при коллекционировании очевидных истин отойти от чисто формальной точки зрения, при которой происходит отождествление различных объектов, удовлетворяющих одной и той же системе формальных постулатов, то коллекция наша сильно разрастется, как это имеет место у Херигона.

Интересно исследовать и онтологические, и логические системы аксиом, которые выявляют тот же характер. У картезианца Гейлинку (Methodus, Cap. II), мы имеем как различные аксиомы: последующее верно, если предыдущее верно; говорящий, что последующее верно, говорит, что и предыдущее верно; невозможно, чтобы предыдущее было верно, а последующее не верно и т.д.

Наряду с 4-мя “постулатами” (3 евклидовских он дополняет постулатом: всегда можно взять величину большую или меньшую данной) он составляет еще 44 аксиомы (Communes notions).

Различие точек зрения рационалистической и современной (можно было бы сказать логической) выступает уже в первой группе гильбертовских¹⁸² аксиом: $I_{1,2}$. Сопряжения (der Verknüpfung) по Гильберту:

1) Две различные точки A и B определяют прямую.

2) Любые две различные точки прямой определяют эту прямую; эти аксиомы можно было заменить двумя *взаимными* (получаемыми обменом точки на прямую и обратно).

1) Две различные прямые a и b определяют точку.

2) Любые две различные прямые, принадлежащие точке, определяют эту точку.

Для Херигона же аксиомы:

- 1) две прямые пересекаются в одной только точке (9 а. в),
 - 2) две прямые имеют одну только общую точку, суть совершенно различные положения, в равной мере очевидные.
- При этом к ним присоединяются две аксиомы, устанавливающие

между ними связь:

Две прямые имеют общую точку пересечения (10 а. 1).

Общая точка двух прямых – это точка их пересечения (19 а. в).

При дальнейшей обработке мы получаем аксиомы:

- 1) Две прямые а, в имеют или все точки общими, или одну, или ни одной.
- 2) Две прямые а, в имеют или одну точку пересечения или не пересекаются.
- 3) Если прямые а, в пересекаются, то имеют только одну общую точку.
- 4) Если прямые а, в имеют только одну общую точку, то они пересекаются.
- 5) Если прямые а, в имеют две или больше общих точек, то не пересекаются, а совпадают.
- 6) Общая точка прямых а, в в том случае, когда существует одна такая точка, всегда есть точка пересечения.
- 7) Точка пересечения прямых а, в всегда их общая точка.

Конечно, при развертывании системы формально-логических доказательств

а и в равны между собой

можно заменить

$$a = b, b = a$$

установив как основной постулат, что второе отношение а, вытекает из первого.

Но в понятии равенства между собой чувствуется нечто иное, чем совокупность двух отношений $a = b$ и $b = a$, члены которых имеют *определенный порядок*. Это отношение совершенно чуждо идее порядка.

Конкретная операция проверки: (А равно В) сводится к наложению А на В, (В равно А) – к наложению В на А, – при этом основной постулат утверждает, что, если в первом случае имело место совпадение, то оно имеет место и во втором.

Проверочная операция (А и В равны) сводится к такой операции, в которой роли А и В совершенно одинаковы (в случае отрезков А и В оба переносятся так, чтобы концы их попали в одну точку и отрезки подвергаются одинаковому вращению до их совпадения).

У Херигона в его идеографии для двух этих понятий имеются различные обозначения.

$$a \text{ 2/2 } b - a \text{ равно } b$$

a & b snt $2/2$ Fe – a и b равны между собой.

Впрочем, следует согласиться, что здесь у Херигона остается неясность и незавершенность. В данном перечне его аксиом нет аксиомы эквивалентности $a = b$ и $b = a$ и поэтому равенство “ a $2/2$ b ” в его системе аксиом следует понимать скорее в смысле “ a и b равны между собой”, чем в смысле “ a равно b ”. И здесь, как в разобранный выше случае, дальнейшая обработка аксиоматической системы согласно идеям рационализма повела бы к массе новых аксиом и к дальнейшему раздуванию и без того громоздкой системы.

Обратим внимание на то, что у Херигона нет аксиомы $a = a$.

Равенство это с евклидовой и его точки зрения могло бы иметь смысл только в случае двух, а не одного объекта¹⁸³.

Отношение равенства имеет всегда два члена.

Сказать $\Delta ABC = \Delta ABC$ все равно, что сказать, что я сам себе брат.

Иное дело логическая аксиома тождества “ A есть A ”, здесь первый член не одно и то же, что второй: первый индивидуум, второй же класс. “ A есть A ” – не равенство, а отношение A к классу, состоящему из одного этого индивидуума.

Но тогда аксиома “если $a = b$, то $a + c = b + c$ ” не подводится под аксиому “если $a = b$, $c = d$, то $a + c = b + d$ ” (2 акс. I книги “Начал” Евклид) и т.д.

§ 6. Алгебраическая аксиоматика Херигона.

Приведем алгебраические аксиомы Херигона.

$$\text{I a) } \left. \begin{matrix} a = b \\ c = b \end{matrix} \right\} a = c \quad \text{Ia. b) } \left. \begin{matrix} a = b \\ c = d \\ b = d \end{matrix} \right\} \begin{matrix} a = c \\ c = a \end{matrix} \quad \text{Ia. c) } \left. \begin{matrix} b = c \\ a > b \end{matrix} \right\} a > c$$

$$\text{Ia. d) } \left. \begin{matrix} a = b \\ a > c \end{matrix} \right\} b > c \quad \text{Ia. e) } \left. \begin{matrix} b > c \\ a > b \end{matrix} \right\} a > c$$

$$\text{Ia. f) } \left. \begin{matrix} a + b = c + d \\ b = d \end{matrix} \right\} a + d = c + b$$

$$\text{IIa, 1) } \left. \begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix} \right\} a + c = b + d$$

$$\text{IIIa. 1) } \left. \begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array} \right\} a - c = b - d$$

$$\text{IIIa. b) } a = \frac{1}{n}b \left\} a - b = \frac{n-1}{n}b$$

$$\text{IVa. 1) } \left. \begin{array}{l} a \neq b \\ c = b \end{array} \right\} a + c \neq b + d$$

$$\text{IVa. b) } \left. \begin{array}{l} a = b \\ c \neq d \end{array} \right\} a + c \neq b + d$$

$$\text{IVa. c) } \left. \begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array} \right\} a + c > b + d$$

$$\text{Va. 1) } \left. \begin{array}{l} a \neq b \\ c = d \end{array} \right\} a - c \neq b - d$$

$$\text{Va. c) } \left. \begin{array}{l} a > b \\ c < d \end{array} \right\} a - c > b - d$$

$$\text{VIa. 1) } \left. \begin{array}{l} a = 2c \\ b = 2c \end{array} \right\} a = b$$

$$\text{VIa. b) } a > b \left\} 2a > 2b$$

$$\text{VIa. c) } \left. \begin{array}{l} b = c \\ a = 2b \end{array} \right\} a = 2c$$

$$\text{VIIa. d) } \left. \begin{array}{l} a = b \\ a = 2c \end{array} \right\} b = 2c$$

$$\text{VIIa. 1) } \left. \begin{array}{l} a = \frac{1}{2}c \\ b = \frac{1}{2}c \end{array} \right\} a = b$$

$$\text{VIIa. b) } \left. \begin{array}{l} c > d \\ a = \frac{1}{2}c \\ b = \frac{1}{2}d \end{array} \right\} a > b$$

$$\text{VIIa. c) } \left. \begin{array}{l} b = c \\ a = \frac{1}{2}b \end{array} \right\} a = \frac{1}{2}c$$

$$\text{VIIa. d) } \left. \begin{array}{l} a = b \\ a = \frac{1}{2}c \end{array} \right\} b = \frac{1}{2}c$$

$$\text{XVa. 1) } \left. \begin{array}{l} a - b \\ c \neq d \end{array} \right\} (a + c) - (b + d) = c - d$$

$$\text{XVa. b) } \left. \begin{array}{l} c \neq d \\ a = b \end{array} \right\} (c + a) - (d + b) = c - d$$

$$\text{XVIIa. 1) } \left. \begin{array}{l} a = b \\ c \neq d \end{array} \right\} (a - c) - (b - d) = d - c$$

$$\text{XVIIIa. 1) } \left. \begin{array}{l} c \neq d \\ a = b \end{array} \right\} (c-a) - (d-b) = c-d$$

$$\text{XX) } \left. \begin{array}{l} a = \frac{1}{2}b \\ c = \frac{1}{2}d \end{array} \right\} (a-c) = \frac{1}{2}(b-d)$$

$$\text{XX) a) } \left. \begin{array}{l} a = 2c \\ b = 2d \end{array} \right\} (a+b) = 2(c+d)$$

$$\text{XXIa. 1) } \left. \begin{array}{l} a \neq > b \\ a \neq < b \end{array} \right\} a = b$$

Мы пользуемся современной символикой.

Если строго различать символы $2|2$ и $\text{snt } 2|2$ $\text{Fe } n'' = b''$ понимать во втором смысле, т.е. брать

$$a + b \ 2|2 \ c + d$$

$$b \ \& \ d \ \text{snt } 2|2 \ \text{Fe}$$

то не трудно видеть, что I af) вытекает из III a, и II a₁.

На первый взгляд представляется очень странной аксиома VI a, как будто бы тождественная I a.

Чтобы решить эту загадку, следует заметить, что $2c$ результат некоторой операции над c – удвоения.

Чтобы усвоить себе особое значение этой операции, следует уяснить, что представляла из себя алгебра во времена Херигона.

Понятие геометрической величины проделало большую эволюцию.

Когда в алгебре предлагают уравнение $ax^2 + bx + c = 0$,

то a, b, c считают числами, x (неизвестное) тоже числом.

Но в XVII и XVIII вв. алгебраическая величина это – род, объемлющий два вида: непрерывные величины, каковыми являются геометрические длины, поверхности и объемы, дискретные величины, т.е. числа, причем понятие числа не идет дальше рациональной области.

Сочетание ab понимается или как результат умножения числа a на b , или как результат умножения отрезка a на b , причем понимание умножения отрезков подвергается метаморфозе. Сперва это образование прямоугольника, построенного на a и b (между a и b , как говорит Евклид) – результат ab – площадь этого прямоугольника, позднее же (у Декарта) это отрезок, получаемый построением на OA и OC : откладывается $OA = a$, $OC = 1$, приводится AC на OC , на OA откладывается $OB = b$ и из B проводится $BD \parallel AC$, тогда $OD = x = ab$, т.е. $x : a = b : 1$ ¹⁸⁴.

Алгебра возможна потому, что нормальные законы операций: сложения, вычитания, умножения, деления отрезков — те же, что у соответствующих действий над числами.

Обращение алгебры в численную алгебру произошло с установкой взаимнообразного соответствия между числами и геометрическими объектами.

Стоя на такой точке зрения, Херигон естественно должен был выделить удвоение, как особую операцию над величинами, так как для непрерывных величин (например, отрезков) умножение сводится к последовательным удвоениям, а само удвоение есть геометрическая операция, не производимая ни в коем случае над двумя отрезками, а только над одним. Деление же пополам, не основанное на теории подобия, коренным образом отличается от деления на 3, 4, 5 частей.

Интересно сравнить систему аксиом Херигона с системой Фортунато¹⁸³, относящейся уже к XVIII веку.

$$\begin{array}{l} \text{I. } a, b, c \text{ части } m \\ m = a + b + c \\ a + b + c = m \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{II. } a, b, c \text{ части } m \\ m > a, m > b, m > c \end{array}$$

$$\text{III. } a = a$$

$$\begin{array}{lll} \text{IV. } \left. \begin{array}{l} a = b \\ d = c \\ a = d \end{array} \right\} b = c & \text{V. } \left. \begin{array}{l} a = c \\ b = d \\ c \neq d \end{array} \right\} a \neq b & \text{VI. } \left. \begin{array}{l} a = b \\ b = a \\ c = a \end{array} \right\} c = b \end{array}$$

$$\text{VII. } \left. \begin{array}{l} a = b \\ b = a \\ a = c \end{array} \right\} b = c$$

$$\begin{array}{lll} \text{VIII. } \left. \begin{array}{l} a = b \\ b = a \\ c = d \\ d = c \\ a = c \end{array} \right\} b = d & \text{IX. } \left. \begin{array}{l} a = b \\ b = a \\ a \neq c \end{array} \right\} b \neq c & \text{и } \left. \begin{array}{l} c = d \\ a \neq c \end{array} \right\} b \neq d \end{array}$$

$$\text{X. } \left. \begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array} \right\} a + c = b + d$$

$$\text{XI. } \left. \begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array} \right\} a - c = b - d \quad \text{XII. } \left. \begin{array}{l} a \text{ не } > b \\ a \text{ не } < b \end{array} \right\} a = b \quad \text{XIII. } \left. \begin{array}{l} a > b \\ c = d \end{array} \right\} a + c > b + d$$

$$\text{XIV. } \left. \begin{array}{l} a > b \\ c = d \end{array} \right\} a - c > b - d$$

Здесь $a=b$ определенно отличается от $\left(\begin{array}{l} a = b \\ b = a \end{array} \right)$, причем последняя

символика ставится на место херигоновских

Snt 2|2 Fe

Первая аксиома Евклида (и вместе с тем и первая аксиома Херигона) у Фортунато разбивается на три: IV, VI, VII.

Последние две он мог бы сплавить в одну:

$$\left. \begin{array}{l} a = b \\ b = a \\ c = a \\ a = c \end{array} \right\} \begin{array}{l} b = c \\ c = b \end{array}$$

Отчего аксиома VI не подводится как частный случай, под IV, заменяя d на a?

Потому что во втором случае мы имели бы три условия: $a = b$, $a = c$, $a = a$, с иным порядком членов и с недостающим условием.

Если отнести эти аксиомы к отрезкам, то геометрическое их значение будет совершенно различно:

в VII a накладывается на b, a b на a, и в обоих случаях имеет место совпадение, c накладывается на a — утверждается совпадение при наложении c на b,

в VII a на b, b на a, a на c и утверждается совпадение при наложении b на c,

в IV a на b, d на c и в обоих случаях совпадение, кроме того a на d и тогда совпадение — утверждается совпадение при наложении b на c.

К этому времени коллекционирование очевидных аксиом оказывается математикам совершенно не по силам, так как число их быстро растет, проблему о собирании всех очевидных аксиом приходится заменить проблемой о собирании тех, из которых можно вывести все положения, но при этом вовсе не ставится условие независимости этих постулатов.

Необходимость сокращения их числа вызывает к жизни аксиому $a = a$, которая может иметь смысл и быть признана за очевидную истину при изменении самого смысла взаимоотношения равенства между a и b, которое должно уже пониматься не в смысле непосредственного их взаимоотношения, а взаимоотношения каких-то двойников, создаваемых мыслью (отрезок накладывается сам на себя).

§ 7. Идеография Херигона.

Херигон при изложении Евклида пользуется особым рода символикой.

Для ознакомления приводим доказательство 5-й теоремы I книги “Начал” Евклида (чертеж 3).

Hypoth.

$ab \parallel ac$

$abd \ \& \ ace \text{ snt}$

Req π demonstr

$\angle abc \parallel \angle acb$

$\angle cbd \parallel \angle bce$

Demonstr.

Constr. $ad \parallel ae$

hyp. $ac \parallel ab$

$\angle$ commun.

4.1 $de \parallel be \alpha$

4.1 $\angle adc \parallel \angle acb \beta$

4.1 $\angle acd \parallel \angle abe \gamma$

Constr. $ad \parallel ae$

hyp. $ab \parallel ac$

3. a. 1 $bd \parallel ce$

$\alpha \quad ac \parallel be$

$\beta \quad \angle bdc \parallel \angle ceb$

Pracp.

$ad \text{ est } arb \text{ itr.}$

3.1 $ae \parallel ad$

1. p. 1 $cd \ \& \ besnt -$

1 and $\angle abc \parallel \angle ecb$

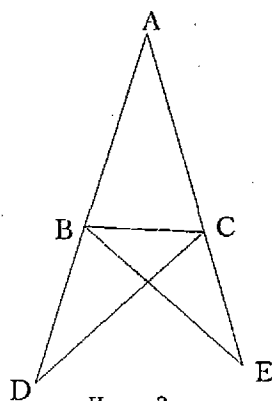
4.1

4.1 $\angle dcb \parallel \angle ebc$

$\gamma \quad \angle acd \parallel \angle abe$

2 and

3. a. 1 $\angle acb \parallel \angle abc$



Другой пример доказательств стереометрической теоремы. Если две пересекающиеся прямые соответственно параллельны двум пересекающимся прямым, не лежащим с ними в одной плоскости, то углы, ими образуемые, равны:

Hypoth.

$ab = de$
 $ac = df$
 Req π demonstr
 $\angle bac \ 2/2 \ \angle edf$

Demonstr.

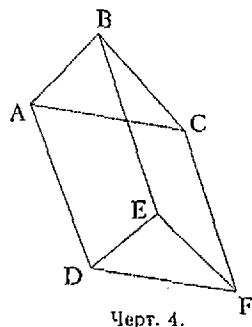
$\alpha \ 33.1 \mid ab \ 2/2 \sigma = de$
 $33.1 \mid bc \ 2/2 \sigma = ad$

$\alpha \ 33.1 \mid ac \ 2/2 \sigma = df$
 $33.1 \mid cf \ 2/2 \sigma = ad$

Concl. $\mid bc \ 2/2 \sigma = ef$ 187
 $\alpha \ 8.1 \mid \angle bac \ 2/2 \angle edf$

Praep.

$3.1 \left\{ \begin{array}{l} ab, ac \\ de, df \end{array} \right\} \text{snt } 2/2 Fe \alpha$
 $1.p.1 \left\{ \begin{array}{l} ad, bc, ef \\ be, cf \end{array} \right\} \text{snt } -$



Черт. 4.

Для того, чтобы разобрать этот шифр, необходимо иметь словари

Символов.

$+$ да
 $-$ без
 F е между собой
 F и в
 Π или
 π к
 $;$ множ. число
 η не
 $a, b, \Pi a, b$ – прямоугольник,
 построенный на a и b
 $.$ есть точка
 $-$ есть прямая
 $\cap \cup$ часть круга
 $\triangle \circ$ сегмент круга
 $\angle$ угол

σ и

a^2 – a в квадрате

a^3 – a в кубе

$=$ параллельны

$\perp$ перпендикулярно

$2/2$ равно

$3/2$ больше

$2/3$ меньше

$\triangle$ треугольник

$\lrcorner$ прямой угол

$\square$ квадрат

$\bigcirc$ круг

$\square$ прямоугольник

Словарь сокращений:

hypoth. – гипотеза... предположим, что

req. – требуется

demonstr. – доказать

concl. – отсюда следует

цифры за чертой – ссылки на ранее доказанные теоремы

15. α . 1 – 15-е определение I книги “Начал”

3. а. 1 – третья аксиома I книги

с. 17. 1 – королларий 17 I книги

s. 26. 3 – королларий 26 III книги

1. р. 1 – первый постулат I книги

3 – I – третья теорема I книги.

Херигон для пояснения своего идеографического языка приводит ряд примеров.

Часть символов Херигона переводится на нашу алгебраическую символику.

$$\left. \begin{array}{l} a \pi b \ 2|2 \ c \pi d \\ \text{или } a \pi \left| \begin{array}{l} b \\ b \pi d \end{array} \right. \end{array} \right\} a:b=c:d$$

$$a \pi b \ 3|2 \ c \pi d \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \end{array} \right.$$

$$a \pi b \ 2|3 \ c \pi d \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \end{array} \right.$$

Идеография Херигона не единственная. Нам трудно привести словарь Угхтрета¹⁸⁸ по техническим условиям печатания. Он дает символы для равно, больше, меньше, не больше, не меньше, равно или меньше, равно или больше, пропорции, большее отношение, меньшее, непрерывной пропорции, большего ближайшего, меньшего ближайшего, прямоугольника, треугольника, квадрата, стороны квадрата, среднепропорционального, соизмеримых, несоизмеримых, соизмеримых и несоизмеримых в степени¹⁸⁹, рационального, иррационального, среднего, линии разделенной в крайнем и среднем отношении¹⁹⁰ большей и меньшей части; к этому следует прибавить еще и алгебраическую символику.

Можно указать еще и на идеографию Болье¹⁹¹, в которой наиболее употребительные слова означаются символами, например: найти, сделать, построить, есть, их, что и т.д.

§ 8. Пеано и Херигон.

На первый взгляд в этой идеографии может представиться логистическая тенденция, можно увидеть в ней предтечу пасиграфии Пеано¹⁹².

Но сходство только внешнее. По существу же здесь огромная разница.

Возьмем ряд систем понятий.

$A_1, A_2, A_3, \dots$

$A'_1, A'_2, A'_3, \dots$

$A''_1, A''_2, A''_3, \dots$

положим, что путем некоторых операций

$P_1, P_2, P_3, \dots$

над ними получаются системы:

$B_1, B_2, B_3, \dots$

$B'_1, B'_2, B'_3, \dots$

$B''_1, B''_2, B''_3, \dots$

отсюда операциями: $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$

получаются:

$C_1, C_2, C_3, \dots$

$C'_1, C'_2, C'_3, \dots$

$C''_1, C''_2, C''_3, \dots$

Если с *формальной* точки зрения системы отождествляются, те признаки, которыми эти системы различаются, являются логически не действующими. Для всех них устанавливается одна и та же система символов.

Так Пеано одним и тем же символом $\supset$ обозначает и *вывод* и *отнесение* к классу класса.

" $a \supset b$ " означает "из a вытекает b ," если a, b – предложения, и означает " a есть b " если a и b – два класса.

$$a \supset b, b \supset c: \supset : a \supset c$$

можно понимать так: "если из a вытекает b , из b вытекает c , то из a вытекает c ", или же, "если a есть b , b есть c , то a есть c ".

То же относится и к $\cap$, и $\cap$ – знакам логического умножения и сложения, словесно выражаемым "и" и "или".

В логике предложений $a \cap b$ – совместное утверждение двух положений: стороны равны и углы равны; в логике классов $a \cup b$ – класс, входящий в a и b , например, "старый немец", т.е. из класса a стариков взяты все принадлежащие ныне к классу немцев.

В логике предложений $a \cup b$ – утверждение одного из положений: A равно A , или A меньше B . В логике классов $a \cup b$ – класс, составленный из a и b , например, $a \cup b$ выбывшие из строя, если a – убитые, b – раненые.

В этой символике нетрудно прочесть положения:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 : \supset : x = 2 \cup x = 3$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0. \cap x. y. \supset \text{real} : \supset : x = 1 \cap y = 2$$

первое: если $x^2 - 3x + 2 = 0$, то $x = 2$ или $x = 3$;

второе: если $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$ и x, y суть величины, то $x = 1$ и $y = 2$ ("то" и "суть" означены одним символом).

Таким образом, проблема символики с современной точки зрения относится к операциям, которые с помощью нее должны быть ясно пред-

ставлены разложенными на простейшие элементарные операции, сводящиеся, по мнению логистиков, к чисто логическим.

С точки зрения рационалистов XVII века все упомянутые системы должны означаться различными символами, именно для того, чтобы не было между ними смешения, чтобы исправить недостатки словесного языка, грешащие против II и III паскалевых правил. Именно с той целью и создается новый язык символов, в котором между знаками и понятиями строго определяется взаимно-однозначное соответствие.

Это не только *сокращенные* словесные выражения, это — замена неточного словесного выражения точной символикой.

В выражении “продолжим ab ” есть неточность, так как продолжить можно, идя и по прямой, и по кривой; если бы bd была дугой круга, то все-таки можно было бы bd считать продолжением, хотя, правда, криволинейным и т.д.

То же относится и к обозначению

a, b II a, b — прямоугольник, построенный на a, b .

Вне сомнения, в этот символ мы имеем вложить то, что может быть выражено в словах только с помощью длинного периода.

Выражение: “прямоугольник, построенный на a, b ” — не говорит, конечно, всего, что следует сказать. Ведь следует для полноты указать, как следует строить этот прямоугольник.

Положим, что кто-нибудь строит прямоугольник так, что a является его диагональю, a, b — основанием; он будет употреблять то же выражение — прямоугольник, построенный на a и b , отличая его от прямоугольника, построенного на c, d .

С указанной выше формализацией математики символизм операций подвергается соответствующему упрощению, так как символ начинает определяться больше механизмом формальных операций и меньше объектами, над которыми производятся эти операции.

Раньше введения понятия об иррациональном числе и установки взаимно-однозначного соответствия между числами и геометрическими величинами была усмотрена система общих законов, соответствующих формальным операциям над числами и отношениями, что и вызвало взгляд на отношение как на число.

Сперва равенство отношения означаетс^я символом “ $::$ ”, так что пропорция пишется так:

$a : b :: c : d$ (Ухтред),

a равенство дробей так: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

В дальнейшем один и тот же символ “ $=$ ” стал фигурировать в обоих случаях (у Х. Вольфа).

Херигон предлагает обозначать отношение так:

$$\begin{array}{c|c} a & \pi & b \\ \hline c & \pi & d \end{array}$$

но чаще употребляет другое: $a \pi b \mid 2 \mid c \pi d$, в котором $2 \mid 2$ с точки зрения его современников можно было бы опротестовать, но “ $a \pi b$ ” еще отнюдь не тождественно дроби $\frac{a}{b}$.

§ 9. Определение у Лейбница.

Аксиоматика Лейбница уже несколько иная. Дальнейший за ним этап, это *математика без аксиом*. Необходимо было старой аксиоматике умереть, чтобы на ее месте родилась новая аксиоматика.

У Лейбница схоластическая проблема о разыскании *истинного правильного* определения заменяется проблемой о разыскании *совершенного* определения.

Проблему эту он формулирует так:

Предполагается определение всех свойств, по Лейбницу — *терминов*, заданным — найти *лучшее* определение¹⁹³.

В чем же состоит совершенное определение? Оно должно содержать все условия, необходимые и достаточные, чтобы быть в состоянии доказать все свойства определяемого объекта. Одну и ту же вещь можно определить различными системами признаков:

$$\Omega \left| \begin{array}{l} a_1, \quad a_2, \quad a_3 \dots \\ b_1, \quad b_2, \quad b_3 \dots \\ c_1, \quad c_2, \quad c_3 \dots \end{array} \right.$$

Какие же требования следует предъявлять к системе признаков, чтобы признать к ним относящиеся определения *совершенными*?¹⁹⁴ Пусть Ω присуще свойство k . Необходимо, чтобы это свойство могло быть выведено из этой системы признаков. Система признаков a может однозначно определять Ω , так что, задав a , мы всегда найдем Ω , но a сами могут быть выведены из системы $k_1, k_2, k_3 \dots$, куда входит k .

Лейбниц признает *единственность* такого совершенного определения. Для вывода всех свойств необходимо иметь одну только систему совершенных признаков; всякая другая система должна оказаться недостаточной при выводе какого-либо из свойств.

Лейбниц верит, что с помощью особого рода анализа можно вскрыть это совершенное определение. Во взглядах Лейбница в особенности интересным представляется идея о возможности таких случаев, при которых такой анализ оказывается бесконечным, и ряд определяющих признаков $a_1, a_2, a_3 \dots$ тоже бесконечным.

Лейбниц определенно говорит, что анализ истины может быть *конечным и бесконечным*. Если он конечен, то он приводит к нескольким простым положениям, из которых они выводятся; если он бесконечен, то он ведет от положения к положению, не приводя к принципу по истине простому.

Лейбниц в первую очередь при научном значении выдвигает анализ – разложение понятий на их *простые элементы* с помощью определения; во вторую очередь – синтез, состоящий в реконструировании понятий, исходящий из этих элементов с помощью искусства *комбинирования*.

Познание вещи совершенно, если совершенным образом произведен ее анализ, и тогда уже возможно дедукцией вывести все ее свойства.

“Признак совершенного знания, – говорит Лейбниц, – это когда ничего не остается в нем такого, чему нельзя было бы выдвинуть основания, и нет явления, которого нельзя было бы наперед указать”¹⁹⁵.

Доказательство представляется Лейбницу *комбинированием простых элементов*.

Лейбниц порой думает, что совершенное определение является разложением на последние простейшие элементы, дальше уже неразложимые.

Такое разложение вместе с тем дает и оправдание определения, обнаруживая возможность существования определенного объекта, так как простые элементы являются уже безусловно совместными, как диспаратные. Чтобы убедиться в непротиворечивости, следует только разложить на простые элементы.

§ 10. Аксиоматика Лейбница.

По Декарту, очевидные положения недоказуемы. По Лейбницу, очевидные положения *можно доказывать* и он, действительно, доказывает совершенно очевидные положения.

Так, он доказывает вторую аксиому “Начал” Евклида, что если к равным величинам прибавить равные, то получатся равные, а также аксиому, что часть меньше целого.

Кроме того, он доказывает очевидные положения *чисто логического* характера, и в этом смысле кладет начало математической логике. Он пытается даже доказать, что если a есть b , b есть c , то a есть c .

Он приходит к мысли о *доказуемости* и других очевидных положений сведением их к законам *тождества* и *противоречия*, признаком истинности которых, по мнению Лейбница, является вовсе не их очевидность, а полная невозможность без них логических операций. Можно, строя металогику, показать, насколько эта мысль неправильна. Можно привести в движение аппарат, который по своей конструкции вполне аналогичен формально-логическому аппарату и отличается только тем, что под ним нет такого субстрата, который мы могли бы признать реальным.

Лейбницу кажется, что и сама очевидность является только следствием простоты ее доказуемости, близости этого положения к началу логической сети, узлами которой являются только эти основные законы и определения.

“Откуда, — спрашивает Лейбниц, — эта достоверность аксиом? Она не может идти из опыта, ибо индукция не может проверить универсальность и необходимость положений. Необходимо, чтобы она основывалась на принципе тождества и противоречия. Все положения должны быть доказуемы, кроме тождественных и эмпирических”¹⁹⁶.

Лейбниц заявляет, что чтобы узнать, следует ли доказывать положение, не следует спрашивать, очевидно ли оно и несомненно, даже и то, постигается ли оно ясно и раздельно (*clairement et distinctement*), но тождественно ли оно или сводится ли к принципу тождества.

“Из определения, — говорит Лейбниц, — можно все доказать, кроме тождеств положений, которые уже по самой своей природе представляются недоказуемыми, и поэтому называются аксиомами: обычно аксиомы разрешением объекта или предиката, или обоих вместе сводятся к тождественным или доказываются тем, что противные предполагают, что вместе то же и есть, и не есть”¹⁹⁷.

Отсюда ясно, что оно приводит в конечном анализе к апологическим доказательствам, и что некоторые схоластики были правы, сводя все аксиомы к принятому противоречию.

Здесь следует отметить, что Лейбниц ничего не говорит о принципе *исключенного третьего*, на котором основывается апологическое доказательство, и отсюда можно было бы сделать заключение, что Лейбниц верил в возможность доказательств исключительно прямых.

Но более глубокий анализ его аксиомы противоречия разделяет ее на четыре момента, причем последние два дают аксиому исключением третьего.

1^o а не есть не а

2^o не а не есть а

3^o то, что не есть а, есть не а

4^o то, что не есть не а, есть а¹⁹⁸.

По Лейбницу, правила управления разумом должны сводиться только к двум:

1. *Ut nulla vox admittitur non explicata*, — чтобы ни одно слово не допускалось без объяснения;

2. *Ut nulla propositio nisi probata* — чтобы ни одно положение [не оставалось] без доказательства.

Он считает их более действительными, чем четыре картезианских правила в “Первой философии”,¹⁹⁹ из которых первое, состоящее в том, что верно лишь то, что ясно и раздельно воспринимается, — тысячи раз вводило в заблуждение.

Впрочем, Лейбниц дает и другие правила, критикуя более подробно правила Декарта.

Очень характерным является его предложение в противовес декартовскому второму правилу: изучать только такие вещи, о которых мы можем составить только определенное и несомненное знание; он советует, в том случае, когда это невозможно, довольствоваться вероятным знанием.

Согласно Лейбницу, доказательства выводом из очевидных положений являются незаконченными и обладают тем же недостатком, что доказательства из неочевидных положений, ибо те и другие, как очевидные, так и неочевидные, следует непосредственно или с помощью принципа противоречий свести к положениям тождественным.

V. Генезис и история теории пределов. (XVIII век).

§ 1. Проблема об интензировании форм.

Генезис идеи предела следует искать не в античном методе исчерпывания Евклида²⁰⁰ и Архимеда²⁰¹, с которым ложно отождествлялся метод пределов некоторыми математиками XVIII века²⁰², а в знаменитом схоластическом споре об интензировании форм.

Согласно Аристотелю и схоластике, каждая единичная вещь состоит из двух элементов: *формы и материи*²⁰³.

Аристотелевская форма — это наследница платоновской идеи²⁰⁴.

До своего соединения с формой материя имеет *возможное* существование, но, соединившись с формой, она как бы одухотворяется, приобретает *актуальное* существование. Она мыслится Аристотелем и схоластиками как пустой сосуд (при возможном существовании) и как наполненный различным содержанием, *сменяющимися друг друга формами* (при актуальном существовании). Здесь следует помнить, что аристотелевское возможное существование отнюдь не *чисто логическая* возможность. Оно находится как бы в высшей, в сравнении с последней плоскостью существования.

То, что представляется изменением — это только последовательное соединение с рядом *возникающих и погибающих* форм.

Мы должны были бы углубиться в эволюцию схоластической мысли, чтобы выяснить, каким образом могли *возникающие и погибающие* формы Аристотеля обратиться в *изменяющие* формы схоластиков.

Во всяком случае, совершенно ясно, что проблема интензирования и ремизии форм (усиления и ослабления) это средневековая проблема.

Вопрос ставился сперва о том, имеет ли место интензирование, затем о том, как оно происходит.

Эмбрион идеи переменного находится именно здесь, в области этой

схоластической метафизики, это *изменяющаяся форма*, форма, которая, оставаясь той же, сохраняя, так сказать, свое ядро, свою “этость”, вместе с тем изменяется, принимая различные виды (по Д. Скотту — *формальности*).

Но в эмбриологии идеи переменного и предела, имеет значение не только тот сдвиг в воззрении на формы, отмечаемый и у более ранних чем Скотт схоластиков, но и скоттическое объяснение самого интензирования.

Относится ли изменение формы к качеству, т.е. к сущности, или же к самому существованию²⁰⁵, так что новая ступень дает новое бытие.

Здесь, как и в других случаях, *томисты* и *скоттисты* ведут между собой отчаянную борьбу.

Фома Аквинский учит о *радикации* формы, он мыслит прибавленные степени, потенциально заключенные в форме, выступающие в актуальное бытие при изменении формы.

Он сравнивает²⁰⁶ радикацию с деревом, пускающим в землю все более и более корней и, таким образом, закрепляющимся.

В форме, таким образом, уже в потенции заключается все то, чем она должна стать. Это сравнение не вполне удачно, а именно потому, что Фома признает изменение исключительно *скачками*, всякая изнутри выступающая новая часть — это что-то вроде современного кванта, на который только и возможно изменение.

По Дунсу Скотту, прибавляемые части идут извне как раньше не принадлежащие форме.

Их форма впитывает, оставаясь собой, но поднимаясь к высшей степени совершенства.

Для скоттистов прибавляемые степени — это что-то возникающее вне формы, более простое и менее совершенное чем эти формы.

Уже и в этой весьма ранней ступени эмбрионального развития идеи переменного мы видим ее тесно связанной с *идеей предела*, весьма неясные очертания которой мы можем выловить, хотя и с трудом.

Это, во-первых, *полное совершенство* формы.

Это конец томистической радикации, когда все содержание формы перешло из потенции в актуальность. Но это пока только ступень, которая *фактически* недостижима, но логически должна быть признана достижимой.

Но в большую глубину ведет рассмотрение другого конца интензирования. Томисты отказываются мыслить первое изменение с нуля.

Прежде, чем начать изменяться, форма должна *создаться*²⁰⁷, явиться. Это первый момент. Когда же начинается интензирование?

Только в последний. Но тогда между моментом создания и этим протекает время, *когда форма остается неизменной*. Обратное изменение, *релизия* формы, должно прекратиться, не дойдя до нуля.

Здесь открывается два пути — к актуально бесконечно малому, к

представлению о зернистом строении континуума и к идее асимптотического приближения.

§ 2. Эмбрион идеи функции.

Для того чтобы спасти неизменность формы, Д. Скотт мыслит различные ее совершенства, различные *формы форм* в своей промежуточной области бытия, *formaliter ex natura rei*²⁰⁸ и называет их *формальностями*²⁰⁹.

Результатом победы скоттического взгляда является *количественная* точка зрения на основные аристотелевские свойства, определяющие четыре эмпедокловых элемента²¹⁰: сухость, влажность, теплота и холод.

Это – первые *переменные* величины, причем сперва *интенсивные*, затем *экстенсивные*.

Из *субстанциальных* форм они обращаются в *субстанции*, в своего рода материи, с уже самостоятельным существованием, и как таковые, вследствие занятия определенной части пространства, экстенсивными величинами. Впрочем, мысль, оперируя этого рода величинами, находится все время в колебании: эти величины то эмансипируются, то снова погружаются в сферы пространственного мышления.

Телезий²¹¹ признает три элемента во вселенной: два бестелесных – тепло и холод, и один телесный – материю. Тепло идет с неба, холод из земли, и в круговороте вселенной происходит их смешение.

Тепло выгоняет холод и обратно, выгнав его из тела, может увеличиваться в своем количестве притоком нового тепла.

Эта количественная точка зрения приводит учеников Д. Скотта к однозначному соответствию между формальностями и длинами прямолинейных отрезков и отсюда к учению о широтах форм (*latitudine formarum*) Н. Орезма²¹², представляющему, по существу, графическое представление форм в зависимости от *времени*, так что интенсифицирующаяся форма мыслится как функция переменного – *времени* *longitudo*; долготы – это та же *абсцисса*, *latitudo* – широта – *ордината*; первая определяет значение независимого переменного, вторая – функции.

Степень – *gradus latitudinis*, разность между двумя следующими друг за другом широтами, представляет приращение функции²¹³.

Нуль функции – это “нестепень” (*non gradus*). Но характер функциональной зависимости определяется в духе Аристотеля и схоластики – *качественно*, а не количественно.

Случай $f(x) = 0$ для некоторой области изменения x характеризует Орезмом как “*однородная*” степень повсюду (*uniformis gradus per totum*).

Этому случаю противопоставляется *разнообразность* (*difformis*), причем различаются: случай *разнообразности повсюду* и *частью*, чему отвечают графики: например, образуемые кругом или прямой, не парал-

лельной ОХ, и образуемые отрезками таких кривых и прямых, параллельных ОХ.

Орезмом выдвигается еще одноформенная разноформенность и разноформенная разноформенность (*uniformitas difformis et difformitas difformis*).

В первом случае *excessus graduum* – приращение долготы, отвечающее определенной широте, постоянно, что имеет место для прямой, наклонной к ОХ.

Не следует думать, что дальнейший ход мысли определялся только скоттической, а не томистической схоластикой. Тщательный анализ вскрывает как *томистические*, так и *скоттические* элементы в мысли XV и XVI веков. В актуально бесконечно малых, как неделимых Кеплера²¹⁴ и Кавальери²¹⁵, мы легко видим помянутые выше кванты Фомы Аквинского и выходящие изнутри, но вместе с тем и *привходящие* извне, формальности Скотта, обладающие каким-то неполным существованием.

Но следует отметить, что развивающийся в XVII веке рационализм по духу своему ближе к *томизму*. Эмбрион идеи функции, начавший развиваться в XVI столетии²¹⁶, останавливается в своем развитии в XVII веке.

Интересно отметить, что Декарт, положивший начало аналитической геометрии, основанной на *координатном* принципе, чужд идее переменного. Уравнение кривой²¹⁷ характеризуется не *функциональной* зависимостью ординаты от абсциссы, характером изменения первой в зависимости от второй, а способом построения первой, когда дана вторая.

§ 3. Лейбниц и Ньютон.

Идея переменного снова, и уже определенно, выступит на закате рационализма в постепенно *математизирующейся* форме у Лейбница и у Ньютона.

Это сперва величина, изменяющаяся только во времени²¹⁸. Для всех изменяющихся величин устанавливается одно универсальное независимое переменное – это время *t*.

Это сперва действительное время, а затем более абстрактное и общее умопостигаемое время, нечто, что в результате характеризуется одним признаком – служить *универсальным* независимым переменным.

Эта воскресшая идея в сочетании с идеей актуальной бесконечности, крепко владевшая умами этой эпохи, дает понятие предела в той форме, в которой она в довольно смутном виде выступает у Лейбница как *метафизическая* идея, а у Ньютона уже как *математическая* идея.

Некоторый объект *X* (не обязательно величина) изменяется. Конечный результат достигается конечным или бесконечным процессом во времени. При этом время, в продолжении которого совершается бесконечный процесс, мыслится как актуально бесконечный промежуток времени.

Предел А мыслится всегда достигнутым объектом Х.

Предел А рассматривается как одна из форм, можно сказать, *последняя форма*. С этой идеей связывается основное свойство предела, выраженное Лейбницем в форме²¹⁹: “*Datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata*”, т.е. если данные (иначе говоря, различные значения или общие формы Х) известным образом упорядочены, то тот же порядок имеет место и в искомым, что следует понимать (вводя математический термин “предел”) в следующем смысле: “*Свойства, присущие Х во все время его изменения, остаются и в пределе*”.

Чисто метафизический принцип непрерывности *natura non facit saltus* (природа не делает скачков) устанавливает существование между объектами А и В еще промежуточного по своим свойствам объекта С = (А В)²²⁰.

Отсюда возникает мысль о необходимости прохождения каждым изменением объектов Х непрерывной совокупности форм, из которых смежные между собой формы неразличимы.

Если изменение объекта Х должно закончиться формой А, то между Х и А существует бесконечное множество промежуточных форм. Если при изменении Х какое-либо свойство Х остается неизменным, оно найдется и в А, ибо в противном случае делается скачок и, так сказать, в последний момент, когда изменение заканчивается, Х улестучивалось бы.

Поэтому принцип непрерывности с этим необходимым его следствием Лейбниц принимает за принцип общего порядка; он замечает, что этот принцип безусловно необходим в геометрии и полезен в физике.

Если эллипс с бесконечно возрастающей осью *datum* (данное), то и то, что присуще эллипсу (например, основное свойство фокуса и директриссы) остается неизменным в параболе²²¹.

Эти лейбницевские идеи подвергаются у Ньютона математизации.

Основная лемма ньютоновского метода первых и последних отношений: *величины и отношения величин, которые стремятся в данное время к равенству и в течение его могут приблизиться к нему ближе, чем на какую угодно данную разность, становятся, наконец, равны*.

По латыни: *quantitas ut et quantitatum rationes, ad aequalitatem dato tempore constanter tendunt et eo pacto proprius ad invicem accedere possunt quam pro data quavis differentia sunt ultimo aequales*.

Перевод *ultimo aequales* проф. Крыловым²²² — “*в пределе равны*,” совершенно искажает смысл, ибо создает представление не о *последней их величине*, о которой идет речь, а о величине, находящейся вне сферы возможных значений Х, к которой Х стремится, никогда ее не достигая, как это мыслили только *позднейшие* математики.

Доказывается эта лемма от *противного*:

“Если отвергнуть эту лемму, то разность их равна D. Поэтому не

могут приблизиться более, чем на D, что противно условию”.

Последнее и первое отношения Ньютона не $\lim \frac{x}{y}$ в нашем смысле; это значение $x : y$, когда x, y обращаются в нули или когда начинают расти с нуля.

Актуально бесконечно малые метода неделимых не подчинялись второму постулату “Начал” Евклида²²³. Из $x = y + \alpha$, где x и y конечны, а α бесконечно мало, выводилось, что $x = y$, ибо, как говорили, α *исчезало* в сравнении с y ²²⁴.

Это исчезновение бесконечно малых положено в основу техники метода флюксий Ньютона²²⁵.

Различие между предшественниками Ньютона и самим Ньютоном то, что первые признавали особые актуально бесконечно малые постоянные величины, не подчиняющиеся некоторым основным числовым законам. Ньютон же признавал *особое состояние изменяющейся величины*, когда она не представляет в собственном смысле величины, а только величину зарождающуюся²²⁶.

Можно говорить об отношении таких зарождающихся (или исчезающих) величин, но при этом из того, что $X : Y = A : A$ еще нельзя вывести, что $X = Y$.

Если раньше бесконечно-малая дуга отождествлялась стягивающей ее хордой²²⁷, то Ньютон такого отождествления уже не делает.

Для него *ratio arcus est chordae et ratio aequalitatis* (последнее отношение дуги и хорды – это отношение равенства)²²⁸.

§ 4. Бертраи и Кестнер.

Чрезвычайно явственно выступает различие точек зрения рационалистов XVII в. и сенсуалистов XVIII века при сравнении вольфианских²²⁹ учебников с очень оригинальным в свое время произведением Бертраи Женевского²³⁰.

В основе рассуждений вольфианцев лежит представление *зернистого* строения пространства, зернами которого являются актуально бесконечно малые, в которых *исчезает форма*.

Это реальное строение пространства постигается своего рода *созерцанием чистого разума*, выходящим за пределы чувственности.

Даваемые рационалистами определения задаются целью не подведения под *genus proximum* (ближайший род) с помощью *differentia specifica* (различающего признака), но *вскрывают внутреннюю структуру* определяемой вещи; бесконечно малый прямолинейный отрезок это некоторая концепция чистого разума, а не чувственный элемент, и из него складывается как прямая, так и кривая²³¹.

С сенсуалистической точки зрения XVIII века²³² математическое исследование начинается с переработки абстракцией опытного материала.

Из понятий круга и прямой, получаемых из опыта, ни одно не может претендовать на приоритет.

Понятие длины кривой не сводится к длине прямолинейного отрезка, а принимается как нечто само по себе понятное.

У Бертрана еще нет общей идеи предела и точного его определения, но отказавшись от отождествления²³³ круга с *polygonus infinitorum laterum infinite parvorum* (многоугольником с бесконечным числом бесконечно малых сторон) он доказывает, что длина окружности это предел вписанных и описанных многоугольников.

Но у него в основной теореме выступает не предел величины, а *предел формы*, так что он может быть помещен как раз в середине между Лейбницем с метафизической идеей предела и д'Аламбером, у которого эта идея подверглась если не полной, то, во всяком случае, довольно глубокой *математизации*. Теория Бертрана формулируется так:

Круг — предел расширения (dilatation) правильных вписанных многоугольников с $6 \cdot 2^n$ сторонами, а равно предел сжатия (contraction) описанных многоугольников того же числа сторон.

Для вывода отсюда длины окружности приходится пользоваться скрытой аксиомой о том, что если объект X имеет своим пределом A, то и величина, определяемая X, имеет своим пределом соответствующую величину A, что, конечно, представляет частный случай основного положения Лейбница²³⁴.

Другая скрытая аксиома: если расстояние точек вписанных в круг (или вообще в выпуклую кривую) многоугольника, отсчитываемых по радиусу от окружности (или вообще по прямым, соединяющим какую-либо точку внутри кривой с точками последней), бесконечно уменьшаются с увеличением числа сторон многоугольника, то многоугольник бесконечно приближается к кругу (или вообще к этой кривой).

Бертрону приходится пользоваться следующей доказываемой им леммой:

1) Если AB хорда, SQ отрезок радиуса между дугой круга AB и хордой AB, то $SQ < \frac{1}{2} AB$. В этом же роде и вывод из общего положения теоремы о площади круга²³⁵.

Примером колебания между точками зрения актуальной и потенциальной бесконечности представляется теория предела у Кестнера²³⁶.

Он замечает, что разность между сектором круга и вписанным в него треугольником OAB меньше ΔACB , а площадь последнего в сравнении с OAB может быть сделана как угодно мала²³⁷.

$$C (\text{площадь круга}) = S (\text{площадь многоугольника}) + \alpha = S \left(1 + \frac{\alpha}{S} \right).$$

Но окончательная формулировка совершенно в *вольфганском* духе: “Площадь круга *одинакова* с площадью многоугольника с бесконечным числом бесконечно малых сторон”.

Но самый ход рассуждений проникнут уже *идеей* предела. Кестнер доказывает, что дуга *подходит* к своей хорде в желаемой близости, или, что отношения дуги к хорде может быть сделано как угодно близко к отношению 1:1, что доказывается тем, что при уменьшении дуги, наибольшее расстояние ее точек от хорды может быть сделано как угодно мало.

Следует здесь заметить, что Кестнер нигде не употребляет термина “предел”, но скрытым образом пользуется лейбнизианским принципом, заключая, что свойство площади равняться произведению длины периферии на апофему, присущее S , остается и у C .

§ 5. Д’Аламбер, де ля Шанпель и Гурьев.

Только д’Аламбер дает определение предела²³⁸.

“Говорят, что величина – предел другой величины, когда вторая может приблизиться к первой ближе, чем на заданную величину, как бы мала ни была, без того, чтобы приближающаяся величина могла превзойти ту, к которой она приближается и затем, чтобы разность этой величины и предела была бы абсолютно не указуема”.

Это определение, конечно не вполне совпадает с современным.

Во-первых, оно вовсе не требует, чтобы предел был *постоянной* величиной. Если мы имеем две переменные величины X и Y , и X догоняет Y , никогда его не достигая, то, согласно определению д’Аламбера, Y будет пределом.

Во-вторых, дело идет только о переменном X , остающемся меньше предела A (хотя такое же определение тотчас устанавливается и для случая, когда X больше A). Таким образом, это определение не обнимает случая предела непрерывной дроби.

Чтобы понять сделанное д’Аламбером добавление *“затем, чтобы разность этой величины и предела была бы абсолютно не указуема,”* предположим, что переменное X принимает значения

$$X_1, X'_1, X_2, X'_2, X_3, X'_3, \dots$$

где разности $|A - X_n|$ с возрастанием n бесконечно убывают, но к $A - X_n$ это уже не относится. А тогда уже не предел X .

На современном языке можно условие: *“вторая может приблизиться к первой ближе, чем на любую величину, как бы мала она ни была”* выразить так: сколь бы мало ни было положительное число ε , можно най-

ти такое n , что

$$|A - X_n| < \varepsilon$$

Второе же условие таково: не существует ε такого, чтобы принадлежавшему выбору для некоторого $n > n$, имели бы $|A - X_n| > \varepsilon$.

Различные значения переменного и предела *резко подчеркиваются* д'Аламбером. Предел, говорит д'Аламбер, никогда не совпадает и не становится равным величине, для которой он предел, но она приближается к нему все больше и больше, и может различаться как угодно мало.

д'Аламбер не мог бы написать: $\lim 3 = 3$.

Идея предела и у д'Аламбера не *арифметизирована*.

Примеры, приводимые д'Аламбером, указывают, что дело идет не только о величине, но и о форме, как у Бертрана.

“Круг, например, предел вписанных и описанных многоугольников, так как он никогда точно с ними не совпадает, но может бесконечно с ним сблизиться”.

Гурьев²⁹ заменяет определение д'Аламбера следующим:

“Есть ли какая-нибудь величина от какого ни есть известного без конца продолжаться могущего действия всегда возрастает или убывает и от того к другой неперменной величине приближается так, что может различиться с нею меньше, нежели всякая по произволению данная взятая того же рода величина и со всем тем никогда ее не достигает, то сия другая неперменная величина есть то, что пределом первой (возрастающей и убывающей) мы называем”.

Возражение Гурьева относится, собственно, не к даламберовскому определению предела, а к его *сокращению*, несколько его искажающему, в котором говорится, что “разность между переменной величиной и пределом может быть *сколько угодно мала*”. В этом только случае и возникает отмеченная Гурьевым двусмысленность; рядом с правильным пониманием возможно и неправильное, а именно: что эта разность оказывается точно равной всякой заданной величине, как бы мала она ни была.

Гурьев подчеркивает, что предел обязательно постоянное.

д'Аламбер и более тщательно де ля Шаппель²⁴⁰ основывают теорию пределов на двух положениях, которым предлагаются доказательства, оставляя таким образом основные постулаты под порогом сознания:

1. Если две величины суть пределы одной и той же, то эти величины равны.

2. Пусть $A \cdot B$ произведение двух величин A и B .

Предположим, что C – предел A и D – предел B ; я говорю: $C \cdot D$ – произведение пределов, необходимо есть предел $A \cdot B$ произведения A и B .

Первая лемма, играющая ту же роль, что лемма Ньютона, превращающаяся у позднейших авторов в обычную 1-ю лемму элементарной теории пределов; *если две переменные при своем изменении остаются рав-*

ными, то равны и их пределы, доказывается так:

Пусть Z и X пределы одной и той же величины Y , тогда $Z = X$, ибо если бы между ними имелась некоторая разность V , то $X = Z \pm V$. Но по предположению Y может приблизиться к X как угодно близко, т.е. разность X и Y может быть сделана как угодно мала.

Так как Z различается от X на величину V , то отсюда следует, что Y не может приблизиться к Z ближе, чем на V , и поэтому Z не может быть пределом Y , что противно условию.

§ 6. Люлье, Гурьев и Ла-Круа.

Откуда ведет происхождение вторая лемма современной элементарной теории пределов?

Я думаю — из работы Люлье²⁴¹, премированной, как лучшее в свое время сочинение на эту тему, изложение которой считалось в свое время безупречным в смысле строгости.

Именно у Люлье особое значение получает *предел отношения*, который он еще резче Ньютона различает от *предела величины*, каждое определяя в отдельности.

В определении д'Аламбера еще остается, но в затушеванном виде, *бесконечно малое*, как разность между пределом и переменной величиной, хотя это уже новое бесконечно малое, потенциальное, а не актуальное, как у Кеплера и Кавальери, именно то, про которое мы говорим, что его предел есть нуль.

Но с таким бесконечно малым примирились лишь много позже. Люлье необходимо было строить теорию пределов *без бесконечно малых*.

Самое определение предела у Люлье резко отличается от даламберовского и сближается с современным чисто *порядковым* определением²⁴²:

Если переменная величина всегда остается меньше данного, но при этом может сделаться больше, чем всякая величина меньше данной, то она называется пределом переменной возрастающей (limes quantitatis mutabilis crescentis).

По тому же образцу строится определение убывающей величины и также пределов отношений.

Основная лемма:

“Если всегда $X : Y = m : n$, то $\lim X : \lim Y = m : n$ ”, доказывается методом исчерпывания (так как во многих учебниках лежандрова типа рассматриваются случаи несоизмеримости).

Предполагается, что $m : n = A : B'$ ($B' < B$)

$$A = \lim X, B = \lim Y$$

и получается противоречие с построенным определением предела.

Таким образом, Люлье идет от постоянного отношения двух переменных к отношению их пределов.

В других случаях он идет от *предела отношения к отношению пределов*.

От $\lim \frac{X}{Y} = 1$ он заключает к $\lim X = \lim Y$, при этом $\lim \frac{X}{Y}$ может иметь смысл и тогда, когда $\lim X$, $\lim Y$ потеряли смысл, как это и имеет место для *производной*, но если $\lim X$ и $\lim Y$ имеют смысл, то, конечно, имеет смысл и $\lim \frac{X}{Y}$, и можно идти в обратном направлении, чего, однако, Люлье никогда не делает.

По образцу, указываемому д'Аламбером, Бланше²⁴³ строит теорию пределов в своем издании элементов Лежандра, заменяя ею арифметизированную Лежандром методу исчерпывания древних.

Что длина окружности и площадь круга могут быть рассматриваемы как пределы, это признается за очевидные положения, хотя с указанием (в духе Бертрана) на бесконечное сближение их форм.

В доказательство пропорциональности окружности радиусам скрытым образом входит признание

$$\lim \frac{X}{Y} = \frac{\lim X}{\lim Y}$$

а в доказательство теоремы Архимеда²⁴⁴ — вторая лемма д'Аламбера.

Впрочем, еще до Бланше, элементы Лежандра подверглись методической переработке Лакруа²⁴⁵, и его учебник имел очень большое влияние на учебную литературу.

Он первый вводит туда теорию пределов; под влиянием отрицательного к ней отношения самого Лежандра, Лакруа обнаруживает еще большую осторожность, чем Люлье, избегая упоминания не только бесконечно малого, но даже слова “предел”, хотя в основе его рассуждений, конечно, лежит идея предела.

При доказательстве первой теоремы об окружности, он выдвигает ньютоновскую лемму в следующем виде: если две неизменные величины А и В таковы, что можно доказать, что разность между А и В меньше всякой данной величины δ , то эти величины равны: $A = B$.

К этой лемме присоединяется еще первая лемма д'Аламбера.

Изложение Гурьева иное²⁴⁶.

Из своего определения предела, как некоторого *постоянного*, им выводится следующее заключение:

Если имеем две переменные величины X, Y, возрастающую и убывающую, так, что $X < A < Y$ и при этом разность между X и Y может быть сделана меньше всякой данной величины, то А предел X и предел Y.

Если же то же имеет место и для B:

$$X < B < Y,$$

то выводится на основании однозначности предела, постулируемой первой леммой д'Аламбера, что $A = B$.

Легко видеть, какое применение находит это при выводе теоремы Архимеда²⁴⁷.

В конце концов элементарная теория пределов выкристаллизируется в ту форму, которую находим в учебниках лежандрова типа²⁴⁸, например, в русских учебниках Давидова²⁴⁹ и Киселева²⁵⁰.

§ 7. Логизация идеи пределов.

Если французам мы обязаны *математизацией* идеи пределов, то немцам и, еще больше, итальянцам — ее *логизацией*.

Следует понять, что античный математик никогда бы не признал эти теории логичными.

В то время, как античный логик, в глазах которого бесконечность в силу логических противоречий, в ней талящихся, не имеет никакого права гражданства в логике, оперирует только с классами, содержащими *конечное* число объектов, современный логистик в самое основание своих построений кладет *бесконечный класс*.

Таким образом, бесконечным классом в логизированной теории пределов является *совокупность всех значений*, принимаемых переменным:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n.$$

Конечно, для того, чтобы признать как раз то, что было с таким трудом ассимилировано, *изменяющийся* объект, содержащий всегда интуитивный элемент, неуловимый чистой логикой, этого мало.

Наряду с логикой классов следует выдвинуть и *логику отношений* с понятием порядка уже сомнительной логической чистоты, причем признать так жестоко раньше отвергнутую *актуальную бесконечность* не только как аморфную массу, но как бесконечность взаимоотношений между элементами.

Переменное из объекта, которому присуще больше реальности, чем переходящим значениям $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, через которые оно проходит, и о которых мы можем говорить, только если они пройдены или могут быть пройдены переменным, в конечном итоге обращается в *символ, в тип расположения элементов бесконечного множества*.

Но как определить последовательные элементы этого множества?

Конечно, только с помощью определенных операций над предшествующими элементами.

Можно сказать, что при логизировании точка зрения из *объективной* становится *субъективной*.

Сперва объект сам изменяется (см. определения д'Аламбера) и доказывающий становится в положение *наблюдателя*, теперь же объект

исчез — доказывающий, с помощью операций, которые он тоже старается логизировать, воссоздает до какого угодно места ряд значений, принимаемых этим объектом.

Характерным признаком предела является не то, что между переменными X и A , при изменении X , бесконечно уменьшается разность, а то, что в ряде значений $X_1 X_2 X_3 \dots X_n$, мы можем найти такое, что отличие его от A было бы как угодно мало.

Так что и здесь опять вводится актуально бесконечное, бесконечный класс операций, с помощью которых мы определяем разности $X - A$.

Арифметизированная математическая мысль признает только ряды чисел:

$X_1 X_2 X_3 \dots X_n$ и их предел A .

Предел определяется как число A , для которого существуют операции, дающие для всякого ε такое v , что при $n > v$ $|A - X_n| < \varepsilon$ (1).

Предел сперва понимается как последнее значение переменного, затем как то, к чему переменное бесконечно приближается, никогда с ним не совпадая.

Сперва предел существует совершенно так же, как существует каждое значение переменного: затем его бытие оказывается вроде бытия кантовской вещи в самой себе²⁵¹ относительно мира явлений: он вне сферы изменения переменного.

Третий этап — это совершенное уничтожение реальности предела даже в указанном смысле, что соответствует переходу от кантовской точки зрения к точке зрения Маха²⁵² и Авенариуса²⁵³, упраздняющей вещь в самой себе.

Предел выступает в смысле символа, сгущающего ряд чисел.

Несколько иная, но близкородственная точка зрения: предел как символ сходящегося, убывающего или возрастающего ряда чисел.

$X_1 X_2 X_3 \dots X_n$

.....

$Y_1 Y_2 Y_3 \dots Y_n$

Тогда неравенство 1) заменяется на

$|Y_n - X_n| < \varepsilon$ (2)

при $n > v$.

В геометрической теории пределов предел, конечно, ни в коем случае не может быть низведен на роль только символа, как в арифметической теории пределов, иначе, теории иррациональных чисел.

И вот между геометрией и арифметикой начинается разделение, начинается разарифметизирование геометрии. За геометрическими пределами оставляется реальное, а не только символическое значение.

Второе условие д'Аламбера обращается в постулат Кантора²⁵⁴.

Если имеются два таких класса прямолинейных отрезков, что

1) ни один отрезок первого класса не больше любого отрезка второго класса и

2) при данном сколь угодно малом отрезке ε в первом и во втором классе имеется по отрезку, разность которых меньше ε , то имеется отрезок, которой не меньше любого отрезка первого класса и не больше любого отрезка второго класса.

При этом постулируется реальное существование такого предела.

Определение длины окружности и площадей круга, в которые обращаются теперь раньше доказываемые теоремы, оправдываются²⁵⁵ теперь доказательством выполняемости этих условий.

Длина окружности – предел вписанных многоугольников при удвоении числа сторон – оправдывается доказательством того, что разность между периметром n -угольника и $2n$ -угольника может быть сделана как угодно мала при достаточно большом n .

§ 8. Порядковый характер предела.

Канторовский постулат представляет собой, в сущности говоря, развитие основной ньютоновской леммы, заменяемой ей равносильной первой леммой об однозначности предела.

Вывод этих лемм из остававшихся скрытыми аксиом претворяется в вывод канторовского постулата из аксиомы Дедекинда о сечении.

Пусть точки данного отрезка разделены на два класса, причем:

1) всякая точка отрезка принадлежит одному из классов,

2) любая точка первого класса предшествует любой точке второго класса в данном направлении,

тогда на данном отрезке существует такая точка, что всякая точка, ей предшествующая, принадлежит к первому классу, а всякая за ней следующая – второму.

Так как канторовский постулат выводится из дедекиндовского, то естественным является замена в определениях предела – сечением, и переход к чисто порядковому определению предела.

Длина окружности, по Дедекинду, уже не предел в даламберовом смысле, т.е. периметр вписанного многоугольника, отрезок, который больше периметра всякого вписанного в окружность многоугольника и меньше периметра всякого описанного.

С понятия предела теперь окончательно снимается количественный характер. Это уже чисто порядковое понятие; это только то, что следует за элементами множества A и предшествует элементам дополнительного множества A' , при предположении, что нельзя указать среди элементов A последнего, а среди элементов A' – первого²⁵⁶.

Собственно говоря, идея предела совершила весь круг своей жизни.

То, чем если еще не окончательно сделался, то стремится стать

предел — нечто совершенно иное, чем предел д'Аламбера.

Нельзя сказать, чтобы динамический характер европейского мышления, который находится в определенной противоположности к статическому характеру античной мысли, был теперь совершенно уничтожен.

Он только переведен в плоскость производимых умом операций при творчестве нескончаемых рядов объектов, которые мыслятся уже не в движении, а окристаллизованными в своей чисто античной неподвижности.

VI. Философские элементы в эволюции методических идей в математике первой половины XIX века.

§ 1. Введение.

Совершенно таким же образом, как по одной кости ископаемого животного можно восстановить весь его скелет, в частях которого отражается целое, по одному отрывку деятельности человеческого гения определенной эпохи можно было бы при некоторой прозорливости ума начертать контуры этой эпохи. Геометрия Рамуса²⁵⁷ — эта ныне уже забытая попытка низвержения в XVI веке вместе с другими кумирами и великого Евклида²⁵⁸, как капля воды отражает в себе всю эту эпоху, еще пропитанную средневековой схоластикой и мистицизмом, еще не порвавшую все цепи, связующие ее с прошлым, но с детской верой устремляющуюся в будущее. Вместо доказательств — система определений, устанавливающая иерархическую лестницу с дихотомичными рамическими делениями рода на виды, взлетающая до *summius genus*²⁵⁹ геометрии Арно²⁶⁰, с введением, трактующим о воспитательном значении геометрии, развивающей обращение с сверхчувственными предметами, которые нам дает *lux naturale*²⁶¹ иерархией геометрических истин по принципу Декарта: идти от простого к сложному²⁶², с прямыми доказательствами, заменяющими гонимые пор-ролевской логикой²⁶³ апологические. Этому отвечают Декарт, Мальбранш и Спиноза, а не превозносящие опыт и борющиеся с метафизическими суевериями энциклопедисты, настроение которых так хорошо отражается в *Institutions de Geometrie de ля Шаппеля*²⁶⁴, задающимися целью научить геометрии шутя, постоянно апеллируя к окружающим предметам как поясняющим моделям.

Не всегда можно усмотреть сознательное влияние философских идей эпохи на математику; такое влияние больше всего должно сказаться на низах, а не в верхах эволюционирующей математической мысли. Для исследования его следует брать учебник, а не научный мемуар.

Чаще всего соответствие между математической мыслью и мыслью философской определяется просто каким-то настроением, охватыва-

ющим все умы. Едва ли можно предположить, что философская идея прогресса²⁶⁵, чуждая рационалистической эпохе и воспитанная мыслителями второй половины XVIII века, родила теорию пределов с переменным, бесконечно приближающимся к некоторому постоянному, но никогда его не достигающим. Не “Эскиз исторической картины прогресса человеческого разума” Кондорсе уже в эпоху революции повлиял на д’Аламбера²⁶⁶, а, вне сомнения, то общее настроение, которое резко выдвинули отвечающие этому настроению идеи, только много времени спустя облекшееся в более строгие логические формы.

Я хочу обратить внимание на эпоху спекулятивной немецкой философии, начинающуюся с Канта и завершающуюся Гегелем и Гербартом. Изучение старой учебной литературы дает интересный материал для суждения если не о прямом влиянии на литературу спекулятивных философов, то о соответствии двух течений – математического и философского.

§ 2. Кант и Песталоцци.

Прежде всего о Песталоцци²⁶⁷. Метод Песталоцци обучения арифметике называется *односторонне-субъективным*, т.к. он придает ничтожное значение материалу, а все сводит к методу в противоположность *односторонне-объективному* методу вольфианцев. Арифметика имеет целью развить особую умственную способность оперировать абстрактными идеями.

Согласно гносеологическому взгляду Канта²⁶⁸, число одною не происходит из опыта; оно его предваряет, как время и пространство. Правда, число у Канта, это не простая форма, как время и пространство, а результат некоторого процесса, предвещающего опыт и не выходящего за сферу форм, налагаемых нашим рассудком на материал опыта с целью его обработки в более совершенное, способное обращаться в знание, состояние.

В качестве основного материала элементарного образования Песталоцци выдвигает *число, форму и название*.

Роль времени в кантовском мировоззрении у Песталоцци занимает пространство.

Наглядность у Песталоцци сводится к тому, что число изучается в пространстве; не дается готовым, но извлекается оттуда с помощью оперирующего над чистыми схемами (каковыми являются числовые фигуры) процесса.

В дальнейшем же абстрактное число должно оторваться от его пространственного носителя, и все операции должны производиться уже в уме.

Из основных принципов Песталоцци вытекает преимущество умственных операций перед письменными²⁶⁹.

Они не только дают более чистую гимнастику тем способностям ума, которые задается [целью] развить арифметика, но также материал для обучения третьему основному элементу образования, по плану Песталоц-

ци, — называнию.

Письменное обозначение — это уже нечто производное; следует научить читать раньше, чем писать; считать раньше, чем нумеровать в числах.

Обучение выговариванию²⁷⁰ у Песталотци занимает столь же важное, если еще не более важное место, чем обучение арифметическим действиям в уме. Метод азбуки наглядности Песталотци вполне соответствует методу его первоначального изучения арифметики.

Он идет не от конкретных предметов к геометрическим формам, но сразу обращается к простейшим типам этих форм.

Встав на точку зрения формального принципа образования, поставив главной, если не сказать единственной, целью образования развитие “внутренних сил человеческой природы”, он обращает наглядную геометрию в гимнастику созерцания, но при этом чисто *пассивного*, геометрических форм и механического их воспроизведения вычерчиванием. Главная задача методики — нахождение искусственных способов, увеличивающих природную способность отличения форм²⁷¹.

Здесь дело обстоит так же, как в арифметике Песталотци — при созерцании числовой фигуры, учащиеся познаются операции над числами, после чего ученик сам начинает действовать, причем он все время учится говорить, высказывать все то, что он видит и делает.

В геометрии — такие же скучные и однообразные упражнения, как и в арифметике.

Сперва 376 упражнений, относящихся к сравнению горизонтальных и вертикальных углов.

Затем — созерцание и образование простейших форм: параллельных прямых, прямого угла, двух прямых углов, четырех, прямоугольника. Прямая и квадрат — это два образа, лежащие в основе дальнейшего.

Дальше — необычайно длинные упражнения с квадратом и прямой, делением квадрата параллельно сторонам и диагоналям и т.д. Как в гносеологии Канта, так и в методике Песталотци, синтез стоит на первенствующем месте.

Элементы предваряют опыт, деятельность ума двойка: или комбинирующая эти элементы, или вырабатывающая из них и материала опыта соединения.

Философская мысль Канта²⁷² сохраняет двойственность, характерную для его предшественников, отделявших чувственный мир от реального, для которого первый является только как бы искаженным изображением. Этот второй мир совершенно удален из сферы знания, обратившись в вещь в себе, первый же раскололся пополам. Одно — это формы нашей интуиции или рассудка, другое — данное им как материал для обработки.

Эти формы предваряют опыт, но не извлекаются из него; более того, они не даны в начале опыта в виде эмбрионов, чтобы затем вместе с

ним эволюционировать; они или в готовом виде даны, или же вырабатываются в трансцендентальной, не зависящей от опыта, сфере.

В противоположность методике Песталоцци, методика Грубэ²⁷³, методика 60-х годов, родилась в атмосфере, пропитанной пышно расцветшими тогда экспериментальными науками.

Опыт – вот истинный источник знания. Этот взгляд или, может быть, только настроение с ним связанное, должно было охватить и методику абстрактных знаний.

Следует резко различать опыт от наблюдения. Голое наблюдение относится пассивно к материалу, с которым душа приводится в соприкосновение; опыт (или лучше сказать эксперимент) предполагает создание самим познающим определенных, наперед им задуманных, обстоятельств для намеченного им к наблюдению явления.

Следует отличать эмпиризм времен энциклопедистов (60–70-е годы XVIII века)²⁷⁴, как эмпиризм наблюдения, от эмпиризма XIX столетия (50–60-е годы)²⁷⁵, как эмпиризма эксперимента. Между ними – периоды критической и спекулятивной философии, углубившей наше воззрение на опыт.

Метод Грубэ – метод экспериментирования над числами. Он требует прежде всего путем опыта познания чисел в их взаимоотношениях, и он ищет средства воспитания сознательного арифметического мышления с помощью возможно глубокого проникновения в природу чисел.

Мы здесь видим, как анализ данного опытом материала заменяет синтез заложенных в нас до опыта элементов.

§ 3. Кант и Тибо.

Кантовская гносеология резко отделяет интуицию от рассудка. Пространство не концепция, а априорная форма интуиции. Геометрия изучает не пространство, ибо сущность его не может быть выражена в понятиях. Геометрия скорее изучает те же операции, которые производит над интуитивным материалом конструирующая фантазия.

Именно под влиянием кантовских идей геометрия превращается, как это имеет место у Тибо²⁷⁶, в науку о построениях в пространстве (*Wissenschaft der Konstruktion im Raum*).

Постулаты и аксиомы сливаются у рационалистов и эмпириков, у кантианцев же они опять резко разделяются.

Первые дают *чисто интуитивный* материал. Это первый акт конструирующей фантазии, это простейшие построения, неприводимые к другим, которые прежде всего следует изучить. Это то, что дает нам *всцело интуиция*.

Аксиомы же, по Тибо, это “условия, которыми связывается незнание при установке их представления”. Это то, что приносит интуиции *рассудок*.

Именно под влиянием Канта в геометрии выступают генетические определения. Тибо часто говорит о движении, образующем геометрические объективы. Но это движение иное, чем то, которое определяется постулатами позднейших математиков 50–70 г.г. Это основной акт конструирующей фантазии. Что такое прямая? Это *простейшее* построение – говорит Тибо.

Для разъяснения, в чем состоит это простейшее построение, следует описать этот акт, который производит прямую.

Это – *прогрессивное* движение, иначе говоря, движение одного направления, так что у Тибо появляется раньше направление, а потом уже прямая.

Между двумя точками может быть проведена только одна прямая. Но Тибо кажется, что из *этого* рода положений не может еще выйти науки. Если прямая становится затем предметом научного исследования, то именно потому, что в ней находится единственно количественное – ее длина, позволяющая призвать число, а нам – и рассудок с его категориями. Геометрия для Тибо, оригинального продолжателя, арифметизирующего элементарную геометрию Лежандра²⁷, вполне *количественна*; *качественной* геометрии, т. е. геометрии положения, тогда еще не было.

То, что говорит Тибо о прямой, характерно для понимания и дальнейшего развития его идей. Что можно построить параллельную, перпендикуляр, треугольник, четырехугольник, две пересекающиеся, круги и т.д., об этом говорит *интуиция*. Но на вопрос, когда возможны эти построения, в логических или в духе Лежандра числовых терминах, должен ответить *рассудок*. Геометрия – наука о построениях – является у Тибо последовательным изучением способностей конструирующей фантазии в порядке их усложнения. Прямая дается простейшим из основных актов. Акт, производящий угол, уже сложный, составленный из таких двух основных “прогрессирующих” актов, сперва определяемых одним, затем другим направлением.

Уже при рассмотрении углов возникает понятие об *эквивалентности* актов.

Эквивалентными являются такие акты, которые производят те же результаты. Угол производится как упомянутым выше сложным актом, так и простым актом вращения прямой около некоторой точки.

Другое основное понятие – это понятие *независимости* и *зависимости* актов:

Из данной точки М я могу провести прямую, и прямую, независимо, от этого могу провести и из другой точки N; и количественному признаку первой (длине) могу дать какое угодно значение, не зависящее от количественного признака второй.

Из данной точки М могу описать окружность какого угодно радиуса R_1 , и из другой точки M_2 , независимо от этого, могу описать другую

окружность тоже какого угодно радиуса R_2 .

Наряду с независимыми актами над различными объектами существуют и независимые акты, произведенные над одним и тем же объектом.

Много заставила говорить о себе теория параллельности Тибо²⁷⁸.

Тибо отмечает, по его мнению, *очевидную* независимость следующих актов: *поступательного* передвижения прямой, того, что соответствует “перенесению” – translation позднейших авторов, и *вращения*.

Угол производится вращением, которое только и дает изменение направления; перенесение же оставляет направление неизменным.

Вращение должно совершиться на один и тот же угол, повернем ли мы сперва прямую, а затем перенесем до совмещения с другой, или наоборот: сперва перенесем, а затем повернем.

Если мы имеем два угла с параллельными (т.е. одного направления) сторонами (l_1, l'_1) , (l_2, l'_2) , то для приведения l_1 в l_2 нам необходимо совершить вращение на угол α l_1 в l'_1 , а затем перенос l'_1 в l'_2 или сначала перенос l_1 в l_2 и затем вращение l_2 в l'_2 на угол α' , вследствие чего $\alpha = \alpha'$.

Таким образом устанавливается равенство углов с параллельными и одинаково направленными сторонами, в частности, соответствующих углов при пересечении двух параллельных третьей прямой.

Если в треугольнике ABC с двумя данными сторонами a, b , будем изменять угол C вращением этих сторон около C, то будет вместе с тем производиться акт изменения противолежащей стороны c .

Этот последний будет уже зависящим от первого акта. Эта зависимость может быть предметом научного исследования только с помощью признаков, характеризующих их независимо или зависимо, каковыми, по взглядам Тибо, могут быть только числа.

Основная научная проблема геометрии сводится к исследованию функциональной зависимости переменных величин.

Всегда ли при возрастании X возрастает или убывает Y , или существуют переходы от возрастания к убыванию и/или обратно (максимумы или минимумы)?

Какова область изменения?

У Тибо нет обычных доказательств наложением теорем о конгруэнции треугольников. Его изложение существенно отличается от евклидовского, т.к. в основе, как очевидные факты интуиции, выдвигаются положения не о равенстве фигур, а о характере изменения простейших функций²⁷⁹. В треугольнике с данными сторонами b, c Тибо подвергает изменению сторону a и отмечает как очевидный факт постоянное возрастание угла A с возрастанием a и убывание A с убыванием a , а также изменение в обратном направлении угла B . Отсюда (не наложением) выводится, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Если $A = \alpha$, $B = \beta$ и $\beta > \alpha$, то и треугольник, в котором $A = \beta$, $B = \alpha$, будет равнобедренным,

вследствие чего получаем, что сторона a с изменением A будет изменяться от одного значения к другому, ему равному, т.е. не будет изменяться вовсе, что противно указанной выше аксиоме вращения²⁸⁰.

§ 4. Гегель и Понсле.

Я не буду здесь развивать историю немецкой спекулятивной философии, выводить гегельянские идеи из кантовского критицизма. Указав отрывок из методической литературы по чистой математике с явным влиянием кантовских идей, я представляю теперь же математические идеи, в которых определенно звучит гегельянский мотив.

Кант разбил веру в силу силлогистической логики, в возможность решения с ее помощью метафизических проблем. Спекулятивная философия Шеллинга и Гегеля²⁸¹ не возвращается к докантовской точке зрения, но идет дальше, стараясь найти для вселенной схему, подчиненную иной, диалектической логике, не подчиняющейся *закону противоречия*. Вся вселенная представляется *окаменелой мыслью*, развитием идеи, идущей через иерархию понятий, располагающихся в троицы: тезис, антитезис и примиряющий их синтез.

Первая стадия – чистое бытие (тезис), которое таит в себе противоречие, так как при своей полной бессодержательности совпадает с ему противоположным понятием небытия. Оба понятия входят как моменты в понятие уже высшего порядка становления, в котором указанное противоречие снято.

Качество и количество, тоже скрывая в себе противоречие, примиряются в мере²⁸² и т.д.

Можно сказать, что к диалектике философскую мысль привела идея предела, если только понимать последнюю не в узкоматематическом смысле, а в более общем метафизическом или гносеологическом смысле.

При признаваемой рационализмом актуальной бесконечности, предел есть одно из значений, последнее значение переменного, но с точки зрения отвергающих эту бесконечность эмпиризма и критицизма, предел недостижим, он вне сферы изменения переменного.

Пусть математический объект X определяется некоторыми признаками

$$a, b, c, \dots$$

причем эти признаки всегда подчиняются некоторым условиям, например, $a > 0$. Объект X будет оставаться, как бы a ни было мало.

Но что будет при $a = 0$? С одной стороны, не X , так как X определен при условии $a > 0$, с другой стороны, это X , ибо $a = 0$ относится к пределу X , а свойства X , которые остаются неизменными при изменении X , принадлежат и пределу X .

Очень характерно определение предела в учебнике лежандровско-

го типа Бескибы²⁸³, выраженное в терминах гегелевской логики: “Предел — это наиболее внешнее вещи, в чем снимается то, что было, и начинается то, чего не было”.

Таким образом, имеются два момента А и В внешние друг другу, согласно гегелевской терминологии.

Когда А перестает быть А, становясь В, а В перестает быть В, становясь А, мы имеем пределы А.

Это не математическое, а чисто метифизическое определение, старающееся захватить определение общего, но смутного понятия предела, не поддающегося математизации, проводимое в духе гегелевской диалектики, выступает, как синтез противоположностей А (тезис) и В (антитезис).

Это направление мысли породило то, что можно назвать *понятиями-вырождениями*, или несобственными понятиями.

Угол определяется, по Бертрану²⁸⁴, как часть плоскости, ограниченная двумя пересекающимися прямыми. Но уменьшайте также смежный угол. В пределе пересечения уже не будет, и одна сторона будет служить продолжением другой.

С одной стороны это угол. Ибо, если скажем, что это не угол, то можно спросить, с какого же момента АОВ перестает быть углом. С другой стороны, мы можем сказать, что это не угол, ибо мы имеем не пересекающиеся, а *совпадающие* прямые.

Таким образом выступает понятие развернутого угла (Gerader Winkel).

Прямой угол определяется уже как половина развернутого угла, так что в последующих учебниках отпадает теорема о равенстве двух прямых углов. Доказательство же теоремы о сумме двух смежных углов сводится просто к замечанию, что эта сумма равна развернутому углу, уже по самому определению прямого угла вдвое большему прямого.

В гегелевский период возникает и понятие о *бесконечно удаленной точке*²⁸⁵ прямой. Сам Евклид нигде не обнаруживает такого понятия. Вращающийся в области бесконечного Кестнер²⁸⁶ говорит о бесконечном продолжении прямой, но вводит не одну, а две бесконечно удаленные точки прямой. Но кестнеровские бесконечно удаленные точки забываются другими авторами.

Бесконечно удаленная точка прямой, бесконечно удаленная прямая плоскости и бесконечно удаленная плоскость пространства — эти так называемые *необыкновенные*²⁸⁷ элементы²⁸⁸ проективной геометрии, которые являются в гегелевском смысле диалектическими элементами геометрии.

Две параллельные прямые не пересекаются, но, с другой точки зрения, они пересекаются в бесконечно удаленной точке, ибо основной принцип теории пределов, выработанный предшествующей стадией математической мысли, заставляет признать, что свойство пересекаемости при вращении одной из прямых вокруг одной из ее точек остается и в предельном

положении параллельности.

В связи с этим возникает понятие луча, и угол определяется как различие направлений двух выходящих из одной точки лучей²⁸⁸.

В эту эпоху Понслэ (1818) провозглашает *принцип непрерывности*²⁹⁰, по которому свойства, доказанные для какой-нибудь фигуры, распространяются и на случаи вырождения, если к этому случаю можно подойти непрерывным изменением.

Так, например, пространственная теорема Дезарга²⁹¹: “Если соответствующие вершины двух треугольников лежат на прямых, сходящихся в одной точке, то соответствующие стороны пересекаются в точках, лежащих на одной прямой”, влечет в силу этого принципа плоскую теорему Дезарга, отвечающую предельному случаю наклона друг к другу плоскостей треугольников. Этот принцип или аксиома, решительно оспариваемая Коши, не найдя себе математического обоснования, была потом признана имеющей не логическое, а лишь эвристическое значение. Применение ее давало логику не доказательство, а систему, которая делает из совокупности теорем связанное целое, в котором один момент вызывает в силу намеченного плана системы и смежные моменты.

Главные элементы геометрии распределяет в диалектическую лестницу уже сам Гегель, а дальнейшую обработку этой диалектики геометрии берет на себя Франц²⁹², вызывая у Шоттена²⁹³ насмешку и значительно более серьезное к себе отношение у Дельбефа²⁹⁴.

Синтез точки как рода пространства (тезис) и его отрицания (анти-тезис), конечно, не имеет значения.

Не иначе дело обстоит с диалектикой прямой, являющейся – как количество – мерой расстояния (см. Лежандр), с другой же стороны, – как качество – направлением. То, что здесь мыслится о прямой, мыслится о всем пространстве.

Пространство является не только как *количество*, но и как *качество*, и последний момент не сводится к первому. Нельзя числом определить “направо” или “налево”, или другие факты распорядка геометрических объектов.

Идея, что пространство не только количество, но и качество, пока еще *метафизическая* идея.

Но уже в 40-х гг. XIX столетия она становится математической, когда создается геометрия положения Штаудта.

Двум моментам: количеству (расстояние) и качеству (направление) должны отвечать (по Бретшнейдеру, 1844, Шниц-Дюмонду) две геометрии, исследующие: 1) положение, 2) величину, которые вместе образуют 3) органическую геометрию (гегелевский синтез-мера). Здесь интересно привести несколько определений геометрии, характерных для эволюции понятия об этой науке. До Лежандра²⁹⁵ геометрия – это учение о пространственных величинах (Ламберт). Для Лежандра это “la mesure de l'étendue” –

просто измерение пространства.

Для Тибо – это наука о построениях, и в этом духе – и для Ульриха и др. немецких методистов.

Для Бретшнейдера геометрия превращается в учение о геометрических формах.

§ 5. Гербарт и Больцано.

От Канта идут два главных течения: первое через Фихте и Шеллинга к Гегелю²⁹⁶, второе к Гербарту.

Первое разворачивает *телеологическое* мировоззрение, после разрушения кантовской критикой старой догматики, ищет новых объяснительных принципов в новой *диалектической логике*, из которой изъят закон противоречия, стараясь построить с помощью ее общую схему мирового процесса, идущего по трехчленной системе: тезиса, антитезиса и их при-миряющего синтеза, к определенной цели.

Второе, ясно выраженное *каузальное* направление, остается при *силлогистической* логике, и вскрытую Кантом неспособность догматизма в сфере метафизических построений, видит в скрытой противоречивости тех общих понятий, которыми пользовался догматизм.

Второе направление, сперва более слабое, в конце концов побеждает.

Следует иметь в виду, что оба направления интеллектуалистичны. Во взглядах на пространство и на математику они решительно становятся против Канта. Для них математические положения являются аналитическими, связанными с понятиями логически, хотя последнее понимается различно Гегелем и Гербартом.

Оба концептуализируют пространство, первый – пытаясь включить его в свою диалектическую цепь²⁹⁷, второй, стараясь установить надлежащим образом очищенное понятие пространства, из которого чисто силлогистически извлекалось бы содержание геометрии.

Для Гегеля пространство дается уже готовым, как и все вообще понятия.

Он не отвергает содержащиеся противоречия, ибо все понятия, через которые движется абсолютная идея, содержат противоречия, которые, снимаясь, ведут к понятиям, выше стоящим на диалектической лестнице.

Гербарт же, наоборот, исправляет понятие, отбрасывая из признаков (a, b, c ... d, e, f) противоречивые (d, e, f), а иногда пополняя еще новыми (a', b', c') так, чтобы силлогистический аппарат мог быть приведен в движение.

Конечно, такая чистка понятий ведет к построению чрезвычайно общих схем вселенной и, в конечном итоге, дает с увеличением объема обеднение содержания исправляемых понятий.

Гегелевское настроение, развивавшее дух системы, склоняющее к разысканию на основании невыводимых, но предполагаемых принятой системой, принципов недостающих звеньев этой системы, давало *нестрогую*, но быстро идущую *вширь* математику.

Гербартовское же, наоборот, разрушало систему вскрываемыми логическими связями, разрушая прежнюю симметричность аксиоматических систем, насильственно обращая положения в определения и искажая последние с целью сделать их более логически плодovitыми; оно устремлялось вглубь, требуя замены обширного, но малообоснованного материала нестройной математики, немногим, но хорошо обоснованным, материалом строгой математики.

Наряду с эмпирическим пространством, Гербартом выдвигается другое – умопостигаемое, очищенное и являющееся уже не формой интуиции, а концепцией, пространство, вмещающее гербартовы реалии, этот метафизический остаток от очистки материала опыта.

Чрезвычайно общее гербартовское пространство, возникающее из понятий совместности, смежности и раздельности, математически не жизненное, является отцом грассмановского протяжения²⁹⁸ и дедом римановского многообразия²⁹⁹ – *sumptum genus*³⁰⁰ пространства, объемлющего и евклидово и неевклидово пространства. Таким образом, гербартовское построение ведет к метагеометрии. Но оно же ведет к математической аксиоматике вообще, ибо по существу философия Гербарта – это метафизическая аксиоматика.

Больцано³⁰¹ дает в чистой математике то, что старался дать в метафизике Гербарт. Он исправляет понятие и старается привести с помощью уже исправленных понятий в движение логический аппарат над чисто логическим содержанием. Конечно, прежде всего должна подвергнуться радикальной переработке бесконечность. Эта работа только начата Больцано, а закончена Г. Кантором³⁰².

Больцановская бесконечность – это не бесконечность Фонтенеля³⁰³, ибо такая бесконечность несет противоречие, ее же сбедающее. Бесконечная величина по Больцано – это актуальная бесконечность, которая возрастает безгранично и может быть сделана больше всякой данной величины, но это не то, что не способно к дальнейшему возрастанию, а то, что является последним в ряду возрастающих величин. Это то, что больше всякой данной величины, это первая величина высшего класса, подымающегося над классом конечных величин.

Эта бесконечность, действительно, очищена согласно гербартовскому рецепту, но она бесплодна, так как актуальная бесконечность, служившая к обоснованию положений анализа, изгоняется отсюда Больцано. Рабочей же идеей является *потенциальная* бесконечность в маскирующей ее форме переменной величины, которая может быть сделана более всякой данной положительной величины.

Актуальная бесконечность, чтобы сделаться тоже рабочей идеей, чтобы создать логическое обоснование анализа, должна была подвергнуться дальнейшей проработке.

Взаимно однозначное соответствие между элементами двух бесконечных множеств у Больцано еще не представляет определения их *равенства*. Множество точек на конечном отрезке не указывается равным множеству точек на всей прямой, как у Кантора, но Больцано ясно сознает, что здесь имеет место взаимнооднозначное соответствие, которое для конечных множеств является условием необходимым и достаточным для равенства.

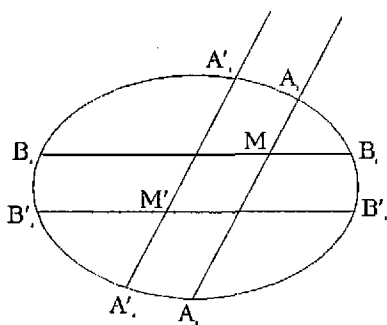
В канторовской переработке актуальная бесконечность получает приоритет в сравнении с *потенциальной*, так как он стремится к логическому обоснованию арифметики, очищенному от интуиции теории иррациональных чисел. Это привело Кантора к пониманию иррационального числа как символа так называемого фундаментального ряда рациональных чисел:

$$a_1, a_2, a_3 \dots a_n,$$

удовлетворяющих условию $\lim(a_{v+n} - a_v) = 0$, т.е. к положению в самой основе анализа актуальной бесконечности совокупности некоторых элементов.

перь не имеют того значения, какое имели у самого Аполлония, и утратили почетное место, отдававшееся им в старых учебниках.

Отметим далее одну интересную и игравшую важную роль, но уже в XVII в. забытую теорему из “Конических сечений”. Она состоит в том (фиг. 1), что если обозначить через M_1T_1 , M_2T_2 касательные в точках M_1 и M_2 , а через T_1 и T_2 пересечения их с прямыми OM_1 и OM_2 , проходящими через центр O , то треугольники M_1T_2R и M_2T_1R равновелики.



Фиг. 2.

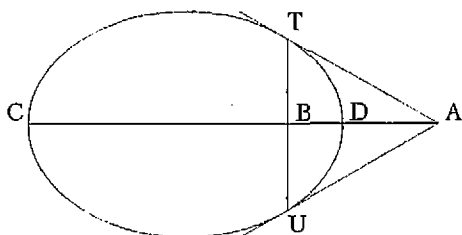
Вот другая теорема, которая играла, наоборот, большую роль в истории аналитической геометрии вплоть до Эйлера и обобщение которой явилось основной теоремой в теории алгебраических кривых, ведущей свое начало от Ньютона. Эта теорема состоит в том (фиг. 2), что отношение прямоугольников, построенных на отрезках хорд MA_1 , MA_2 и MB_1 , MB_2 , равняется отношению прямоугольников на отрезках параллельных хорд $M'A'_1$, $M'A'_2$ и $M'B'_1$, $M'B'_2$:

$$\frac{MA_1 \cdot MA_2}{MB_1 \cdot MB_2} = \frac{M'A'_1 \cdot M'B'_2}{M'B'_1 \cdot M'A'_2} \quad (1)$$

Наконец, укажем третью теорему, которая в настоящее время играет, пожалуй, еще большую роль, чем в XVII в. Сейчас она относится к теории поляр, причем в синтетической геометрии имеет не меньшее значение, чем в аналитической. Это теорема, утверждающая гармоничность точки A , из которой проведены касательные AT и AU , и точек C , B , D пересечения диаметра, проходящего через A , с кривой и хордой прикосновения (фиг. 3).

Заметим, что об асимптотах Аполлоний говорит больше, чем современные учебники; но точка зрения его на асимптоты совсем другая, чуждая тех понятий бесконечности и предела, которыми оперируем мы.

Вне сомнения, самыми важными после диаметральных свойств конических сечений являются у нас фокальные свойства и построения касательных. Так как у Аполлония свойство радиусов-векторов не является определением эллипса и гиперболы, а только производным свойством, то фокусы ему приходится определять геометрически риторическим правилом и по существу весьма формально. Фокус



Фиг. 3.

эллипса, по Аполлонию, это точка, делящая большую ось на две такие части, что прямоугольник, построенный на них, равен четверти прямоугольника, построенного на параметре, т. е. $2 \frac{b_2}{a}$ и большой оси $2a$.

Те основные свойства, “симптомы” параболы, эллипса и гиперболы, в которых мы теперь видим уравнения этих кривых, у Аполлония не играют той роли, что в настоящее время.

Если переложить эти “симптомы” на алгебраический язык, то основное свойство выразится уравнением

$$y^2 = 2px + qx^2, \quad (2)$$

где $q < 0$ для эллипса, $q > 0$ для гиперболы и $q = 0$ для параболы. Уравнения в форме (2) приводятся только для выяснения происхождения терминов эллипса, гиперболы, параболы (недостатка, избытка, равенства).

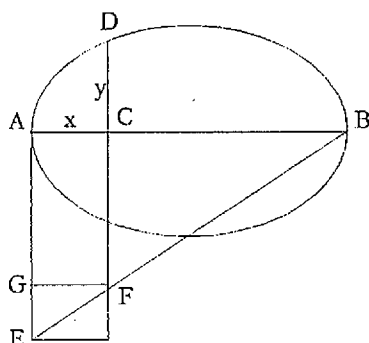
При этом для параболы квадрат на ординате $y = CD$ равен прямоугольнику на абсциссе $x = AC$ и отрезке $2p$ параметра (параметр Аполлония равен удвоенному нашему). Для эллипса этот квадрат равен меньшему прямоугольнику, полученному таким построением. В конце A диаметра $2B = 2a$ восстанавливается перпендикуляр $AE = 2'p$, точки E и B соединяются прямой, пересекающей $CF \perp AB$ в точке F . Тогда квадрат на CD равен прямоугольнику $ABFG$, ибо $GF: x = p:a$, т. е. $GE \cdot EF = \frac{px^2}{a}$ и $y^2 = 2px - qx^2$, где $q = \frac{p}{a}$ (фиг. 4).

Аналогично проводится построение и для гиперболы.

Перевод формулировки античной в современную алгебраическую, казалось бы, наводит на мысль о том, что отрезки AC и CD суть здесь координаты, а $y^2 - 2px + qx^2$ уравнение кривой. Но в действительности у Аполлония нет идей аналитической геометрии¹.

2. Два основных принципа аналитической геометрии

Для дальнейшего необходимо прежде всего выявить две основные идеи аналитической геометрии и, выявив их, признать, что при их отсутствии нельзя относить геометрические исследования к аналитической геометрии, хотя бы эти исследования и доходили (чуждым аналитической геометрии методом) до очень ценных результатов, относящихся к коническим сечениям.



Фиг. 4.

В основе аналитической геометрии лежат два принципа². Первый из них – координатный принцип можно формулировать так: изучение взаимного расположения геометрических объектов сводится к изучению их расположения относительно некоторых определенных неизменных объектов. Этот принцип связан с понятием координаты как величины, характеризующей положение объекта – прежде всего точки – относительно неизменных объектов (например, осей Ox и Oy).

Конечно, у самого Аполлония мы не находим понятия о координате. Он не мыслил AC и CD как абсциссу и ординату, определяющие положение точки на плоскости, а только как некоторые линии, связанные с точкой и кривой.

Я формулирую этот первый принцип в столь общей форме, так как считаю, что в истории аналитической геометрии весьма важна эволюция этого принципа, начиная с его частной формы – “декартовых координат” и кончая линейными плоскокординатами прямой, параллельными координатами и, наконец, проективными координатами.

Второй принцип определяемости носителя уравнением состоит в том, что свойство, характеризующее элементы, принадлежащие носителю, выражается уравнением между признаками элементов.

И здесь я беру самую общую формулировку, под которую подводится не только уравнение между координатами, но, например, и уравнение между радиусом кривизны и углом смежности в натуральной геометрии, являющейся одной из дальнейших ступеней развития аналитической геометрии.

Если даже считать величины, которыми оперирует Аполлоний, за координаты, то можно ли сказать, что он оперирует уравнением? Я думаю, что нет. Ведь в таком случае он должен был бы мыслить себе бесконечное множество точек носителя – пунктуал и определять это бесконечное множество одним уравнением, связующим признаки его элементов. Но античная мысль не оперировала актуальной бесконечностью. Логически предложения: “свойство Ω имеет место для каждого из $a_1, a_2, a_3, \dots$ ” и “свойство Ω имеет место для всех a ”, эквивалентны, но психологически переход от одного к другому требует совместного рассмотрения всей совокупности a как множества, причем в настоящем случае еще бесконечного.

В аналитической геометрии не следует видеть только одну алгебраизацию “конических сечений” Аполлония, в ней следует видеть еще видоизменен совершенно чуждых античной мысли идей, созданных философией XVII в.

3. Фузионизм античных математиков

Пожалуй, мы могли бы еще говорить о скрытом под геометрической формой определении кривой с помощью уравнения, если бы подход к парабол

ле, эллипсу и гиперболе был у Аполлония планиметрическим. Но этого у него нет. Подход его чисто стереометрический. Изучаемые кривые у него являются сечениями прямого конуса, и то, что можно было бы считать за координаты, возникает в ходе чисто стереометрического исследования.

В настоящее время получение параболы, эллипса и гиперболы как сечений конуса перешло в область начертательной геометрии. Хотя в некоторых учебниках аналитической геометрии эта глава воспроизводится, но в них она носит чисто геометрический характер, и в результате построений получается не уравнение, а основные свойства радиусов-векторов и директрис, определяющих эти кривые.

Но если идеи, лежащие в основе аналитической геометрии, следует признать чуждыми античным мыслителям, то этого нельзя сказать об основных целях аналитической геометрии. Тщательный анализ вскрывает, что эти цели были не очень далеки от тех, которые ставились античными математиками. Именно, основной целью геометрии Декарта и Ферма являлось графическое решение уравнений, к которому приводит алгебраизированное решение геометрических задач, и при этом преимущественно задач на построение. Это как раз та цель, которая и являлась главной целью исследования конических сечений у античных математиков.

Действительно, каким образом и с какой целью были открыты парабола, эллипс и гипербола? Были ли они открыты как конические сечения? Или, может быть, им сперва было дано планиметрическое определение, а уже потом было доказано, что они получаются при сечениях конуса?

Я думаю, что приходится склониться к первому предположению. Известно, что еще математик IV в. до н.э. Менехм решал задачу об удвоении куба с помощью параболы и гиперболы или с помощью двух парабол, причем при изучении этих кривых брались конусы с прямым или тупым углом при вершине, а сечение производилось плоскостями, перпендикулярными к прямолинейно-образующей. Было бы неправильно утверждать, что конические сечения были изобретены только для решения задачи об удвоении куба, но вне сомнения, что их появление в геометрии было вызвано поисками решений задач на построение.

Следует иметь в виду, что в самой формулировке этих проблем оставалась неопределенность, не было точно зафиксировано требование выполнения построения с помощью евклидова комплекса: циркуля и линейки.

Сечения пирамид, цилиндров и конусов, видимо, интересовали математиков еще ранее. Так, Демокрит исследовал плоские сечения, параллельные основанию кругового конуса³.

Что античные математики допускали сдвиг в самом понимании классических проблем на построение, ясно видно уже из самого наименования этих, а также других кривых, получаемых стереометрически, телесными местами, в отличие от плоских мест, каковыми являются прямая и

окружность. Парабола, эллипс и гиперболa прежде всего являются телесными местами, прежде всего они получаются стереометрически. Здесь следует вспомнить весьма сложное стереометрическое решение делосской проблемы удвоения куба Архимедом, в котором фигурирует кривая на цилиндре, образуемая пересечением с движущейся параллельно себе окружностью⁴.

4. Графическое решение уравнений

Я уже отметил, что основной целью ранней аналитической геометрии было графическое решение уравнений, о чем в прежнее время руководства по аналитической геометрии говорили очень много. Можно сказать, что аналитическая геометрия в начальной стадии своего развития представляла скорее приложение геометрии к алгебре, причем эта черта ее не была утрачена даже в XIX столетии.

Обычно на это обстоятельство не обращают внимания. Обращаясь же к сочинениям Декарта (1637) и Ферма (ок. 1637), мы ясно видим, что преимущественно интересовало их именно приложение геометрии к алгебре⁵. Ведь мы не находим в этих работах даже самых простых теорем чисто геометрического типа, доказываемых методом аналитической геометрии.

Первое время построение корней является основной задачей, но со временем эта задача сдвигается с первого плана, и если Декарт с нее начинает, то Лопиталь ею кончает⁶.

Но к графическому решению уравнений открываются два пути: 1) изыскание уравнений, определяющих известные кривые, или, во всяком случае, кривые, которые вычерчиваются простым непрерывным движением; 2) определение геометрического значения простейших алгебраических уравнений.

По первому пути шел Декарт, по второму Ферма (независимо от Декарта).

В "Геометрии" Декарта видное место занимало решение так называемой задачи Паппа. В этой задаче даны по положению несколько прямых и требуется найти геометрическое место таких точек, что если из этих точек провести под данными углами к данным прямым отрезки, то отношение произведения некоторых из проведенных отрезков к произведению остальных будет постоянно. Эта задача у Декарта получает особенное значение только потому, что кривые, дающие ее решение, включают конические сечения, являясь естественным их обобщением. Декарт находит среди них и другие известные кривые, вычерчиваемые непрерывным движением.

Определяя уравнение кривой, данное каким-либо условием (т.е. заданное как геометрическое место), Декарт не находит другого выхода,

как обратиться к Аполлонию, и выражает содержание его основных положений в форме уравнения между x и y , причем обнаруживает совпадение последнего с тем, которое он получает, решая задачу при определенном выборе направления и длины осей и величины параметра.

Ферма же приводит уравнение к такому виду, из которого непосредственно на основании теорем элементарной геометрии видно его геометрическое значение, или к такому виду, что в нем узнается одна из теорем Аполлония. При этом у Ферма приведение уравнения совершается или путем изменения формы посредством приведения к пропорции, или, что имеет особенное значение в аналитической геометрии, заменой x другой аналогичной величиной, относящейся не к Oy , а к $Oy' \parallel Oy$ в чем, конечно, заключается эмбрион преобразования координат. Мы находим у Ферма геометрическое значение уравнений:

В форме Ферма: **В современной:**

$DA = BE$ $ax = by$ (прямая, проходящая через начало координат)

$Z - DA = BE$ $ax - by = c$ (вообще прямая)

$AE = Z$ $xy = c$ (гипербола, отнесенная к асимптомам)

$E^2 = DA$ $x^2 = ay$ $\left\{ \right.$ (парабола)

$A^2 = DE$ $y^2 = ax$ $\left. \right\}$

$B^2 + A^2 = E^2$ $x^2 + y^2 = r^2$ (окружность)

$B^2 \pm A^2 K^2 = E^2$ $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ (эллипс и гипербола)

Я обращаю внимание на метод Ферма приведения уравнения к системе уравнений, определяющих уже не одну, а две величины, и вытекающий отсюда способ построения корней. При этом я в основном сохраняю обозначения самого Ферма.

Рассматривается уравнение 3-й степени:

$$A^3 + BA^2 = Z^2B, \quad (3)$$

где гласная A стоит вместо нашего x , а свободный член Z^2B берется в этой форме для однородности всех членов, как этого требовал Визет⁷.

Затем Ферма полагает

$$A^3 + BA^2 = BAE$$

или

$$A^2 + BA = BE \quad (4)$$

и вместе с тем по (3)

$$Z^2B = BAE$$

или

$$Z^2 = AE \quad (5)$$

и корень уравнения (3) оказывается абсциссой точки пересечения параболы (4) и гиперболы (5).

Сущность этого метода состоит в том, что уравнение

$$\varphi(x) = \psi(x)$$

приводится к

$$\varphi(x) = \theta(x, y)$$

$$\psi(x) = \theta(x, y),$$

где $\theta(x, y)$ выбирается так, что по сокращении происходит упрощение.

Весьма вероятно, что корень этой методы следует искать в *Regula aliza* Кардана⁸.

Это кардановское правило состоит в приведении уравнения к системе двух уравнений, при этом таких, решение которых достигается без приведения к первоначальному путем исключения одного неизвестного. Например, уравнение

$$x^6 + ax^4 + a^2x^2 + a^3 = bx^3 \quad (6)$$

приводится к системе уравнений

$$xy = a \quad (7)$$

$$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = b, \quad (8)$$

а затем мы имеем:

$$2a(x+y) = 2x^2y + 2xy^2 = (x+y)^3 - x^3 - y^3 - x^2y - xy^2 = (x+y)^3 + b.$$

Уравнение же

$$(x+y)^3 = 2a(x+y) + b \quad (9)$$

разрешается с помощью формул Кардана относительно $x + y$, и окончательной системой является:

$$x + y = c; \quad xy = a, \quad (10)$$

т.е. x, y определяются квадратным уравнением.

После Декарта и Ферма графическим решением уравнений высших степеней занимались ученые Слюз, Крег, Ньютон и другие математики XVII и XVIII вв.

5. Алгебраическая и аналитическая геометрия

Аналитическая геометрия в том виде, как мы ее находим у Декарта и Ферма, использует, как увидим ниже, только второй основной принцип и имеет целью не аналитическое доказательство геометрических теорем, а графическое решение уравнений. Поэтому геометрию Декарта, пожалуй, лучше называть не аналитической, а алгебраической, а может быть, еще лучше — геометрической алгеброй.

К тому же смысл терминов “анализ” и “синтез” сильно колеблется.

В методике вслед за Паппом анализ понимается обычно как прием нахождения доказательства (или решения) путем восхождения от следствий к причинам; синтез же, наоборот, идет от причин к следствиям⁹. Соответственно этим приемам мышления отличаются и два приема изложения. В этом смысле об аналитическом изложении, противоположном чисто синтетическому методу изложения в "Началах" Евклида, можно говорить лишь применительно к аналитической геометрии в ее развитой форме.

В другом же понимании анализ толкуется как изучение целого путем дробления его на части, а синтез как воссоединение частей. В этом смысле говорят об анализе бесконечно малых или о химическом анализе и синтезе. Хотя эти понимания и различны, но, вне сомнения, между ними существует логическая связь: то, что мы находим в целом, мы можем мыслить обусловленным свойством частей.

Но толкование названных терминов в первом смысле перешло в XVII в. в понимание анализа просто как алгебраической методы; уравнение при этом рассматривается как основание свойств геометрического объекта, например, кривой, и восхождение к уравнению тогда является восхождением от следствий к причинам.

Мы не можем, однако, настаивать на том, что геометрию Декарта следует назвать алгебраической, потому что при своем зарождении алгебраическая геометрия понималась значительно шире; к ней относились всевозможные алгебраические решения задач (главным образом на построение), в которых ни первый, ни второй из упомянутых принципов не используются. Алгебраическая геометрия в широком смысле или алгебраические методы решений задач сделались возможными после изобретения Визом буквенной алгебры. При этом выявились два момента:

1) приведение геометрической задачи к уравнению, определяющему неизвестное, от которого зависит решение задачи; коэффициенты этого уравнения выражаются через данные величины. Это приложение алгебры к геометрии;

2) построение корня уравнения, которое, естественно, требовало изучения построения элементарных выражений. Это приложение геометрии к алгебре.

До аналитической геометрии Декарта уже существовала алгебраическая геометрия, и аналитическая геометрия явилась системой специальных методов решения задач алгебраической геометрии.

Следует особое внимание обратить на работы Гетальди¹⁰, приводящего решение задачи на построение к уравнениям 2-й и высших степеней и заключающего, в случае мнимых корней, — о невозможности решения поставленной задачи, а в случае неопределенного уравнения — о бесчисленном множестве решений.

Тщетные попытки решения уравнений выше 4-й степени послужили причиной сдвига в самом понимании решения уравнения, которое

стало пониматься не в смысле конструирования (т.е. построения в радикалах), а в смысле вычисления по приближению или же в графическом. В последнем случае корни стали определяться отрезками, определяемыми точками пересечения кривых, которые вычерчиваются не только с помощью циркуля и линейки, например, параболы, эллипса, гиперболы, конхонды и других.

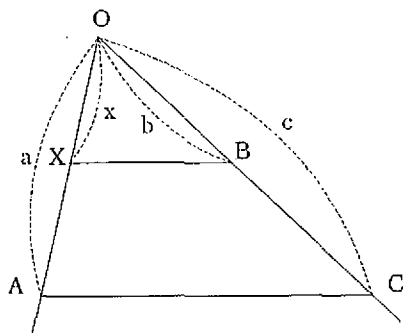
Интересно отметить, что математики XVII в. занимаются построением сложных алгебраических выражений без сведения их к простым. Конечно, во многих случаях построения получаются более простые, чем те, которые даются общей методой. Следует еще отметить, что алгебраический характер исследования конических сечений выдерживается в XVII и XVIII вв. различными учеными в различной мере, и многие пользуются только алгебраическими обозначениями, но не алгебраическими операциями.

Даже в середине XVII в. античные методы персмешиваются с картезианскими: уравнения конических сечений выводятся из стереометрических соображений, вместо уравнений используются неудобные для дальнейших операций пропорции, применяется устаревшая символика и т.д.

6. Арифметизация в аналитической геометрии

Заслугой Декарта иногда считают арифметизацию геометрии, приведение геометрических операций к действиям над числами. Но это неверно. Это было бы возможно только в том случае, если бы Декарт представлял себе взаимно-однозначное соответствие между числами и геометрическими величинами, т.е. если бы он имел в своем распоряжении иррациональные числа, хотя бы не строго обоснованные, но принятые на веру. Но в его время этого не было, да и не могло быть.

Однако можно сказать, что Декарт в своей не арифметизированной, а алгебраизированной геометрии делает первый шаг к арифметизированной геометрии. Здесь он уходит дальше Ферма. Для Ферма “характеристики”



Фиг. 5.

$a, b, c, d, \dots$ представляют собой, как для Визта и многих других алгебраистов, величины в общем смысле (*magnitudines*), т.е. либо непрерывные геометрические величины, либо дискретные числа. Конечно, геометрические операции, дающие члены выше третьего измерения, могли иметь при этом только формальный характер; над буквенными выражениями вроде a^3b и т.п. допускались обычные операции, т.е. по существу все эти гипергеомет-

рические операции и элементы играли ту же роль, какую в настоящее время играют комплексные числа. Декарт же все буквы мыслит не как числа, как делают все математики, начиная с Лежандра, а как отрезки, и операции $a \pm b$, ab , $\frac{ab}{c}$ мыслит как операции над отрезками. Например, построение величины $x = \frac{ab}{c}$ видно из фиг. 5.

Одним словом, Декарт поступает так, как Д. Гильберт, в своих "Основаниях геометрии", строящий исчисление отрезков с целью обоснования теории подобия и теории пропорций без аксиомы Архимеда.

7. Функциональное мышление и Декарт

Таким образом, Декарту нельзя ставить в заслугу арифметизацию геометрии, но можно сказать, что в своем исчислении отрезков он встал на промежуточную точку зрения. Аналогично обстоит дело с вопросом об идее функции у Декарта.

Мы тесно связываем аналитическую геометрию с понятием функции. Мы меняем x и в зависимости от x y у нас меняется и y . Но мыслит ли таким образом Декарт? Я думаю, что так он не мог мыслить. Раньше чем начали мыслить y меняющимся в зависимости от x вне времени, что сводится скорее не к действительному изменению, а только к возможности изменения, x и y мыслились как изменяющиеся во времени, т.е. как флюэнты, согласно терминологии Ньютона. Это время у Ньютона же сначала обращается в умозрительное время, а затем превращается в независимое переменное в общем смысле¹¹.

Само слово "функция" употребил впервые Лейбниц (1694) в смысле некоторого отрезка, связанного с точкой кривой, как абсцисса, ордината, радиус кривизны и т.д.

Это геометрически конструктивное понятие о функции вскоре эволюционировало в аналитически конструктивное понятие Ив. Бернулли и особенно Эйлера, при котором функция отождествляется с выражением при помощи аналитической формулы. В дальнейшем динамическое и конструктивное понятия функции сливаются. При этом функциональное мышление со всею определенностью выступает только у Эйлера.

Но и здесь Декарт занимает некоторое промежуточное положение и делает важный шаг вперед в развитии к функциональному мышлению. Во-первых, он определяет кривые форономически, заставляя двигаться точку по кривой или саму кривую по определенному закону. Это еще не функциональное мышление, но это первый шаг к динамическому понятию функции Ньютона — флюэнты. Переход от форономической точки зрения, рассматривающей изменение величины вне времени, к кинематической, связывающей это изменение со временем, и подводит к понятию флюэнт.

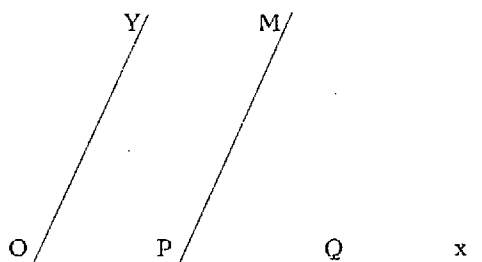
Во-вторых, Декарт мыслит актуально бесконечное множество всех точек, которые как некое целое несет кривая; он обнимает мыслью все положения, которые занимает движущаяся точка, и в каждом положении мыслит одну и ту же зависимость между x и y . Однако до понятия функции в смысле табличного соответствия между множествами, которое выступает уже в геометрически конструктивном понятии функции Лейбница, Декарт не доходит; он мыслит бесконечное множество пар (x, y) , но не пару двух множеств x и y в отдельности.

Анализ сочинений последователей Декарта укрепляет меня в высказанном мнении. Я повторяю, что ордината y сперва вовсе не мыслится как изменяющаяся вместе с x , но рассматривается основное простейшее движение, когда угол MPQ движется так, что PQ скользит по Ox , а точка M движется определенным образом по PM . Де Витт называет OP интервалом (фиг. 6), PM — образующей линией¹². Величина отрезка PM определяется тем, что при всяком положении M задается некоторое его свойство, которое характеризуется чисто геометрически. Из этого свойства и выводится в алгебраической форме некоторая зависимость между PM и OP . Аналогичная терминология сохраняется Виттом и для других прямых, участвующих в образовании кривой.

При этом то, что мы называем началом координат O , всегда является характерной точкой кривой. Директриса (по-нашему ось Oy) есть прямая, проходящая через O и тоже характерная для образуемой при движении кривой.

Следует отметить, что форономическая форма выражения не изобретается из аналитической геометрии даже много позднее. Такую форономическую форму выражения можно найти, например, у Девелея¹³.

Именно потому, что подход Декарта был форономическим, а не функциональным, задержалось и развитие пространственной аналитической геометрии. Координаты точки на кривой мыслились как изменяющиеся в зависимости от некоего параметра. Но подобное образование поверхности было



Фиг. 6.

невозможно, так как она не описывается точкой. Уравнение поверхности могло появиться только с выявлением конструктивно-динамической функции от двух переменных, что следует отнести только к Клеро¹⁴.

8. Координатный принцип

Мы уже отметили, что ни Декарт, ни Ферма не имели понятия о координатах в нашем понимании и таким образом использовали не оба основных принципа, мной указанные, а только второй: определяемость кривой уравнением.

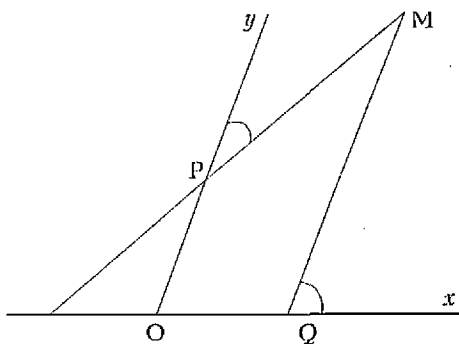
Величины, которыми характеризуют положение некоторых объектов $A, B, C, D, \dots$ относительно некоторых неизменных объектов, называются координатами.

В настоящее время координаты считают наиболее существенным элементом аналитической геометрии. Тодгентер даже заменил обычный термин “аналитическая геометрия” другим — “координатная геометрия”¹⁵. Но так обстоит дело только в настоящее время, а в прошлом было по-иному.

Координатный принцип устанавливает соответствие между точками плоскости и парами чисел. Затем геометры идут гораздо дальше, устанавливая соответствие между прямыми плоскости и координатами ее, а затем между точками (или прямыми) одной плоскости и точками (или прямыми) другой. Начинают мыслить две плоскости как состояние одной, изменяющейся плоскости, как преобразование плоскости при некоторых инвариантах. Но все это относится к недавнему прошлому. В более отдаленном прошлом абстрактной идеи соответствия совсем не было.

Понятие о координате в нашем смысле появилось очень поздно. У всех авторов до Эйлера величины (x, y) в уравнении, определяющем кривую, вовсе не суть величины, определяющие положение точки на плоскости относительно некоторых осей Ox и Oy . Это только характерные линии на самой кривой. Решая упомянутую выше задачу Паппа, Декарт начинает с установления зависимости между некоторыми отрезками $x=AB$ и $y=BC$. Мы назовем эту зависимость уравнением геометрического места, считая x и y за координаты точки кривой. Но для Декарта x и y не являются координатами в нашем смысле. Он нигде не говорит об определении положения точки на плоскости ни этими, ни какими-либо другими величинами. Более того, эти x, y не подводится под то понятие, которое мы обозначаем термином “декартовы координаты”. Отрезки MP и MQ здесь проводятся не параллельно Ox и Oy под одним и тем же углом (фиг. 7), и лишь в частных случаях x, y оказываются нашими прямоугольными декартовыми координатами.

Даже у Эйлера нет полного совпадения с нашим подходом



Фиг. 7.

к понятию координаты. Но, в отличие от своих предшественников, Эйлер дает общие формулы преобразования координат, причем с целью преобразования кривой, а не всей плоскости. Несомненно, что именно эти формулы должны были сыграть роль при выявлении понятия координаты в современном смысле.

Величины (x, y) обращаются в координаты на плоскости, с одной стороны, под влиянием начертательной геометрии, созданной Монжем, с другой стороны, под влиянием картографии, которой занимался Эйлер.

Эмбрион идеи координаты приходится искать еще задолго до Монжа. Уже Дюрер¹⁶ пользуется координатами точек на плоскости картины, протягивая нить от глаза к изображаемой им точке предмета; он определяет координаты точки пересечения ее с плоскостью картины, которой является плоскость рамы, где натягиваются две нити, параллельные ее краям, и, передвигая их, определяет расстояние от краев рамы. Но едва ли можно уловить в работе Декарта влияние этих дюреровских идей. У Декарта играют роль те основные величины Аполлония, соотношение между которыми даст характерное свойство кривой.

Другой источник понятия о координате лежит в картографии, причем именно здесь можно довольно далеко проследить понятие координаты. Как это часто случается в истории науки, сперва выступает более сложный случай, а затем делается переход к более простому. Птоломей, определяя положение точки на сфере некоторыми координатами, дает вместе с тем первое понятие о преобразовании, правда, не плоскости в плоскость, а сферы в плоскость, что приводит затем к понятию о координатах на плоскости. Но в античное время и во время Декарта эти идеи не получили развития, ибо отсутствовала идея соответствия и преобразования.

На первый взгляд кажется, что рассмотрение (x, y) как координат на плоскости мало вносит в геометрию Декарта. Но если вдуматься, то обнаружится, что только при наличии этого понятия становится возможным метод преобразования координат как общий метод.

Можно, пожалуй, (x, y) у Декарта, Ферма и Лопитала назвать координатами на кривой как величины, определяющие положение точки не на плоскости, а на определенной кривой. Преобразование же координат мы теперь совершаем при помощи формул, связующих (x, y) с (x', y') для любой точки плоскости.

Аналитическая геометрия Био¹⁷ начинается с определения абсцисс и ординат почти в современном смысле. Но даже здесь следует прибавить "почти", так как в определении говорится не об абсциссе и ординате, определяющих точку, но об абсциссах и ординатах точек кривой. Отметим, что и у Клогеля¹⁸ координаты определяются только в отношении к графику.

9. Определение кривой уравнением и функции графиком

Функция изучается с помощью графика; можно сказать и наоборот: график в аналитической геометрии изучается с помощью функции. Конечно, первый подход к графике имеет только практическое и методическое значение при воспитании функционального мышления. Но он же встречается в не вполне математизированной форме в теории широт и долгот схоластика XIV в. Орезма¹⁹.

Схоластический спор о том, что меняется при изменении субстанции – форма или материя, привел еще Дунса Скотта к такому решению: ни материя, ни форма не меняются. Но форма проходит через формы форм или формальности. Форма – это метафизический предок переменного x , формальности – его значений $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$.

Орезм строит то, что мы могли бы назвать графиком, откладывая время по оси Ox , а по перпендикулярам – значения формальностей, и связывая таким образом с кривой различные типы изменения во времени. Можно сказать, что и у Орезма имеются координаты точки на кривой: x является у него долготой, а перпендикуляр y – широтой.

Оказал ли Орезм влияние на Декарта? Такое влияние можно было бы ожидать у Декарта, который прошел через схоластическую науку. Но в геометрии Декарта мы нигде не можем уловить такого влияния.

Метафизическое понятие о функции задерживается в своем развитии и не вступает в область математических исследований. Учение о долготах и широтах Орезма ничего не дает кроме довольно примитивной классификации типов изменения, отвечающих различным типам графиков. Мы не находим у Орезма чего-либо такого, что могло бы натолкнуть на обратный подход – на изучение не функции по графику, но графика по функции.

Следует также отметить, что у Орезма только x является линией, а y есть собственно не линия, а некоторый тонкий прямоугольник, стоящий на Ox , т.е. на отрезке, соответствующем мгновенному изменению времени.

У Орезма, как и у Фомы Аквинского, нет еще непрерывного изменения; изменение идет скачками в ничтожные промежутки времени (мгновения)²⁰.

Я думаю, что учение Орезма вряд ли оказало влияние не только на Декарта, но и на Ньютона в его учении о флюэнтах и флюксиях.

10. Аналитическая геометрия без преобразования координат

Аналитическая геометрия в современной законченной форме с общим исследованием кривых второго порядка могла развиваться только вместе с теорией преобразования координат. Чтобы уяснить, какое значение имело в истории аналитической геометрии преобразование координат, я предлагаю

обратиться к тем приемам, которые применялись до введения в аналитическую геометрию общих формул преобразования координат.

Каким образом решался вопрос, представляется ли какая-либо кривая уравнением

$$\sum \varphi_{ik}(a, b, c, \dots) x^i y^k = 0 ? \quad (11)$$

Для решения этой задачи выводится сперва общее уравнение этой кривой при каких угодно осях координат:

$$\sum \varphi_{ik}(\alpha, \beta, \gamma, \dots) x^i y^k = 0 ? \quad (12)$$

и затем определяется, возможно или невозможно определить $a, b, c, \dots$ через $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ так, чтобы коэффициенты (11) и (12) оказывались пропорциональными.

Так, например, можно установить, что геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек постоянно, есть окружность, сравнив получаемое на основании этого свойства общее уравнение с уравнением окружности

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2. \quad (13)$$

Так поступаем и мы, когда выводим условия, при которых кривая второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (14)$$

представляет окружность (13).

Весьма интересно сравнительно позднее появление уравнения кривой второго порядка в общей форме (14). Бесспорно, что одной из причин этого является ясно выраженная тенденция держаться однородности строения уравнения. В картезианском смысле выражений Ax^2 , Dx и т.д. понимаются как отрезки, но только при введении масштабной единицы, т.е.

при представлении Dx как $\frac{Dx}{1}$ и т.п. Но как Декарт, так и его последователи не пользуются масштабной единицей; на ее месте всегда фигурирует некоторый произвольно взятый отрезок, и уравнение (14) должно писаться в форме:

$$\frac{ax^2}{m^2} + \frac{2bxy}{m^2} + \frac{cy^2}{m^2} + \frac{2dx}{m} + \frac{2ey}{m} + f = 0. \quad (15)$$

Впрочем, в действительности в этой форме общее уравнение кривой второго порядка не пишется, так как в качестве параметров всегда стараются выбирать некоторые определенным образом построенные отрезки.

Еще интереснее отметить, что методы более ранних математиков, в том числе и самого Ферма, колеблются около приема преобразования

координат, но эти ученые не могут овладеть названным приемом из-за того, что понятие координаты на плоскости не выяснено.

Без этого приема математическая мысль сперва преобразует уравнение

$$f(x, y) = 0 \quad (16)$$

в более простое

$$\varphi(x', y') = 0 \quad (17)$$

при помощи формул

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= y' \\ x &= x', \end{aligned} \quad (18)$$

истолковывая геометрически эту зависимость так, что и x', y' , оказываются координатами.

Общей методы еще нет. Не сознается даже то, что формулы преобразования должны иметь линейную форму:

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax + by + c \\ y' &= a'x + b'y + c' \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Так, например, обстоит дело в сочинениях де ля Гира²¹.

11. Прямая в аналитической геометрии

Аналитическая геометрия даже во второй половине XVIII в. обходится без тригонометрии. Последняя в своей тригонометрической части развивается медленно. Символика и алгебра тригонометрических величин создаются только Майером и Эйлером.

Основные формулы в теории прямой

$$\begin{aligned} y &= ax + b, \\ a &= \operatorname{tg} \alpha, \end{aligned} \quad (20)$$

где угол α , образуемый прямой с Ox , появляется только вместе с тригонометрической символикой²².

Вывода уравнения прямой у Декарта нет; у Ферма уравнение прямой имеется. Это странное явление объясняется различием их подходов. Декарт, идя от кривой к уравнению, извлекает (x, y) из внутренних элементов кривой, принимая, например, за y полухорду, за x ее высоту. Ферма же, идя от уравнения к кривой, должен брать за (x, y) внешние элементы. Можно сказать, что хотя (x, y) у него и не являются координатами на плоскости, но их можно признать координатами точки на прямой.

12. Преобразование координат без тригонометрии

Крамер²³ дает общие формулы преобразования координат. Но, во-первых, эти формулы не тригонометрические, во-вторых, они представляют собой

формулы преобразования не координат точек на плоскости, а координат точек кривой.

Общие формулы Крамера пишутся так:

$$x = m + pz + ru \quad (21)$$

$$y = n + qz + su,$$

где коэффициенты p, q, r, s выражаются не тригонометрически, но через заданные отношения сторон различных треугольников, возникающих при преобразовании координат.

Тригонометрические формулы преобразования мы встречаем у Эйлера. Отличие его изложения от современного состоит только в том, что он не пользуется общепринятыми ныне леммами о проекциях. Оперирование с относительными геометрическими величинами, или, как некоторые говорят, с алгебраическими отрезками, тогда еще не производилось. Такого рода приемы могли войти в геометрию только после знаменитого спора об отрицательных геометрических величинах в начале XIX в., определенным образом выявившего право гражданства их в геометрии²⁴.

13. Начало истории кривых второго порядка

Современный учебник аналитической геометрии трактует только о прямой и кривых второго порядка. Уравнением параболы, эллипса и гиперболы мы обязаны Декарту и Ферма, которые, как мы видели, подошли к ним с различных сторон. Но следует помнить, что для них эти кривые прежде всего являлись коническими сечениями. Оба они пользуются их свойствами, выведенными стереометрически, согласно Аполлонию. Можно сказать, что у них еще нет чисто плоскостной аналитической геометрии.

Аналитическая геометрия на плоскости рождается с того момента, когда эти кривые получают чисто планиметрическое определение. Это знаменует начало новой эпохи. Эллипс становится геометрическим местом точек, сумма расстояний которых от двух точек постоянна, гипербола — геометрическим местом точек, разность расстояний которых от двух точек постоянна, парабола — геометрическим местом точек с равными расстояниями от точки (фокуса) и прямой (директрисы).

Стереометрическая сторона дела при этом не исчезает, но отходит на второй план. Наряду с частью, развивающей три планиметрические теории, излагается, но уже во вторую очередь, теории параболы, эллипса и гиперболы как конических сечений. Этот момент относится к де ля Гирю.

У Лопитали аналитическая геометрия планиметризована, но еще не алгебраизована в той мере, как у нас. Начинается она с изучения параболы, эллипса и гиперболы. Определение их дается обычное, но только в геометрической форме. Определением служит, как у Декарта, построение непрерывным движением. “Прикрепляем, говорит Лопиталь, на плоскости концы нити FMf в данных точках F и f, расстояние между которыми

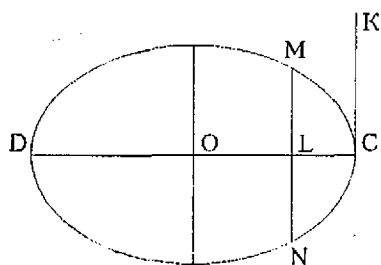
меньше длины нити, берем грифель, чтобы держать эту нить натянутой, и двигаем его вокруг этих двух точек так, что он возвращается в прежнее положение. Он описывает тогда в этом движении кривую, которую назовем эллипсом". Парабола, эллипс и гипербола получают у Лопитали название "конических сечений", раньше чем доказывается, что они возникают как плоскостные сечения конуса.

Наконец, третья эпоха характеризуется тем, что конические сечения подводятся под их объемлющее понятие кривых второго порядка и согласно этому строятся и их стереометрическая аналогия – поверхности второго порядка.

В настоящее время обычно подходят к параболе, эллипсу и гиперболе, отправляясь от общего рассмотрения кривых второго порядка. Эллипс является кривой второго порядка без бесконечно удаленных точек, гипербола – с двумя бесконечно удаленными точками, парабола – с одной.

14. "Введение в анализ бесконечно малых" Эйлера

Эйлер²⁸ оперирует общим уравнением кривой второго порядка. Но он дает значительно меньше, чем наши учебники, и не использует преобразования координат для исследования кривых второго порядка. Вывод упрощенных уравнений кривых второго порядка совершается на основании некоторых общих свойств кривых второго порядка.



Фиг. 8.

Главная заслуга Эйлера состоит в том, что он первый дает общую теорию кривых второго порядка, основываясь на уравнении

$$\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \xi y^2 = 0. \quad (22)$$

Правда, эту общую теорию Эйлер развивает не далеко. В пятой главе дается, по терминологии Эйлера, вывод главных свойств кривых второго порядка.

Первое свойство состоит в том, что прямая, проходящая через точку касания и делящая пополам какую-либо хорду, параллельную касательной, делит пополам и все другие хорды, параллельные касательной. Это свойство выводится Эйлером из рассмотрения коэффициентов уравнения кривой (22).

Второе главное свойство, получаемое через рассмотрение свободного члена уравнения (22), состоит в том, что (фиг. 8) для хорд MN, парал-

лельных касательной СК в конце С диаметра DC, отношение $\frac{CL \cdot LD}{ML \cdot LN}$ имеет

постоянное значение.

Это свойство, как мы видели ранее, было известно и Аполлонию и Архимеду, и играло важную роль в их рассуждениях. Таким образом, даже Эйлер оказывается связанным с “Коническими сечениями” Аполлония.

Из этих свойств и выводится упрощенное уравнение кривой второго порядка. Полагая

$$\frac{CL \cdot LD}{ML \cdot LN} = \frac{k}{h}$$

$CD = a$ (диаметру), $CL = x$, $ML = NL = y$,

Эйлер получает уравнение

$$y^2 = \frac{h}{k} (ax - x^2) \quad (23)$$

т.е. вида

$$y^2 = 2px + qx^2. \quad (23')$$

В эйлеровском “Введении” нет еще исследования кривой второго порядка, заданной общим уравнением в современном смысле. Это исследование у нас разделяется на два момента: 1) приведение уравнения преобразованием к центру и к осям, 2) исследование формы кривой по уравнению.

Что делает Эйлер? Он берет в 6-й главе упрощенное уравнение:

$$y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \quad (24)$$

и заключает, что при $\gamma > 0$ имеются *четыре* ветви, уходящие на бесконечность, которые мы, признавая на прямой только одну бесконечно удаленную точку, признаем за две ветви.

Заключение это выводится из того, что при $x = \pm \infty$ мы получаем для y вещественное значение ∞ .

При $\gamma < 0$ и $x = \pm \infty$, y становится мнимым, т.е. бесконечные ветви отсутствуют. При $\gamma = 0$ мы имеем две (по-нашему — одну) ветви, идущие на бесконечность. Совершенно так же, как это делается теперь, Эйлер дает трем типам полученных таким образом кривых названия гиперболы, эллипса и параболы.

15. Кестнер; Брюи и Букэ

Известный методист-математик Кестнер²⁶ разрешает общее уравнение кривой второго порядка:

$$\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \xi y^2 = 0, \quad (25)$$

что дает:

$$y = \frac{-(\epsilon x + \gamma) \pm \sqrt{(\epsilon x + \gamma)^2 - 4\xi(\delta x^2 + \beta x + \alpha)}}{2\xi} \quad (26)$$

Из формулы (26) Кестнер делает заключения относительно асимптот или числа ветвей, причем облекает свои выводы в форму, в которой фигурирует еще не отмененный принцип исчезновения конечного в сравнении с бесконечно большим, а также бесконечного низшего порядка в сравнении с бесконечным высшего порядка.

Величина под радикалом, говорит Кестнер, выражается так:

$$z = (\epsilon^2 - 4\xi\delta)x^2 + \phi x + \rho,$$

где ϕ, ρ определяются с помощью коэффициентов уравнения (26). Но, согласно учению о бесконечности, продолжает Кестнер, я принимаю, что когда x бесконечно, то

$$z = (\epsilon^2 - 4\xi\delta)x^2,$$

ибо остальные члены в сравнении с этим исчезают. Если $\epsilon^2 - 4\xi\delta > 0$, то кривая линия имеет возможные ординаты для положительных и отрицательных бесконечных x . Поэтому кривая не будет эллипсом. Далее, как и у Эйлера, делается заключение о существовании четырех ветвей и о том, что в рассматриваемом случае имеется гипербола.

Если $\epsilon^2 - 4\xi\delta < 0$, то ординаты при бесконечных положительных и отрицательных абсциссах невозможны и имеется эллипс. При $\epsilon^2 - 4\xi\delta = 0$ Кестнер берет $z = \phi x + \rho$, заставляет исчезать ρ в сравнении с ϕx и получает параболу.

У Брио и Бук²⁷, учебник которых сыграл особенно важную роль в истории методики аналитической геометрии, парабола, эллипс и гипербола определяются еще в начале курса их фокальными свойствами (среди примеров определения геометрических мест уравнениями). Сейчас же за этими кривыми рассматриваются: циссоида Диоклеса, строфоида, улитка Паскаля и другие кривые.

Подробное изучение параболы, гиперболы и эллипса следует уже после изучения кривых второго порядка вообще.

В первую очередь дается построение линии второго порядка, представляющее изучение формы кривой по уравнению. Затем следует упрощение уравнения, введением к которому служит изучение центральных и диаметральных свойств кривых второго порядка. Конечно только последнее приводит к заключению, что под понятие кривой второго порядка подводятся лишь парабола, эллипс и гипербола и их известные вырождения.

Уравнение

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (27)$$

разрешается относительно y :

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C} \cdot \sqrt{Mx^2 + 2Nx + P} \quad (28)$$

и особо изучаются случаи:

$$M < 0, M > 0 \text{ и } M = 0.$$

Далее рассматриваются основные свойства кривой второго порядка. В преобразовании к осям и к центру мы теперь довольно близко следуем Брио и Букэ.

Современные учебники ведут свое происхождение главным образом от большого руководства Сальмона²⁸, который сам находится под влиянием курса Брио и Букэ, и других родственных учебников.

Без сомнения, большое значение в развитии аналитической геометрии имело понятие предела, данное д'Аламбером, и понятие о единственности на прямой бесконечно удаленной точки, принадлежащее Понслэ.

ПОРИЗМЫ И ДАННЫЕ

§ 1. Очень трудно проникнуть в ход мыслей античного человека. Историк в большей или меньшей мере проектирует в прошлое настоящее. Лежандр, упрощая Евклида, не сознает, что это упрощение достигается только изменением самого понимания геометрического доказательства.

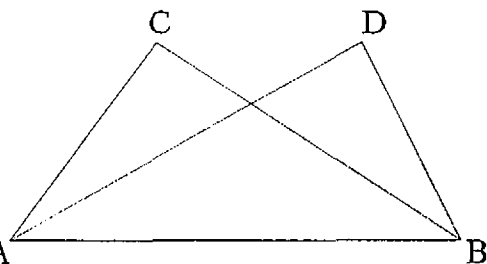
Евклид¹, конечно, никогда не признавал бы лежандрова доказательства теоремы о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника². Ведь во всех своих доказательствах Евклид берет только те элементы в фигуре, построение которых доказывается. У Евклида геометрические объекты получают существование только через построение. Лежандр же в своем доказательстве использует медиану треугольника, но при этом он вовсе не дает построения середины основания, он только постулирует существование медианы.

Третий случай равенства треугольников, на котором основывается лежандрово доказательство, Евклид доказывает не до предложения о равнобедренном треугольнике, а *после* него.

Прием доказательства Евклида основывается на лемме, что для двух точек C, D, лежащих по одну сторону отрезка AB (фиг. 1), невозможно одновременное выполнение равенства

$$CA=DA \text{ и } CB=DB,$$

а эта лемма доказывается только с помощью предложения о равнобедренном треугольнике. Вот почему Евклиду приходится строить другое, значительно более сложное доказательство этого предложения.



Фиг. 1.

“Начала геометрии” А Лежандра отличаются от “На-

чал” Евклида, во-первых, различным пониманием доказательства, иначе говоря, существования геометрических объектов; во-вторых, тем, что изложение Лежандра арифметизировано: каждая геометрическая величина у него выражается числом, и каждому числу отвечает геометрическая величина, в то время как у Евклида все доказательства ведутся без обращения к числам. Более того, Евклид не ставит никаких вычислительных задач, не дает приемов вычисления площадей, поверхностей и объемов.

Вычислительная геометрия начинается только с Архимеда.

Вне сомнения, на евклидовы “Начала” оказали влияние аристотелева “Аналитика” и, прибавим еще, “Метафизика”³, с которой тесно связана логика, так как логика Аристотеля имеет ясно выраженный онтологический характер. Но вместе с тем в “Началах” отражается и платоно-пифагорейская философия, выставляющая правильные тела как конечную цель геометрии.

Согласно Аристотелю, наука должна ставить две проблемы: существует ли вещь и почему она существует, и если она существует, то как она существует?⁴

У Евклида в первой проблеме существование понимается в смысле возможности построения. Проблема: существует ли А и почему существует А, является у него в форме: можно ли построить А, и если можно, то как построить?

Вторая проблема ставится так: какова зависимость между объектами А, В, С, ..., возможность построения которых уже установлена?

Обычно историки, стараясь быть наиболее понятными, облачают мысли античных математиков в современные словесные и даже символические формы. Это, конечно, довольно опасный прием, но мы далее все же рискуем к нему прибегнуть. При этом необходима оговорка. Евклид мыслит не точно по предлагаемой схеме. Но, вне сомнения, существует определенное соответствие между этой схемой и евклидовым мышлением, и можно сказать, что Евклид шел бы точно по этому пути, если бы арифметизировал геометрию в смысле Лежандра.

§ 2. Только вполне усвоив евклидово понимание доказательства, мы уясним себе три формы евклидова мышления. В “Началах” даются условия существования некоторых объектов: простых а, b, c и сложных, из них составленных ω_i (a, b, c); дается также зависимость между ними и выводятся некоторые свойства, сводящиеся к эквивалентности некоторых построений.

Символически это выражается так:

$$\left. \begin{array}{l} a = \Lambda \\ b = \Lambda \\ c = \Lambda \end{array} \quad \begin{array}{l} \omega_i(a, b, c, \dots) = \Lambda \\ \varphi_i(a, b, c, \dots) = \varphi_i(a, b, c, \dots) \end{array} \right\} \rightarrow \Phi(a, b, c, \dots) \equiv \phi(a, b, c, \dots), \quad (1)$$

где символ $= \Lambda$ означает “существует”, а символ $\equiv$ эквивалентность.

Обобщением этой схемы или, вернее, ее изменением является сохранение тех же условий, но замена вывода таким:

$$\Phi(x, y, z, a, b, c, \dots) \equiv \phi(x, y, z, a, b, c, \dots). \quad (2)$$

В то время как а, b, c, ... суть *данные величины*, x, y, z, ... — *произвольные*. В частности:

$$\Phi(x, y, z, \dots a, b, c) \equiv \phi(a, b, c, \dots). \quad (3)$$

Можно сказать, что при некоторых построениях $x, y, z, \dots$ не оказывают никакого влияния, и результат получается один и тот же, каковы бы на были $x, y, z, \dots$

Но возможно другое изменение (1). Возможна замена вывода таким:

$$\Phi(a, b, c, \dots) = \Lambda, \quad (4)$$

т.е. утверждение только существования, в евклидовом смысле, некоторого объекта Φ .

Если первой схеме отвечают “Начала”, то второй – “Поризмы”, а третьей – “Данные” Евклида.

Но, конечно, это лишь схемы самого общего характера. Тот материал, которым мы располагаем, необходимо проанализировать глубже. “Данные” до нас дошли полностью, а “Поризмы” – только в тех отрывках, которые имеются в “Собраниях” Паппа⁵.

Кроме поризмов и данных, у Евклида имеются еще проблемы. Им отвечает следующая схема.

Ищутся такие:

$$x \equiv \alpha(a, b, c, \dots)$$

$$y \equiv \beta(a, b, c, \dots)$$

$$z \equiv \gamma(a, b, c, \dots),$$

чтобы заданная зависимость

$$\Phi(x, y, z, \dots, a, b, c, \dots) \equiv \phi(x, y, z, \dots, a, b, c, \dots)$$

обращалась в теорему

$$\Phi(a, b, c, \dots) \equiv \phi(a, b, c, \dots).$$

В такой общей, абстрактной форме поризм оказывается тем, чем его считал Папп, – ни теоремой, ни проблемой, а чем-то средним, их связующим.

Если (y, z) исчезают так, что зависимость сводится к

$$\Phi(x, a, b, c, \dots) \equiv \phi(x, a, b, c, \dots)$$

и приходится искать x , то при решении проблемы на основании теоремы используется поризм.

§3. Мы сперва будем говорить о поризмах. Поризмы бесспорно сыграли некоторую роль в истории аналитической геометрии. Именно в поризмах зарождаются те определенные и неопределенные задачи, которые в XVIII в. играют существенную роль в учебниках алгебраической, т.е. аналитической геометрии.

Существует некоторая преемственность между античными поризмами и “Геометрией” Декарта (1637)⁶.

При этом следует иметь в виду поризмы не только в евклидовом понимании, но и поризмы, уже преломленные через призму рационали-

тической идеологии, содержащие в себе более общие идеи, чем те, которыми пользуется аналитическая геометрия.

Однако приложение этих идей не идет дальше частных примеров: они не содержат общих методов. Историк математики должен различать общие идеи и их осуществление⁷. Одно дело — общая идея исчисления бесконечно малых, состоящая в разложении изучаемой величины на бесконечно малые элементы, в отождествлении последних с более простыми (по-нашему, в замене их эквивалентами) и в вычислении суммы (по-нашему, предела суммы) этих простых элементов; другое дело — техника интегрального исчисления, начинающаяся только с понятия дифференциала и интеграла, как предела суммы специального типа.

Общая схема поризма дана нами выше; она объясняет, почему термин “поризм” употребляется Евклидом в “Началах” в смысле леммы, выражающей некоторую связь между остающимися неопределенными величинами. На основании этой схемы можно следующим образом формулировать сущность поризма:

Поризм — это предложение, в котором высказывается, что некоторое свойство имеет место для величин, находящихся в зависимости от нескольких данных и нескольких величин, остающихся неопределенными.

Как и существование, зависимость $\omega_i \equiv \varphi_i$ должна определяться построением, производимым с элементами $a, b, c, \dots$, которые даны, и с элементами $x, y, z, \dots$, которые остаются неопределенными, т.е. такими, для которых построение уже не дано. При таком понимании, подходящем под евклидово, совершенно исключается бесконечность, и поризм еще не вызывает идей аналитической геометрии.

Только введя актуальную бесконечность, как это сделал Р. Симпсон и другие до него, мы получаем поризм в той форме, от которой уже легко перейти к основным проблемам аналитической геометрии.

Было бы неправильно думать, что такое понимание поризмов появилось только у Р. Симпсона. Оно должно было зародиться тогда, когда математическая мысль пропиталась актуальной бесконечностью, когда метод неделимых выступил как мощный математический аппарат.

“Поризм, — говорит Р. Симпсон⁸, — это предложение, в котором высказывается, что одной или многим данным величинам (неизменным), а также бесконечно многим, не данным, но находящимся к данным в определенных отношениях, присуще некоторое общее свойство”.

Клюгель в своем словаре дает слово в слово симпсоновское определение поризма, но прибавляет свое сокращение. Поризм, по Клюгелю, — это задача, в которой требуется каким-либо образом найти нечто, определенным образом связанное с неопределенным⁹.

При таком понимании поризма под это понятие сейчас же подводится определение кривой буквенным уравнением между координатами точек (x, y) , в которое входят параметры $a, b, c, \dots$, если только спроектировать в прошлое, как это делает Р. Симпсон, понимание неопределенной задачи, как задачи, имеющей бесконечное множество решений. Здесь координаты точек (x, y) дают бесконечное множество точек, находящихся в данном отношении к Ox и Oy . Заданными $a, b, c, \dots$ здесь служат параметры.

Эти, правда, уже частного вида поризмы становятся возможными только при создании буквенной алгебры и приложении ее к геометрии.

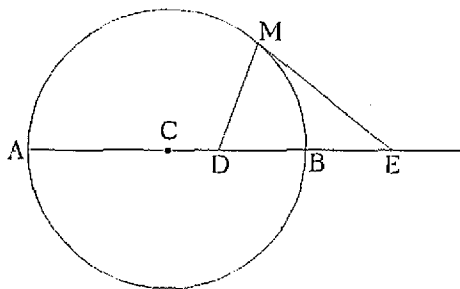
Для разъяснения сущности поризма и пояснения его истолкования Симпсоном я приведу следующий пример.

Дана окружность с центром C (фиг. 2). Из двух точек D и E одна дана, другая же — искомая, определяемая пропорцией:

$$BD : BE = AD : AE. \quad (5)$$

M — произвольная точка на окружности, и общее свойство геометрического места — неизменность отношения $DM : EM$.

Если бы, мысля EM и DM как координаты, мы пожелали построить задачу аналитической геометрии, отвечающую этому поризму, то получили бы проблему об определении уравнения при заданной системе координат, определяющего известную кривую (в настоящем случае — окружность).



Фиг. 2.

По-гречески πορίζω ¹⁰ означает то, что представляет переход, что можно перевести словами “легкое заключение”. В смысле короллария, т.е. непосредственного следствия из доказанного предложения, термин “поризм” употребляется в “Началах” Евклида.

Но каким образом от этого понимания Евклид перешел к другому пониманию поризмов, как трудных и замысловатых задач?

Существенным в евклидовом поризме было не то, что он легок и прост, а то, что он образует переход, промежуточное звено, и те поризмы, которые мы находим в “Началах”, играют именно роль переходного моста от одного предложения к следующему, а вовсе не представляют вполне то, что потом называли короллариями, т.е. мелкими выводами из теоремы, в дальнейшем не используемыми.

Цейтен¹¹ считает те поризмы, которые находятся в утерянном сочинении Евклида, именно такими переходными предложениями, относящимися к коническим сечениям. Таким образом, он, как и другие авторы, толкует поризмы, определяя их не только их конструкцией, но и характером

ром материала, к которому они относятся. Такое толкование несколько искусственно, и едва ли “Данные” говорят в его пользу.

Существует целый ряд других толкований. Например, Жирар¹² понимал поризмы как теоремы, относящиеся к пересечению прямых, что, конечно, неправильно.

Ферма¹³ толковал поризмы шире, но тоже неправильно, отождествляя их с задачами на определение геометрического места.

§ 4. Если мы пожелаем выразить содержание поризмов в координатах, то получим большое многообразие координатных систем, как точек, так и прямых.

Так, возьмем вместе с Шалем¹⁴ следующий поризм, облекая его в алгебраическую форму (фиг. 3).

Даны три прямые L, L', L'' , по положению. Если из точки M одной из этих прямых L опустить перпендикуляры p и q на две другие прямые L', L'' , то можно найти такую длину a и такое число λ , что перпендикуляр p вместе с a будет к q находиться в отношении, равном λ :

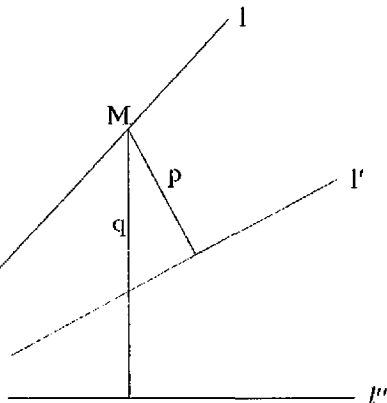
$$\frac{p+a}{q} = \lambda \quad (6)$$

Здесь координатами точки являются ее расстояния от двух прямых, и уравнение (6) определяет прямую.

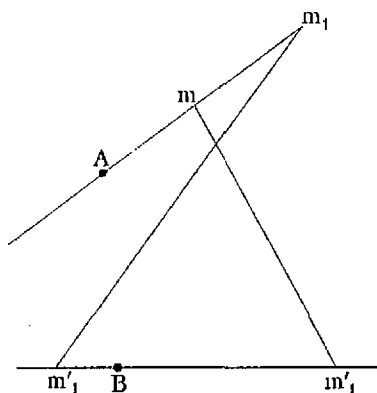
Вот другой пример, приводящий к координатам прямой и к уравнению точки. Две прямые заданы по положению, и на них точки A и B (фиг. 4). Если проводить прямые mm' так, чтобы отрезок Am вместе с линией a находился в данном отношении λ к отрезку Bm' , т.е.

$$\frac{Am+a}{Bm'} = \lambda, \quad (7)$$

то прямые mm' все пройдут через одну точку.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

§ 5. Наряду с поризмами у античных математиков выступают *еще местные теоремы и места*.

В местной теореме¹⁵ устанавливается свойство, присущее определенной кривой. Так, для окружности местной теоремой устанавливается, что (см. фиг. 2)

$$EA : EB = DA : DB,$$

отношение $ME:MD$ оказывается для всех точек одинаковым.

Обращаясь к схеме § 2 для получения схемы местной теоремы, мы должны изменить условие, введя вместо

$$\varphi_i(a, b, c, \dots) \equiv \phi_i(a, b, c, \dots)$$

условие

$$\varphi_i(x, y, z, \dots, a, b, c, \dots) \equiv \phi_i(x, y, z, \dots, a, b, c, \dots)$$

и оставляя заключение (2) или, вернее, (3).

В месте же, наоборот, определяется, какой кривой присуще данное свойство. Схема остается, конечно, та же.

Таким образом, местную теорему и место не следует мыслить как частные виды поризмов, а скорее как другие разновидности очень общей проблемы.

В аналитической геометрии этим проблемам отвечают:

- 1) определение свойств кривой, заданной уравнением;
- 2) определение уравнения кривой по ее свойствам.

§ 6. Чтобы установить, что поризмами могут служить предложения, лежащие вне сферы аналитической геометрии, приведем некоторые примеры, тоже облакая их в алгебраическую форму, причем схема вывода (2) § 2 будет оставаться в силе. Схема вывода (3) § 2 может быть уравнением, выражающим зависимость между

$$a, b, c, \dots, x, y, z, \dots$$

и вытекающим из $\varphi_i \equiv \phi_i \dots$

Но (3) может быть и тождеством. Этот случай остается в стороне от аналитической геометрии.

Толкование поризма Плайфайром¹⁶ обнимает и этот случай. Поризмы, по его мнению, являются предложениями, в которых утверждается, что можно найти такие условия, при которых некоторая задача становится неопределенной, т.е. имеет бесконечное множество решений.

Но нельзя не признать вместе с тем узость этого определения, так как поризм выявляет не только то, что существует бесконечное множество решений, но и дает его характеристику.

Приводим пример поризма, подходящий под толкование. Дана прямая АВ. Поризм утверждает существование на отрезке АВ такой точки D, что прямоугольник со сторонами АС и СВ вместе с S (некоторой площадью) равен квадрату, построенному на CD, где бы ни была взята точка С за В.

Полагая $AB = a$, $BD = b$, $BC = x$, имеем согласно условию

$$(a+x)x + S = (b+x)^2,$$

или

$$ax + S = b^2 + 2bx. \quad (8)$$

Чтобы доказать этот поризм, мы должны убедиться, что (8) сводится к тождеству при надлежаще выбранных S и b, для чего положим:

$$b = \frac{1}{2}a; S = \frac{1}{4}a^2.$$

Вот еще пример, более сложный.

На прямой даны точки A, B, C, D (фиг. 6), даны $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$, $AE = x$. Поризм утверждает существование такой точки D и такого отрезка f, что

$$BC \times CE = AD \times AE + BE \times f,$$

или на языке алгебры

$$b(a-b+x) = cx + (a+x)f. \quad (9)$$

Равенство (9) становится тождеством при

$$c = \frac{b^2}{a}, \quad f = \frac{b(a-b)}{a}.$$

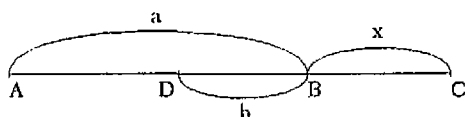
Под схему Плайфайра можно подвести и приведенный выше пример (фиг. 2). Если не ставится никакого ограничения на положения D, E на диаметре относительно окружности, то условие $DM : EM = \lambda$ дает одно определенное решение на АВ. Но если

$$CD : CA = CA : CE = \lambda,$$

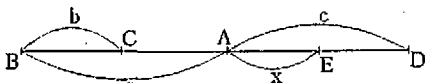
то задача оказывается неопределенной, и мы будем иметь поризм.

Плайфайр дает прекрасный пример, выявляющий сущность поризма в его понимании: через данную точку M (фиг. 6) требуется провести прямую так, чтобы сумма расстояний от точек $M_1, M_2, \dots, M_n$ с одной стороны равнялась сумме расстояний от точек $M_1, M_2, \dots, M_n$ с другой. Ответ: прямую следует провести через центр тяжести точек $M_1, \dots, M_n$.

Но если сама точка M совпадает с центром тяжести, то задача оказывается уже неопределенной. Чтобы облечь ее в алгебраическую форму,



Фиг. 5.



Фиг. 6.

следует принять за данные – координаты точек $M_j (a_j \cdot b_j)$, за неизвестные – координаты прямой (ξ, η) . Задача ставится о разыскании (ξ, η) .

В случае поризма

$$a = \frac{\sum a_i}{n}, \quad b = \frac{\sum b_i}{n},$$

и вместо определенных значений (ξ, η) мы имеем уравнение

$$A\xi + B\eta + C = 0,$$

определяющее пучок прямых с вершиной в M .

В пояснение определения Плайфайра можно привести еще следующий пример: определение кометной орбиты приводит к задаче о проведении прямой так, чтобы отношения отрезков между четырьмя данными прямыми $AB : BC, BC : CD$ были данные (фиг. 8). Решение дается Ньютоном в предложении 56 его "*Arithmetica universalis*" (1707)¹⁷. Но в некоторых случаях возникает неопределенность, на что указали Боскович и Кастильон¹⁸.

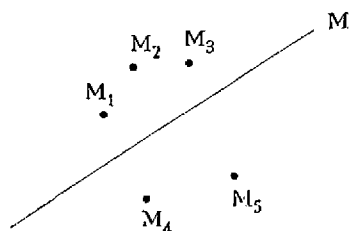
Такой случай в действительности встретился при определении эфемерной кометы 1739 г.

§ 7. Переходим теперь к данным, отвечающим схеме вывода (3). Шаль формулирует сущность данных следующим, правда несколько неясным, образом:

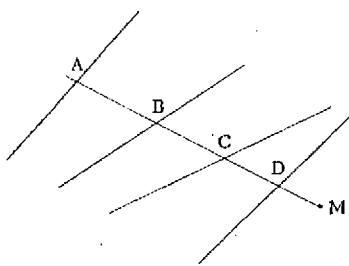
Данные – это предложения, в которых одна или несколько вещей, к которым относится вопрос, не имеют в формулировке предложения определенной величины и положения в силу предположения. Но само предложение сводится к утверждению, что определенные величины и положения содержатся неявно в предположении, следствием которого оно и является и может быть осуществлено.

Это то, что Евклид выражает словами "вещь дана", причем следует предполагать, что вещь дана виртуально, т.е. содержится неявно в предположении и может быть отсюда выведена¹⁹.

Такое толкование не вполне соответствует намеченной нами в § 2 схеме (3). В толковании Шалья не выявлен экзистенциальный характер данных. Данные не выводят свойств вещи, но только ее существование, в указанном выше евклидовом толковании.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

В предложении 60 “Данных” Евклид указывает, что если, две величины a и b находятся в данном отношении λ , то составленная из них величина $a + b$ находится в данном отношении к каждой a или b .

Если бы Евклид, заключаая Шаль, хотел из этого предложения сделать теорему в собственном смысле (т.е. в смысле “Начал”), он должен был бы указать, что отношение

$$(a+b):a=(\lambda+1):\lambda, \quad a(a+b):b=(\lambda+1):1.$$

Другой пример (предл. 86): если в треугольнике задан угол, то прямоугольник, построенный на заключающих его сторонах, находится к треугольнику (т.е. к его площади) в данном отношении. Если указать, что это

значение равно $\frac{2}{\sin \varphi}$ (определив синус); то получится теорема.

Приведем еще пример (предл. 89): если в данной окружности дана по величине и направлению хорда, то она ограничивает сегмент, заключающий данный угол. Теорема получается, если добавим, что этот угол равен половине соответствующего центрального угла.

§ 8. Укажем, какую роль сыграли “Данные” в истории геометрии. Аристотелевскую первую проблему “существует ли вещь?” нельзя отделить от второй – “как она существует?”.

Равным образом, задачу об евклидовом существовании, нельзя отделить от задачи о том, каково это существование, а задачу о возможности построения – от задачи осуществления этого построения.

К решению первой проблемы следует мало прибавить, чтобы получить вторую. Схема (3) превращается в схему (1), если вывод

$$\Phi(a, b, c, \dots) = \Lambda$$

привести к эквивалентности проблематического построения с построением осуществляющим.

Различие с (1) будет только то, что в схеме (1), отвечающей теореме, и $\Phi(a, b, c, \dots)$, и $\phi(a, b, c, \dots)$ суть вполне определенные построения, вполне осуществляемые, а теперь Φ характеризует только некое проблематическое построение; указывается, как Φ получается из $a, b, c, \dots$, но не доказывается возможность этого получения, прежде чем не будет указано, что

$$\Phi(a, b, c, \dots) \equiv \phi(a, b, c, \dots).$$

Решение уравнения следует понимать в том смысле, что неявное определение x уравнением даст тот же результат, что явное определение.

При чисто геометрическом мышлении античные математики вместо преобразования:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} - \frac{p}{2}$$

развертывают ряд геометрических тождеств.

Окончательной формуле отвечает построение, дающее неизвестное. По этому пути Евклид в "Началах" продвинулся недалеко. Античная геометрическая алгебра Евклида, изложенная в книгах II и X "Начал", выполняет те функции, которые в настоящее время берет на себя символическая алгебра²⁰. Геометрическим тождествам книги II отвечают следующие тождества рационального типа:

$$1) ab + ac = a(b + c);$$

$$6) (a + b)b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2;$$

$$2) ab + a(a - b) = a^2;$$

$$7) a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2;$$

$$3) ab = b(a - b) + b^2;$$

$$8) 4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2;$$

$$4) a^2 = b^2 + (a - b)^2 + 2b(a - b); \quad 9) (a - b)^2 + b^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - b\right)^2;$$

$$5) (a - b)b + \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

$$10) (a + b)^2 + b^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + b\right)^2.$$

Книга II дополняется предложениями 28 и 29 книги VI, в которых дается решение одной геометрической задачи, из которой извлекается решение квадратного уравнения.

Впрочем, и предложение 11 книги II "Начал" (задача о золотом сечении) дает тоже решение квадратного уравнения, но, правда, только специального типа:

$$x(a - x) = a^2 \quad (10)$$

"Данные" уже в силу самой постановки проблемы не дают окончательного решения; они задаются целью только обнаружить возможность получения неизвестного путем его построения, но, как мы выше заметили, немного следует прибавить, чтобы перейти от возможного построения к его осуществлению. Так как неявное задание x представляет именно про-

блематическое построение, неосуществленное, которое может осуществиться только, если x дано, естественно ожидать толчка к развитию решения уравнения именно со стороны “Данных”, а не “Начал” Евклида.

Так это и было. Предложения 84 и 85 “Данных” в переводе на язык символической алгебры подводят к решению системы уравнений:

$$xy = b^2, \quad (11)$$

$$x \pm y = a,$$

а вместе с тем, конечно, и квадратного уравнения

$$x^2 - ax = \pm b^2, \quad (12)$$

т.е. к решению той задачи, которая решается по-иному в предложениях 28 и 29 книги VI “Начал”.

§ 9. Интересно отметить, что те же “Данные” подводят и к решению треугольников и заключают своего рода античную тригонометрию.

Мы приводим предложения “Данных” в символической форме с соответствующими тригонометрическими формулами.

При этом S есть площадь треугольника, a, b, c – его стороны, A, B, C – углы. Предложения:

$$(64) \text{ A – тупой} \rightarrow \frac{a^2 - b^2 - c^2}{S} \text{ дано; } a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A; \quad S = \frac{bcsin A}{2}$$

$$(65, 67) \text{ A – острый} \rightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{S} \text{ дано; } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

$$S = \frac{bcsin A}{2}$$

$$(66) \text{ A дан} \rightarrow \frac{bc}{c} \text{ дано; } S = \frac{bcsin A}{2}.$$

$$(76) \text{ A, B, C,} \rightarrow \frac{ha}{a} \text{ дано; } a = h_a (\cos B + \cos C).$$

(Здесь h_a – высота, опущенная на a .)

§ 10. Мы отошли бы, конечно, очень далеко от характера античной мысли, если бы взглянули, как это делают некоторые, на поризмы и данные с функциональной точки зрения²¹.

Но мы все-таки не можем оставить в стороне и этот подход, так как он в некоторой мере позволяет отметить различие поризмов и данных и обнаружить два различно направленных течения, идущие от этих двух типов геометрических проблем до выявления понятия функции.

Можно сказать, что поризм подводит к уравнению, причем неопределенному, не выражающему x через $a, b, c, \dots$, но выражающему y в функции переменного x , обнаруживая изменение y вместе с x , а также выявляя

характер этого изменения. Данные же обнаруживают, что x при изменении (x, y) не меняется.

Можно сказать, что, если в поризме мы находим в эмбриональном состоянии основную идею определения геометрического места уравнением, то в данных мы видим нечто, отвечающее теории инвариантов²².

Но такая точка зрения, конечно, есть достояние уже весьма отдаленного от возникновения аналитической геометрии времени, – времени, завершающегося возникновением идеи преобразований, образующих группу, и идеи инварианта, характеризующего эту группу. Для кривой второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (13)$$

$B^2 - AC$ и $A + C$ – это известные инварианты, сохраняющиеся при линейном преобразовании.

ПРОБЛЕМА СМЕРТИ.

Введение

Я ясно сознаю смелость моего выступления и жду в большинстве случаев несочувственного к себе отношения и не столько вследствие страшной темы, выходящей за рамки научного мышления, как вследствие особой позиции, которую я принимаю.

В самом деле, я делаю вызов на три стороны. Прежде всего я выступаю против догматически религиозной точки зрения. Моя мистика вывободится от оков, налагаемых неподвижным скристаллизованным догматом, при котором на месте богоскательства стоит найденный Бог. На месте смелой попытки просмотреть в густом тумане очертание загробных сфер – смиренное закрывание глаз. Затем я выступаю и против метафизики, мнящей, что решение страшной проблемы смерти – это дело умозрения, стоящего выше фактов чистого интеллекта, того интеллекта, который видит границы бытия там, где кончаются логические категории, вместо того, чтобы видеть там начало самых страшных глубин. Наконец, я выступаю против философствующего естествознания, тщетно старающегося вселенную и все тайны жизни и смерти заключить в узкие рамки реторик и микроскопов.

Я покажу, что религия даёт слишком мало, что она отвечает не на вопрос, решает не ту проблему, которая больше всего должна интересовать ум философа, и если она приходит в соприкосновение с этой проблемой, то обнаруживается разрушительное ее действие, и человек верующий должен остановиться, закрыв смиренно глаза на движущуюся на него опасность. Я обнаружу, что выходящая за узкие границы веры метафизика дает больше, пытаясь в своих построениях, не боясь противоречий с религиозными догматами, а в согласии со своим представлением о духовном, решить вопрос о неразрушимости души. Но это будет еще слишком мало, ибо проблеме о переживании она превращает в проблему о существовании; отвлекаясь от содержания живой души, она рассуждает о пустой форме, стараясь установить вечность только этой формы. Выше метафизики становится натурфилософия, и я разверну содержательность ее философствований, в которых она, в противоположность метафизике, правильно охватывает сущность проблемы. Но вместе с тем покажу, что она не в состоянии ее решить, не переходя из сферы науки в сферу гипернауки, мистического опыта, предполагающего предпосылки, восполняющие положительную науку и даже противоречащие некоторым законам. Я собираюсь сразиться с дурьюми смерти и ненавистниками жизни, я хочу заставить их любить жизнь, а не смерть. Я буду говорить, не то, что им понятно, а то, что кажется ис-

тинным. Для меня ясно вырисовывается смерть, как злейший и сильнейший враг, но которого может победить дух. Как другие писатели о смерти, я не буду утешать как заботливая нянька ребенка: “Нет, смерть не враг ваш, а друг, иди в ее темные объятия от этой проклятой жизни, от этого режущего глаз солнечного света, от этого раздражающего обоняние запаха цветов, от тяготящего ухо крика детей”. Но я не стану и на сторону тех, кто, когда раздастся ее страшный голос в глубинах души, старается заглушить его веселой эпикурейской болтовней.

Жестоким словом я сосредоточу их внимание на этом голосе. Я покажу, что смерть это не только одно ничто, что она больше, чем ничто. Пусть и они начнут бояться смерти, ибо это первый шаг к тому, чтобы они признали силу духа, который побеждает смерть.

1. Вера и смерть.

Первое мое слово о вере. Прежде всего, совершенно неправилен взгляд, что мысль о смерти создает религию. Религия прежде всего является религией жизни. Библия обходится совершенно без загробной жизни. Бог вознаграждает праведников долголетием и счастьем здесь, в земной жизни. Если Бог сотворил душу, как и все остальное, то Бог не только может уничтожить ее, но более того — и уничтожить как все остальное Им созданное.

С простым, не усложненным метафизическими умозрениями, учением о Боге—Творце, не вяжется учение о неучтожимости человеческой души, вообще, создании чего—либо на вечное время. Ведь всякая цель ставится во времени, и средства для ее осуществления длятся во времени. Вот цель выполнена и средства уже бесполезны, а все бесполезное лишнее, как противоречащее совершенству Божьему, должно быть отринуто.

Для прославления Бога создается Им вселенная и населяющие ее человеческие души, может быть и для других, непостижных нами, целей.

Цели достигнуты и вся эта вселенная с ее млечными путями и человеческая душа с ее радостями и горестями должна утонуть в небытии.

Бог создал сад, украсил его цветами, но Его совершенство требует других садов, усыпанных новыми цветами. Старые цветы должны опасть... “Человек умирает и рассыпается”, — говорит Иов¹. Отошел и где он. Уходят воды из озера, и река высыхает и иссякает: так и человек лижет и не встанет, до скончания века он “не пробудится и не воспрянет от сна своего”.

Что заставляет религиозную мысль на более высокой ступени развития признать загробную жизнь (но отнюдь не вечность души) — это несоответствие между этическо—религиозным требованием наград за хорошие и наказания за злые дела. “Почему, — говорит Иов, — беззаконные живут, достигают старости, да и силами крепки. Дома их безопасны от страха и нет грозы Божия на них. Проводят они дни свои в счастье и мгновенно

нисходят в преисподнюю. А между тем они говорят Богу: отойди от нас, не хотим мы знать путей твоих”².

И вот религиозная мысль, стараясь решить проблему Иова, нагромождает горы затруднений перед страшной проблемой. И чем определеннее она старается выкристаллизироваться в догматы, тем все дальше и дальше отодвигается удовлетворяющее мысль философа решение проблемы смерти. Религиозная мысль требует не переживания души, а только ее воскресения. До судного дня жизнь может совершенно отсутствовать. Более того, признание существования от смерти до судного дня рождает тяжелое затруднение. В самом деле, этот судный день будет не завтра, не послезавтра, не через год или десяток лет, а через сотни, тысячи, десятки тысяч лет.

Наша маленькая земная жизнь в 60–70 лет растворяется в этом ряде веков загробной жизни, как капля в море. Можно ли судить душу за этот бесконечно малый элемент ее существования, когда она проходит в дальнейшем своем существовании тысячи, может быть, миллионы жизней. И христианство и магометанство говорит только о воскресении в день судный. Только в том случае Божий суд будет справедливым судом, если до воскресения отошедшие лишены жизни или содержат ее только в потенции, как зерно, найденное в пирамиде и начавшее прорасти через тысячи лет.

Душа просыпается, или лучше воскресает, возрождается вместе с телом. Магометанский Бог после взвешивания проводит воскресшую душу по острокопечному мосту в рай или ад, смотря по результату взвешивания. В раю великолепные бани, мягкие постели, прекрасные гурии.

Евангелие в день судный воскресших разделяет на козлищ и овец, на обувших и накормивших Бога, в лице страждущих, и на отвергнувших Бога, и посылает первых на жизнь вечную, вторых в муку вечную³.

У св. Августина, более близкого к источнику христианства, этот взгляд на смерть выступает гораздо яснее, чем у метафизиков, прилаживающих метафизику к христианскому догмату. Он говорит, умершие до воскресения справедливо называются находящимися в смерти, подобно тому, как каждый называется находящимся во сне раньше, чем он проснется. Несколько раз св. Августин подчеркивает необходимость называть их находящимися в смерти, а не умершими. Жизнь вновь начинается с соединения с телом и причем не с новым, а со старым, вновь восстановленным.

Причем грешникам обещается *вторая смерть*. “Она, эта вторая смерть, — учит Августин, — тяжелее и составляет худшее из зол, потому что не состоит из отделения души и тела, а скорее обнимает и то и другое для вечного наказания. Там уже, не как здесь: не будут люди до смерти и после смерти, а постоянно в смерти и потому иногда не будут живущими или умершими, а будут без конца умирающими”⁴.

Религиозная мысль, признавая воскресение, в противоположность метафизике, не может твердо остановиться на неумираемости души.

Для нее душа всегда останется созданием Божьим, которое не имеет вечности в обратном направлении, и вечность, которая в прямом направлении всегда только в возможности, зависящей всецело от воли Божьей⁵.

Поскольку мы мыслим творение во времени, а не выводим его из времени, как это делает бл. Августин и само время не делаем творением Бога, мы не в состоянии примириться с вечностью *души в прошлом*. Собственно против такого бессмертия восстают все христианские писатели.

Св. Ириней признает за людьми и даже за ангелами бессмертие *лишь по возможности*. Он говорит, что они бессмертны *не по природе*, а только *по благодати*, так как то, что началось должно иметь конец и, если оно бессмертно, то не по своей природе.

По мнению Дамаскина⁶, как тело перестает двигаться, если не последует толчок извне, так и ангелы, достигшие незначительного предела жизни, по повелению Творца, снова начинают жизненное движение.

По бл. Августину вечное существование души в прошедшем должно явиться *вечным злополучием*. *Превращение этого вечного прошедшего злополучия в вечное будущее блаженство представляется не менее трудно воспринимаемым, чем существование до века души*, раньше с прошедшей бесконечностью существовавшей. Религия дает слишком мало, она вовсе не дает нам ответа на вопрос, что будет со мной после смерти. Необходима свободная мысль, не боящаяся встать против тех взглядов, которые выработаны христианским вероучением, чтобы удовлетворить пытливости ума. Следует выйти из сферы веры, перестать быть только верующим и стать также мыслящим.

2. Трансцендентная и трансцендентальная жизнь.

Несмотря на то, что жизнь до судного дня вовлекает религиозную мысль в лабиринт противоречий, душа чувствует, можно сказать, каким-то “верхним” мистическим чувством продолжение существования близких людей, но проектирует их жизнь не в сферу нашей жизни, а в какую-то трансцендентную, потустороннюю область, которая возводится Кантом в так называемую “вещь в себе”⁷. Но там, в этой области, совершенно отрезанной от науки, все дозволено. Не сдерживаемая разумом фантазия нагромождает образы один за другим в этой жизни на небе. Вера с жадностью всасывает в себя весь этот сказочный мир трансцендентного бытия.

Если пытливая мысль, высвободившись от фантазии, решается попытаться заглянуть за завесу смерти, то она уже не может остаться на этой точке зрения. Для нее загробная жизнь не должна оставаться трансцендентной, а должна стать *трансцендентальной*⁸, входящей в общий процесс вселенной, но не воспринимаемой нами, или воспринимаемой только в исключительных случаях. Она должна признать, что отошедшие, чувствуются некоторым образом в земной жизни, что бездонное, мистическое

окружает нас, но не отодвинуто в “вещь в себе”. Уже в вере в посредничество отошедших в молитве, религиозная мысль вносит трансцендентальный элемент, связующий мир живущих с миром отошедших. Но следует идти дальше. Не следует бояться встать на мистический путь, признать другие связи, которые можно назвать *магическими*, признать гипернаучный опыт, переступающий границы опыта научного, действующий орудиями, которыми не пользуется наука.

Не следует думать, что индуистское учение о карме в последовательном ряде инкарнаций, продолжающемся века, предполагает обязательно именно такую трансцендентальность загробного существования. Обстоятельства последовательных инкарнаций определяются поведением души в предшествующих, судьба инкарнирующейся души определяется не отношением ее к Богу в земной жизни, не молитвой живущих, а законом эволюции усовершенствующейся в инкарнациях души, поднимающейся с меньшей или большей быстротой до высшей ступени, которая у буддистов является нирваной. Но весь этот процесс может происходить в различных мирах, не связанных между собой; затем душа в промежутках между инкарнациями может мыслиться совершенно не связанной с жизнью вселенной.

3. *Метафизика о смерти.*

Но метафизику этот вопрос – трансцендентна или трансцендентальна загробная жизнь – совсем не интересует. Насколько богаты содержанием родящиеся в сфере религиозной мысли красочные картины райской или адской жизни, настолько пусты и тусклы метафизические учения о смерти. Вместо проблемы переживаний, которая именно и представляет великую проблему смерти, она ставит проблему о существовании или бессмертии души. Жизнь ускользает от тех определенных, ясно постигаемых разумом логических категорий, которыми пытается мыслить метафизика. Она не может оперировать с *жизнью* души, а только с ее *бытием*. Она доказывает, что душа вечно существовала, но больше ли это существование, чем существование стола, стула, дома... – она на это уже не может ответить. Более того, углубляясь в сущность души, метафизика отбрасывает то, что является ее *земным* достоянием, и в ее руках остается уже совершенно бессодержательный, и уже в силу своей бессодержательности простой объект, духовный атом, уже не разлагаемый и, в силу своей неразлагаемости, неразрушимый и от века и до века существующий.

Возьмем примитивное метафизическое доказательство бессмертия души⁹: душа проста, но все простое неразложимо, всякое разрушение – это разложение, но душа, как неразложимая, не может разрушиться, вследствие чего она вечна.

Но доказательство переживаемости следует искать как раз в обратном направлении, во внутренней сложности души, большей чем та, кото-

рая дается по ее внешней поверхности. Доказательство переживаемости должно основываться на существовании элементов души, не связанных с жизнью тела и могущих быть от него отделенными и, таким образом, скорее должно основываться на разложимости души.

Верно ли, что всякое уничтожение — это распад?

Как только мы пытаемся логизировать непрерывность, последняя представляется в ложном виде дискретного агрегата элементов, рост представляется последовательным присоединением элементов, всякое уничтожение — распадом составного на его элементы. Но исчезновение души может идти постепенным сокращением ее жизни, непрерывным движением ее в небытии при сохранении всей ее сложности.

Лейбниц¹⁰ пытался усовершенствовать приведенное нами платоново доказательство. Свое доказательство он выражает в форме непрерывного силлогизма, сложная конструкция которого придает видимую тяжело-весную убедительность. Как у всех рационалистов, основной определяющей душу деятельностью у Лейбница является мышление, создаваемое душою без представления частей, то есть “вещью без частей”.

Отсюда выводится, что это действие души не может быть движением. Из того, что всякое действие тела — только движение, выводится, что душа не представляет тела и не находится в пространстве, а потому не может обладать движением.

Всякое движение — распадание, а потому — движение, т.е. то, что не присуще душе, и потому душа не уничтожима.

В этом лейбницянском доказательстве к платоновскому пристегнуты совершенно ненужные предпосылки. Получается не улучшение, а ухудшение его доказательства. У самого Платона, уничтожение — распадение, но вовсе не обязательно движение, тем более в узком картезианском, а не в широком аристотелевском, смысле. Нельзя согласиться с тем, что мышление создается без частей; мое “я” создается без частей, но другие психические акты, которые по Лейбницу сводятся к мышлению, создаются с определенным представлением частей. Очень спорно и то, что единственный вид действия тела — это движение; вопрос о действии на расстоянии и во времена Лейбница был очень спорным, в настоящее же время надежды на сведение всех химических явлений к движению и толчку остается совсем мало.

Св. Августин дает метафизическое доказательство неуничтожаемости души, основанное на совершенно других принципах¹¹. Августиновское доказательство, забытое затем метафизикой, можно назвать **гносеологическим**, в отличие от приведенных выше **онтологических** доказательств.

Св. Августин, резюмируя свои длинные рассуждения, дает следующую краткую формулировку своего доказательства:

“Ложность не может быть без чувства, она же (ложность) не быть не может, следовательно, чувство существует всегда. Но чувств нет без души, следовательно, душа вечна. Она не в состоянии чувствовать, если не будет жить. Итак, душа живет вечно”. Совершенно таким же образом то же заключение делается и от истинности.

Доказательство Августина идет дальше упомянутых выше сухих онтологических доказательств, оно старается вывести *жизнь* души из ее существования. Из ложности и истинности выводится чувство, его носитель – душа, а из души чувствующей – ее жизнь.

Но в конечном результате, августиновское доказательство дает еще меньше платоновского. Все рассуждения Августина содержат смешение *онтологически-объективного* понимания истины с *гносеологическим*. В первом понимании – под истинным выступает просто *реальное*, во втором – соответствие между *реальным* и *разумом*. В первом случае – это абсолютное понятие, во втором же – отношение, предполагающее оба члена отношений. Августин определяет истинное так: то, что существует так, как кажется познающему, если он хочет и может познавать. Если отбросить все от слова “так как”, то мы имеем истину в первом смысле. Если взять определение *полностью*, то получается вывороченное наизнанку определение истины во втором смысле: то, что познается или может познаваться так, как оно существует.

Постулировать истину мы можем, конечно, только в первом смысле. Если нет познающего разума, то не будет истины не в первом, а во втором смысле. Это путь софистики – заставить согласиться с наличием истины в первом смысле, чтобы из истины во втором смысле, истины гносеологической, вывести необходимость чистого разума. Но если допустить этот хорошо замаскированный софизм и дойти до конца, то в результате получится не индивидуальный, а коллективный разум, остающийся в ряде сменяющихся поколений.

4. Универсальное и индивидуальное бессмертие.

Таким образом, августиновское доказательство ведет не к индивидуальному, а к коллективному бессмертию. Оно требует бессмертия не отдельных душ, а некоего целого, части которого они образуют. И эта характерная черта всех метафизических доказательств, кроме приведенного выше платоновского. Они ведут к бессмертию универсальному, к тому бессмертию, в котором образное мышление представляет душу сливающейся с мировой душой, как капля воды с морем. В доказательствах скрытым или даже явным образом, признаются такие предпосылки, в которых частично или полностью отрицается субстанциональность души: сохранность источника света по видимому свету доказывается тем, что последний есть только *отраженный* свет.

Второе платоновское доказательство, если что—либо доказывает, то только бессмертие универсальное, а не индивидуальное: душа — принцип деятельности в самой себе и поэтому неопределима иным, не имеет никакой причины вне себя, и как самодовлеющий принцип — непреходяща. Душа здесь является не как таковая, а, говоря словами Спинозы, только как момент мировой субстанции, которая, конечно, только одна может быть [непреходящей]¹². Спиноза¹³ уже совершенно определенно ставит бессмертие в зависимости от несубстанциональности души и связанности ее зависимого, чисто акциденционального существования с телесной жизнью. Сущности человека не присуща субстанциональность, иными словами, субстанция не составляет форму человека (это выводится из того, что субстанция заключает в себе необходимое существование, а человек не заключает). “Душа познает себя лишь постольку, поскольку она воспринимает состояние тела”.

Вот все, что Спиноза выводит относительно бессмертия души: “Человеческая душа не может совершенно уничтожиться вместе с телом, но от нее остается нечто вечное. В Боге, говорит Спиноза, существует идея, выражающая сущность человеческого тела и так как душа составляет идею тела, то — нечто относящееся к сущности самой души. Душе присуще временное существование, поскольку она выражает действительное (актуальное) существование тела, но за вычетом этого остается нечто, представляющее с некоторой вечной необходимостью через саму сущность Бога и потому вечное”. Здесь мы имеем универсальное бессмертие, близкое к *нотере всякого содержания*.

Если идея тела, находящаяся в Боге это чувство, которое будет чувством моего тела, пока я существую, и не перестанет быть чувством всех тел, то такое бессмертие имеет определенное содержание, но спинозовская метафизика логикует (и должна логикует) идею, и обращается в нечто столь же пустое, как сама спинозовская божественная субстанция. Идея, как *понятие*, заключается в Боге; поскольку Бог является в атрибуте мышления — это не больше чем мысль потомства об умершем, слава в последующих поколениях. Метафизика старается схватить своими руками неуловимый туман, который проходит через нее, оставляя в распростертых руках одну пустоту.

Отметим Мельденсоновскую поправку¹⁴ в доказательстве из простоты бессмертия души. Он усматривает возможность уничтожения не только путем раздробления, но и путем постепенного исчезновения.

Но, вскрывая противоречие в обращении непосредственного бытия в небытие, Мендельсон убеждает в необходимости признания постепенности *уменьшения души* вплоть до исчезновения, что также оказывается в несогласии с простотой души, как и раздробление.

Доказательство бессмертия души Бенска обещает значительно больше, чем вышеприведенное. Оно даст не только *существование*, но уже не-

что среднее между голым бытием и жизнью. Оно указывает на все увеличивающееся *число следов в сознании*, постепенно возвышающуюся степень обратимости души от внешнего к внутреннему.

Ребенок больше живет внешним миром, взрослый все больше и больше погружается в глубины своего внутреннего мира, обогащенного воспоминаниями прожитой жизни. Смерть может разорвать только связь с внешним миром, но оставляет внутреннее бытие души, для которой высшая ступень, достигнутая в прошлой жизни, является фундаментом для следующих ступеней развития.

Можно, конечно, согласиться с большей вероятностью сохранения накопленных следов, чем полного их исчезновения, проводя аналогию с материальными явлениями, но признание сохранности этого материала не влечет еще признания того, что этот материал будет использован так, как он был использован в жизни умершим индивидуумом. Совокупность следов воспоминаний, образующая содержание пассивного бессознательного, можно мыслить в общем резервуаре памяти.

5. *Время и душа.*

Шопенгауэр¹⁵ представляет переходный тип от метафизики к натурфилософии.

Жизнь он видит *в воле* и, субстанциональность признает только за *универсальной* волей к жизни, объективируемой в различных особях.

Эта общая единая воля в принципах индивидуальности, пространстве и времени представляется как единый свет, отраженный в призме множеством страждущих душ. Воля неопределенна, она (находится) в алогичной сфере, изъятой из логических категорий. Нельзя сказать, чтобы эта воля, этот мировой принцип, оставалась после смерти, так как она вне времени, для нее нет ни прежде, ни потом. Метафизика Шопенгауэра, с кантовским признанием времени только субъективной формой представления, тем самым уничтожает саму проблему о смерти, как проблему о переживаниях.

Нельзя ставить проблему о том, существовал ли я, или буду ли существовать, как субстанция или только как модус мировой субстанции, так как ни прошедшего, ни будущего, ни вообще времени нет вне меня. Неудачно сравнение Шопенгауэра неизменно — пребывающей воли при гибели индивидуумов — с жизненной силой леса, остающегося неизменным при осеннем листопаде и покрывающегося каждой весной новой листвой. Такая смена поколений идет во времени, которого нет для воли, как шопенгауэровского мирового принципа. Самоубийца, которого пугает Шопенгауэр возрождением для новых страданий, создает сам свое время и, уничтожая себя, уничтожает и это время.

Куно Фишер¹⁶ ставит решение вопроса о бессмертии души в зависимость от признания времени условием всякого бытия или только необходимой формой представления.

Если время и пространство суть всеобъемлющие условия всякого бытия и ничто не может быть независимо от них, то пребывает только материя (тогда как ее формы меняются), то все отдельные вещи должны возникать и переходить, то никакое единичное существование, никакой индивидуум и никакая личность не могут продолжаться вечно, а каждое имеет свою определенную продолжительность, с которой связано ее существование, а границы этой продолжительности суть непроходимые грани всякого времени бытия. При этой предпосылке, по которой время и пространство суть вещи или определения вещей в себе, нам не остается ничего более, как либо отрицать всякое нное бессмертие, согласно с этим допущением, либо, вопреки ему, фантастически утверждать и представлять себе это бессмертие — чтобы, так сказать, удовлетворять известным потребностям. Всякое возникновение и уничтожение, осуществляется во времени и возможно только в нем. То, что независимо от времени, имеет характер безусловного бытия, не может ни возникнуть, ни уничтожиться: только это вечно. Если время, как человек, есть не вещь в себе, а необходимая форма нашего представления ими явлений, которые не могут быть без существа, которому они являются или которое представляет и познает их. Но само существо, как составляющее условие всякого явления, не есть явление, оно не во времени, а время в нем, поэтому оно независимо от времени, т.е. безвременно и вечно.

В действительности дело обстоит как раз наоборот. Именно учение о субъективности времени представляет наибольшую опасность учению о бессмертии души. Пребывать и изменяться можно только во времени. Пусть существование души вне времени, но самой — то душе оно представляется развернутым в конечном промежутке времени и другого промежутка времени уже нет, в который можно было бы сказать, что душа есть. Проблемы переживания души при кантовском взгляде на время не может быть. Но можно на место ее поставить проблему о том, имеет ли душа другое временное существование, кроме настоящего.

Но трудно признать такую множественность, так как всякую множественность жизни мы можем мыслить только во времени. Две жизни, не разделенные промежутком времени, существующим вне души *живущего*, должны совпасть между собой.

6. Критическая точка зрения.

Выступая против приведенных мною метафизических доказательств бессмертия души, я вовсе не отрицаю возможности метафизических исследований, относящихся к душе и к судьбе ее после смерти.

Я только указываю на ее бессилие пока она старается в основе своих построений положить вместо данных опыта (причем, как это будет ниже доказано, не научного, а сверхнаучного) простые, очевидные, вроде математических аксиом, положения. Дело в том, что таких положений вовсе не имеется, и более того, если дело идет не только о *существовании*, но и о *жизни* душ, таких и быть не может, ибо жизнь постигается нами не в логических терминах, а интуицией, и все положения, к ней относящиеся, всегда будут освещены сумеречным светом. Можно сказать, что нам приходится говорить о сумеречном предикате души, но я совершенно не согласен с Кантом, что будто бы сама душа, как предмет метафизики, является призрачным объектом, что существование души не дается внутренним опытом.

Кант утверждает¹⁷ неправильность вывода из трансцендентальной апшерцепции, из “я мыслю”, из необходимо сопровождающего наши представления логического субъекта, всех наших суждений этого высшего логического или формального условия познания. Он полагает “я”, как объект знания, как реальную мыслящую личность. Но заключения о душе должны делаться не столько из “я мыслю”, как из “я хочу”, “я действую”, и если может быть сомнение в том, можно ли сделать я мыслящее объектом познания, то уже я хотящее, я действующее, с полным правом может быть поставлено на это место.

Что касается до мнения Канта, что постоянство, как неизменный признак субстанции может мыслиться только в пространстве, а поэтому мыслящая сущность не может быть познаваема как субстанция, так как во времени ничто не может быть созерцаемо в постоянстве – то взгляд этот является совершенно не обоснованным. Против него можно выставить другой, по которому первым образцом постоянства является именно наше Я, и что постоянство затем уже проектируется в вещи <...>.

7. *Натурфилософия о смерти.*

Метафизика говорит о бытии души, натурфилософия о ее жизни. Она не берется определить жизнь. Она берет ее так, как она дается интуицией и мыслит ее там, где даются внешние признаки, указывающие на ее наличность. Когда она учит об универсальном бессмертии – в форме ли вечности, органической клетки или в материальной форме мировой энергии, принимающей наряду с другими формами еще и психическую – она не мыслит в меньших, а, может быть, и почти исчезающих (но никогда окончательно) дозах жизнь.

Она говорит о продолжении жизни, но не в трансцендентных сферах, а в границах настоящей, окружающей нас вселенной.

Мыслящая материя Вольтера, Дидро¹⁸ и других – это примитив универсального натурфилософского бессмертия.

Приводимый натурфилософами параллелизм между психическими и физическими явлениями – аргумент более сильный, чем все метафизические постройки. Этот параллелизм ведет, с одной стороны, к отрицанию индивидуального, а с другой стороны, к признанию универсального бессмертия. С укреплением тела укрепляется и душа, рост тела вместе с тем и рост души, умирание тела – умирание души, и когда уничтожается тело, то, очевидно, должна уничтожиться и индивидуальная душа. И, как остальные части тела, не уничтожаются, а остаются в той вечно пребывающей материи, которая является в различных формах, так и душа остается продолжать жизнь, но не индивидуальную, а универсальную жизнь одухотворенной материи.

Далее в учении о мыслящей материи сказано больше, чем в метафизическом пантеизме по вопросу о смерти. Картина потухания жизни до степени близкой к исчезновению и все новых и новых вспышек в различных местах, объятый огнем жизни массы, говорит уму мыслящего человека больше, чем фантазия верующего или бледная расплывчатая метафизика.

В то время как метафизик против воли своей увлекается к универсальному бессмертию, натурфилософа его психофизический параллелизм – от отвергнутого индивидуального бессмертия через универсальное – влечет к признанию нового индивидуального бессмертия, которое можно назвать *атомистическим*.

Последнему неразложимому биологическому элементу, в силу психофизического параллелизма, должна быть приписана наиболее элементарная жизнь.

На смерть следует смотреть не как на слияние души с универсальным океаном, а как на раздробление одной струи на тысячи брызг и капель.

Душа человека – это агрегат клеточных душ, так же как тело – агрегат клеток. Душа человека гибнет, остается жизнь клетки; бессмертие души может быть только бессмертием клеточной психики. Это – психически бесконечно малое, продолжает жить при делении клетки. При делении половой клетки в производимом на свет организме делятся элементы, составляющие души родителей, в ребенке продолжается жизнь родителей.

Но вместо того, чтобы остановиться на клетке, можно опуститься ниже до биофора или до молекул, атомов, электронов, мыслить физический, химический гилозонт, в котором клеточные души заменены атомными душами, являющимися неразрушимыми не только в потенции, но и в действительности.

Это воззрение, воспитанное натурфилософией, ближе к истине, чем метафизическое. Вместо простоты оно утверждает сложность души. Тело – обиталище не одной, а многих душ, оно сложный агрегат при простой монаде. Но такое воззрение мыслит эту сложность неправильно, чисто ме-

ханически, в форме соединения однородных элементов. Упорное в своей вере в психофизический параллелизм, усматриваемый только в ограниченной области, оно вымучивает его и там, где наш внутренний опыт решительным образом говорит против него.

Души не складываются из нескольких я, как бы они ни были малы, но дают одно я. В теле находятся и клеточные души, а с ними и души высоких порядков, носителями которых являются ганглиозные центры нервной системы, но каждая из этих душ должна иметь свою жизнь как жизнь, амебы, корненожки и выше (по степени сложности биологической организации), свою жизнь, а не мою жизнь.

8. Материализм о смерти.

Материализм, проводя психофизический параллелизм, не может уйти от универсального бессмертия, если только он не примет грубую форму, в которой психическая жизнь низводится в какое-то чудесным образом воспринимаемое движение материи, причем без воспринимающего субъекта. Основываясь на психофизическом параллелизме, материализм вооружается против индивидуального бессмертия.

Материалистические доказательства смертности души, или вернее, *прекращения психической жизни*, так как по материализму нет души, идут по шаблону: душа родится, растет, падает и болеет с телесным органом, а потому по разрушении последнего должна исчезнуть¹⁹.

Но это доказательство представляется убедительным только в силу его образной аналогии с некоторыми материальными явлениями. Цветок растет, когда его поливают; прекратилась поливка, и рост прекращается, цветок гибнет; отсюда заключают, что цветок не может жить без воды.

Для всех ясно, что такое рост цветка, но рост души — только для того существует, кто мыслит душу материально, как тело, т.е. при определенной материалистической точке зрения.

Стоя не только на почве фактов, следует говорить не о росте, а о развитии вообще, или, вернее, о *развитии* способности души, параллельно росту телесных органов. Но тогда факты не только не будут доказывать теории, но и будут говорить против нас, так как обнаруживая, что душа развивается параллельно росту тела, они постулируют некий субстрат, носитель этого развития, предвещающий это развитие в форме какого-то, хотя бы пассивного, состояния. И так как психическая жизнь уже в самых ранних ступенях является определенно индивидуализированной, относясь именно к данной определенной особе, связанной с данным телом, то речь здесь может идти не о мировой душе, а именно о душе данного индивида.

Материализм попадает на правильный путь, когда старается решить вопрос о смерти, обращаясь к фактам и сфере таких явлений, как сон.

Бюхнер берет сон для доказательства уничтожаемости душ; он старается во сне усмотреть прекращение психической деятельности.

Во сне будто бы функционирует только тело. По пробуждении ото сна душа находит себя там, где она забылась, засыпая.

Так как с утверждением исчезновения души во время сна в резком противоречии находятся сновидения, которые как читатель, так и сам Бюхнер видит каждую ночь, то он считает необходимым объявить, что сон со сновидением это не сон, а только переходная ступень от бодрствования ко сну, а постоянный сон, как якобы показывают факты, совершенно свободен от сновидений.

Но то, что говорит Бюхнер, менее всего подтверждается именно *фактами*. Они показывают, что содержание сна нами обычно забывается, что утром в большинстве случаев не можем восстановить в памяти течение образов сновидений, но что в продолжение дня сон часто всплывает в памяти под давлением ассоциаций.

И факты очень красноречиво говорят о том, что возможны разрывы в психической жизни, например, при сомнабулизме, когда душа совершенно теряет воспоминание о прежних своих переживаниях, в определенный период.

Наконец, просыпаясь в различное время, всякий может убедиться, что сновидение вовсе не приноровлено ко времени засыпания или пробуждения²⁰. По заявлению самих материалистов, брат смерти – сон, дает доказательство как раз противоположного тезиса, обнаруживая трансцендентальные возможности души, обнаруживая возможность бестелесного существования души, которое открывает смерть.

Значительно более сильным представляется аргумент, относящийся к потере сознания под влиянием наркотических средств или в болезненном состоянии.

Ведь то, что происходит с душой в глубоком обмороке не вспоминается по пробуждении; в жизни остается пустое место.

Материалисты предлагают коварный вопрос: где находится душа во время глубокого обморока? Но пустое место устанавливается не в жизни души, а только в ее памяти; только такое пустое место остается по пробуждении от сомнамбулического сна, но никто не будет отрицать жизни во время этого сна.

Что же, во время обморока душа совершает путешествие, полное впечатлений, о которых потом забывает? Нет необходимости в положительном ответе, возбуждающем улыбку противников, хотя и эта гипотеза в моих глазах, не является столь смешной. Жизнь души может быть до крайности припущена, но вовсе не уничтожена.

Пробуждаясь, мы не можем ее вспомнить, но это еще не значит, что ее вовсе нельзя вспомнить. В сновидении мы видим течение образов, причем, часто память сновидца так ослаблена, что он совершенно забыва-

ет о протекающих в поле его сознания образах, и сновидения и действия сновидца во сне представляют нагромождение нелепостей. Но, просыпаясь, он прекрасно вспоминает все сновидение; он совершенно ясно и определенно видит ряд образов, ни об одном не забывая, видит все промахи памяти, все ошибки рассудка во сне. И мы можем представить себе душу, которая в проясненном состоянии зрит даже и то, что было *почти пусто*, что представляло, так сказать, самые низины ее земного существования. Проясненная душа восстанавливает образы, связанные с операцией, и фигуры близких людей, и доктора, надевающего на лицо маску, и отчаянную борьбу, завершающуюся победой наступающего на слабую душу *не я*, и чувство стремительного падения...

Но она заполняет и прежнее пустое место.

Душа чувствует себя, и только себя, в однообразии своей обособленности от вселенной, из которой она изъята в полной угнетенной пассивности.

9. Гипернаучный опыт.

Мы теперь близко подошли к тому пути, по которому я намерен идти, к пути гипернаучного опыта.

Скажем о его сущности несколько слов.

Всякое научное наблюдение должно совершаться через органы чувств *естественные*: глаза, уши и т.п. или искусственные, представляющие расширение естественных. Наблюдатель может изменить условия наблюдения, действуя этими орудиями; можно сказать, что опытное исследование может быть признано научным только при условии, что самый процесс исследования может стать предметом другого исследования. Но совершенно иначе дело обстоит, когда кристалломант наблюдает в кристалле то, что происходит за десятки верст. Здесь мы не можем делать предметом исследования самый процесс ясновидения, так как хотя и получится тот результат, который дается действием освещенных предметов из глаз наблюдателя, но в нем самый акт видения совершается или совершенно без участия глаза, или таким образом, что глаз является последним звеном цепи, идущей в невоспринимаемой нами плоскости существования.

Из предъявляемого к научному опыту требования следует, что он всегда должен удовлетворять основным условиям пространства и времени.

Один и тот же объект не может в одно и то же время быть в настоящем и будущем. Наблюдение события А предполагает это событие, наблюдение А есть то же событие В, и события В и А должны быть одновременными. Прозрение (а не предсказание) будущего с научной точки зрения, конечно, является недопустимым. В таком прозрении нарушается не-

обходимая одновременность события наблюдения и наблюдаемого события.

Если существуют акты такого прозрения в сновидениях, гипнозе и т.д., то они должны выйти за границу науки — в сферу гипернауки.

10. Распадение личности.

Мы не сразу войдем в эту среду, мы пройдем раньше через явление паталогии души.

Болезнь состоит — не с физиологической, а с чисто психологической точки зрения — в том, что подсознание берет верх над сознанием, что из тайников подсознания выступают способности души, все менее связанные с телом и даже совсем от него эмансипированные. В паталогических явлениях многие видят распад души на составные элементы, т.е. определенный признак ее уничтожимости.

Рибо²¹ так описывает болезнь личности: “Если мысленно соединить все симптомы, сопровождаемые физическими болями, изменениями вкуса и обоняния, мы увидим возникновение целой группы, новых по своему характеру, ощущений внутренних и внешних; они связаны между собою одновременно появлением и, что еще важнее, болезненным состоянием, которое служит им общим источником. Здесь налицо все элементы “нового я”. Иногда оно и так образуется”.

“Я утратил сознание моего существования, я — более не я”. Такова формула, которая повторяется в большинстве случаев. У других болезнь заходит дальше и иногда они воображают себя двойными. “Странная идея, — говорит один инженер, — навязывается моему уму вопреки моей воле: мне представляется, что я двойной, я чувствую в себе одно я, которое мыслит, и другое, которое выполняет”.

Но фраза: “я — более не я” не имела бы смысла, если подлежащее имело бы тот же смысл, что и сказуемое. Я в подлежащем иное, чем в сказуемом. То, что подлежащее, остается неизменным, это тот, кому принадлежит содержание сказуемого; меняется не то, что есть я, а то, что принадлежит я. Это я — сказуемое, не так просто как математическая точка; пусть, говоря физиологическим языком Рибо, оно состоит в координации нервных центров, дающих координацию отправления организма. Двойное я инженера состоит из его подлинного я, которое мыслит и не может действовать, область которого ограничена только мозгом, и эмансипированного второго я, осуществляющего мысли первого.

Случаи полного разложения личности говорят, как будто, еще громче за возможность распада души.

Таков знаменитый случай²² Фелицы, описанный доктором Азана-ла из Бордо. Фелица, начиная с 15-летнего возраста входила во “вторичное” состояние. В этом втором состоянии она помнила первое, но, возвра-

щаяся к первому, она забывала второе. С сорока трех лет вторичное состояние стало преобладать. В одном из вторичных состояний она забеременела и, придя в первое, не могла понять как это случилось.

Другой случай описывает Жане. Леони – особа грустная, спокойная и кроткая, превращается под действием гипноза в веселую Леони–2, которая знает Леони первую и приписывает ей все пережитое в бодрственном состоянии, а себе оставляет сомнамбулическую жизнь, связывая все в одну историю. Так как роды относились ко вторичному состоянию, то Леони вторая признает ребенка своим, а мужа оставляет Леони первой.

В дальнейшем происходит выделение еще третьей личности – Леони–3, знающей Леони первую и Леони вторую, степенной и серьезной, относящейся отрицательно и к доброй Леони–1 и к полоумной Леони–2. Леони–3 резко отличает себя от Леони–1 и 2. О первой она говорит: эта храбрая женщина довольно глупа, но это не я. О второй: как вы можете думать, что я похожа на эту сумасшедшую?

Полную аналогию с явлением раздвоения обнаруживают “одержимые”.

Монахини – спокойные, вежливые, религиозные, в состоянии припадков изрекают ругательства на священников, св. Деву и говорят неприличности. Их устами говорит не они, а некто иной, говорит *вторичная* психика, действующая под давлением образов, с которыми борется душа.

“Это не они – пишет свидетель – выражаются таким образом. Это дьявол овладевает ими, говорит от своего имени. Блондло – это только пассивное орудие; как по волшебству она вдруг успокаивается, и, если раньше вязала, то продолжает и дальше вязать и не хочет верить тому, что только что говорила ругательства”²³. Какое же здесь распадение души, когда она, как по маговению волшебной палочки, по миновании кризиса восстанавливается во всей своей целостности. Не естественнее ли предполагать, что душа просто ушла, что тело перестало на время быть ее орудием, что место ее занял другой? Этого другого, этого дьявола, говорящего устами Блондло, следует искать в подсознании.

11. Бессознательное Гартмана.

Прежде всего скажем о взглядах Гартмана на бессознательное. По Гартману, бессознательное бывает трех видов:

1. Физиологическое бессознательное.
2. Относительное бессознательное.
3. Абсолютное бессознательное.

К первому относятся памятные следы, которые, по мнению Гартмана, представляют молекулярные изменения в мозгу, облегчающие повторное появление известных представлений.

Физиологическое бессознательное – это еще не психическое. Это только молекулярное предрасположение. Таким образом, взгляд на память у Гартмана чисто материалистический.

Но относительное бессознательное является уже психическим. Ему отвечают явления в ганглиозных центрах, так как сознательным психическим актам отвечают функции большого мозга.

Следует различать центральное сознание, которое и есть мое сознание, от сознания низших порядков, вторичных сознаний. Для этих сознаний относительное бессознательное является уже сознательным, в то время, как для центрального сознания оно является бессознательным.

Абсолютное бессознательное не имеет уже физиологического коррелята. Оно является началом скорее метафизическим, чем психологическим. Это то бессознательное, которое уже у Каруса не имеет сомнений, колебаний, утомлений постепенного упражнения и изучения, и действуют всегда с уверенностью, с мудростью и изяществом, легкостью и неизменной непосредственностью. Оно целесообразно определяет устройство организма в момент оплодотворения и проявляется при его заболеваниях, в виде целебной силы природы.

Это бессознательное возводится Гартманом в основное начало мирового процесса, представляет синтез шопенгауэровской воли и гегелевской развивающейся идеи. Метафизическое абсолютное бессознательное не включает в себя бессознательные ощущения. Можно вполне согласиться с Фехнером и Форплаге, что *ощущение может быть только сознательным*, что при опускании раздражения ниже некоторого порога, не существует вовсе ощущения центрального сознания, и что то же имеет место для ощущений вторичных сознаний²⁴, т.е. к относительному бессознательному применима также знаменитая формула Вебера–Фехнера, связывающая ощущение с раздражением, но только при других значениях параметров. Следует оставить только относительное бессознательное. Абсолютное бессознательное Гартмана следовало бы совершенно отбросить, так как вопрос о строении души следовало бы рассматривать независимо от метафизических предпосылок. Абсолютное бессознательное может остаться только в виде *пассивного* фундамента жизни сознания, резервуара памяти. При решении психологических вопросов абсолютное бессознательное в гартмановском смысле может нанести только вред.

Еще до Гартмана Фихте-младший проводил мысль, что сознание есть только *побочное* явление, нечто чисто придаточное для духа, признак, а не самостоятельное, существенное. Главным же агентом является бессознательное.

Но если вводить относительное бессознательное, снабжая центральное сознание целым войском, ему соподчиненных, вторичных сознаний, то все, что приписывается абсолютному бессознательному Фихте, упадет на это вторичное сознание. Только за сознанием остается *активность*, бес-

сознательное низводится до чистой пассивности. Не сознание, а бессознательное есть придаток, в то время как сознание есть субстанция, а не акциденция, не только фонарь, освещающий содержание души, а действующая сила. Воля никогда не бывает слепой, как этого желает Шопенгауэр; желание пробуждается в сознании, в бессознательном его нет.

12. Защита бессознательного.

Следует хорошо помнить, что относительное бессознательное – психическое только для вторичных сознаний, а отнюдь не для центрального сознания, причем то, что является сознательным для центрального сознания, может как сознаваться, так и не сознаваться вторичным сознанием.

Только этот путь, избранный Гартманом, дает возможность покончить с возражениями против психического бессознательного. Если Вундт называет бессознательную психическую деятельность противоречивым понятием, поскольку оно обозначает духовное, но не действующее действие, то ему можно ответить, что здесь речь идет не об абсолютном бессознательном, а только об относительном, что эта деятельность бессознательная только для моего я, а сама в себе также сознательна, как та деятельность, которую я осознаю, что она действует в своей более узкой области, так же как действует в более широкой области мое центральное сознание.

Сложность тех явлений, для которых бессознательное является объясняющим принципом, решительно говорит против узкого взгляда (напр. Циглера²⁵), сводящего бессознательное к малым восприятиям Лейбница²⁶, находящимся у порога сознания, но, собственно говоря, никогда не опускающимся ниже его.

Обычно старой умозрительной психологии противопоставляют современную экспериментальную психологию. Первая – это не имеющая фундамента метафизика, вторая – позитивная наука. Указывают, держась кантовской схемы²⁷, на то, что психология теперь переходит из второго – метафизического периода, в третий – позитивный, что в настоящее время она уже должна оперировать только с элементами, доставляемыми научно поставленными наблюдениями и опытом. Но история не только психологии, но и других, родственных ей наук, наводит на мысль, что учение О. Конта о трех стадиях развития: теологической, метафизической и позитивной – великое заблуждение. В этих науках попытки полного изгнания метафизических элементов оставались всегда тщетными. Эволюция их шла не так, что они с одной ступени кантовской иерархии поднимались на высшую, а растягивалась так, что одна часть оказывалась на высшей ступени, в то время, как другие должны были обязательно оставаться в сфере более смутного и более проблематического метафизического мышления.

В защиту этого взгляда говорит и политическая экономия, которая в иных своих областях определенно идет к математизации, где наряду с формулой Паретто и с математическими выводами из нее, существуют обреченные на метафизическое состояние рассуждения о стоимости, цене и т.д.

Такова же и психология, в которой рядом с психофизической математикой всегда будут жить метафизические элементы. Боящаяся мистики и цепляющаяся за физиологию психология характеризуется крайней бедностью объяснений, которые все вращаются около законов ассоциации.

Как только психология пожелает стать объясняющей, не только описывающей и классифицирующей психические явления, но и разлагающей их на составные простые элементы, сейчас же становится необходимым ввести в их число метафизические или мистические элементы, неуловимые непосредственным научным наблюдением, носящие гипотетический характер и всем этим шокирующие позитивистов... Гербертова психология носит совершенно ясно выраженный метафизический характер и тесно связана с его метафизической системой. Можно спорить о прочности ее принципов, но бесспорно, что она имеет объясняющую силу, она не только описывает, но объясняет, более того, математизирует свои результаты.

Поскольку дело идет о *рефлексе*, мы находимся еще в области физиологии, но *автоматические психические акты* относятся уже к психологии.

Эти акты приводят нас к психическому бессознательному уже при объяснении самых простых явлений, таких как игры на рояле или шитья, и, одновременно, размышления о совершенно иных предметах, приводят нас к признанию психической деятельности, протекающей вне сознания, психической деятельности, которая уже по своему определению не может служить предметом непосредственного наблюдения, а обречена оставаться всегда элементом гипотетическим. Можно смело назвать этот элемент и мистическим. В самом деле, бессознательное не обретается в пространстве, оно не может ни для кого служить предметом внутреннего опыта, оно существует в какой-то особой сфере бытия, не отделенной от нас и оказывающей на нас свое действие. Вполне понятен страх психологов-позитивистов: в бессознательном должен возродиться старый демонизм, воскреснуть мистический мир, как только мы поборем робость и пожелаем с помощью бессознательного взять представляющиеся неприступными крепости.

Бессознательное может служить объясняющим принципом только при условии, что бессознательные психические функции вполне аналогичны сознательным. Бессознательное ассоциирует представления, как сознание. Оно ощущает, причем может ощущать то, что ощущает сознание. Оно имеет свой резервуар памяти и оттуда черпает свои воспоминания и может

также помнить и то, что помнит сознание. Таким образом, переживания их являются сплетенными между собой.

Кардинальной проблемой *спиритуалистов* является проблема о седалище души. Здесь коренится расхождение между аристотелевско-схоластической и картезианской метафизикой. Первая помещает душу *во всем теле*, вторая указывает ей место; телесной машиной душа управляется с помощью какой-то ручки или вилок.

По Декарту, седалище души — в шишковидной железе.

По Лютце, в варолиевом мосте — в точке прохождения многочисленных волокон.

Паульсен считает, что *все тело* служит седалищем души, она находится в теле повсюду и всюду обладает ощущением.

В действительности, следует признать *среднее* между этими двумя крайностями. Центральное сознание владеет не всеми частями тела, а только частью, остальные же области принадлежат *вторичным* психикам. Верно то, что повсюду ощущение, но только ощущает не одна психика, а многие.

13. Множественность душ в теле.

Гартман останавливается на полпути. Следует пройти дальше. Не считать вторичное сознание только принадлежностью центрального. Эти вторичные психики получают только тогда большую объяснительную силу, если признать их самостоятельность, если признать борьбу между ними, более того, даже настоящий антагонизм.

Тело, таким образом, принадлежит не одному духовному существу, а нескольким. Но я затрудняюсь назвать эти существа душами. Это недо-развившиеся души. Лучше всего называть их психиками и говорить о центральной и вторичной психиках. Следует признать за вторичными психиками волю к власти, стремление овладеть телом и связанными с ним другими вторичными психиками, стать вместо центрального сознания владыкой тела. Этот ницшеанский принцип, а вовсе не спинозовский принцип самосохранения, является главным двигателем душ и жизни. Вторичная психика свергает власть центральной. Раздвоение, вообще умножение личности — это революция вторичных психик. Самым важным заключением, к которому приводит относительное бессознательное, является общность части содержания центрального и вторичного сознания. Во вторичное сознание могут проникать мысли и чувства центрального сознания, хотя часто в смутной и искаженной форме. В сновидении драматургом является вторичная психика, но тема драмы идет от центрального сознания, мысли и чувства которого попадают в подсознание. В гипнозе приказ от гипнотизера получается вторичной психикой гипнотика.

Если во сне обнаруживаются телепатические способности души, то именно потому, что в сновидении действуют вторичные психики, не связанные с телом, но вместе с тем и менее активные, чем центральная.

Вырисовывается следующее образное сравнение: темная пропасть, из которой стараются выкарабкаться люди: верхний ряд цепляется руками за край пропасти; следующие висят, схватившись за ноги висящих на ней. К этим в свою очередь прицепились еще другие. Вот один обнял талию, вот другой одной рукой держится за ногу и готов каждую минуту, разжав собственные руки, низвергнуться во мрак пропасти.

Первый ряд, напрягая мускулы, старается все выше вскарабкаться на край пропасти. Кто дальше от нее, тот все менее и менее активен и, вместе с тем, все менее и менее связан с землей. Тем все в большей и большей мере он жилец воздушной сферы черной пропасти трансцендентального мира духов.

14. Глубины подсознания.

Что такое сон – родной брат смерти? Сон – это спуск души в страшную пропасть.

Погружаясь в сон, душа уже не имеет непосредственного соприкосновения с тем, что происходит там, наверху. Постепенно порывается связь ее со строго подчиненными ей в бодрственном состоянии психиками, порывается и их связь между собой. Это промежуточное состояние между жизнью и смертью. До души еще доходит, как смутный гул голосов за крепкой стеной, происходящее в теле, но она вместе с тем частично приобщается уже к трансцендентальному миру и уже начинает видеть без глаз и слышать без ушей, сбрасывая с себя оковы пространства и времени. На расстоянии тысячи верст начинает душа чувствовать происходящее в образах, творимых подсознанием. Сперва трансцендентальный элемент примешивается лишь в слабой степени и содержит сновидения, но в глубоком сновидении все содержание сновидения может оказаться прозрением действительности.

Постепенное развитие трансцендентальных возможностей во сне было еще в древности отмечено Посидонием: “Сперва душа в силу своего родства с Богом смотрит как бы сама вперед, во-вторых, воздух насыщается бессмертными духами, в которых тотчас выявляются знаки истины, в-третьих, боги говорят со спящими, и это совершается легче всего при наступлении смерти, когда души смотрят в будущее”.

В освобождающейся душе выявляются трансцендентальные свойства. Парацельсу во сне представляется двойственность человека, состоящего из земной и небесной части.

Последняя, постепенно освобождаясь, устремляется к своей свободно развивающейся деятельности. Цицерон говорит, что духи обнару-

живают в нем свое божественное происхождение. Но вернее сказать, что во сне душа приходит в соприкосновение не с божественными сферами, а со сферой бестелесного, которое может быть не божественным. <...>

Трансцендентальные элементы всплывают в сознании через вторичные психики, более погруженные в трансцендентальные области. Параллельно сознанию они подсказывают драматургу-подсознанию при развертывании им картин сновидения.

Сновидение тогда не является полным прозрением действительности, а обычным сновидением, или символизирующим действительность, или содержащим в себе отрывки прозреваемой действительности²⁸.

Х снится У, который после прогулки объявляет, что он должен идти к какой-то могиле, предназначенной ему, и, подходя к ней, проваливается. Как раз в это время У умирает от разрыва сердца. Здесь душа Х уподобляется существу с длинными шупальцами, которые прощупывают вне пространства, связывающего сознательную душу, смерть У. Эти шупальца – вторичные психики, более свободные от телесных уз, чем центральные.

Они вносят в сознание трансцендентальный элемент, который непосредственно не может быть им воспринят.

Другой пример совершенно такого же рода: некто Пит Бэри рассказывает, что он видел себя гуляющим по песчаной местности и спотыкающимся о головки похороненных в песке уток. По пробуждении оказывается, что как раз во время его сна была обнаружена кража на скотном дворе фермы уток, и утки как раз оказались зарытыми в песке приснившейся Питу местности.

Еще пример: некоему Гильтону снится процессия покойников по сельской дороге и в числе их малознакомый ему человек, который в это время оказывается умирающим.

15. Ужас смерти.

Душа, таким образом, владеет телом как, своим орудием, и при этом делит свою власть с низшими, недоразвитыми душами, которые могут свергнуть ее господство и лишить ее царства, т.е. тела.

Смерть – потеря тела, но вовсе не уничтожение того, кому принадлежало в большей части тело, т.е. самой души. Можно вполне допустить, что душа выйдет из пассивности смерти в активность телесной души, получив снова тело и что до пассивности, предшествовавшей рождению, она тоже владела телом. Возможно, но пытливый ум требует не одной только возможности.

Обратимся к анализу духовных переживаний, находящихся в нас в смутной, ускользающей от света сознания, форме. Есть переживания, которые совершенно не допускают научного анализа, где последний может

только скользить по поверхности, не проникая в глубину, можно сказать, целиком погруженную в трансцендентальную область.

Таков страх, или, вернее сказать, ужас смерти. На вопрос, отчего животное больше всего боится смерти, наука, оставаясь при только том материале, который дает окружающий мир, не может ответить.

Говорят, что в страхе смерти — не страх перед уничтожением, так как небытие, лишенное всяких болей, можно сказать, всеобщая анестезия страждущего живого существа, ни в коем случае не должно пугать, что в страхе смерти — иллюзорный страх перед воображаемыми загробными муками.

Против страха смерти не могут помочь эпикурейские лекарства. Пусть сотни тысяч раз повторяют: "Страх смерти безоснователен. Со смертью наступает конец жизни и вместе и конец страданий. Смерть не зло, это нам только она кажется злом. Пока мы существуем, смерти нет; пришла она, и нас уже нет". Этот страх, этот леденящий душу ужас смерти будет всегда существовать, и не потому, что человек недостаточно разумен, не потому, что разумные эпикурейские доводы не могут его убедить, а потому, что этот страх, естественное явление и лучше обоснованное, чем все эти всякие в воздухе эпикурейские аргументы, потому что смерть приносит не добро, а зло, которого душа должна бояться всем своим трепещущим существом, потому что душа должна стремиться к жизни, а не к смерти, потому что смерть не есть уничтожение, а *худшее существование*, есть бытие, но бытие, лишенное и власти, и силы. В своих объяснениях научная точка зрения на смерть принимает следствие за причину. Ужас смерти раньше разных ужасных образов. Не только человеческое сердце заставляет оп содрогаться. Посмотрите на животное, чувствующее приближение смерти, и в нем, в мозгу которого нет ни земного гроба, ни червей, гложащих мертвецов, живет ужас смерти, о котором говорит каждый его мускул.

Значит, источник этого страха не в настоящем психическом потоке, а *вне* жизни. Он есть определенный показатель трансцендентальной области.

16. За гробом.

Метафизика совершенно переворачивает истину, стараясь объяснить смерть. Шопенгауэр ставит страх смерти в роли Цербера, охраняющего выход из жизни в область смерти, освобождающей от юдоли земной. Но его пессимизм не только не объясняет страха смерти, скорее наоборот, этот факт его метафизикой выставляется, как нечто чудовищно абсурдное, так как душа боится того, что является для нее наиболее желательным.

Всякий страх, всякое отвращение, лишь *по видимости* беспричинно захватывающее душу, имеет всегда основание, которое может находиться за порогом осознания. Душа запускает тогда за этот порог глубоко свои

хорни и по ним вверх поднимаются соки, которые вместе с восприятием из внешней среды образуют содержание ее жизни. Пессимизм жесток к жизни, но смерть достаточно громко говорит, что следует быть более жестоким к смерти.

У порога смерти нет необходимости ставить Цербера, ибо сама смерть – величайшее зло. И именно потому, что она самое *худшее*, потому что она неизмеримо хуже, чем наша жизнь, наша душа трепещет при мысли о ней.

В страхе, сковывающем нашу душу, следует видеть указание на то, что вместо грядущего небытия, стоит мучительное, невыносимое существование, которое уже *истытано*, но память о котором остается в виде уже не связанном с образом причины страха, вследствие того, что ни один элемент не может быть восстановлен в воспоминании.

Это трансцендентальное воспоминание, проникающее через стену, отделяющую душу от предшествовавшего существования, это смутное воспоминание о тяготе тьмы, когда вокруг свет, это тяжелое воспоминание о бессилии, когда в руках власть. Страх смерти – это лучшее доказательство не бессмертия, а *переживаемости души*.

Ведь если бы душа исчезла после смерти, то было бы совершенно правильно то, что говорит в своей апологии Сократ: нечего бояться смерти, так как пока я существую, ее нет, а когда она есть, меня уже нет.

В действительности же происходит совершенно другое.

Не плебейское чувство самосохранения, а аристократическая *воля к власти* является главным духовным фактором.

Смотрите: сильный, благодаря своим богатствам, миллионер проигрывает свое состояние. Он предпочитает продолжению жизни – самоуничтожение. Почему? Потому что его собственность – царство его – уничтожена, и сила его обратилась в бессилие.

Смерть не уничтожает души, но делает ее пассивной, сковывает ее волю, и именно этот переход от активности к пассивности, переживаемый душой, и есть самое ужасное в смерти, передаваемое трансцендентальным воспоминанием.

Мысль об инкарнациях, о последовательных возрождениях души в новых жизнях – очень древняя. Она обнаруживала всегда тенденцию к более широкому пониманию, в смысле *метампсихоза*, т.е. инкарнирования человеческой души не только в человеческих, но и животных телах. Так мыслит Платон, его поддерживал Плотин.

Но метампсихоз находит себе горячего противника, конечно, в христианстве. Блаженный Августин вооружается не только против метампсихоза, но и против полигенезиса²⁹, т.е. последовательного инкарнирования души в различных телах. Он замечает, что постыдно не только верить в то, что мать превращается в лошадь, которая может возить на себе сына, но и думать, что мать превращается в девицу, которая может быть женой сына.

Не гораздо ли благочестивее, восклицает бл. Августин, верить в то, что души людей возвращаются в *свои* собственные тела, чем в то, что они возвращаются в чужие.

Порфирий вводит корректив: по его мнению, души людей могут входить только в людей <...>.

17. Эдукция и традукция.

Таким образом душа существует вечно. Если можно говорить об ее создании вместе со временем.

Средневековая мысль видит следующие возможности. 1. *Эдукция* – выведение души из сил самой материи. В самой материи мыслится что-то духовное, из чего создаются индивидуальные души. Это, вне сомнения, путь к *пантеизму*, к признанию какой-то мировой души, из которой эмануируют души индивидуальные.

Но именно трансцендентальное воспоминание, о котором мы говорили выше, говорит против этого взгляда. Моя прежняя жизнь есть тоже жизнь личности, хотя и другой.

2. *Традукция*: одна душа рождает другую (как огонь рождает огонь). За это говорит *наследственность*. Моя душа содержит кое-что из духовного содержания души моего отца. Но, анализируя глубже, мы видим, что всякая наследственность носит только внешний характер, *внутреннее* же идет из другого, более глубокого источника. Два брата-близнеца имеют совершенно одинаковую наследственность и более того – одинаковую утробную жизнь, но в глубине своих духовных стремлений различаются между собой. В них говорит голос, идущий от их предков, но еще сильнее голос, идущий от их предшествовавших жизней.

Третья гипотеза, на которой останавливается Ориген: душа до рождения существует и обнаруживается с рождением. Это точка зрения, которая мной и защищается. Души при рождении *овладевают* телом так же, как вторичные психики овладевают центральной нервной системой. Различие только то, что здесь ей предоставляется *вполне готовый аппарат*, между тем, как в ребенке или, вернее, в утробном плоде аппарат этот еще не готов, это музыкальный инструмент, в котором еще нет струн, но который уже находится в руках того, кто после того, как будут натянуты струны, будет на них играть.

Такое предположение лучше, чем предположение, что душа создается из *ничего* в момент рождения. Почему в момент рождения, а не в утробе матери, когда, конечно, ребенок все-таки живет так же, как когда выйдет из утробы? Гораздо естественнее предположить, что растет здесь не душа, а растет только *связь* между ней и тем инструментом, которым она будет пользоваться.

По Лейбницу, душа всегда существует, но, как он говорит, в малых размерах. Мы это переводим так: *в меньшей активности*, или даже просто в пассивном состоянии.

Рождение, говорит Лейбниц, это особого рода *увеличение*, смерть же — уменьшение живущего, преобразование и свертывание. Наш перевод: переход в пассивное состояние.

Но когда Лейбниц говорит, что нет души, отделенной от тела, что нет бестелесных людей, что только один Бог свободен от тела, то мы протестуем, так как тело это то, что *дает жизнь*: *(душа без тела) не живет, а только существует*.

18. Любовь и смерть.

Насколько все другие платоновские доказательства бессмертия души далеки от истины, настолько близко подходит к верному пути его гносеологическое доказательство переживаемости на основании врожденности идей.

По Платону, познание идеального — это припоминание (анамнезис) пережитого в предсуществовании души в другом бестелесном мире, в том мире, где души созерцают сами платоновы идеи, и куда они должны вернуться. Не учение о врожденных идеях, а подход к проблеме смерти со стороны анализа необъяснимых средствами научной психологии явлений, мне представляется ценным в платоновских взглядах на бессмертие. Но эти несводимые элементы он совершенно неправильно ищет в верхах сознания, а не у порога сознания, у преддверия темного подсознания, погруженного в сферы бестелесного.

Указание на предсуществование Платон видит не только в идеях, но и в высших чувствах, по его мнению, не связанных с телом. Наряду с чувственной любовью, он отличает духовную, основанную на пробуждении воспоминания о первообразе красоты, виденном до земной жизни, о потерянном блаженстве созерцания идеального мира. Эрос — это страстное стремление к бессмертию.

То, что уже по самой природе является объектом основного влечения души, то не должно быть для нее достигнутым. Платон сходит и здесь с правильного пути. Половое чувство смешивается с эстетической эмоцией. Он бросается опять к ярким верхам сознания, относя туда то, что вырастает в чудесных, но страшных тайниках подсознания.

В любви Данте к Беатриче, той любви, которая может быть названа родной сестрой смерти, которая признает одну, только одну, в которой мощное стремление к дорогому образу не представляет полового чувства, но обращается в последнее, — такое же указание на предсуществование, как в страхе смерти. Но любовь рождается в этом, а не в трансцендентном платоновском мире, в таких его глубинах, которые тысячами нитей связа-

ны с его поверхностью, по которой движется порог сознания настоящей жизни.

В юные годы душа овладевает уже вполне организованным телом. Окончательно она пробуждается ото сна и вот из самых глубин ее выступает порыв к проявлению наиболее полной активности. Как поток долго сдерживаемой воды, он прорывает плотину, увлекая в себя не только все то, что обретается душой в ее первые годы жизни, более того – утробной ее жизни, но и трансцендентальный осадок ее прежних переживаний. Вот этот осадок поднимается во время юности на поверхность сознания – неясный и неопределенный, производящий смятение в верхних слоях, а затем глубоко упадающий в таинственные глубины и замещающийся телесными стремлениями.

За гробом мы должны искать разгадку любви. Что такое черты лица возлюбленной? Не то ли, что уже было видно и глубоко пережито? Может быть, это черты моего лица в прежних моих инкарнациях? Воздержимся от пути, по которому ведет нас дальше фантазия, стремящаяся разобрать то, что говорит этот голос, но согласимся с тем, что он идет оттуда, откуда идет к нам и великий страх смерти.

19. Душа и тело.

Основная ошибка, идущая от Аристотеля и в собственности развиваемая средневековой мыслью, состоит в том, что душа признается за фактор, приводящий к актуальному существованию, за принцип, оживляющий материю.

В действительности же, как раз наоборот. Тело является оживляющим принципом души. Душа до соединения с телом является лишенной деятельной жизни, и она становится деятельной только в соединении с телом. <...> Телесные органы чувств существуют не для того, чтобы давать душе знание о внешнем мире, так как он может восприниматься и без их помощи – центростремительную и центробежную нервные системы следует, как это делает Фергсон, рассматривать как единый аппарат, с помощью которого душа является действующей, а не только пассивно-воспринимающей. Мозг для памяти – это только решето, просеивающее тот материал, который необходим для действия.

Чтобы понять, в какое затруднение вводила аристотелевская точка зрения, следует вспомнить созданное для оправдания учения о бессмертии души томистическое учение о разделенных формах. Эти формы противоречили учению Аристотеля, по которому всякой вещи приписывается двойственный состав из субстанции и формы. Для того, чтобы примирить переживаемость души с аристотелевским учением о душе, как форме тела открывается еще путь, указанный Лейбницем: снабжение отошедших душ другим телом. Лейбниц, по которому душа является, как и для Аристотеля, не вполне субстанцией, а какой-то субстанциональной формой, что им под-

черкивается с полной определенностью, развивает учение о телах, которые заменяют для душ умерших их земные тела.

Это учение в грубой и фантастической форме развивается спиритизмом, снабжающим душу кроме земного, уничтожающегося со смертью тела, еще и призрачным телом материализирующихся духов. Это направление лишь запутывается в сфере грубо материалистических воззрений. [Имеется одна] основная ошибка во всех метафизических построениях, которые запутывают метафизику в рассуждениях о взаимоотношениях души и тела и приводят к психофизическому параллелизму, уничтожающему индивидуальное бессмертие. Это ложный постулат *о невозможности взаимодействия между разнородными вещами*.

Мыслители конца XVI в., которые во всяком явлении видят *действие духа на материю*, т.е. как раз взаимодействие между разнородными вещами, в этом отношении представляют полную противоположность мыслителям XVII в.

Лейбниц настаивает на том, что, по его мнению, *ложное учение о полной нематериальности души*, имеет своим источником введение многих бестелесных духов в среду телесную. Действие при этом понимается грубо материально, в форме какого-то смещения агентов. Действие на расстоянии одной вещи на другую не признается последствием того, что всякое действие требует прикосновения частей этих тел, образования из этих частей, хотя бы временно, нового целого. Рука может взять камень, так как рука соприкасаясь с камнем, образует с ним одно целое, но дух не может двигать ни руки, ни камня, так как нет частей у духа, могущих войти в соприкосновение с рукой или камнем.

Но действие следует понимать *глубже*. Всякое действие это *творчество*, и при этом следует прибавить, встав в противоречие с Анаксагором, *творчество из ничего*.

Дух может также *творить материю* в плоскостях более высокой реальности, как он может творить свои сновидения и призраки, которые нельзя рассматривать *как абсолютно не существующие*, но которые следует относить к низшим степеням реальности.

XVI век стоял на более правильной точке зрения. Его более широкий взгляд шел дальше, чем узкокомеханистическая метафизика XVII в.

20. Темная и светлая мистика.

От темной мистики, которая состоит в падении души в сферы подсознания, которое есть не что иное, как царство духов, в большей или меньшей степени связанных с телом и, наконец, бестелесных, от темной мистики сна и смерти следует отличать светлую мистику, возносящейся над телесным, живой души. В мистическом подъеме святой души, восходящей к Богу, тело не уничтожается, но служит лестницей, по которой душа восхо-

дит на мистические высоты. Тело не уничтожается, но приводится в полную покорность духу. *Это победа над телом духа*, который делает его своим верным слугой. Дух-победитель пересоздает тело, и тело святого оказывается не негодной ветошью, а блестящим орудием, которым он побеждает врагов своего темного подсознания.

Нет необходимости наделять его новым телом, когда смерть разобьет это оружие.

Вселенная – вовсе не тело Бога, это тело святых, и отчасти, и наше тело.

“Абсолютное бессознательное” – это резервуар памяти, при этом совершенно пассивный – но он содержит в себе нечто от жизни – жизнь в потенции. Оно относится к жизни совершенно так же, как потенциальное бытие аристотелевской материи, относится к актуальному бытию субстанции.

Пассивность души после смерти, конечно, не есть абсолютная пассивность; доля активности, которая в ней остается, не позволяющая ей обратиться в простой резервуар памяти, дается ей ее связями со всей телесной вселенной, на которую она оказывает какое-то воздействие. Вселенная является ее телом, как принципом тлеющей в ней активности. Действие это – в некоторых частях ее тела вселенной, вероятно больше, чем в других. В некоторых центрах, главным образом в телах, живущих земной жизнью, они могут аккумулироваться. Это воззрение, которое можно назвать не только мистическим, но и *магическим*, вполне согласуется с религиозным представлением влияния отошедших святых на людей живущих. Мистический подъем, в котором возносящаяся к Богу душа покоряет себе тело, доводит духовную мощь до такой степени, что душа приобретает способность действовать через тело не только при своем земном существовании, но и по потере его.

С другой стороны, это воззрение близко подходит и к пантеистическому взгляду, выработанному натурфилософией, погружающей душу отошедшего в окружающую его природу, заставляющей его жить ее жизнью, растворяющей ее в шумящем лесе, в благоухающих цветах, в поющих птицах и озаряющем красным отблеском зеркальную поверхность реки солнце. Душа отошедшего в последней молитве святого не сливается с поглощающим ее Божеством, она остается жить, оставаясь той же в этом великом божественном теле.

21. Защита тела.

Проводимые мною взгляды решительно антиплатоновские. Взгляд на тело, как на тюрьму души, развивается вслед за Платоном Филоном и новоплатонниками и, как наследие от новоплатоников, вместе с некоторыми другими элементами переходит в христианскую философию.

Воздушное пространство подлунного мира, по Филону, заполнено ангелами, демонами и душами, сохраняющими свою чистоту и совершенство. Ниспадая со своих высот в человеческие тела, они окутываются чувственностью.

Но если им удастся освободиться от чувственности, они возвращаются к своему бестелесному существованию. По Платону, душа, в силу необходимости мировой души, излучением которой она является, пропикая все, попадает в тело, забывая свое достоинство и происхождение; не отрываясь от мировой души, она отвращается от Бога. Ниспадение души представляется Платону в образах разворачивания падающей вниз материи, прикрепленной сверху.

Эта картина должна замениться другой. Подлунный мир, действительно, заселен душами, жаждущими тел. Они стремятся не к небесам, а к этой земной жизни, своими страданиями и подвигами восходящей по терниям страданий, более прекрасной, чем олимпийские нектар и амброзия, чем идеальный мир Платона.

Она стремится все более и более к интенсивной и экстенсивной жизни, к действиям, к власти... *Тело для души не гроб, не тюрьма, а лестница к Богу.*

Здесь я вполне становлюсь на сторону христианских учителей Церкви против платонизма.

По мнению новоплатоников, совершенное блаженство бывает тогда, когда души, освободившись от всякого тела, возвращаются к Богу. Св. Августин, вместе с другими отцами церкви, дает блаженной душе тело, утверждая, что бременем для души служит не “просто тело, но тело тленное”. “Тело бо тленное отягощает душу”³⁰. Он обещает по воскресении вместо тела душевного, тело духовное. “Сеемся тело душевное, восстает тело духовное”³¹, которое с величайшей и необычайной легкостью отдает себя в подчинение духу по безмятежному желанию неразрушимого бытия, будучи освобождено от всякого скорбного чувства, всякой тленности и косности. Это духовное тело, по мнению св. Августина, не будет не только таким, каким бывает теперь даже при самом лучшем состоянии здоровья, но даже и таким, каким было в первых людях до грехопадения. В то время, как для новоплатоников – представителей умирающей античной мысли – смерть представляется благом, освобождением души от стяжавшего ее бремени, для молодой христианской мысли смерть сама по себе зло, *воздаяние за грех*. Как разлучение души и тела – смерть так же не бывает доброй.

“Смерть не есть добро – говорит св. Августин, – хотя она увеличивает славу претерпевающих ее, когда претерпеваете за истину, и делает мучениками”³².

§ 1. Интеллект и воля

Со школьной скамьи мы привыкли к низкой оценке средневековья. Мы привыкли видеть в нем только дурное. Прежде всего — умственный застой, период жизни человечества, который должен быть совершенно вычеркнут, как не способствующий прогрессу, а только его задерживающий.

Затем средневековье представляется периодом жестокости, эпохой инквизиции с ее кострами. Только в блестящую эпоху Возрождения происходит восход солнца. Только тогда мертвую иконопись заменяет продолжающаяся и в настоящее время живопись и вместо бесплодной словесной схоластики встает истинная наука, ведущая к разгадке мироздания. И вот на вопрос, какая эпоха в жизни человечества является *наихудшей*, всегда готов ответ: эпоха средневековья.

Нет большего заблуждения! Истина здесь перевернута вверх ногами. Правильный ответ как раз противоположный. *Не худшей, а лучшей эпохой в жизни человечества было средневековье.*

Я на себя беру трудную задачу защиты этого парадоксального тезиса. Но я предлагаю прежде всего установить тот масштаб, которым следует производить мерку. Обычно людей расценивают по уму, другие же качества относятся к второстепенным. Почему это так? Потому, что ум это только *внешность души*. Это то же, что расценка человека по внешнему облику. Такая расценка производится вовсе не потому, что ум — действительно самое ценное в человеке, а потому, что он наиболее заметен. Ведь именно он хорошо усматривается непосредственно в словах и действиях человека, в его творениях, в особенности в тех случаях, когда он в какой-либо узкой области выявляется, подымая человека на более высокую ступень в сравнении с другими. Верно говорит Лихтенберг: умный человек не только иначе говорит, чем глупый, он иначе ходит, иначе сидит и т.д.

Более того, расценка обычно ведется даже не по общему характеру и широте и глубине ума, а по величине специальных интеллектуальных способностей. Мы больше удивляемся и больше превозносим феноменального счетчика, чем рядового человека с широким или остроумным интеллектом.

Высшую оценку получают не умные люди, а умственные фокусники.

И, конечно, здесь усматривается полная аналогия с телесной красотой или даже с платьем.

Не только женщины, но и мужчины даже в пожилые годы большую часть своего внимания полагают именно в этой преходящей внешности. А

между тем ум, как и телесная красота, зависит от всяких случайностей. Именно про них можно сказать, что “они опадают, как цветы. проходят, как тень”. Ведь, малейшее поранение лица нарушает красоту, а делаемые ошибки уже заставляют сомневаться в интеллектуальной силе, и больше всего – в интеллектуальном фокусничестве, они что-то вроде фальшивых нот в игре, может быть, талантливого виртуоза.

И то, что ум далеко не первое в жизни, это можно видеть и из того, что в жизни побеждают вовсе не наиболее умные, а скорей наиболее сильные характером.

Да и в науке успех зависит не столько от силы ума, как от прилежания и настойчивости.

Только ими достигается успех в том, что наиболее ценится: в специальной научной работе и в интеллектуальном фокусничестве. В то время, как простые смертные стараются в головы великих людей поместить каких-то демонов или ангелов, сами великие люди их не находят. Великий математик Гаусс утверждал прямо, что он отличается от других только тем, что он прилежен. Ньютон на вопрос, как он открыл закон всемирного тяготения, сказал: “я о нём постоянно думал”. Если это не совсем так, то, во всяком случае, в этом много истины. Пожалуй, верно то, что гений – это *колоссальное трудолюбие*.

В трудах великих математиков меня всегда больше всего удивляла их *трудоиспособность*. Я вполне могу вообразить себя открывающим сообщаемые ими истины, но никогда – совершающим их труд, неисчислимое множество неудачных попыток, затем колоссальную черновую работу, связанную с проверкой и перепиской.

Я предлагаю, на время отрешившись от культа гениальности, совершенно объективно просмотреть работу наиболее выдающихся государственных и общественных деятелей, и, я думаю, придется прийти к такому выводу, который едва ли найдет у многих одобрение: *люди в отношении ума различаются не так сильно, но колоссально их различие в силе воли*. Ведь существуют люди, которые могут работать по двое-трое суток подряд, не сходя с места. Другие же не могут просидеть и полчаса. И существует очень мало таких, которые могут работать так, как Кеплер при установке своих знаменитых законов и как Ньютон, размышляющий над законом мироздания. Я не говорю, что этими открытиями мы обязаны только их настойчивости, но я говорю, что мы обязаны больше настойчивости, чем уму. Когда стараются выявить причину успеха Наполеона, то ее ищут только в его *уме*, а если не находят, то относят все к случайности. Между тем, основная причина успеха – в *воле*. И то же следует сказать и о других великих людях. Приоритет остается не за беспольным разумом, а за волей – этим основным *мужским* началом.

Поэтому прав был Дунс Скотт, выдвигавший, в противоположность рационалисту Фоме Аквинскому, приоритет воли, а не разума. Прав и

Шопенгауэр, считавший наиболее существенным в человеке его волю, а вовсе не интеллект, находящийся в подчинении воле. Протестантство по существу уничтожает религию, выдвигая приоритет веры в сравнении с действием, которому отдает приоритет католичество. Между тем, вера, как говорит апостол Павел, без дел мертва. Чрезмерное развитие воли может быть вредным для других, но самому человеку дает все, и охраняет его от врагов, и подымает его на высоты Наполеонов и Цезарей. Но чрезмерное развитие интеллекта в ущерб воле создает несчастного, который, много зная и много понимая, как шекспировский Гамлет, не будет в состоянии на что-либо решиться. Люди природой предназначены для *дела*, и если они начинают больше думать, чем делать, они идут против природы и обычно расплачиваются за это.

Согласимся, что в настоящее время человек *лучше думает*. Но можем ли мы признать, что в настоящее время он *лучше действует*, чем в средние века? В настоящее время мы имеем умных ученых, умных администраторов, но имеем мало людей, железная воля которых не сгибалась бы в борьбе с личными или с идейными врагами.

В настоящее время нет людей с такой волей, как у Григория VII и Иннокентия III, старавшихся возвести над светской властью стоящую выше всякой национальности папскую власть от Бога, нет людей с волей крестоносцев, из которых только едва ли одна десятая доходит до конечной цели — до освобождения гроба Господня, нет людей с волей альбигойцев и других еретиков, предпочитавших костер отказу от своих убеждений.

Но развитие этого мужского начала — воли — не может характеризовать только средневековье. Это развитие воли мы находим и в эпоху Возрождения, в которой тоже имеет место приоритет воли над интеллектом.

Полная характеристика средневековья дается одновременным развитием как мужского начала — воли, так и *женского — чувства*. Эпоха Возрождения была началом падения этого второго начала. Человечество лишается своего глубокого чувства, которому служила воля, человечество становится только волевым, для того, чтобы потом сделаться интеллектуальным.

Молодость сменяется зрелым возрастом для того, чтобы потом обратиться в старость.

§ 2. Воля и чувство

Теперь обратимся к *женскому началу — чувству*.

Над волей стоит чувство, так как именно в чувстве заключается сама жизнь.

В то время, как воля определяется только ее напряженностью, для интеллекта и эта оценка является неопределенной, так как напряженность интеллекта относится опять к воле, связанной с интеллектом. Для чувств

же мы имеем не только степени их напряженности, но также и большую и меньшую их высоту, так же как для звука. Если интеллект подчинен воле, то сама воля, если она не *слепая*, должна двигаться чувством. Э. Гартман абсолютом считает соединение воли с интеллектом, но правильнее было бы говорить о соединении воли с чувством, т.е. мужского начала с женским, причем приоритет следует отдать не первому, а второму.

Нет, собственно говоря, *злой воли*, а есть *злое чувство*; оно и управляет волей, оно как бы соблазняет волю, как Ева — Адама, и тяжесть первородного греха лежит больше на Еве, чем на Адаме.

Многие склонны принижать все женское и смотреть на женщину, как на существо низшего порядка.

Но и здесь я решаюсь высказать парадоксальную мысль. Женщина мыслит меньше, чем мужчина: она, бесспорно, меньше действует, но она *больше чувствует*.

Проанализируйте душевный мир женщины, и вы увидите богатые переживания не в области *волевой*, но в области *чувственной*, самые тонкие нюансы этих переживаний, которые вы не найдете у мужчины.

Можно ли спорить с тем, что женщина чувствует тоньше и глубже, чем мужчина, что любовь женщины, лишенная порывистости мужского чувства, и благороднее, и тоньше, и постоянной? Можно ли спорить с тем, что именно на долю женщины выпало наиболее прекрасное чувство — безграничная и готовая на все жертвы любовь к ребенку?

И средневековая мысль и еще более — средневековое чувство смогло сделать то, что не смогла сделать античная мысль, а именно — поставить на пьедестал чувство и женщину, как его носителя.

В средние века мужчина—рыцарь приводит свою могучую волю на служение своей даме, на служение чувству.

Только средние века создают прекрасный образ Божией Матери, только они начинают понимать, что в глубине человеческого *сердца*, которым более всего управляет женщина, заключается и наиболее ценное в человеке.

И вот, если мы над волей поставим чувство, то здесь высказывание окажется еще более категорическим: ни мы, ни люди эпохи Возрождения не чувствуем так, как люди средних веков.

Если когда-либо человек глубоко чувствовал, то только в средние века.

Все эти титанические чувства античных героев и наши, быстро улетающие в сутолоке жизни, чувства — это пигмеи в сравнении с теми, которые испытывал крестоносец или монах средневекового монастыря — св. Бернард или св. Франциск.

§ 3. Средневековая мораль

Враги средневековья! Не спешите выставить грубость и жестокость нравов, снижающих уровень нравственности среднего человека. Едва ли можно согласиться с тем, что показателем нравственного уровня человечества должно служить *средне-арифметическое*, а не *максимум*. Можно сказать, что человечество в целом решает моральную проблему, и решение ее определяется именно максимумом — тем наивысшим подъемом, на который человечество подымается не в целом, а только в *ведущих личностях*. Кульминационная точка морального подъема там, где, как крест готической колокольни, возносится над обыденностью *святость*, где ярким светом горит моральный идеал, достигаемый только избранныками.

Высшая мораль — это не рассудочная мораль долга, это *мораль подвига*, представляющая мораль чувства, возносящегося над интеллектом и подчиняющего себе волю.

И это чувство в античном мире, в этом младенчестве человечества, еще не вспыхнуло. А в настоящее время оно уже погасло, и душа наша как улитка замкнулась в тесной раковине. И для нас теперь далека и непонятна душа средневекового человека. Все наиболее прекрасное, все то, что призывало к жизни человеческое многострадальное и вместе с тем вкушающее небесные радости сердце — все это наш иссушающий рассудок старается объяснить экономическими факторами, более близкими современным банкирам, чем средневековым рыцарям.

Забудьте настоящее и на мгновение вернитесь вспять, в прошлое, уже заволоченное туманом. Жанна д'Арк для наших современников только эпилептика, страдающая галлюцинациями. Забудьте на время психиатрический подход. Прочитайте все, сообщаемое свидетелями, все протоколы суда над ней, с ее мудрыми кроткими ответами и перед вами встанет во всей красоте этот блестящий образ средневековья, и я спрошу, может ли настоящее время создать что-либо подобное этому образу?

Да разве в настоящее время может кто-либо так чувствовать, как Владимир Мономах, послание которого Олегу Святославовичу представляет один из прекраснейших перлов средневековья?

Он зовет во имя Христа своего врага к примирению, он прощает ему смерть своего любимого сына, павшего в сражении, как прекрасный полевой цветок от безжалостной косы. Или прочтите слово епископа Олесницкого к королю Казимиру, призывавшего последнего к примирению со злейшим врагом — Миханлом Сигизмундовичем.

Только невежды могут видеть в средневековье только слова и слова, нагромождаемые бесплодной схоластикой. Именно в средневековье менее всего *учились говорить*. Только от избытка сердца говорили уста средневекового человека.

Да, именно у него был избыток сердца, а не ума. Ни в схоластических рассуждениях, ни в административных актах с их испорченной латынью, ни в бездушной риторике Цицерона. Но под грубой оболочкой мы ясно чувствуем биение средневекового сердца, бившегося в груди рыцаря, шедшего через самые ужасные лишения и страдания ко гробу Господню.

И как много тупого непонимания у тех, кто видит в крестовых походах только жестокость и бесчинства толпы, только зверства при взятии Иерусалима, забывая, что из большой армии только кучка дошла до Иерусалима!

Поищите такое лицо, моральный облик которого мог бы сравниться с обликом Людовика Святого. Не представляет ли это удивительное соединение храбрости, рыцарского благородства, милосердия и святого подвижничества — пожалуй, лучшее, что могло произвести человечество с начала средних веков? Не бледнеют ли перед ним и все наши научные открытия, благодаря которым мы чувствуем себя проникнувшими в самые недра мироздания? Не бледнеют ли вместе с тем картины Рафаэля, музыка Шопена и Бетховена?

Вы будете говорить о развратных средневековых папах, но прежде всего напомним, что рекорд здесь побит не средневековым, а эпохой Возрождения. Последнее дало нам Борджиа, Средневековые же дало таких, как Иннокентий III, равного которому мы уже не находим в позднейшие времена. Хотя и суровой, но глубокой стойкой моралью проникнута вся история защиты им прав несчастной супруги французского короля Филиппа II. Правда, не все средневековые духовные лица таковы, но из их среды высоко поднимаются личности, готовые на всякие жертвы при защите правды, при служении Богу.

Вот вам Эвес, епископ Шартрский, который стойко идет против Филиппа, добивавшегося развода с Бертой, чтобы жениться на другой. “Я, — говорит он гордо, — пожелал бы лучше быть брошенным между жерновами, чем скандализовать слабых и невежественных”.

И что же? Он в конце концов приводит короля к раскаянию.

§ 4. Папство.

При оценке папства следует различать сам идеал высшей теократической власти и его осуществление. Никто не будет спорить с тем, что этот высокий идеал не мог осуществляться полностью. Земные условия таковы, что чистая власть от Бога не может осуществляться. Идеал оказывается слишком высоким, и человечество срывается при его осуществлении. Душа, поднявшись очень высоко, падает с этой высоты в темную пропасть. Со святостью всегда живет и грех, и чем выше святость, тем ниже опускается грех. Маятник колеблется с большей амплитудой. Не содержит ли всякая власть элементы имморальности?

Не правы ли частично анархисты, объявляя всякую земную власть аморальной?

Конечно, дальнейший их вывод о возможности существования *безвластия* — детская наивная утопия. Но если согласиться с этим, то это можно отнести только к земной власти, но не той, которая идет от Бога, т.е. не к теократической.

Не лучшие ли властители те, которые не избираются народом, а ставятся самим Богом, т.е. вернее те, которые считают себя ставленниками Бога и отвечают за народ только перед Богом?

Вглядитесь в мумии фараонов, этих божеских ставленников — Сети, Рамзесса и других. Не говорят ли их лица о чувствах, ими владевших, о том, что над каждым из них был только Бог, что только перед Богом они отвечают за вверенный им власти и заботам народ?

Положите на одну чашу весов Борджиа (хотя он и не принадлежит средневековью) и других пап-развратников, а на другую всю ту пользу, которую принесли папы, стоявшие выше грубых и жестоких феодалов и нравственно на них влиявшие, и вторая чаша перетянет. Уже один “Божий мир”, шедший от папы и удерживавший феодалов от взаимной резни, указывает, в каком направлении могла бы пойти папская власть, если бы ей удалось приобрести всю полноту своей божественной власти над воюющими королями и феодалами. Вне сомнения, такое теократическое интернациональное государство сделало бы возможным уничтожение международной войны больше, чем Лига Наций и ООН.

§ 5. Инквизиция.

Самое тяжелое обвинение, бросаемое средневековью, это *инквизиция*. Но и здесь рекорд побивается эпохой Возрождения. Больше всего жертв дает не инквизиция против альбигойцев XIII века, а инквизиция против маранов (евреев), протестантов и колдунов XVI и XVII веков. Вообще, не средние века, а эпоха религиозных войн отличалась нетерпимостью.

Вспомним процесс Абеяра, взгляды которого на Лица Божественной Троицы вне сомнения еретичны. Но ведь устранение его от преподавания нельзя приравнять к сожжению на костре, например, Сервета и притом кем? — реформаторами-кальвинистами. Согласимся, что в позднейшее средневековье инквизиция обнаруживает крайнюю жестокость. Но во время ереси альбигойцев *всему* христианству грозила страшная опасность. Манихейское учение о двух богах — добром и злом — Ормузде и Аримане Заратустры — доводило это дуалистическое мировоззрение до поклонения дьяволу. Другие секты, хотя и правильно осуждавшие Клир, *разрушали Церковь*, падение которой тогда вело к падению христианства.

Вспомним, что даже кроткий Франциск Ассизский, этот сверх-христианин, согревавший своим телом прокаженного и говоривший проповеди братьям волкам, стоял за решительные меры в борьбе с еретиками.

Нет, если уже кого-либо и обвинять в жестокости, так не средние века, а именно настоящее время, хвалящееся своей гуманностью.

§6. Средневековая вера.

Но, скажете вы, средние века представляют одно заблуждение, они верят в то, во что мы уже не можем верить. Ведь это царство сплошного суеверия и фантастических, не имеющих под собою почвы образов! Я не намерен сейчас разбирать, что в религиозных представлениях можно считать истинным или имеющим шансы оказаться таковым, и что представляет безусловное заблуждение. Я и здесь пойду по пути, заставляющему многих покоробиться и отвернуться от меня. Я поставлю *жестокый* вопрос, ответ на который опять дает заключение в пользу средневековья.

Верно ли то, что человечество было наилучшим именно тогда, когда оно лучше всего знало действительность? Не кроется ли доля правды в том, что говорит Пушкин: "тьмы низких истин нам дороже — нас возвышающий обман". Пусть содержание религий — один призрак. Но что получается при лишении человечества этого призрака? Мы в конечном счете потеряли больше, чем если бы лишились всех наук, ибо для *чувств* последние дают меньше, а ведь чувство и есть сама жизнь.

Впрочем, эта мысль смягчается следующим замечанием.

Неужели вся *целиком* религиозная мысль только ошибалась? Неужели все это только сплошной призрак и ничего более, в то время как учение Бора о строении атома и все другие учения, друг другу противоречащие, это только чистые истины, так что в учении об общем принципе относительности мы уже окончательно становимся на путь решения основных мировых загадок?

Не содержится ли, наряду с призраками, во всем этом прекрасном мире средневековых мысли и чувств нечто еще такое, что неотделимо от призраков и что *теперь* мы уже не можем принять только вследствие того, что лишились соответствующего органа познания, находящегося при этом более в сердце, чем в голове?

Да и не покажется ли через 1000 лет все то, во что мы так горячо верим, тоже призраками, как теперь нам кажется то, что было предметом веры средневековья?

Но, если это так, то и в средневековых призраках живет истина, и эта неуловимая для нас и *утраченная нами* истина получает особенно высокую цену, так как за ней идет и высокое чувство и связанная с ним воля, ведущая к подвигу.

§ 7. Мистика.

Средневековые больше чувствовало, чем мыслило. Говорят о сухости средневековой мысли. Но это совершенно неверно. Схоластика оперирует не мертвыми символами, как мы, а *живыми понятиями*, за которыми она видит живые образы, все озаренные *живым чувством*. В темную келью схоластика проникает пучок ярких солнечных лучей и освещает его пыльные фолланты, заполненные схоластическими абстракциями и силлогизмами. Мысль его каждую минуту возвращается к Богу, который для него и альфа и омега, и душа его всегда переполнена интеллектуальной любовью к Богу, более горячей, чем та, о которой говорит Спиноза в своей этике.

Промежуточным звеном между средневековым религиозным чувством и средневековым разумом—схолистикой стоит средневековая *мистика*. Она ищет пути, ведущие к соединению с Богом.

Она анализирует последовательно ступени, по которым душа подымается к Богу.

Блаженный Августин дает свою исповедь — историю души язычника, рядом душевных переживаний приходящего к христианской вере.

Он указывает на то, что люди, удивляясь ширине морей, величине звездного неба и высоте гор, забывают о более интересном и более важном — о том, что находится в *душе*.

Он является истинным основоположником современной философии с психологией, чуждой и античной мысли, и средневековой мистике Бонавентуры, Гюго и др., и, наконец, мистике эпохи Возрождения Бёмэ. Таулера и Силезия.

Мистические средневековые эксперименты бесспорно были первыми экспериментами Опытной Психологии. Только средневековые научило человечество изучать душу, которая для античного мыслителя была лишь конгломератом круглых атомов или аристотелевской *формой тела*, т.е. жизненной силой.

Пусть Бог только призрак. Но и тогда остается великая заслуга за средневековьем. Ведь, во-первых, этот призрак тогда остается все-таки в *душе*, во-вторых, он дает сильные духовные переживания и их анализ дает богатейший материал, относящийся к психологической жизни.

Ведь для психолога совершенно не имеет значения, имеют ли реальную основу переживания — скорбь и радость. Ведь наши сновидения, окружающие нас роем призраков, заставляют нас страдать и радоваться не меньше, чем наяву от реально существующих предметов и людей.

В обоих случаях и скорбь, и радость в равном мере могут входить в лабораторию психологических наблюдений и опытов. И совсем не важно, приводит ли самоуглубление к зрению реально существующего Божества, важно то, что это самоуглубление ведет душу по новому, чуждому

античной мысли пути, по пути разнообразных психических переживаний, с которыми переплетаются яркие и смутные образы и понятия.

Пусть средневековые – это только сновидение, но согласитесь, что это сновидение *прекрасно*, что единичному человеку не суждено видеть таких сновидений. Евангелие – это только начало всей прекрасной драмы, которую продолжает средневековые. Если вся эта драма была во сне, то сон этот оказался для человечества имеющим больше значения, чем бодрственная жизнь настоящего времени, эта жизнь бесполой души старика, отгоняющего от себя прошлое как одно лишь призрачное заблуждение.

§ 8. Искусство.

Тем же высоким чувством охвачена и душа средневекового художника. Никто не будет спорить, что техника средневековья уступает таковой эпохи Возрождения, а тем более современной. В средние века не было ни Рафаэля, ни Репина. Мало похожи на живых людей святые на иконах в их неестественных позах.

Можно ли сравнить Моисея Микеланджело с раскрашенными деревянными статуями в средневековых храмах? С точки зрения техники средневековые оказываются здесь на очень низкой ступени.

Но возьмите другую мерку.

Во всех этих технически несовершенных художественных творениях следует стараться уловить чувство художника, и если это удастся, то открывается дивный мир средневековых переживаний, который светит в упомянутом выше письме Владимира Мономаха.

Всмотритесь в Троицу и святых Рублева. Творческое воображение этого глубоко верующего художника создавало эти скользкие по облакам фигуры и именно в тех позах, которые чужды земной жизни, но в которых они живут в мире божественных сказок, в мире этих легкокрылых ангелов со сказочно нежными и тонкими кистями рук.

И старые школы византийского письма скорее возбуждают религиозное чувство, чем прекрасно выполненные картины Васнецова и Нестерова, к которым, несмотря на гениальность мастеров, не может уже вернуться погасающее религиозное чувство.

Но есть ли что-нибудь прекрасней готической архитектуры? И именно в ней, а не в скульптуре и живописи, наиболее ярко выявляются средневековые мысль и чувство, возносящиеся вместе с остроконечными колокольными к небесам, к бесконечности, к Богу. В *позднейшей пламенной готике* о том, о чем говорит все здание, говорят и все мельчайшие его детали.

Вы скажете, что все это очень однообразно, что постоянно повторяется одна и та же мысль. И я согласен с тем, что *интеллектуальное* содержание здесь бедно. Но как богато эмоциональное! Одни и те же слова

можно петь на различные мотивы, и одна и та же, даже бедная, мысль может рождать различные полосы чувственных переживаний и связанных с ними образов.

И то же следует сказать о средневековой поэзии. Ведь все те же евангельские проповеди и события повторяются и в молитвах, и в религиозных стихах. Содержание бедно. Но как богат в них мир душевных переживаний!

Христос и Божья Мать являются св. Бернарду, Франциску и другим, но всякий раз в другом виде.

И в мрачных проповедях св. Бернарда, звучащих как погребальный колокол, и в кротких проповедях Франциска мы слышим разные мотивы, мы улавливаем разные чувства.

В прекрасной средневековой песне "Stabat mater dolorosa"¹, как и в Тронце Рублева, ярко светит средневековая верующая и ищущая подвига душа.

Ярче, чем самое вдохновенное стихотворение настоящего времени, она воскрешает, с одной стороны, на кресте образ подвижника, приносящего себя в жертву идее, с другой стороны — страдающую за сына мать, идущую вместе с сыном на великий подвиг.

§ 9. Эмбриология современной науки.

Я все говорил о воле и чувстве. Я указывал на то, что интеллектуально средневековые следует поставить ниже эпохи Возрождения. Но можем ли мы сказать, что здесь только *пустое место*?

Мы можем непосредственно проследить жизнь ребенка начиная с его рождения, но можем ли мы сказать, что до этого *ничего не было*? Психологический подход к истории подводит нас к вопросам эмбриологии идей. И все основные научные идеи имеют свою, так сказать, *утробную жизнь*.

Математические идеи сперва рождаются в форме смутных *метафизических* идей и только затем развиваются в математические, ищущие себе обоснования.

Эти эмбрионы всегда вначале имеют *эмоциональную окраску*, вызываются чувственными переживаниями. Сперва бесплодные, без всяких выводов, они подвергаются только анализу и пока ничего не объясняют. Чтобы они приобрели объясняющую силу, необходимо их созревание. Более того, необходимо чтобы в борьбе за существование они взяли верх над другими многочисленными эмбрионами-идеями, поднимающимися вместе с ними. И эти другие должны заглухнуть, как глухнет молодой, из которого дорастают до большого дерева только избранные.

Но тонкое исследование средневековой мысли *принадлежит будущему*.

Ведь здесь приходится выслеживать мелкие ростки, порой очень мало похожие на те растения, в которые они потом обратятся.

И я уверен, что только тогда вместо постоянно подчеркиваемой бедности откроется *богатство идей*, правда, находящихся только в эмбриональном состоянии. В иных случаях обнаруживается возможность *экстраполирования*, т.е. построения дальнейшего возможного развития задержанных в развитии идей.

Обычно стараются представить средневековую мысль совершенно *бессодержательной*, оперирующей только словами. Но здесь глубочайшее непонимание средневековья, которое оперирует не словами, а понятиями. Я скажу более, что именно средневековье богато понятиями, что оно владеет тонкими их различиями, которые теряются следующими эпохами. Силлогистические операции рационалистов оказываются возможными только при *упрощении* этих понятий, при исключении всех тех плоскостей существования, на которых оперирует схоластическая мысль.

§ 10. Рождение бесконечности.

Укажем наиболее существенную заслугу средневековой мысли. Это – создание научного понятия о *бесконечности*, причем в этой бесконечности средневековая мысль находит себе *смерть*. Она в начале, как античная мысль, живет *конечным*, живет на земле, на которую опускается Бог, который страдает, как человек, но, оставив землю, не порывает связь с ней.

Дантова вселенная с ее приближающимися к Богу сферами, со всей этой мировой гармонией, управляемой ангелами, так не похожа на современную вселенную – на этот мрачный ад, в котором гармоническое правильное движение планет является только исключением, а правилом – беспорядочное движение звездных потоков, в недрах которых происходит непрерывная гибель звезд и конечная судьба которой – тепловая смерть.

Конечно, в дантову вселенную теперь уже никто не верит. Музыка сфер перестала звучать в наших ушах. Но согласитесь, что эти образы были прекрасны, и душа, их создавшая, была тоже прекрасна. И вот кристаллические сферы разбиты, и открылись пути к бесконечности...

Но вместе с тем Бог ушел от человека, он устремился ввысь, куда устремляются крыши готических колоколен и вместе с ними и душа средневекового человека.

Средневековая мысль должна была умереть вместе с исчезнувшей готической архитектурой. Но звук от оборванных струн слышался еще долго... И в настоящее время он еще слабо звучит, когда мы забываем о сутолоке современной жизни.

В полумраке средневекового мышления медленно совершается процесс *рождения актуальной бесконечности*, которая мыслится сначала Богом, оказывающимся вне аристотелевых категорий, выше субстанции, а

потому и без формы, но это уже не несовершенство, как для античной мысли, а наоборот, признак высшего совершенства.

За бесконечностью Бога выдвигается бесконечность его творений, так как бесконечной причине отвечает бесконечный эффект. Таким образом, мысль подходит к бесконечности вселенной. Но средневековая мысль все-таки не выходит за границы античных кристаллических сфер и не решается объявить *вселенную бесконечной*. Даже Коперник еще не вполне освобождается от этих сфер.

Путь же в бесконечность открывает только Бруно, который уже вполне подходит к современному представлению вселенной, по мнению которого звезды такие же системы, как наше солнце, окруженное планетами.

Следующий этап — это *математическая бесконечность*. Николая Кузанского следует отнести к промежуточной степени, на которой математизируется космическая бесконечность.

Бог и его творение сперва только чувствуются, затем начинают мыслиться как сверхлогическая бесконечность, которая затем переносится в область логического.

Мы видим, что *колыбелью* даже самых абстрактных идей является *чувство*. Из него рождается и воля, приводящая к действию, из него рождается и мысль.

Мы видим, что средние века, которые главным образом принадлежат чувству, были и колыбелью мысли. Наши абстракции, бледные как вечерний туман, постепенно обращающиеся в бессодержательные символы, которыми работает современная наука, как фабрика работает колесами, — раньше были живыми, заставлявшими биться сердца, чувствами.

Поймем же, наконец, средние века, увидим в них юность человечества и пожалеем в них многое, что мы жалеем в нашей ушедшей и никогда уже не возвращающейся юности.

I. МАТЕМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛИ.

В воскресенье, 1 апреля состоялось, при большом стечении публики, общее собрание Общества Естествоиспытателей при СКГУ, на котором были сделаны доклады, посвященные анализу ума и работы *вычислителей* и *математиков* в собственном смысле.

Ознакомление широкой публики с этими вопросами имеет важное значение вследствие переоценки феноменальных вычислителей в ту или другую сторону.

Основное положение, защищаемое в моем докладе "Психология математического мышления", состоит в том, что феноменальные вычислители, вроде Даманди и Иноди, признаются *патологическими* типами математического ума, в котором все психические элементы, необходимые для математика, даны, но только в ненормальных пропорциях: с гипертрофией некоторых из них в ущерб другим элементам числовой памяти, причем более воспринимающей, чем удерживающей. В подтверждение этого, я описал по своему самонаблюдению процесс собственной умственной работы, в котором выявились те же способности, но в несравненно меньшей дозе, чем у Шишкина, и в большей, чем у нематематиков. Демонстрирование воспроизведения большого числа знаков числа π сделано не столько для выявления хорошей числовой памяти у математика-профессионала, как для ознакомления с процессом воспоминания при нормальной *ассоциативной* памяти, резко отличающейся от *конкретно-зрительной* памяти Н. Н. Шишкина, демонстрировавшего такой же опыт.

Так как сила феноменальных вычислителей лежит в их числовой памяти, то в докладе главное внимание обращено на анализ памяти математика. Указано, что наряду с вычислителями типа Н. Н. Шишкина существует еще другой тип вычислителя, не обладающего феноменальной зрительной числовой памятью, а особой памятью на числовые отношения, быстротой в вычислениях, значительно превосходящий первый тип. В то время, как вычислители этого второго типа не могут экспериментировать с рядами 5-6-значных чисел, читая их прямо, в обратном порядке, по диагонали, по спирали, — вычислители первого типа не могут выдержать "строчки", т.е. быстро идущего за словесным заданием производства ряда действий над двухзначными числами. Присутствовавший на докладе В. С. Розенталь, обладающий редкой способностью быстрого счета, демонстрировал свои опыты быстрого счета, выдерживая длинную строчку, умножая пятизначные числа в 30 секунд, складывая длинный ряд пятизначных чисел мгновенно и т.д.

Дальше в докладе был произведен психологический анализ самого процесса математического мышления, обнаруживший огромную роль подсознательной работы в выборе и проверке гипотез, всплывающих затем за *поры* сознания. Проведена параллель между математиком и философом, как типом *сознательного* мыслителя. Исследован математический ум в отношении быстроты, остроты, глубины и широты. Выявлены три основных типа математического ума: алгебраический, геометрический и аналитический (иначе – логический), причем указаны “симбиозы” их способностей: первого с способностями *филолога*, второго – *художника*, третьего – *философа*. Присутствовавшим на докл. проф. А. И. Ющенко были даны ценные указания по предмету доклада как относительно типов ума, нормального и патологического, так и относительно некоторых результатов психологического анализа докладчика, в особенности относительно *интерпретации*, которую проф. А. И. Ющенко понимает, как процесс *более сложный*, чем думает докладчик, включающий и подсознательные элементы.

Большой интерес возбудил доклад ассистента Н. М. Нестеровича о приемах быстрого счета: умножения, возведения в степень, извлечения корней, как нечетной, так и четной степени. Эти приемы употребляются вычислителями, преимущественно имеющими математическое образование, как например, Н. Н. Шишкин. Эти приемы имеют и некоторое методическое значение, и знание их полезно и для преподавателей.

Такой доклад, конечно, не следует понимать в смысле разоблачения, аннулирующего способности феноменальных вычислителей, которые в глазах математиков от этого становятся не менее интересными, являясь своего рода “математическими артистами”, соединяющими свои удивительные способности с *эстетическим* элементом красивых приемов вычислений.

II. Эволюция понятия функции в прошлом и настоящем

1. Метафизическим предком функции, притом сперва *функции от времени*, является форма Дунса Скотта¹ с формальностями, разрешающая спор о том, какой из аристотелевских элементов субстанции – материя или форма – изменяется при изменении субстанции. Формальности или формы форм при математизации становятся значениями *переменного*.

2. Впервые это *метафизическое* понятие подвергается математизации у схоластика Орезма² (ученика Оккама) в его учении о *широтах* и *долготах*.

3. Полную математизацию следует относить не к Декарту, а к Ньютону³, которым флюэнта мыслится как функции универсального независимого переменного – *времени*.

4. Лейбницианская⁴ функция это то, что строится для точки кривой. Такое понимание является *конструктивно-геометрическим*.

5. Первоначальное эйлеровское⁵ понимание – это *конструктивно-аналитическое* (функция=выражение).

7. Принцип непрерывности Эйлера (т.е. продолжаемость графика за заданную дугу) соединяет оба направления Ньютона и Лейбница, т.е. динамическое и конструктивное.

7. Разрывные эйлеровские функции подводят к *графическому* пониманию функции.

8. Динамическое⁶ понятие функции от x (то, что меняется вместе с x), происходящее от флюэнты, никогда не является в чистом виде, а всегда соединено с конструктивным.

9. К понятию функции, как соответствия, наука подходит только после развития теории множеств, причем даже у Дирихле⁷ оно не вполне выявлено и точная формулировка впервые появляется у Таннера.

10. Необходимость выхода из чисто конструктивного понятия несомненно сознается уже в ходе споров о функциях, выражаемых тригонометрическими рядами.

11. Понятие о *многозначной функции* вещественного переменного вполне выявляется только после создания Коши теории функции комплексного переменного.

12. Сужение понятия функции выставлением требования ее продолжаемости находим у Эйлера, Моргана⁸ в его постулатах и Вейерштрасса⁹ в аналитическом продолжении функции.

13. Понятие функции Вейерштрасса требует коренных изменений в теории дифференциальных уравнений, созданной на основании конструктивного ее понимания.

14. То, что следует признать за решение или интеграл при конструктивном понимании, уже может не явиться таковым при вейерштрассовом.

15. Современная теория функций вещественного переменного, расширяющая понятие функции устранением ряда подразумевавшихся свойств (например, существования производной), ведет к изучению *патологии* дифференциальных уравнений, в которой и само дифференциальное уравнение оказывается имеющим бесконечное число значений (в зависимости от кривых Q , “по которым” взята производная), решение же может содержать произвольности высших порядков. (Например, вместо произвольных *постоянных*—произвольные *функции*).

16. Интуитивистическая точка зрения Вейля¹⁰ суживает понятие функции и, ставя ее в зависимость от ее построимости, вносит в ее понятие *время* и тем сближается с ньютоновским.

17. Пропозиционную функцию в математической логике можно рассматривать как дальнейший путь к обобщению понятия функции.

III. ПРИНЦИП ДОСТАТОЧНОГО ОСНОВАНИЯ В МЕХАНИКЕ И В ГЕОМЕТРИИ

1. Принцип достаточного основания, сформулированный Лейбницем и Вольфом, как метафизический принцип, допускает математическую формулировку и в ней – применения к механике и геометрии.

2. Прежде всего заслуживает внимания приложение его к выводу правила параллелограмма сил.

3. При лейбницианском определении параллельных, является возможным логический вывод аксioms о параллельных с помощью принципа достаточного основания.

4. То же следует сказать о теории конгруэнций и подобия; за теорией подобия К. Вольфа остается хотя бы методическое значение.

5. Закон инерции, согласно Эйлеру, является следствием принципа достаточного основания.

6. Тот же принцип находит себе применение в теории удара.

БИБЛИОГРАФИЯ

(По изданию: С.Е. Белозеров, С.И. Миссерова, В.А. Ткачева. Механико-математический факультет (библиографический сборник). Вып. 2. Ростов-на-Дону. 1972.)

1898

Задачи по математике. Варшава. 1898–1899. Литографированное издание.

1899

Задачник по дифференциальному и интегральному исчислению. Харьков. 1899–1900. С. 197. Литографированное издание.

Задачи по приложениям дифференциального и интегрального исчислений. Варшава. 1899–1900. 384 с. (литогр.).

1900

Задачи по дифференциальному и интегральному исчислениям. Варшава. 1899–1900. 197 с. (литогр.).

Задачи по интегрированию функций. Варшава. 1900. 149 с. (литогр.).

1902

К теории абелевых интегралов. Протоколы заседаний и труды общества естествоиспытателей при Варшавском университете. XIII. 1902 // Протоколы отделения физики и химии. № 1. С. 3 (не напеч.).

Об одном обобщении теоремы Абеля // Сообщения Харьковского математического общества. Серия 2. 1902. Т. 7. № 6. С. 268–283.

Об инвариантных преобразованиях ультраэллиптических интегралов // Сообщения Харьковского математического общества. Серия 2. 1902. Т. 8, № 1–3. С. 1–67.

1903

Задача по дифференциальным и интегральным исчислениям. Издана студ. М. Верника. 1902/03. Варшава. 1903. 210 с.

О некоторых биномиальных интегралах, приводимых к эллиптическим и ультраэллиптическим интегралам. Варшава. 1903. 10 с.

О приведении абелевых интегралов к ультраэллиптическим интегралам первого класса // Известия Варшавского политехнического ин-та. 1903. Вып. 1. С. 1–87.

1904

К учению Д. Бернулли о нравственном имуществе и нравственном ожидании // Протоколы заседаний и труды общества естествоиспытателей при Варшавском университете. XIV, XV. 1903–1904. Протоколы отделения физики и химии. № 1. С. 8–11.

Систематический сборник элементарных упражнений по дифференциальному и интегральному исчислениям. Вып. 1. Теория пределов, дифференцирование и интегрирование функций. Варшава. 1904. 426 с.

То же на польском языке.

1905

- О приведении абелевых интегралов к низшим трансцендентным // Известия Варшавского политехнического института. 1905. Вып. 1. С. 1–96.
То же: Известия Варшавского политехнического института. 1905. Вып. 2, XV. 407 с.
- Об определении в конечном виде абелевых интегралов // Математический сборник. 1905. Т. 26. Вып. 1. С. 51–94.

1906

- О некоторых биномиальных интегралах, приводимых к эллиптическим и ультраэллиптическим интегралам // Протоколы заседания и труды общества естествоиспытателей при Варшавском университете. XIV, XV. 1903–1904. Протоколы отделения физики и химии. № 7. Варшава. 1906. С. 42–51.
- О приведении абелевых интегралов к низшим трансцендентным. Варшава. 1906. XV. 407 с.

1907

- Математические и умозрительно-философские исследования основного психо-физического закона, Варшава. 1907. 52 с.
- О законе непрерывности // Вопросы философии и психологии. 1907. Кн. 87 (2). С. 168–184.
То же: М. 1907. 19 с.
- О кривизне плоских кривых. Варшава. 1907. 32 с.
- О некоторых арифметических свойствах регулярных интегралов линейных дифференциальных уравнений // Математический сборник. 1907. Т. 26. Вып. 2. С. 130–198.
- Об одном обобщении дифференциального уравнения Эйлера // Известия Варшавского политехнического института. 1907. Вып. 2. С. 1–15.
- Общие исследования, относящиеся к интегрированию в конечном виде дифференциальных уравнений первого порядка // Статья 1. Сообщения Харьковского математического общества. Серия 2. 1907. Т. 10. № 1. С. 34–64.
- Общие исследования, относящиеся к интегрированию в конечном виде дифференциальных уравнений первого порядка // Статья 2. Сообщения Харьковского математического общества. Серия 2. 1907. Т. 10. № 5, 6. С. 231–270.
- Систематический сборник элементарных упражнений по дифференциальному и интегральному исчислению. Вып. 1. Теория пределов, дифференцирование и интегрирование функций. Варшава. 1907. 425 с.

1908

- Курс дифференциального интегрального исчисления. Ростов-на-Дону. 1908. Листы 1–9 (литографированный курс).
- О кривизне плоских кривых // Известия Варшавского политехнического института. 1908. Вып. 2. С. 1–32.

О преобразовании ультраэллиптических интегралов 1-го класса формы

$$\int \frac{cy + D}{\sqrt{R(y)}} dy = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{R(x)}} dx \quad // \text{Сообщения Харьковского математического}$$

общества. Серия 2. 1908. Т. 10. № 5-6. С. 202-216.

Практические упражнения по аналитической геометрии. Новочеркасск. Изд. студентов Донского политехнического ин-та. 1908.

Психологии математического мышления // Вопросы философии и психологии. 1908. 19. Кн. 4 (94). С. 491-534.

1909

Аналитическая геометрия. Курс лекций. Варшава. 1909. (литографированный курс).

Арифметика теоретическая. Лекции, прочит. на 1 курсе Высших женских курсов при Варшавском университете. [Варшава]. 1909. С. 50 (литогр.).

Василий Афанасьевич Анисимов. Некролог // Известия Варшавского политехнического института. 1909. С. 1-14 с портр. Список печатных трудов 28 назв.

Курс дифференциального и интегрального исчисления. Варшава. 1909. Литографированное издание.

Курс дифференциального и интегрального исчислений. Лекции, читанные в Донском политехн. ин-те в 1908-1909 гг. Новочеркасск. Изд. студ. Джевулского. 1909. 398 с.

Курс дифференциального и интегрального исчислений. Новочеркасск. 1909. Листы 10-14. Литографированное издание.

Курс дифференциального и интегрального исчислений. Ростов-на-Дону, лит. И. Я. Алексанова. 1909. 224 с. с черт.

О геометрических построениях с помощью алгебраических кривых. Варшава. 1909. 23 с.

О спрямляемой сумме дуг алгебраической кривой // Известия Варшавского политехнического института. 1909. Вып. I С. 1-6.

Об интегрировании линейных дифференциальных уравнений в конечном виде // Варшавские университетские известия. 1909, № 8. С. 1-16; № 9. С. 17-48.

Об одном приложении исследований Брю и Букэ, относящихся к дифференциальным уравнениям первого порядка // Известия Варшавского политехнического института. 1909. С. 1-5.

Об одном свойстве абелевых интегралов с проводящейся системой периодов // Известия Варшавского политехнического ин-та. 1909. С. 1-7.

Общие исследования, относящиеся к интегрированию в конечном виде дифференциальных уравнений первого порядка // Статья 2. Харьков. 1909. 40 с.

Две теоремы, относящиеся к алгебраическим кривым // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Варшавском университете. XXII. 1910, № 1–2. Варшава. 1910. С. 54–71.

Лекции по интегральному исчислению. Варшава. 1910. 215 с.

О геометрических построениях с помощью алгебраических кривых // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Варшавском университете. XXI. 1909–1910. № 4. Варшава. 1910. С. 180–202.

О геометрических построениях с помощью линейки при условии, что дана неизменная дуга круга с центром // Вестник опытной физики и элементарной математики. 1910. № 522 (44 семестр № 6). С. 137–146.

О некоторых арифметических свойствах решений алгебраических дифференциальных уравнений // Математический сборник. 1910. Т. 27. Вып. 3. С. 360–406.

Об интегрировании в конечном виде линейных дифференциальных уравнений. Варшава. 1910. 40. 344 с.

Об интегрировании линейных дифференциальных уравнений в конечном виде // Варшавские университетские известия. 1910. № 1. С. 49–96; № 2. С. 97–112; № 3. С. 113–152; № 4. С. 153–184; № 5. С. 184–216; № 6. С. 217–224; № 7. С. 225–232; № 8. С. 233–248; № 9. С. 249–280.

[Математические работы – в Annales de l'Institut Polytechnique de Varsovie. 1900–1901]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1910, t.18, p.2, p.128–130.

[Математические работы – в Annales de l'Universite Imperiale de Varsovie, 1900]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1910, t.18, p.2, p.130–131.

[Математические работы – в Comptes Rendus et memoires de la Societe des Naturalistes a l'Universite de Varsovie. 1904–1906]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1910, t.18, p.2, p.131–132.

1911

Лекции по интегральному исчислению, чит. на 3 курсе Варшавского ун-та. Часть 2. Варшава, 1911, 74 с. (литогр.).

Лекции по определенным интегралам, чит. на 3 курсе Варшавского ун-та. Варшава, 1911, 67 с. (литогр.).

О взаимных метрических теоремах. Варшава, 1911, 22 с.

О геометрических построениях с помощью диска и линейки // Известия Варшавского политехнического института, 1911, № 2. С. 1–6.

О некоторых интегральных уравнениях. Варшава, 1911, 10 с.

Об интегрировании линейных дифференциальных уравнений в конечном виде // Варшавские университетские известия, 1911, № 1. С. 281–343. Введение. С. 1–40.

Об интегрировании линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Варшавские университетские известия, 1911, № 8. С. 1–24; № 9. С. 25–47.

Отчет о командировке депутатом на столетний юбилей института инженеров Путей Сообщения имп. Александра I // Варшавские университетские известия, 1911. № 4. С. 1–3.

[Математические работы – в Annales de l'Institut Polytechnique de Varsovie. 1909]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1911, t.19, p. I, p.107–108.

[Математические работы – в Annales de l'Universite Imperiale de Varsovie, 1909 (4,5)]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1911, t.19, p. I, p.109.

[Математические работы – в Annales de l'Institut Polytechnique de Varsovie. 1910]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1911, t.19, p. 2, p.115.

[Математические работы – в Annales de l'Universite Imperiale de Varsovie, 1910 (6,8)]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1911, t.19, p. 2, p.115.

[Математические работы – в Comptes Rendus et memoires de la Societe des Naturalistes a l'Universite de Varsovie. 1909]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1911, t.19, p. I, p.109.

[Математические работы – в Comptes Rendus et memoires de la Societe des Naturalistes a l'Universite de Varsovie. 1910]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1911, t.19, p. 2, p.115.

1912

Аналитическая геометрия. Курс лекций. 2-е изд. Варшава, 1912, 450+407 (литогр.).

Лекции по теории эллиптических функций, читанные на 4 курсе Варшавского ун-та в 1911–1912 ак. году. Варшава, 1912, 101 с. (литогр.).

О взаимных метрических теоремах // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Варшавском университете, XXII, 1912, № 1–2. Варшава, 1912. С. 157–178.

О некоторых интегральных уравнениях // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Варшавском университете, XXIII, 1912, № 1–2. Варшава, 1912. С. 179–188.

О первом Всероссийском съезде преподавателей математики. Варшава, 1912, 42 с.

Отзыв о кандидатской диссертации В. Георгианова “Об эволютоидах” // Варшавские университетские известия, 1912. № 9. С. 1–8.

Отзыв о диссертации В. И. Романовского на степень магистра чистой математики // Варшавские университетские известия, 1912. № 8. С. 1–21.

Отзыв о кандидатской диссертации А. Писецкого "Об алгебраическом интегрировании" // Варшавские университетские известия, 1912. № 9. С. 1–8.

Отзыв о сочинении под девизом "Математик", поданном 19 января 1912 г. на тему: "Об арифметических свойствах степенного разложения алгебраических функций" // Варшавские университетские известия, 1912. № 9. С. 1–8.

Очерк научной деятельности И. П. Долбни // Математический сборник, 1912, т. 28, вып. 4. С. 473–491.

Случай и бессознательное // Вопросы философии и психологии, 1912, кн. I (II). С. 97–117.

Труды математического семинария Варшавского университета за 1911 г. Варшава, 1912, 96 с. (литогр.).

[Математические работы – в Annales de l'Institut Polytechnique de Varsovie. 1911 (I)]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1912, t.2, p. I, p.114.

[Математические работы – в Annales de l'Universite Imperiale de Varsovie, 1911 (2–6)]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1912, t.20, p. I, p.120.

1913

К теории трансцендентных чисел // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Варшавском университете, XXV, 1913, № 1–2. Варшава, 1913. С. 49–59.

О гиперболическом расположении тетраэдров в связи с геометрией многообразия пятого порядка // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Варшавском университете, XXV, 1913, № 1–2. Варшава, 1913. С. 100–110.

О научной деятельности А. Пуанкаре // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Варшавском университете, XXIV, 1912, № 4. Варшава, 1913. С. 27–80.

О первом Всероссийском съезде преподавателей математики // Варшавские университетские известия, 1913, № 3. С. 1–42.

Об интегрировании трансцендентных функций. Варшава, 1913, 276 с.

Об интегрировании трансцендентных функций // Варшавские университетские известия. 1913, № 6, с. 1–4 и 1–16; № 7, с. 17–24; № 8, с. 25–128; № 9, с. 129–277.

Труды математического семинария Варшавского университета за 1912 г. Варшава, 1913. 134 с. (литогр.).

Труды математического семинария Варшавского университета за 1913 г. Варшава, 1913. 99 с. (литогр.).

Четыре лекции по философии математики, прочитанные на курсах для преподавателей средней школы летом 1912 г. Варшава, 1913 [2], IV, 78 с. с илл.

- [Математические работы – в Annales de l'Universite Imperiale de Varsovie, 1911]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1913, t.21, p. 1, p.123–125.
- [Математические работы – в Annales de l'Institut Polytechnique de Varsovie. 1911 (2,3)]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1913, t.21, p. 2, p.122.
- [Математические работы – в Annales de l'Universite Imperiale de Varsovie, 1912 (6–9)]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1913, t.21, p. 2, p.122–123.
- [Математические работы – в Comptes Rendus et memoires de la Societe des Naturalistes a l'Universite de Varsovie. 1912]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1913, t.21, p. 2, p.123–124.
- [О работе Romanowsky: Sur la theorie de l'integration des equations differentielles partielles du second et du troisieme ordre]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1913, t.21, p. 1, p.124–125.
- [О работе Romanowsky: Sur l'integration de quelques types d'equations partielles du second ordre au moyen de methode d'Ampere]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1913, t.21, p. 1, p.125.
- Sur quelques equations integrals [автореферат]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1913, t.21, p. 1, p.125.
- Sur l'integration lineares differentielles du second ordre [автореферат]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1913, t.21, p. 1, p.123–124.
- Sur les theoremes metriques reciproques [автореферат]. Revue semestrielle des publications mathematiques. 1913, t.21, p. 1, p.125.

1914

- Второй Всероссийский съезд преподавателей математики. Варшава, 1914, 82 с.
- К вопросу об интегрировании в конечном виде линейных дифференциальных уравнений // Варшавские университетские известия, 1914, № 6. С. 1–65.
- О гипертрансцендентности функций $\zeta(S, X)$. Варшава, 1913 // Известия Варшавского политехнического ин-та, 1914. Вып. 2. С. 1–13.
- Об алгебраических функциях, определяемых метациклическими уравнениями // Протоколы заседаний общества естественных наук при Варшавском университете, XXV, 1913–1914, № 3 и 4. Варшава, 1914. С. 81–96.
- Отзыв Д. Д. Мордухай-Болтовского о кандидатской работе С. Хвялковского под названием “О функциональных уравнениях”, представленной в марте 1913 г. Варшава, 1914, 11 с.
- Систематический сборник элементарных упражнений по дифференциальному и интегральному исчислению. Т. I. Дифференциальное исчисление. Изд. Риккера, 1914, XIV+356 с. с черт.

Систематический сборник элементарных упражнений по дифференциальному и интегральному исчислению. Вып. I. Теория пределов, дифференцирование и интегрирование функций. Изд. Риккера, 1914, 425 с. То же на польском языке.

1915

Аналитическая геометрия. Курс лекций. Изд. 3-е. Ростов-на-Дону. 1915. 671 с. (литогр.).

Второй Всероссийский съезд преподавателей математики. Философские, методологические и дидактические очерки по поводу докладов съезда // Варшавские университетские известия, 1915, № 1. С. 1-95.

Курс дифференциального и интегрального исчисления. Лекции, читанные в Варшавском политехническом ин-те в 1914-1915 гг. Изд. ст. В. Тарасова и В. Вершковского. Варшава, 1915, 365 с. (литогр.).

Лекции по дифференциальному и интегральному исчислениям. Изд. 2-е. Варшава. 1915, 365 с. (литогр.).

Систематический сборник элементарных упражнений по дифференциальному и интегральному исчислениям. Т. 2. Интегральное исчисление. Изд. Риккера, 1915, XVI+512 с.

1916

Из прошлого пятой книги "Начал" Евклида // Математическое образование, 1916, № 7, с. 255-263; № 8, с. 277-289.

Лекции по аналитической геометрии. Курс, читанный студ. мат. 1-го курса Варшавского ун-та в 1915-1916 ак. году. Ростов н/Д, 1916, 172 с.

Лекции по интегральному исчислению. Ч. I. Ростов н/Д, 1916, литогр.

О моделях ко второй книге "Начал" Евклида // Вестник опытной физики и элементарной математики, 1916, № 655-556, 18 с.

Очерк научной деятельности Н. Я. Сониной. Харьков, 1916, 34 с. с портр.

Очерк научной деятельности Н. Я. Сониной // Варшавские университетские известия, 1916, № 3, с. 1-32 с портр.

Этюды по планиметрической и стереометрической теории трансверсалей в связи с начертательной геометрией четырехмерного и пятимерного пространства // Варшавские университетские известия, 1916, № 3, с. 1-40.

1917

- Границы вселенной // Вопросы философии и психологии, 1917, кн. 137, с. 61-101.

Теория подобия Вольфа и постулат Левека // Вестник опытной физики и элементарной математики, 1917, № 673-674 (второй сери, 7 семестра, № 1-2), с. 1-13.

Ответ Кеповуса на работу G. Loria: Sur un cas d'integrabilite en terms finis. L'intermediare des Mathematiciens, Paris, 1917, t.24, p. 130-132.

1918

Курс аналитической геометрии, читанный студентам Донского университета и курсисткам Высших женских курсов в 1917/18 ак. году. Ростов н/Д, 1918, 336 с. (литогр.).

1919

Начертательная геометрия и геометрические построения в ограниченной области (сообщение на заседании 24 апреля 1916г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Донском университете. Годы 1916–1918. Вып. 1. Ростов н/Д, 1919, с. 12. (не напеч.).

О гиперплоскостном сечении гиперболоидов // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Донском университете. Годы 1916–1918. Вып. 1. Ростов н/Д, 1919, с. 16. (не напеч.).

О диаметрах плоских и пространственных кривых третьего порядка // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Донском университете. Годы 1916–1918. Вып. 1. Ростов н/Д, 1919, с. 16. (не напеч.).

О разложении целой трансцендентной функции на примерные множители (сообщение на заседании 8 декабря 1918 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Донском университете. Годы 1916–1918. Вып. 3. Ростов н/Д, 1919, с. 12. (не напеч.).

Об аксиоматике XVII в. // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Донском университете. Годы 1916–1918. Вып. 1. Ростов н/Д, 1919, с. 16. (не напеч.).

Об учреждении математического отделения Ростовского общества естествоиспытателей // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Донском университете. Годы 1916–1918. Вып. 1. Ростов н/Д, 1919, с. 17–18.

Философско-математические идеи XVI века // Известия Донского университета, 1919, т. 2, с. 1–48.

1922

О геометрических построениях в пространстве Лобачевского. Самара. 1922, 11 с.

Об аподогических доказательствах // Научный вестник (Ростов н/Д), 1922, № 1, с. 7.

1923

Sur certaines categories des nombres transcendants. Comptes rendus des seances de l'Academie des Sciences, Paris, 1923, vol. 177, p. 475–478.

Sur le logarithme d'un nombre algebrique. Comptes rendus des seances de l'Academie des Sciences, Paris, 1923, vol. 177, 4 p.

1924

Некоторые теоремы о кривых второго и третьего порядка // Известия Донского университета, 1924, т. 4, с. 4–7. [Новочеркасск].

О диаметральных свойствах алгебраической кривой в геометрии Лобачевского // Известия Донского университета, 1924, т.4, с. 99–102. [Ростов н/Д].

То же: [Новочеркасск].

О пересечении алгебраических кривых // Известия Донского университета, 1924, т.4, с. 1–3. [Новочеркасск].

О разложении на примарные множители трансцендентной функции // Математический сборник, 1924, т. 31, вып. 3–4, с. 579–584.

Sur la transcendence de ℓ^e et de certains autres nombres. Comptes rendus des seances de l'Academie des Sciences, Paris, 1924, vol. 179, p. 1020–1023.

Sur l'implissibilite d'une relation algebrigue entre π et ℓ . Comptes rendus des seances de l'Academie des Sciences, Paris, 1924, vol. 179, p. 1239–1242.

Sur quelques proprietes arithmetiques des integrales des equations du premier ordre. Comptes rendus des seances de l'Academie des Sciences, Paris, 1924, vol. 179.

1925

О летучках крылатых растений // Вестник Ростовского индустриального политехникума, 1925. (Из автобиографии, журнал РИТа).

О числовой характеристике утверждаемого тождества // Известия Донского университета, 1925, т. 7, с. 40–43.

То же: Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете. Годы 1919–1926. Ростов н/Д, 1926, т.3. Ростов Н/Д, 1926, с. 11 (не напеч.).

Освоания геометрии неизогенных и негомогенных пространств с точки зрения теории групп // Известия Донского университета, 1925, т. 7, с. 29–39.

Функции в арифметике // Общешкольный журнал. Орган школ взрослых повышенного типа. Ростов н/Д, 1925, № 1, с. 12.

[В разделе "Losungen": Die Aufgabe 16, поставленная Farber'ом (Jahresbericht der deutsch. Mathematiker Vereinigung, 1924, Bd. 33, H. 1/4, S. 27); дается решение Farber'a и Д. Д. Мордухай-Болтовского]. Jahresbericht der deutsch. Mathematiker Vereinigung, 1925, Bd. 33, H. 9–12, Abtielung 2, 1925, S. 114–116.

[Ответы Kerpouses на работы E. Dubouis: Sur Solution d'une equation differentielle]. L'intermediaire des Mathematiciens, 2-e serie, 1925, t.4, p. 59.

Sur les facteurs primaires de la fonction entiere. Comptes rendus des seances de l'Academie des Sciences, Paris, 1925, vol. 180, p. 191–194.

1926

Исчисление причин и исчисление мотивов (к философии теории вероятностей. Сообщение на заседании 9 февраля 1925 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском универси-

тете. Годы 1919–1926. Ростов н/Д, 1926, т. 3. Ростов н/Д, 1926. С. 13. (не напеч.).

Квадратичные диаметры и полюсы кривых третьего порядка // Труды Северо-Кавказской ассоциации научно-исследовательских институтов, 1926, № 1. Институт математики и естествознания при Северо-Кавказском университете. Вып. 2. С. 19–39.

Краткий очерк жизни и научной деятельности Н. И. Лобачевского (доклад на заседании об-ва естествоиспытателей при СКГУ 7 марта 1926 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете. Годы 1919–1926. Ростов н/Д, 1926, т. 3. Ростов н/Д, 1926. С. 7.

Новые исследования по истории методики математики. (Отчет о научной командировке на заседании 3 ноября 1924 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете. Годы 1919–1926. Ростов н/Д, 1926, т. 3. Ростов н/Д, 1926. С. 13. (не напеч.).

О геометрических построениях в пространстве Лобачевского. (Доклад на заседании 9 мая 1922 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете. Годы 1919–1926. Ростов н/Д, 1926, т. 3. Ростов н/Д, 1926. С. 11.

О гиперплоскостном сечении гиперконусов // Труды Северо-Кавказской ассоциации научно-исследовательских институтов, 1926, № 1. Институт математики и естествознания при Северо-Кавказском университете. Вып. 2. С. 17–28.

О задаче Шварца, относящейся к абелевым интегралам. Ростов н/Д, 1926, 39 с. // (Труды Северо-Кавказской ассоциации НИИ, № 1. Ин-т математики и естествознания при Северо-Кавказском ун-те. Вып. 2).

О научных трудах Феликса Клейна (по поводу его смерти). (Сообщение на заседании 2 ноября 1925 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете. Годы 1919–1926. Ростов н/Д, 1926, т. 3. Ростов н/Д, 1926. С. 15. (не напеч.).

О некоторых приложениях эллиптических функций к кривым третьего порядка (доклад на заседании 15 февраля 1923 г.). // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете. Годы 1919–1926. Ростов н/Д, 1926, т. 3. Ростов н/Д, 1926. С. 12. (не напеч.).

Об академиках, работавших в области физико-математических наук (к двухсотлетию Российской Академии наук) // Известия Северо-Кавказского университета, 1926, т. 8, с. 111–118.

То же: Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете, годы 1919–1926. Т.3. Ростов н/Д, 1926, с.7 (не напеч.).

- Об интегрировании в конечном виде дифференциальных биномов в случае иррациональных показателей // Известия физико-математического общества при Казанском университете. Серия 3, т.1. Казань, 1926, с. 14–25.
- То же: Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете. Годы 1919–1926. Т.3. Ростов н/Д, 1926, с.15 (не напеч.).
- Об одевании поверхностей // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете. Годы 1919–1926. Т.3. Ростов н/Д. 1926. С.13.
- Об одном обобщении задачи Ж. Бертраана, относящейся к центральным силам (доклад на заседании 30 октября 1921 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете. Годы 1919–1926. Т.3. Ростов н/Д, 1926. С.10.
- Основные логические проблемы и Лобачевский (доклад на заседании общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете 7 марта 1926 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете. Годы 1919–1926. Т.3. Ростов н/Д, 1926. С. 7. (не напеч.).
- Памяти академика А. А. Маркова (доклад на заседании 23 декабря 1922 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете. Годы 1919–1926. Т.3. Ростов н/Д, 1926. С. 12 (не напеч.).
- Ueber hyperboloidische Lage zweier Tetraeder. Сборник Huygens, 1926, p. 10.
- Sur l'application de la methode de Morgan aux equations partielles du troisieme ordre. (О приложении метода Моргана к дифференциальным уравнениям в частных производных 3-го порядка. Сообщение на заседании 10 мая 1926 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете. Годы 1919–1926. Т.3. Ростов н/Д, 1926. С. 16, 46–46.
- Sur la cosmogonic d'Arrenius. [Мысли математика о космогонии Аррениуса. Сообщение на заседании 3 мая 1923 г.] // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете. Годы 1919–1926. Т.3. Ростов н/Д, 1926. С. 12, 40–41.
- Sur la formule de Secretan pour le calcul des logarithmes. (О формуле Секретана и ей аналогичных формулах для вычисления логарифмов. Доклад на заседании 15 мая 1921 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете. Годы 1919–1926. Т.3. Ростов н/Д, 1926. С. 10, 38–39.
- Sur la generalisation du theoreme d'Eisenstein, indiquee par Tchebyscheff. Comptes rendus des seances de l'Academie des Sciences, Paris, 1926, vol. 182, p. 258–260.

Sur la mecanique dans l'espace Lobatczewskienne. (Механика в пространстве Лобачевского. Сообщение на заседании 25 ноября 1923 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете. Годы 1919–1926. Т.3. Ростов н/Д, 1926. С. 13, 41–43.

Sur les proprietes arithmetiques des developpements holomorphes des fonctions exprimables en termes finis. Bulletin des sciences mathematiques, 1926, vol. 50, p. 343–360 и 370–381.

Sur les syllogismes en logique et les hypersyllogismes en metalogique. (Силлогизмы в логике и металогики. Доклад на заседании общества 19 октября 1919 г.) // Протоколы заседаний общества естествоиспытателей при Северо-Кавказском университете. Годы 1919–1926. Т.3. Ростов н/Д, 1926. С. 8, 34–35.

1927

Лобачевский и основные логические проблемы в математике. Речь на юбилее 100-летия открытия неевклидовой геометрии в Казани и Ростове-на-Дону // Известия Северо-Кавказского университета, 1927, т.1(12), с.78–95.

Начертательная геометрия трехмерного и четырехмерного пространства как метода геометрических построений в ограниченной области // Журнал физико-математического об-ва при Пермском ун-те, 1927, т. 4, с. 63–71.

О геометрических построениях в пространстве Лобачевского. In *memoiriam N.I. Lobatschevskii*, vol. 2. Казань, Главнаука, 1927, с. 67–82.

О некоторых свойствах трансцендентных чисел первого класса // Математический сборник, 1927, т. 34, вып. 1, с. 55–100.

Об арифметических свойствах интегралов дифференциальных уравнений первого порядка типа Пенлеве // Известия физико-математического общества при Казанском университете. Серия 3, 1927, т. 2, с. 1–13.

Der beweis der Unmoglichkeit des Ziehens eines Grosskreises mit dem Zirkel durch zwei Punkte auf einer Kugelflache. Jahresbericht der Deutsch. Mathem. Vereinigung, 1927.

1928

Дюрер как художник и как математик. [Информация о заседании отделения математики и астрономии общества естествоиспытателей 12 мая 1928 г., посвящ. Дюреру] // Бюллетень научных о-в и учреждений Северо-Кавказского края, 1928, № 16/10, с. 5–6.

Из истории метода наложения в элементарной геометрии // Математическое образование, 1928, № 3, с. 107–113.

Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики // Известия Северо-Кавказского ун-та, 1928, т.3, с. 35–129.

Содержание: Введение, с. 35–36. – Два основных источника методов решения уравнений (XII в.), с. 36–46. – Генезис современного числа (XII в.), с. 47–66. – Первые шаги буквенной алгебры (конец XVI в.), с. 66–83. – Аксиоматика XVII века (первая половина XVII в.), с. 83–102. – Генезис и история теории пределов (XVIII в.), с. 103–117. – Философские элементы в эволюции методических идей в математике первой половины XIX века, с. 118–129.

Математики и вычислители. Сообщение о докладе на заседании общества естествоиспытателей и психологии математического мышления 13 апреля 1928 г. // Бюллетень научных обществ и учреждений Северо-Кавказского края, 1928, № 15/4, с. 4.

Метод исчерпывания // Математическое образование, 1928, № 6, с. 229–240.

О некоторых свойствах иррациональных преобразований алгебраических кривых // Труды Всероссийского съезда математиков в Москве 27 апреля–4 мая 1927 г. М.–Л. ГИЗ, 1928, с. 201–205.

О школьных ошибках в математике // Отчет о деятельности математической конференции Научно-Педагогического о-ва Дальневосточного ун-та, 32, VI–XII, Владивосток, 1928, с. 85–90.

Об алгебраических площадях и объемах // Отчет о деятельности математической конференции Научно-Педагогического о-ва Дальневосточного ун-та. Владивосток, 1928.

Опытные вычисления в уме // Бюллетень научных обществ и учреждений Северо-Кавказского края, 1928, № 13, с. 2.

Paedagogia de puero et de adulta. Scienza e Vita, Milano, 1928.

Sur les propriétés diamétrales de la conique gauche // Известия физико-математического общества при Казанском ун-те. Серия 3, 1928, т. 3, вып. 1, с. 25–35.

1929

Ненатуральное и апагогическое доказательство в прошедшем и будущем // Математическое образование, 1929, № 1, с. 19–34.

О примерных множителях целой трансцендентной функции бесконечного ряда // Журнал физико-математического о-ва при Донецком горном ин-те, 1929: т. 1, вып. 1, с. 40–50.

Об изогенности и гомогенности пространства // Отчет о деятельности математической конференции физикико-математического о-ва ДВГУ. Владивосток, 1929, с. 10.

Основания динамики материальной точки в пространстве Лобачевского // Научные известия Смоленского ун-та, 1929, вып. 1, с. 33–48.

Die Padagogie des Kindes und die Padagogie des Erwachsenen. Zeitschr. f. Pad. Psych., 1929.

Methodica de demonst. Scholactico. Scienza e vita, Milano, 1929, № 6–7, p. 141–142.

Psychologia de cōpob. mathem. Scienza e vita, Milano, 1929.

Sue les forces centrales sous l'action desquelles le point d'ecrit une conique.

Записки фізико-математичну відділу. Київ, 1929, т. 3, вип. 3, с. 17–26.

1930

Об одеваии поверхностей // Сборник статей по математике Института математики и естествознания при Северо-Кавказском университете, 1930, вып.16, с. 21–52. (Труды Северо-Кавказской ассоциации научно-исследовательских институтов, № 77).

Про українську та білоруську математичну термінологію в зв'язку з історією російської. Збірник математично-природописно-лікарської секції наукового товариства Ім. Шевченка, т. 28, 29. Львові, 1930, с. 277–297.

1931

О школьном геометрическом доказательстве // Физика, химия, математика и техника в советской школе, 1931, № 1, с. 96–100.

Про особливі точки спеціальних типів функцій даних у вигляді Taylor'ового ряду (Sur les points singuliers des types speciaux des fonctions donnees par la serie de Taylor). Записки природничо-технічного відділу. АН УССР, 1931, № 3, с. 69–92.

De errores Scholastico in Machemax. Scienza e vita, Milano, 1931, № 11–12, p. 297–303.

1932

Некоторые проблемы школьной геометрической терминологии // Физика, химия, математика и техника в советской школе, 1932, № 3, с. 49–54.

О новейших немецких учебниках по элементарной математике // Физика, химия, математика и техника в советской школе, 1932, № 1, с. 93–97.

О точечном множестве, проходимом любой алгебраической кривой // Математический сборник, 1932, т. 39, вып. 3, с. 120–128.

Про деякі задачі небесної механіки в неевклідовому просторі // Журнал математического цикла АН УССР, 1932, № 1, с. 47– 70.

Das Theorem über die Hypertranszendenz der Funktion $\zeta(b, x)$ und einige Verallgemeinerungen. The Tohoku Mathematical Journal, 1932, vol. 35, p. 2. S. 19–34.

Sege biogenetico in Mathemat. Scienza e vita, Milano, 1932.

The concept of Infinity—Historical and Critical Notes. Scripta Mathematica, 1932, vol. 1, № 2, p. 132–134.

1933

Genese und Geschichte der Limestheorie. Accheion, Roma, 1933, vol. 15, 45–72.

Heterogome des fines in Mathematica. Scienza e vita, Milano, 1933.

Sur les modes du second livre des elements d'Eucklide. Bologna Zonidolli, 1933, 15 p. Estratto dal Periodico di matematiche storia—didattica—filosofia. Maggio, 1933, S. 4, vol. 13, № 3, p. 169–183.

Sur quelques proprietes des transformations irrationnelles des courbes algebriques. Записки Харківського математичного товариства та Науково-дослідного Інституту математики и механіки. Серия 4, 1933, т. 7, с. 25-37.

1934

О парашотах и планерах в растительном и животном царствах // Ученые записки Ростовского ун-та, 1934, вып. 1, с. 1-14.

О пределе суммы // Ученые записки Ростовского ун-та, 1934, вып. 1, с. 99-100.

О трансцендентных числах с последовательными приближениями, определяемыми алгебраическими уравнениями // Математический сборник, 1934, т. 41, вып. 2, с. 221-232.

Об обращении определенных интегралов с помощью теории вычетов // Ученые записки Ростовского ун-та, 1934, вып. 1, с. 111-118.

Про будування за допомогою алгебричних кривих в Евклідовому і не Евклідовому просторах. Журнал математичного циклу Всукраїнської Академії наук, 1934, т. 1, вып. 3, с. 15-30.

L'attraction de la couche spherique et le monde quadridimensional. [Притяжение сферическим слоем в 4-мерный мир] // Известия физико-математического общества при Казанском ун-те. 1932-1933 гг. Серия 3, 1934, т. 6, с. 80-87.

Origine et Histoire de Regula faese. Scienza e vita, Milano, 1934, № 6, с. 207-213.

Regula infura. Scienza e vita, Milano, 1934.

Sur les constructions au moyen de la regle et constructions de cercle fixe dont le centre et connu. Periodico di matematiche Marzo. Ser. 4. Bologna, 1934, vol. 14, № 2, p. 101-111.

Sur les facteurs primaires de la fonction entiere transcendente du genre infini. Записки Харківського математичного товариства та Науково-дослідного Інституту математики. Серия 4, 1934, т. 10, с. 77-85.

Sur les integrales abeliennes avec les systemes reductibles des periodes. Comptes rendus des seances de l'Academie des sciences, Paris, 1934, vol. 198, p. 1006-1008.

1935

Исследовательская работа по математике за десять лет в Ростовском университете. XX лет Ростовского-на-Дону университета. Ученые записки (юбилейный выпуск). Ростов н/Д, 1935, с. 103-107.

Математика и логика в школе // Математическое просвещение. Сборник статей по элементарной математике и началам высшей, 1935, вып. 4, с. 113-128.

О штейнеровых построениях на сфере // Математический сборник, 1935, т. 42, вып. 5, с. 535-546.

Про діаметральні властивості алгебраїчних кривих на сфері. Журнал Інституту математики Української Академії наук, 1935, № 2, с. 105–113.

Про необхідні умови зведення многогранників за допомогою подібних частиц. Журнал Інституту математики Української Академії наук, 1935, № 2, с. 115–126.

Über einige Eigenschaften der transcendenten Zahlen. The Tohoku Mathematical Journal, 1935, vol. 40, p. 99–127.

Sur les courbures des ordres superieures des courbes planes. Збірник математично–природописно–лікарської секції наукового товариства Ім. Шевченка. Львов, 1934, т. 30, с. 105–115.

1936

Геометрия радиоялий. Ученые записки Ростовского ун-та, 1936, вып.8, с. 1–91 с XIII табл.

О невозможности выражения в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных функций модулярных функций. Доклады Акад. наук СССР, 1936, т. 1, № 8, с. 307–310 (10).

Про дуги алгебраїчних кривих. Журнал Інституту математики Української Академії наук, 1936, № 2, с. 53–70.

Sur les reductions monomes des integrales abeliennes. Annali di Mathematika pura ed applicata, Bologna, 1936, vol. 15, p. 47–75.

1937

Вводная статья и комментарии // В кн.: Ньютон Исаак. Математические работы. Пер. с латин., вводная статья и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.–Л., ОНТИ, 1937, с. V–XV, с. 263–416.

Метаалгебра // Ученые записки Научно–исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1937, т. 1, с. 21–25.

О мероморфной функции, определяемой степенным разложением с коэффициентами, равными алгебраическим числам или трансцендентным первого класса // Ученые записки Научно–исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1937, т. 1, с. 26–27.

О нулях целой функции, определенной разложением с алгебраическими коэффициентами // Ученые записки Научно–исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1937, т. 1, с. 41–42.

Скелеты радиоялий, с точки зрения сопротивления материалов // Ученые записки Научно–исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1937, т. 1, с. 74–75.

Эволюция понятия функции в прошлом и настоящем // Ученые записки Научно–исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1937, т. 1, с. 50–52.

Sur la resolution des equations differentielles de premier ordre en forme finie. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1937, vol. 61, p. 49–72.

Sur quelques applications de la theorie analytique des equations differentielles a l'integration, en forme finie. Про деякі застосування аналітичної теорії диференціальних рівнянь які можна інтегрувати в скінченній формі. Журнал Інституту математики Української Академії наук, 1937, № 1, с. 53–65.

1938

Измерение в геометрии и инверсия (лекции по спец. курсу для мат., прочитанные в РПИ в 1937–1938). Ростов н/Д, 1938, 100 с.

Методические проблемы, относящиеся к поверхностям и объемам // Математика в школе, 1938, № 1, с. 34–40.

О заполнении неевклидовых пространств правильными многоугольниками и многогранниками // Сборник ученых записок Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1938, т. 2, с. 35–37.

О некоторых формулах стереометрической теории трансверсалей // Известия Ростовского пед. ин-та, 1938, т. 9, с. 31–42.

Об абелевых интегралах, зависящих от пространственных кривых третьего и четвертого порядков // Сборник ученых записок Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1938, т. 2, с. 40–41.

Об иррациональных функциях, наименее отклоняющихся от нуля // Известия Ростовского пед. ин-та, 1938, т. 9, с. 19–23.

Об одной задаче Чезаро, относящейся к исчислению вероятностей // Известия Ростовского пед. ин-та, 1938, т. 9, с. 24–26.

Об одном обобщении признака сходимости Куммфа // Известия Ростовского пед. ин-та, 1938, т. 9, с. 27–30.

Про властивості косої чотирикутника і гексаедра, одержуваних проєкуванням в чотиримірному просторі. Журнал Інституту математики Української Академії наук, 1938, № 1, с. 53–63.

Евклид и Лобачевский. Лекции по спец. курсу для матем., прочитанные в РПИ в 1937–1938 гг. Ростов н/Д, 1938, 61 с.

Sur les syllogismes en logique et les hypersyllogismes en Metalogique. Известия физико-математического общества и научно-исследовательского ин-та математики и механики при Казанском ун-те. Серия 3, 1938, т. 10, с. 161–173.

1939

Конспект лекций по основаниям геометрии, прочитанных в 1938–1939 гг. в РПИ. Ростов н/Д, 1939, 135 с.

Эллиптические функции. Ростов н/Д, 1939, 200 с.

1940

Высшая геометрия. Конспект курса, прочитанного в РПИ. Ростов н/Д, 1940, 151 с.

Геометрия как наука о пространстве // Известия Ростовского пед. ин-та, 1940, т. 10, с. 10–25.

Заметка о гипертрансцендентных числах // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1940, т. 4, с. 117–118.

Заметка о теореме Принсгейма // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1940, т. 4, с. 119–121.

Математические ошибки в науке и школе // Известия Ростовского пед. ин-та, 1940, т. 10, с. 36–51.

Метациклические уравнения и абелевы интегралы // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1940, т. 4, с. 27–28.

Методика геометрических определений // Математика в школе, 1940, № 2, с. 1–8.

Методический коллоквиум при кафедре математики Ростовского пед. ин-та // Известия Ростовского пед. ин-та, 1940, т. 10, с. 26–35.

Некоторые проблемы динамики материальной точки в неевклидовом пространстве // Известия Ростовского пед. ин-та, 1940, т. 10, с. 126–157 с черт.

О кривизне на плоскости Лобачевского // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1940, т. 4, с. 29–30.

О неразрешимости в конечном виде с помощью элементарных функций трансцендентных уравнений Кеплера // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1940, т. 4, с. 25–26.

О полуправильных телах // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1940, т. 4, с. 3–22 с черт. (13).

О росте трансцендентной функции, выражаемой в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных. Сборник, посвященный памяти академика Дмитрия Александровича Граве. М.–Л., ОГИЗ, 1940, с. 172–192.

Основные теоремы теории трансверсалий на плоскости Лобачевского // Известия Ростовского пед. ин-та, 1940, т. 10, с. 114–125 с черт.

Основные формулы теории трансверсалий на плоскости Лобачевского // Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1940, т. 4, с. 23–24.

1941

Математика в Ростовском университете. Ростовский университет. Юбилейный сборник. XXV, 1915–1940. Под редакцией С.Е. Белозерова. Ростов н/Д, 1941, с. 46–52.

О кривизне кривых на плоскости Лобачевского. Труды Ленинградского кораблестроительного ин-та, 1941, вып. 6, с. 77–96.

Основы арифметики в середине XVIII века // Математика в школе, 1941, № 4, с. 1–5.

1946

Об условиях определяемости числа трансцендентными уравнениями некоторого общего типа // Доклады Акад. наук СССР, 1946, т.52, № 6, с. 487–490.

Поризмы и данные // Тезисы докладов к Совещанию по истории естествознания 24–26 декабря 1946 г. М., 1946, с. 161–172.

Sur les conditions pour qu'un nombre s'exprime su moyen d'equations transcendantes d'un type general. Comptes rendus de l'Academie des Sciences de l'URSS, 1946, vol. 52, № 6, p. 483–486.

1947

Теорема Эйзенштейна для функций от многих переменных. Конференция научных работников Дона и Северного Кавказа. Тезисы докладов по математике, физике, прикладной механике, астрономии, органической и физической химии, неорганической и аналитической химии, геологии и петрографии, почвоведению и географии. Ростов н/Д, 1947, с. 3–6.

Трехмерный и четырехмерный аналогны теоремы Паскаля. Конференция научных работников Дона и Северного Кавказа. Тезисы докладов по математике, физике, прикладной механике, астрономии, органической и физической химии, неорганической и аналитической химии, геологии и петрографии, почвоведению и географии. Ростов н/Д, 1947, с. 7.

1948

Перевод и комментарии: Евклид. “Начала” Евклида. Пер. с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского. М.–Л., Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1948, [т. 1], кн. 1–6, 1948, 455 с. с черт. коммент. с. 219–446.

История и методика математического символа // Математика в школе, 1948, № 1, с. 24–28.

Об аспирантуре в педагогических институтах // Народное образование, 1948, № 4, с. 39–43.

Поризмы и данные // Труды Совещания по истории естествознания 24–26 декабря 1946 г. Под редакцией Х. С. Коштойнца. М.–Л., Изд-во АН СССР, 1948, с. 161–172.

1949

Перевод и комментарии: Евклид. “Начала” Евклида. Пер. с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии И. Н. Веселовского. М.–Л., Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1949, [т. 2], кн. 7–10, 1949, 511 с. с черт. коммент. с. 255–510.

Косые проекции в четырехмерном евклидовом пространстве и их приложение к выводу стереометрических теорем. Научная конференция, посвященная 80-летию университета. Тезисы докладов, вып. 2. Ростов н/Д, 1949, с. 87.

Кривая Бертрана в пространстве Лобачевского // Доклады Акад. наук СССР, 1949, т. 69, № 6, с. 729–730 (2).

О гипертрансцендентных функциях и гипертрансцендентных числах // Доклады Акад. наук СССР, 1949, т. 64, № 1, с. 21–24 (2).

О дугах алгебраических кривых, алгебраически связанных // Доклады Акад. наук СССР, 1949, т. 68, № 6, с. 993–995 (4).

О случаях центрального движения, разрешимых в элементарных трансцендентных и в эллиптических интегралах // Доклады Акад. наук УССР, 1949, № 3, с. 3–8 (8).

О специфических уравнениях кривых // Ученые записки Ростовского пед. ин-та, 1949, вып. 1, с. 5–14.

Принцип достаточного основания в механике и геометрии. Научная конференция, посвященная 80-летию университета. Тезисы докладов, вып. 2. Ростов н/Д, 1949, с. 86.

1950

Перевод и комментарии: Евклид. “Начала” Евклида. Пер. с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского. Изд. 2-е стереотипное. М.–Л., Гос. изд-во техн.-теорет. лит.-ры, 1950, [т. 1], кн. 1–6, 1950, 447 с. с черт.

Перевод и комментарии: Евклид. “Начала” Евклида. Пер. с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии И. Н. Веселовского. М.–Л., Гос. изд-во техн.-теорет. лит.-ры, 1950, [т. 3], кн. 11–15, 1950, 331 с. с черт. коммент. с. 161–330.

Косые проекции в четырехмерном евклидовом пространстве и приложение их к выводу стереометрических теорем // Ученые записки Пятигорского пед. ин-та, 1950, т. 7, с. 25–31.

О псевдоцикле на плоскости Лобачевского // Ученые записки Пятигорского пед. ин-та, 1950, т. 7, с. 13–24.

Принцип непрерывности и его методическое значение // Ученые записки Пятигорского пед. ин-та, 1950, т. 7, с. 3–12.

1951

О кривизне плоских кривых в пространстве Лобачевского. Наукові записки Київського Державного ун-та, 1951, т. 10, вип. 1. Математичний збірник, № 5, с. 43–52 (1).

Об одной арифметической задаче, относящейся к абелевым интегралам // Ученые записки Ростовского ун-та, 1951, т. 14. Труды физико-математического факультета, вып. 1, с. 31–39 (2).

Об условиях рациональности в данной области чисел, выраженных рядами // Ученые записки Ростовского ун-та, 1951, т. 14. Труды физико-математического факультета, вып. 1, с. 41–47 (2).

Параллельность и перпендикулярность прямых плоскостей и гиперплоскостей в трехмерном и четырехмерном пространствах Лобачевского // Успехи математических наук, 1951, т. 6, вып. 4, с. 176–183.

Теорема Понселэ на плоскости Лобачевского и эллиптические интегралы // Доклады Акад. наук СССР, 1951, т. 77, № 6, с. 961–964 (3).

1952

Из прошлого аналитической геометрии // Труды института истории естествознания Акад. наук СССР, 1952, т. 4, с. 217–235.

О кривизне пространственных кривых в пространстве Лобачевского // Математический сборник, 1952, т. 30, вып. 3, с. 483–508 (12).

Посмертные издания

1953

Трехмерный и четырехмерный аналогон теоремы Паскаля // Успехи математических наук, 1953, т. 8, вып. 2, с. 135–138.

1954

Геодезические линии эллипсоида в неевклидовом пространстве // Доклады Акад. наук СССР, 1954, т. 94, № 6, с. 991–993.

О дуге кривой второго порядка на плоскости Лобачевского // Доклады Акад. наук СССР, 1954, т. 95, № 3, с. 449–450.

1955

Начертательная геометрия в пространстве Лобачевского. Методы начертательной геометрии и ее приложения. М., Гостехиздат, 1955, с. 305–310.

1957

Стереометрические обобщения теоремы Фаньяно // Ученые записки Ростовского пед. ин-та, 1957, вып. 4, с. 25–30.

Пример псевдоэллиптического интеграла // Ученые записки Ростовского пед. ин-та, 1957, вып. 4, с. 31–33.

● Рукописи

● По математической логике, философии и аксиоматике

Актуальная бесконечность и ряды. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

Из истории континуума. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

Из истории трех основных законов логики. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

Истина и реальность. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

Кардинальные и ординальные числа в науке и в методике. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

Логика и металогика. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

- Математическая аксиоматика и Гегель. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Метаалгебра и металогика. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1. № 21, 52 с.
- Металогика. Часть 1. Металогика гиперпредложений. (1948). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Общие схемы аксиоматического исследования. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Основные понятия механики в схоластике [1947]. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Принцип достаточного основания. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Реализм и номинализм в схоластике и математике. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Схоластика и математика. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Философия математики Гегеля (1936). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1, 40 с.
- По теории чисел, математическому анализу и теории функций**
- О гипертрансцендентности функций, определяемых степенными разложениями (1948). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О гипертрансцендентных функциях гипертрансцендентных чисел. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О методе Эрмита доказательства иррациональности e и π . Лекции по эллиптическим функциям (ч. I–III, литографированный экземпляр). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О некоторых арифметических задачах, относящихся к тригонометрическим и эллиптическим функциям. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О неразрешимости некоторых диофантовых уравнений в целых функциях (с замечаниями рецензентов). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О периодах мероморфной функции от нескольких переменных (1949). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О периодах мероморфных функций от двух независимых переменных. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О приведении интегралов, зависящих от биномов, к эллиптическим. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О признаках выражаемости чисел через трансцендентные построения различных классов. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Об аналитических и конструктивных свойствах функций в связи с арифметическими свойствами коэффициентов их степенных разложений. (1949). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

- Об интегрировании в конечном виде эллиптических функций. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Об иррациональности значений некоторых функций при рациональных значениях переменного. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Об обобщениях теоремы Сколема, относящихся к алгеброидам. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Об особенных точках трансцендентных кривых первого класса (1947). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Об условиях рациональности в данной области чисел, выраженных рядами (1945). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Основное свойство алгеброида, принимающего целые алгебраические значения при целых алгебраических значениях переменного. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Теорема Эйзенштейна для функций от многих переменных. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

По геометрии

- Аналоги тождества Шаля. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Заметка о ньютоновском диаметре алгебраической кривой. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Заметка о полярных и диаметральных свойствах алгебраических поверхностей. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Заметка о теореме Шаля. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Конспект лекций по основаниям геометрии, прочитанных в Ростовском педагогическом институте в 1938–1939 учебном году. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Лекции по специальному курсу элементарной математики, прочитанные в Ростовском пед. ин-те в 1937–1938 уч. г. (ч.1 – “Евклид и Лобачевский”; ч.2 – “Измерение в геометрии и инверсия”). Литографированный экземпляр. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Некоторые теоремы о диаметральных плоскостях алгебраических поверхностей. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О невозможности деления дуги большого круга на сфере с помощью круговой линейки. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О стереометрических аналогах теоремы Фаньяно (1950). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О трехмерных аналогах теорем Бриансона и Паскаля, относящихся к октаэдру и гексаэдру, и соответственные аналогон в четырехмерном. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Обратные теоремы в диаметральных свойствах алгебраических кривых (1948). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

- Основные свойства асимптот алгебраических пространственных кривых (1949). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Приложение теоремы Абеля к исследованию зрительных свойств алгебраических кривых. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Стереометрический аналогон второй книги "Начал" Евклида. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- По неевклидовой геометрии и механике
- Геодезические линии эллипсоида в неевклидовом пространстве. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Геометрография в трехмерном и четырехмерном евклидовом и неевклидовом пространстве (1950). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Звездные многогранники в неевклидовом пространстве. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Кривые третьего порядка на плоскости Лобачевского. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Начертательная геометрия в пространстве Лобачевского. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Некоторые кинематические теоремы в четырехмерном как евклидовом, так и неевклидовом пространстве. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Некоторые кинематические теоремы на плоскости Лобачевского. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Некоторые теоремы об алгебраических кривых на плоскости Лобачевского (1946). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О дуге кривой второго порядка на плоскости Лобачевского. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О круговых сечениях и прямолинейнообразующих алгебраических поверхностях в евклидовом и неевклидовом пространствах и их аналогах в четырехмерном пространстве (1948). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О луночках Гиппократов на плоскости Лобачевского (1950). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О некоторых свойствах асимптот алгебраических кривых на плоскости Лобачевского. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О некоторых теоремах, относящихся к треугольнику на плоскости Лобачевского. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О некоторых формулах геометрии Лобачевского, выводимых из геометрических тождеств. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О парах и сверхпарах сил на плоскости Лобачевского. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

- О правильных многогранниках и правильных гипергранниках в трехмерном и четырехмерном неевклидовых пространствах. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О псевдоцикле на плоскости Лобачевского (1947). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О равновесии гибкой и нерастяжимой нити на плоскости Лобачевского. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О стационарных точках кривых второго порядка на плоскости Лобачевского. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Об аналогах теоремы Пифагора на неевклидовой плоскости. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Об углах и полосах и их стереометрических аналогах в пространстве Лобачевского. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Об уравнениях движения материальной точки в неевклидовом пространстве. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Параллельность и перпендикулярность прямых плоскостей и гиперплоскостей в трехмерном и четырехмерном пространствах Лобачевского (о трех вариантах). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Правильные тела в пространстве неевклидовом. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Соотношение между диагоналями и сторонами четырехугольника на плоскости Лобачевского. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Соотношение между хордами окружности на плоскости Лобачевского. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Теория поверхностей в пространстве Лобачевского (1946). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

По многомерной геометрии и механике

- Аксометрия четырехмерного пространства. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Деление гиперпространства гиперплоскостями. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Динамика системы точек при двухмерном времени. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Комбинированная задача, относящаяся к гиперпространству. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Косые проекции в четырехмерном евклидовом пространстве и приложение их к выводу стереометрических задач. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Кривизна кривых в четырехмерном евклидовом пространстве. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Кристаллические формы в четырехмерном пространстве. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

- Некоторые теоремы из теории трансверсалей трехмерного и четырехмерного пространства. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О некоторых свойствах гипергранников. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О некоторых свойствах пентаэдроида (1950). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О сферах и гиперсферах, объемлющих замкнутые многообразия в пространстве. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О четырехмерном аналоге многогранника Вейля. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О шаровых сечениях и плоскостных образующих гиперповерхностей второго порядка. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Об аналогах в n -мерном евклидовом пространстве теоремы Дезарга (1950). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Об одевании гиперповерхностей в четырехмерном пространстве. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

По математической биологии

- Биологическая аксиоматика. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Вариационные задачи в биологии. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Геометрия и механика водорослей. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Деление яйца и планиметрические конфигурации. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Кривые и поверхности в биологии. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Некоторые механические задачи, относящиеся к скелетам радиолярий. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О движении водных организмов. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Органические формы в четырехмерном пространстве. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Проблемы о сферах и кругах в биологии. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

По методике математики

- Анализ и синтез в методике математики. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Геометрические модели в средней школе. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Геометрические построения в школе (1947). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

- Дидактика опроса ученика по математике (1947). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Исторический материал при преподавании математики в средней школе (1947). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Логика построения математической школьной дисциплины (1947). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Математическая мнемоника. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Методика дифференциальных уравнений первого порядка. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Методика формальных операций при решении уравнений первой степени (1947). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Мнение о программах педагогических институтов (конец отсутствует). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Научная строгость и методика математики (конец отсутствует). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Неразрешимые задачи в науке и школе (1947). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- О разложении на множители (1947). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Прошлое, настоящее и будущее методики математики. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Психология детского рисунка и школьного чертежа. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Психология математического мышления. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Психофизический закон и приложение его к педагогике. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1, № 13, 11 с.
- Решение треугольников без тригонометрическо-логарифмических таблиц (1947). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Установка понятия в тригонометрических величинах (1947). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Эвристическая метода при преподавании математики в школе. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

По истории науки

- Античные геометрические проблемы. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Аристотель и математика. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Введение к сборнику работ по истории математики. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Геометрия без аксиом. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Закон гетерогонии целей в истории математики. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

- Из истории дробей (1948). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Из истории объемов и поверхностей. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Из истории эйлеровых и лежандровых функций. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Из прошлого аналитической геометрии. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Интегрирование функций в различные эпохи. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- История касательной. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- История логарифма отрицательного числа. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1, № 27, 25 с.
- Основания геометрии в XVI в. (1929). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Очерки из истории обыкновенных дифференциальных уравнений. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Происхождение иррационального числа. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Происхождение понятия пространства. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Пять основных этапов развития анализа бесконечно малых. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Сущность и происхождение аналитической геометрии. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Угол касания. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Евклид и учебник (1938–1939). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Эволюция понятия функций. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Эволюция русской математической терминологии. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

По психологии

- Психология и Метафизика Сновидений. Ростов. 1949 г., 236 стр. рукописного текста. Личный архив Л.Ф. Болтовской.

По генеалогии

- О великорусском элементе в литовско–русском боярстве XVI в. (1929). Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Об образовании белорусских фамилий. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.
- Отзывы о научных трудах других лиц
- Отзыв о научных трудах: С. П. Волков “Параллельные проекции и родственные фигуры”. Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

Отзыв: Н. А. Колмогоров. "Геометрия тетраэдра евклидова и неевклидова пространства". Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

Отзыв о диссертации: А. Т. Подколотин "Рост целой функции в зависимости от ее арифметических свойств". Архив АН СССР, Ленингр. отд., фонд 821, оп. 1.

Литература о Д. Д. Мордухай-Болтовском:

Александров А. Д. Геометрия. БСЭ, Изд. 2-е, т. 10, 1952, с. 546.

Александров А. Д. Лобачевского геометрия. БСЭ, Изд. 2-е, т. 25, 1954, с. 320. Башмакова И. Г., Ожигова Е. П. Исследования по истории математики // Вопросы истории естествознания и техники, вып. 3-4. М. Наука. 1971. С. 9, 12, 13, 16. Башмакова И. Г. и Маркушевич А. И. "Начала" Евклида. БСЭ, Изд. 2-е, т. 29, 1954, с. 311 (8).

Бермант А. Ф. и Маркушевич А. И. Теория функций комплексного переменного. Математика в СССР за тридцать лет 1917-1947. М.-Л. ОГИЗ. 1948, с. 378, 381, 382.

Боголюбов А. Н. Розенфельд Б. А. и Юшкевич А. П. История математики. История отечественной математики в четырех томах, 1917-1967, т. 4, кн. 2. Киев, "Наукова думка", 1970, с. 458, 459-461, 463, 468, 490, 495. Боголюбов А. Н. Розенфельд Б. А. и Юшкевич А. П. История математики. История отечественной математики в четырех томах, т. 3, 1917-1967. Киев, "Наукова думка", 1968, с. 14, 28, 76, 134, 157.

Буймола Г. Л. Проективная геометрия. История отечественной математики в четырех томах, т. 3, 1917-1967. Киев, "Наукова думка", 1968, с. 430, 431.

Бюшгенс С. С. и Глаголов А. А. Синтетическая геометрия. Математика в СССР за тридцать лет 1917-1947. М.-Л. ОГИЗ. 1948, с. 940, 946, 948, 949, 952.

Выгодский М. Я. "Исследования" Мордухай-Болтовского. О книге Д. Д. Мордухай-Болтовского "Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики". На борьбу за материалистическую диалектику в математике. М.-Л., Гос. науч.-техн. изд-во, 1931, с. 183-191.

Выгодский М. Я. О новых работах проф. Д. Д. Мордухай-Болтовского. (Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики). Естествознание и марксизм, 1929. № 3, с. 154-160.

Гельфонд А. О. Теория чисел. Математика в СССР за тридцать лет 1917-1947. М.-Л. ОГИЗ. 1948, с. 63, 64.

Геометрические построения. БСЭ, Изд. 2-е, т. 10, 1952, с. 532-533.

Добровольский В. А. и Пясковский Б. В. Математика в Ростовском университете, Варшавском, Донском и Рижском политехнических институтах. История отечественной математики в четырех томах, т. 2, 1801-1917. Киев, "Наукова думка", 1967, с. 527, 528, 530, 531, 559, 565, 567, 568, 572, 584, 588, 593.

- Ефимов Н. В. Геометрия “в целом”. Математика в СССР за сорок лет. 1917–1957, т. 1. М. Физматгиз. 1959, с. 952.
- Каган В. Ф. Основания геометрии. Учение об обосновании геометрии в ходе его исторического развития. Ч. 1. Геометрия Лобачевского и ее предистория. М.–Л. Гостехиздат, 1949. [О Д. Д. Мордухай–Болтовском, 35, 40, 80, 85, 196, 376, 377, 378, 379, 384, 385, 388, 395, 477, 478].
- Кирищев Р. И. Об одной теореме Д. Д. Мордухай–Болтовского. Успехи математических наук, 1956, т. 11, вып. 1, с. 207–208 (6).
- Лозинский С. М. и Натансон И. П. Метрическая и конструктивная теории функций вещественной переменной. Математика в СССР за сорок лет. 1917–1957, т. 1. М. Физматгиз. 1959, с. 378.
- Мамеева Т. Г., Налбандян М. Б. О некоторых неопубликованных работах Д. Д. Мордухай–Болтовского // Наука и техника. Вопросы истории и теории. Материалы годичной конференции Ленинградского отделения Советского национального объединения истории и философии естественных наук и техники. Ленинград. 1971, вып. 6, стр. 101.
- Мандзюк А. И. О некоторых теоремах проф. Д. Д. Мордухай–Болтовского и японского математика Огино Судзюки // Труды научно-технической конференции Военно-трансп. акад., т. 2. Л. 1938, с. 61–64.
- Метелька И. Замечания к статье Д. Д. Мордухай–Болтовского “Трехмерный и четырехмерный аналогон теоремы Паскаля”. [Успехи математических наук, 1953, т. 8, вып. 2]. Успехи математических наук, 1954, т. 9, вып. 3, с. 383–384.
- Минковский В. Л., Мокрищев К. К., Налбандян М. Б., Хапланов М. Г. Дмитрий Дмитриевич Мордухай–Болтовский (к 100-летию со дня рождения) // Вопросы Истории Естественных наук и Техники, вып. 3–4 (56–57) 1977 г., стр. 103.
- Минковский В. Л. К пятидесятилетию научно-педагогической деятельности профессора Д. Д. Мордухай–Болтовского // Математика в школе, 1949, № 2, с. 45–47 с портр.
- Мордухай–Болтовский Д. Д. (1876–1952). [Фонд принят от сына Ф. Д. Мордухай–Болтовского по частям в 1953–1955 гг. 1929–1950 гг. 157 ед. хр. Ленинградское отд.]. Архив Академии наук СССР. Обзор архивных материалов, т. 4. М.–Л. АН СССР, 1959, с. 17–20 (2). (Труды Архива АН СССР, вып. 16).
- Известия Северо-Кавказского университета, 1928, т. 3 (15), 231 с. с портр. Посвящается 30-летию юбилею научно-педагогической деятельности Дмитрия Дмитриевича Мордухай–Болтовского.
- Математика в СССР за сорок лет. 1917–1957, т. 2. Библиография. М. 1959, с. 479 (113).
- Несторович Н. Геометрический кабинет СКГУ в его прошлом и настоящем // Известия Северо-Кавказского университета, 1928, т. 3 (15), с. 22–30.

- Несторович Н. К 30-летию научной и педагогической деятельности проф. Дмитрия Дмитриевича Мордухай-Болтовского // Известия Северо-Кавказского университета, 1928, т. 3 (15), с. 3–6 с портр.
- Несторович Н. О работе методического Colloquium'a по математике при Геометрическом кабинете СКГУ, руководимой проф. Д. Д. Мордухай-Болтовским // Известия Северо-Кавказского университета, 1928, т. 3 (15), с. 31–34.
- Несторович Н. О работе математического Семинария Варшавского и Донского университета, руководимого проф. Д. Д. Мордухай-Болтовским, за 14 лет его функционирования. 1911–1924 гг. // Известия Северо-Кавказского университета, 1928, т. 3 (15), с. 12–21.
- Несторович Н. По поводу 40-летия научной, педагогической и общественной деятельности проф. Дмитрия Дмитриевича Мордухай-Болтовского // Известия Ростовского пед. ин-та, 1940, т. 10, с. 3–9.
- Несторович Н. Список печатных работ проф. Д. Д. Мордухай-Болтовского // Известия Северо-Кавказского университета, 1928, т. 3 (15), с. 7–12.
- Рогаченко В. Ф. Рецензии на кн.: “Начала” Евклида. Пер. с греч. и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского // Вопросы элементарной и высшей математики, 1952, вып. 1, с. 92–95.
- Руссьян Ц. К. Об ответе Д. Д. Мордухай-Болтовского на мою рецензию его докторской диссертации. [“Об интегрировании в конечном виде линейных дифференциальных уравнений”]. Записки Харьковского ун-та, 1915, кн. 1, [разд.] Приложение, с. 1–12.
- Руссьян Ц. К. Отзыв о диссертации Д. Д. Мордухай-Болтовского “Об интегрировании в конечном виде линейных дифференциальных уравнений”. Записки Харьковского ун-та, 1913, кн. 3, ч. офиц., с. 51–57.
- Саморуков Б.Н., Степанова А.С. Д.Д. Мордухай-Болтовской о зарождении и развитии математических идей // Историко-математические исследования, №32 М, 1993.
- Хапланов М. Г. Выдающийся математик Д. Д. Мордухай-Болтовской (1876–1952). Ростовский государственный университет. 1915–1965. Статьи, воспоминания, документы. Отв. ред. С. Е. Белозеров. Ростов н/Д, Изд-во Рост. ун-та, 1965, с. 145–160.
- Цыганкова Э. Г. и Ковальчук Л. В. Советские математики (краткий биографический словарь). История отечественной математики в четырех томах, т. 4, кн.2, 1917–1967. Киев, “Наукова думка”, 1970, с. 597.
- Чалый А. Т. Начертательная геометрия. История отечественной математики в четырех томах, т. 3, 1917–1967. Киев, “Наукова думка”, 1968, с. 435 (635, 690, 691).
- Черняев М. Н. Проф. Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской // Математика в школе, 1952, № 4, с. 4–5 с портр.
- Черняев М. П., Несторович Н. М. и Ляпин Н. М. Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской (1876–1952) // Успехи математических наук,

- 1953, т. 8, вып. 4 (56), с. 131–139, 1 портр. Список опубликованных работ Д. Д. Мордухай–Болтовского, с. 134–139 (162).
- Четверухин Н. Ф. Начертательная геометрия. Математика в СССР за сорок лет. 1917–1957, т. 1. М. Физматгиз. 1959, с. 895, 896, 897.
- Юшкевич А. П. История математики. Математика в СССР за тридцать лет. 1917–1947. М.–Л. ОГИЗ, 1948, с. 996, 1000, 1005, 1006, 1008, 1009.
- Юшкевич А. П. История математики. Математика в СССР за сорок лет. 1917–1957, т. 1. М. Физматгиз. 1959, с. 957, 960, 965, 966.
- Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 года. М. Наука. 1968, с. 49, 308, 313, 315, 385, 386, 433, 437.
- Юшкевич А. П. Новые издания классиков математики. [Евклид. “Начала” Евклида. Пер. с греч. и коммент. Д. Д. Мордухай–Болтовского.] Успехи математических наук, 1949, вып. 2, с. 217–218.
- Młodziejowski B.K. [О работе Mordouhay Boltovskoy: Sur quelques propriétés arithmétiques des solutions des équations différentielles algébriques. Annales de l'école normale supérieure, t. 27, 1910]. Revue semestrielle des publications mathématiques, 1912, t. 20, p. 2, p. 107.
- Мордухай–Болтовской Д. Д. Белозеров С. Е. Математика в Ростовском университете. Историко–математические исследования, 1953, вып. 6, с. 247, 260, 261–262, 267, 277, 278, 285, 308, 312–318, 320, 321, 327–330, 333, 335–337, 341, 342, 344–349 с портр.
- Мордухай–Болтовской Д. Д. Белозеров С. Е. Очерки истории Ростовского университета. Ростов н/Д, Изд-во Рост. ун-та, 1959, с. 223, 224.

ПРИМЕЧАНИЯ

Биографический очерк

- ¹ Об истории рода Мордухай–Болтовских см: *Annuaire de la Noblesse de Russie*. St.Petersbourg. 1900. Прим. ред.
- ² М.Г.Хапланов, Э.Д.Болтовская. Дмитрий Дмитриевич Мордухай–Болтовской – рукопись, хранящаяся у Э.Д. Болтовской. Прим. ред.
- ³ См. об этом: И. Гегузин. Студенческие годы Александра Солженицына // *Студенческий Меридиан*, 1990, №7, стр.24. Прим. ред.

Четыре лекции по философии математики

Прочитаны на курсах для преподавателей средней школы летом 1912 г. Варшава, 1913 [2], IV, 78 с. с илл.

Введение

- ¹ Конспект лекций, прочитанных для школьных преподавателей математики Варшавского учебного округа летом 1912 г. Прим. ред.
- ² Кому принадлежат эти инициалы, установить не удалось. Прим. ред.
- ³ См.: Лекцию 2. Прим. ред.

Лекция I

- ¹ См.: например: Л.С.Атанасян, В.Г.Базылев. *Геометрия*. М. 1986. Прим. ред.
- ² Точнее говоря, принять отрицание этой аксиомы – оговорка автора. Прим. ред.

Лекция II

- ¹ В более привычной записи: $p \& q \supset p$. Прим. ред.

Лекция IV

- ¹ C_f . *Arist.Phys.* 207a. Прим. ред.
- ² В том смысле, что определяемые числа суть корни этого уравнения. Прим. ред.

Психология математического мышления.

Вопросы философии и психологии. 1908. 19. Кн. 4 (94). С. 491–534.

- ¹ Рибо (Ribot). Sur l'imagination creatrice, p. 205.
- ² Шопенгауэр. Мир как воля и представление. Т. II. Гл. XLIII.
- ³ Кант. Антропология. §54.
- ⁴ Кант. Антропология. I. §42.
- ⁵ Физиологическая психология. Т. II. Гл. XVIII.
- ⁶ Essai sur l'imagination creatrice, ch. IV, p. 199.
- ⁷ Физиологическая психология. Т. II. Гл. XVIII.
- ⁸ Сравнение Рибо памяти с кладовой, где в отдельных ящиках сохраняются все наши сведения, не подходит к элементарной памяти. Для объектов последней не существует ящиков. Эта память скорее похожа на перевалочную станцию, где товар перегружается с одного поезда на другой, чтобы тотчас оставить эту станцию.
- ⁹ Рибо. Память в ее нормальном и болезненном состоянии. Стр. 55.
- ¹⁰ Вслепую – (фр.). Прим. ред.
- ¹¹ Binet. Memoir visuelle geometrique. Revue Philosophique, 1893, № 1.
- ¹² Гипотеза и наука. В книге: А. Пуанкаре. О науке. М. 1983. Прим. ред.

Случай и бессознательное.

Вопросы философии и психологии, 1912, кн. I (III). С. 97–117.

- ¹ Ф.М. Достоевский. Игрок. Собрание сочинений в 10-ти томах. Т. 4. М. 1956. Прим. ред.
- ² Психология. С. 83.
- ³ A. Binet. Les alterations de la personnalite. 1892.
- ⁴ Binet, p. 275.
- ⁵ Binet, p. 81.
- ⁶ Binet, p. 93.
- ⁷ Вундт. Физиологическая психология.
- ⁸ Рибо. "Болезни личности". СПб. стр. 66, 77.
- ⁹ Персонаж рассказа И.Ф. Горбунова (1831–95) "На почтовой станции". См. ПСС. СПб. 1904. Т. I. Прим. ред.
- ¹⁰ Binet, p. 319.
- ¹¹ Ф.М. Достоевский. Идиот. С. С. в 10-ти томах. Т. 6. М. 1956. Прим. ред.

О законе непрерывности.

Вопросы философии и психологии. 1907. Кн. 87 (2). С. 168–184.
То же: М. 1907. 19 с.

- ¹ Природа не делает скачков – (лат.). Прим. ред.
- ² Лейбниц. Соч. 4 т. Т. 2. М. 1983. Новые опыты о человеческом разуме-нии. Кн. 4, гл. 16, §12. Прим. ред.

- ³ Oeuvres de Leibniz. Nouveaux Essais sur l'entendement humain. Livre IV. Chap. XVI. §12. Лейбниц, цит. соч., кн.4 гл. 16, §12.
- ⁴ Н. В. Бугаев. Математика и научно-философское мирозерцание. // Вопросы Философии и Психологии, 1898 г. Книга V (45). С. 697.
- ⁵ Cursus der Philosophie. Leipzig. 1875. S. 93–94
- ⁶ Так называет Некрасов то направление, основанное на идеях Бугаева, к которому принадлежит Бугаев, Некрасов, Алексеев и другие мыслители математики. См.: С.М. Половинин. Московская философско-математическая школа // Общественные науки в СССР. Сер. 3. Философия. 1992 г. № 2. Прим. ред.
- ⁷ В.Г. Алексеев. Математика, как основание критики научно-философского мировоззрения. Юрьев. 1903 г., С.25.
- ⁸ Н.В. Бугаев. Математика и научно-философское мирозерцание. // Вопросы Философии и Психологии, 1898 г., книга V (45).
- ⁹ Cursus der Philosophie. Leipzig. 1875. S. 92–93.
- ¹⁰ П.А. Некрасов. Московская-философская мат. школа. С. 59.
- ¹¹ Ломброзо и Ляски. Политическая преступность и революция. Ч. I, гл. I.
- ¹² Delboenf. Elements de psychophysique, p. 148.

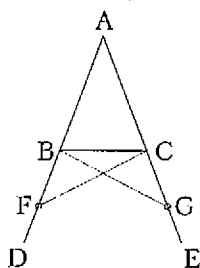
Ненатуральное и апагогическое доказательство в прошлом и будущем.

Математическое образование, 1929, № 1, с. 19–34.

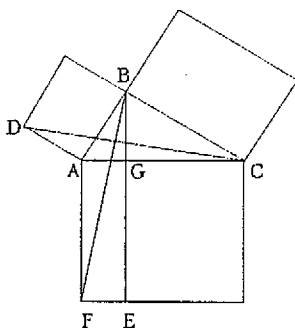
- ¹ Отметим основную проблему определения права, различно решаемую Кантом, Иерингом и др. См.: Шершеневич. Определение понятия права. Казань. 1896. Коркунов. Лекции по общей теории права. Спб. 1897.
- ² Не будем упоминать о классиках схоластики и работах по средневековой философии. Отметим любопытную книгу по популярной схолистике, где можно найти все основные схолистические вопросы: Knithel. Aristoteles curiosus. Praga. 1682. Fylkowski. Philosophia curiosa. 1680.
- ³ О значении схоластики в истории математики я говорю в работах: “Философско-математические идеи XVI века.”, “Генезис современного числа.”, “Аксиоматика XVII в.”, “Генезис и истории теории пределов.” См.: нас. изд.
- ⁴ Рамус 1515–1572. Waddington. Ramus, sa vie, ses ecrits et ses opinions. Paris, 1855. G. Wierkert. Encyclopadie des Petrus Ramus. Leipzig, 1848. Ziehen, §. 23. Моя работа: “Философско-математические идеи XVI века.”
- ⁵ Renati Descartis. Principia philosophiae. Amstelodami, 1677, и другие работы. Купо Фишер. Т. 1. О логике Декарта. Ziehen. Lehrbuch der Logik. Berlin. Т. 1. Cap. 2, §. 23. Там же о Bouse, §. 32.

- ⁶ Haureau. De la philosophie scolastique. Paris. 1850. Работы Werner, Rousselot.
- ⁷ Aristoteles. Opera omnia graece et latine.
Об определении Аристотеля: *Analyt.* pr. 11, c. 3.
Об аристотелевском методе: Eiken. Die Methode der aristotelischen Forschung. Berlin. 1872. Gottini. Aristotele e il metodo scientifico. Pisa, 1873. См. также: Franz Biese, Aristoteles Philosophie. Berlin. 1835–1842. Cousin. De la Methaphysique d'Aristotel. Paris, 1838. О логике Аристотеля: см. Ziehen. Lehrbuch der Logik. Berlin, 1920. Teil 1, §. 9.
О схоластическом методе: Carl Prantl. Geschichte der Logik im Abendlande. Leipzig. Bd. 1, 1855. Bd. 2, 1863. Bd. 3, 1867. Bd. 4, 1870. Ziehen. 1 Teil.
О различных смыслах субстанции. *Met.* V. 8.
О принципе, *Met.* V, I.
- ⁸ *Met.* 1059b34 – 1060a1. Прим. ред.
- ⁹ Интересно отметить, что древние при решении проблемы не ставили вопроса о единственности решения, а находят какое-либо решение, вполне удовлетворяясь им. См.: напр., “Арифметику Диофанта”. Впервые проблема о единственности решения ставится схоластикой в чисто теологической сфере. См.: S. Anselmi. Prologium... Monologium... Migne. Patrologia. T. 158. Ансельм, 1033–1109.
- ¹⁰ О подобии – Аристотель. *Met.* V. 9.
- ¹¹ О платоновских идеях см. его диалоги: Федон, Тезтет, Софист, Кратил, Филеб, Менон, Федр и т.д. Аристотель против идей Платона. *Analyt. Post.* lib. 1, 2, 19. *Met.*, lib. VII, c. 14, 15; X, c. 10; XI, 4, 5, 11, 12; XIII, 2; XIV, 3.
- ¹² О субстанциях. *Met.* V. 8. Взгляды Аристотеля на определение см. *Anal. Post.* Lib. I. 13.
- ¹³ Характеристика античной мысли: Шпенглер. Закат Европы.
- ¹⁴ Petri Rami. Geometriae. Libri XXVII. Basileae. 1560. Scholarum. Mathematicarum Libri unus et triginta Basileae, 1569. Fracfurti. 1569
О Рамусе см. мою работу: “Философско-математические идеи XVI века.”
- ¹⁵ Гильберт. Основания геометрии. Русск. пер. Спб. 1923.
- ¹⁶ Об определениях: Bonnel. Essai sur les definitions geometriques. 1870. Liard. Des definitions geometriques e des definitions empiriques. Paris. Alcan. 1888. Историю и вместе с тем методическое значение определений можно найти в прекрасной книге: Schotten. Inhalt und Methode des Planimetrischen Unterrichts. 1870.
- ¹⁷ Определение знания у Аристотеля. *Anal. Post.* I, 9. II, 12, 13.
- ¹⁸ *Met.* 1005b20. Сравните критику Канта в “Критике чистого разума”. Уч. эл. 1 отд., 2 гл., 1 сек. Прим. ред.

- ¹⁹ Возражения антиматематиков собраны в книге: Hugonis Simplicii Crasgbartaci Scoti, E. Soc. Iesu. de Mathematicis disciplinis libri duodecim. Antv. 1635.
Simplicius – латинизированное Hugo Simple, 1594–1654. См.: Cantor. Geschichte d. Mathematik.
- ²⁰ См.: Спиноза. Этика.
- ²¹ Walisi. Mathesis universalis, cap. III. De demonstrationibus mathematicis.
- ²² Впервые различие доказательств: $\tau\omega\ \sigma\tau\iota$, $\tau\omega\ \delta\iota\omicron\tau\iota$ (quia et quare) у Ал-фараби (ум. в 950). См. Baur. Beitrage z. Geschichte der Philosophia des Mittelalters. Bd. 4. H. 23. Munster 1903. Другая библиография у Ziehen. Lehrbuch der Logik. Bonn. 1920. Т. I. Cap. 2, § 19, также Ziehen, T. IV, § 135, S. 805. [Это различие восходит к Аристотелю. См. An. Post. кн. I, гл. 13.] Прим. ред.
- ²³ L'art de penser. p. 392 (это так называемая Пор-роялевская логика Арно и Николя) Pierre Nicole, 1625–1695, Antoine Arnauld, 1612–1694. [В русском переводе: А. Арно и П.Николь. Логика или искусство мыслить. М. 1991] Требования пор-роялевской логики Арно старается осуществить в своем "Nouveaux elements de Geometrie". Paris, 1683.



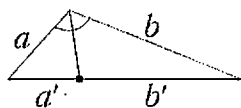
Прим. ред.



Прим. ред.

Евклид доказывает теорему Пифагора (для треугольника ABC), доказывая равенство треугольников DAC и BAF, откуда следует равенность квадрата на катете AB и прямоугольника AGFE, являющегося частью квадрата на гипотенузе AC. Аналогично доказывается, что оставшаяся часть квадрата на гипотенузе равна квадрату на другом катете.

Legendre. Elements de Geometrie.



$$\frac{a}{a'} = \frac{a' + b'}{a}; \quad \frac{b}{b'} = \frac{a' + b'}{b};$$

$$a^2 = a'^2 + a'b'; \quad b^2 = b'^2 + a'b'$$

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b' = (a' + b')^2 = c^2$$

Прим. ред.

28 О софистах: “Диалоги” Платона: Софист, Протагор. Xenophonti. Memorabilia. Soc. XVI–II, 2. Sextus Empiricus. Adversus Logicos. Lb. VII. А. Гиляров. Греческие софисты. Москва, 1888. И. Ягодинский. Софист, Протагор. Казань, 1916. См. мою работу: “Об апалогических доказательствах”.

29 Евклидовых “Начал” восемь книг. Пер. Петрушевского. Спб. 1819. “Начала” Евклида. Пер. Ващенко-Захарченко. [См. также пер.: Мордухай-Болтовского. М. 1950.]

30 Elem. Euclidis ed. Heiberg. IX, 12. Sacceri. Euclides ab omni naevo vindicatus. Milan. 1739. Vailati. Sur une classe remarquable de raisonnements par reduction a l'absurde. Revue de Metaphysique. 1901, p. 799.

31 Aristotelis. Analytica Post. Lib. I, cap. 26. Интересно отметить, что Спиноза не может обойтись без апалогических доказательств. См.: его “Этику”, I часть, т. V, 8, 11 и 14.

32 В особенности интересно выпрямление Озанамом XI теоремы книги III “Начал: “Если круг ABC касается круга AIKM внутри этого последнего, то прямая, соединяющая их центры, проходит через точку их касания”. Ozanam. Cours de Mathematiques. Paris, 1720. Sect. XI.

33 Kepler. Nova stereometria doliorum, 1615. Opera omnia. IV, pp. 537–538. Эмбрион еще до Кеплера у Stiffel. Arithmetica integra Nova. 1544. Appendix libri secundi. О методе неделимых. Brunschwigg. Les etapes. Lib. III, ch. IX, p. 160. Ziehen. Geschichte der Math. in XVI und XVII Jahrh. Leipzig. 1903, S. 121. Bon Cavalieri. Geometria indivis. cont. nova quidem ratione promota, Bononiac. 1635, 1653. Exercitationes. Bon. 1643. Метод неделимых проходит через три ступени: Roberval, Gregorius. Vencentio и Taquet. Cantor II, 392. Против апалогических доказательств – Рамус (1515–1572).

- ³⁴ P. Rami, *Proemium Mathematicum*. 1507. p. 428–429.
- ³⁵ Sawilli. *Lectioes*.
- ³⁶ История полной математической индукции: Francisko Maurolico. *Arithmeticae, Libri duo*. 1557. Ven. 1577. Jacob Bernoulli. *Ars consecretandi*, изд. 1713. Opera I, 282–283. Pascal. *Oeuvres*. Paris. 1908. Т. III, p. 456. Cantor. *Vorlesungen*. B. 111, S. 341. G. Vacca. *Sur le principe d'induction math*. *Revue de Meth*. 1911, p. 30.
- ³⁷ Возведение принципа полной математической индукции в определение – см.: Кутюра. Принципы математики.
О сверхлогичности полной математической индукции: Менделеев. *Метод математики*.
- ³⁸ Пуанкаре. Гипотеза и наука. [В книге: А. Пуанкаре. *О науке*. М. 1983.]
- ³⁹ *Anal. Poster. Lib. I*, С. XIX, XXI, XXII, XXIII.
- ⁴⁰ Более подробно: Лобачевский и основные логические проблемы в математике. [См.: наст. изд.]
- ⁴¹ Первый опыт построения математической системы без аксиомы исключенного третьего. Brouwer. *Begrundung der Mengenlehre unabhangig von logischen Satz von Abgeschlossenem, dritter Theil*.
- ⁴² См. мои работы: *Sur les syllogismes en logique et hypersyllogismes en Metalogique*. Прот. О-ва ест. при С.-Кав. гос. университете *Metalogique, Metaalgebre*. Прот. О-ва ест. при С.-Кав. гос. университете за 1928 г. До меня понятие металогикки было обработано, но только с философской, а не математической стороны, проф. Н. Васильевым. (*Журнал министерства народного просвещения*, 1905).

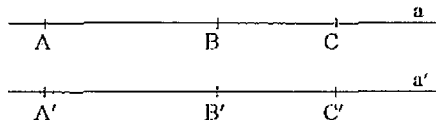
Метаалгебра.

Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1937, т. 1, с. 21–25.

¹ Аксиома III₃ Гильберта (*Основания геометрии*. М. 1948)

Пусть АВ и ВС – два отрезка на прямой a без общих точек, пусть А'В' и В'С' – два отрезка на другой прямой a' тоже без общих точек.

Если при этом $AB = A'B'$ и $BC = B'C'$, то всегда также $AC = A'C'$.



О числовой характеристике утверждаемого тождества.

Известия Донского университета, 1925, т. 7, с. 40–43.

Лобачевский и основные логические проблемы в математике.

Известия Северо-Кавказского университета, 1927, т.1(12), с.78–95.

- ¹ Речь, прочитанная на торжественном заседании в память столетия открытия неевклидовой геометрии.
- ² Вундт в следующих словах формулирует закон гетерогонии целей: “Воля всегда проявляется так, что результаты постоянно более или менее выходят за пределы первых мотивов воли”. Вундт. Этика. Рус. пер. Отд. I, гл. IV, стр. 282.
- ³ Такова, например, совершенно не обоснованная вера в то, что всякое уравнение разрешается в радикалах. Такова необоснованная вера в то,

что все интегралы, даже $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ приводятся к интегралам

рациональных функций и выражаются в конечном виде (см.: *Lettre XIII d'Euler a Goldbach*). Такова вообще вера в то, что решение проблемы в частном случае при введении некоторых ограничительных условий Ω способствует решению проблемы в общем случае. Вместо проблемы P решается $(P\Omega)$, где Ω подбирается так, что не поддающаяся в общем случае решению задача решается при этом ограничении.

Весь метод обычно зиждется на этом ограничительном условии. Если снять его, то разрушится и вся постройка. Вообще решение проблемы при ограничительном условии Ω *ничего не дает* для решения общей проблемы, ибо метод для решения P при предположении, что Ω не имеет места, будет тот же, что в общем случае, т.е. при Ω и без Ω безразлично.

- ⁴ Построение корня уравнения $x^3 = a$ (решение Делийской проблемы) сперва вовсе не являлось задачей более *простой*, чем решение уравнения $x^3 + ax = b$ и арабские математики не находили оснований сводить вторую задачу к первой. Задача о построении корня уравнений 3-й степени *с помощью циркуля и линейки* с развитием арабской алгебры должна была превратиться в задачу о нахождении иррациональностей по X книге “Начал” Евклида, удовлетворявших этому уравнению, а в дальнейшем, когда алгебра расширила сферу радикальных выражений, – о разрешении уравнений 3-й степени с помощью радикалов 2-й степени. Тщетные попытки решения этой проблемы привели к *сомнению* в возможности ее решения, которое вероятно было и у арабов, превратившееся в уверенность после доказательств невозможности решения уравнения 3-й степени с помощью иррациональностей Евклида.

Естественно, путь дальнейшей эволюции проблемы – замена области иррациональностей Евклида областью иррациональностей более общего

характера, зависящих от радикалов высших степеней, т.е. принятия $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$ за элементы построения.

Таким образом была поставлена задача о решении в *радикалах* кубического уравнения, которое вскоре и было решено в этом смысле Тарталья и Кардано. Затем вскоре такая же задача была решена Ферари для уравнения 4-й степени.

5 Этическая проблема подвергается метаморфозе.

Вывод моральных норм из эгоистических интересов, из единственного стремления организма к самосохранению (*Summ esse conservare*), конечно, Спинозой (“Этика”) понимается совершенно иначе, чем дарвинистами второй половины XIX столетия. Мы имеем сперва логический вывод всей системы альтруистической морали из эгоистических предпосылок, здесь нет ни слова о том, *каким образом* возникла альтруистическая мораль.

У сенсуалистов XVII века исследование генезиса морали является только средством для эгоистического ее обоснования. Любимая их мысль, что всякий альтруистический поступок — это эгоизм, скрытый под маской, созданной культурой, что на более низких ступенях культуры, приближающихся к естественному состоянию, — маски уже нет.

Гельвеций отстаивает *тождество блага и полезного*. Честь — это привычка к поступкам, полезным для общества. Отсюда заключение, что моралист и законодатель прежде всего должны апеллировать к пользе индивидуума.

Гельвеций прежде всего моралист, он пытается обосновать этические нормы на эгоизме и, верный характеру того времени, обращается к “методу происхождения”, старающейся подойти к естественному состоянию. Но в дальнейшем генетическая этика является уже самоцелью.

Мы имеем уже не вывод альтруистических норм из эгоизма, а объяснение *их происхождения* из эгоизма дикого человека.

Особенно резко различие в понимании эгоистического этического морализма выступает при спенсеровской точке зрения, заменяющей индивидуальный сенсуализм видовым.

6 Те явления радиоактивности, которые обещают решение *экономической* проблемы алхимии, подводят не к решению алхимической проблемы, а к *доказательству ее невозможности*. Эту проблему постигает совершенно та же участь, что и другие проклятые проблемы, на которые человек веками тратил силы. Превращение в золото металла с меньшим атомным весом потребует такой энергии, которую нельзя купить на получаемую ценность, превращенный же в золото элемент с большим атомным весом потребует благородный металл в количестве, стоящем дороже, чем получаемый продукт.

Одним словом, химик окажется в таком же положении, что Муассон при добычании алмаза из нагретого до 3000° сплава железа и угля. При затрате тока в 31500 вольт, получались крошечные кристаллики алмаза. Но Содди замечает, что ценность полученной таким образом материи будет ничтожна в сравнении с теми неимоверными количествами энергии, которые будут выделяться при этом процессе. Энергия элементов вещества, освобожденная от заколдованного сна, в который он погружен природой, заняла бы вскоре первое место в народном хозяйстве. В сравнении с ее громадным значением золото явилось бы только побочным продуктом разложения.

Таким образом, вместо алхимической проблемы, мы решаем другую, тоже экономическую проблему.

- 7 Основание привилегированности механики чисто психологическое, так как именно механические явления имеют наибольшее значение в обыденной жизни при невысокой культуре, вследствие чего механика и развивается раньше других отделов физики, занимаясь сведением более сложных механических явлений к более простым.

Современный же химический атом представляется *системой электронов*, частиц, несущих положительные и отрицательные заряды и являющихся последними неделимыми. Положительный электрон уподобляется солнцу, окруженному планетами – отрицательными электронами, находящимися в движении, но образующими вообще неустойчивые системы, подвергающиеся распаденню.

- 8 Было бы глубочайшим заблуждением полагать, что задача вообще неразрешимая об интегрировании в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных или в квадратурах эволюционировала в задачу *вообще разрешимую*. Нет никакого основания считать, что всякая особенная точка характеризуется формой вроде тех, которые даются Брио и Буэ и Фуксом, Томэ и другими, т.е. формой, построенной с помощью конечного числа символов элементарных трансцендентных и операцией, выражающей алгеброидальное разложение.

- 9 Очень яркую картину гетерогонии дает история педагогики. Цель воспитания для спасения индивидуальной души эволюционирует в воспитание человечества для встречи второго пришествия. В эпоху Возрождения для воспитания этого трансцендентального идеала представляется необходимым власть над враждебными силами природы. Отсюда утилитаризм пансофии Каменского, сводящийся к собиранию знаний. Знания затем обращаются в самоцель. Но осознание некрепости пассивного приобретения знаний приводит к упражнению, как средству. Последнее обращается в цель, – воспитание определенных способностей, когда Песталоцци выдвигает формально–воспитательный принцип в противовес материальному.

- ¹⁰ Аксиома или 5-й постулат "Начал" Евклида эквивалентен утверждению о единственности прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку. Геометрия Лобачевского получается из евклидовой при замене этой аксиомы (постулата) на ее (его) отрицание.
- ¹¹ Геометрия Рамуса представляет не что иное, как комментарии к "Началам" Евклида, но не соединенные с их переводом (как, например, комментарии его современника Клавия), а изданные отдельно. Для Рамуса и рамистов самым важным в геометрии является определение, а за ним уже теоремы. Главный недостаток Евклида, по Рамусу, в том, что он идет *от частного к общему*, вместо того, чтобы идти от общего к частному. Параллелизм прямых Рамус подводит под общее понятие *параллельных линий* (как прямых, так и кривых). Параллельными являются не только прямые, но и две концентрические окружности. Характерным признаком, определяющим параллельность, является равно удаленность. См. мое сочинение: "Философско-Математические идеи XVI века" [наст. изд.].
- О Рамусе:
C. Waddington: Ramus, sa vie, ses ecrits et ses opinions. Paris. 1855.
Сочинения Рамуса:
Dialecticae Libri Duo. 1586. Geometriae Libri XXVII. Basilaе. 1569. Scholarum Mathematicarum Libri novem et triginta. Basileae. 1569. Francfurti. 1569.
Сочинения рамистов: Methodus admirandarum mathematicarum novem libris etc. autore Ioahanno Henrico Alstedio. Herbornae. 1623. Об Алштеде: Cantor II ч., 19. Kastner. III. 434–438. Riff Quaestiones. Geometriae Oxoniae 1665. Рамическая тригонометрия: Funkii. 1584. Алгебра Salignaci. Рамическая диалектика: Caesari. 1552, Hunneae, Tousacae, Ursini.
- ¹² Анализ определения параллельных, как прямых *равноотстоящих*, приводит Клавия к сознанию необходимости *оправдания этого определения*. Следует убедиться, что линия, все точки которой равноудалены от прямой, также прямая. И в этом состоит первое положение теории параллельных Клавия. Но при этом положении нет в собственном смысле *доказательства*, а только пояснение; имеющее целью повысить степень очевидности этого не вполне очевидного положения. Все сводится к ссылке на то, что линии с равноотстоящими от данной прямой точками должны обладать *однородностью*, равно лежать всеми своими точками, причем делается попытка пустить в ход определение 4-е первой книги "Начал" Евклида, остающееся у самого Евклида неиспользованным. Дальнейший путь через теорему: если к прямой восстановить два перпендикуляра и соединить концы равных отрезков прямой, то эта

прямая будет перпендикулярна к обоим перпендикулярам. Но через столет после Клавия вид этой главы геометрии совершенно меняется. Центр тяжести переносится с определения на аксиому.

Уже не ищется определение истинное, удовлетворяющее требованиям логики, но берется такое, из которого можно было бы дойти до цели, проходя через наиболее очевидные аксиомы, вовсе не выставляя требования совершенного минимума, чуждого XVII веку.

У Борелли параллельные прямые, а не линии вообще, определяются как перпендикулярные к одной и той же прямой.

(Clavius. Crist. Euclides elementorum libri XV Opera t. I. Mains. 1590. Boreli. Euclides restitutus. Pisa. 1658.)

- ¹³ Аксиоматика Херигона (Herigonus Cursus Mathematicus. Paris. 1634.) — это коллекция очевидных истин, причем автор уверен в ее полноте. Его совершенно не интересует вопрос: зависимы или не зависимы эти истины...

Против требования минимума говорит правило Паскаля: *“Не следует ничего доказывать, что так очевидно, что не нуждается в каком-либо более ясном средстве доказательства”*. Pascal. Oeuvres. III. 163–182.

- ¹⁴ Арно, выступая в “Nouveaux eleniens de Geometric”. Paris. 1683, против недостатков Евклида с точки зрения пор-роялевской логики, переделывает “Начала”, изменяя порядок теорем и соответствующим образом доказательства.

Изучение параллелизма прямых углов у него предшествует равенству треугольников, ибо угол, по его мнению, более простой объект, чем треугольник.

Арнольдианского типа большинство крупных французских учебников до эпохи энциклопедистов:

Lamy, Sauvveur, Camus, Varignon, de la Caille, Rivard и другие.

В русской методической литературе влияние сказывается на “руководстве” Остроградского.

- ¹⁵ К учебникам Лежандровского типа следует отнести кроме “Элементов” Лагранжа, оригинальных и переработанных Бланше, учебник, имевший огромное значение:

(Lacroix Eléments de Geometrie a L’usage de l’Ecole Normale. Paris. 1814.).

Упомянем Garnier, Vincent, Sonnet, Guilemin и наиболее обстоятельный учебник Лагранжевского типа:

Роше и Комберусс.

Характерно для этой эпохи сочинение, не имеющее ни научного, ни методического значения: Tompson. Geometrie sans axiomes. (“Геометрия без аксиом”).

- ¹⁶ Объекты геометрии превращаются из чистых предметов разума в объекты опыта. Если, по Арно, “душа человека, как бы с первых дней

детства, как бы вся погружена и обмотана чувствами и имеет только темные и смутные восприятия предметов, оказывающих действие на ее тело”, так что вся ее дальнейшая эволюция представляется своего рода очищением, то для де ля Шаппеля кристально чистая душа ребенка завлакивается метафизическим туманом все больше и больше, загораживающим путь к истинному знанию, основой которого являются именно эти презираемые рационалистами чувства:

”Il est donc evident que les premiers elements de Geometrie posent sur la matiere le plus. expose a nos senses” (Очевидно, что первичные элементы геометрии закладываются в материале, в наибольшей степени представленном нашим чувствам).

(De la Schapelle. Institutions de Geometrie. 1765).

К этому направлению принадлежат учебники: Clairaut, Bezout, Bossut и другие.

Сюда следует отнести и капитальные сочинения: Bertrand Developpement nouveau de la partie elementaire des Mathematiques. Geneve, 1778.

Взгляды математиков этого направления складываются под влиянием “Опытов о человеческом рассудке” Локка, логики и трактатов о чувствах Кондильяка.

Здесь интересно привести мнение д’Аламбера об аксиомах, высказываемое им в Энциклопедии.

В большинстве аксиом он видит только выражение одной и той же идеи двумя различными знаками или словами: “Разве тот, кто говорит, что два и два составляет четыре, обладает большим знанием, чем тот, кто удовлетворится считать, что два и два составляют два и два?”.

¹⁷ Лобачевский в сочинениях о “Началах Геометрии” говорит:

”Первые понятия, с которых начинается какая-либо наука, должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу. Тогда только они могут служить простым и достаточным основанием учения. Такие понятия приобретаются чувствами, врожденным не следует верить. (См.: П. С. С. по геометрии Н. И. Лобачевского).

Д’Аламбер говорит более определенно:

”Мы сперва рассматриваем тела со всеми их качествами, понемногу производим в уме разделение и абстракцию этих различных свойств и переходим к рассмотрению тел как частей пространства пронизаемых, делимых и оформленных”.

¹⁸ Во вступлении к новым началам геометрии (стр. 13, изд. Хар. Мат. Об. Харьков, 1912.) Лобачевский старается убедить не в логической возможности, сводящейся к непротиворечивости, а в *реальной* возможности, он старается убедить в том, что в уме нет никакого противоречия в предположении реальности отношений между углом и длиною, которая ему представляется аналогичной отношению между силой и расстоянием.

19 Ни у одного математика до Лобачевского и Боляя не хватило храбрости публично выдвинуть ряд теорем, вытекающих из постулата, которым заменялся Евклидов постулат о параллельных – за *геометрическую* систему. Мне представляется, что у Гаусса был еще другой страх, кроме страха что он не будет понят (см.: Р. Бонола – “Неевклидова геометрия”, стр. 156). Мотив для неопубликования своих опытов по антиевклидовой геометрии (Engel-Stackel. S. 209), о котором он не пишет, говоря о “Geschrei der Bootier” (крике беотийцев) – это неуверенность в том, что его ряд теорем, продолженный дальше, не встретит противоречия, страх того, что его работа послужит в стыд ему и в славу другого, который двумя-тремя теоремами, прибавленными к антиевклидовой геометрии, скомпрометирует его, с другой стороны – получит ту славу, которой добивался тщетно Гаусс.

Швейкарт ограничивается только заметкой, частным образом переданной Гауссу, печатное же сочинение стоит на точке зрения евклидовой геометрии.

Тауринус в *Geometria prima Coloniae*, 1826 (Engel-Stackel. S. 273.) замечает, что найденное им доказательство постулата о параллельных не вполне его удовлетворяет и прибавляет, что исследование вопроса, каково истинное значение логарифмическо-сферической геометрии, содержит ли она что-либо возможное или только мнимое, это достойная задача для ученых, но переходящая границы элементов геометрии.

20 Саккери ищет новые логические приемы, он употребляет сомкнутую на заключении форму простого апагогического доказательства (см. мою работу: Об апагогических доказательствах. Ростов, Научный Вестник. 1922).

Следует доказать B, A , (т.е. если B , то A) из $B \text{ не-} A$ выводится B, A . Этот прием употребляется Евклидом только один раз: при доказательстве 12-го положения 9-й книги “Начал”. (*Euclides ab omni naevo vindicatus autore Hieronymo Saccherio. Mediolani. 1773, Engel-Stackel. S. 42.*)

21 “Я отсюда, – говорит Ламберт, – почти заключаю, что третья гипотеза имеет место; в случае не плоскости она не так легко поддается, как вторая”. – § 82. *Theorie der Parallellinien* (Engel-Stackel. S. 137).

22 Боляю принадлежит исследование свойств параллельных, независящих от евклидовости, тождественность геометрии на орисфере с обыкновенной геометрией на плоскости, доказательства независимости сферической тригонометрии от постулата о параллельных и некоторые геометрические построения, независящие от него.

(Bolyai Johann. *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*. 1832.)

23 Согласно Герbartу, пространство не представляет только субъективную форму созерцания, в каковом случае оно было бы только *призраком*. Но всякий призрак, все кажущееся указывает на реальное отношение в

объективном мире. Субъективной форме обязательно должна отвечать объективная, хотя бы и отличная от нее.

Понятие об этой форме получается обычной гербартовой методой *исправления понятий*: такое измерение построения реального, по Гербарту, умопостигаемого интеллигибельного пространства предполагает отказ в некоторой мере от кантовского взгляда на пространство, как чистую форму созерцания (см.: “Критика чистого разума”). Пространство, по Гербарту, не только форма созерцания, но прежде всего понятие.

Для построения умопостигаемого пространства следует признать и выделить концентуалистические элементы пространства и подвергнуть их очистке от кроющихся в них противоречий.

В конечном итоге такой метафизической обработки, пространство должно явиться понятием, причем свестись к отношениям между реальностями, т.е. теми первичными монадами, к которым метод исправления сводит всю вселенную.

Умопостигаемое пространство Гербарта, конечно, нельзя представить, но его можно мыслить, причем в самых общих абстрактных понятиях. Простыми, уже неразложимыми, элементарными отношениями, из которых складывается пространство как сложное отношение, Гербарт выставляет те, которые определяются предложениями “с” и “на”. Гербарт считает возможным *снятие созерцательности* с этих отношений и сведение их к чистым понятиям. Полное существование двух реальностей вместе противостоит их существованию не вполне. Существование а на b может быть существованием в большей или меньшей мере.

Риман исправляет или, лучше сказать, перерабатывает *понятие пространства*, не вскрывая противоречий в евклидовом пространстве, но подымаясь к идее многообразия, объемлющей евклидово пространство, обобщая характерные признаки последнего, выраженные математически.

(Riemann. Ueber die Hypothesen die der Geometrie zu Grunde liegen. Gotting. Abhandlugen XIII. 1868. N. Grassman. Die lineale Ausdehnungslehre. Leipzig. 1844.)

- ²⁴ Различие между Риманом и Гельмгольцем (Helmholtz. Ueber die That-sachen die der Geometrie zu Grunde liegen) то, что последний старается опытным путем обосновать свои постулаты. Он выходит из простейших фактов, характеризующих движение в трехмерном пространстве, которое, согласно эмпиристической гносеологии XIX века, и создает понятие о пространстве. Это — определяемость элемента тремя координатами, существование подвижных твердых тел, свободная подвижность их и монодромность пространства, состоящая в возможности движения вокруг точки, приводящего в первоначальное положение. Эти факты, выраженные в формулах аналитической геометрии, естественно обобщаются и на большее число измерений. Другие же факты, тоже наблюдаемые в евклидовом пространстве,

признаются, таким образом, уже не характеризующими пространство как таковое. С.Ли видоизменяет гипотезы Гельмгольца таким образом, что является возможной чисто математическая их обработка.

(S. Lie. Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig. 1828–1893. Т. III.)

25 Beltrami. Saggio di interpretazione della Geometria non Euclidea. Giornal di Mat. Vol VI. 1868, фр. Пер.: Houel. Annales Scient. de l'Ecole Normale. Т. VI. 1869.

26 Klein. Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie. Math. Ann. VI. 1871. Т. VI. 1873. VIII. 1874.

27 Poincare. Sur les hypotheses fondamentales de la Geometrie. Bulletin de la Soc. Mat. de France XV. 1887.

28 Гильберт. Основания Геометрии. Петроград. 1923. С. 63.

29 См. мое сочинение: Об апагогических доказательствах. Ростов. Научн. Вестник. 1922.

30 Выпрямление доказательств достигается большей частью введением постулатов, относящихся к *бесконечным классам*. К этому следует прибавить еще те логические аксиомы, которые узаконивают вывод из бесконечного ряда силлогизмов, лежащего в основе *полной математической индукции*. И. Менделеев (в “Методе математики”) относит это к сверхлогическому в математике. Но признание существования бесконечного числа силлогизмов, связующих сложения A, B, C, P, Q, R , и вывод из истинности A, B, C , истинности P, Q, R , не более сверхлогичны, чем всевозможные постулаты, лежащие в основе современной теории множеств.

31 Аксиома III₃. Если для двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место конгруэнции

$$AB=A_1B_1, AC=A_1C_1, \angle BAC=\angle B_1A_1C_1,$$

то всегда имеют место и конгруэнции

$$\angle ABC=\angle A_1B_1C_1, \angle ACB=\angle A_1C_1B_1,$$

32 Существуют теоремы *недоказуемые, хотя и истинные*. Для доказательства таких теорем у нас просто *не хватает очевидных постулатов*.

Такие положения должны найтись среди очень простых положений теории чисел и ситуационной геометрии. Видимо, такова знаменитая теорема Гольдбаха, что всякое четное число представляется суммой двух простых чисел, и теорема о бесконечном числе пар последовательных простых чисел с равной разностью.

Можно предполагать, что такими же являются и следующие весьма общего характера положения:

Всякая форма $\omega(x)$, выражаемая в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных и алгебраических функций, алгебраически неразложимая, иначе говоря, не представляющаяся произведением $\vartheta(x)\eta(x)$, где $\vartheta(x), \eta(x)$ при всяком целом x тоже целые числа, содержит бесконечное множество простых чисел. Только в случае более точного

определения формы может существовать доказательство этого положения, так как из одного условия о неразложимости, конечно, ничего нельзя вывести.

Хорошо известно доказательство такой теоремы для $\omega(x) = \alpha x + \beta$

Может быть построены доказательства и для некоторых более сложных выражений, например, для $ax^2 + bx + c$ (a, b, c , взаимнопростые и $b^2 - 4ac \neq 0$), но для произвольно написанных $\omega(x)$ такое доказательство является уже невозможным.

Другое положение о невозможности существования формы $\omega(x)$, содержащей исключительно простые числа. Мы идем дальше, мы утверждаем, что в теории чисел существует неизмеримо больше недоказуемых истинных положений, чем доказуемых.

Вообще больше теорем недоказуемых, чем доказуемых. Если на первый взгляд представляется, что в геометрии всякая задача может быть решена, то только потому, что те задачи, которые мы рассматриваем, — это *простейшие*, теснейшим образом связанные с очевидными постулатами, лежащими в основе геометрии.

Рассматриваемые нами геометрические объекты — треугольник, четырехугольник, круг и т.д. настолько же просты, как просты рациональные дроби, рассматриваемые в начале курса интегрального исчисления.

Чтобы получить неразрешимые задачи и недоказуемые свойства следует усложнить эти формы так, чтобы явилась необходимость, наряду с постулатами *меровой* геометрии, и в постулатах ситуационной геометрии, которые уже определенным образом будут недостаточны.

Задача о ветвях алгебраической кривой в общем случае всегда остается именно в силу этого неразрешимой.

³³ В настоящее время уже никто не верит в то, что всякая функция, выражающаяся в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных, может быть проинтегрирована в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных. Те же, кому приходилось над этим размышлять, знают, что в большинстве случаев такие выражения не интегрируемы в конечном виде, более того, если написать совершенно произвольно какое-либо выражение (даже рациональное) от x , то можно быть уверенным, что оно неинтегрируемо.

При подборе примеров неинтегрируемости для моего сочинения "Об интегрировании трансцендентных функций в конечном виде" (Изв. Варш. Универ. 1913) я брал выражения наугад, но примеры *интегрируемости* я получал скрытым от глаз читателя дифференцированием.

Правильная постановка проблемы интегрирования в конечном виде: *Определить, можно ли выразить данный интеграл $\int f(x)dx$ какой-либо трансцендентной определенного конечного класса в льювиллевском смысле и, если возможно, то найти это выражение.*

³⁴ В то время, как частные аксиоматические проблемы можно считать вполне определенными, общая проблема об основании геометрии является пока *не вполне определенной*.

Паш, ставящий в основу геометрии простейшие эмпирические данные, лучшим образом характеризующие пространство, и Пеано, ставящий в число постулатов непростую истину о непересекаемости в одной точке трех диагоналей четырехугольника (G. Peano. I principii die Geometria logicamente exposita. Torino. 1889), решают, собственно говоря, различные проблемы.

Должно ли ставиться при построении системы геометрии условие *очевидности*, должны ли *постулаты* быть *аксиомами*?

Если да, то системы Пеано и Гильберта не годятся, ибо пользуются совершенно неочевидными постулатами.

Но что при выборе постулатов должно заменить очевидность? О простоте, выдвигаемой Пашем, можно спорить больше, чем об очевидности.

Как бы ни подчеркивался формальный характер системы, очевидность если не всех, то большей части постулатов принимается во внимание. Возведение определений в аксиомы по существу не меняет дела.

Объект А определяется признаками α, β, γ , которые даются очевидными положениями, но тот же объект можно определить и признаками $\alpha', \gamma' \rho'$, которые даются не очевидными положениями.

Нет основания предполагать, что минимум постулатов попадает именно на группу положений очевидных или вообще содержащих очевидные положения.

³⁵ Материалом для этих заметок служат мои большие работы: “Схоластика и Математика”, “Законы эволюции проблемы”. Печатание больших работ в настоящее время невозможно, вне сомнения эти работы я не увижу в печати.

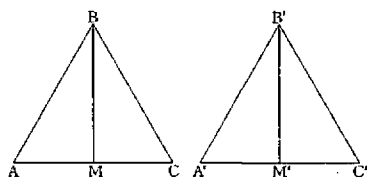
Геометрия как наука о пространстве.

Известия Ростовского пед. ин-та, 1940, т. 10, с. 10–25.

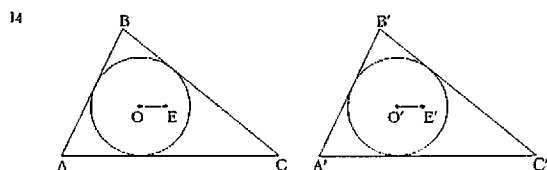
¹ Геометрию как науку о формах определяют Becker, 1872; Fischer, 1887. Oriller, 1887, см.: Schooten–Inhalt und Methode des Planimetrischen unterrichts. Leipzig, 1890, Bd I, kap, 2, s. 161.

² Наглядной геометрией является геометрия индусов. Наглядный элемент находится в большой мере в учебниках XVIII в., например, De la Chapelle – “Institutions de la Geometrie” и Д. Мордухай–Болтовской – О школьном геометрическом доказательстве – журнал “Математика в трудовой школе”, 1928.

- ³ Геометрию определяют, как науку о пространстве: Bartolomei, 1851, Helmholtz – Pop. Wiss. Vortrage, Crell, Grunert, 1870.
- ⁴ “Начала” Евклида – пер. Петрушевского или Ващенко-Захарченко. [См. также пер. Д.Д. Мордухай-Болтовского. М. 1950.]
- ⁵ К рационалистическим учебникам я отношу в некоторой мере учебники ариольдианского типа, начиная с Arnauld – Nouveaux elements de Geometrie, 1667–1684.
- ⁶ Principia Philos., Amsterdami.
- ⁷ Спиноза. Этика, пер. Модестова.
- ⁸ Russel. Les fondements de la Geometrie. 1901.
- ⁹ Delboeuf. Prologomenes philosophiques de geometrie. 1860.
- ¹⁰ Д. Мордухай-Болтовской. Ненатуральное и аналогическое доказательство в прошедшем и будущем. [наст. изд.]
- ¹¹ Образцом является Гильберт. Основания геометрии, метод. обработка М. 1948; Hallsted. Geometrie rationelle.
- ¹² Leibnitii. Characteristica Geometriae In Euclidis, Leibnizius math. Schriften, t. II, Bd. I.

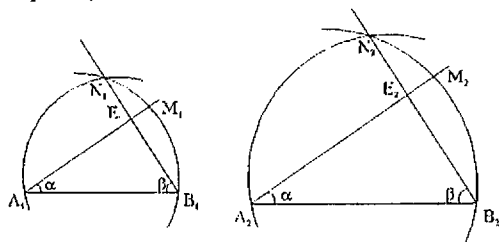


Прим. ред.



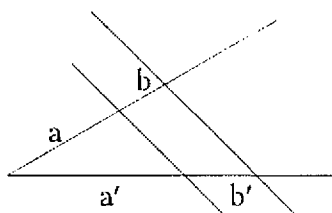
Прим. ред.

- ¹⁵ Leibnitii. Characteristica Geometriae. Wolfii. Compendium elementorum Matheseos Universae in usum studiosae Juventutis adornata. Venetii, 1713.
- ¹⁶ Пусть даны два отрезка $A_1B_1 = a_1$ и $A_2B_2 = a_2$, которые (как любые два отрезка) подобны по аксиоме.



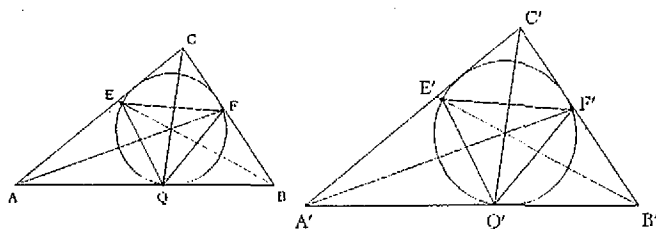
Будем строить на этих отрезках треугольники $A_1B_1E_1$ и $A_2B_2E_2$ так, что $\angle E_1A_1B_1 = \angle E_2A_2B_2 = \alpha$ и $\angle E_1B_1A_1 = \angle E_2B_2A_2 = \beta$. Для этого построим окружности C_1 и C_2 с центрами в точках A_1 и A_2 и радиусами a_1 и a_2 , соответственно. Затем проведем в этих окружностях радиусы A_1M_1 и A_2M_2 так, что $M_1A_1B_1 = M_2A_2B_2 = \alpha$. Построив аналогичным образом окружности D_1 и D_2 с центрами в B_1 и B_2 и радиусами по-прежнему a_1 и a_2 и проведем в них радиусы B_1N_1 и B_2N_2 так, что $N_1B_1A_1 = N_2B_2A_2 = \beta$ (на чертеже не указаны), получим E_1 и E_2 как пересечения A_1M_1 и B_1N_1 , A_2M_2 и B_2N_2 . Окружности C_1 и C_2 строятся на радиусах A_1B_1 и A_2B_2 *одним и тем же действием* — построением окружности по заданному радиусу — откуда следует, что C_1 и C_2 подобны. Далее, радиусы A_1M_1 и A_2M_2 тоже строятся *одним и тем же действием* — поворотом данного радиуса на данный угол (если этот поворот осуществлять циркулем и линейкой, с помощью построения равных вспомогательных треугольников, утверждение остается в силе). Следовательно, сектор $M_1A_1B_1$ подобен сектору $M_2A_2B_2$. Рассуждая таким образом, *доходим до утверждения подобия треугольников $A_1B_1E_1$ и $A_2B_2E_2$* . Прим. ред.

17



Прим. ред.

18



Центр вписанной в треугольник окружности это точка пересечения биссектрис углов треугольника; точку касания внешней окружности со сторонами треугольника можно найти, опустив из точки пересечения биссектрис перпендикуляры на стороны треугольника. Прим. ред.

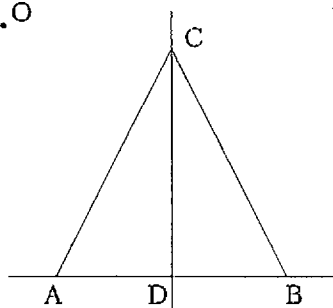
19

Suzanne. La maniere d'etudier les mathematiques.

Д. Мордухай-Болтовской. Теория подобия Х. Вольфа и постулат де Ле-века. "Вест. опыт. физики и элем. матем.", 1906.

- ²⁰ Исследование изогенности и гомогенности пространства с точки зрения теории непрерывных групп – см. мою статью: “Основания геометрии неизогенных и негомогенных пространств с точки зрения теории групп”// Известия СКГУ. Delegeue выставляет основным свойством пространства делимость, непрерывность, бесконечность, гомогенность и изотропность, которые понимаются уже в смысле возможности существования схемы с центром в любой точке. Delegeue. Essai sur les principes des sciences mathematiques. Paris, 1908.
- ²¹ Бертран Женевский, †731–1812. L. Bertrand. Developpement nouveau de la partie elementaire des mathematiques prises dans toute son etendue. A Geneve. 1778. Его же – Elements de Geometrie. Paris. 1812. О нем: Cantor. Vorlesungen, B. IV.
- ²² Petri Rami. Geometriae libri 27. Basileae, 1509. Scholarum Mathem. Libri unus et triginta, 1569. О нем см. мою работу: Философско–математические идеи XVI в. [наст. изд.]

²³ .O



- ²⁴ Рассел называет гомогенностью то, что я называю выше изогенностью.
- ²⁵ Валлис (1616–1703). См.: Stackel und Engel.
- ²⁶ Oeuvres, t. VI, l. V, ch. V, p. 472.
- ²⁷ Lambert (1728–1777). Theorie der Parallelinien, 1788. Stackel und Engel. Die Theorie der Parallelinien von Euklid bis auf Gauss. Leipzig. 1893.
- ²⁸ Delboeuf. Prologomenes philosophiques de la Geometrie. Liege. 1860. Lanciennes et les nouvelles Geometries. Revue philosophiques, 36–39.
- ²⁹ Определение Евклида: прямая линия есть та, которая одинаково лежит относительно своих точек, 4 опр. I кн. “Начал” Евклида. Пер. Петрушевского.
- ³⁰ Парносвязность изогенного пространства сводится к наличности инварианта группы преобразования движений, зависящего от двух точек. Lie. Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig, 1888–93.
- ³¹ См.: Lambert. Theorie der Parallelinien.

- ³² Petri Rami. Geometrie libri 27.
Мордухай–Болтовской. Философско–математические идеи XVI века.
[наст. изд.]
- ³³ Например,
- 
- ³⁴ Leibnizens Math. Schriften (her. Gebhardt), Abt II, B. I. Characteristica Geometrica IV in Eucl. Στοιχεῖα
- ³⁵ Д. Мордухай–Болтовской. Генезис и история пределов. Изв. СКГУ. 1928.

Из прошлого пятой книги “Начал” Евклида.

Математическое образование, 1916, № 7, с. 255–263; № 8, с. 277–289.

- ¹ Как только дробь становится числом, результаты 7–й книги начинают толковаться в обобщенном виде. В пропорции $a:b=c:d$ a , b , c , d могут оказаться не только целыми числами, но и дробями. Характерно определение Беха–Эддина деления, как определения числа, которое с единицей находится в том же отношении, что делимое с делителем. Nouvelles Annales T.5, 1846, Khelatat de Beha–Eddin.
- ² Евклидовых “Начал” восемь книг, пер. Ф. Петрушевского, Спб. 1819. [пер. Мордухай–Болтовского. М. 1950]
- ³ Более подробно об этом см. ниже.
- ⁴ Отр. 3 5–й книги: “Отношение есть некоторая зависимость двух однородных величин по количеству”. (пер. Мордухай–Болтовского). Прим. ред.
- ⁵ “Совмещающиеся друг с другом равны между собой” (по изд. 1950г. – 7–я аксиома). Прим. ред.
- ⁶ Аксиома параллельных (по изд. 1950 г. – 5–й постулат). Прим. ред.
- ⁷ Все теоремы относятся к 5–й книге. Прим. ред.
- ⁸ Табличка эта значительно продолжена классами:
 $a:b > c:d \rightarrow c:d < a:b$, $a:b > c:d \rightarrow a:c > b:d$, $a:b > c:d \rightarrow a+b:b > c+d:d$, и т.д.
- ⁹ В изд. 1950 г. Мордухай–Болтовской отбрасывает оба варианта как неподлинные. Прим. ред.
- ¹⁰ Euclid’s Elemente fünfzehn Bucher ubers. J. Lorenz Halle. 1840.
- ¹¹ Euclides elementorum Libri XVI Auctore Christophoro Clavio. Trancofurti Anno MDCLIV.
- ¹² Из неравных линий, неравных поверхностей или неравных тел, если избыток большего перед меньшим будет совокупляем сам с собою, то он может превзойти всякую предложенную величину из рода тех, кои взаимно сравниваются.

Творение Архимеда. Две книги о шаре и цилиндре. Пер. Ф. Петрушевского. Спб. 1823. С. 5. [Архимед. Соч. М. 1962.]

- ¹³ Прим. 4 на стр. 187. “Начала” Евклида. М. Е. Ващенко–Захарченко. Киев. 1880.

Этим определением Евклид хочет показать, что сравниваемые величины должны быть однородны, например, длина и длина, площадь и площадь и т.д. Но длина и площадь, соотношения в смысле вышеизложенного, иметь не могут, так как, сколько бы раз длину не повторили, площадь не получится.

- ¹⁴ Отношение друг к другу имеют величины, которые, взятые кратно, могут друг друга превзойти. (нсм.) Близкий перевод дает сам Мордухай–Болтовской в изд. “Начал” 1950 г.: “Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга”. Прим. ред.

- ¹⁵ Jacobi Peletarii. Medici et Mathematici. Commentarii fres... Basileae, см. мою статью: Философско–математические идеи XVI века. Cantor. Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik. B. II. S. 565.

- ¹⁶ Ближайшим родом (лат.). Прим. ред.

- ¹⁷ Исправленный Евклид (лат.). Прим. ред.

- ¹⁸ Arzet. Clavis Mathematica. 1634.

- ¹⁹ Ozanam. Cours de Mathematiques. 1720.

- ²⁰ Taquet. Elementa Geometriae. 1654.

- ²¹ Euclides restitutus etc. a Alp. Borelio. Romae. 1670.

- ²² Euclides ab omni naevo vindicatus... auctore Hieronymo Sacchero, Mediolarni. 1738, см. также Engel–Stackel. Die Theorie der Parallellinien. Leipzig. 1875.

- ²³ “Некоторая” (лат.). Опр. 3 5–й книги: “Отношение есть некоторая зависимость двух однородных величин по количеству”. Прим. ред.

- ²⁴ Определение 20–с 7–й книги: “числа называются пропорциональными, когда первое второго, а третье четвертого суть равнократные, или равночастные, или равномногочастные”. Евклид. “Начал” три книги в пер. Петрушевского. 1833.

- ²⁵ Taquet. Elementa Geometriae planae ac solidae etc. Antverpiae. 1654.

- ²⁶ L’art de penser. А. Арно, П. Николь. Логика или искусство мыслить. М. 1991. Прим. ред.

- ²⁷ Dechales. Elementorum Euclidis Libri Octo ad faciliorem captum accommodati aucthore P. Claudio Francisco Milliet Dechales Cambericus Soc. Ies. Lugundi MDCLXXV.

- ²⁸ Интересно сравнить теорию Такэ с теорией Саньо д’ Овидио, в которой роль равенств (*) играют

$$n_j a = m_j b + a_j \quad a_j < b$$

$$n_j c = p_j d + c_j \quad c_j < d$$

$$m_j = p_j.$$

²⁹ Рассел, Пеано.

³⁰ Arnaldus. *Nouveaux elements de Geometrie*. Paris. 1683, (анонимно, как его пор-роялевская логика).

³¹ Здесь можно отметить более грубый способ уже не сократить, а отделяться от 5-й книги, относящийся к этому времени. Это *Euclidis elementorum sex libri Henrici Coetsii*. 1692, где 5-я книга сводится к числовой теории пропорций с пояснениями на числах, вместо евклидовых доказательств 7-й книги, причем поясняется, что автор это делает потому, что читатель привык более мыслить в числах, а то, что он говорит о числах, легко распространяется и на линии.

Вне сомнения, в связи с арифметизацией геометрии в XVII веке находится и онтологическая проблема, о которой велся спор между Арно, стоявшим на точке зрения Декарта, и Мальбраншем, шедшим дальше его. Это проблема вроде схоластической “*universalia in re*” или “*ante rem*” [универсалии в вещах или до вещей (лат.)] сводится к вопросу: *numerus ante rem numeratam aut in re numerata*? [числа до перечисленных вещей или в перечисленных вещах (лат.)] В переводе на математический язык: дается ли число счетом или число следует понимать общее. Решение вопроса в последнем смысле приводит к признанию отнесенных величин Арно за числа.

³² Т.е. части вида $\frac{1}{n}$, где n – целое. Прим. ред.

³³ Конечно, в основании этого доказательства те идеи, которые лежат в основе метода исчерпывания Евклида (см. 12-ю книгу: 2, 5, 10, 11, 12 предложения).

³⁴ Величина как род, величина вообще (лат.). Прим. ред.

³⁵ De la Caille. *Lectiones elementares mathematicae Seu elementa Algebrae et Geometriae*. 1762.

³⁶ Количество или величина (лат.). Прим. ред.

³⁷ Искусство открытия (лат.). Прим. ред.

³⁸ Herigonus. *Cursus mathematicus nova etc*. Paris. MDCXXXIV.

³⁹ Descartes. *Geometrie*. Liv. I.

Интересно проследить влияние, оказанное картезианской философией на арифметизацию геометрии. После сведения материальной вселенной к “*mundus geometricus*”, к движущимся геометрическим фигурам в пространстве, объявив все остальное иллюзией, оставался только один путь – к Мальбраншу и Беркли, к признанию только одной ре-

альности — духа. Вместе с тем число, как принадлежность духа, независимая от опыта в материальной вселенной, переводится на высшую, в сравнении с пространством, плоскость существования.

Malbranche. Reponse a 3 lettres de Arnauld, Recherche de la verite 6. Ch. V. Брюнсвиг характеризует две ступени Декарта и Мальбранша так: первый прилагает алгебру к геометрии, второй сводит геометрию к алгебре. Brunschwig 9. Les etapes de la philosophie mathematique, p. 130.

40 Энрикес. Вопросы элементарной Геометрии. Спб. 1913, статья Д. Вайлати “Учение о пропорциях”, стр. 220 и дальше.

41 Euclidis. Megareusis Elementorum Geometriae. Lib. XV. cum-commentationibus. Campani. 1491.

42 Перевод Мордухай-Болтовского в изд. 1950 г.: “Говорится, что отношение составляется из отношений, когда количества этих отношений, перемноженные между собой, образуют нечто”. Прим. ред.

43 “Начала” Евклида. Ващенко-Захарченко, стр. 214.

44 Равноугольные параллелограммы имеют друг к другу составное отношение сторон. Прим. ред.

45 См. об относительном умножении отношений, напр. Кутюра. Философские принципы математики, стр. 29.

46 D. Vitale. Euclide restituto. Roma. 1680.

47 Brunschwig. Les etapes de la philosophie mathematique. Paris. Alcan. 1912, p. 47.

48 Rivard. Elements de Mathematiques. Paris. 1788.

49 L. Bertrand. Developpement nouveau de la partie elementaire des Mathematiques prise dans toute oson etendue. A Geneve. 1778.

50 Legendre. Elements de geometrie.

51 Учебники лежандровского типа: Garnier, Vincent, Terquem, Sonnet, Dupin, Fourmier, Nicolle, Pascal, а также позднейший Rouche et Comberousse.

52 Lacroix. Elements de Geometrie a l'usage de l'Ecole Centrale des Quatre nations. Paris. 1814.

53 A. Sannia ed E. D'Ovidio. Elementi di Geometria ad uso dii Gimnasii e degli Instituti Tecnici. Napoli. 1916.

54 G. Veronese. Elementi di Geometria ad uso dei Gimnasi e istituti tecnici. Padova. 1911, parti I, t. II. См. также геометрич. учебники Энрикеса и Амальди, Инграмми, де Наолиса и т.д.

55 Гурьев. Основания Геометрии. Спб. 1825 и другие его сочинения.

Метод исчерпывания.

Математическое образование, 1928, № 6, с. 229–240.

¹ Аристотель о бесконечности — “Phys.”. Cap. V. “De Generat. et Corrup”. Cap. III.

- ² Примеры *reductio ad infinitum* – приведение к бесконечному (лат.) – можно найти у Аристотеля и у схоластиков.
Первым образцом такого доказательства является известное зеноновское доказательство несуществования пустого пространства. См., например, Таннери – “Первые шаги греческой науки”. Укажем также доказательства существования первой материи и первого двигателя у Аристотеля, – “Мех.”, гл. XIV, с. 1; “Phys.”. VIII. С. 49.
- ³ О статическом характере античной мысли см.: Шпенглер – “Закат Европы”. [М.1993] Т I.
- ⁴ Определение Д’Аламбера предела см.: “Encyclopedie methodique des arts et des metiers” (Diderot), статья Limite, также Melanges, § XIV. Об истории пределов см. мою статью “Генезис и история пределов”.
О Д’Аламбере см.: Бобынин, “Elemente der Geometrie” в Cantor. “Vorlesungen ub. Ges. der Math.”, В. IV, Ab. XXII, S. 355, также В. III, статья Бобынина – “Элементарная геометрия и ее деятели во второй половине XVIII века”, “Журнал мин. нар. просв.”, сер. XII, 1907, № 1, отдел 2.
- ⁵ См., напр., Поссе. “Курс дифференциального и интегрального исчисления”, § 5. У Коши (“Уроки диф. и инт. исчисления”, пер. Буняковского, С. 1831) этот пункт не выявлен.
- ⁶ То есть для $\forall \varepsilon > 0$ не только $\exists n$, так что $|A_n - A| < \varepsilon$, но $\exists N$, так что для $\forall n > N$ $|A_n - A| < \varepsilon$. Прим. ред.
- ⁷ Кантор. Учение о множествах. Новые идеи в математике. Его работа в “Math. Ann.”, 21, 23, и “Acta Math.”, t. II. [Г.Кантор. Труды по теории множеств. М. 1985]
- ⁸ У Клавия впервые выступает этот постулат. См.: “Euclidis elementorum libri XVI”. Auctore Christophoro Clavis. Francfurti. 1654. См. также Энрикес. “Вопросы элементарной математики”. С. 1915. С. 220, статью Вайлати: “Учение о пропорциях”. “Мат. обр.”. 1916 № 7–8.
- ⁹ Arist. “Phys.” VIII. 1. Tiedemann. “Geist der Spec. Philos.”. В. III. S. 542. Thom Aq. p. 1, q. 7, a. 2. I Sent. des 43, q. 1. Quodex ub. g. a. 1. lib. 10 q. 2. a. 4. XI Met. lec. 10. Аргументы Прокла за вечность вселенной у Philipon’a “Contra Proclum de aeternitate mundi. Ven. 1535. Схоластики, пытаясь примирить Аристотеля со св. писанием, признавали высказываемое Аристотелем за передачу чужого мнения. Thom. Aq. 1 p. q. 46.
- ¹⁰ См. “Аналитики Аристотеля”. Конспект в “Логике” Владиславлева. [Met. 1005 b20] Об Аристотеле Brunschvigg. “Les etapes de la philosophie mathematique”. Alcan. Paris. 1912. p. I, ch. V. Milhaud. “Aristote et les mathematiques”. “Archiv fur Gesch. der Phil”. t. XVI. 1903.
- ¹¹ Brunschvigg p. I, ch. III, ch. IX.
Об элейцах см. Arist.: “Phys.”, 1–4, “De Coelo”, III, 1. “De sophis. el.”, 28. Simplic. in “Phys.”. Arist. 8, 9, 22, 24, 25. Sext Empyr. Pyrrh. hyp. III, 65. “Adversus mathematicos”, X, 46.

- 12 Понятие переменного некоторое время остается связанным со временем, всякое изменение мыслится *во времени*. Время является *универсальным* независимым переменным у Баррова и Ньютона (1643–1727). *Barrow*. “*Lectiones opticae et Geometriae*”. *Newtoni*. “*Theoria fluxionum*” (теория флюксий, фр. пер. 1740 г.) Ньютон. Математические работы. М.—Л. 1937. см. *Cantor*. “*Vorlesungen Ps.*” III.
- 13 “Начала Евклида”, русские переводы: Петрушевского, (1833), Ващенко—Захарченко (1880). [Мордухай—Болтовского (1950).] Немецкие: *Lorenz*. Halle 1840.
- 14 “Начала Евклида”. О методе исчерпывания: *Klugel*. “*Math. Worterbuch. Exhaustionsmethode*”.
- 15 Выражение “исчерпание”, “метод исчерпывания”, видимо, впервые встречается у Такэ, который, выявляя общие схемы метода исчерпывания и устанавливая с помощью его положения общего, абстрактного характера, ведет его к превращению в метод пределов. *Andreae Taquet e. soc. jesu* “*Opera mathematica*”. Losani. 1666. *Taquet*. “*Elementa Geometriae planae et Solidae*”. Antverpia. 1684.
- 16 Паппус во времена Диоклетиана (284–305 по Р.Х.) “*Collect. Max*”. IV, II. Старое издание Коммадина Ven. 1589; *Hultsch*. Vol. I. XIII. Berolini. 1875–78.
- 17 Основа их: *Legendre*. “*Elements de Geometrie*”. Давидов. Элементарная геометрия. 1922. Методическая переработка: *Lacroix* “*Elements de Geometrie a l’usage de l’Ecole centrale des Quatre nations*”. Paris. 1814. К этому типу относятся известные учебники: *Rouche’ et Comberousse*, *Niewenglowski*, *Hadamard* (хотя не вполне). О Лежандре и его учебнике см.: *Bobylin*. “*Lehrbucher*”.
- 18 “Опыт усовершенствования элементов геометрии”. Спб. 1798. “Основание геометрии”. Спб. 1825. О Гурьеве (1766–1813) см.: *Bobylin*. S. 319.
- 19 *Archimedis* “*Opera*” (ed. Heiberg). Архимед (287–212 до Р. Х.). [Архимед. Сочинения. М. 1962.]
- 20 “О шаре и цилиндре”, пер. Петрушевского. [Архимед. Соч. М. 1962.]
- 21 *Milhaud*. “*La methode d’Archimede*”. “*Rev. Scient.*”. 1908.
- 22 См. литогр. записки Д. Мордухай—Болтовского “Курс диффер. и интегр. исчисл.”. Т. I, Варшава. 1915. Также четыре лекции по философии математики. (Наст. изд.).
- 23 Д. Мордухай—Болтовской. “Философско—математические идеи XVI в.” [наст. изд.]
- 24 *Kepleri*. *Nova stereometria doliorum*. Изд. 1615. Также в “*Opera omnia*.” *Francfurti* 1871, vol. IV, p. 537–538. [Кеплер. Новая стереометрия винных бочек. М. 1935] *Воп. Cavalieri*. “*Geometria indivisib.*” *Bononiae*. 1635 (1653). [Кавальери. Геометрия неделимых. М.—Л. 1940] *Walisii*. “*Arithmetica infinitorum*”. *Opera Oxoniae*. 1693. Аксиоматику исчисления бесконечно малых актуальных см. у *Hopital*. “*Analyse des infin.*”

petits". Paris 1759. [Лопиталь. Анализ бесконечно малых. М.—Л. 1935] Историю исчисления бесконечно малых — в книге: Gerhardt, "Die Entwicklung der Hoheren Analysis". Halle. 1855. В "Vorlesungen" Cantor'a B. II, k.78. "Infinitesimal Betrachtung". Kepler. Cavalieri. Из старых книг: Knorre. "Dissertatio geometrica de methodo exhaustionis et indivisibilium". Wittenburguae. 1692.

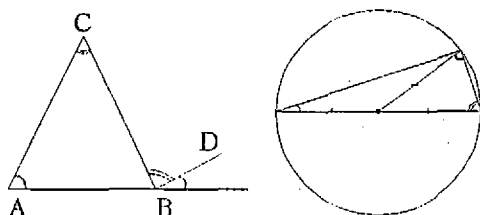
- 25 Об аналогичных доказательствах — моя статья в "Ростовском научном вестнике" за 1922. [См.: "Ненатуральное и аналогичное доказательство в прошедшем и будущем" в наст. изд.] Аристотель об аналогичных доказательствах "Analitica Pos.", lib. I; см. также пор-ролевскую логику: "L'art de penser" (Арно и Николя). [А. Арно и П. Николь. Логика или искусство мыслить. М. 1991] Примеры выпрямленных доказательств (с помощью введения бесконечно малых) можно найти в книге Ozanam, "Cours de Mathematiques". Paris. 1720; lect. XI.
- 26 Эта форма вырабатывается впервые Дюамелем — Duhamel. "Elements de calcul infinitesimal". Paris. 1860, ch. IV, V, VI.
- 27 Обработка принципа Кавальери в смысле современных идей — см.: Weber-Wellsein. "Энциклопедия элементарной математики", изд. Матезис. Одесса. Т. II, книга III, § 90. Принцип Кавальери, стр. 262; см. Также: Heinze. "Genetische Stereometrie".
- 28 Торичелли (1608—1647). "De dimensione parabolae" в "Opera Geometrica". Florence. 1644. О нем Cantor. "Vorlesungen". B. II. S. 883.
- 29 Квадратура параболы Архимеда: Arch. "Opera" (ed. Heibug), I, 288. [Архимед. Соч. М. 1962] Cantor. "Vorlesungen". B. I. K. 29, S. 289. См. также Duhamel. "El. de calc. inf.", ch. V, p. 29.

Из истории метода наложения в элементарной геометрии

Математическое образование, 1928, № 3, с. 107—113.

- ¹ На русском языке: евклидовы "Начала", восемь книг, пер. Ф. Петрушевского, или "Начала Евклида" в пер. Ващенко-Захарченко. Киев. 1880. Пользоваться в виду неточности перевода следует очень осторожно. [См. также пер. Мордухай-Болтовского. М. 1950.] Хороший перевод: Euclids Elementen funfzehn Buches ubers. L. Lorenz, Halle, 1840.
- ² Legendre. Elements de Geometrie, Paris. неск. изд., напр. 1837. Русское издание в переводе Баландина и Бунтац: Лежандр. Основание геометрии и тригонометрии Спб, 1837; в другом издании: "Элементарная геометрия Лежандра", Спб. 1879, переработка Blanchet Legendre. Elements de Geometrie, 1813. Серьезная методическая переработка Лежандра — Lacroix. Elements de Geometrie a l'usage de l'ecole Centr., Paris. 1814. Этот учебник лежит в основе всей учебной литературы лежандрова типа.

- ³ Это доказательство вошло в употребление значительно раньше “Элементов” Лежандра; см.: например, Coeti. *Euclidis elementorum sex libri priores*. 1697; “Элементы” Лежандра, кн. I, пред. XII.
- ⁴ “Начала” Евклида, кн. I, пред. VII. “Элементы” Лежандра, кн. I, пред. X. В учебнике Киселева вместо медианы проводится биссектриса (“Элементарная геометрия”, Москва, 1914, стр. 27, §38). Таким образом, третий случай равенства общего типа треугольников заменяется первым случаем равенства треугольников; причем, теорема доказывается непосредственно наложением. Конечно, и это доказательство недопустимо с евклидовой точки зрения.
- ⁵ Legendre – Blanchet. *Liv. 1. Prop. X* (см. Давидов); у Legendre’a изд. 1837 теорема доказана иначе.
- ⁶ Aristotelis. *Metaph. Lib. IX*, стр. 9. Aristotelis. *Opera omnia graece et latine*, изд. Didot. [Аристотель Соч. в 4 Т. Т.1. М. 1976.]
- ⁷ Шопенгауэр. Мир как воля и представление. Пер. Фета. Т. I. § 15.



- ⁹ Очевидность как критерий истинности. См.: Descartes. *De Prima Philosophia*. IV, p. 25, 34, 39. *Regulae ad dirigendum ing.* 2 p. 4 (Декарт. 1596-1658. Виндельбанд. I стр. 34), см. Также Arnoldi Geilinx. *Logica fundamentalis*. Lugd. 1662.
- ¹⁰ Аналитика Аристотеля. Есть французский перевод. *Dernieres Analitiques. Logique d'Aristote trad. par Barthelemy Saint-Hillaire*, 1842. О логике Аристотеля см. новую книгу: Ziehen. *Lehrbuch der Logik*. Bonn. 1920. Bd. 1, § 9.
- ¹¹ Euclides–Heiberg. S. 9. 5 постулатов (пятый – о параллельных, иногда относится к аксиомам – II аксиома).
- ¹² О постулатах Евклида см. Hauber. *Christomatia Geometrica*. Tubingen. 1820. § 127; также Savillus. *Praelectiones tredecim Oxoniae*, 1820; см. также Brunschwig. *Les etapes de la philosophie mathematique*. Paris. 1912, стр. 89. *Les postulats*. Там же библиография. [Декарт. Соч. в 2 Т. Т. I. М. 1989.] [Аристотель. Соч. в 4 Т. Т.2. М. 1978].
- ¹³ Понимание постулата Кантом в логике родственно евклидову. Постулатом, говорит Кант (Логика I, 2 отд., § 38), называется практическое непосредственно-очевидное положение или принцип, *определяющий*

возможное действие, в котором подразумевается, что способ его выполнения непосредственно очевиден.

- ¹⁴ Savilli. Praelectiones. О Савилли (1549–1622) см. Cantor. В. II, S. 664, p. 131, также Kastner, I, 249, III, 19–26; Ball. History of mathematics at Cambridge, p. 29.

- ¹⁵ Hobbes. De Corpore, ch. VI, S. 13. Lond., 1839, p. 72. [Гоббс. Избранные произведения. М. 1964.] Brunswigg, неправильно считая определения Евклида номинальными, считает, что цель постулатов – придать им *реальное* значение, и в этом смысле неправильно понимает и Гоббса.

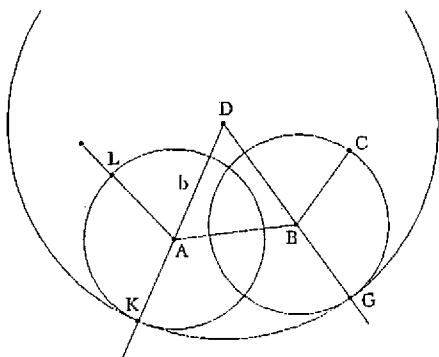
Brunswigg. Les etapes etc. Liv. II. ch. VI, p. 91.

О постулатах и аксиомах см. также Кэджори. История элементарной математики. Одесса, 1917, где приводится резюме доклада Vailati, напечатанного в Verhandlungen der dritten intern. Math. Kongress in Heidelberg 1904; см. также Tannery, La Geometrie grecque.

- ¹⁶ Например, Arzet. Clavis Mathematica, 1635.

- ¹⁷ Euclidis – Heiberg, vol. I, p. 11.

¹⁸



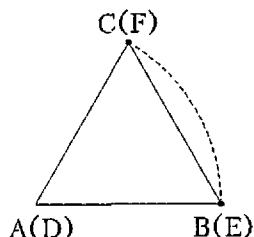
Прим. ред.

- ¹⁹ Этим положением Евклид в предл. 4 1-й книги доказывает равенство треугольников по двум сторонам и углу между ними (“первый случай равенства треугольников” по терминологии автора). Прим. ред.

- ²⁰ О схоластическом реализме см. Haureau. De la philosophie Scolastique. Paris. 1850.

- ²¹ Euclides elementorum libri XV auctore Christophoro Clavio.

- ²² В теоремах о равенстве треугольников Евклид доказывает: а) равенство углов; б) равенство сторон и углов. Euclides–Heiberg, s. 17: “et triangulus triangulo aequalis erit et reliqui reliquis aequales alter alteri”.



[Треугольники будут равны друг другу и их элементы будут равны друг другу. (лат.)].

- ²³ Zeuthen. *Histoire des Mathematiques* trad. par. Mascart. Paris. 1902, p. 72. [Цейтен. История математики в Древности и в Средние века. М.–Л. 1938.] Взгляды Платона – см. диалоги Тимей, Федон, Республика, Федр, Критон. Аристотель – бесполезность идей: *Met.* II. 2. Et. I, 4; опровержение: *Met.* I, 9 XIII, 4, 9 VII. 6. 13.
Brunschwigg. *Les etapes*. Liv. II. Ch. IV, p. 67 см. Zeller. *Die philosophie der Griechen*, II. Teil. II Abh. *Die Dialektik der Ideenlehre*.
- ²⁴ Умное место (греч.). Прим. ред.
- ²⁵ О рационализме см. Bouillier. *Historie de la philosophie cartesienne*. 1814–1816. О логике Декарта см. Ziehen, t. I Cap. 2. § 23. Классическое сочинение по логике рационалистического направления. Арно. *L'art de penser* (пор-роялевская логика). [А. Арно, П. Николь. Логика, или искусство мыслить. М. 1991.]
- ²⁶ Millet Dechales. *Elementorum Euclidis. Libri Octo Lugundi* 1675. Claude-Francois Millett–Dechales (1621–1678). Ero же. *Cursus sen Mundus geometricus*, см. Cantor III 4–6, 15.
- ²⁷ Гильберт. Основания геометрии (есть на русском языке). [М. 1948.]
- ²⁸ Arnaldus. *Nouveaux elements de Geometrie*. Paris. 1683. – Арнольдянские учебники: Varignon. *Elements des Mathematiques*. Amsterdam. 1734. Rivard. *Elements de Mathematiques*. Paris. 1750. Camus. *Cours de Mathematiques*. 1735 и многие другие XVIII века.
- ²⁹ Об аксиоме Арно см.: Исследования о происхождении некоторых основных идей... Часть: Аксиоматика XVII в. в наст. изд. Прим. ред.
- ³⁰ Savilli. *Praelectiones*. Lib. X. p. 196.
- ³¹ “Плоский угол есть наклонение друг к другу двух линий, в плоскости встречающихся друг с другом, но не расположенных по одной прямой” (пер. Мордухай–Болтовского). Прим. ред.
- ³² Т.е. теорема сводится к утверждению о равенстве треугольников по 3–м сторонам, которое принято как аксиома. Прим. ред.
- ³³ Savilli. *Praelectiones*. Lib. IX, p. 170, p. I.

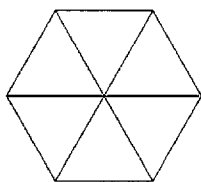
Философско–математические идеи XVI века.

Известия Донского университета, 1919, т. 2, с. 1–48.

- ¹ L. Brunschwig. *Les etapes de la philosophie mathematique*. Paris. Alcan. 1912.
- ² Выражение Амоса Каменского.
- ³ Cardani. *Opera Omnia*. 1663. *De Subtilitate*. Libri XXI. Basileae 1554.
- ⁴ Искусство изобретать (лат.). Прим. ред.
- ⁵ Искусство доказывать (лат.). Прим. ред.

- 6 C. Waddington. Ramus, sa vie, ses ecrits et ses opinions. Paris. 1855. Также: М. Владиславлев. Логика. Обзорение индуктивных и дедуктивных приемов мышления и т.д. Спб. 1881.
- 7 В. Випдельбанд. История философии. Спб. 1898, стр. 358.
- 8 Самый общий род (лат.). Прим. ред.
- 9 Первичное (греч.). Прим. ред.
- 10 Небытие (греч.). Прим. ред.
- 11 Универсалии (лат.). Прим. ред.
- 12 Дыхательные звуки (лат.). Прим. ред.
- 13 Интересно отметить, что в XVII веке все три типа: определение, постулат и аксиома сводятся к одному: к аксиоме, тогда как в современную эпоху “формально-гипотетической” математики они сводятся к определению, (см. Пуанкаре. Наука и гипотеза).
Главным моментом определения является не название, а указание очевиднейшего, первейшего и известнейшего свойства объекта. Постулат и аксиома отличаются только тем, что первое относится к построению, второе к свойству.
Borelli. Euclides Restitutus 1679. У других авторов эти понятия совпадают, и термин-постулат совершенно отпадает.
- 14 Спиноза. Этика.
- 15 Rami. Dialecticae Libri Duo. 1586. Waddington. Ramus. 1855, p. 364.
- 16 Выдержки из старых алгебр и подробный исторический очерк см.: L. Matthiessen. Grundzuge der Antiken und modern Algebra. Der litteralen Gleichungen. Leipzig. Teubner. 1896.
- 17 Утверждение (фр.). Прим. ред.
- 18 Бозций 470—570. Boethii In Porphyrium, Isag t. VI, p. 86. Porph. Isag. III.
- 19 Abelard. Dialectica liber Divisionum et Definitonum. Remusat. Abelard, T. I, f. 439.
- 20 Комментарии Клавия помещены тоже отдельно от них же в собрании его сочинений.
- 21 Евклидовых “Начал” восемь книг. Пер. Петрушевского. Спб. 1819, стр. 2.
- 22 Через род и [специфическое] различие (лат.). Прим. ред.
- 23 Petri Rami. Geometriae Libri XXVII. Basileae 1569. Sholarum Mathematicarum Libri unus et triginta. Basileae 1569. Francfurti 1569. Определение параллельных прямых, как прямых равноудаленных ведет свое начало с Геминуса и Посидония (I в. по Р. X.)
- 24 Параллельные линии суть линии везде равноудаленные (лат.). Прим. ред.
- 25 Определение 10 1-й книги. Евклидовых “Начал” восемь книг. Пер. Петрушевского, стр. 2.
- 26 Подобные прямолинейнык фигуры суть те, которые имеют углы равные по порядку и стороны при равных углах пропорциональные. Пер. с лат. Мордухай-Болтовского, М. 1950. Прим. ред.

- ²⁷ Подобие же кругов и шаров понимается посредством соответствующих многоугольников с бесконечным числом сторон (лат.). Прим. ред.
- ²⁸ Euclidis elementorum Libri XV... auctos Crist. Clavio. Francfurti. 1654 (первое издание 1574). Прим. ред.
- ²⁹ Постулат 3 I книги “Начал”: “... из всякого центра всяким радиусом может быть описан круг” (пер. Мордухай–Болтовского). Прим. ред.
- ³⁰ В дальнейшем существование геометр. объект. – это отсутствие противоречия в определяющих его логических терминах.
- ³¹ Сравни Аристотеля: Est vero interrogantis, ita disputationem induere ut respondentem cogat maxime improbabilia dicere ex iis, quae propter thesin sunt necessaria. Respondentis contra est ne sua culpa videatur accidere absurdum, aut quod sit contra opinionem omnium, sed propter thesin. Aristoteles. Topiconum Lib VIII. Cap. IV. [“Вопрошающий должен так вести речь, чтобы заставить отвечающего говорить самое неправдоподобное, необходимо вытекающее из тезиса. Отвечающий же должен так вести речь, чтобы несообразное или противное общепринятому казалось получающимся не по его вине, а из-за тезиса”. Аристотель. Топика, кн. 8, гл. 4. Соч. 4 Т. Т. 2, пер. Иткина. М. 1978.]
- ³² Alberti Dureri. Institutionum Geometricorum Lib. Lutetiae 1532.
- ³³ Клейн. О преподавании геометрии. Вестник Опытной физики и элементарной математики. № 537. 1911 год.
- ³⁴ Чертеж, схема (лат.). Прим. ред.
- ³⁵ Точка есть то, что не имеет частей [ср. опр. 1 кн. I “Начал” Евклида]. Линия – то, части чего суть точки. Поверхность – то, части чего суть линии. Тело – то, части чего суть поверхности. Или иначе: точка есть неподвижный момент, линия это движущаяся точка... также точка есть то, что не имеет ни одного измерения... (лат.). Прим. ред.
- ³⁶ Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik B. I. 1907. § 73. Пселл (р. 1028 г.) известный средневековый логик, сочинение которого $\text{Εἰς τὴν Ἀριστοτέλους λογικὴν}$...имело большое значение в средние века. Michaelis Pselli. Compedium Mathematicum aliaque tractatus eodem pertinens. Lugn. Bat. Exo fficine Elzeviriorum. 1647. Gulielmo Xylandro interpretato.
- ³⁷ Срав. определение Анариция: угол – количество, имеющее протяжение, границы которого сходятся в одной точке.
- ³⁸ Т.е. любой отличный от треугольника многоугольник, который здесь рассматривается как составленный из треугольников. Прим. ред.



- ³⁹ Т.е. любой отличный от пирамиды многоугольник, который здесь рассматривается как составленный из призм. Разбиение многогранника на пирамиды проводится аналогично триангуляции многоугольника. Прим. ред.
- ⁴⁰ Пентаэдр – призма с треугольным основанием. Всякая другая призма может быть составлена из пентаэдров: разбиение призмы на пентаэдры находится во взаимно-однозначном соответствии с триангуляцией многоугольника, лежащего в основании призмы. Прим. ред.
- ⁴¹ Напр. Henrici und Tretlein.
- ⁴² В учебниках XVII в. и XVIII в. Штурма [I. Sturmii Mathesis Iuvenalis] и Вольфа различаются три части элементарной геометрии: свтиметрия, или лонгиметрия, эпипедеметрия или планиметрия, и стереометрия. См. также: Аничков. Теоретическая и практическая геометрия. Москва, 1780.
- ⁴³ Евклидовых “Начал” восемь книг. Пер. Петрушевского. Спб. 1819, стр. 30.
- ⁴⁴ Т.е. если угол $\angle ABC$ равен $\angle A_1B_1C_1$ при равных основаниях AC и A_1C_1 , то если E внутри ABC , то $\angle AEC > \angle A_1E_1C_1$.
- ⁴⁵ Arnaldus. Nouveaux elemens de Geometrie.
- ⁴⁶ Остроградский. Руководство к геометрии. 1855.
- ⁴⁷ О линиях в круге (лат.). Прим. ред.
- ⁴⁸ О сегментах круга, об описывании круга и треугольника, о вписывании треугольника (лат.). Прим. ред.
- ⁴⁹ Конус есть то, что содержится между конической поверхностью и основанием. Цилиндр есть то, что содержится между цилиндрической поверхностью и противоположными основаниями (лат.). Прим. ред.
- ⁵⁰ Т.е. поверхности, образуемой движением прямой линии. (лат.). Прим. ред.
- ⁵¹ Varium это кривое тело, основание которого представляет собой обвод, а образующие – прямые [идушие] кругом от края до края по основаниям (лат.). Согласно данной выше классификации, gibbum – это вид тела, однаю в данном случае фактически определяется поверхность этого тела, что и позволяет автору называть varium поверхностью. “Основания в этом определении – это направляющие поверхности”. Прим. ред.
- ⁵² Через род (кривое тело) и [видовое] отличие (сторона) (лат.). Прим. ред.
- ⁵³ Цилиндр противоплагается конусу, между тем как в настоящее время цилиндр – вырождение конуса, когда вершина ушла на бесконечность. Это точка зрения диалектической логики, встающей выше логики классов, разбивающей неизменность видов. Цилиндр, с одной стороны, не конус, ибо в нем прямолинейно–образующие параллельны, в то время как в конусе не параллельны, с другой стороны, цилиндр – вид конуса, ибо нельзя указать, когда при удалении вершины конус перестает быть конусом.

- 54 Methodus admirandarum mathematicorum novem libris exhibens universam Mathesin autore Johanno Henrico. Alstedio Herbornae Nassoviorum. 1623. Johann Heinrich Alsted 1588–1638. Cantor. II. 719. Kastner III. 434–438.
 - 55 Alstedii. Novum speculum Logicis minime vulgaris. 1652.
 - 56 Riff. Quaestiones Geometricae in Euclidis et P. Rami $\zeta\tau\omicron\upsilon\chi\epsilon\iota\omega\sigma\iota\nu$ adsumscholae Mathematicae collectae doctore Rufo. Oxoniae. 1665.
 - 57 Определения образов (видов) (лат.). Прим. ред.
 - 58 Исследования свойств данных величин независимо от их вида (лат.)
 - 59 Эвтиметрия линий. Термин “эвтиметрии”, по-видимому, происходит от греч. $\epsilon\nu\tau\upsilon\chi\iota\lambda$ (счастье) и обозначает “хорошее” сочетание геометрических объектов. Прим. ред.
 - 60 В гегельянстве дихотомная система заменяется трихотомной, и принципом построения является не родовое соподчинение, а диалектический принцип, противопоставляющий тезису антитез и соединяющий их в синтезе. Точка и пространство – это первые тезис и антитезис, точка и пространство, и их отрицание и примирение, обретается в прямой линии, которая как количество–расстояние и как качество–направление дает снова тезис и антитезис и т.д. (Гегель. Философия природы.)
 - 61 Arnaldus. Nouveaux elements de Geometrie. Paris. 1683.
 - 62 Здесь уместно упомянуть логистическую точку зрения: линия здесь объявляется *классом точек*, которым присуще определенное свойство; наиболее существенным представляется не отношение вида к роду, не отношение части к целому, а соотношение между объектами, удовлетворяющими одной и той же системе постулатов и подвергающимся тем же формальным операциям. См.: Ingrams. Elementi di Geometria. Bologna. 1904. Pieri. I principia delli Geometria, и др. его сочинения.
 - 63 Т.е. точек прямой. Прим. ред.
 - 64 De la Caille. Lectiones elementares Mathematicae seu Elementa Algebrae et Geometriae. 1762.
 - 65 Порочный круг (лат.). Прим. ред.
 - 66 Bertrand. Developpement nouveau de la partie elementaire des Mathematiques. A Geneve. 1778.
- В прошлом столетии угол имеет интересную историю, ярко отражающую “механизацию” геометрии от начала к середине столетия. От евклидовского угла, как наклонения (принятого Хауффгом 1803 г., Бревеном 1822 г., Паукером 1823 г., Коберлейном 1824 г., Креллем 1824 г., ван Свинденом 1834 г., Ульрихом 1836 г., Рехтом 1844 и Эбенсбергером 1850) и разновидности угла, как раскрытия (*ouverture*) (Безу 1812, Девелей 1818, Махистр 1845) через бертрановское определение угла, как неопределенного пространства между двумя непараллельными прямыми (Форстерланг 1847, Кнорп 1849, Бекер 1859, Турих 1868, Адам 1869, Беер 1869, Шлегель 1872 г.) эволюционирующая мысль составителей

учебников пришла к углу, как *различию направлений* (Тибо 1822 г., Фишер 1833, Вундер 1840, Эбенсбергер 1850, Кунце 1851, Хейдегрех 1856, Сонндорфер 1865, Зененберг 1868, Турих 1898), а отсюда к *отклонению* (Abweichung) *направления* (Соломон 1847, Август 1852, Пернет 1857, Виганд 1863, Функ 1864, Грунерт 1870, Нагель 1873, Брокман 1871, Спикер 1873, и, наконец, к величине поворота (Grosse der Drehung) (И. Мюллер 1844, Любсен 1850, Кунце 1851, Фрезениус 1853, Франке 1860, Сонндорф 1856 (два опред.), Хейс и Энгвейлер 1870, Спикер 1873 (два опред.).

Интересно отметить, что в некоторых немецких учебниках имеются два угла: угол — *lineatum* и угол — *planum*. Взаимное наклонение двух пересекающихся прямых называется углом (Winkel), а ограниченная ими часть плоскости (Winkel-raum), причем равным углам отвечают равные угловые пространства и обратно.

(Крелль 1826, Форстнер 1826, Бретшнейдер 1844, Август 1852, Стеффенхагер 1847, Мюллер 1844 и Спикер 1873).

См. историю определений: Schotten. Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Teubner.

⁶⁷ Параллельные пространства играют важную роль в теории параллельных Бетрана, в основе которой лежит принцип: "Каждое параллельное пространство меньше угла."

Крелль, дополняет его еще вторым принципом: "Каждое ограниченное пространство меньше угла". Интересно отсюда вытекающее доказ. того, что внешний угол в треугольнике больше внутреннего с ними не смежного.

У Мерея (Méray. Nouveaux de geometrie.) за изложением теорем и операций, относящихся к углам, следует изложение теорем и операций, относящихся к параллельным полосам.

⁶⁸ Lacroix. Elemens de Geometrie l'usage de l'Ecole Centrale des Quatre-nations. Paris. 1814.

Lacroix. Essais sur l'enseignement en general et sur celui des Mathematiques en particulier. Paris.

См.: Бобынин. Элементарная Геометрия и ее деятели во второй половине XVIII века. // Журнал Министерства народного Просвещения.

⁶⁹ Ordo Arnoldianus в учебниках:

Lamy. Elemens de Geometrie. Paris. 1685.

Sauveur (revu par le Blond) Geometrie elementaire et pratique. 1753.

Rivard. Elements de Mathematiques. Paris. 1768. Заметно сильное влияние Арио на сочинения.

Varignon. Elemens de Mathematiques. Amsterdam. 1734.

De la Caille. Lectiones elementares. 1762.

Camus. Cours de Mathematiques. 1755.

Интересно отметить, что в “Руководстве начальной Геометрии” Остроградского в отношении плана проводятся арнольдовские идеи. У Остроградского, в противоположность Лежандру, курс не начинается с треугольников, но ему очень рано приходится пользоваться теоремой о конгруэнтности Арно.

“Когда Вы встретите на боках двух равных углов части, соответственно равные, необходимо допустить равенство линий, соединяющих в каждом угле концы этих частей”.

Также как Арно, когда с Остроградским доходим до треугольников, то все уже оказывается готовым, так как “треугольник, говорит Остроградский, можно рассматривать, как совокупность двух наклонных и секущей этих наклонных, ограничив первые и последние точками взаимных пересечений”.

Остается только приложить к треугольникам свойства наклонных.

Идея Арно провести теорию параллельных и перпендикулярных до исследования случаев конгруэнтности треугольников — конечно, не совершенно независимо от него, нашла осуществление и в учебниках чисто лежандровского типа, например в Геометрии Ньевенгловского.

Путь же указан Омом.

Ohm. Die reine Elementar – Mathematik... Berlin. 1826.

70 Этот фактор играл не меньшую роль, чем желание систематизирования. В этом отношении интересны сочинения Дешаля, Арце и Симпсона.

71 Предисловие. (фр.). Прим. ред.

72 То же — 5-й постулат. Прим. ред.

73 “Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней” (пер. Мордухай-Болтовского). Возможен перевод: “Прямая линия есть та, которая равно лежит своими точками”. Прим. ред.

74 То же акс. 9 (в изд. М. 1950). Прим. ред.

75 Dechales. Elementarum Euclidis Libri Octo... autore Claudio Franciscio Millet Dechales... MDCLXXV.

76 Джордано Витале (1633–1711) выводит из равенства $AC=EF=BD$, что $\angle C = \angle D = d$ и отсюда, что AB и CD при условии одинаковости расстояний трех точек A, E , равно отстает друг от друга, но если для какой-либо точки G перпендикуляр к AB .. $GH > AC$, то откладывая $QI = AC$ получаем противоречие с одной стороны $CIH + HID$ меньше $2d$, ибо $\angle ACI = \angle CIH$ и $\angle BDI = \angle HID$ представляют части прямых углов, с другой стороны эта сумма, как сумма внешних углов прямоугольных треугольников, больше $2d$.

Vitale. Euclide restituito. 1680.

Бонола. Теории параллельности и неевклидовы геометрии.

Энриквес. Вопросы Элементарной Математики Спб. 1913.

77 Euclidis restitutus a Alphonso Borellio. Romae. 1679.

- ⁷⁸ При движении вдоль CD концом перпендикуляра, не лежащим на CD. Здесь использовано первое положение Клавия: линия, все точки которой равноудалены от прямой, тоже прямая. Прим. ред.
- ⁷⁹ Euclides ab omni naevo vindicatus... autore Hieronymo Saccherio. Mediolani MDCCXXXIII см.: Enget und Stackel. Die Theorie der Parallelinien. Leipzig. 1895.
Коган. Основания Геометрии. Исторический очерк. Одесса 1907 г.
- ⁸⁰ Pascal. Oeuvres. Hachette. Paris. 1872. 1613–182. Cantor. Vorlesungen. Leipzig. 1900. s. 681–682.
- ⁸¹ Евклидовых “Начал” восемь книг, пер. Петрушевского. Спб., 1819, стр. 108.
“Начала” Евклида с толк., пер. М. Ващенко-Захарченко. Киев, стр. 146.
- ⁸² Friedlein. Procli Diadochi in primum Euclidi elementorum librum commentarii. Leipzig. 1873.
- ⁸³ Les quinze livres des elements geometriques d’Euclide Megarien Traduits de vrecen Francais par. P. Le-Mardele. Paris. 1632.
- ⁸⁴ В учебнике вольфианского типа: “Ежели прямые линии и углы закрываются взаимно друг друга, то они равны между собой, ежели равны, то друг друга взаимно закрывают”. Аничков. Теорет. и Практ. Геометрии Спб. 1780.
- ⁸⁵ Arzet. Clavis Mathematica...MDCXXXIV.
У Кардана (Opus novum de proportionibus. Opera IV. 542–546) имеется доказательство, что угол (смешанный) между двумя пересекающимися равными кругами равен углу между равными хордами этих углов (на основании положения, что углы сегментов с равными хордами равны). Aristotelis. Analytica Priora Lib. I Cap. XXIII (no Didot).

Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики.

Известия Северо-Кавказского ун-та, 1928, т.3, с. 35–129.

- ¹ Методическая сторона настоящей темы более развита в моей работе: Риторическая алгебра и арифметические задачи. “Педагогическая мысль”. Ростов-на-Дону. 1918.
- ² Примитивное решение должно было выступать в периоды упадка математики. Вне сомнений, путем проб решились и задачи Алкуина.
- ³ Regula falsi при решении некоторых задач.
August Eisenlohr. “Ein. mathem. Handbuch der Alten Aegypter.” Leipzig. 1877. Бобынин. “Древнеегипетская математика в эпоху владычества Гиксов”. Журнал Мин. Нар. Просв. за 1909 г., № 10, 11.
(Regula falsi применяется в исчислении x и y : главы XI, XII, XIII.)
Фальшивое правило у индусов *islita karman*. Как отмечает Кантор, египтяне пользовались этим правилом инстинктивно, а индусы вполне со-

знательно. Cantor. "Vorlesungen über Geschichte der Mathematik." Bd. I, s. 371.

- ⁴ Khelaset al Hisab ou Essence de Calcul de Beha-Eddin. Nouvelles Annales. T. V. 1846.

Regula falsi, называемое также правилом уменьшения и увеличения, находится у Авраама бен Эзра (1130), Ибн Альбани (1222), Алказадзи (1480). О них смотри: Libri. Histoire des sciences math. T. I, p. 304–312. Сочинение Альбани переведено на французский язык: Talkys d'Ybn Albani publ. et traduit par Aristide Mare. Rome, 1865. p. 26–27. О Бэ-Эддине см. Nesselman. Beha-Eddins der Rechenkunst. Berlin. 1843.

- ⁵ Магницкий. Арифметика.

- ⁶ Albert Girard. Invention nouvelle en l'Algebre. Amsterdam. 1629.

Эта форма regula falsi называется иными prope veri, см.: Эйлеера. — Theoria planetorum et cometarum, также Ньютона: De mundi systema in fine Princip. L. 3. 41.

- ⁷ Matthiessen. runderzuge der Antiken und Modern Algebra der Lit. Gleichungen. Leipzig. 1878.

- ⁸ Издание Диофанта: Guil. Xilander: Diophanti Alexandrini rerum arithmeticarum — libri sex. Изд. Bachet. 1760 с примечаниями Фермата о Диофанте. Cantor. Vorlesungen. B. I, s. 433. [См. также: Диофант. Арифметика и книга о многоугольных числах. Пер. Веселовского. М. 1974.]

- ⁹ Ehrenfriedt Walter von Tschirnhausen (1651–1708). Cantor. Vorlesungen. B. III, s. 111, см. его переписку с Лейбницем. Leibniz. Opera. IV, s. 423–500.)

- ¹⁰ Аристотель (384–322 до н. э.). О нем. см.: Историю философии. Zeller'a, Windelbandt'a и др. Aristotelis. Opera omnia graece et latine. Parisiis. Didot, t. I. De praedicamentis. [Или рус. пер.: Аристотель. Соч. в 4-х томах. Т. 2. М. 1978.]

(Categoriae) Cap IV. Об Аристотеле работы: Biese, Philosophie der Aristoteles. Berlin, 1877 и др. Библиограф. см.: Ziehen. Lehrbuch der Logik; о его значении для истории математики: Cantor. Vorlesungen. B. I, s. 238.

- ¹¹ Cap. VI, [5b11, 6a19].

- ¹² Следует отличать το ποσόν — quantum от ποσότης — quantitas.

- ¹³ Categ. VI, 6a26. По-видимому, автор имеет в виду оппозицию δυνατότης ενεργεία (обычный перевод: "возможность — действительность"), которая обсуждается Аристотелем в Met. VIII, хотя и не применительно к "равному" и "неравному". Прим. ред.

- ¹⁴ Arist. Met. lib. VIII.

- ¹⁵ О схоластике: Heaureau. De la philosophie Scolastique, p. I, II. Paris., Rousselot. Etude sur la philosophie de moyen age.

Подробное изложение средневековых философских систем: Tiedemann. Geist der speculativen Philosophie. B. IV. Marburg. 1793.

- ¹⁶ О Дунсе Скотте (1274–1308) и скоттистах см.: Pluzanski. Essai sur la philosophie de D. Scott. Paris. 1887. Изложение его системы: Boyvin. Philosophia scotica. 4 t. Paris. 1668. Abergoni. Resolutio doctrinae Scoticae. Lyon. 1643.
- ¹⁷ Фома Аквинский (1227–1274). Его сочин.: Sancti Thomae Aquinatis doc. angelici. Opera omnia jussu Leonis XIII. Romae 1884. Изложение его системы: Guerinois Clupeus Thomisticae Philosophiae. Venetii. Также учебники: Piny, Reichl, Schnell, Rabes и многие другие.
- ¹⁸ Рационалисты: Декарт (1596–1650), Арно (1612–1694), Гейлинкс (1625–1669), Мальбранш (1638–1715). См.: Ziehen. Т. 1. кap.2, s.26–29. Тщательный и тонкий анализ рационалистической мысли в книге Е. Н. Спекторского: Проблема социальной физики в XVII веке. Варшава. 1910.
- ¹⁹ S. Thom. Aq. 4 Contra gent. C. 65. Summa Theologiae. I p. q. 14 ar. 12. Opusc. 76. q. 5, art. 3. Opusc. 48 art. 12. Того же мнения и Суарец.
- ²⁰ Kepleri. Nova Stereometria dolorum. Opera omnia IV, p.p. 537–538.
- ²¹ Cavalieri. Geometria indivisibilibus contin. nova quodam methode promota Bononiae. (1635, 1653).
- ²² Formaliter ex natura rei, см.: Boyvin. Prantl, Geschichte der Logik.
- ²³ О пространственном мышлении античной математики см.: Шленглер. Закат Европы. 1923, гл. I. О смысле числа.
- ²⁴ “Начала” Евклида. Опр. 2, кн. I. [Пер. Мордухай-Болтовского. М. 1950]
- ²⁵ Критику евклидова определения мысли с точки зрения требований, предъявляемых аналитиками к определению – см.: A r i s t. Topic. Lib. VI, cap. VI. 5.
- ²⁶ Опр. 5 кн. I “Начал” Евклида. Прим. ред.
- ²⁷ Опр. 1 кн. II “Начал” Евклида. Прим. ред.
- ²⁸ Подробный разбор см.: Guerinois Clupeus. Q. III, art. 3.
- ²⁹ Scotus Soncinas (Quaestiones Metaphyscae acutissimae. 1622), Capreollus и др. ссылаются на Arist. 5 Met.
- ³⁰ Soncinas. Met. Lib. V. Q. XXI.
- ³¹ Albertus Magnus (1193–1280). Opera ed. Pet. Jammy. Lyon 1653, vol 21.
- ³² Определение Архимедом площади сегмента параболы. [См.: Архимед. Квадратура параболы. Соч. М. 1962.]
- ³³ Archimedis. Opera (ed. Heiberg) I s. 288. см. также Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig. 1894. B. s.
- ³⁴ О месте (Locus) см.: Aristotelis. Naturales Auscultationes. Lib. IV. Cap. I, II, III. [Phys. IV. см. Аристотель соч. в 4–х томах. Т. 3. М. 1981.]
- ³⁵ Arist. Categ. Cap. VI. 5a15–36.

- 36 Это утверждение автора странно, поскольку непрерывной непространственной величиной у Аристотеля является время. Прим. ред.
- 37 Там же.
- 38 Newtoni. Methodus fluxionum. 1678. в Opuscula Newtoni I (есть и на французском языке: Cantor. III. 108, 168.) [Ньютон. Математические работы. М.—Л. 1937. Метод флюксий. Пер. Мордухай-Болтовского.]
- 39 Учение Аристотеля о субстанциях. См. Met. V, cap. VIII.
- 40 Categ. Cap. VI.
- 41 S. Thom. S. T. I p. 30, art 3. Quodlibeta 10 art. 1. q. b. de Potentia art. 2. Guerginoi. Clypeus P. T. 1. II de Praed. Art. IV, II.
- 42 О времени: S. Thom. 5 Met. Cap. 13.
- 43 О движении: Аристотель не называет движение, перечисляя роды количеств в 5 кн. “Метафизики”. Движение не количество: большинство фомистов против Фонсеки, Конимбринченза и др.
- 44 “Неполное” — (лат.). Прим. ред.
- 45 Евклид. “Начала”, 7, изд. Петрушевского, очер. 2. Euclides Elementa funfzehn Bucher uberz J. Lorenz. Halle. 1840. [Также пер. Мордухай-Болтовского. М. 1950.]
- 46 Аристотель выражается несколько иначе, противопоставляя единицу не числу, а множеству: единица противоположна множеству, как мера тому, что измеряется. Arist. Met. lib X Cap. VI.
- 47 Реалисты приписывают универсалиям (общим понятиям) реальное существование (Ансельм. Шампо, Бернард Шаргрский). Номиналисты признают только символическое их значение. У позднейших схоластиков, у Фомы Аквинского компромиссное решение.
- 48 Концептуалисты универсалии находят в душе, но при этом не как слово или символ, а как ее модус. Это мировоззрение берет верх и его придерживаются рационалисты. К концептуалистам примитивного типа можно отнести и Абелира. Reimusat. Abelard t. I, II. Paris 1845. Также Haureau, Prantl и др.
- 49 Met. V. гл. 6.
- 50 О методе Аристотеля см. Biese.
- 51 Met. Lib. XI cap. VI. Об идеальных числах Платона см.: L. Brunschwig. Les etapes de la philosophie mathematique. Paris. Alcan. 1912.
- 52 Там же.
- 53 Альберт Великий (1193 – 1280). Haureau. La phil. sul—XII, cah. XVII.
- 54 Г. Кантор. Купюра. Принципы математики.
- Внедряясь глубоко в анализ абстрактных понятий, схоластика разделяет два понятия единства: одно *трансцендентное*, отвечающее вещи в себе (unum quod convertitur cum ente по Колонне), и единство как принцип числа. Одно определяется как неделимое, отделенное от других вещей, т.е. *отрицательно*. Другое определяется *положительно*, числен-

но. При таком отделении трансцендентного единства от численного, единица впервые выступает как численная определенность, как первое число. Трансцендентное единство схоластиков не следует смешивать с *сингулярным* классом тождеств. трансценд. и числового единства.

Тождество трансценд. и числового единства см.: Suarez XV Areolus, Cupreolus (in 2 dist. 18), Ockham (in 4q. 4) u quodib. 4 q. 29–33, 7q. 25, также Albertus de Sax. I Phys. gr.

Против этого Фома: S. Thom. S. T. 3 par. q. 11 art. 2 in 4 dis. 2 art. 9. Alb. Mag. I. Phys. t. 104. Soncin 5 Met. 2, а также Durandus, Mauronius, Hervaeus и другие.

35 Soncinas. Met. lib. X. Q. VIII.

36 Там же.

37 Об абстрактном понятии группы см.: Кутюра. Принципы Математики. Изд. Карбасникова.

58 Guerinois. De praedic. Quant. art. V.

39 Aristotelis. 8 Met. Cap. 3, также Phys. Cap. 3.

60 О Росцелине. См. сочин. Абеляра. Remusat Abelard.

61 Отметим чисто схоластическую проблему: о том, следует ли деление относить к материальному объекту или к его количеству (это слово употребляется в смысле пространства). Наряду с отрицательным решением (Suarez, Fonseca) и положительным (Soncinas, Capreolus, Caetenus, Sanschez) еще имеются и средние компромиссные. Некоторые томисты думают, что хотя части и относятся к вещи, но само их получение невозможно без пространства (Mailled, Goudin), другие же видят роль пространства в создании *порядка* между частями (Casma de Len). См. учение Лейбница о пространстве, как порядке вещей.

62 Suarez. Metaphys. Disputationes tomi duo. Venetiis. 1619. Disp XLIV, XLV. О различении соединения и составных его элементов. За реальное различие Suarez, Arriaga, против Conimbricensis. Об этом вопросе подробно Knittel. Aristoteles curiosus. Progae. 1682.

63 О материи и форме. См. Aristoteles. О нераздельности формы и материи. Alb. Mag. i Phys I trac. II.

64 Об учении Фомы о материи см.: Haureau. La philosophie scolastique, XII. Ch. XX, p. 104

65 Жегалкин. Трансфинитные числа.

66 Кантор. Учение о множествах. Новые идеи в математике. Сб. 6. Ueber die unendlich lineare Punktmannigfaltigkeiten. Math. Ann. B. 15–21–23. 1879–1884.

67 O multitudo: Аристотель, Met. Lib. XII. Cap. I.

68 Soncinatis. Questiones metaphisicales acutissimae. 1622. Lib X.

69 Sonc. Lib. X. Q. X. За это прив. места из 10 кн. Метафизики Аристотеля и Thom. 4 Met.

70 Sonc. Lib. X. Q. VIII. За это прив. место из 8 кн. Метафизики Аристотеля.

- 71 Arist. Met. Lib. IX, cap. VI.
- 72 Об Анаксагоре см. Zeller. Geschichte d. Ph., также Таниери. Первые шаги греческой науки.
- 73 Ср.: Лебедев А. В. Фрагменты ранних греческих философов. М. 1989. Анаксагор, фр. 17: "ничто не рождается и не гибнет, но соединяется ... и разделяется". Приведенная автором формулировка – позднейшая. Прим. ред.
- 74 Ансельм. Patrologia Migne. 1853, t. CLVIII.
- 75 Sonc. Met. Lib. V. Q. XVI.
- 76 Конечно, эти возражения создавались арабскими, а не христианскими схоластами.
- 77 Generatio следует отличать от ortus (тому и другому отвечают русское слово "рождение"): об ortus см. Aristotelis. Naturales Auscultationes. Lib. VIII.
- 78 Soncin. Lib. XII. Q. XV–XVI.
- 79 О философах до Аристотеля см. в "Метафизике" самого Аристотеля. Также Zeller. G. d. Philosophie.
- 80 Учение Аристотеля о против.: Arist. Met. Lib. X. cap. IV. О средних, cap. V.
- 81 Там же, cap. VI.
- 82 Arist. Met. Lib. X. cap. IV, V.
- 83 Гегель. Логика, см. также Куно Фишер. История новой философии.
- 84 Arist. Phys. I. cap. VII. Met. Lib. IV. Tiedemann, s. 263.
- 85 Из ничего ничего не происходит – (лат.). Прим. ред.
- 86 S. Thom. Aq. Opusc. 31 in. Arist. Met. Lib. XII. c. 2.
- 87 Аристотель о холоде. De Coelo, Lib. IV. Телезий. О нем: Carriere. Die phil. Weltanschauung der Reformationszeit. Stuttgart. 1847. VII. s. 314–353.
- 88 Кардан. Там же, VI, s. 324 – 352.
- 89 Arist. Categoriae, Cap. VII.
- 90 Т. е. в отношении "отец–сын". Прим. ред.
- 91 Alb. Mag. III, p. 207. Th. Aq. Opusc. 48.
- 92 Авиценна. Die Metaphysik. Avicennas enthaltend die Met. Theologia etc. ubersetzt und erlautert von M. Hertz. Leipzig. 1909. 10 Kap. 857. Старое издание Avicenas Opera. Venetiis. 1523.
- 93 За умножение Hurtado. 15 Met. s. 10. Скотт. Scot. in 3 dis. 8 q. I, против Thom. S. T. 3 p. q. 35. a 5, см. также Knittel, Aristoteles curiosus 1682 ex libris Met. Q. XLVIII.
- 94 См.: Guerinois. De Praed. Relat. Sonc. Lib. V.
- 95 Hervaeus Natalis, 1323. Quodlie II q. 14. Buhle § 797.
- 96 Wilhelmus Durandus, 1332. In Mag. Sent. I dist. 17 q. 3 q. Buhle § 806.
- 97 In Mag. Sent. II dist. I. q. 5 Buhle. s. 770.

- 98 Более подробно об этом смотри мою работу: Из прошлого 5-й книги "Начал" Евклида. [наст. изд.].
- 99 Евклид. "Начала". Опред. 3. 5-й книги.
- 100 Там же, определение 5.
- 101 Евклид "Начала". Кн. 1.
- 102 Там же, кн. 7-9.
- 103 См.: (Arnauld). Nouveaux Elements de Geometrie. Paris. 1687.
- 104 Арно – Antoune Arnauld (1632–1684) вместе с Николем составил знаменитую пор-роялевскую логику (L'art de penser). [См.: А. Арно, П. Николь. Логика или искусство мыслить. М. 1991.]
- 105 Newton. Arithmetique universelle par Beaudeaux. Paris. 1902. [Ньютон. Всеобщая арифметика. М.–Л. 1948.]
- 106 L. Bertrand. Developpement nouveau de la partie elementaire des Mathematiques. Geneve. 1788.
- 107 Legendre. Elements de Geometrie; у Вольфа иррациональное число понимается как отношение линии к линии (Ontologia § 405), но у него еще не всякое отношение линий есть число.
- 108 Многими сознается, что центральной проблемой алгебры является уравнение; в этом случае предпосылается введение, где говорится сперва о численных, затем тотчас о буквенных уравнениях. См.: Lacroix. Elements d'Algebre. Поздн. издание: Prouhet. Paris. 1879. У Briot (Lecons d'Algebre) эта часть развита больше.
- 109 Словесная алгебра.
- 110 Полусимволическая. Эйлер в "Anleitung zur Algebra, Petersburg. 1802", излагая свойства чисел, уже при сложении и вычитании пользуется буквами, для "представления результатов в общем виде". Аналогичным образом поступает и Глаголев в элементарной алгебре (Москва, 1907), и Борель–Штеккель в элементарной математике, изд. "Матезис".
- Schubert. Element. Arithmetik und Algebra. Leipzig. 1910, указывает наряду с буквенными выражениями и уравнения. Давидов, Малинин и другие начинают *прямо* с буквенных выражений.
- 111 Уравнения, к которым приводятся обычно арифметические задачи, следующие: $y - c = m(x + c)$ (перекладывание см. Егоров, зад. 1317), $ax + by = c$, $y = x + d$ (деление на неравные части, зад. 1320), $ax + by = c$, $y = mx$ (т. е. части, из которых одна кратная другой, 1491 и д.), $x + y = s$; $y : x = m : n$ (деление, зад. 1521).
- 112 См.: Шапошников и Вальцов. Сборник алгебраических задач. Давидов в начальной Алгебре, III гл. стр. 63, говорит, что взаимнопростые, это такие одночлены (и многочлены), которые общим наибольшим делителем имеют ± 1 .
- 113 Развитие вида.
- 114 Развитие индивидуума.

- 115 Этот взгляд приводится и в XVIII веке, см. De la Caille. *Lectiones elementaris mathematicae*. 1762.
- 116 Евклид. “Начала”. I книга.
- 117 Coroli Renaldini. *Ars Analytica*. Anconae. 1644.
- 118 Vieta. In artem analyticam Isagoge. 1591. Cantor. *Vorlesungen uber Geschichte der Mathematik*. В. II. Leipzig 1900.
- 119 Т.с. произведения площадей и тел, и двух площадей. Это допускает уже Диофант. Прим. ред.
- 120 См. также: *Lex homogenarum*. Isagoge, p. 5. Marie. *Histoire des sciences mathematiques*, t. III, p. 9–19. Renaldini, p. 107.
- 121 Isagoge, p. 132–134, у Визы эта операция ставит целью освобождение от иррациональности; полагая $x = \sqrt[3]{80y}$ уравнение $x^4 - 8x = \sqrt[3]{80}$ приводим к $80y^4 - 8y = 1$.
- 122 Renaldini. *Cap*, XXIX, p. 211.
- 123 Неизвестное. Прим. ред.
- 124 Декарт. *La Geometrie de Rene Descartes*. Livre I. Paris – Hermann. 1898. Геометрия начинается с построения алгебраических выражений с разъяснением их смысла.
- 125 Картезианская точка зрения служит у Гильберта для основания теории пропорций без архимедова постулата (*Streckenrechnung*). Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig. 1899. S.32 и др. издания. Есть и русское. [Гильберт. *Основания геометрии*. М. 1948.]
- 126 См. мою работу: Из прошлого пятой книги “Начал” Евклида. Математ. Образование за 1916 г. Большое историческое значение в этом отношении имеют (*Arnaldus*). *Nouveaux elements de Geometrie*. Paris. 1683 и L. Bertrand. *Developpement nouveau de la partie elementaire des Mathematiques*. A Geneve. 1778.
- 127 Legendre. *Elements de Geometrie* (много изданий).
- 128 Об индусах подробно: Ващенко–Захарченко. *История математики*, Киев, 1883, стр. 377. Переводы на английский Bja–Ganita и Lilavati (Bascara) – Strachey. 1811. Taylor. 1816, см. также Buchner. *De algebra Indorum*. Elbing. 1821.
- 129 Об арабской алгебре, между прочим: Matthiesen. *Grundzuge der Antiken und Modernen Algebra*. Leipzig. 1878.
- 130 См. главным образом сочинение Магомета бен Музы (около 830 г.). *Liber Mahmeti filii Moysi Alchoarissmi de algebra et almuchabal incipit...* известно в средние века. Английский перевод Rosen. London. 1831.
- 131 Renaldini. Геом. выводы числовой алгебры, стр. 66, 77, 85; буквенные стр. 128, 133, 136. [См. также: Аль–Хорезми. *Математические трактаты*.

ты. Ташкент. 1964., Сабит-ибн-Корра. Математические трактаты. М. 1984.]

132 Количественную точку зрения можно увидеть у индусов. У Диофанта “+” знак операции.

133 Например, в курсе алгебры Лакруа. Истор. данные смотри в книге: Мрочек и Филиппович. Педагогика математики.

134 Renaldini. Alg. Speciosa.
 $AQ + B \text{ in } A = ZQ$ (p. 128)
 $AQ \cdot B \text{ in } A = ZQ$ (p. 131)
 $B \text{ in } A \cdot AQ = ZQ$ (p. 134)

135 Renaldini. Alg. Speciosa Cap. III. Operatio Secunda, см. также p. 126.

136 Renaldini. Parabolismus в числовой алгебре. Cap. X, p. 59.

137 Renaldini. Alg. Speciosa. Cap. IX, p. 121.

138 Viète. Introduction.

139 Renaldini. Cap. XV, p. 148.

140 Vieta. De acqquatuum recognitone et emendatione 1615, p. 123–124.

141 Там же, p. 132 – 134.

142 Renaldini, p. 230.

143 P. 216.

144 Renaldini, p. 175.

145 Renaldini. Algebra Spec. Cap. II, p. 129.

146 Renaldini. Alg. Spec. Cap. XXIII, Vieta de recogn. Cap. 19, 20, 21.

Вьетта решает задачу о построении уравнения, определяющего данные положительные корни и дает следующие формы:

$(a + b)x - x = ab$, $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x = abc$; p. 158.

147 У Жирарда (Cantor В. II, s. 777) отрицательные корни фигурируют наряду с положительными, им придается геометрическое значение и “–” объясняется “отступая”, “+” “иди вперед”. Многие корни являются только показателями того, что корней меньше, чем степеней уравнения, причем настолько, каково число многих корней. Но Харриот не признает отрицательных корней (Cantor, 790. Kastner. В. III, 42–46, 179–181).

148 Renaldini, p. 235.

149 В современной символике:

$$x^3 - bx = \sqrt{z}; \quad (x^3 - bx)^2 = x^6 - 2bx^4 + b^2x^2; \quad x^6 - 2bx^4 + b^2x^2 = z.$$

150 $(a^2 + 2ae + e^2 + b)(a + e) = (a^2e + 2ae^2 + e^3 + be) + (a^3 + 2a^2e + ae^2 + ab) = a^3 +$
 $+ 3a^2e + 3ae^2 + e^3 + be + ab$. Прим. ред.

151 $x^2 + 2bx = z$; пусть $x + b = e$, тогда $e^2 = x^2 + 2bx + b^2 = z + b^2$,

откуда $x + b = \sqrt{z + b^2}$ и $x = \sqrt{z + b^2} - b$;

если $b = 1$ и $z = 20$, $x = \sqrt{21} - 1$. Прим. ред.

- 152 Khelasat al Hisab ou Essence de Calcul de Beha-Eddin. Nouvelles Annales XV. 1846.
- 153 Из Lucas Pacioli. Liber Abaci. Лука Пачиоли (1445–1514).
О нем также: Лоренц. Элементы Высшей Математики.
Лебедев. Очерки по истории точных наук. Кто изобрел алгебру? Пет-
роград. 1919.
- 154 Если $x^2 + px = q$, то $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$. Прим. ред.
- 155 Аничков. Теоретическая и практическая арифметика. Москва. 1786.
- 156 “Начала” Евклида в переводе Ф. Петрушевского или Ващенко-Захар-
ченко [или Мордухай-Болтовского. М. 1950].
- 157 Petri Rami. Geometriae Libri XXVII. Basileae. 1569. Scholarum
Mathematicarum. Libri unus et triginta. Basileae 1569.
- 158 Euclidis elementorum. Libri XV, auctore Crist. Clavio. Francfurt (1574),
(1654).
- 159 Borelli. Euclides restitutus. 1679.
- 160 Arnaldus. Nouveaux elements de geometrie. Paris 1683.
- 161 Saccheri. Euclides ab omni naevo vindicatus.
- 162 Lambert. Theorie der Parallellinien.
- 163 Legendre. Elements de Geometrie. Paris. 1794.
- 164 Grassmann. Die lineare Ausdehnungslehre. Leipzig 1844.
- 165 Riemann. Ueber die Hypothesen die der Geometrie zu Grunde liegen, есть
русский перевод. Каз. Мат. Об.
- 166 Helmholtz. Ueber die Thatsachen die der Geometrie zu Grunde liegen.
- 167 Lie. Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig. 1888–1893.
- 168 Статьи Бельтрами в Annali di Mathematica. 1865.
- 169 Klein. Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie. Mat. Ant. IV,
VI. XXXVII.
- 170 Hilbert. Grundlagen der Geometrie. Прекрасный исторический очерк
оснований геометрии можно найти в основаниях геометрии проф. В.
Кагана. Одесса 1907.
- 171 Legendre. Elements de Geometrie и все учебники лежандрового типа:
Garnier-Vincent, Terquem, Lacroix и другие. В этом отношении в высо-
кой степени характерна книга: Perronet-Tompson. Geometrie sans
axiomes, ou le premier livre des elements d’Euclide demontre d’une maniere
completement rigoureuse, trad. de l’anglaise par van Tenas, Paris, 1836, в
которой доказываются все аксиомы, но только с помощью сложных
стереометрических рассуждений.
- 172 Pascal. Oeuvres, III, p. 163–182.
- 173 Характерны сами названия сочинений: Tschirnhausen. Medicina mentis
sive artis inveniendi praecepta generalia. Amstelodami. 1687. Чирнгау-

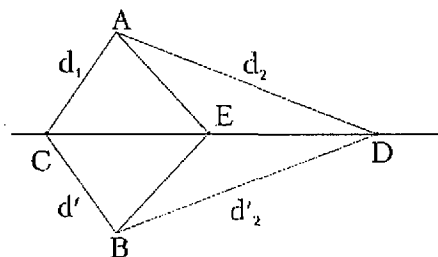
зен (1651 – 1708). О нем см.: Cantor В. III 3. 112., Hansch. *Ars inveniendis. Synopsis regularum praecipuorum arti inveniendi* 1727.

- ¹⁷⁴ *Regulae ad directionem ingenii. Oeuvres morales et philosophiques par Amedee.* Paris 1855. Рассуждения о методе, пер. Любимова. Ж. М. Н. П. СПб. 1885 – 86. О Декарте: Ziehen. S. 26, 99. [Декарт. Соч. в 2 Т. Т.1. М. 1989.]

- ¹⁷⁵ (Arnaldus). *Nouveaux Elements de Geometrie.* Paris 1683.

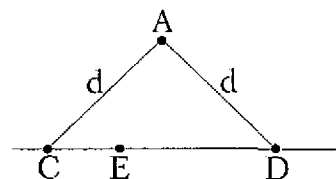
- ¹⁷⁶ Пусть $CA = CB$ и $DA = DB$

Утверждается, что для любой точки E прямой CD $EA = EB$



- ¹⁷⁷ Varignon. *Elements de Mathematiques.* Amsterdam. 1734.

- ¹⁷⁸ Что, разумеется, не верно. Автор имеет в виду следующее. Согласно первому аргументу Арно, свойством, которым обладают две точки прямой, обладают и все другие точки этой прямой, поскольку – де прямая определяется двумя точками. Однако это не верно, как показывает приведенный контрпример.



- ¹⁷⁹ См. прим. 176.

- ¹⁸⁰ Herigonis. *Cursus mathematicus nova brevi et clara methodo demonstratus per notas reales et universales utra usum cuiuscunque idiomatis intellectu faciles.* A Paris 1634. О нем: Cantor. *Vorlesungen*, В. II, S. 656.

- ¹⁸¹ Бертрановское определение угла, как неопред. части плоскости, ограниченной двумя прямыми, и как наклонения, различия направлений, дают безусловно различные вещи, которые у Крелля, Бретшнейдера, Шпикера и др. различаются, как Winkel (угол), и Winkelraum (угловое пространство).

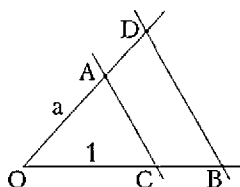
- ¹⁸² Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, 1899 и др. издания.

- ¹⁸³ “В начальном основании Математики” Н. Муравьева (руководстве Вольфганского типа), 1752, даются два определения:

Дефиниция 3: одинаково называются, когда одно вместо другого взять можно.

Дефиниция 4. Когда одна величина в другой один раз содержится, такие величины называются равными.

184



Прим. ред.

185 Fortunato a Bruno. *Elimen. Math.* 1738, см. такие аксиом. опыты у Rohauet. *Oeuvres posthumes. Euclide.* 1690. Nebe. *Nucleus Arithmeticae.* 1666.

186 В современной символике:

Дано:

$AB = AC$,

требуется доказать:

$\angle ABC = \angle ACB$ и

$\angle CBD = \angle BCE$

Доказательство:

Продолжаем AB до AD и AC до $AE = AD$

Имеем: $AD = AE$, $AC = AB$, $\angle DAE$ общий $\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE \Rightarrow BE = DC$, $\angle DCA = \angle EBA$, $\angle ADC = \angle AEB$;

$BD = CE$ (по постр.), $DC = BE$ и $\angle BDC = \angle CEB \Rightarrow \triangle BDC = \triangle CEB \Rightarrow \angle CBD = \angle BCE$; (и т.д.) и $\angle DCB = \angle ECB =$

$\angle ABC = \angle ABE - \angle EBC$ и $\angle ACB = \angle ACD - \angle DCB \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB$ (и т.д.)

(Здесь используется признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними – предл. 4 I-й кн. “Начал” – но не используется утверждение о сумме смежных углов, которое доказывается у Евклида позже – в предл. 14.) Прим. ред.

187 Предл. 10 XI-й кн. “Начал”. В современной символике:

Дано: $AB \parallel DE$, $AC \parallel DF$.

Требуется доказать: $\angle BAC = \angle EDF$

Доказательство: отложим $AB = AC = DE = DF$, соединим AD , BC , EF , BE , CF . $BA = ED$ и $BA \parallel ED \Rightarrow AD = BE$ и $AD \parallel BE$, (предл. 33, I кн.) аналогично $CF = AD$ и $CF \parallel AD \Rightarrow BC = EF$ и $BC \parallel EF \Rightarrow \triangle ABC = \triangle DEF$ (по 3-м сторонам – предл. 8 I кн.) $\Rightarrow \angle BAC = \angle EDF$ (и т.д.)

188 *Elementa Euclidis. Declaratio Autore. Wuil. Oughtred.* Anglo. Oxoniae. 1662. William Oughtred. 1574–1600, см. Cantor. B. II, s. 720.

189 Т.е. величин, квадраты которых соизмеримы или несоизмеримы, см. опред. 2 книги X “Начал”. Прим. ред.

- 190 Т.е. в отношении “золотого сечения”: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ см. опред. 3 книги VI “Начал”. Прим. ред.
- 191 Beaulieu. La lumiere des mathematiques. 1673 (литогр.). Ему же принадлежит: La geometrie francaise ou la pratique aisee. 1676. См. Maupin. Opinions et curiosites touchant les mathematiques. Paris.
- 192 Peano. Formulaire mathematique. Кутюра. Принципы математики.
- 193 Datis omnium terminorum proprietatibus reciprocis seu definitionibus qualibusque invenire definitiones optimi generis. [С помощью данных соответствующих свойств или определений всех терминов найти определения лучшего рода (лат)]. Lett. a Tschirnhaus. 1679. Werke Math. IV, 481. Briefwechsel I.
- 194 Phil. VII. 184.
- 195 Phil. IV. 161, VI. 490, 495, 594, VII 553. [Лейбниц. Соч. в 4 Т. Т. 3. М. 1984., стр.99.]
- 196 Phil. I, 188.
- 197 Лейбниц. Соч. в 4 Т. Т. 3. М. 1984. стр. 119. Прим. ред.
- 198 О принципе противоречия см. там же, стр 138. Прим. ред.
- 199 Четыре картезианских правила:
 — не принимать за истину того, что не очевидно;
 — делить всякую проблему на элементарные;
 — располагать свои мысли в порядке от простейшего к сложному;
 — соблюдать полную перечня мыслей.
 См.: Декарт. Соч. в 2 Т. Т. 1. М. 1989., С. 260. Критику Лейбницем этих правил см.: Лейбниц. Соч. в 4 Т. Т. 3. С. 157–158 и далее. Прим. ред.
- 200 Евклид применяет метод исчерпывания во 2-й части XII кн., 5. XII, 10. XII, 11. XII, 12. XII, 18. XII.
- 201 См. Архимед. — Две книги о шаре и цилиндре и т.д. пер. Петрушевского. 1823. [Архимед. Соч. М. 1962.]
- 202 Haup. de la Chapelle. Institutions de Geometrie.
- 203 Aristotelis Phys. 1, 6 – 9, II, III, VII, VIII, — Thomas Aquinatis Phys. I lec. 13; сильное изменение в учении о материи у Скотта. Scot. Sent lib. II dist. 12 q. см. Haureau. De la philosophie Scolastique. Paris. 1850. t. II, против дуализма формы и материи — философы ранней эпохи возрождения Агрикола (1485) и Лоренцо Валла (1457), Agricola, De inventione dialectica. Coloniae, 1527.
- 204 Платон об идеях: Тимей, Федон, Федр и другие диалоги. Аристотель о платоновских идеях: Metaph. I. XIII с. 4, I. I, с. 6.
- 205 Проблемы essentia et existentia, см. Aristot. Met. IV₃₋₅, V₁₄, X₈. Thomas Aquin. De ente et essentia. Cap. I и другие.
 D. Scotti in 2 lib. sent. d. 6, q. 1.
 Кроме Haureau еще сочинения по истории схоластики.
 Rousselot. Etude sur la philosophie dans le moyen age. 1840–47.

Prantl. Geschichte der Logik im Abendlande. 4 Bde.

Wulf. Histoire de la philosophie medievale.

Шреккель. – История средневековой философии. 1912 г. Материалы.

Migne. – Patrologia. Tiedemann. – Geist der Specul. Philos. B. IV. Marburg.

1793, также Buhle, Cousin. Fragments philosophiques. 1840 и др.

- 206 Сочинения Фомы Аквинского изданы были в 1570 г. Последнее издание Thomae Aquinatis. – Opera Omnia jussu Leonis XIII edita Romae. 1887.

Развитие идей Фомы Аквинского у Суареца. F. Suarez. Metaph. derh. tomiduo. Venetus. 1619. Disp. 16 de intensione.

О Фоме Аквинском Heaureau, t. II, ch. XXI, против Ф. Аквината.

Дунс Скотт in I, lib. 17, q. 3. Д. Скотт. 1270–1308.

Duns Scoti. Opera omnia Lugd. 1639 12 vol. Об интензивировании 8 Met. in. I, lib. sent. dis. I, q. 5. Его философию лучше всего изучать по Boyvin – Philosophia Scotistica a prolixitate et Subtilitatibus etc. Liberata et vindicata. Par. 1643.

F. E. Abergoni. Resolutio doctrinae Scoticae. Lugd. 1643. Крупнейшие скоттисты: Trans. Majronius, Ferrara, Aurelis, Burleig и другие.

- 207 В прямой зависимости от Д. Скотта, вставшая против его реалистических, школа номиналистов Оккама. К ней принадлежат: Buridan, Pierre d'Ailly, Holcot, Oresmus, Biel.

- 208 Формально по природе вещей – (лат.). Прим. ред.

- 209 О формальностях Д. Скотта, кроме сочинений самого Д. Скотта. см. Prantl. – Geschichte der Logik im Abendlande. Bd. II. Cap. XIV, с. 20. Pluzanski. – Essai sur la Philosophie de D. Scott. Paris. 1887.

- 210 Эмпедокл, около 444 [до н.э.]. Diog. Laert. VIII, 51.

Об Эмпедокле. Arist. Met, I 4. De generat. et corrupt. I 1, 8. II, 6 Phys., II, 4.

- 211 Bernardino Telesio. 1508–1588. Его сочинение: De natura juxta propria principia. Romae. 1565. Neap. 1586, о нем писал Бэкон. De principiis et origine etc.

- 212 Орезм Николай – ученик Оккама (1275–1337), главы позднейших средневековых номиналистов, ученика (хотя и восставшего против учителя) Д. Скотта. Guilielmi Occami, Summae logicae. Охон. 1675 и др. сочинения.

- 213 Cantor. – Vorlesungen, II, 2, 130, сочинение Орезма: Tractatus de latitudinibus, изд. Max. Curtze, в Zeitschrift für Mat. und Physik. t. XIII, s. 92. [Орезм Н. Трактат о конфигурации качеств. // Историко-математические исследования, вып. XI. М. 1958.]

- 214 Kepleri. – Nova stereometria solidorum. Lin. 1615. Opera omnia IV, pp. 537–538. Kantor. B. II. S. 750. [И. Кеплер, Новая стереометрия винных бочек. М.–Л. 1935.]

- 215 Cavalieri. – Geometria indivisibilibus promota. Bonn. 1635 (1653) [Б. Кавальери. Геометрия неделимых. М.–Л. 1940.], также его Exercitationes geometricae. Bonn. 1647. Дальнейшее развитие у Валлиса. Wallis.

Arithmetica infinitorum. Opera Mat. Oxoniae. t. I. 1647. Klugel. Mat. Worterbuch. Caval. Met. Актуально бесконечно малое еще имеется, хотя в измененном виде, у Пуассона (1883). О методе неделимых см. Brunschwig. Les etapes de la philosophie mathematique. Alcan. 1912. Liv. III. Ch. IX. p. 160, см. также Pascal. Reflexions sur l'espris geometrique. Pensées et opuscules. 1909.

- 216 Здесь интересно изучить знаменитый спор об угле касания между Клавием и Пелетарием.

Euclidis elementorum. Libri XV. Auctore Christophoro Clavio.

Hieron Cardani. De subtilitate. Basiliae. 1554.

- 217 Descartes. Geometrie. 1637 [Декарт Р. Геометрия. М.–Л. 1938], также Notes Florimond de Beaune, о нем Brunschwig. Les etapes, ch. VII, p. 113.

- 218 Newtoni. Methodus fluxionum. 1678 в Opuscula Newtoni I. Есть на французском языке. Theorie des fluxions. Cantor. III, s. 108, 168. [Ньютон. Математические работы. М.–Л. 1937.]

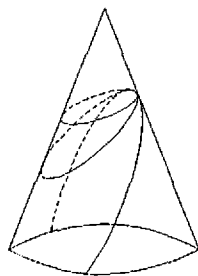
- 219 Principium quoddam generale etc. 1716. [Лейбниц. Соч. в 4 Т. Т. 3. М. 1984. стр. 357 (Письмо г-на Лейбница о всеобщем принципе ...)] Виндельбанд I. 1913, стр. 363. Brunschwig. Les etapes. p. 209.

Более подробная формулировка у Лейбница Animadversiones in. partem generalem Principiorum Cartesianorum Ad punctum sec. ad. art. 45. [Лейбниц. Т.3. С. 218–265. (Замечания к общей части декартовых “Начал”).]

- 220 Лейбниц. Изб. Фил. Соч. Москва 1890. Новые опыты о человеческом разуме, стр. 200. [Лейбниц. Соч. в 4 Т. М. 1983. Т. 2, стр. 56.]

- 221 Принцип Лейбница в геометрической форме дает первую часть принципа непрерывности Понсэ, в силу которого свойства формы, открытые для первоначальной, распространяются на те случаи, когда некоторые ее части сделались 1) нулями, бесконечностями или 2) мнимыми. Application d'Analyse et de Geometrie. t. II. Brunschwig. Les etapes de la philosophie mathematique. Paris. 1912.

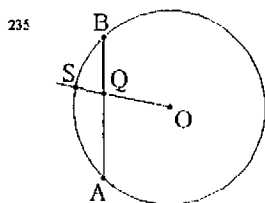
[Параболу можно рассматривать как предельный случай эллипса, большая ось которого становится бесконечной. Если получать эллипс сечением конуса плоскостью, то наклоняя секущую плоскость так, чтобы эллипс все больше и больше вытягивался, мы получим параболу тогда, когда секущая плоскость окажется параллельной одной из касательных плоскостей конуса. Основное свойство конических сечений – постоянство отношения расстояний от всякой точки кривой до фокуса (точки) и директриссы (прямой) – имеет место и для эллипса, и для параболы: для эллипса это отношение меньше единицы, а для параболы оно равно единице.]. Прим. ред.



- 222 Newtoni. Philosophiae naturalis principia. Mat. London 1686 lib. Ньютон – Математические начала натуральной философии. Пер. А. И. Крылова.

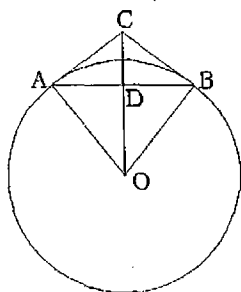
Известия. Николаев. Моск. Академии. Петроград 1915. См. также Богомолов: Общие основания ньютоновского метода первых и последних отношений. Физ. Мат. Об. Каз. Унив. 1926.

- ²²³ Euclidis Opera, ed. Heiberg. Lipsiae. 1883. Et si aequalibus aequalia adduntur tota aequalia sunt. [Если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны. Евклид. "Начала", пер. Мордухай-Болтовского. М. 1950.]
- ²²⁴ Аксиоматика исчисления бесконечно малого в конце XVII в. см. у l'Hopital. Analyse der infiniments petits. 1713. [Лопиталь. Анализ бесконечно малых. М.—Л. 1935.]
- ²²⁵ Fermat. Methodus ad inq. maximum et minimum. Newton. Theorie des fluxions. [См. Ферма о методе максимума и минимума в кн.: Декарт. Геометрия. М.—Л. 1938; Ньютон. Математические работы. М.—Л. 1937.]
- ²²⁶ Ср. соотв. места в логике Гегеля.
- ²²⁷ Такое отождествление элемента его эквиваленту и теперь производится, как простой, методический прием, конечно, в полном несогласии с современными научными идеями. См. конец учебника геометрии Давыдова.
- ²²⁸ Понятие об эквивалентных бесконечно малых и основные леммы, к ним относящиеся, видны впервые у Дюамеля.
- ²²⁹ Wolfius. Compendium elementorum Matheseos. 1711. Weidleri. Institutiones Mathem. и другие. Русский учебн., напр., Аничкова. Философия Мат. акт. бесконечно малого. Iacopo Belgrado (1704—1789). De utriusque analyseos usu 1661—62, см. Cantor. B. IV. § 651. Cantor B. III 270—271 и др. места Ch. Wolff (1679—1754).
- ²³⁰ Бертран Женевский. 1731—1812. L. Bertrand. Developpement nouveau de la partie elementaire des. Mathematiques prises dans toute son etendue. A Geneve. 1778. L. Bertrand. Elements du Geometrie. Paris. 1812. См. также Cantor. B. IV. Bobynin. Lehrbuch der Geometrie § 382.
- ²³¹ De la Caille. Lectiones elementares Mathematicae. 1762.
- ²³² О взглядах сенсуалистических см.: Encyclopadie methodique, mathematiques. Elements de Geometrie и др. Condillac. Traite des sensations. Paradoxes и друг. Об энциклопедистах — Морель, Дидро и энциклопедисты. 1882.
- ²³³ До Кеплера взгляд этот у Штиффеля — Arithunetica integra Norim. 1544.
- ²³⁴ Datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata, см. выше. Прим. ред.



Прим. ред.

- ²³⁶ Kastner. Anfangsgrunde des Arithmetik. Geometrit ebenen und spharischen etc. Gottingen. 1786. О Кестнепе: Cantor. III. 576.
- ²³⁷ При уменьшении АВ, OD будет увеличиваться, а CD уменьшаться, поэтому ABC будет становиться меньше относительно ABO.



Прим. ред.

- ²³⁸ д'Аламбер (1717–1783) см. в *Encyclopadie methodique: Limite*, также *Melanges de litt. d'histoire et de la philosophie*. Nouv. ed., t. V. Amst. 1767. Cantor–Bobylin. Статья Бобынина “Элементарная Геометрия и ее деятели во второй половине XVIII в”, есть и на русском языке. Лейтмотивом предреволюционной мысли является идея прогресса; человечество мыслится в прогрессирующем развитии, в движении к этическому или экономическому совершенству, при котором оно постепенно приближается к идеалу, но никогда его окончательно не достигает. Это идея исторического предела, вполне соответствующая пределу математическому, впервые определенно формулируется Тюрго в “Рассуждении о всеобщей истории” и развивается Кондорсэ в его “Эскизе исторической картины прогресса человечества”. Идея предела выступает также в маймоновском понимании кантовской вещи в себе, которая является предельным понятием, пределом полноты сознания или сознанием иррационального предела рационального познания.
- Соломон Маймон (1757–1800). *Versuch uber die Transcendental philosophie* (1790). Виндельбандт, II, стр. 168.
- ²³⁹ Ак. Гурьев (1766–1813). Опыт усовершенствования элементов геометрии. Спб. 1798, стр. 34. Такое же определение Бланше (Blanschet); о нем Cantor–Bobylin. § 351, см. также Гурьев, Основание Геометрии. Спб. 1811.
- ²⁴⁰ De la Schapelle. *Institutions de Geometrie*. 1765.
- ²⁴¹ Simon l’Huillier (1750–1840) L’Huillier. *Principiorum Calculi differentialis et integralis expositio elementaris*. Tubingen. 1793, также на французском языке. Berlin. 1786.

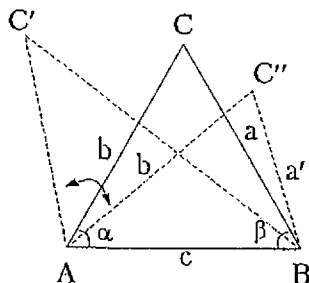
- ²⁴² См. § 8 настоящей работы, также Russel. *Einführung in die Mathemat. Philosophie*. München. 1923. Kap. 10. [Рассел. Введение в математическую философию. М. 1996.]
- ²⁴³ Legendre (Blanchet). *Elements de Geometrie*.
- ²⁴⁴ Площадь круга равна площади треугольника с основанием, равным длине окружности, и с высотой, равной радиусу.
- ²⁴⁵ Lacroix. *Elements de Geometrie a l'usage de l'Ecole Centrale des Quatres nations*. 1796–1799, в связи с ней: *Essai sur l'enseignement general et sur celui des mathematiques*, Paris. 1816, особая переработка у Garnier. *Geometrie*. 1813.
- ²⁴⁶ Гурьев. Опыт исследования элементов Геометрии. Спб. 1798.
- ²⁴⁷ Периметры вписанного, описанного многоугольника, длина окружности; при этом следует использовать постулат Архимеда: выпуклая объемлющая более объемлемой. В этом направлении следует переработать изложение Остроградского, (Руководство по Геометрии), Семашко (Элементарная Геометрия).
- ²⁴⁸ Наиболее полные и отделанные: старый – Rouché et Comberousse, новый Niewenglowski et Gerard. Paris. 1900.
Вне сомнения, элементарная учебная литература создала и теорию пределов *введения в анализ*. Основные леммы об эквивалентности впервые встречаются у Дюамеля. Duhamel. *Elements de Calcul Infinitesimal*. Paris. 1860.
- ²⁴⁹ Давидов. Элементарная Геометрия. Посл. изд. 1922, стар. изд. 1867 и др.
- ²⁵⁰ Киселев. Геометрия. Москва, 1914.
- ²⁵¹ Кант. Критика чистого разума, пер. Лосского.
- ²⁵² Мах. “Механика” и др. сочинения.
- ²⁵³ Авенариус. Критика чистого опыта. Спб. 1905 г. *Prolegomena zu einer Kritik der reinen Erfahrung*. Lpz. 1876 и др. работы.
- ²⁵⁴ Cantor. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Его работы в *Acta Met.* II. *Math. Ann.* 18 (1881) 21 (1883). [Г. Кантор. Труды по теории множеств. М. 1985.]
Идея определения предела фундаментальным рядом впервые выдвинута Мераем, *Méray*. – *Remarques sur la nature des quantités etc.* *Revue des Soc. Scien. Sc. Math.* XIV. 1869. 280. См. теорию пределов в итальянских учебниках. A. Sannio et E. d'Ovidio. *Elementi di Geometria*. Napoli, 1916. G. Veronese. *Elementi*. Padova, 1901. Также учебники Энриквеса, Амальди, Паолиса.
- ²⁵⁵ Энриквес. Вопросы элементарной математики. Спб. 1913. Статья де Витали.: Постулат непрерывности и его применение к Элементарной Геометрии, стр. 133. Дедекин. Непрерывность и иррациональные числа. Одесса, 1909.

- 256 Дальнейшее обобщение порядкового понятия о пределе см. Bertrand Russell. Einführung in die Mathematisch. Philosophie. München, 1923. Kap. Limes und Stetigkeit. § 99. [Рассел. Введение в математическую философию. М. 1996. Гл.: "Пределы и непрерывность. стр. 94.]
- 257 Rami. Geometriae Libri XXVII. Basileae. 1569.
- 258 Евклид. "Начала", пер. Петрушевского; пер. Ващенко-Захарченко. Euclides Opera omnia ed. Heiberg et Menge. Euclidis Elementa, Lipsiae 1883. [Пер. Мордухай-Болтовского. М. 1950.]
- 259 Высший род – (лат.). Прим. ред.
- 260 Arnaldus. Nouveaux elements de Geometrie. Paris. 1683.
- 261 Естественный свет – (лат.). Прим. ред.
- 262 Descartes. Oeuvres par Amedee. Paris. 1835. Regula ad directionem ingenii. [Декарт. Правила для руководства ума. Соч. в 2 т. Т. 1. М. 1989.]
- 263 La logique ou l'art de Penser. Amsterdam. 1675. [А. Арно и П. Николь. Логика или искусство мыслить. М. 1991.]
- 264 De la Chapelle. Institutions de Geometrie. 1765.
- 265 Д. Мордухай-Болтовской. Энциклопедисты и теория пределов. Речь, произнесенная 18 ноября 1917 г. в Об-ве Естествоиспытателей при Донском университете по поводу 200-летия со дня рождения д'Аламбера (не напечатана).
Кондорсэ. Эскиз исторической картины прогресса человеческого разума, русский перевод. Также: Генезис и история теории пределов (в настоящем сборнике).
- 266 Encyclopedie methodique des art etc. (Diderot). Axiomes, limite и другие статьи.
- 267 Песталоцци. Pestalozzi. Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse. Zurich. 1803. О Песталоцци см.: E. Janicke u G. Schurig. Geschichte des Unterrichts der Mathematik in den Volksschulle. Gotha. 1888, s. 63.
- 268 Критика чистого разума, пер. Лосского.
- 269 Впервые умственный счет вводится Келлером, затем Бирманом. F. Kohler. Anweisung zum Kopfrechnen. 1797. H. Biermann. Anleitung zum Rechnen im Kopf. 1790, см.: Janicke. S. 53.
- 270 540 фраз типа: 19 раз по одному, 9 раз по 2 и 1 раз половина двух, 440 фраз: 9 раз 9 и 8 раз и часть от 9 есть 89 раз; 89 единиц есть 8 раз 10 и 9 раз десятая часть от десяти; 729 фраз типа: 3 раза десятая часть от 100 есть три раза 10, 3 раза 10 есть 30 и т. д. Противники Песталоцци: Пассавант, Нимейер и др. Janicke, s. 72. Последователи: Тиллих, Шмид, Стефани, Тюрк и др. Janicke, s. 78.
- 271 Трейтлейн. Методика геометрии, пер. Крогиуса. Pestalozzi. ABC der Anschauung oder Anschauungslehre der Massverhaintnisse, 1803, См. также статьи Schurig, Geschichte der Methode der Raumlehre iun deutschen Volksschulunterrichte при упомянутой выше книге Янике.

- 272 Кант. Критика чистого разума. О Канте см.: Куно Фишер. История философии. Виндельбанд. История философии, т. II и др.
- 273 Grube. Leitfaden für das Rechnen etc. Berlin 1842. Много других изданий, о нем: Janicke, s. 112. Русские руководства: Паульсон. Методика арифметики. Евтушевский. Методика арифметики.
- 274 Encyclopadie des Arts et des Metiers (Diderot). Об энциклопедистах см. Морей. Энциклопедисты. Основы эмпириков XVIII в. Дж. Локк. Опыт о человеческом рассудке. [Локк. Избранные философские произведения. М. 1960.] Наиболее крупные представители – Кондильяк, Боннэ.
- 275 Наиболее крупный представитель – Дж. С. Милль (его система логики). Сюда следует отнести всю школу позитивистов, начиная с О. Конта.
- 276 Tibot. Lehrbuch der Geometrie. 1822.
- 277 Моя статья о Евклиде и Лежандре. Из истории метода наложения в элементарной математике. [См. наст. изд.]
- 278 О ней см.: Schotten. Planimetrische Unterricht. В. II.
- 279 Функциональный мотив, но без арифметизации, можно уловить и в одном вольфианском учебнике XVIII века, отличающемся некоторой оригинальностью среди многочисленных учебников этой школы. Horvath. Elementa Matheseos Tynaviae. 1773. Теорему I “Начал” Евклида Хорват формулирует так: “Если в каком-либо треугольнике ABC *увеличивается* угол A, причем сторона AC переходит в AC', сторона противоположная *возрастает*, т. е. $BC' > BC$ и наоборот и т. д. Кроме евклидовского Хорват приводит еще и такое рассуждение: “... ибо чем больше возрастает $\angle A$ в $\triangle ABC$, тем более расходятся крайние точки B и C, тем более BC приближается к сумме сторон AB и AC и, наоборот, чем больше убывает угол A в $\triangle ABC$, тем крайние точки B и C больше сходятся, тем сторона BC больше приближается к AB.
- 280 Аксиома: если

$$AC = AC' = AC'' = b,$$

то если $\angle C''AB < \angle CAB = \alpha < \angle C'AB$, то $BC'' < BC = a < BC'$ и обратно, если $BC'' < BC = a < BC'$, то $\angle C''AB < \angle CAB = \alpha < \angle C'AB$



Теорема:

Если $a = b$, то $\angle CAB = \angle CBA$.

Доказательство:

Пусть $\angle CAB = \alpha$ и $\angle CBA = \beta$. Предположим, что $\beta > \alpha$, возьмем C' так, что $\angle C'AB = \beta$ и $\angle C'BA = \alpha$; $\triangle ABC = \triangle ABC' \Rightarrow AC' = AC = b$ и $BC' = BC = a$, что противоречит аксиоме. Аналогично отбрасывается $\beta < \alpha$. Прим. ред.

281 Шеллинг и Гегель, см.: Куно Фишер. История новой философии.

282 G. W. Hegel's. Werke. Berlin. 1883. Wissenschaft der Logik.

Гегель. Логика, пер. Чиикова [и позднейшие издания]. Старые сочинения о Гегеле: Karl Fischer, Michelet и др.

283 I. Beskiba. Lehrbuch der Geometrie. Wien. 1826.

284 Bertrand. Developpement nouveau de la partie elementaire des Mathematiques. A Geneve. 1778.

Его же. Elements de Geometrie. Paris. 1812. См. о нем: Cantor. B. IV. (Bobylin). Lehrbuch der Geometrie § 382.

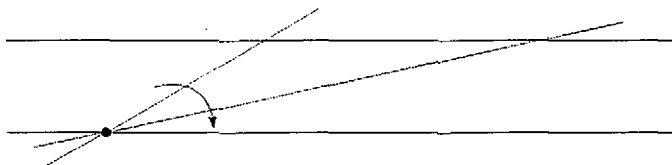
285 См. главным образом Baltzer: Die Elemente der Mathematik. XII. Leipzig. 1870. Правильный взгляд на бесконечно удаленную точку следует отнести к Гауссу. Lettre de Gaussa Schumacher. t II, p. 268.

286 Kastner. Anfangsgrunde der Arithmetik, Geometrie ebenen und spharischen etc. Gottingen. О Кестнере Cantor. III, p. 576.

287 Или *несобственные*, согласно современной терминологии. Прим. ред.

288 Reye. Die Geometrie der Lage и другие руководства по проективной геометрии: Staudt, Staudigl, Cremona, Enriques и др.

289



Прим. ред.

290 Poncelet. Traite des proprietes perspectives des figures. Paris. 1882.

291 Теорема Дезапра — см.: Brouillon project d'une atteinte и т.д. Oeuvres de Desargues pub. par Fondra. Paris. 1864.

292 Franz. Die Philosophie der Mathematik. Leipzig. 1842.

293 Schotten. Inhalt u. Methode d. Planimetrische Unterrichts.

294 Delboeuf. Prolegomenes.

295 Legendre. Elements de Geometrie, Paris. 1837.

296 Chalibaus. H. M. Historische Entwicklung der speculativen Philosophie von Kant bis Hegel. Leipzig. 1839. Также Michelet и другие.

297 Философия природы.

298 N. Grassman. Die Ausdehnungslehre. Berlin. 1862.

V. Schlegel. Die Grassmanische Ausdehnungslehre. Leipzig. 1896.

299 Riemann. Ueber die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen. Gott. Abhandlungen. XIII. 1868. Есть и на русском языке. [Риман. Сочинения. М. 1948.]

- 300 Высший род – (лат.). Прим. ред.
 301 Bolzano. Paradoxen des Unendlichen. [Больцано Б. Парадоксы бесконечного. Одесса. 1914.]
 302 Кантор. Учение о множествах. [Р. Кантор. Труды по теории множеств. М. 1985.]
 303 Fontenelle. La geometrie de l'infini.

Из прошлого аналитической геометрии

Труды института истории естествознания Акад. наук СССР, 1952, т. 4, с. 217–235.

- 1 Лучшее издание “Конических сечений” – Гейберга (Apollonii Pergae Opera. Lpz., 1891–1893); И. Ягодинский дал русский перевод 1-й книги в “Изв. Сев.-Кав. гос. ун-та за 1928 г.”. Об Аполлонии см. также: Г. Цейтен. История математики в древности и в средние века. Пер. П. С. Юшкевича. М., 1938, и Н. Zeithen. Die Lehre von den Kegelschnitten in Alterthum. Kopenhagen, 1886.
- 2 Д. Д. Мордухай-Болтовской. Аналитическая геометрия. Курс лекций. Варшава, 1913.
- 3 С. Я. Лурье. Теория бесконечно малых у древних атомистов. М.–Л., 1935.
- 4 См. Г. Цейтен. Цит. соч., стр. 66–67.
- 5 См. Р. Декарт. Геометрия. Пер. А. П. Юшкевича. М. 1938, и там же: П. Ферма. Введение в изучение плоских и телесных мест и “Приложение к Введению в места, содержащие решение телесных задач с помощью мест”.
- 6 G. F. de l'Hospital. Traite analytique des sections coniques. Paris, 1707.
- 7 Д. Д. Мордухай-Болтовской. Первые шаги буквенной алгебры. – “Изв. Сов. Кавк. Гос. Унта-та за 1928 г.”.
- 8 M. Cantor. Vorlesungen uber Geschichte der Mathematik, Bd. II, 1899, стр. 436. Cardanus Opera, t. 4, p. 371, 434.
- 9 Д. Д. Мордухай-Болтовской. Психология математического мышления. – [наст. изд.]
- 10 M. Gethaldi. de resolutione et compositione Mathematica, 1630; Его же: Variorum problematum collectio. 1607. См. М. Cantor. Цит. соч., т. II, стр. 809–811.
- 11 И. Ньютон. Математические работы. М.–Л., 1937.
- 12 J. de Witt. Elementa curvarum linearum. 1659.
- 13 Devey. Geometrie analytique. Paris. 1824.
- 14 A. Clairaut. Recherches sur les courbes a double courbure. Paris. 1731.
- 15 J. Todhunter. A treatise on plane coordinate Geometry. 1862. (Имеется русский перевод).
- 16 A. Durer. Underweysung der Messung, 1525.
- 17 J. B. Biot. Geometrie analytique. Paris. 1802.

- ¹⁸ G.S.Klugel. Mathematisches Worterbuch. Leipzig, 1803–1808.
- ¹⁹ Орезм. Трактат о конфигурации качеств. Историко–математические исследования. Вып. 11. М. 1958. – Прим. ред.
- ²⁰ H. Wieleitner. Nicolaus Oresmus graphische Darstellung. – "Natur und Kultur", Н. 14, 1912; Его же: Der Tractatus de latitudinibus formarum. – "Bibl. mathem." (3). 1913.
- ²¹ Ph. de la Hire. Nouveaux elements des sections coniques. Paris. 1679.
- ²² Т.е. символов для величин углов. Прим. ред.
- ²³ G.Cramer. Introduction a l'analyse des lignes courbes algebriques. Geneve, 1750.
- ²⁴ L. Bruunschwig. Les etapes de la philosophie mathematique. Paris, 1912.
- ²⁵ L. Euler. Introductio in analysin infinitorum. 1748. [Л. Эйлер. Введение в анализ бесконечных. Т.1–2. М. 1961.]. Прим. ред.
- ²⁶ A.G. Kastner. Anfangsgrunde der Analysis endlicher Grosse.
- ²⁷ Брио и Букэ. Кривые второго порядка.
- ²⁸ Сальмон. Аналитическая геометрия. М. Гербек. 1892

Поризмы и данные

Труды Совещания по истории естествознания 24–26 декабря 1946 г. Под редакцией Х. С. Коштоянца. М.–Л., Изд-во АН СССР, 1948, с. 161–172.

- ¹ Euclides. Opera omnia. Elementa, ed. Heiberg–Menge, 1896.
- ² A. M. Legendre. Les elements de Geometrie, 1 изд., 1794.
- ³ М. И. Владиславлев. Логика. (Приложение). 2-е изд. 1881. [Аристотель. Соч. в 4 т. Т. 1. М. 1976.] Прим. ред.
- ⁴ An. Post. I. 13. Прим. ред.
- ⁵ Pappi. Collectiones, ed. Hultsch. Berlin. 1876.
- ⁶ Р. Декарт. Геометрия, пер. и комм. А. П. Юшкевича, М. 1938.
- ⁷ Д. Мордухай–Болтовской. Четыре лекции по философии математики. [наст. изд.]
- ⁸ R. Simpson. Phil. transactions of Roy. Soc., 1723, №72; Opera reliqua Glasgae, 1776, стр. 317–394.
- ⁹ G. S. Klugel. Mathematisches Worterbuch, Leipzig, 1807.
- ¹⁰ Поризм (греч.). Прим. ред.
- ¹¹ H. G. Zeuthen. Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Kopenhagen. 1886.
- ¹² A. Girard. Invention nouvelle en l'algebre, 1629; ed. D. Bierens de Haan. Leiden, 1884.
- ¹³ P. Fermat. Oeuvres. Porismes.
- ¹⁴ M. Ghasles. Les trois livres des porismes. Paris. 1860.
- ¹⁵ J. E. Montucla. Histoire des Mathematiques, vol. II, стр. 216; M. Cantor. Vorlesungen uber Geschichte der Mathematik, 1906. Bd. I, стр. 280.

- 16 J. Playfair. Transactions of Edinburg Society of Sciences, 1794, vol. III; M. Cantor. Vorlesungen, Bd. IV, стр. 89.
- 17 Ньютон. Всеобщая арифметика. М.—Л. 1948. Прим. ред.
- 18 G. F. Castillon. Add. Newtoni Arithmeticae, стр. 124.
- 19 M. Chasles. Les trois livres des porismes, Paris, 1865.
- 20 Д. Мордухай-Болтовской. О моделях ко II книге “Начал” Евклида. Вестник опытной физики и элементарной математики за 1915 г.
- 21 Clebsch. Vorlesungen uber Geometrie. Leipzig. 1876.
- 22 Hesse. Werke. Munchen. 1891.

Проблема смерти.

Рукопись передана для публикации из личного архива Л.Ф. Болтовской. Датировка рукописи не установлена.

- 1 Иов: 14; 10 – 12.
- 2 Иов: 21.
- 3 Матф.: 25, 32–46.
- 4 Бл. Августин. О граде Божиим, кн. 13, гл. 11.
- 5 См. опровержение о вечности души Богу св. Августина “О граде Божием” кн. 10, гл. XXX. См. также учение о бессмертии по благодати св. Иринея (кн. 3, гл. 15) или Дамаскина, прим. ко второй книге: Изложение прав. Веры. Творения. 1894 г.
- 6 Творения кн. 2 изд. 1894 г.
- 7 И. Кант. Критика чистого разума.
- 8 Там же.
- 9 См.: Платон. Федон.
- 10 См.: Лейбниц. Исповедание природы против атеистов. Соч. в 4 Т. Т.1. С. 78–84. М. 1982. Прим. ред.
- 11 Творения бл. Августина, т. 2, кн. 2, гл. 3.
- 12 См.: Платон. Федон. 107a.
- 13 Этика, кн. 2, теор. 10, 23.
- 14 Moses Meudelssohn. Erusalem der Uber die religiose. Macht und Judentum. 1783. Прим. ред.
- 15 Мир как воля и представление. Т.2.
- 16 Куно Фишер. История философии. Кантовская философия, учение о свободе. Вещь в себе, как воля. Кант. “Критика чистого разума”. Методы. Ч.2.
- 17 Критика чистого разума. Трансцендентальная аналитика. Дедукция понятий чистого разума.
- 18 Дидро. Сон д’Аламбера. Ламетри. Человек – машина. Душа – функционирующая материя.
- 19 Эрнст Геккель. Мировые загадки. М. 1902. Лукреций. О природе вещей.

- 20 Проблема сновидений Д. Д. Мордухай-Болтовской посвятил специальную работу: Психология и Метафизика Сновидений – 236 страниц рукописного текста. Рукопись датирована 29.04.1949 г. Прим. ред.
- 21 Рибо. Болезнь воли.
- 22 Рибо. Память.
- 23 Цитата не установлена. Прим. ред.
- 24 Физиологическим коррелятом связной системы вторичных сознаний является *полигон* Грасса. Физиологическое введение в философию.
- 25 Циглер. Физиологическая психология.
- 26 См. Лейбниц. Соч. в 4 т, т. I. М. 1982. С. 159, 324, 385. Прим. ред.
- 27 О. Конт.
- 28 Герней, Майерс, Подмор. Прижизненные призраки и др. телепатические явления. (129, 133, 186.).
- 29 О Граде Божьем, кн. 10, гл. 30.
- 30 Премудрость Соломона 11, 15.
- 31 Кор. XX: 44.
- 32 Св. Августин. О Граде Божием. Кн. 13, гл. 16, 20.

Средние века

После смерти Д. Д. Болтовского рукопись была нелегально переправлена на Запад и опубликована в эмигрантском журнале “Возрождение” (La Renaissance № 233) в июне 1971 г. (стр. 57-71).

¹ Стояла мать скорбящая (лат.) Прим. ред.

Приложения

I. Математики и вычислители.

Сообщение о докладе на заседании общества естествоиспытателей и психологии математического мышления 13 апреля 1928 г. // Бюллетень научных обществ и учреждений Северо-Кавказского края, 1928, № 15/4, с. 4.

II. Эволюция понятия функции в прошлом и в настоящем.

Ученые записки Научно-исследовательского института математики и физики при Ростовском ун-те, 1937, т. 1, с. 21–25.

¹ Tidemaun Geist der spek. Philosophie Marburg 1793 Duns Scoti Opera Lugduni 8 Met. in lib. sent. dist lg. 5

² Oresmus (1320-1381). Curtze Zeitsch Mat. und Phys. (1858). S. 14. Н. Орезм Трактат о конфигурации качеств // Историко-математические исследования, вып. 11. М. 1958.

³ Newton (1642-1727). Methodus fluxionum. ed. Castillion. И. Ньютон. Математические работы. М.-Л. 1937.

- ⁴ Leibnitz (1646-1710). Journ. des savants 1694. Acta erud. 1694. Лейбниц. Избранные отрывки из математических сочинений // Успехи математических наук. 1948. Т. 3. Вып. 1(23).
- ⁵ Euleri. Introductio. 1745. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. М. 1961.
- ⁶ Cauchy (1784-1852). Lecons sur le Calcul Diff. 1836.
- ⁷ Lejeune-Dirichlet. Crelle's Journal B-d I p. 135. Repetorium 1837, t. I.
- ⁸ Morgan. The differential Calculus. 1836, p. 94.
- ⁹ Weierstrass. Functionenlehre. Berlin. 1876, p. 69.
- ¹⁰ Вейль. Философия математики.

III. Принцип достаточного основания в механике и в геометрии.

Принцип достаточного основания в механике и геометрии. Научная конференция, посвященная 80-летию университета. Тезисы докладов, вып. 2. Ростов н/Д, 1949, с. 86.

Содержание

ФИЛОСОФСКАЯ МАТЕМАТИКА ДМИТРИЯ ДМИТРИЕВИЧА МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОГО	5
БИОГРАФИЧЕСКИЙ ОЧЕРК	12
ЧЕТЫРЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ	26
Введение	26
Лекция I. Логика и Математика	28
Литература к лекции I	40
Лекция II. Гносеология и Математика.	40
Литература к лекции II	49
Лекция III. Психология и Математика	50
Литература к лекции III	61
Лекция IV. Метафизика и Математика.	61
Литература к лекции IV	73
ПСИХОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ	74
Введение	74
§1. Закулисная работа математической мысли.	75
§2. Синтез и анализ.	78
§3. Сводятся ли математические способности к трудолюбию, соединенному с хорошей памятью?	81
§4. Необходимость для объяснения математического мышления введения в рассмотрение бессознательного мыслительного процесса.	83
§5. Роль бессознательного мыслительного процесса при проверке предварительных гипотез.	83
§6. Ошибается ли бессознательная мысль?	84
§7. Различные роли бессознательной мысли в мышлении математика и философа.	85
§8. Разница между склонностью и способностью ума.	86
§9. Остроумие как одно из характерных свойств математической способности.	87
§10. Быстрота математического мышления.	88

§11. Философ и математик.	88
§12. Шахматист и математик.	89
§13. Поэт и математик.	89
§14. Активное и пассивное воображение.	91
§15. Роль пассивного воображения в математическом мышлении.	93
§16. Психология математических ошибок.	94
§17. Ум математика как ум дедуктивный.	97
§18. Некоторые соображения, относящиеся к памяти вообще.	99
§19. Удерживающая память математика.	100
§20. Различные роды памяти.	101
§21. Классификация родов памяти.	102
§22. Пространственная память математика.	103
§23. Педагогическое значение математики.	105
СЛУЧАЙ И БЕССОЗНАТЕЛЬНОЕ	109
§1. Теория вероятностей и будущее.	109
§2. Математическая схема жизни и действительность.	110
§3. Мое и не мое.	112
§4. Механизм бессознательных актов.	113
§5. Низшие сознания.	114
§6. Гиперстезия низших сознаний.	115
§7. Убожество низшей психики.	117
§8. Вторичное Я истеричных.	118
§9. Тенденция к подражанию низшей психики.	119
§10. Раздвоение личности.	119
§11. Уроды.	120
§12. Низшая психика в элементарных действиях.	121
§13. В силке подсознательного.	122
О ЗАКОНЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ	125
НЕНАТУРАЛЬНОЕ И АПАГОГИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО В ПРОШЕДШЕМ И БУДУЩЕМ	138
§ 1. Два типа логических операций.	138
§ 2. Аристотель и схоластика.	139
§ 3. Схоластика в современной науке.	142
§ 4. Доказательства: что это так, и почему это так.	143

§ 5. Требования пор-роялевской логики.	146
§ 6. Апагогическое доказательство у Евклида.	147
§ 7. Типы апагогических доказательств.	148
§ 8. Борьба против апагогического доказательства.	151
§ 9. Полная математическая индукция.	152
§ 10. Логика доказательств в будущем.	154

МЕТААЛГЕБРА	156
-------------------	-----

О ЧИСЛОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

УТВЕРЖДАЕМОГО ТОЖДЕСТВА	161
-------------------------------	-----

ЛОБАЧЕВСКИЙ И ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ

ПРОБЛЕМЫ В МАТЕМАТИКЕ	166
-----------------------------	-----

ГЕОМЕТРИЯ КАК НАУКА О ПРОСТРАНСТВЕ	178
--	-----

§ 1. Учение о формах и наглядная геометрия.	178
§ 2. Учение о пространстве и рационалистическая геометрия.	179
§ 3. Формально-логическая и гипотетическая геометрия.	180
§ 4. Равенство	181
§ 5. Подобие.	182
§ 6. Постулат де Лезека.	184
§ 7. Общее определение изогенности.	184
§ 8. Л. Кертран об изогенности пространства.	185
§ 9. Гомогенность пространства.	186
§ 10. Пространства неизогенно-гомогенные и негомогенно-изогенные.	188
§ 11. Теория параллельности Лейбница.	189
§ 12. Валис.	191

ИЗ ПРОШЛОГО ПЯТОЙ КНИГИ

“НАЧАЛ” ЕВКЛИДА	192
-----------------------	-----

МЕТОД ИСЧЕРПЫВАНИЯ	213
--------------------------	-----

§ 1. Античная мысль и бесконечность.	213
§ 2. Евклидова форма метода исчерпывания.	215
§ 3. Первая архимедова форма метода исчерпывания.	218
§ 4. Вторая архимедова форма метода исчерпывания.	220
§ 5. Метод неделимых как выпрямление метода исчерпывания.	221
§ 6. Третья архимедова форма метода исчерпывания.	224

ИЗ ИСТОРИИ МЕТОДА НАЛОЖЕНИЯ

В ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ	227
§ 1. Евклид и Лександр.	227
§ 2. Постулаты.	229
§ 3. Метод наложения у Евклида.	230
§ 4. Рационалисты против метода наложения.	232

ФИЛОСОФСКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ

ИДЕИ XVI ВЕКА	235
<i>Введение</i>	235
§ 1. Общая характеристика мысли XVI века.	236
§ 2. Эволюция иерархического принципа в онтологии.	237
§ 3. Логические идеи Рамуса.	239
§ 4. Рамус о геометрических определениях.	242
§ 5. Порядок геометрии по Рамусу.	245
§ 6. <i>Delineatio</i> геометрии Рамуса.	248
§ 7. <i>Delineatio</i> других рамистов.	252
§ 8. Арно и Рамус.	254
§ 9. Теория параллельных от Рамуса до Саккери.	259
§ 10. История смешанных углов.	263

ИССЛЕДОВАНИЯ О ПРОИСХОЖДЕНИИ

НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ ИДЕЙ

СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ	268
<i>Введение</i>	268

I. ДВА ОСНОВНЫХ ИСТОЧНИКА МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ

УРАВНЕНИЙ (XII ВЕК)	269
----------------------------------	-----

§ 1. Простое фальшивое правило.	269
§ 2. Сложное фальшивое правило.	272
§ 3. Способ приближенного решения уравнений.	273
§ 4. <i>Regula infusa</i> в арифметике.	275
§ 5. Генезис и основная идея <i>regula infusa</i>	277
§ 6. Диофант.	278
§ 7. Генезис чирнгаузеновского преобразования.	280

II. ГЕНЕЗИС СОВРЕМЕННОГО ЧИСЛА.

(XIII ВЕК)	281
-------------------------	-----

§ 1. Количество у Аристотеля и у схоластиков.	281
§ 2. Делимость и измеряемость количества.	282
§ 3. Виды количества.	284
§ 4. Единица и единство.	285

§ 5. Абстрактное и конкретное число.	286
§ 6. Реальность числа.	288
§ 7. Схоластическое кардинальное и ординальное число.	289
§ 8. Метафизика нуля.	292
§ 9. Метафизика отрицательного.	293
§ 10. Отношение.	296
§ 11. Иррациональное число как отношение.	298
III. ПЕРВЫЕ ШАГИ БУКВЕННОЙ АЛГЕБРЫ.	
(КОНЕЦ XVI ВЕКА).	301
§ 1. Числовая и буквенная алгебра с методической точки зрения.	301
§ 2. Величины различных измерений старой алгебры.	302
§ 3. Различные понимания характеристик.	305
§ 4. Число индусов и греков.	306
§ 5. Алгебра арабов.	307
§ 6. Отрицательные числа.	309
§ 7. Основные алгебраические операции Виэты.	310
§ 8. Странности старой алгебры.	311
§ 9. Синопированная буквенная алгебра.	314
§ 10. Арифметические правила как риторическо-алгебраические формулы.	315
IV. АКСИОМАТИКА XVII ВЕКА.	
(ПЕРВАЯ ПОЛОВИНА XVII ВЕКА).	317
§ 1. История новой аксиоматики.	317
§ 2. Правила Паскаля.	319
§ 3. Правила Декарта.	321
§ 4. Операции повышения степени очевидности.	321
§ 5. Херигон и Гильберт.	324
§ 6. Алгебраическая аксиоматика Херигона.	327
§ 7. Идеография Херигона.	332
§ 8. Пеано и Херигон.	334
§ 9. Определение у Лейбница.	337
§ 10. Аксиоматика Лейбница.	338
V. ГЕНЕЗИС И ИСТОРИЯ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ.	
(XVIII ВЕК).	340
§ 1. Проблема об интензировании форм.	340
§ 2. Эмбрион идеи функции.	342
§ 3. Лейбниц и Ньютон.	343
§ 4. Бертран и Кестнер.	345
§ 5. Д'Аламбер, де ля Шанпель и Гурьев.	347

§ 6. Люлье, Гурьев и Ла-Круа.	349
§ 7. Логизация идеи пределов.	351
§ 8. Порядковый характер предела.	353
VI. ФИЛОСОФСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ЭВОЛЮЦИИ МЕТОДИЧЕСКИХ ИДЕЙ В МАТЕМАТИКЕ ПЕРВОЙ ПОЛОВИНЫ XIX ВЕКА.	354
§ 1. Введение.	354
§ 2. Кант и Песталоцци.	355
§ 3. Кант и Тибо.	357
§ 4. Гегель и Понсле.	360
§ 5. Герbart и Больцано.	363

ИЗ ПРОШЛОГО АНАЛИТИЧЕСКОЙ

ГЕОМЕТРИИ.	366
1. Конические сечения античных математиков.	366
2. Два основных принципа аналитической геометрии.	368
3. Фузионизм античных математиков.	369
4. Графическое решение уравнений.	371
5. Алгебраическая и аналитическая геометрия.	373
6. Арифметизация в аналитической геометрии.	375
7. Функциональное мышление и Декарт.	376
8. Координатный принцип.	378
9. Определение кривой уравнением и функции графиком.	380
10. Аналитическая геометрия без преобразования координат.	380
12. Преобразование координат без тригонометрии.	382
13. Начало истории кривых второго порядка.	383
14. "Введение в анализ бесконечно малых" Эйлера.	384
15. Кестнер; Брю и Букэ.	385

ПОРИЗМЫ И ДАННЫЕ.

ПРОБЛЕМА СМЕРТИ.	401
Введение.	401
1. Вера и смерть.	402
2. Трансцендентная и трансцендентальная жизнь.	404
3. Метафизика о смерти.	405
4. Универсальное и индивидуальное бессмертие.	407
5. Время и душа.	409
6. Критическая точка зрения.	410
7. Натурфилософия о смерти.	411

8. Материализм о смерти.	413
9. Гипернаучный опыт.	415
10. Распадение личности.	416
11. Бессознательное Гартмана.	417
12. Защита бессознательного.	419
13. Множественность душ в теле.	421
14. Глубины подсознания.	422
15. Ужас смерти.	423
16. За гробом.	424
17. Эдукция и традукция.	426
18. Любовь и смерть.	427
19. Душа и тело.	428
20. Темная и светлая мистика.	429
21. Защита тела.	430

СРЕДНИЕ ВЕКА 432

§ 1. Интеллект и воля.	432
§ 2. Воля и чувство.	434
§ 3. Средневековая мораль.	436
§ 4. Папство.	437
§ 5. Инквизиция.	438
§ 6. Средневековая вера.	439
§ 7. Мистика.	440
§ 8. Искусство.	441
§ 9. Эмбриология современной науки.	442
§ 10. Рождение бесконечности.	443

ПРИЛОЖЕНИЯ 445

I. МАТЕМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛИ. 445

II. ЭВОЛЮЦИЯ ПОНЯТИЯ ФУНКЦИИ В ПРОШЛОМ И НАСТОЯЩЕМ. 446

III. ПРИНЦИП ДОСТАТОЧНОГО ОСНОВАНИЯ В МЕХАНИКЕ И В ГЕОМЕТРИИ 448

БИБЛИОГРАФИЯ 449

ПРИМЕЧАНИЯ 482

Биографический очерк (482); Четыре лекции по философии математики (482); Психология математического мышления (482); Случай и бессознательное (483); О законе непрерывности (483); Непатуральное и аподигическое доказательство в прошедшем и буду-

цем (484); Метаалгебра (488); О числовой характеристике утверждаемого тождества (488); Лобачевский и основные логические проблемы в математике (489); Геометрия как наука о пространстве (499); Из прошлого пятой книги "Начал" Евклида (503); Метод исчерпывания (506); Из истории метода наложения в элементарной геометрии (509); Философско-математические идеи XVI века (512); Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики (519); Из прошлого аналитической геометрии (540); Поризмы и данные (541); Проблема смерти (542); Средние века (543); Приложения (543).

Научное издание

Д.Д. Мордухай-Болтовской
Философия. Психология. Математика.

Главный редактор: А.В. Родин
Ответственный за выпуск: И.Н. Сиренко
Художник: О.П. Танаи
Технический редактор: В.О. Чуприков
Корректор: И.Н. Лаурлынтайн
Компьютерный дизайн и верстка: Е.В. Матусевич
В.Л. Матусевич

Подписано в печать с готовых диапозитивов 03.12.97.
Формат 60х90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура "Таймс". Усл. печ. л. 35. Уч.-изд. л. 37. Тираж 2000 экз.

Издательство "Серебряные нити". Лицензия № 064209.
129515, Москва, а/я 34.

Отпечатано в типографии ООО "ИПК"Бионт"
Санкт-Петербург. В.О. Средний пр. 86.