



L.V.L. B. IV. 24.



36.

Untersuchungen

über die

wichtigsten zum Dreiecke gehörigen
Kreise.

Eine Abhandlung

aus dem

Gebiete der reinen Geometrie

von

Dr. Christian Nagel,

Privatdozent der Mathematik am Obergymnasium und der k. k. Universität in Wien.

Mit drei Figurentafeln.



Leipzig, 1836.

Verlag des Verlagsverwalters der k. k. Hof- und Universitäts-Buchhandlung in Wien.



UNIVERSITY OF TORONTO
LIBRARIES

Untersuchungen

über die

wichtigsten zum Dreiecke gehörigen K r e i s e.

E i n e A b h a n d l u n g

aus dem

G e b i e t e d e r r e i n e n G e o m e t r i e

. v o n

Dr. Christian Nagel,

Professor der Mathematik am Obergymnasium und der höhern Bürgerschule in Ulm.



Mit drei Figurentafeln.



Leipzig, 1836.

In der Verlagsexpedition der Wohler'schen Buchhandlung in Ulm.

LA JOLLA ZOOLOGICAL MUSEUM

U. S. N. M.

THE JOLLA ZOOLOGICAL MUSEUM

U. S. N. M.

U. S. N. M.

U. S. N. M.

U. S. N. M.

U. S. N. M.

U. S. N. M.

U. S. N. M.

U. S. N. M.

U. S. N. M.

U. S. N. M.

U. S. N. M.



U. S. N. M.

U. S. N. M.

U. S. N. M.

U. S. N. M.

V o r w o r t.

Das Dreieck, obgleich die einfachste unter den geradlinigen Figuren, ist doch vor andern Figuren ausgezeichnet durch seinen Reichthum an merkwürdigen, oft höchst überraschenden Lehrsätzen. Es bildete daher stets einen besondern Gegenstand der Untersuchungen für Mathematiker, deren Entdeckungen theils in Journalen oder in allgemeinen und umfassenden mathematischen Werken aufbewahrt sind, theils in besondern dieser Figur gewidmeten Abhandlungen. Vor allem sind hier zu nennen die Schriften von Crelle (Ueber einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks. Berlin. 1816.), von Feuerbach (Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Nürnberg. 1822.), von Jakobi *) (De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis. Lipsiae. 1825.), und andere.

An die genannten Schriften soll sich ihrem Inhalte nach die folgende Abhandlung anschließen, welche sich die Untersuchung der besondern Beziehungen zur Aufgabe gemacht hat, in welchen die um das Dreieck, in dasselbe und an dasselbe beschriebenen fünf Kreise zu einander und zu dem Dreiecke stehen.

Der Form nach unterscheidet sich dieselbe aber wesentlich von ihnen dadurch, daß, während die genannten Schriften den analytisch-trigonometrischen Weg des Beweises vorzogen, das Folgende durchaus und streng sich an den synthetischen Beweisgang hält. Es sollten dadurch zwei Zwecke erreicht werden. Einmal glaubte der Verfasser, es ziemte sich von dem wissenschaftlichen Gesichtspunkte aus, daß die reine Geometrie versuche, das, was dem Inhalte nach ihr angehöre, auch in der Form

*) Jakobi hat außerdem noch durch seine reichen Anhänge zu den einzelnen Büchern der von ihm übersehten Elemente der Geometrie von van Swinden sich ein weiteres Verdienst um die genauere Kenntniß der Eigenschaften des Dreiecks erworben.

sich zum Eigenthume zu machen. Zweitens schien dem Verfasser gerade die folgende Abhandlung durch die Vielseitigkeit der Beziehungen, in welche das Dreieck tritt, und durch das geschlossene Ganze, welches die aufgestellten Lehrsätze darbieten, besonders geeignet, Solchen, welche die Elemente der Geometrie kennen gelernt haben, auch wenn es ihnen an der Kenntniß oder Gewandtheit in der Behandlung analytischer Formeln fehlen sollte, einen Begriff von der Mannigfaltigkeit der Anwendungen zu geben, welche die Geometrie einzugehen fähig ist.

Seinem Zwecke gemäß mußte der Verfasser auch manchen einfachen und längst in der reinen Geometrie bekannten Satz aufnehmen, da er zum Ganzen gehörte, und der Beweis manches neuen Satzes sich unmittelbar darauf gründete. Der Kundige wird solche Sätze leicht von dem Uebrigen zu unterscheiden wissen, und, wie der Verfasser hofft, manche neue und bisher unbekannte Lehrsätze finden, ebenso für andere Sätze, die bisher stets analytisch-trigonometrisch bewiesen wurden, reingeo- metrische Beweise, und manchmal für Sätze, welche schon früher geometrisch bewiesen wurden, ein- fachere Beweise an der Stelle von verwickelteren. Der Verfasser entsagt jedoch gerne seinen An- sprüchen an Eigenthum für Alles, was vielleicht da und dort in andern Schriften auch schon zu finden ist, wenn es auch gleich ihm nicht bekannt wurde. Es liegt in der Natur der Sache, daß es ihm nicht möglich war, auch bei dem eifrigsten Bestreben die hieher gehörige Literatur vollstän- dig kennen zu lernen, oder alles Einzelne, was oft in Schriften enthalten ist, in denen es kaum ge- sucht wird, zu sammeln.

Daß der Verfasser manche neue Benennungen zu schaffen genöthigt war, brachte der Gegen- stand mit sich. Mögen dieselben Beifall finden! Eingedenk der Schwierigkeit, welche das Bilden einer zweckmäßigen Terminologie hat, wird der Verfasser sie gerne mit einer passendern vertauschen.

Vielleicht findet der Verfasser bald Gelegenheit, die Anwendung der in der folgenden Ab- handlung enthaltenen Lehrsätze auf die Construction solcher Dreiecksaufgaben nachzuweisen, bei wel- chen die Bedingungsstücke von den Kreisen hergenommen sind, die um, in und an das Dreieck be- schrieben werden können.

N a g e l.



E i n l e i t u n g.

Die vollständigen Handbücher der ebenen Geometrie beweisen folgende der nachstehenden Abhandlung unmittelbar zu Grunde liegende Lehrsätze:

1) Die drei in den Halbierungspunkten der drei Seiten eines Dreiecks errichteten Perpendikel schneiden sich in einem einzigen Punkte. Dieser Punkt ist von allen Winkelspitzen des Dreiecks gleichweit entfernt, und daher der Mittelpunkt des um das Dreieck beschriebenen Kreises, d. h. desjenigen Kreises, der durch die Winkelspitzen des Dreiecks geht. Um jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben.

2) Die drei Halbierungslinien der innern Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem einzigen Punkte. Dieser Punkt ist von allen Seiten des Dreiecks gleichweit entfernt, und daher der Mittelpunkt des in das Dreieck beschriebenen Kreises, d. h. desjenigen Kreises, der die Seiten des Dreiecks berührt. In jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben.

3) Die drei geraden Linien, von denen die eine einen innern Winkel eines Dreiecks halbiert, die beiden andern die an den zwei übrigen Winkelspitzen liegenden Außenwinkel halbiren, schneiden sich in einem einzigen Punkte. Dieser Punkt ist von einer Seite und von den Verlängerungen der beiden andern Seiten gleichweit entfernt, und daher der Mittelpunkt eines an das Dreieck beschriebenen Kreises, d. h. eines Kreises, der eine Seite des Dreiecks selbst, und die Verlängerungen der beiden andern Seiten berührt. An jedes Dreieck lassen sich drei Kreise beschreiben.

4) Die drei von den Winkelspitzen eines Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten oder ihre Verlängerungen gefällten Perpendikel, die Höhenperpendikel des Dreiecks, schneiden sich in einem einzigen Punkte.

5) Die drei von den Winkelspitzen eines Dreiecks nach den Halbierungspunkten der gegenüberliegenden Seiten gezogenen geraden Linien schneiden sich in einem einzigen Punkte. Dieser Punkt ist der Schwerpunkt des Dreiecks, und er theilt jede der genannten Linien so, daß das zwischen ihm und der Winkelspitze liegende Stück einer solchen Linie doppelt so groß ist, als das zwischen ihm und dem Halbierungspunkte der Seite liegende.

Den Gegenstand der folgenden Untersuchung bilden die fünf Kreise, welche um, in und an das Dreieck beschrieben werden können. Um in der Darstellung größere Gleichförmigkeit und ebendamit auch leichtere Uebersicht des Ganzen zu erreichen, ist in allen Figuren das Dreieck, auf welches sich die genannten Kreise beziehen, mit den Buchstaben ABC bezeichnet (Fig. 1.); ferner sollen die Winkel dieses Dreiecks mit α , β , γ so bezeichnet werden, daß $BAC = \alpha$, $ABC = \beta$, $ACB = \gamma$ ist. Die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten seyen beziehungsweise a , b , c , so daß $BC = a$ dem Winkel α gegenüber liegt, u. s. w. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC werde kurz $= \Delta$ gesetzt.

Der um das Dreieck ABC beschriebene Kreis heißt der Winkelkreis des Dreiecks, der in dasselbe beschriebene der innere Berührungskreis, die drei an dasselbe beschriebenen äußere Berührungskreise. Der Mittelpunkt des erstern ist stets mit M , der des zweiten mit m , die drei Mittelpunkte der letztern Kreise mit m' , m'' , m''' bezeichnet, so daß m' der Mittelpunkt des die Seite a selbst, also die Verlängerungen von b und c berührenden Kreises ist; ebenso berühren die Kreise, deren Mittelpunkte m'' , m''' sind, die Seiten b und c . In derselben Ordnung werden die Halbmesser dieser Kreise mit R , r , r' , r'' , r''' und die Durchmesser mit D , d , d' , d'' , d''' bezeichnet, so daß also z. B. R , D Halbmesser und Durchmesser des Winkelkreises, r' , d' Halbmesser und Durchmesser desjenigen äußern Berührungskreises bezeichnen, dessen Mittelpunkt m' ist.

Die von dem Mittelpunkte des Winkelskreises auf die Seiten a, b, c gefällten Perpendikel heißen der Reihe nach p', p'', p''' , z. B. in Fig. 3. ist $MN=p', MO=p'', MP=p'''$.

Ebenso werden die auf den Seiten a, b, c oder ihren Verlängerungen stehenden Höhenperpendikel der Reihe nach mit h', h'', h''' bezeichnet, und der zwischen dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte derselben und der Winkelspitze liegende Theil eines solchen Höhenperpendikels heiße der obere, der andere Theil der untere Abschnitt desselben. Ueberhaupt, wenn eine gerade Linie, die von einer Winkelspitze des Dreiecks nach der gegenüberliegenden Seite oder ihrer Verlängerung gezogen ist, von einer zweiten geraden Linie geschnitten wird, so soll das zwischen der Winkelspitze und dem Durchschnittspunkte liegende Stück der erstern Linie der obere, das zwischen dem Durchschnittspunkte und der Seite liegende Stück derselben der untere Abschnitt heißen.

Von jedem der drei äußern Berührungskreise wird gesagt, er gehöre zu der Dreiecksseite, welche er wirklich berührt, oder zu dem Winkel, dessen beide Ecken er in der Verlängerung berührt. So gehört z. B. der Kreis, dessen Mittelpunkt m' , und dessen Halbmesser und Durchmesser r' und d' sind, zu der Seite a und zu dem Winkel α .

Die Berührungspunkte des innern Berührungskreises heißen innere Berührungspunkte. Sie sind, je nachdem sie auf den Seiten a, b, c liegen, der Reihe nach mit D, E, F bezeichnet. Die Berührungspunkte der äußern Berührungskreise heißen äußere Berührungspunkte, und zwar entweder äußere Berührungspunkte der Seiten oder äußere Berührungspunkte der Verlängerungen, je nachdem sie auf den Seiten selbst oder auf ihren Verlängerungen liegen. Sie sind ebenfalls, je nachdem sie auf den Seiten a, b, c und ihren Verlängerungen liegen, der Reihe nach für den Kreis, dessen Mittelpunkt m' ist, mit D', E', F' , für den Kreis, dessen Mittelpunkt m'' ist, mit D'', E'', F'' , und endlich für den Kreis, dessen Mittelpunkt m''' ist, mit D''', E''', F''' bezeichnet.

Unter Tangenten dieser Kreise sind diejenigen Stücke der Seiten oder ihrer Verlängerungen verstanden, welche zwischen einer Winkelspitze des Dreiecks und einem Berührungspunkte liegen, und zwar sind die innern Tangenten einer Seite diejenigen Stücke derselben, welche zwischen ihren Endpunkten und dem auf ihr liegenden innern Berührungspunkte liegen, (z. B. BD, CD sind die innern Tangenten der Seite a), die äußern Tangenten einer Seite diejenigen Stücke derselben, welche zwischen ihren Endpunkten und dem auf ihr liegenden äußern Berührungspunkte sich befinden (z. B. BD', CD' sind die äußern Tangenten der Seite a); endlich sind die Tangenten der Verlängerungen diejenigen Stücke einer Seite, welche zwischen den Endpunkten dieser Seite und den äußern Berührungspunkten ihrer Verlängerungen liegen, und zwar heißt diejenige, welche blos aus der Verlängerung der Seite besteht, die kleinere, diejenige aber, welche aus der Summe einer Verlängerung und der Seite selbst besteht, die größere, (z. B. BD'', CD'' sind die Kleinern, BD''', CD''' die größeren Tangenten der Verlängerungen der Seite a).

Die gerade Linie, welche die Mittelpunkte zweier Kreise verbindet, heißt Centrale dieser Kreise. Die genannten fünf Kreise haben zehn verschiedene Centralen, $Mm, Mm', Mm'', Mm''', mm', mm'', mm''', m'm'', m'm''', m''m'''$.

Die durch die Centralen der vier Berührungskreise gebildeten vier Dreiecke $m'm'm''', mm'm'', mm'm''', mm''m'''$ heißen Centralendreiecke, und zwar das erstere das größere, die drei letztern die kleineren. Jedes dieser Centralendreiecke gehört zu denjenigen drei Berührungskreisen, in deren Mittelpunkten die Winkelspitzen desselben liegen.

Diejenigen Dreiecke, welche durch die Verbindung der drei zu einem Berührungskreise gehörigen Berührungspunkte entstehen, heißen Berührungsdreiecke, und zwar heißt das zu dem innern Berührungskreise gehörige, also $\triangle DEF$, das innere Berührungsdreieck, die drei zu den äußern Berührungskreisen gehörigen, also die Dreiecke $D'E'F', D''E''F'', D'''E'''F'''$, äußere Berührungsdreiecke.

Erster Abschnitt.

Von der Größe der geraden Linien und Winkel, welche von den Berührungskreisen und dem Winkelkreise abhängen.

§. 1.

Die Centrale, welche den Mittelpunkt eines äußern Berührungskreises mit dem Mittelpunkte des innern verbindet, geht verlängert durch die Spitze des zum erstern Kreise gehörigen Winkels.

Beweis. Es seyen (Fig. 1.) Am' und Am gezogen, so wird durch beide der Winkel BAC halbiert (s. Einleitung Nr. 2. und 3.). Folglich liegt Am auf Am' , und die drei Punkte A , m , m' liegen in gerader Linie. mm' geht daher verlängert durch A .

§. 2.

Die Centrale, welche die Mittelpunkte zweier äußerer Berührungskreise verbindet, geht durch die Spitze des zu dem dritten äußern Berührungskreise gehörigen Winkels.

Beweis. Es seyen (Fig. 1.) Am'' und Am''' gezogen, so wird durch Am'' der Außenwinkel CAF'' von $\triangle ABC$, und ebenso durch Am''' der Außenwinkel BAE''' desselben Dreiecks halbiert (s. Einleit. Nr. 3.); also ist $CAm'' = \frac{1}{2}CAF''$, und $E'''Am''' = \frac{1}{2}BAE'''$. Nun ist aber $CAF'' = BAE'''$, folglich auch $CAm'' = E'''Am'''$. Da nun CAE''' eine gerade Linie ist, so ist daher auch $m'Am'''$ eine gerade Linie.

§. 3.

Die Centrale, welche den Mittelpunkt eines äußern Berührungskreises mit dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises verbindet, steht verlängert senkrecht auf der Centrale der beiden andern äußern Berührungskreise.

Beweis. Da mm' (Fig. 1.) und $m''m'''$ durch A gehen (§. 1. 2.), und die Winkel BAC und CAF'' durch Am' und Am'' halbiert werden, so ist $m'AC = \frac{1}{2}BAC$, und $m''AC = \frac{1}{2}CAF''$, folglich $m'AC + m''AC = \frac{1}{2}(BAC + CAF'')$; aber $m'AC + m''AC = m'Am''$, und $BAC + CAF'' = 2R$; folglich $m'Am'' = R$; daher steht Am' auf $m''m'''$ senkrecht.

Zusatz. Die Höhenperpendikel eines jeden von den vier Centralendreiecken schneiden sich daher in dem Mittelpunkte desjenigen Berührungskreises, welcher nicht zu dem Centralendreiecke gehört. Denn die Höhenperpendikel von $\triangle m'm''m'''$ sind $m'A$, $m''B$, $m'''C$, welche sich in m schneiden; ebenso sind die Höhenperpendikel von $\triangle mm'm''$ die Linien mC , $m'B$, $m'A$, welche sich verlängert in m''' schneiden.

§. 4.

Jede innere Tangente einer Seite ist gleich der von dem entgegengesetzten Endpunkte ausgehenden äußern Tangente eben dieser Seite.

Beweis. $AE' = AF'$ (Fig. 1.) und $AE = AF$; folglich ist $AE' - AE = AF' - AF$. d. h. $EE' = FF'$. Aber $EE' = CE + CE' = CD + CD'$ (weil $CE = CD$, und $CE' = CD'$ ist) $= DD' + 2CD'$, und ebenso $FF' = BF + BF' = BD + BD' = DD' + 2BD$. Folglich ist $DD' + 2CD' = DD' + 2BD$, also $2CD' = 2BD$, und $CD' = BD$. Daher ist auch ferner $BD + DD' = CD' + DD'$, d. h. $BD = CD$.

§. 5.

Die von den Endpunkten einer Seite ausgehenden äußern Tangenten der beiden andern Seiten sind einander gleich.

Beweis. $BF''' = AF$ (Fig. 1.), und ebenso $CE'' = AE$ (§. 4.), aber $AF = AE$, folglich auch $BF''' = CE''$.

§. 6.

Die beiden kleineren Tangenten der Verlängerungen einer Seite sind einander gleich.

Beweis. Da (Fig. 1.) $BD''' = BF'''$ und $CD' = CE''$, aber $BF''' = CE''$ ist (§. 5.), so ist auch $BD''' = CD'$.

Zusatz. Es ist daher auch $BD''' = AF$.

§. 7.

Die Differenz der beiden innern oder äußern Tangenten einer Seite ist gleich der Differenz beider andern Seiten.

Beweis. Da (Fig. 1.) $AE = AF$ ist, so ist $AC - AB = EC - FB$; aber $EC = CD$, und $FB = BD$; folglich auch $AC - AB = CD - BD$. Ferner ist $CD = BD'$ und $BD = CD'$ (§. 4.), also auch $AC - AB = BD' - CD'$.

§. 8.

Das zwischen dem innern und äußern Berührungspunkte einer Seite liegende Stück derselben ist gleich der Differenz beider andern Seiten.

Beweis. Da (Fig. 1.) $BD = CD'$ (§. 4.) und $CD - BD = AC - AB$ (§. 7.) ist, so ist auch $CD - CD' = AC - AB$, d. h. $DD' = AC - AB$.

§. 9.

Das zwischen dem äußern Berührungspunkte einer Seite und einem äußern Berührungspunkte ihrer Verlängerung liegende Stück derselben ist gleich derjenigen Seite des Dreiecks, welche dem zwischen den genannten Berührungspunkten liegenden Winkel des Dreiecks gegenüber liegt.

Beweis. Da (Fig. 1.) $CD' = AF'''$ (§. 5.) und $CD' = BD'''$ (§. 6.) $= BF'''$ ist, so ist $CD' + CD'' = AF''' + BF'''$, d. h. $D'D'' = AB$.

§. 10.

Das zwischen den beiden äußern Berührungspunkten der Verlängerungen einer Seite liegende Stück ist gleich der Summe der beiden andern Seiten.

Beweis. Da (Fig. 1.) $D'D'' = AB$ und $D'D''' = AC$ ist (§. 9.), so ist $D'D'' + D'D''' = AB + AC$, d. h. $D''D''' = AB + AC$.

§. 11.

Das zwischen dem innern Berührungspunkte einer Seite und einem äußern Berührungspunkte ihrer Verlängerung liegende Stück derselben ist gleich der andern Dreiecksseite, welche von der zwischen den genannten Berührungspunkten liegenden Winkelspitze des Dreiecks ausgeht.

Beweis. Da (Fig. 1.) $CD = CE$ und $CD'' = CE'' = AE$ (§. 4.) ist, so ist $CD + CD'' = CE + AE$, d. h. $DD'' = AC$.

§. 12.

Die größere Tangente der Verlängerung einer Seite ist gleich dem halben Umfange des Dreiecks.

Beweis. Da (Fig. 1.) $BF' = BD'$ und $CE' = CD'$ ist, so ist $BF' + CE' = BD' + CD' = BC$, folglich $AF' + AE' = AB + AC + BC = a + b + c$. Nun ist aber $AF' = AE'$; also ist $AF' = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Zusatz. Alle größern Tangenten der Verlängerungen sind also einander gleich.

§. 13.

Jede innere Tangente einer Seite ist gleich dem halben Ueberschusse der beiden den Winkel, von dem die Tangente ausgeht, einschließenden Seiten des Dreiecks über die dritte Seite.

Beweis. Da (Fig. 1.) $CD = CB - BD = CB - BF$ und $CE = CA - AE = CA - AF$ ist, so ist $CD + CE = CB + CA - BF - AF = CB + CA - AB = a + b - c$; aber $CD = CE$, folglich $CD = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

Zusatz. Daher ist auch $BF' = AF' = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

§. 14.

Der Winkel, den zwei von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises nach zwei Winkelspizen des Dreiecks gezogene gerade Linien mit einander bilden, ist größer als ein rechter um die Hälfte des dritten Dreieckswinkels.

Beweis. Da (Fig. 1.) durch mA , mB , mC die Winkel von $\triangle ABC$ halbiert werden, so ist $Bmm' = mAB + mBA = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$; ebenso ist $Cmm' = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$; folglich ist $BmC = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$. Aber $\alpha + \beta + \gamma = 2R$, folglich $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = R$; also $BmC = R + \frac{1}{2}\alpha$.

§. 15.

Der Winkel, den zwei von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises nach den Mittelpunkten zweier äußerer Berührungskreise gezogene Centralen mit einander bilden, ist größer als ein rechter um die Hälfte des zu dem dritten äußern Berührungskreise gehörigen Winkels im Dreiecke.

Beweis. Da (Fig. 1.) Cmm'' und Bmm'' gerade Linien sind (§. 1.), so ist $m''mm''' = BmC$; aber $BmC = R + \frac{1}{2}\alpha$ (§. 14.), also auch $m''mm''' = R + \frac{1}{2}\alpha$.

Zusatz. Alle kleineren Centralendreiecke sind daher stumpfwinklig, von welcher Art auch das Urdreieck seyn mag; denn $m''mm''' = R + \frac{1}{2}\alpha$, also $> R$.

§. 16.

Der Winkel, den die von dem Mittelpunkte eines äußern Berührungskreises nach dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises gehende Centrale mit einer zweiten von dem erstgenannten Mittelpunkte nach dem Mittelpunkte eines andern äußern Berührungskreises gezogenen Centrale bildet, ist die Hälfte desjenigen Winkels im Dreiecke, durch dessen Spitze die beiden Centralen oder ihre Verlängerungen nicht hindurchgehen.

Beweis. Da (Fig. 1.) $mBm' = R$ ist (§. 3.), so ist in $\triangle Bmm'$ auch $Bmm' + Bm'm = R$. Nun ist $Bmm' = mAB + mBA = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$, und $R = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$, folglich $Bm'm = \frac{1}{2}\gamma$, d. h. $m''m'm''' = \frac{1}{2}\gamma$.

Zusatz. Da $m''m'm''' = \frac{1}{2}\beta = mBC$, $m''m'm''' = \frac{1}{2}\gamma = mCB$ und $m''mm''' = BmC$ ist, so ist $\triangle mm''m''' \sim \triangle mBC$. Auf ähnliche Art ist $\triangle mm'm''' \sim \triangle mAC$ und $\triangle mm'm''' \sim \triangle mAB$.

§. 17.

Der Winkel, den die beiden von dem Mittelpunkte eines äußern Berührungskreises nach den Mittelpunkten der beiden andern äußern Berührungskreise gezogenen Centralen mit einander bilden, ist gleich der halben Summe der beiden Winkel des Dreiecks, durch welche diese Centralen gehen.

Beweis. Da (Fig. 1.) $mm'm' = \frac{1}{2}\beta$ und $mm'm''' = \frac{1}{2}\gamma$ ist (§. 16.), so ist $mm'm'' + mm'm''' = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$, d. h. $m''m'm''' = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$.

Zus. 1. Da $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = R$, folglich $\frac{1}{2}(\beta + \gamma) < R$ ist, so ist $m''m'm''' < R$; ebenso ist $m'm'm''' < R$, und $m'm'm''' < R$, also das größere Centralendreieck spitzwinklig, von welcher Art auch das Urdreieck seyn mag.

Zus. 2. Da $m'BC = \frac{1}{2}F'BC = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$ ist, so ist $m'BC = m'm'm'''$; ebenso ist $m'CB = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = m'm'm'''$; folglich ist $\triangle m'BC \sim \triangle m'm'm'''$. Auf dieselbe Art ist $\triangle m'AC \sim \triangle m'm'm'''$, und $\triangle m''AB \sim \triangle m'm'm'''$.

§. 18.

Der Winkel, den der an den äußern Berührungspunkt einer Seite von dem Mittelpunkte des zu dies-

fer Seite gehörigen äußern Berührungskreises gezogene Halbmesser mit der von eben diesem Mittelpunkte nach einem zweiten äußern Berührungskreise gezogenen Centrale bildet, ist gleich der Hälfte des Dreieckswinkels, durch dessen Spitze die Centrale hindurchgeht.

Beweis. Da (Fig. 1.) $m'D'B = R$ ist, so ist auch $D'Bm' + D'm'B = R = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$. Nun ist aber $D'Bm' = \frac{1}{2}CBF' = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$; folglich ist $D'm'B = \frac{1}{2}\beta$, d. h. $D'm'm'' = \frac{1}{2}\beta$.

Zu f. 1. Da $\triangle D'm'B \cong \triangle F'm'B$ ist, wie sich leicht beweisen läßt, so ist auch $F'm'B = \frac{1}{2}\beta$.

Zu f. 2. Da ebenso $Cm'D' = \frac{1}{2}\gamma$ ist, so ist $Cm'D' = mm'm''$.

§. 19.

Der Winkel, den der an den äußern Berührungspunkt einer Seite von dem Mittelpunkte des zu dieser Seite gehörigen äußern Berührungskreises gezogene Halbmesser mit der von eben diesem Mittelpunkte nach dem innern Berührungskreise gezogenen Centrale bildet, ist gleich der halben Differenz der beiden Dreieckswinkel, durch deren Spitzen die Centrale nicht hindurchgeht.

Beweis. Da (Fig. 1.) $D'm'm'' = \frac{1}{2}\beta$ ist (§. 18.) und $mm'm'' = \frac{1}{2}\gamma$ (§. 16.), so ist $D'm'm = D'm'm'' - mm'm'' = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$.

Zu f. Da $D'm'm = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma$, und ebenso $F''m''m = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$ ist, so ist $D'm'm + F''m''m = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\gamma$. Aber ebenso ist $E'm''m = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\gamma$; folglich ist $E'm''m = D'm'm + F''m''m$. Daher ist auch $Emm'' = Dmm' + Fmm''$.

§. 20.

Die Mittelpunkte der äußern Berührungskreise liegen außerhalb des Winkelfreises.

Beweis. An einen beliebigen Punkt G (Fig. 1.) des zu der Chorde BC gehörigen Bogens BGC des Winkelfreises ziehe BG, CG, so ist ABGC ein Viereck in diesem Kreise, folglich $BAC + BGC = 2R = \alpha + \beta + \gamma$, aber $BAC = \alpha$, also $BGC = \beta + \gamma$. Aber $Bm'C = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ (§. 17.), also $Bm'C < BGC$. Nun liegt aber G auf der Peripherie des Winkelfreises, folglich muß m' außerhalb desselben liegen.

Zu f. 1. Jede Centrale des innern und eines äußern Berührungskreises wird daher von dem Winkelfreise durchschnitten.

Zu f. 2. Ebenso ist jede Centrale zweier äußerer Berührungskreise, da sie durch eine Winkelspitze des Dreiecks geht, entweder Tangente des Winkelfreises, (bei dem gleichschenkligen Dreiecke die durch die Spitze desselben gehende Centrale), oder sie wird von dem Winkelfreise noch (außer der Dreiecksspitze) in einem zweiten Punkte geschnitten. Letzterer Punkt soll als der eigentliche Durchschnittspunkt in dem Folgenden betrachtet werden.

§. 21.

Wenn man den Punkt, in welchem die Centrale des innern und eines äußern Berührungskreises von dem Winkelfreise geschnitten wird, mit dem Punkte, in welchem die Centrale der beiden andern äußern Berührungskreise geschnitten wird, durch eine gerade Linie verbindet, so ist diese Verbindungslinie Durchmesser des Winkelfreises.

Beweis. Es sey (Fig. 1.) G der eine, H der andere Durchschnittspunkt, und GH gezogen. Da G, A, H auf der Peripherie des Winkelfreises liegen, so ist GAH Peripheriewinkel. Aber $GAH = R$ (§. 3.); folglich ist GBAH Halbkreis, und daher GH Durchmesser des Winkelfreises.

Zu f. Wäre $m'm''$ nicht Secante sondern Tangente des Winkelfreises, so fiel der Durchschnittspunkt H mit A zusammen, und AG wäre die Verbindungslinie beider Durchschnittspunkte. Alsdann wäre aber auch AG Durchmesser, weil es auf der Tangente $m'm''$ im Berührungspunkte A senkrecht stünde (§. 3.).

§. 22.

Wenn man den Punkt, in welchem die Centrale des innern und eines äußern Berührungskreises von dem Winkelfreise geschnitten wird, mit dem Punkte, in welchem die Centrale der beiden andern Berührungskreise geschnitten wird, durch eine gerade Linie verbindet, so ist diese Verbindungslinie Durchmesser des Winkelfreises.

kreise geschnitten wird, verbindet, so steht die Verbindungslinie auf derjenigen Seite senkrecht, welche durch die erstgenannte Centrale geschnitten wird, und halbt diese Seite.

Beweis. GH (Fig. 1.) sey die genannte Verbindungslinie, und BC die durch die Centrale mm' durchschnitene Seite. Da $BAG = CAG$ ist, so ist der Bogen BG gleich dem Bogen CG, folglich ist der Bogen BGC in G halbt. Nun ist GH Durchmesser (§. 21.), folglich geht es durch M, und da es den Bogen BGC halbt, so halbt es auch die Chorde BC dieses Bogens, und steht auf BC senkrecht.

§. 23.

Alle Centralen, welche die Mittelpunkte der Berührungskreise verbinden, werden durch die Peripherie des Winkelfreies halbt.

Beweis. Es sey (Fig. 1.) $m''m'''$ eine Centrale zweier äußerer Berührungskreise. An die Berührungspunkte D' und D''' ziehe die Halbmesser $m''D'$ und $m'''D'''$, so stehen beide auf D'D''' senkrecht, und $m''D'$ ist daher parallel mit $m'''D'''$, also $m''D'D'''m'''$ ein Parallelogramm. Zieht man nun GH, so ist HL senkrecht auf BC (§. 22.), und daher auch $HL \parallel m''D' \parallel m'''D'''$, folglich $Hm'':Hm''' = LD':LD'''$. Nun ist aber $LC = LB$ (§. 22.) und $CD' = BD'''$ (§. 6.), folglich ist $LD' = LD'''$, und daher auch $Hm'' = Hm'''$; also ist $m''m'''$ in H halbt. Es sey ferner mm' die Centrale eines äußern und des innern Berührungskreises. Ziehe mD , $m'D'$, ferner $mK \parallel BC$, und verlängere $m'D'$, bis es mK in K trifft. Da mD und $m'D'$ auf BC senkrecht stehen, so ist $mD \parallel m'D'$, folglich auch $mD \parallel KD'$; aber auch $mK \parallel DD'$, also ist $mDD'K$ ein Parallelogramm. Da ferner auch GH senkrecht auf BC ist, so ist $NL \parallel mD \parallel KD'$, und $NG \parallel Km'$; in $\triangle mm'K$ ist folglich $mN:NK = mG:Gm'$. Nun ist aber $BL = CL$, und $BD = CD'$ (§. 4.), folglich $DL = D'L$, also auch $mN = NK$. Daher ist auch $mG = Gm'$, also mm' in G halbt.

Zus. 1. Folglich ist dasjenige Stück der Centrale zweier äußerer Berührungskreise, das innerhalb des Winkelfreies liegt, halb so groß als die Differenz zwischen den Entfernungen der Mittelpunkte dieser Berührungskreise von dem Winkel, durch den die Centrale geht. Denn $m''A = m''H + AH = m''H + AH = m''A + AH + AH = m''A + 2AH$, folglich $2AH = m''A - m''A$, und daher $AH = \frac{1}{2}(m''A - m''A)$.

Zus. 2. Dagegen ist dasjenige Stück der Centrale eines äußern und des innern Berührungskreises und ihrer Verlängerung, das innerhalb des Winkelfreies liegt, halb so groß als die Summe der Entfernungen der Mittelpunkte dieser Berührungskreise von dem Winkel, durch den die Centrale geht. Denn $m'A = 2Gm + mA$; folglich $m'A + mA = 2Gm + 2mA = 2GA$, und daher $GA = \frac{1}{2}(m'A + mA)$.

§. 24.

Der Punkt, in welchem die Centrale des innern und eines äußern Berührungskreises von der Peripherie des Winkelfreies durchschnitten wird, hat von den Endpunkten der zu dem äußern Berührungskreise gehörigen Seite eine Entfernung, welche der halben Centrale gleich ist.

Beweis. Da (Fig. 1.) GBC und GAC Peripheriewinkel sind, die auf dem nemlichen Bogen stehen, so ist $GBC = GAC$, also ist $GBC = \frac{1}{2}\alpha$, und daher $GBm = GBC + CBm = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$. Nun ist aber auch $GmB = mAB + mBA = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$; also ist $GBm = GmB$, und daher $GB = Gm = \frac{1}{2}mm'$. Ebenso wird bewiesen, daß $GC = Gm = \frac{1}{2}mm'$ ist.

Zus. Folglich ist G der Mittelpunkt des sowohl zu $\triangle BmC$ als auch zu $\triangle Bm'C$ gehörigen Winkelfreies, und dieser Mittelpunkt liegt auf der Peripherie des Winkelfreies des Urdreiecks und im Halbirungspunkte der Centrale mm' .

§. 25.

Der Punkt, in welchem die Centrale zweier äußerer Berührungskreise von der Peripherie des Winkelfreies durchschnitten wird, hat von den Endpunkten der zu dem dritten äußern Berührungskreise gehörigen Dreiecksseite eine Entfernung, welche der halben Centrale gleich ist.

Beweis. Denkt man sich (Fig. 1.) von H als Mittelpunkt mit Hm'' als Halbmesser einen Kreis be-

schrieben, so geht derselbe auch durch m''' , weil $Hm'' = Hm'''$ ist (§. 25.), 'und $m''m'''$ ist Durchmesser desselben. Da nun $m''Cm''' = R$ und $m''Bm''' = R$ ist (§. 3.), so geht dieser Kreis durch C und B; folglich, wenn HC und HB gezogen wird, so sind auch HC und HB Halbmesser, also ist $HC = Hm''$ und $HB = Hm'''$.

Zus. §. 24. hätte ebenfalls wie §. 25., oder umgekehrt §. 25. wie §. 24. bewiesen werden können.

§. 26.

Die Summe des Halbmessers des Winkelskreises und des von dem Mittelpunkte desselben auf eine Dreiecksseite gefällten Perpendikels ist gleich der halben Summe der Halbmesser der beiden zu den zwei andern Dreiecksseiten gehörigen äußern Berührungskreise.

Beweis. Da (Fig. 1.) $m''D''D'''m'''$ ein Parallelogramm ist, und HL die Halbierungspunkte der nichtparallelen Seiten verbindet (s. Beweis zu §. 25.), so ist $HL = \frac{1}{2}(m''D'' + m'''D''') = \frac{1}{2}(r'' + r''')$. Aber $HL = HM + ML = R + p'$ (weil ML nach §. 22. auf BC senkrecht steht), folglich $R + p' = \frac{1}{2}(r'' + r''')$. Ebenso ist $R + p'' = \frac{1}{2}(r' + r''')$ und $R + p''' = \frac{1}{2}(r' + r'')$.

§. 27.

Die Differenz zwischen dem Halbmesser des Winkelskreises und dem von dem Mittelpunkte desselben auf eine Dreiecksseite gefällten Perpendikel ist gleich der halben Differenz zwischen dem Halbmesser des zur genannten Dreiecksseite gehörigen äußern Berührungskreises und dem Halbmesser des innern Berührungskreises.

Beweis. Da (Fig. 1.) GN die Halbierungspunkte zweier Seiten von $\triangle mm'H$ verbindet (s. Beweis zu §. 23.), so ist $Km' = 2GN$; aber $Km' = D'm' + D'H = D'm' + Dm = r' + r$, und $2GN = 2GL + 2NL = 2GL + 2Dm = 2GL + 2r$; folglich ist $2GL + 2r = r' + r$, und daher $2GL = r' - r$; also $GL = \frac{1}{2}(r' - r)$. Nun ist $GL = MG - ML = R - p'$; folglich ist $R - p' = \frac{1}{2}(r' - r)$. Ebenso ist $R - p'' = \frac{1}{2}(r'' - r)$ und $R - p''' = \frac{1}{2}(r''' - r)$.

§. 28.

Die Summe der Halbmesser der drei äußern Berührungskreise ist gleich der Summe des Halbmessers des innern Berührungskreises und des vierfachen Halbmessers des Winkelskreises.

Beweis. Da $R + p' = \frac{1}{2}(r'' + r''')$ (§. 26.) und $R - p' = \frac{1}{2}(r' - r)$ ist (§. 27.), so ist $R + p' + R - p' = \frac{1}{2}(r'' + r''') + \frac{1}{2}(r' - r)$, d. h. $2R = \frac{1}{2}(r'' + r''') + \frac{1}{2}(r' - r)$ also $4R = r'' + r''' + r' - r$, und daher $r' + r'' + r''' = r + 4R$.

§. 29.

Die Summe zweier von dem Mittelpunkte des Winkelskreises auf zwei Dreiecksseiten gefällter Perpendikel ist gleich der halben Summe des Halbmessers des zur dritten Dreiecksseite gehörigen äußern Berührungskreises und des Halbmessers des innern Berührungskreises.

Beweis. Da $R - p' = \frac{1}{2}r' - \frac{1}{2}r$ ist (§. 27.), so ist $p' = R - \frac{1}{2}r' + \frac{1}{2}r$; ebenso ist $R + p' = \frac{1}{2}r' + \frac{1}{2}r'''$ (§. 26.), also $p'' = \frac{1}{2}r' + \frac{1}{2}r''' - R$; folglich ist $p' + p'' = R - \frac{1}{2}r' + \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r' + \frac{1}{2}r''' - R = \frac{1}{2}r'' + \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}(r'' + r)$. Ebenso wird bewiesen, daß $p' + p''' = \frac{1}{2}r'' + \frac{1}{2}r$, und $p'' + p''' = \frac{1}{2}r' + \frac{1}{2}r$ ist.

§. 30.

Der Unterschied zweier von dem Mittelpunkte des Winkelskreises auf zwei Dreiecksseiten gefällter Perpendikel ist gleich dem halben Unterschiede der Halbmesser der beiden zu den genannten Seiten gehörigen äußern Berührungskreise.

Beweis. Da $R + p' = \frac{1}{2}r'' + \frac{1}{2}r'''$, und $R + p'' = \frac{1}{2}r' + \frac{1}{2}r'''$ ist (§. 26.), so ist $R + p' - R - p'' = \frac{1}{2}r'' + \frac{1}{2}r''' - \frac{1}{2}r' - \frac{1}{2}r'''$, d. h. $p' - p'' = \frac{1}{2}r'' - \frac{1}{2}r' = \frac{1}{2}(r'' - r)$.

§. 31.

Die Summe der drei von dem Mittelpunkte des Winkelskreises auf die Seiten gefällten Perpendikel ist gleich der Summe der Halbmesser des Winkelskreises und des innern Berührungskreises.

Beweis. Da $R + p' = \frac{1}{2}r' + \frac{1}{2}r''$, $R + p'' = \frac{1}{2}r' + \frac{1}{2}r'''$ und $R + p''' = \frac{1}{2}r' + \frac{1}{2}r''$ ist (§. 26.), so ist $3R + p' + p'' + p''' = r' + r'' + r'''$. Aber $r' + r'' + r''' = 4R + r$ (§. 28.) folglich auch $3R + p' + p'' + p''' = 4R + r$, also $p' + p'' + p''' = R + r$.

Zusatz. Wenn in den §§. 26–31. das Dreieck BAC, das in Fig. 1. spitzwinklig angenommen ist, bei A rechtwinklig wird, so fällt M auf BC, also ist $p' = 0$. Das Uebrige bleibt unverändert, und da $R + p' = \frac{1}{2}r' + \frac{1}{2}r'''$ ist, so ist im rechtwinkligen Dreiecke $R = \frac{1}{2}r'' + \frac{1}{2}r'''$; ebenso weil $R - p' = \frac{1}{2}r' - \frac{1}{2}r$ ist, so ist auch $R = \frac{1}{2}r' - \frac{1}{2}r$; folglich ist auch $\frac{1}{2}r'' + \frac{1}{2}r''' = \frac{1}{2}r' - \frac{1}{2}r$, also $r'' + r''' = r' - r$, und daher $r' = r + r'' + r'''$, u. dgl. Ist das Dreieck ABC bei A stumpfwinklig, so fällt M außerhalb des Dreiecks ABC, und liegt nicht mehr auf dem Perpendikel LH sondern auf LG. Es ergibt sich leicht, daß alsdann in §. 26. $LH = R - p'$, also $R - p' = \frac{1}{2}(r' + r''')$ ist. Das Uebrige bleibt wieder unverändert, und es ist $R + p'' = \frac{1}{2}(r' + r''')$ und $R + p''' = \frac{1}{2}(r' + r'')$. Ebenso ist in §. 27. $LG = R + p'$, folglich $R + p' = \frac{1}{2}(r' - r)$; aber auch wieder $R - p'' = \frac{1}{2}(r'' - r)$ und $R - p''' = \frac{1}{2}(r''' - r)$. In §. 28. verändert sich nichts. In §. 29. ist $p'' - p' = \frac{1}{2}(r'' + r)$, in §. 30. $p'' + p' = \frac{1}{2}r' - \frac{1}{2}r'' = \frac{1}{2}(r' - r'')$, und endlich in §. 31. $p'' + p''' - p' = R + r$; das Uebrige bleibt unverändert. Man sieht daraus, daß, weil in dem Falle, wenn L stumpf ist, ML (Fig. 1.) gegen BC die entgegengesetzte Lage annimmt, auch in den erhaltenen Formeln der auf die Seite a gefällte Perpendikel p' mit dem entgegengesetzten Zeichen bezeichnet werden muß.

Zweiter Abschnitt.

Von der Grösse der aus den bisher genannten Linien gebildeten Flächen und von den Verhältnissen zwischen diesen Linien und Flächen.

§. 32.

Der Rauminhalt des Dreiecks ist gleich der Hälfte eines Rechtecks, dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Dreiecks und dessen Höhe gleich dem Halbmesser des innern Berührungskreises ist.

Beweis. Da (Fig. 1.) $\triangle BmC = \frac{1}{2} mD \cdot BC = \frac{1}{2} ra$, ebenso $\triangle CmA = \frac{1}{2} rb$ und $\triangle AmB = \frac{1}{2} rc$ ist, so ist $\triangle BmC + \triangle CmA + \triangle AmB = \frac{1}{2} ra + \frac{1}{2} rb + \frac{1}{2} rc$, d. h. $\triangle ABC = \frac{1}{2} r(a+b+c)$.

Zuf. Da auch $\triangle ABC = \frac{1}{2} h'a$ ist, so ist $\frac{1}{2} r(a+b+c) = \frac{1}{2} h'a$, also auch $r(a+b+c) = h'a$, und daher $r:h' = a:a+b+c$, d. h. der Halbmesser des inneren Berührungskreises verhält sich zu einem der drei Höhenperpendikel, wie die zu diesem Perpendikel gehörige Seite zu dem Umfange des Dreiecks.

§. 33.

Der Rauminhalt des Dreiecks ist gleich der Hälfte eines Rechtecks, dessen Grundlinie gleich dem Ueberschusse der Summe zweier Seiten über die dritte Seite und dessen Höhe gleich dem Halbmesser des zu dieser dritten Seite gehörigen äußern Berührungskreises ist.

Beweis. Da (Fig. 1.) $\triangle m''BC = \frac{1}{2} m''D'' \cdot BC = \frac{1}{2} r''a$, ebenso $\triangle m''AB = \frac{1}{2} r''c$ und $\triangle m''AC = \frac{1}{2} r''b$ ist, so ist $\triangle m''BC + \triangle m''AB - \triangle m''AC = \frac{1}{2} r''a + \frac{1}{2} r''c - \frac{1}{2} r''b$, d. h. $\triangle ABC = \frac{1}{2} r''(a+c-b)$.

Zuf. Da auch $\triangle ABC = \frac{1}{2} h''b$ ist, so ist $\frac{1}{2} r''(a+c-b) = \frac{1}{2} h''b$, also auch $r''(a+c-b) = h''b$, und daher $r'':h'' = b:a+c-b$.

§. 34.

Die Entfernung des Mittelpunkts eines äußern Berührungskreises von dem zu diesem Kreise gehörigen Winkel verhält sich zu der Entfernung des Mittelpunkts des innern Berührungskreises von eben diesem Winkel, wie der Halbmesser des genannten äußern Berührungskreises zu dem Halbmesser des innern Berührungskreises.

Beweis. Da (Fig. 1.) mF und $m'F'$ auf AF' senkrecht sind, so ist $mF \parallel m'F'$, folglich $\triangle AmF \sim \triangle Am'F'$ und daher $m'A:mA = m'F':mF = r':r$.

Zuf. Ebenso läßt sich beweisen, daß $\triangle Am''F'' \sim \triangle Am'''F'''$, und daher $m''A:m'''A = r'':r'''$ ist.

§. 35.

Die von dem Mittelpunkte eines äußern Berührungskreises nach dem zu diesem Kreise gehörigen Winkel gezogene gerade Linie wird durch den Mittelpunkt des innern Berührungskreises und durch die zu dem äußern Berührungskreise gehörige Seite so in drei Theile getheilt, daß sich die ganze Linie zu dem einen äußern Theile verhält, wie der andere äußere Theil zu dem mittlern, d. h. sie wird harmonisch getheilt.

Beweis. Es seyen (Fig. 1.) mA, mO, Om' die drei Theile, in welche $m'A$ getheilt werde, so ist $m'A : mA = r' : r$ (§. 34.). Nun ist aber auch $\triangle m'OD' \sim \triangle mOD$, folglich ist $m'O : mO = m'D' : mD = r' : r$, also ist $m'A : mA = m'O : mO$.

§. 36.

Die Summe des Halbmessers eines äußern Berührungskreises und des auf die zugehörige Seite gefällten Höhenperpendikels verhält sich zu dem Halbmesser eben dieses Berührungskreises, wie der Ueberschuß des genannten Höhenperpendikels über den Halbmesser des innern Berührungskreises zu dem letztern Halbmesser.

Beweis. Von A (Fig. 1.) fälle auf BC den Höhenperpendikel AP , und durch m ziehe $mQ \parallel BC$, so ist $QP = mD = r$, und $AQ = AP - QP = h' - r$. Nun ist $\triangle m'OD' \sim \triangle AOP$, folglich $m'O : AO = m'D' : AP = r' : h'$, also $m'O + AO : m'O = r' + h' : r'$, d. h. $m'A : m'O = r' + h' : r'$. Nun ist aber $m'A : m'O = mA : mO$ (§. 35.) und da $mQ \parallel OP$ ist, $mA : mO = AQ : QP = h' - r : r$; folglich ist $h' + r' : r' = h' - r : r$.

§. 37.

Der Halbmesser des innern Berührungskreises ist die mittlere Proportionallinie zwischen dem Ueberschuß eines Höhenperpendikels über den Durchmesser des innern Berührungskreises und zwischen der halben Differenz des Halbmessers des zu der Dreiecksseite, auf welcher der Höhenperpendikel steht, gehörigen äußern Berührungskreises und des Halbmessers des innern Berührungskreises.

Beweis. Da $h' + r' : r' = h' - r : r$ ist (§. 36.), so ist auch $h' + r' - r' : r' = h' - r - r : r$, d. h. $h' : r' = h' - 2r : r$. Folglich ist auch $h' : h' - (h' - 2r) = r' : r' - r$, d. h. $h' : 2r = r' : r' - r$, also $h' : r' = 2r : r' - r = r : \frac{1}{2}(r' - r)$. Aber nach dem Obigen ist $h' : r' = h' - 2r : r$; also ist $h' - 2r : r = r : \frac{1}{2}(r' - r)$.

Zus. Da $\frac{1}{2}(r' - r)$ im spitzwinkligen Dreiecke $= R - p'$ und im stumpfwinkligen $= R + p'$ ist (§. 27. und §. 31. Zus.), so ist auch im erstern $h' - 2r : r = r : R - p'$, und im letztern $h' - 2r : r = r : R + p'$.

§. 38.

Der Halbmesser eines äußern Berührungskreises ist die mittlere Proportionale zwischen der Summe des auf die zugehörige Seite gefällten Höhenperpendikels und des Durchmessers des genannten Berührungskreises, und zwischen der halben Differenz des Halbmessers dieses Berührungskreises und des Halbmessers des innern Berührungskreises.

Beweis. Da $h' + r' : r' = h' - r : r$ ist (§. 36.), so ist auch $h' + 2r' : r' = h' : r$. Nun ist aber $h' : 2r = r' : r' - r$ (§. 37. Beweis), also $h' : r = r' : \frac{1}{2}(r' - r)$. Folglich ist $h' + 2r' : r' = r' : \frac{1}{2}(r' - r)$.

Zus. Folglich ist auch (wie bei §. 37. Zus.) $h' + 2r' : r' = r' : R - p'$ für das spitzwinklige Dreieck, und $h' + 2r' : r' = r' : R + p'$ für das stumpfwinklige.

§. 39.

Der Halbmesser eines äußern Berührungskreises verhält sich zur Summe dieses Halbmessers und des auf die zugehörige Seite gefällten Höhenperpendikels, wie diese zugehörige Seite zur Summe beider andern Seiten.

Beweis. Da $\triangle ABC = \frac{1}{2}r'(b + c - a)$ ist (§. 33.) und ebenso $\triangle ABC = \frac{1}{2}h'a$, so ist $r'(b + c - a) = h'a$, folglich $r' : h' = a : b + c - a$, und daher $r' : r' + h' = a : b + c - a + a$, d. h. $r' : r' + h' = a : b + c$.

Zus. 1. Da $r' : r' + h' = r' : h' - r$ ist (§. 36.), so ist auch $r : h' - r = a : b + c$.

Zus. 2. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß

$$r' : \left\{ \begin{array}{l} h'' - r' \\ r' - h'' \end{array} \right\} = b : \left\{ \begin{array}{l} c - a \\ a - c \end{array} \right\} \text{ ist.}$$

§. 40.

Die Differenz der Halbmesser eines äußern und des innern Berührungskreises verhält sich zu der Summe eben dieser Halbmesser, wie die zu dem äußern Berührungskreise gehörige Seite zur Summe beider andern Seiten.

Beweis. Da $\triangle ABC = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ ist (§. 32.) und ebenso $\triangle ABC = \frac{1}{2}r'(b+c-a)$ (§. 35.), so ist $r(a+b+c) = r'(b+c-a)$, also $r':r = a+b+c:b+c-a$, folglich $r'-r:r'+r = (a+b+c) - (b+c-a) : (a+b+c) + (b+c-a)$ d. h. $r'-r:r'+r = 2a:2b+2c$, also auch $r'-r:r'+r = a:b+c$.

Zus. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß $r'-r':r'+r'' = a-b:c$ ist.

§. 41.

In jedem Dreiecke ist das Rechteck aus zwei Seiten gleich dem Rechtecke aus dem Höhenperpendikel der dritten Seite und dem Durchmesser des Winkelfreises.

Beweis. Ziehe (Fig. 2.) den Durchmesser AG; ferner ziehe CG, und fälle von A auf BC den Perpendikel AH, so ist $AHB = ACG = R$, und $ABH = AGC$, weil beide auf dem Bogen ANC stehen, folglich ist $\triangle ABH \sim \triangle AGC$, und daher $AB:AG = AH:AC$ d. h. $c:D = h':b$; folglich ist $bc = Dh'$. Ebenso ist $ab = Dh''$ und $ac = Dh'''$.

Zus. Da $ab = Dh''$, $ac = Dh'''$, $bc = Dh'$ ist, so ist $ab+ac+bc = D(h'+h''+h''')$, d. h. die Summe der drei verschiedenen Rechtecke, welche aus je zwei Seiten des Dreiecks gebildet werden können, ist gleich einem Rechtecke, dessen Grundlinie die Summe der Höhenperpendikel und dessen Höhe der Durchmesser des Winkelfreises ist.

§. 42.

Das Rechteck aus zwei Dreiecksseiten ist gleich dem Rechtecke aus den Entfernungen des von ihnen eingeschlossenen Winkels von den Mittelpunkten der beiden zu diesen Seiten gehörigen äußern Berührungskreise, und ebenso gleich dem Rechtecke aus den Entfernungen eben dieses Winkels von den Mittelpunkten des dritten äußern Berührungskreises und des innern Berührungskreises.

Beweis. Da (Fig. 1.) $\triangle m''AC \sim \triangle m'''AB$ ist (§. 17. Zus. 2.), so ist $AB:Am'' = Am''' : AC$, folglich $AB \cdot AC = Am'' \cdot Am'''$, d. h. $bc = Am'' \cdot Am'''$. Ebenso ist $BAm = CA'm' = \frac{1}{2}\alpha$, und $ABm = Am'C = \frac{1}{2}\beta$ (§. 16.), folglich $\triangle AmB \sim \triangle AC'm'$, und daher $AB:Am' = Am : AC$, also $AB \cdot AC = Am' \cdot Am$, d. h. $bc = Am' \cdot Am$.

Zus. 1. Daher ist auch $Am'' \cdot Am''' = Am' \cdot Am$.

Zus. 2. Ferner ist $Am'' \cdot Am''' + Bm' \cdot Bm''' + Cm' \cdot Cm''' = bc + ac + ab = D(h'+h''+h''')$ (§. 41. Zus.), und ebenso $Am' \cdot Am + Bm'' \cdot Bm'' + Cm'' \cdot Cm'' = bc + ac + ab = D(h'+h''+h''')$.

§. 43.

Das Rechteck aus den beiden Halbmessern eines äußern und des innern Berührungskreises ist gleich dem Rechtecke aus den beiden innern oder beiden äußern Tangenten der zu dem äußern Berührungskreise gehörigen Dreiecksseite.

Beweis. Da (Fig. 1.) $D'm'B = \frac{1}{2}\beta$ (§. 18.) $= mBD$ und $m'D'B = mDB = R$ ist, so ist $\triangle Bm'D' \sim \triangle BmD$, folglich $m'D':BD = BD':mD$, also $mD \cdot m'D' = BD \cdot BD'$. Aber $BD' = CD$ und $BD = CD'$ (§. 4.), also $mD \cdot m'D' = BD \cdot CD = BD' \cdot CD'$, d. h. $rr' = BD \cdot CD = BD' \cdot CD'$.

Zus. Da $BD = \frac{1}{2}(a+c-b)$ und $CD = \frac{1}{2}(a+b-c)$ ist, so ist $rr' = \frac{1}{4}(a+c-b)(a+b-c)$.

§. 44.

Das Rechteck aus den Halbmessern zweier äußerer Berührungskreise ist gleich dem Rechtecke aus der größern und der kleinern Tangente der Verlängerungen der zum dritten äußern Berührungskreise gehörigen Dreiecksseite.

Beweis. Da (Fig. 1.) $F'Am' = \frac{1}{2}\alpha$ und $AF'm' = R$ ist, so ist $Am'F' = R - \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$. Nun ist auch $F''Am'' = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$, also ist $Am'F' = F''Am''$. Ferner ist $AF'm' = AF''m'' = R$; folglich ist $\triangle AF'm' \cong \triangle AF''m''$, und daher $m'F':AF'' = AF':m''F''$, also $m'F' \cdot m''F'' = AF' \cdot AF''$, d. h. $r'r'' = AF' \cdot AF''$.

Zuf. Da $AF' = \frac{1}{2}(a+b+c)$ (§. 12.), und $AF'' = AE' = CE$ (§. 4.) $= \frac{1}{2}(a+b-c)$ ist (§. 13.), so ist $r'r'' = \frac{1}{4}(a+b+c)(a+b-c)$.

§. 45.

Die Summe der drei verschiedenen Rechtecke, die aus je zwei Halbmessern der äußern Berührungskreise gebildet werden können, ist gleich einem Quadrate, dessen Seite der halbe Umfang des Dreiecks ist.

Beweis. Da (Fig. 1.) $r'r'' = AF' \cdot AF''$ (§. 44.) $= AF' \cdot BF$ (§. 6.), $r'r''' = AE' \cdot AE''$ (§. 44.) $= AF' \cdot AF'''$ (§. 12.), und $r''r''' = BD'' \cdot BD'''$ (§. 44.) $= AF' \cdot BF'''$ (§. 12.) ist, so ist $r'r'' + r'r''' + r''r''' = AF' (BF + AF''' + BF''') = AF' \cdot AF = AF'^2$. Nun ist aber $AF' = \frac{1}{2}(a+b+c)$, also ist $r'r'' + r'r''' + r''r''' = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2$.

Zuf. Da $r'r'' + r'r''' + r''r''' = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2$, und $\triangle = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$ ist (§. 52.), so ist $r'r'' + r'r''' + r''r''' : \triangle = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 : \frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{a+b+c}{2} : r$, d. h. die Summe der genannten drei Rechtecke verhält sich zum Rauminhalte des Dreiecks, wie der halbe Umfang des Dreiecks zum Halbmesser des innern Berührungskreises.

§. 46.

Die Summe aller sechs verschiedenen Rechtecke, die aus je zwei Halbmessern der vier Berührungskreise gebildet werden können, ist gleich der Summe der drei verschiedenen Rechtecke, die aus je zwei Seiten des Dreiecks gebildet werden können.

Beweis. (Fig. 1.) $rr' = CD \cdot BD$, $rr'' = AE \cdot CE$, $rr''' = BF \cdot AF$ (§. 45.); ebenso ist $r'r'' = AF' \cdot AF''$, $r'r''' = AE' \cdot AE''$, $r''r''' = BD'' \cdot BD'''$ (§. 44.).

Nun ist $CD \cdot BD + AE' \cdot AE'' = CD \cdot BD + AE' \cdot BD$ (§. 6. §. 4.) $= (CD + AE') BD = (AF'' + AF') BD = F'F'' \cdot BD = (AC + BC) BD$ (§. 10.) $= AC \cdot BD + BC \cdot BD$.

Ebenso ist $AE \cdot CE + AF' \cdot AF'' = AE \cdot CE + AF' \cdot CE = (AE + AF') CE = (BD'' + BD''') CE = D''D''' \cdot CE = (AB + AC) CE = AB \cdot CE + AC \cdot CE$.

Endlich ist $BF \cdot AF + BD'' \cdot BD''' = BF \cdot AF + BD'' \cdot AF = (BF + BD'') AF = (AE''' + AE') AF = E'E''' \cdot AF = (AB + BC) AF = AB \cdot AF + BC \cdot AF$.

Folglich ist $CD \cdot BD + AE \cdot CE + BF \cdot AF + AF' \cdot AF'' + AE' \cdot AE'' + BD'' \cdot BD''' = AC \cdot BD + BC \cdot BD + AB \cdot CE + AC \cdot CE + AB \cdot AF + BC \cdot AF = AB(CE + AF) + AC(BD + CE) + BC(BD + AF) = AB(CE + AE) + AC(BD + CD) + BC(BF + AF) = AB \cdot AC + AC \cdot BC + BC \cdot AB = bc + ab + ac$. Folglich ist auch $rr' + rr'' + rr''' + r'r'' + r'r''' + r''r''' = ab + ac + bc$.

Zuf. Da $ab + ac + bc = D(h' + h'' + h''')$ (§. 41. Zuf.) $= Am'' \cdot Am''' + Bm' \cdot Bm''' + Cm' \cdot Cm'' = Am' \cdot Am + Bm'' \cdot Bm + Cm''' \cdot Cm$ (§. 42. Zuf. 2.) ist, so ist auch $rr' + rr'' + rr''' + r'r'' + r'r''' + r''r''' = D(h' + h'' + h''') = Am'' \cdot Am''' + Bm' \cdot Bm''' + Cm' \cdot Cm'' = Am' \cdot Am + Bm'' \cdot Bm + Cm''' \cdot Cm$.

§. 47.

Das Rechteck aus zwei Seiten des Dreiecks verhält sich zum Quadrate der Entfernung des eingeschlossenen Winkels von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises wie der Halbmesser des diesem Winkel zugehörigen äußern Berührungskreises zu dem Halbmesser des innern Berührungskreises.

Beweis. Da (Fig. 1.) $Am':Am = r':r$ (§. 54.), und $Am':Am = Am' \cdot Am : Am \cdot Am = AB \cdot AC : Am^2$ ist (§. 42.), so ist auch $AB \cdot AC : Am^2 = r':r$.

§. 48.

Das Rechteck aus zwei Seiten des Dreiecks verhält sich zu dem Quadrate der Entfernung des eingeschlossenen Winkels von dem Mittelpunkte des dieser Seite zugehörigen äußern Berührungskreises, wie der Halbmesser des innern Berührungskreises zum Halbmesser des genannten äußern Berührungskreises.

Beweis. Da (Fig. 1.) $Am:Am' = r:r'$ (§. 34.) und $Am:Am' = Am.Am':Am'.Am' = AB.AC:Am'^2$ ist (§. 42.), so ist auch $AB.AC:Am'^2 = r:r'$.

§. 49.

Das Rechteck aus zwei Seiten des Dreiecks verhält sich zum Quadrate der Entfernung des eingeschlossenen Winkels von dem Mittelpunkte des zu einer dieser beiden Seiten gehörigen äußern Berührungskreises, wie der Halbmesser des der andern Seite zugehörigen äußern Berührungskreises zu dem Halbmesser des zuerst genannten Berührungskreises.

Beweis. Da (Fig. 1.) $Am'':Am''' = r'':r'''$ (§. 34. Zus.) und $Am'':Am''' = Am''.Am''':Am'''.Am''' = AB.AC:Am'''^2$ ist (§. 42.), so ist $AB.AC:Am'''^2 = r'':r'''$. Ebenso ist $AB.AC:Am''^2 = r''':r''$.

§. 50.

Das Rechteck aus zwei Dreiecksseiten ist die mittlere Proportionalfläche zwischen den Quadraten der Entfernungen des eingeschlossenen Winkels von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises und von dem Mittelpunkte des diesem Winkel zugehörigen äußern Berührungskreises, und ebenso auch zwischen den Quadraten der Entfernungen des nemlichen Winkels von den Mittelpunkten der beiden den genannten Seiten zugehörigen äußern Berührungskreise.

Beweis. Da (Fig. 1.) $AB.AC:Am^2 = r':r$ (§. 47.) und $AB.AC:Am'^2 = r:r'$ (§. 48.), also $Am'^2:AB.AC = r':r$ ist, so ist $Am'^2:AB.AC = AB.AC:Am^2$. Ebenso da $AB.AC:Am''^2 = r'':r'''$ (§. 49.) und $AB.AC:Am'''^2 = r''':r''$ (§. 49.), also $Am''^2:AB.AC = r'':r'''$ ist, so ist $Am''^2:AB.AC = AB.AC:Am'''^2$.

§. 51.

Das Dreieck ist die mittlere Proportionalfläche zwischen dem Rechtecke aus dem Halbmesser des innern und eines äußern Berührungskreises und zwischen dem Rechtecke aus den Halbmessern der beiden übrigen äußern Berührungskreise.

Beweis. $\triangle = \frac{1}{2}(a+b+c)r$ (§. 32.) $= \frac{1}{2}(b+c-a)r'$ (§. 33.); folglich ist $r:\frac{1}{2}(b+c-a) = r':\frac{1}{2}(a+b+c)$. Nun ist $r:\frac{1}{2}(b+c-a) = rr':\frac{1}{2}(b+c-a)r' = rr':\triangle$ (§. 33.), und $r':\frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(b+c-a)r':\frac{1}{4}(b+c-a)(a+b+c) = \triangle:r''r'''$ (§. 33. u. §. 44. Zus.). Folglich ist $rr':\triangle = \triangle:r''r'''$.

§. 52.

Das Rechteck aus der Centrale eines äußern und des innern Berührungskreises und aus der Entfernung des Winkels, durch welchen die Centrale geht, von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises ist gleich dem Rechtecke aus den beiden Durchmessern des Winkelfreises und des innern Berührungskreises.

Beweis. Da (Fig. 1.) GH Durchmesser des Winkelfreises (§. 21.), also $GAH = R$ und $GNm = R$ ist, so ist $GAH = GNm$; nun ist aber auch $AGH = mGN$, folglich $\triangle AGH \sim \triangle NGm$, also $AG:NG = HG:mG$, und daher $AG.mG = HG.NG$. Nun ist aber $AG.mG = (Am + mG)mG = Am.mG + mG^2$ (§. 24.). Aber da GH Durchmesser ist, und BL auf GH senkrecht steht, so ist $BG^2 = GH.GL$; folglich ist $AG.mG = Am.mG + GH.GL$. Ebenso ist $GH.NG = GH(NL + GL) = GH.NL + GH.GL = GH.mD + GH.GL$. Da nun $AG.mG = GH.NG$ ist, so ist auch $Am.mG + GH.GL$

$\equiv GH \cdot mD + GH \cdot GL$, folglich $Am \cdot mG = GH \cdot mD = 2Rr$, und daher $2Am \cdot mG = 2mG \cdot Am = 4Rr = Dd$; aber $2mG = mm'$ (§. 25.); folglich ist $mm' \cdot Am = Dd$.

Zuf. Folglich ist $mm' \cdot Am = mm'' \cdot Bm = mm''' \cdot Cm$; denn jedes dieser Rechtecke ist $= Dd$.

§. 53.

Das Rechteck aus der Centrale eines äußern und des innern Berührungskreises und aus der Entfernung des Winkels, durch welchen die Centrale geht, von dem Mittelpunkte des genannten äußern Berührungskreises ist gleich dem Rechtecke aus den beiden Durchmessern des Winkelfreises und eben dieses Berührungskreises.

Beweis. Da (Fig. 1.) $Am : Am' = r : r'$ ist (§. 34.), und $Am : Am' = mm' \cdot Am : mm' \cdot Am'$, und ebenso $r : r' = d : d' = Dd : Dd'$, so ist auch $mm' \cdot Am : mm' \cdot Am' = Dd : Dd'$. Nun ist aber $mm' \cdot Am = Dd$; folglich ist auch $mm' \cdot Am' = Dd'$.

§. 54.

Das Rechteck aus der Centrale zweier äußerer Berührungskreise und aus der Entfernung des Winkels, durch welchen die Centrale geht, von dem Mittelpunkte des einen dieser Berührungskreise ist gleich dem Rechtecke aus den beiden Durchmessern des Winkelfreises und des letztern äußern Berührungskreises.

Beweis. Da (Fig. 1.) $m'Am'' = R$ (§. 3.) und ebenso $m'Cm = R$ ist, so ist $m'Am'' = m'Cm$; aber auch $Am'm' = Cm'm$, folglich ist $\triangle Am'm'' \propto \triangle Cm'm$; und daher $Am' : Cm' = m'm'' : mm'$, also $mm' \cdot Am' = m'm'' \cdot Cm'$. Aber $mm' \cdot Am' = Dd'$ (§. 55.), folglich auch $m'm'' \cdot Cm' = Dd'$.

Zuf. Da auch hier $m'm \cdot Am' = m'm'' \cdot Cm' = m'm''' \cdot Bm'$ ist, wie in §. 52. $mm' \cdot Am = mm'' \cdot Bm = mm''' \cdot Cm$, so erhält man den allgemeinen Satz: die drei Rechtecke aus je einer der drei Centralen von dem Mittelpunkte eines Berührungskreises nach den Mittelpunkten der drei übrigen, und aus der Entfernung des erstgenannten Mittelpunktes von dem Winkel, durch welchen die betreffende Centrale geht, haben gleiche Größe.

§. 55.

Das Rechteck aus der Centrale zweier äußerer Berührungskreise und aus der Entfernung des Winkels, durch welchen die Centrale geht, von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises ist gleich dem Rechtecke aus dem Durchmesser des Winkelfreises und aus dem Ueberschusse der beiden den genannten Winkel einschließenden Seiten über die dritte Seite des Dreiecks.

Beweis. Da (Fig. 1.) $Cm'm = \frac{1}{2}\beta$ ist (§. 16.) und ebenso $Bm'D' = \frac{1}{2}\beta$ (§. 18.), so ist $Cm'm = Bm'D'$; ebenso ist $mCm' = BD'm' = R$; folglich ist $\triangle mCm' \propto \triangle BD'm'$, und daher $m'C : mC = m'D' : BD'$. Nun ist aber $m'C : mC = m'm'' \cdot m'C : m'm'' \cdot mC$, und $m'D' : BD' = r' : CD = r' : \frac{1}{2}(a + b - c)$ (§. 13.) $= d' : a + b - c = Dd' : D(a + b - c)$; folglich ist auch $m'm'' \cdot m'C : m'm'' \cdot mC = Dd' : D(a + b - c)$; aber $m'm'' \cdot m'C = Dd'$ (§. 54.); also auch $m'm'' \cdot mC = D(a + b - c)$.

§. 56.

Das Rechteck aus der Centrale zweier äußerer Berührungskreise und aus der Entfernung des Winkels, durch welchen die Centrale geht, von dem Mittelpunkte des dritten äußern Berührungskreises ist gleich dem Rechtecke aus dem Durchmesser des Winkelfreises und aus dem Umfange des Dreiecks.

Beweis. Da (Fig. 1.) $mD \parallel m'''D'''$, also $\triangle mCD \propto \triangle m'''CD'''$ ist, so ist $mC : m'''C = CD : CD''' = \frac{1}{2}(a + b - c) : \frac{1}{2}(a + b + c)$ (§. 13. §. 12.) $= a + b - c : a + b + c$. Nun ist aber $mC : m'''C = m'm'' \cdot mC : m'm'' \cdot m'''C$, und $a + b - c : a + b + c = D(a + b - c) : D(a + b + c)$. Daher ist auch $m'm'' \cdot mC : m'm'' \cdot m'''C = D(a + b - c) : D(a + b + c)$; aber $m'm'' \cdot mC = D(a + b - c)$ (§. 55.); folglich ist auch $m'm'' \cdot m'''C = D(a + b + c)$.

Zuf. Folglich ist $m'm'' \cdot m'''C = m'm''' \cdot m'B = m'm''' \cdot m'A$; denn jedes dieser Rechtecke ist $= D(a + b + c)$.

§. 57.

Das Rechteck aus zwei Centralen, die von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises zu den Mittelpunkten zweier äußerer Berührungskreise gehen, ist gleich dem doppelten Rechtecke aus dem Durchmesser des Winkelfreises und der Entfernung des zu dem dritten äußern Berührungskreise gehörigen Winkels von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises.

Beweis. Da (Fig. 1.) $Am''m = \frac{1}{2}\gamma$ (§. 16.) und $ECm = \frac{1}{2}\gamma$ ist, so ist $Am''m = ECm$; ebenso ist $mAm'' = mEC = R$; folglich ist $\triangle Am''m \oslash \triangle ECm$, und daher $Am:mm'' = Em:Cm$. Aber $Am:mm'' = mm'.Am:mm'.mm''$, und $Em:Cm = r:Cm = d:2Cm = Dd:2D.Cm$. Folglich ist $mm'.Am:mm'.mm'' = Dd:2D.Cm$. Nun ist aber $mm'.Am = Dd$ (§. 52.); also ist auch $mm'.mm'' = 2D.Cm$.

Zus. Also ist $mm'.mm'' + mm'.mm''' + mm''.mm''' = 2D (Am + Bm + Cm)$.

§. 58.

Das Rechteck aus zwei Centralen der äußern Berührungskreise ist gleich dem doppelten Rechtecke aus dem Durchmesser des Winkelfreises und aus der Entfernung des Mittelpunkts des beiden Centralen gemeinschaftlichen Berührungskreises von dem zu diesem Kreise gehörigen Winkel.

Beweis. Da (Fig. 1.) $m'm''C = \frac{1}{2}\alpha$ (§. 16.) $= m'AF'$ und $m'Cm''' = m'FA = R$ ist, so ist $\triangle m'm''C \oslash \triangle m'AF'$, und daher $Cm':m'm'' = m'F':m'A$. Aber $Cm':m'm'' = m'm''.Cm':m'm''.m'm''$ und $m'F':m'A = r':m'A = d':2m'A = Dd':2D.m'A$. Folglich ist $m'm''.Cm':m'm''.m'm''' = Dd':2D.m'A$. Nun ist aber $m'm''.Cm' = Dd'$ (§. 54.); folglich ist auch $m'm''.m'm''' = 2D.m'A$.

Zus. 1. Also ist $m'm''.m'm''' + m'm''.m'm'' + m'm'''.m'm''' = 2D (m'A + m''B + m'''C)$.

Zus. 2. Da $mm''.mm''' = 2D.mA$ und $m'm''.m'm''' = 2D.m'A$ ist, so ist $mm''.mm''':m'm''.m'm''' = mA:m'A$.

§. 59.

Das Rechteck aus der Centrale zweier äußerer Berührungskreise und aus der Centrale des dritten äußern Berührungskreises und des innern Berührungskreises ist gleich dem doppelten Rechtecke aus dem Durchmesser des Winkelfreises und aus der von der letztern Centrale durchschnittenen Seite des Dreiecks.

Beweis. Da (Fig. 1.) $m'm''m = \frac{1}{2}\alpha$ (§. 16.) $= m'AB$ und $mm'm''' = Bm'A$ ist, so ist $\triangle mm'm'' \oslash \triangle m'AB$, also $m'm''':mm''' = m'A:AB$. Aber $m'm''':mm''' = m'm''.m'm''':m'm''.mm'''$, und $m'A:AB = m'A:c = 2D.m'A:2cD$. Folglich ist $m'm''.m'm''':m'm''.mm''' = 2D.m'A:2cD$. Nun ist aber $m'm''.m'm''' = 2D.m'A$ (§. 58.); folglich ist auch $m'm''.mm''' = 2cD$.

Zus. Daher ist $m'm''.mm''' + m'm''.mm'' + m'm'''.mm' = 2(a+b+c)D$. Aber auch $m'm''.Cm''' = (a+b+c)D$ (§. 56.); folglich ist $m'm''.mm''' + m'm''.mm'' + m'm'''.mm' = 2m'm''.Cm''' = 2m'm''.Bm' = 2m'm''.Am'$ (§. 56. Zus.)

§. 60.

Die von dem Mittelpunkte des Winkelfreises zum Mittelpunkte des innern Berührungskreises gehende Centrale ist die mittlere Proportionale zwischen dem Halbmesser des Winkelfreises und dem Ueberschusse dieses Halbmessers über den Durchmesser des innern Berührungskreises.

Beweis. Es sey (Fig. 2.) Mm gezogen, und nach S und T bis zur Peripherie des Winkelfreises verlängert, ferner sey m' der Mittelpunkt des zu BC gehörigen äußern Berührungskreises; ziehe Am' , so geht Am' durch m und mm' ist in K halbt (§. 23.). Da nun ST in M gleich und in m ungleich getheilt ist, so ist $Sm.mT + Mm^2 = MS^2 = R^2$ (s. Euklid. II, 5.). Nun ist aber $Sm.mT = mK.Am = \frac{1}{2}mm'.Am = \frac{1}{2}Dd$ (§. 52.) $= 2Rr$. Folglich ist $2Rr + Mm^2 = R^2$, also $Mm^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r)$, und daher $R:Mm = Mm:R - 2r$.

Zus. Bei jedem Dreiecke also, bei welchem die Mittelpunkte des Winkelfreises und des innern Berührungskreises nicht zusammenfallen (also bei jedem Dreiecke, das nicht gleichseitig ist), ist der Halbmesser des Winkelfreises größer als der Durchmesser des innern Berührungskreises, oder $R > 2r$.

§. 61.

Die von dem Mittelpunkte des Winkelfreises zu dem Mittelpunkte eines äußern Berührungskreises gehende Centrale ist die mittlere Proportionale zwischen dem Halbmesser des Winkelfreises und der Summe dieses Halbmessers und des Durchmessers des genannten äußern Berührungskreises.

Beweis. Es sey (Fig. 2.) Mm' gezogen; verlängere es, bis es die Peripherie des Winkelfreises in N trifft. Da NL in M halbart, und ihr Lm' angelegt ist, so ist $m'N \cdot m'L + ML^2 = Mm'^2$ (§. Euklid. II, 6.). Nun ist aber $m'N \cdot m'L = m'K \cdot m'A = \frac{1}{2} mm' \cdot m'A = \frac{1}{2} Dd'$ (§. 53.) $= 2 Rr'$; folglich ist $Mm'^2 = 2 Rr' + ML^2 = 2 Rr' + R^2 = R(R + 2r')$, und daher $R : Mm' = Mm' : R + 2r'$.

§. 62.

Die von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises zu dem Mittelpunkte eines äußern Berührungskreises gehende Centrale ist die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser des Winkelfreises und der Differenz der Durchmesser der genannten zwei Berührungskreise.

Beweis. Da (Fig. 1.) $mm' \cdot m'A = Dd'$ (§. 53.) und $mm' \cdot mA = Dd$ (§. 52.) ist, so ist $mm' \cdot m'A - mm' \cdot mA = Dd' - Dd = D(d' - d)$; aber $mm' \cdot m'A - mm' \cdot mA = mm' (m'A - mA) = mm' \cdot mm' = mm'^2$; folglich ist $mm'^2 = D(d' - d)$, und daher $D : mm' = mm' : d' - d$.

§. 63.

Die Centrale zweier äußerer Berührungskreise ist die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser des Winkelfreises und der Summe der Durchmesser der beiden genannten äußern Berührungskreise.

Beweis. Da (Fig. 1.) $m'm'' \cdot m'C = Dd'$, und $m'm'' \cdot m''C = Dd''$ ist (§. 54.), so ist $m'm'' \cdot m'C + m'm'' \cdot m''C = Dd' + Dd'' = D(d' + d'')$; aber $m'm'' \cdot m'C + m'm'' \cdot m''C = m'm'' (m'C + m''C) = m'm'' \cdot m'm' = m'm'^2$; folglich ist $m'm'^2 = D(d' + d'')$, und daher $D : m'm'' = m'm'' : d' + d''$.

§. 64.

Das Quadrat der Centrale zweier äußerer Berührungskreise und das Quadrat der Centrale des dritten äußern Berührungskreises und des innern Berührungskreises sind zusammen das Vierfache von dem Quadrate des Durchmessers des Winkelfreises.

Beweis. Da $m'm'^2 = D(d' + d'')$ (§. 63.) und $mm''^2 = D(d''' - d)$ (§. 62.) ist, so ist $m'm'^2 + mm''^2 = D(d' + d'' + d''' - d)$. Aber $d' + d'' + d''' - d = 4D$ (§. 28.); folglich ist $m'm'^2 + mm''^2 = 4D^2$.

Zu f. 1. Es ist also auch $m'm'^2 + mm''^2 = m'm'^2 + mm'^2 = m''m''^2 + mm'^2$.

Zu f. 2. Da $m'm'^2 + mm''^2 = 4D^2$, und $m'm'' \cdot mm''' = 2cD$ (§. 59.), also $2m'm'' \cdot mm''' = 4cD$, so ist $m'm'^2 + 2m'm'' \cdot mm''' + mm''^2 = 4D^2 + 4cD$, d. h. $(m'm'' + mm''')^2 = 4D(D + c)$. Es finden also folgende zwei stetige Proportionen Statt: 1) $4D : m'm'' + mm''' = m'm'' + mm''' : D + c$; 2) $4D : m'm'' - mm''' = m'm'' - mm''' : D - c$.

§. 65.

Die Differenz der Quadrate der von den Mittelpunkten zweier äußerer Berührungskreise nach dem Mittelpunkte des dritten äußern Berührungskreises gezogenen zwei Centralen ist gleich der Differenz der Quadrate der von den zwei zuerst genannten Mittelpunkten nach dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises gezogenen Centralen.

Beweis. Da $m'm'^2 = D(d' + d'')$ und $m'm''^2 = D(d' + d''')$ ist, so ist $m'm'^2 - m'm''^2 = D(d' + d'' - d' - d''') = D(d'' - d''')$. Ebenso ist $mm'^2 = D(d' - d'')$ und $mm''^2 = D(d'' - d)$, also $mm'^2 - mm''^2 = D(d' - d - d'' + d) = D(d'' - d''')$; folglich ist $m'm'^2 - m'm''^2 = mm'^2 - mm''^2$.

§. 66.

Die Summe der Quadrate der drei von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises nach den Mit-

telpunkten der äußern Berührungskreise gehenden Centralen ist kleiner als das vierfache Quadrat des Durchmessers des Winkelfreises um das doppelte Rechteck aus den Durchmessern des Winkelfreises und des innern Berührungskreises.

Beweis. Da $mm'^2 = D(d' - d)$, $mm''^2 = D(d'' - d)$ und $mm'''^2 = D(d''' - d)$ ist (§. 62.), so ist $mm'^2 + mm''^2 + mm'''^2 = D(d' + d'' + d''' - 3d) = D(d' + d'' + d''' - d - 2d) = D(4D - 2d)$ (§. 28.) $= 4D^2 - 2Dd$.

§. 67.

Die Summe der Quadrate der drei von dem Mittelpunkte eines äußern Berührungskreises nach den Mittelpunkten der drei andern Berührungskreise gehenden Centralen ist größer als das vierfache Quadrat des Durchmessers des Winkelfreises um das doppelte Rechteck aus den Durchmessern des Winkelfreises und des zuerst genannten äußern Berührungskreises.

Beweis. Da $m'm^2 = D(d' - d)$, $m'm'^2 = D(d' + d'')$ und $m'm''^2 = D(d' + d''')$ ist (§. 62. 63.), so ist $m'm^2 + m'm'^2 + m'm''^2 = D(3d' + d'' + d''' - d) = D(d' + d'' + d''' - d + 2d') = D(4D + 2d')$ (§. 28.) $= 4D^2 + 2Dd'$.

§. 68.

Die Summe der Quadrate der vier von dem Mittelpunkte des Winkelfreises nach den Mittelpunkten der Berührungskreise gehenden Centralen ist dreimal so groß als das Quadrat des Durchmessers des Winkelfreises.

Beweis. Da $Mm^2 = R^2 - 2Rr$ (§. 60.), $Mm'^2 = R^2 + 2Rr'$, $Mm''^2 = R^2 + 2Rr''$ und $Mm'''^2 = R^2 + 2Rr'''$ ist (§. 61.), so ist $Mm^2 + Mm'^2 + Mm''^2 + Mm'''^2 = 4R^2 + 2R(r' + r'' + r''') - r = 4R^2 + 2R \cdot 4R$ (§. 28.) $= 4R^2 + 8R^2 = 12R^2 = 3 \cdot 4R^2 = 3D^2$.

§. 69.

Die Summe der Quadrate der drei Seiten des größern Centralendreiecks ist größer als das achtfache Quadrat des Durchmessers des Winkelfreises um das doppelte Rechteck aus den Durchmessern des Winkelfreises und des innern Berührungskreises, dagegen ist die Summe der Quadrate der drei Seiten eines kleinern Centralendreiecks kleiner als das achtfache Quadrat des Durchmessers des Winkelfreises um das doppelte Rechteck aus den Durchmessern des Winkelfreises und desjenigen äußern Berührungskreises, zu welchem das Centralendreieck nicht gehört.

Beweis. Da $m'm''^2 = D(d' + d'')$, $m'm'''^2 = D(d' + d''')$ und $m''m'''^2 = D(d'' + d''')$ ist (§. 63.), so ist $m'm''^2 + m'm'''^2 + m''m'''^2 = D(2d' + 2d'' + 2d''') = 2D(d' + d'' + d''') = 2D(d' + d'' + d''' - d + d) = 2D(4D + d)$ (§. 28.) $= 8D^2 + 2Dd$. Ebenso da $m'm''^2 = D(d' + d'')$ (§. 63.), $m'm^2 = D(d' - d)$ und $m''m^2 = D(d'' - d)$ (§. 62.) ist, so ist $m'm''^2 + m'm^2 + m''m^2 = D(2d' + 2d'' - 2d) = 2D(d' + d'' - d) = 2D(d' + d'' + d''' - d - d''') = 2D(4D - d''')$ (§. 28.) $= 8D^2 - 2Dd'''$.

§. 70.

Der Ueberschuß der Quadrate der drei die Mittelpunkte der äußern Berührungskreise verbindenden Centralen über die doppelte Summe der Quadrate der drei Centralen, welche von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises nach den Mittelpunkten der äußern Berührungskreise gehen, ist gleich dem sechsfachen Rechtecke aus den Durchmessern des Winkelfreises und des innern Berührungskreises.

Beweis. Da $m'm'^2 + m'm''^2 + m'm'''^2 = 8D^2 + 2Dd$ (§. 69.) und $mm'^2 + mm''^2 + mm'''^2 = 4D^2 - 2Dd$ (§. 66.), also $2(mm'^2 + mm''^2 + mm'''^2) = 8D^2 - 4Dd$ ist, so ist $m'm'^2 + m'm''^2 + m'm'''^2 - 2(mm'^2 + mm''^2 + mm'''^2) = 8D^2 + 2Dd - (8D^2 - 4Dd) = 8D^2 + 2Dd - 8D^2 + 4Dd = 6Dd$.

§. 71.

Die Summe der Quadrate der sechs Centralen, welche die Mittelpunkte der vier Berührungskreise verbinden, ist zwölfmal so groß als das Quadrat des Durchmessers des Winkelfreises, der Ueberschuß der Summe dieser sechs Quadrate über die Summe der vier von dem Mittelpunkte des Winkelfreises nach den Mittelpunkten der Berührungskreise gehenden Centralen neunmal so groß als das Quadrat des Durchmessers des Winkelfreises, oder gleich einem Quadrate, dessen Seite das Dreifache von dem Durchmesser des Winkelfreises ist, und endlich die Summe der Quadrate der zehn Centralen aller fünf Kreise gleich dem fünfzehnfachen Quadrate des Durchmessers des Winkelfreises.

Beweis. Da $mm'^2 + mm''^2 + mm'''^2 = 4D^2 - 2Dd$ (§. 66.) und $m'm''^2 + m'm'''^2 + m''m'''^2 = 8D^2 + 2Dd$ (§. 69.) ist, so ist $mm'^2 + mm''^2 + mm'''^2 + m'm''^2 + m'm'''^2 + m''m'''^2 = 4D^2 - 2Dd + 8D^2 + 2Dd = 12D^2$. Ferner ist $Mm^2 + Mm'^2 + Mm''^2 + Mm'''^2 = 3D^2$ (§. 68.); folglich ist $mm'^2 + mm''^2 + mm'''^2 + m'm''^2 + m'm'''^2 + m''m'''^2 - (Mm^2 + Mm'^2 + Mm''^2 + Mm'''^2) = 12D^2 - 3D^2 = 9D^2 = (3D)^2$, und ebenso $mm'^2 + mm''^2 + mm'''^2 + m'm''^2 + m'm'''^2 + m''m'''^2 + Mm^2 + Mm'^2 + Mm''^2 + Mm'''^2 = 12D^2 + 3D^2 = 15D^2$.

Zus. Da ferner $4(Mm^2 + Mm'^2 + Mm''^2 + Mm'''^2) = 4 \cdot 3D^2 = 12D^2$ ist, so ist auch $mm'^2 + mm''^2 + mm'''^2 + m'm''^2 + m'm'''^2 + m''m'''^2 = 4(Mm^2 + Mm'^2 + Mm''^2 + Mm'''^2)$.

Dritter Abschnitt.

Von der Grösse der aus den bisher genannten Linien und Flächen gebildeten Körper.

§. 72.

Das Parallelepipedon aus den drei Seiten des Dreiecks ist das Vierfache von einem Prisma, dessen Basis das Dreieck und dessen Höhe der Halbmesser des Winkelfreises ist.

Beweis. Da (Fig. 1.) $bc = Dh'$ ist (§. 41.), so ist $abc = Dah'$. Aber $ah' = 2\Delta$; folglich ist $abc = 2D\Delta = 4R\Delta$.

§. 73.

Das Parallelepipedon aus den Halbmessern der drei äussern Berührungskreise ist die Hälfte eines Prismas, dessen Basis das Dreieck, und dessen Höhe der Umfang des Dreiecks ist.

Beweis. Da $rr' : \Delta = \Delta : r''r'''$ ist (§. 51.) und $rr' : \Delta = rr' : \frac{1}{2}r(a+b+c)$ (§. 32.) $= r' : \frac{1}{2}(a+b+c)$, so ist auch $r' : \frac{1}{2}(a+b+c) = \Delta : r''r'''$, und daher $rr'r''' = \frac{1}{2}(a+b+c)\Delta$.

Zuf. 1. Da $\Delta = \frac{1}{2}(a+b+c)r$ ist, so ist auch $rr'r''' = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 \cdot r$, d. h. das genannte Parallelepipedon ist einem andern Parallelepipedon gleich, dessen Basis das Quadrat des halben Umfangs des Dreiecks und dessen Höhe der Halbmesser des innern Berührungskreises ist.

Zuf. 2. Da auch $abc = 4R\Delta$ ist (§. 72.), so ist $rr'r''' : abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\Delta : 4R\Delta = \frac{1}{2}(a+b+c) : 4R = a+b+c : 8R = a+b+c : 4D$. Es ist daher $rr'r''' < abc$, da $a+b+c < 3D$ (weil a, b, c Chorden des Winkelfreises sind), also noch vielmehr $a+b+c < 4D$ ist.

§. 74.

Das Parallelepipedon aus dem Halbmesser des innern Berührungskreises und aus den Halbmessern zweier äusserer Berührungskreise ist die Hälfte eines Prismas, dessen Basis das Dreieck und dessen Höhe der Ueberschuss der beiden zu den genannten äussern Berührungskreisen gehörigen Seiten über die dritte Seite ist.

Beweis. Da $rr' : \Delta = \Delta : r''r'''$ ist (§. 51.) und $\Delta : r''r''' = \frac{1}{2}(a+b-c)r'' : r''r'''$ (§. 33.) $= \frac{1}{2}(a+b-c) : r''$, so ist auch $rr' : \Delta = \frac{1}{2}(a+b-c) : r''$, und daher $rr'r''' = \frac{1}{2}(a+b-c)\Delta$.

Zuf. 1. Da $\Delta = \frac{1}{2}(a+b-c)r''$ ist, so ist auch $rr'r''' = \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2 \cdot r''$, d. h. das genannte Parallelepipedon ist gleich einem andern, dessen Basis das Quadrat des halben Ueberschusses der beiden zu den genannten äussern Berührungskreisen gehörigen Seiten über die dritte Seite, und dessen Höhe der Halbmesser des dritten äussern Berührungskreises ist.

Zuf. 2. Da auch $abc = 4R\Delta$ ist, so ist $rr'r''' : abc = \frac{1}{2}(a+b-c)\Delta : 4R\Delta = \frac{1}{2}(a+b-c) : 4R = a+b-c : 4D$.

§. 75.

Wenn man aus je drei Halbmessern der vier Berührungskreise die vier möglichen Parallelepipeda bildet, so ist das aus den drei Halbmessern der äußern Berührungskreise gebildete so groß als die Summe der drei übrigen.

Beweis. Da $rr' + r'r'' + r'r''' : \Delta = \frac{1}{2}(a+b+c) : r$ ist (§. 45. Zus.), so ist $rr'r'' + rr'r''' + rr'r'''' = \frac{1}{2}(a+b+c) \Delta$. Nun ist aber auch $r'r'r'' = \frac{1}{2}(a+b+c) \Delta$ (§. 73.); folglich ist $r'r'r'' = rr'r'' + rr'r''' + rr'r''''$.

Zus. 1. Der Beweis hätte auch aus §. 74. geführt werden können.

Zus. 2. Daher ist auch $rr'r'' + rr'r''' = r'r'r'' - rr'r''''$, d. h. $rr'(r'' + r''') = r'r''(r' - r)$, und daher $r'' + r''' : r' - r = r'r'' : rr'$, d. h. die Summe der Halbmesser zweier äußerer Berührungskreise verhält sich zur Differenz des dritten äußern und des innern Berührungskreises wie das Rechteck aus den beiden erstgenannten Halbmessern zum Rechtecke aus beiden letzteren.

§. 76.

Das Parallelepipeton aus den drei Centralen, welche von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises nach den Mittelpunkten der drei äußern Berührungskreise gehen, ist das Doppelte eines Parallelepipetons, dessen Basis das Quadrat des Winkelfreises und dessen Höhe der Durchmesser des innern Berührungskreises ist.

Beweis. Da $mm'.mm'' = 2D.Cm$ (§. 57.) und $mm'''.Cm = Dd$ (§. 52.) ist, so ist $mm'.mm'' : Dd = 2D.Cm : mm'''.Cm$; aber $2D.Cm : mm'''.Cm = 2D : mm'''$; folglich auch $mm'.mm'' : Dd = 2D : mm'''$, und daher $mm'.mm''.mm''' = 2D^2d$.

§. 77.

Das Parallelepipeton aus den drei Centralen, welche von dem Mittelpunkte eines äußern Berührungskreises nach den Mittelpunkten der drei übrigen Berührungskreise gehen, ist das Doppelte eines Parallelepipetons, dessen Basis das Quadrat des Winkelfreises und dessen Höhe der Durchmesser des erstgenannten äußern Berührungskreises ist.

Beweis. Da $m'm''.m'm''' = 2D.m'A$ (§. 58.) und $m'm.m'A = Dd'$ (§. 55.) ist, so ist $m'm''.m'm''' : Dd' = 2D.m'A : m'm.m'A$; aber $2D.m'A : m'm.m'A = 2D : m'm$; folglich auch $m'm''.m'm''' : Dd' = 2D : m'm$, und daher $m'm.m'm''.m'm''' = 2D^2d'$.

Zus. Da $mm'.mm''.mm''' = 2D^2d$, und $m'm.m'm''.m'm''' = 2D^2d'$ ist, so ist $mm'.mm''.mm''' : m'm.m'm''.m'm''' = d : d'$.

§. 78.

Wenn man aus den jedesmaligen drei Centralen, die von dem Mittelpunkte eines jeden der Berührungskreise nach den Mittelpunkten der drei übrigen Berührungskreise gezogen sind, ein Parallelepipeton bildet, so stehen die vier dadurch gebildeten Parallelepipeda in einem solchen Verhältnisse zu einander, daß die Summe derjenigen drei, welche aus den von den Mittelpunkten der drei äußern Berührungskreise gezogenen Centralen gebildet sind, größer ist als das vierte aus den von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises ausgehenden Centralen gebildete um den achtfachen Kubus des Durchmessers des Winkelfreises oder um den Kubus des doppelten Durchmessers des Winkelfreises.

Beweis. Da $m'm.m'm''.m'm''' = 2D^2d'$, $m'm.m'm'.m'm''' = 2Dd''$ und $m''m.m'''m'.m''m'' = 2D^2d'''$ (§. 77.), und ebenso $mm'.mm''.mm''' = 2D^2d$ (§. 76.) ist, so ist $m'm.m'm''.m'm''' + m'm.m'm'.m'm''' + m''m.m'''m'.m''m'' - mm'.mm''.mm''' = 2D^2(d' + d'' + d''' - d) = 2D^2.4D$ (§. 28.) $= 8D^3 = (2D)^3$.

§. 79.

Das aus den drei Centralen, welche den Umfang des größern Centralendreiecks bilden, entstandene Pa-

rallelepipedon ist das Doppelte eines Parallelepipedons, dessen Basis das Quadrat des Durchmessers des Winkelfreieis und dessen Höhe der Umfang des Dreiecks ist.

Beweis. Da (Fig. 1.) $m'm'' \cdot m'm''' = 2D \cdot m'A$ (§. 58.) und $m'm''' \cdot m'A = D(a+b+c)$ (§. 56.) ist, so ist $m'm'' \cdot m'm''' : D(a+b+c) = 2D \cdot m'A : m'm''' \cdot m'A$; aber $2D \cdot m'A : m'm''' \cdot m'A = 2D : m'm'''$; folglich $m'm'' \cdot m'm''' : D(a+b+c) = 2D : m'm'''$, und daher $m'm'' \cdot m'm''' \cdot m'm''' = 2(a+b+c)D^2$.

Zu f. Da $mm' \cdot mm'' \cdot mm''' = 2D^2d$, und $m'm'' \cdot m'm''' \cdot m'm''' = 2(a+b+c)D^2$ ist, so ist $mm' \cdot mm'' \cdot mm''' : m'm'' \cdot m'm''' \cdot m'm''' = d : a+b+c$.

§. 80.

Das aus den Centralen, welche den Umfang eines kleinern Centralendriekes bilden, entstandene Parallelepipedon ist das Doppelte eines Parallelepipedons, dessen Basis das Quadrat des Durchmessers des Winkelfreieis und dessen Höhe der Ueberschuß der beiden zu denselben äußern Berührungskreisen, zu welchen das Centralendriek gehört, gehörigen Dreiecksseiten über die dritte Seite ist.

Beweis. Da (Fig. 1.) $mm' \cdot mm'' = 2D \cdot Cm$ (§. 57.) und $m'm'' \cdot Cm = D(a+b-c)$ (§. 55.) ist, so ist $mm' \cdot mm'' : D(a+b-c) = 2D \cdot Cm : m'm'' \cdot Cm$; aber $2D \cdot Cm : m'm'' \cdot Cm = 2D : m'm''$; folglich auch $mm' \cdot mm'' : D(a+b-c) = 2D : m'm''$, und daher $mm' \cdot mm'' \cdot m'm'' = 2(a+b-c)D^2$.

§. 81.

Das aus den Centralen, welche den Umfang des größern Centralendriekes bilden, entstandene Parallelepipedon ist gleich der Summe der drei aus den Centralen, welche die Umfänge der kleinern Centralendriekes bilden, entstandenen Parallelepipeda.

Beweis. Da $mm' \cdot mm'' \cdot m'm'' = 2(a+b-c)D^2$, $mm' \cdot mm''' \cdot m'm'' = 2(a+c-b)D^2$, und $mm'' \cdot mm''' \cdot m'm''' = 2(b+c-a)D^2$ ist (§. 80.), so ist $mm' \cdot mm'' \cdot m'm'' + mm' \cdot mm''' \cdot m'm'' + mm'' \cdot mm''' \cdot m'm''' = 2(a+b-c + a+c-b + b+c-a)D^2 = 2(a+b+c)D^2$; aber auch $m'm'' \cdot m'm''' \cdot m'm''' = 2(a+b+c)D^2$ (§. 79.); folglich ist $m'm'' \cdot m'm''' \cdot m'm''' = mm' \cdot mm'' \cdot m'm'' + mm' \cdot mm''' \cdot m'm'' + mm'' \cdot mm''' \cdot m'm'''$.

§. 82.

Wenn man die sechs Stücke, in welche die Centralen, die das größere Centralendriek bilden, durch die Winkel des Urdreiecks getheilt werden, in zwei Gruppen ordnet von je drei Stücken, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, so ist das Parallelepipedon aus den drei Stücken der einen Gruppe gleich dem Parallelepipedon aus denen der andern, und jedes dieser Parallelepipeda ist gleich dem Parallelepipedon aus den Seiten des Urdreiecks.

Beweis. Da (Fig. 1.) $\triangle m'BC \propto \triangle m''AC \propto \triangle m'''AB$ ist (§. 17. Zus. 2.), so ist $m'B : m''A = BC : m''C$, also $m'B \cdot m''C = m''A \cdot BC$. Ebenso ist $m'C : m'''A = BC : m'''B$, also $m'C \cdot m'''B = m'''A \cdot BC$. Daher ist $m'B \cdot m''C : m'C \cdot m'''B = m''A \cdot BC : m'''A \cdot BC$; aber $m''A \cdot BC : m'''A \cdot BC = m''A : m'''A$; folglich auch $m'B \cdot m''C : m'C \cdot m'''B = m''A : m'''A$, und daher $m'B \cdot m''C \cdot m'''A = m'C \cdot m'''A \cdot m'''B$. Ferner ist $AB \cdot AC = m''A \cdot m'''A$ (§. 42.) und nach dem Obigen $m'B \cdot m''C = m''A \cdot BC$; also $AB \cdot AC : m'B \cdot m''C = m''A \cdot m'''A : m''A \cdot BC$; aber $m''A \cdot m'''A : m''A \cdot BC = m'''A : BC$; folglich auch $AB \cdot AC : m'B \cdot m''C = m'''A : BC$, und daher $m'B \cdot m''C \cdot m'''A = AB \cdot AC \cdot BC = abc$, also auch $m'C \cdot m'''A \cdot m'''B = abc$.

Zus. 1. Daher ist auch $m'B \cdot m''C \cdot m'''A = 4R \triangle$ (§. 72.) und ebenso $m'C \cdot m'''A \cdot m'''B = 4R \triangle$.

Zus. 2. Ein ähnlicher Satz kann auf dieselbe Art für die kleineren Centralendriekes bewiesen werden, wenn man z. B. von mm' die beiden Stücke mA , $m'A$ gelten läßt u. s. w.

§. 83.

Das Parallelepipedon aus den drei geraden Linien, welche von dem Mittelpunkte des innern Berüh-

Winkelfreis nach den drei Winkelspitzen des Dreiecks gezogen sind, ist das Vierfache eines Parallelepipedons, dessen Basis das Quadrat des Halbmessers des innern Berührungskreises und dessen Höhe der Halbmesser des Winkelfreises ist.

Beweis. Da (Fig. 1.) $mm'C = \frac{1}{2}\beta$ (§. 16.) $= mBD$ und $mCm' = mDB = R$ ist, so ist $\triangle mm'C \sim \triangle mBD$, und daher $mC:mD = mm':mB$, also $mB.mC = mm'.mD = mm'.r$. Nun ist $mm'.mA = Dd$ (§. 52.) $= 4Rr$; also ist $mB.mC:4Rr = mm'.r:mm'.mA$; aber $mm'.r:mm'.mA = r:mA$; daher ist auch $mB.mC:4Rr = r:mA$, und daher $mA.mB.mC = 4Rr^2$.

Zus. 1. Da $abc = 4R\Delta$ ist (§. 72.), so ist $mA.mB.mC:abc = 4Rr^2:4R\Delta = r^2:\Delta = r^2:\frac{1}{2}r(a+b+c)$ (§. 32.) $= r:\frac{1}{2}(a+b+c) = d:a+b+c$.

Zus. 2. Da $mm'.mm''.mm''' = 2D^2d = 16R^2r$ ist, so ist $mA.mB.mC:mm'.mm''.mm''' = 4Rr^2:16R^2r = r:4R$.

§. 84.

Das Parallelepipedon aus den geraden Linien, welche von dem Mittelpunkte eines äußern Berührungskreises nach den drei Winkelspitzen des Dreiecks gezogen sind, ist das Vierfache eines Parallelepipedons, dessen Basis das Quadrat des Halbmessers dieses äußern Berührungskreises und dessen Höhe der Halbmesser des Winkelfreises ist.

Beweis. Da (Fig. 1.) $Bm'm = \frac{1}{2}\gamma$ (§. 16.) und $Cm'D' = \frac{1}{2}\gamma$ (§. 18.) ist, so ist $Bm'm = Cm'D'$; nun ist auch $mBm' = m'D'C = R$; folglich ist $\triangle mm'B \sim \triangle m'CD'$, und daher $m'B:m'D' = m'm:m'C$, also $m'B.m'C = m'm.m'D' = m'm.r'$. Nun ist $m'm.m'A = Dd' = 4Rr'$ (§. 53.), also $m'B.m'C:4Rr' = m'm.r':m'm.m'A$; aber $m'm.r':m'm.m'A = r':m'A$; also auch $m'B.m'C:4Rr' = r':m'A$, und daher $m'A.m'B.m'C = 4Rr'^2$.

Zus. 1. Da $abc = 4R\Delta$ ist (§. 72.), so ist $m'A.m'B.m'C:abc = 4Rr'^2:4R\Delta = r'^2:\Delta = r'^2:\frac{1}{2}r'(b+c-a)$ (§. 53.) $= r':\frac{1}{2}(b+c-a) = d':b+c-a$.

Zus. 2. Da $m'm.m'm''.m'm''' = 2D^2d'$ (§. 77.) $= 16R^2r'$ ist, so ist $m'A.m'B.m'C:m'm.m'm''.m'm''' = 4Rr'^2:16R^2r' = r':4R$.

§. 85.

Das Parallelepipedon aus den drei geraden Linien, welche von den Mittelpunkten der drei äußern Berührungskreise nach den ihnen zugehörigen Winkeln gehen, ist gleich einem Parallelepipedon, dessen Basis das Quadrat des Umfangs des Dreiecks und dessen Höhe der Halbmesser des Winkelfreises ist.

Beweis. Da (Fig. 1.) $m'm'A = \frac{1}{2}\beta = m'BD''$ und $m'Am'' = m'D'B = R$ ist, so ist $\triangle m'Am'' \sim \triangle m'BD''$, und daher $m'A:BD'' = m'm':m'B$, also $m'A.m'B = m'm'.BD'' = m'm' \cdot \frac{1}{2}(a+b+c)$ (§. 12.). Nun ist auch $m'm'.m'''C = D(a+b+c) = 2R(a+b+c)$ (§. 56.); folglich ist $m'A.m'B:2R(a+b+c) = m'm' \cdot \frac{1}{2}(a+b+c):m'm'.m'''C$; aber $m'm' \cdot \frac{1}{2}(a+b+c):m'm'.m'''C = \frac{1}{2}(a+b+c):m'''C$; also auch $m'A.m'B:2R(a+b+c) = \frac{1}{2}(a+b+c):m'''C$, und daher $m'A.m'B.m'''C = R(a+b+c)^2$.

Zus. 1. Da $m'A, m'B, m'''C$ die Höhenperpendikel des größern Centralendreiecks sind, so läßt sich der Satz auch so ausdrücken: das Parallelepipedon aus den drei Höhenperpendikeln des größern Centralendreiecks ist gleich u. s. w., wodurch seine Analogie mit dem Vehrfaße des folgenden Paragraphe sich zeigt.

Zus. 2. Da $m'm'.m'm''.m'm''' = 2(a+b+c)D^2$ (§. 79.) $= 8(a+b+c)R^2$ ist, so ist $m'A.m'B.m'''C:m'm'.m'm''.m'm''' = R(a+b+c)^2:8(a+b+c)R^2 = a+b+c:8R = a+b+c:4D$.

Zus. 3. Da $rr'r'' = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 r = \frac{1}{4}r(a+b+c)^2$ ist (§. 75. Zus. 1.), so ist $m'A.m'B.m'''C:rr'r'' = R(a+b+c)^2:\frac{1}{4}r(a+b+c)^2 = R:\frac{1}{4}r = 4R:r = 2D:r$.

Zus. 4. Da auch $mm'.mm''.mm''' : mA.mB.mC = 4R:r$ ist (§. 83. Zus. 2.), so ist $mm'.mm''.mm''' : mA.mB.mC = mA.m'B.m'''C : rr'r''$.

- Zus. 5. Da $abc = 4R \Delta$ ist (§. 72.), so ist auch $m'A . m''B . m'''C : abc = R(a+b+c)^2 : 4R \Delta = (a+b+c)^2 : 4 \Delta = (a+b+c)^2 : 4 \cdot \frac{1}{2} r(a+b+c)$ (§. 32.) $= a+b+c : 2r = a+b+c : d$.
- Zus. 6. Da auch $abc : mA . mB . mC = a+b+c : d$ ist (§. 85. Zus. 1.), so ist $m'A . m''B . m'''C : abc = abc : mA . mB . mC$ d. h. das Parallelepipedon aus den drei Seiten des Dreiecks ist die mittlere Proportionalfläche zwischen den Parallelepipedon aus den Höhenperpendikeln des größern Centralendreiecks und aus den von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises nach den Winkelspitzen des Dreiecks gezogenen geraden Linien.

§. 86.

Das Parallelepipedon aus den drei Höhenperpendikeln eines kleinern Centralendreiecks ist gleich einem Parallelepipedon, dessen Basis das Quadrat des Ueberschusses der zwei Dreiecksseiten, welche zu den dem Centralendreiecke angehörigen äußern Berührungskreisen gehören, über die dritte Seite, und dessen Höhe der Halbmesser des Winkelfreises ist.

Beweis. Da (Fig. 1.) $m'm'A = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$ (§. 17.) $= m'BD'$, und $m'Am' = m'D'B = R$ ist, so ist $\Delta m'm'A \oslash \Delta m'BD'$, also $m'A : BD' = m'm' : m'B$, und daher $m'A . m'B = m'm' . BD' = m'm' . CD$ (§. 4.) $= m'm' . \frac{1}{2}(a+b-c)$ (§. 15.); aber $m'm' . mC = D(a+b-c) = 2R(a+b-c)$ (§. 55.); folglich ist $m'A . m'B : 2R(a+b-c) = m'm' . \frac{1}{2}(a+b-c) : m'm' . mC$. Es ist aber $m'm' . \frac{1}{2}(a+b-c) : m'm' . mC = \frac{1}{2}(a+b-c) : mC$; also ist $m'A . m'B : 2R(a+b-c) = \frac{1}{2}(a+b-c) : mC$, und daher $m'A . m'B . mC = R(a+b-c)^2$.

Zus. 1. Da $mm' . mm'' . m'm'' = 2(a+b-c)D^2$ (§. 80.) $= 8(a+b-c)R^2$ ist, so ist $m'A . m'B . mC : mm' . mm'' . m'm'' = R(a+b-c)^2 : 8(a+b-c)R^2 = a+b-c : 8R = a+b-c : 4D$.

Zus. 2. Da $rr'r'' = \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2 r''' = \frac{1}{4}r'''(a+b-c)^2$ (§. 74. Zus. 1.) ist, so ist $m'A . m'B . mC : rr'r'' = R(a+b-c)^2 : \frac{1}{4}r'''(a+b-c)^2 = R : \frac{1}{4}r''' = 4R : r''' = 2D : r''$.

Zus. 3. Da auch $m''m . m'''m' . m''m'' : m''A . m'''B . m'''C = 4R : r'''$ ist (§. 84. Zus. 2.), so ist $m''m . m'''m' . m''m'' : m''A . m'''B . m'''C = m'A . m'B . mC : rr'r''$.

Zus. 4. Da $abc = 4R \Delta$ ist (§. 72.), so ist auch $m'A . m'B . mC : abc = R(a+b-c)^2 : 4R \Delta = (a+b-c)^2 : 4 \Delta = (a+b-c)^2 : 4 \cdot \frac{1}{2} r'''(a+b-c)$ (§. 33.) $= a+b-c : 2r''' = a+b-c : d''$.

Zus. 5. Da auch $abc : m''A . m'''B . m'''C = a+b-c : d''$ ist (§. 84. Zus. 1.), so ist $m'A . m'B . mC : abc = abc : m''A . m'''B . m'''C$, d. h. das Parallelepipedon aus den drei Seiten des Dreiecks ist die mittlere Proportionalfläche zwischen den Parallelepipedon aus den Höhenperpendikeln eines kleinern Centralendreiecks und aus den von dem Mittelpunkte des nicht zu diesem Centralendreiecke gehörigen äußern Berührungskreises nach den Winkelspitzen des Dreiecks gezogenen geraden Linien.

Vierter Abschnitt.

Von den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkten verschiedener gerader Linien und ihrer gegenseitigen Lage gegen einander und gegen die Mittelpunkte der Kreise.

§. 87.

Der von dem Mittelpunkte des Winkelfreises auf eine Seite des Dreiecks gefällte Perpendikel ist halb so groß als der obere Abschnitt des auf dieser Seite stehenden Höhenperpendikels.

Beweis. Es sey (Fig. 3.) MN der auf BC von dem Mittelpunkte M des Winkelfreises gefällte Perpendikel, AG Höhenperpendikel auf BC, L der gemeinschaftliche Durchschnitt aller Höhenperpendikel, und also AL der obere Abschnitt des Höhenperpendikels AG. Fälle von M den Perpendikel MP auf AB und ziehe NP. Da BC und AB Chorden des Winkelfreises sind, so werden sie durch die Perpendikel MN und MP halbiert; folglich ist $NP \parallel AC$ und $NP = \frac{1}{2} AC$. Da nun auch $MN \parallel AL$ und $MP \parallel CL$ ist, so sind die Seiten des Dreiecks MNP parallel den Seiten des Dreiecks ALC, also ist $\triangle MNP \sim \triangle ALC$, und daher $MN:AL = NP:AC$; aber nach dem Obigen ist $NP = \frac{1}{2} AC$; folglich ist auch $MN = \frac{1}{2} AL$.

§. 88.

Das Quadrat des Durchmessers des Winkelfreises ist gleich der Summe der Quadrate einer Seite des Dreiecks und des obern Abschnitts von dem auf dieser Seite stehenden Höhenperpendikel.

Beweis. Ziehe MC (Fig. 3.), so ist $MC^2 = NC^2 + MN^2$, d. h. $R^2 = (\frac{1}{2} BC)^2 + (\frac{1}{2} AL)^2$ (§. 87.); folglich $D^2 = BC^2 + AL^2$.

§. 89.

Verlängert man den Höhenperpendikel einer Seite bis zur Peripherie des Winkelfreises, so ist diese Verlängerung gleich dem untern Abschnitte des Höhenperpendikels.

Beweis. Es sey (Fig. 5.) AG nach Q verlängert. Da $AGB = R$ ist, so ist $ABG + BAG = R$; Ebenso da $CKB = R$ ist, so ist $KBC + KCB = R$; folglich ist $ABG + BAG = KBC + KCB$; aber $ABG = KBC$; folglich ist $BAG = KCB$. Nun ist weiter $AGB = LGC = R$; daher ist $\triangle ABG \sim \triangle LGC$, und daher $AG:CG = BG:LG$, also $AG.LG = CG.BG$. Da ferner die Chorden AQ und BC sich in G schneiden, so ist $AG.GQ = CG.BG$; also ist $AG.LG = AG.GQ$, und daher $LG = GQ$.

§. 90.

Das Rechteck aus dem von dem Mittelpunkte des Winkelfreises auf eine Seite des Dreiecks gefällten Perpendikel und aus dem untern Abschnitte des zu eben dieser Seite gehörigen Höhenperpendikels ist gleich dem Rechtecke aus den entsprechenden Linien für eine zweite Dreiecksseite.

Beweis. Da (Fig. 3.) $AL \cdot LQ = BL \cdot LR$, und $AL = 2MN$, $LQ = 2LG$, $BL = 2MO$, $LR = 2LH$ ist (§. 87. 89.), so ist $2MN \cdot 2LG = 2MO \cdot 2LH$, d. h. $4MN \cdot LG = 4MO \cdot LH$; also ist auch $MN \cdot LG = MO \cdot LH$.

§. 91.

Der Mittelpunkt des Winkelskreises, der Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel und der Schwerpunkt liegen in einer geraden Linie, und zwar ist der Schwerpunkt von dem Durchschnittspunkte der Höhenperpendikel doppelt so weit entfernt als von dem Mittelpunkte des Winkelskreises.

Beweis. Es sey (Fig. 3.) ML gezogen; ziehe AN , so liegt der Schwerpunkt des Dreiecks auf AN , weil BC in N halbiert ist (§. Einleitung Nr. 5.). Es werde nun ML durch AN in S geschnitten, so ist $ASL = MSN$, und da $AL \parallel MN$ ist, auch $LAS = SNM$, folglich $\triangle ALS \sim \triangle SMN$, und daher $AL : MN = AS : SN = LS : SM$. Aber $AL = 2MN$ (§. 87.), folglich auch $AS = 2SN$, also ist S der Schwerpunkt, da dieser auf AN so liegt, daß seine Entfernung von A das Doppelte seiner Entfernung von N ist (§. Einleit. Nr. 5.); ebenso ist $SL = 2SM$; also liegen die drei genannten Punkte in einer geraden Linie und SL ist das Doppelte von SM .

Zus. 1. Alle Sätze von §. 87—91 gelten ebenso von dem rechtwinkligen und stumpfwinkligen Dreiecke; nur fallen beim erstern die Punkte L, H, K auf A , wenn der rechte Winkel in A liegt; ist aber der Winkel A stumpf, so liegen die Punkte L, H, K , also auch die Linien LHR und LK außerhalb des Kreises.

Zus. 2. Die Zahl der Lehrsätze über die Abschnitte der Höhenperpendikel läßt sich noch mit Hülfe der Paragraphen 26—31. unter Berücksichtigung der im Zusätze zu §. 31. gemachten Bemerkungen über das stumpfwinklige Dreieck vermehren, da $AL = 2p'$, $BL = 2p''$ und $CL = 2p'''$ ist. Namentlich ist z. B. (nach §. 51.) $AL + BL + CL = D + d$ für das spitzwinklige Dreieck und $BL + CL - AL = D + d$ für das bei A stumpfwinklige Dreieck u. s. w.

§. 92.

Wenn man von zwei Winkelspitzen des Dreiecks nach den äußern Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten gerade Linien zieht, so schneiden sich diese Linien so, daß sich der obere Abschnitt einer jeden zu ihrem untern Abschnitte verhält, wie die Seite, nach welcher sie gezogen ist, zu einer der beiden innern Tangenten, welche von dem gegenüberliegenden Winkel ausgehen.

Beweis. Es seyen (Fig. 4.) in $\triangle ABC$ die innern Berührungspunkte D, E, F , die äußern D', E'', F''' und es seyen AD' und BE'' gezogen, die sich in H schneiden. Durch C ziehe $CG \parallel AD'$, bis es die Verlängerung von BE'' in G trifft, so ist $\triangle AHE'' \sim \triangle CGE''$ und daher $AH : CG = AE'' : CE'' = AE'' : AE$ (§. 4.). Ebenso ist $\triangle BCG \sim \triangle BD'H$ und daher $CG : HD' = BC : BD' = BC : AE''$ (§. 5.). Da nun

$$AH : CG = AE'' : AE \text{ und}$$

$$CG : HD' = BC : AE'' \text{ ist, so ist auch}$$

$$\frac{AH : HD'}{AH : HD'} = \frac{BC : AE}{BC : AE}.$$

Zus. Daher ist $AH + HD' : AH = BC + AE : BC$. Aber $BC + AE = BC + CE''$ (§. 4.) $= BC + CD''$ (s. Fig. 1.) $= BD'' = \frac{1}{2}(a + b + c)$ (§. 12.); folglich ist $AD' : AH = \frac{1}{2}(a + b + c) : a = a + b + c : 2a$. Ebenso ist $AD' : HD' = \frac{1}{2}(a + b + c) : AE = \frac{1}{2}(a + b + c) : \frac{1}{2}(b + c - a) = a + b + c : b + c - a$.

§. 93.

Die drei geraden Linien, welche von den Winkelspitzen des Dreiecks nach den äußern Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten gezogen werden, schneiden sich in einem einzigen Punkte.

Beweis. Es werde (Fig. 4.) AD' durch BE'' in H geschnitten, so ist $AD' : AH = a + b + c : 2a$ (§. 92. Zus.); es werde nun ebenso AD' durch CF''' in einem Punkte geschnitten, der vorläufig mit X bezeichnet werden soll, so ist ebenso $AD' : AX = a + b + c : 2a$ (§. 92. Zus.); folglich ist $AD' : AH = AD' : AX$; der Punkt X fällt also mit dem Punkte H zusammen, und CF''' geht auch durch den Schnidungspunkt H der Linien AD' und BE'' .

Zuf. Da $BC + CE'' = BC + CD''$ (Fig. 1.) $= \frac{1}{2}(a + b + c)$, also ebenso $BA + AE'' = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ist, so wird durch BE'' der Umfang des Dreiecks halbiert; dasselbe findet Statt bei den Linien AD' , CF''' . Der obige Lehrsatz läßt sich daher auch so ausdrücken: die von den Winkelspitzen nach den auf den gegenüberliegenden Seiten liegenden Halbierungspunkten des Umfangs vom Dreiecke gezogenen geraden Linien schneiden sich in einem einzigen Punkte.

§. 94.

Die gerade Linie, welche von einer Winkelspitze nach dem äußern Berührungspunkte der gegenüber liegenden Seite gezogen wird, ist parallel der geraden Linie, welche den Mittelpunkt des innern Berührungskreises mit dem Halbierungspunkte eben dieser Seite verbindet.

Beweis. Es sey (Fig. 4.) BC in K halbiert und mK gezogen; ziehe ferner mA , mB , mC , mD , mD' , und AK . Da $BD = CD'$ (§. 4.) und $BK = CK$ ist, so ist $D'K = DK$ und daher $\triangle mKD' = \triangle mKD$, also $\triangle mKI' = \frac{1}{2} \triangle mDD'$; aber $DI' = AC - AB$ (§. 8.), und die auf den Grundlinien DD' , AC , AB stehenden Dreiecke mDD' , mAC , mAB haben gleiche Höhe $= r$; folglich ist $\triangle mDD' = \triangle mAC - \triangle mAB$, und daher $\triangle mKD' = \frac{1}{2}(\triangle mAC - \triangle mAB)$. Ferner ist $\triangle AKC = \triangle AKB$; aber $\triangle AKC = \triangle mKC - \triangle mAK = \triangle mAC + \triangle mKC - \triangle mAK$, und $\triangle AKB = \triangle mAB + \triangle mKB + \triangle mAK$; folglich ist $\triangle mAC + \triangle mKC - \triangle mAK = \triangle mAB + \triangle mKB + \triangle mAK$, und daher, weil $KC = KB$, folglich $\triangle mKC = \triangle mKB$ ist, auch $\triangle mAC - \triangle mAK = \triangle mAB + \triangle mAK$; also $\triangle mAC = \triangle mAB + 2 \triangle mAK$; daher $2 \triangle mAK = \triangle mAC - \triangle mAB$, und folglich $\triangle mAK = \frac{1}{2}(\triangle mAC - \triangle mAB)$. Nach dem Obigen aber ist auch $\triangle mKD' = \frac{1}{2}(\triangle mAC - \triangle mAB)$; folglich ist $\triangle mKI' = \triangle mAK$. Da nun beide Dreiecke die gemeinschaftliche Grundlinie mK haben, so liegen sie zwischen einerlei Parallelen und es ist daher $AD' \parallel mK$.

§. 95.

Die gerade Linie, welche von einer Winkelspitze nach dem äußern Berührungspunkte der gegenüberliegenden Seite gezogen ist, schneidet die Verlängerung des an den innern Berührungspunkt dieser Seite gezogenen Halbmessers des innern Berührungskreises auf der Peripherie dieses Kreises.

Beweis. Es schneide (Fig. 4.) AD' die Verlängerung des Halbmessers mD in N , so ist, weil $mK \parallel ND'$ ist (§. 94.) $DK : KD' = mD : mN$. Nun ist aber $DK = KD'$; folglich ist auch $mD = mN$, und daher, weil mD Halbmesser des innern Berührungskreises ist, auch mN Halbmesser dieses Kreises; N liegt daher auf der Peripherie desselben.

§. 96.

Der obere Abschnitt der von einer Winkelspitze nach dem äußern Berührungspunkte der gegenüberliegenden Seite gezogenen geraden Linie ist doppelt so groß als die von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises nach dem Halbierungspunkte ebendieser Seite gezogene gerade Linie.

Beweis. Es sey H (Fig. 4.) der Durchschnittspunkt der drei von den Winkelspitzen an die äußern Berührungspunkte gezogenen Linien AD' , BE'' , CF''' , also AH und BH die obern Abschnitte der Linien AD' , BE'' , ferner seyen K und L die Halbierungspunkte der Seiten BC und AC ; ziehe mK , mL , KL . Da BC und AC in K und L halbiert sind, so ist $KL \parallel AB$ und $KL = \frac{1}{2} AB$; ferner ist $mK \parallel AH$ und $mL \parallel BH$ (§. 94.); folglich sind die Seiten des Dreiecks mKL parallel den Seiten des Dreiecks ABH ; also ist $\triangle mKL \sim \triangle ABH$, und daher ist $KL : AB = mK : AH = mL : BH$. Nach dem Obigen aber ist $AB = 2KL$; folglich ist auch $AH = 2mK$ und $BH = 2mL$.

§. 97.

Der Mittelpunkt des innern Berührungskreises, der Durchschnittspunkt der drei von den Winkelspitzen an die äußern Berührungspunkte der gegenüberliegenden Seiten gezogenen geraden Linien und der Schwerpunkt des Dreiecks liegen in einer geraden Linie, und zwar ist der Schwerpunkt von dem genannten Durchschnittspunkte doppelt so weit entfernt, als von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises.

Beweis. Es sey (Fig. 4.) H der genannte Durchschnittspunkt, und m der genannte Mittelpunkt; ziehe Hm und AK, die sich in S schneiden, so liegt der Schwerpunkt des Dreiecks auf AK (§. Einleit. Nr. 5.). Da nun $mK \parallel AD'$ ist, so ist $KmH = mHA$ und $mKA = HAK$; folglich ist $\triangle mSK \sim \triangle ASH$, und daher $mK:AH = SK:AS$; aber $AH = 2mK$ (§. 96.), also auch $AS = 2SK$. Folglich ist S der Schwerpunkt des Dreiecks, (§. Einleit. Nr. 5.). Ferner ist wegen der Ähnlichkeit der genannten Dreiecke auch $mK:AH = mS:SH$, und daher auch $SH = 2mS$, also S von H doppelt so weit entfernt als von m.

Zus. Da auch der Mittelpunkt des Winkelskreises, der Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel und der Schwerpunkt in einer geraden Linie liegen, und der Schwerpunkt von diesem Durchschnittspunkte ebenfalls doppelt so weit entfernt ist, als von dem Mittelpunkte des Winkelskreises (§. 94.), so läßt sich leicht vermittelt der Ähnlichkeit der Dreiecke zeigen, daß die Entfernung des Durchschnittspunktes der Höhenperpendikel von dem Durchschnittspunkte der von den Winkelspitzen nach den äußern Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten gezogenen geraden Linien doppelt so groß ist, als die Entfernung des Mittelpunktes des Winkelskreises von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises, und daß die Verbindungslinie des ersten Paares von Punkten der Verbindungslinie des zweiten Paares parallel ist.

§. 98.

Wenn man von zwei Winkelspitzen des Dreiecks nach den innern Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten gerade Linien zieht, so schneiden sich diese Linien so, daß der untere Abschnitt einer jeden zu ihrem obern Abschnitte sich verhält, wie das Rechteck aus den innern Tangenten der Seite, nach welcher die Linie gezogen ist, zu der Summe der Rechtecke aus den innern Tangenten der beiden andern Seiten, oder wie der Halbmesser des zu der erstgenannten Seite gehörigen äußern Berührungskreises zu der Summe der Halbmesser der zu den beiden andern Seiten gehörigen äußern Berührungskreise.

Beweis. Es seyen (Fig. 5.) in dem Dreiecke ABC, dessen innere Berührungspunkte D, E, F, die äußern D', E', F''' sind, AD und BE gezogen, die sich in G schneiden. Durch C ziehe $CH \parallel BE$, bis es die Verlängerung von AD in H trifft, so ist $\triangle AGE \sim \triangle ACH$, und daher $GE:CH = AE:AC$; ebenso ist $\triangle CDH \sim \triangle BDG$ und daher $CH:BG = CD:BD$. Da nun

$$GE:CH = AE:AC, \text{ und}$$

$$CH:BG = CD:BD \text{ ist, so ist auch}$$

$$GE:BG = AE.CD:AC.BD = AE.CD:(AE+CE).BD$$

$$= AE.CD:AE.BD + CE.BD = AE.CE:AF.BF + CD.BD.$$

Da ferner $AE.CE = rr''$, $AF.BF = rr'''$ und $CD.BD = rr'$ ist (§. 45.), so ist $AE.CE:AF.BF + CD.BD = rr':rr''' + rr' = rr':r(r' + r''') = r':r' + r'''$; folglich ist $GE:BG = r':r' + r'''$.

Zus. Daher ist $GE:GE + BG = r':r' + r'' + r'''$, d. h. $GE:BE = r':r' + r'' + r'''$. Ebenso ist $BG:BE = r':r' + r'' + r'''$.

§. 99.

Die drei geraden Linien, welche von den Winkelspitzen des Dreiecks nach den innern Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten gezogen werden, schneiden sich in einem einzigen Punkte.

Beweis. Es werde (Fig. 5.) BE durch AD in G geschnitten, so ist $GE:BE = r':r' + r'' + r'''$ (§. 98. Zus.). Es werde nun ebenso BE durch CF in einem Punkte geschnitten, der vorläufig mit X bezeichnet werden soll, so ist ebenso $XE:BE = r':r' + r'' + r'''$ (§. 98. Zus.); folglich ist $GE:BE = XE:BE$, also $GE = XE$; der Punkt X fällt also mit dem Punkte G zusammen, und CF geht auch durch den Schnidungspunkt G der Linien AD und BE.

§. 100.

Die gerade Linie, welche von einer Winkelspitze nach dem innern Berührungspunkte der gegenüberliegenden Seite gezogen wird, ist parallel der geraden Linie, welche den Mittelpunkt des zu dieser Seite gehörigen äußern Berührungskreises mit dem Halbmessungspunkte eben dieser Seite verbindet.

Beweis. Es sey (Fig. 5.) AB in K halbiert, und $m''K$ gezogen; ziehe ferner $m''A$, $m''B$, $m''C$, $m''F''$, $m''F$ und CK . Nun ist $AF = BF''$ (§. 4.) und $AK = BK$, also $FK = F''K$, und daher $\triangle m''FK = \triangle m''F''K$, also $\triangle m''FK = \frac{1}{2} \triangle m''FF''$. Nun ist aber $FF'' = BC - AC$ (§. 8.) und die auf den Grundlinien FF'' , BC , AC stehenden Dreiecke $m''FF''$, $m''BC$, $m''AC$ haben gleiche Höhe $= r''$; folglich ist $\triangle m''FF'' = \triangle m''BC - \triangle m''AC$, und daher $\triangle m''FK = \frac{1}{2} (\triangle m''BC - \triangle m''AC)$. Ferner ist $\triangle ACK = \triangle BCK$; aber $\triangle ACK = \triangle ACKm'' - \triangle m''AK = \triangle m''AC + \triangle m''KC - \triangle m''AK$, und $\triangle BCK = \triangle m''BC - \triangle m''KC - \triangle m''KB$; folglich ist $\triangle m''AC + \triangle m''KC - \triangle m''AK = \triangle m''BC - \triangle m''KC - \triangle m''KB$, und daher, weil $AK = KB$, folglich $\triangle m''AK = \triangle m''KB$ ist, auch $\triangle m''AC + \triangle m''KC = \triangle m''BC - \triangle m''KC$. Folglich ist $\triangle m''AC + 2 \triangle m''KC = \triangle m''BC$, also $2 \triangle m''KC = \triangle m''BC - \triangle m''AC$, und daher $\triangle m''KC = \frac{1}{2} (\triangle m''BC - \triangle m''AC)$. Nach dem Obigen ist aber auch $\triangle m''FK = \frac{1}{2} (\triangle m''BC - \triangle m''AC)$; folglich ist $\triangle m''KC = \triangle m''FK$. Da nun beide Dreiecke die gemeinschaftliche Grundlinie $m''K$ haben, so liegen sie zwischen einerlei Parallelen, und es ist daher $CF \parallel m''K$.

§. 101.

Die Verlängerung der geraden Linie, welche von einer Winkelspitze nach dem innern Berührungspunkte der gegenüberliegenden Seite gezogen ist, und die Verlängerung des an den äußern Berührungspunkt dieser Seite von dem Mittelpunkte des zu ihr gehörigen äußern Berührungskreises gezogenen Halbmessers schneiden einander auf der Peripherie des genannten Berührungskreises.

Beweis. Es schneiden (Fig. 5.) die verlängerte Linie CF und der verlängerte Halbmesser $m''F''$ einander in L , so ist, weil $m''K \parallel CL$ ist (§. 100.), $m''F'' : m''L = F''K : KF$. Nun ist $F''K = KF$, folglich auch $m''F'' = m''L$ und daher, weil $m''F''$ Halbmesser ist, auch $m''L$ Halbmesser; L liegt also auf der Kreisperipherie.

§. 102.

Wenn man von den Mittelpunkten zweier äußerer Berührungskreise an die Halbirungspunkte der ihnen zugehörigen Seiten gerade Linien zieht, und diese bis zu ihrem Durchschnittpunkte verlängert, so ist die Entfernung dieses Durchschnittpunktes von dem Halbirungspunkte einer Seite halb so groß als der obere Abschnitt der an den innern Berührungspunkt eben dieser Seite von dem gegenüberliegenden Winkel gezogenen geraden Linie.

Beweis. Es seyen (Fig. 5.) die Halbirungspunkte der Seiten K , N , O , und es seyen $m''N$ und $m''O$ gezogen, die sich verlängert in P schneiden. Ferner schneiden sich die an die innern Berührungspunkte der Seiten BC und AC gezogenen geraden Linien in G , und AG und BG seyen die obern Abschnitte dieser Linien. Ziehe NO , so ist $NO = \frac{1}{2} AB$ und $NO \parallel AB$, weil BC und AC in N und O halbiert sind. Ferner ist $NP \parallel AG$ und $PO \parallel BG$ (§. 100.), also sind die Seiten des Dreiecks NOP parallel den Seiten des Dreiecks ABG ; folglich ist $\triangle NOP \sim \triangle ABG$ und daher $NO : AB = NP : AG = PO : BG$. Da nun $NO = \frac{1}{2} AB$ ist, so ist auch $NP = \frac{1}{2} AG$ und $PO = \frac{1}{2} BG$.

§. 103.

Die drei von den Mittelpunkten der äußern Berührungskreise an die Halbirungspunkte der zugehörigen Seiten gezogenen geraden Linien schneiden sich verlängert in einem einzigen Punkte.

Beweis. Es schneiden sich (Fig. 5.) $m''N$ und $m''O$ verlängert in P , so ist $NP = \frac{1}{2} AG$. Es schneiden sich nun ebenso $m''K$ und $m''N$ in einem Punkte, der vorläufig mit X bezeichnet werden soll, so ist $XN = \frac{1}{2} AG$, folglich ist $XN = PN$; der Punkt X fällt also mit dem Punkte P zusammen, und $m''K$ geht verlängert auch durch den Schnidungspunkt P der Linien $m''N$ und $m''O$.

§. 104.

Der Punkt, in welchem sich die drei von den Winkelspitzen nach den innern Berührungspunkten der

gegenüberliegenden Seiten gezogenen geraden Linien schneiden, und der Punkt, in welchem sich die Verlängerungen der drei von den Mittelpunkten der äußern Berührungskreise an die Halbierungspunkte der zugehörigen Seiten gezogenen geraden Linien schneiden, liegen mit dem Schwerpunkte des Dreiecks in gerader Linie, und zwar ist der Schwerpunkt von dem erstgenannten Punkte doppelt so weit entfernt als vom letztgenannten.

Beweis. Der erstere Durchschnittspunkt (Fig. 5.) sey G, der letztere P, so ziehe PG; an den Halbierungspunkt K der Seite AB sey CK gezogen, wodurch PG in S geschnitten werde, so liegt der Schwerpunkt auf CK (s. Einleit. Nr. 5.). Nun ist $KSP = CSG$, und $SPK = SGQ$ (§. 100.), folglich ist $\triangle SPK \sim \triangle SCG$, also $KP:CG = KS:CS = PS:GS$. Es ist aber $CG = 2KP$ (§. 102.), folglich auch $CS = 2KS$ und $GS = 2PS$; also ist S der Schwerpunkt des Dreiecks (s. Einleit. Nr. 5.), und seine Entfernung von G doppelt so groß als seine Entfernung von P.

§. 105.

Die gerade Linie, welche von einer Winkelspitze nach einem äußern Berührungspunkte der Verlängerung der gegenüberliegenden Seite gezogen ist, ist parallel der geraden Linie, welche den Halbierungspunkt ebendieser Seite mit dem Mittelpunkte desjenigen äußern Berührungskreises verbindet, auf dessen Peripherie der andere äußere Berührungspunkt der Verlängerung der genannten Seite liegt.

Beweis. Es sey (Fig. 5.) CF' gezogen und an den Halbierungspunkt K der Seite AB von dem Mittelpunkte m'' des äußern Berührungskreises, der AB in F'' berührt, die gerade Linie $m''K$; ziehe, $m''A$, $m''B$, $m''C$, $m''F'$, $m''F''$ und CK. Da $BF' = AF''$ (§. 6.) und $BK = AK$ ist, so ist $F'K = F''K$, folglich $\triangle m''KF' = \triangle m''KF''$, also $\triangle m''KF' = \frac{1}{2} \triangle m''F'F''$. Da nun aber $F'F'' = AC + BC$ ist (§. 10.) und die auf den Grundlinien $F'F''$, AC, BC errichteten Dreiecke $m''F'F''$, $m''AC$, $m''BC$ gleiche Höhe $= r''$ haben, so ist $\triangle m''F'F'' = \triangle m''AC + \triangle m''BC$, also auch $\triangle m''KF' = \frac{1}{2} (\triangle m''AC + \triangle m''BC)$. Ferner ist $\triangle ACK = \triangle BCK$; aber $\triangle ACK = m''CKA - \triangle m''AC = \triangle m''KA + \triangle m''KC - \triangle m''AC$, und $\triangle BCK = m''CBK - \triangle m''KC = \triangle m''KB + \triangle m''BC - \triangle m''KC$; folglich ist $\triangle m''KA + \triangle m''KC - \triangle m''AC = \triangle m''KB + \triangle m''BC - \triangle m''KC$, und da $AK = BK$, folglich $\triangle m''KA = \triangle m''KB$ ist, so ist auch $\triangle m''KC - \triangle m''AC = \triangle m''BC - \triangle m''KC$, und daher $2 \triangle m''KC - \triangle m''AC = \triangle m''BC$, also $2 \triangle m''KC = \triangle m''AC + \triangle m''BC$, und folglich $\triangle m''KC = \frac{1}{2} (\triangle m''AC + \triangle m''BC)$. Nun ist nach dem Obigen auch $\triangle m''KF' = \frac{1}{2} (\triangle m''AC + \triangle m''BC)$; folglich ist $\triangle m''KF' = \triangle m''KC$. Da nun beide Dreiecke die gemeinschaftliche Grundlinie $m''K$ haben, so liegen sie zwischen einerlei Parallellinien, und es ist daher $F'C \parallel m''K$.

§. 106.

Die gerade Linie, welche von einer Winkelspitze nach einem äußern Berührungspunkte der Verlängerung der gegenüberliegenden Seite gezogen ist, schneidet die Verlängerung des Halbmessers, der an den andern Berührungspunkt der Verlängerung dieser Seite von dem Mittelpunkte des durch diesen Punkt gehenden äußern Berührungskreises gezogen ist, auf der Peripherie des genannten Kreises.

Beweis. Verlängere (Fig. 5.) FC' und $F''m''$, bis sie sich in Q schneiden, so ist $F''K = KF'$, und $m''K \parallel QF'$ (§. 105.), folglich ist $F''m':m''Q = F''K:KF'$, und daher auch $m''Q = F''m'$. Nun ist aber $F''m'$ Halbmesser des genannten äußern Berührungskreises, folglich ist auch $m''Q$ Halbmesser desselben, und Q liegt also auf der Peripherie.

§. 107.

Die gerade Linie, welche von einer Winkelspitze an den innern Berührungspunkt der gegenüberliegenden Seite gezogen ist, und die gerade Linie, welche von einer zweiten Winkelspitze nach dem an dem erstgenannten Winkel liegenden äußern Berührungspunkte der Verlängerung der gegenüberliegenden Seite gezogen ist, schneiden sich verlängert so, daß der obere Abschnitt einer jeden der beiden Linien doppelt so groß ist, als die Entfernung des Halbierungspunktes der Seite, nach welcher die Linie gezogen ist, von dem Mittel-

punkte desjenigen äußern Berührungskreises, welcher zu der Seite gehört, auf welcher der genannte innere Berührungspunkt liegt.

Beweis. Es seyen (Fig. 5.) BE und CF' gezogen, die sich in R schneiden, so sind BR und CR die obern Abschnitte der Linien BE, CF'. Es seyen ferner an die Halbierungspunkte O und K der Seiten AC und AB die Linien m'O und m''K gezogen, so ist m'O || RE (§. 100.) und m''K || RC (§. 105.). Nun ist, wenn KO gezogen wird, auch KO || BC und $KO = \frac{1}{2}BC$, weil AB und AC in K und O halbiert sind, folglich sind die Seiten des Dreiecks m'KO parallel den Seiten des Dreiecks RBC, also ist $\triangle m'KO \sim \triangle RBC$, und daher $m'O:RB = m''K:RC = KO:BC$. Nun ist aber nach dem Obigen $BC = 2KO$; folglich ist auch $RB = 2m'O$ und $RC = 2m''K$.

§. 108.

Wenn man von zwei Winkelspitzen nach den an der dritten Winkelspitze liegenden äußern Berührungspunkten der Verlängerungen der gegenüberliegenden Seiten zwei gerade Linien zieht, und ebenso von dieser dritten Winkelspitze an den innern Berührungspunkt der gegenüberliegenden Seite eine dritte gerade Linie zieht, so schneiden sich diese drei geraden Linien in einem einzigen Punkte.

Beweis. Es seyen (Fig. 5.) CF' und BE gezogen, die sich verlängert in R schneiden, so ist $RB = 2m'O$ (§. 107.). Es sey nun weiter AD''' gezogen, und so verlängert, daß dadurch die Verlängerung von BE in einem Punkte geschnitten werde, der vorläufig mit X bezeichnet werden soll, so ist auch $XB = 2m'O$ (§. 107.); folglich ist $XB = RB$; der Punkt X fällt also mit dem Punkte R zusammen, und die Verlängerung von AD''' geht auch durch den Schnidungspunkt R der Verlängerungen der Linien CF' und BE.

§. 109.

Der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der von zwei Winkelspitzen nach den an der dritten Winkelspitze liegenden äußern Berührungspunkten der Verlängerungen der gegenüberliegenden Seiten und von der dritten Winkelspitze nach dem innern Berührungspunkte der gegenüberliegenden Seite gezogenen geraden Linien und der Mittelpunkt des zu der Seite, auf welcher der innere Berührungspunkt liegt, gehörigen äußern Berührungskreises liegen mit dem Schwerpunkte des Dreiecks in einer geraden Linie, und zwar ist der Schwerpunkt von dem genannten Durchschnittspunkte doppelt so weit entfernt, als von dem genannten Mittelpunkte.

Beweis. Es schneiden sich (Fig. 5.) die Linien AD', CF', BE verlängert in R, so ziehe m'R, und an den Halbierungspunkt K der Seite AB die Linie CK, wodurch m'R in S geschnitten werde, so liegt der Schwerpunkt auf CK (§. Einleit. Nr. 5.). Nun ist $m''K || CR$ (§. 105.); folglich ist $m''KS = SCR$, und $Km'S = SRC$; also ist $\triangle m''KS \sim \triangle SCR$ und daher $m'S:RS = SK:SC = m''K:CR$; aber $CR = 2m''K$ (§. 107.), also $SC = 2SK$ und $RS = 2m'S$. Folglich ist S der Schwerpunkt des Dreiecks (§. Einleit. Nr. 5.), und S doppelt so weit von R entfernt als von m'.

Zus. 1. Es hätte sich auch hier in den §§. 105—109. analog dem Früheren (§. §§. 92. 98.) beweisen lassen, daß $ER:EB = r':r$, $CF':RF' = r':r$ und $AD':RD' = r'':r'$ ist, woraus der gemeinschaftliche Durchschnitt der drei Linien CF', AD', BE sich analog den §§. 93. 99. ergeben hätte.

Zus. 2. Die Durchschnittspunkte, wie sie der Ordnung nach 1) in der Einleitung Nr. 4. 2) in §. 93. 3) in §. 99. und 4) in §. 108. genannt sind, bilden eine Gruppe von Punkten, welcher eine zweite Gruppe, nemlich 1) der Mittelpunkt des Winkelskreises, 2) der Mittelpunkt des innern Berührungskreises, 3) der in §. 105. genannte Durchschnittspunkt und 4) der Mittelpunkt des §. 109. bezeichneten äußern Berührungskreises so entsprechen, daß die Verbindungslinie von je zwei Punkten der ersten Gruppe parallel ist der Verbindungslinie der zwei entsprechenden (d. h. mit der nemlichen Nummer bezeichneten) Punkte der zweiten Gruppe, und daß die Entfernung von je zwei Punkten der ersten Gruppe doppelt so groß ist, als die Entfernung von je zwei entsprechenden Punkten der zweiten.

Fünfter Abschnitt.

Fortsetzung des vorigen Kapitels in besonderer Beziehung auf die Centralend-
dreiecke, nebst Folgerungen daraus für die Eigenschaften dieser Centralen-
dreiecke und der Berührungsdreiecke.

§. 110.

Wenn man von den drei Mittelpunkten der äußern Berührungskreise auf die zugehörigen Seiten Perpendikel fällt, und dieselben, wenn es nöthig ist, verlängert, so schneiden sich dieselben in dem Mittelpunkte des zu dem größern Centralenddreiecke gehörigen Winkelfreises.

Beweis. Errichte (Fig. 6.) in den Halbierungspunkten G, H, K der Seiten $m'm'''$, $m'm''$, $m'm'$ des größern Centralenddreiecks $m'm'm'''$ Perpendikel, so schneiden sich diese in einem einzigen Punkte M' , welches der Mittelpunkt des zu $\triangle m'm'm'''$ gehörigen Winkelfreises ist (s. Einleit. Nr. 1.); zieht man daher $M'm'$, $M'm''$, $M'm'''$, so ist $M'm' = M'm'' = M'm'''$, und M' liegt innerhalb des Centralenddreiecks $m'm'm'''$, weil dieses spitzwinklig ist (§. 17. Zus. 1.). Nun ist, wenn man sich den Winkelfreis des Centralenddreiecks $m'm'm'''$ beschrieben denkt, $m'M'm''$ Centriwinkel, der mit dem Peripheriewinkel $m'm'''m''$ auf dem nemlichen Bogen steht, also ist $m'M'm'' = 2m'm'''m''$; aber $m'm'''m'' = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$ (§. 17.), folglich $m'M'm'' = \alpha + \beta$ und daher, weil $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ ist, $M'm'm'' + M'm'm'' = \gamma$. Nun ist aber $M'm' = M'm''$, also $M'm'm'' = M'm'm'$; folglich ist $M'm'm'' = \frac{1}{2}\gamma$ und $M'm'm' = \frac{1}{2}\gamma$; aber es ist auch $m'm'D = \frac{1}{2}\gamma$ und $m'm'E = \frac{1}{2}\gamma$ (§. 18.), folglich, da M' innerhalb des Centralenddreiecks $m'm'm'''$ liegt, so fällt $m'D$ mit $m'M'$ zusammen, und geht daher durch M' . Ebenso fällt $m'E$ mit $m'M'$ zusammen und geht ebenfalls durch M' . Auf dieselbe Art wird gezeigt, daß auch $m''F$ durch M' gehen muß. $M'D$, $m'E$, $m''F$ schneiden sich also in dem Mittelpunkte M' des Winkelfreises des größern Centralenddreiecks.

§. 111.

Der Halbmesser des zu dem größern Centralenddreiecke gehörigen Winkelfreises ist doppelt so groß als der Halbmesser des zu dem Urdreiecke gehörigen Winkelfreises.

Beweis. Da (Fig. 6.) $m'm'''$, $m'm''$, $m'm'$ durch den Winkelfreis von $\triangle ABC$ in den Punkten G, H, K halbiert sind (§. 23.), so ist, wenn GH, GK, HK gezogen wird, $GH \parallel m'm''$, $GK \parallel m'm'''$ und $HK \parallel m'm'$, also sind alle Seiten des Dreiecks GHK parallel den Seiten des Dreiecks $m'm'm'''$, und daher $\triangle GHK \sim \triangle m'm'm'''$, also $HKG = m'm'm''$; aber $m'm'm'' = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$ (§. 17.), folglich auch $HKG = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$. Zieht man nun von dem Mittelpunkte M des Winkelfreises des Urdreiecks an G und H die Halbmesser MG, MH , so ist GMH Centriwinkel, der mit dem Peripheriewinkel GKH auf gleichem Bogen steht;

folglich ist $GMH = 2GKH$, also $GMH = \alpha + \beta$, und daher, da $GMH + MGH + MHG = 2R = \alpha + \beta + \gamma$ ist, $MGH + MHG = \gamma$; aber $MGH = MHG$, folglich $MGH = \frac{1}{2}\gamma$ und $MHG = \frac{1}{2}\gamma$. Nach dem Obigen aber ist auch $m'M'm'' = \alpha + \beta$, $M'm'm'' = \frac{1}{2}\gamma$ und $M'n'm'' = \frac{1}{2}\gamma$ (S. §. 110. Beweis); folglich ist $\triangle GHM \sim \triangle m'm'M'$, und daher $MG:M'm' = GH:m'm''$. Nun ist aber $m'm''$ in H und $m''m'''$ in G halbiert, folglich $m'm'' = 2GH$; also ist auch $M'm' = 2MG$. $M'm'$ aber ist Halbmesser des Winkelfreises des größern Centralendreiecks, und MG Halbmesser des Winkelfreises des Urdreiecks; folglich ist der erstere Halbmesser das Doppelte des letzteren.

Zus. Da der Halbmesser des Winkelfreises des Urdreiecks mit R bezeichnet wurde, so kann daher im Folgenden der Halbmesser des Winkelfreises des größern Centralendreiecks $= 2R = D$ gesetzt werden.

§. 112.

Der Mittelpunkt des Winkelfreises des größeren Centralendreiecks, der Mittelpunkt des Winkelfreises des Urdreiecks und der Mittelpunkt des innern Berührungskreises des letztern liegen in einer geraden Linie, und zwar ist der Mittelpunkt des Winkelfreises des Urdreiecks gleichweit von beiden andern Mittelpunkten entfernt.

Beweis. Ziehe (Fig. 6.) $M'm$, und fälle von M' eine Senkrechte auf $m'm''$, so trifft letztere die Seite $m'm'$ in ihrem Halbierungspunkte K, der zugleich auf der Peripherie des Winkelfreises des Urdreiecks liegt (§. 23.); ferner geht $m'''m$ verlängert durch C (§. 1.), und steht senkrecht auf $m'm''$ (§. 3.). Folglich ist $M'K \parallel mC$, und daher ist $M'KCm$ ein Paralleltrapez. Errichtet man daher im Halbierungspunkte L von KC einen Perpendikel LN, so ist dieser ebenfalls $\parallel M'K$ und $\parallel mC$, und geht daher auch durch den Halbierungspunkt von $M'm$. Dasselbe gilt, wenn auf BH im Halbierungspunkte ein Perpendikel errichtet wird. Beide Perpendikel gehen also durch den Halbierungspunkt von $M'm$, und schneiden sich in diesem Punkte. Da aber KC und BH auch Chorden des Winkelfreises des Urdreiecks sind, so gehen die beiden in den Halbierungspunkten von KC und BH errichteten Perpendikel auch durch den Mittelpunkt M dieses Winkelfreises, und schneiden sich in diesem Punkte. Da sich nun zwei gerade Linien nur in einem einzigen Punkte schneiden können, so fällt M mit dem Halbierungspunkte von $M'm$ zusammen; M' , M, m liegen also in gerader Linie und $MM' = Mm$.

Zus. 1. Wendet man §. 87. auf das Centralendreieck $m'm'm'''$ an, so ist $M'K = \frac{1}{2}mm'''$, weil m der Durchschnittspunkt der Höhen $m''C$, $m'B$, $m'A$ des Dreiecks $m'm'm'''$ ist (§. 3. Zus.). Ebenso ist $M'H = \frac{1}{2}mm''$ und $M'G = \frac{1}{2}mm'$.

Zus. 2. Bezeichnet man den Schwerpunkt des Centralendreiecks $m'm'm'''$ mit S' , so liegen auch M' , S' , m in gerader Linie (§. 91.) und zwar ist $S'm = 2M'S'$. Folglich bilden die vier Punkte M' , S' , M, m eine einzige gerade Linie, und da $S'm = 2M'S'$ und $Mm = M'M$, also $M'S' = \frac{1}{3}M'm$ und $M'M = \frac{2}{3}M'm$ ist, so ist $SM = \frac{1}{3}M'm - \frac{1}{3}M'm = \frac{1}{3}M'm$, also $MS' = 2S'M$. Man erhält daher die stetige Proportion: $S'M:M'S' = M'S':S'm$.

Zus. 3. Nach §. 60. ist $Mm^2 = R(R - 2r)$, also $M'm^2 = 2R(R - 2r)$.

Zus. 4. Es sey O der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der §. 95. bezeichneten geraden Linien, und P der Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel des Urdreiecks; ziehe OP, mP, M'O, so ist $M'OPm$ ein Parallelogramm. Denn da $OP = 2Mm$ und $OP \parallel Mm$ ist (§. 97. Zus.), und $M'm = 2Mm$ (§. 112.), so ist $M'm = OP$ und $M'm \parallel OP$, folglich auch $M'O = mP$ und $M'O \parallel mP$.

§. 113.

Der Rauminhalt des größern Centralendreiecks ist gleich einem Rechtecke, dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Urdreiecks und dessen Höhe gleich dem Halbmesser des Winkelfreises des Urdreiecks ist.

Beweis. Da $m'''C$ auf $m'm''$ senkrecht steht (§. 3.), so ist $\triangle m'm'm''' = \frac{1}{2}m'm''.m'''C$. Nun ist aber $m'm''.m'''C = (a+b+c)D$ (§. 56.) $= 2(a+b+c)R$; folglich ist $\triangle m'm'm''' = (a+b+c)R$.

§. 114.

Der Rauminhalt des größern Centralendriekes verhält sich zum Rauminhalte des Urdriekes, wie der Durchmesser des Winkelfreies des Urdriekes oder der Halbmesser des Winkelfreies des Centralendriekes zum Halbmesser des innern Berührungsfreies des Urdriekes.

Beweis. Da $\triangle m'm''m''' = (a+b+c)R$ (§. 113.) und $\triangle ABC = \frac{1}{2}(a+b+c)r$ (§. 32.) ist, so ist $\triangle m'm'm'' : \triangle ABC = (a+b+c)R : \frac{1}{2}(a+b+c)r = R : \frac{1}{2}r = 2R : r$.

Zuf. 1. Da also auch $\triangle ABC : 2 \triangle m'm'm'' = r : 4R$, und ebenso $mA \cdot mB \cdot mC : mm' \cdot mm'' \cdot mm''' = r : 4R$ ist (§. 83. Zuf. 2.), so ist $mA \cdot mB \cdot mC : mm' \cdot mm'' \cdot mm''' = \triangle ABC : 2 \triangle m'm'm''$.

Zuf. 2. Ebenso ist $r'r''r''' : m'A \cdot m''B \cdot m'''C = r : 4R$ (§. 85. Zusatz 3.), folglich ist auch $r'r''r''' : m'A \cdot m''B \cdot m'''C = \triangle ABC : 2 \triangle m'm'm''$.

§. 115.

Das innere Berührungsdriek ist ähnlich dem größern Centralendriek und die Seiten beider Dreiecke sind paarweise einander parallel.

Beweis. Da (Fig. 6.) $AF = AE$ ist, so ist $\triangle AFE$ gleichschenkelig und FE steht daher auf Am senkrecht, weil Am den Winkel FAE an der Spitze von $\triangle AFE$ halbt. Nun steht aber auch $m'm''$ auf Am senkrecht (§. 3.), folglich ist $FE \parallel m'm''$. Auf dieselbe Art wird bewiesen, daß $FD \parallel m'm'''$ und $DE \parallel m'm'$ ist. Also sind alle Seiten des Dreiecks DEF parallel den Seiten des Dreiecks $m'm'm''$, und daher ist auch $\triangle DEF \sim \triangle m'm'm''$.

Zuf. Daher ist auch $\triangle DEF \sim \triangle GHK$, und die Seiten beider Dreiecke sind paarweise einander parallel (s. §. 111. Beweis.).

§. 116.

Der Rauminhalt des innern Berührungsdriekes verhält sich zu dem Rauminhalte des Urdriekes, wie der Halbmesser des innern Berührungsfreies des letztern zu dem Durchmesser seines Winkelfreies.

Beweis. Da (Fig. 6.) $\triangle DEF \sim \triangle m'm'm''$ ist (§. 116.), so verhalten sich beide Dreiecke dem Rauminhalte nach, wie die Quadrate der Halbmesser ihrer Winkelfreies; nun ist aber der Winkelfreis des Dreiecks DEF nichts anderes als der innere Berührungsfreis des Dreiecks ABC ; folglich ist der Halbmesser des Winkelfreies von $\triangle DEF = r$; ebenso ist der Halbmesser des Winkelfreies von $\triangle m'm'm'' = 2R$ (§. 111. Zuf.);

also ist $\triangle DEF : \triangle m'm'm'' = r^2 : 4R^2$;

aber ebenso ist $\triangle m'm'm'' : \triangle ABC = 2R : r$;

folglich ist $\triangle DEF : \triangle ABC = 2Rr^2 : 4R^2r$.

Nun ist aber $2Rr^2 : 4R^2r = r : 2R$; folglich ist auch $\triangle DEF : \triangle ABC = r : 2R$.

§. 117.

Das Urdriek ist die mittlere Proportionalfläche zwischen dem innern Berührungsdriek und dem größern Centralendriek.

Beweis. Da (Fig. 6.) $\triangle DEF : \triangle ABC = r : 2R$ (§. 116.) und $\triangle ABC : \triangle m'm'm'' = r : 2R$ (§. 114.) ist, so ist $\triangle DEF : \triangle ABC = \triangle ABC : \triangle m'm'm''$.

§. 118.

Wenn man von dem Mittelpunkt des Winkelfreies des größern Centralendriekes auf eine Seite desselben einen Perpendikel fällt, und denselben um seine eigene Länge verlängert, so ist der Endpunkt der Verlängerung der Mittelpunkt des Winkelfreies für dasjenige kleinere Centralendriek, das auf der Centrale der beiden äußern Berührungsfreies steht, auf welche der Perpendikel gefällt worden ist, und der Halbmesser dieses Winkelfreies ist das Doppelte des Halbmessers des zum Urdriek gehörigen Winkelfreies.

Beweis. Es sey (Fig. 6.) M' der Mittelpunkt des Winkelfreies von $\triangle m'm'm''$; falle von M' auf $m'm''$ den Perpendikel $M'K$, so wird dadurch $m'm''$ in K halbt; verlängere hierauf $M'K$ so nach M'' , daß

$M''K = MK$ ist, und ziehe $M'm'$, $M'm''$, $M'm'$, $M'm''$, so ist $M'm' = M'm''$, und ebenso, weil KM'' auf $m'm''$ im Halbirungspunkte K senkrecht steht, auch $M'm' = M'm''$; aber da auch $m'H$ auf $M'M''$ im Halbirungspunkte K senkrecht steht, so ist auch $M'm' = M'm''$; aus demselben Grunde ist $M'm'' = M'm'$. Da noch außerdem $m'm' = m'm''$ ist, so ist $\triangle m'm'M'' \cong \triangle m'm'M'$, folglich $m'M'm'' = m'M'm'$; aber $m'M'm' = \alpha + \beta$ (§. 110. Beweis), also auch $m'M'm'' = \alpha + \beta$. Denkt man sich also aus M'' als Mittelpunkt mit $M'm' = M'm''$ als Halbmesser einen Kreis beschrieben, der durch m' und m'' gehen wird, so wird dieser durch $m'm''$ in zwei Kreisabschnitte getheilt, von denen der eine den Centriwinkel $m'M'm'' = \alpha + \beta$ hat; folglich ist der in diesem Kreisabschnitte liegende Peripheriewinkel $= \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$; also ist der in dem entgegengesetzten Kreisabschnitte liegende $= 2R - (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta) = R + \frac{1}{2}\gamma$, weil $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = R$ ist. Nun ist aber $m'mm'' = R + \frac{1}{2}\gamma$ (§. 15.); folglich ist $m'mm''$ ein Winkel in diesem Kreisabschnitte, und m liegt also auf der Peripherie des Kreises. Da nun der Kreis durch m' , m'' und m geht, so ist er Winkelkreis von $\triangle m'mm''$. Endlich ist sein Halbmesser $M'm' = M'm''$; aber $M'm'$ ist das Doppelte des Halbmessers von dem Winkelkreise des Urdreiecks; folglich ist auch $M'm'$ das Doppelte dieses Halbmessers.

Zuf. Da dieses für jedes kleinere Centralendreieck gilt, so haben die Winkelkreise aller vier Centralendreiecke gleiche Halbmesser, und jeder derselben ist $= 2R = D$.

§. 119.

Wenn man von den Mittelpunkten zweier äußerer Berührungskreise auf die diesen Kreisen zugehörigen Seiten, und zwar je von dem einen auf die Verlängerung der dem andern zugehörigen Dreiecksseite, und ebenso von dem Mittelpunkte des innern Berührungskreises auf die dritte Seite Perpendikel fällt, so schneiden sich diese gehörig verlängert in dem Mittelpunkte des Winkelkreises desjenigen kleinern Centralendreiecks, welches zu den genannten drei Berührungskreisen gehört.

Beweis. Es sey (Fig. 6.) M'' der Mittelpunkt des kleineren Centralendreiecks $mm'm''$, ziehe $M'm'$, $M'm''$, $M'm$, so liegt M'' immer außerhalb des Dreiecks $m'mm''$, weil $\triangle m'mm''$ stumpfwinklig ist (§. 15. Zuf.). Nun ist $\triangle m'M'm'' \cong \triangle m'M'm'$, also $M'm'm'' = M'm'm'$ und $M'm'm' = M'm'm''$; aber $M'm'm' = \frac{1}{2}\gamma$ und $M'm'm'' = \frac{1}{2}\gamma$ (§. 110. Beweis); folglich auch $M'm'm' = \frac{1}{2}\gamma$ und $M'm'm'' = \frac{1}{2}\gamma$. Fällt man nun von m' und m'' auf die Verlängerungen von AC und BC Perpendikel, so treffen diese die Verlängerungen von AC und BC in den Berührungspunkten E' und D'' , und es ist $m'm'E' = \frac{1}{2}\gamma$ und $m'm'D'' = \frac{1}{2}\gamma$ (§. 18. Zuf.); folglich fällt $m'E'$ mit $m'M''$ und $m'D''$ mit $m'M''$ zusammen, und beide schneiden sich in M'' . Ferner ist $M'm' = M'm$, also $M'm'm = M'mm'$; aber $M'm'm = M'm'm'' + m'm'm = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\beta$ (§. 16.); also ist auch $M'mm' = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\beta$. Nun ist aber, wenn mF gezogen wird, $mAF = \frac{1}{2}\alpha$, $mFA = R$, also $AmF = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$, und daher $AmF = M'mm'$. Da nun $m'm$ Verlängerung von mA ist, so ist auch $M'm$ Verlängerung von mF ; mF geht also verlängert durch M'' , und mF , $m'E'$, $m'D''$ schneiden sich gehörig verlängert in M'' .

§. 120.

Der Mittelpunkt des Winkelkreises eines kleineren Centralendreiecks und der Mittelpunkt des zu diesem Centralendreiecke nicht gehörigen äußern Berührungskreises liegen mit dem Mittelpunkte des Winkelkreises des Urdreiecks in einer geraden Linie, und zwar liegt der Mittelpunkt des letztern Kreises im Halbirungspunkte der die beiden erstern verbindenden geraden Linie.

Beweis. Es sey (Fig. 6.) M'' Mittelpunkt des Centralendreiecks $mm'm''$, und m''' der Mittelpunkt des nicht dazu gehörigen äußern Berührungskreises, so ziehe $M'm'''$; ziehe ferner $M'm$, $M'm''$, $M'm'''$, $M'M''$. Da $M'K = \frac{1}{2}m'''m$ (§. 112. Zuf. 1.) und $M'M' = 2MK$ (§. 118.) ist, so ist $M'M' = m'''m$. Ferner da $M'M''$ auf $m'm$ und $m'''C$ auf $m'm$ senkrecht stehen, so ist $M'M'' \parallel m'''m$. Folglich weil $M'M' = m'''m$ und $M'M'' \parallel m'''m$ ist, so ist $M'M'm'''$ ein Parallelogramm, dessen Diagonalen $M'm'''$ und $M'm$ sich gegenseitig

halbiren. Nun liegt aber M auf dem Halbierungspunkte von $M'm$ (§. 112.); folglich geht auch $M''m''$ durch M und MM'' ist $= Mm''$.

Zus. Es ergeben sich hier leicht ganz analoge Zusätze, wie §. 112. Zus. 1—4.

§. 121.

Der Rauminhalt eines kleinern Centralendreiecks ist gleich einem Rechtecke, dessen Grundlinie gleich dem Ueberschusse derjenigen zwei Seiten des Urdreiecks, welche zu den zum genannten Centralendreiecke gehörigen äußern Berührungskreisen gehören, über die dritte Dreiecksseite, und dessen Höhe gleich dem Halbmesser des Winkelfreises des Urdreiecks ist.

Beweis. Da mC auf $m'm''$ senkrecht steht (§. 5.), so ist $\triangle mm'm'' = \frac{1}{2} m'm'' \cdot mC$. Nun ist aber $m'm'' \cdot mC = (a+b-c) D$ (§. 55.) $= 2(a+b-c) R$; folglich ist $\triangle mm'm'' = (a+b-c) R$.

§. 122.

Der Rauminhalt eines kleineren Centralendreiecks verhält sich zum Rauminhalte des Urdreiecks, wie der Durchmesser des Winkelfreises des Urdreiecks oder der Halbmesser des Winkelfreises des Centralendreiecks zum Halbmesser des nicht zum genannten Centralendreiecke gehörigen äußern Berührungskreises.

Beweis. Da $\triangle mm'm'' = (a+b-c) R$ (§. 121.) und $\triangle ABC = \frac{1}{2} (a+b-c) r''$ (§. 33.) ist, so ist $\triangle mm'm'' : \triangle ABC = (a+b-c) R : \frac{1}{2} (a+b-c) r'' = R : \frac{1}{2} r'' = 2R : r''$.

Zus. 1. Da also auch $\triangle ABC : 2 \triangle mm'm'' = r'' : 4R$ und ebenso $m''A.m''B.m''C : m''m.m''m'.m''m'' = r'' : 4R$ ist (§. 84. Zus. 2.), so ist $m''A.m''B.m''C : m''m.m''m'.m''m'' = \triangle ABC : 2 \triangle mm'm''$.

Zus. 2. Da ebenso $rr'r'' : m''A.m''B.mC = r'' : 4R$ ist (§. 86. Zus. 2.) so ist auch $rr'r'' : m''A.m''B.mC = \triangle ABC : 2 \triangle mm'm''$.

§. 123.

Jedes äußere Berührungsdreieck ist ähnlich demjenigen kleineren Centralendreiecke, welches zu den drei übrigen Berührungskreisen gehört, und die Seiten beider Dreiecke sind paarweise einander parallel.

Beweis. Da (Fig. 6.) $CE'' = CD''$ ist, so ist $\triangle CE''D''$ gleichschenkelig, und $D''E''$ steht daher auf der Halbierungslinie Cm'' des Winkels $E''CD''$ an der Spitze des Dreiecks senkrecht. Nun steht aber auch $m'm''$ auf Cm'' senkrecht (§. 5.), folglich ist $D''E'' \parallel m'm''$. Auf dieselbe Art wird bewiesen, daß $E''F'' \parallel mm'$ und $D''F'' \parallel mm'$ ist. Also sind alle Seiten des Dreiecks $D''E''F''$ parallel den Seiten des Dreiecks $mm'm''$, und daher ist auch $\triangle D''E''F'' \sim \triangle mm'm''$.

§. 124.

Der Rauminhalt eines äußern Berührungsdreiecks verhält sich zum Rauminhalte des Urdreiecks, wie der Halbmesser des zu dem genannten Berührungsdreiecke gehörigen äußern Berührungskreises zu dem Durchmesser des Winkelfreises des Urdreiecks.

Beweis. Da (Fig. 6.) $\triangle D''E''F'' \sim \triangle mm'm''$ (§. 123.) und der Halbmesser des zu $\triangle D''E''F''$ gehörigen Winkelfreises $= r''$, der Halbmesser aber des zu $\triangle mm'm''$ gehörigen Winkelfreises $= 2R$ ist (§. 118. Zus.), so ist $\triangle D''E''F'' : \triangle mm'm'' = r''^2 : 4R^2$;

aber ebenso ist $\triangle mm'm'' : \triangle ABC = 2R : r''$ (§. 122.).

Folglich ist $\triangle D''E''F'' : \triangle ABC = 2Rr''^2 : 4R^2r''$.

Nun ist aber $2Rr''^2 : 4R^2r'' = r'' : 2R$; also ist auch $\triangle D''E''F'' : \triangle ABC = r'' : 2R$.

§. 125.

Das Urdreieck ist die mittlere Proportionalfläche zwischen einem äußern Berührungsdreiecke und dem zu den drei übrigen Berührungskreisen gehörigen kleinern Centralendreiecke.

Beweis. Da (Fig. 6.) $\triangle D''E''F'' : \triangle ABC = r'' : 2R$ (§. 124.) und $\triangle ABC : \triangle mm'm'' = r'' : 2R$ (§. 122.) ist, so ist $\triangle D''E''F'' : \triangle ABC = \triangle ABC : \triangle mm'm''$.

§. 126.

Die Summe der drei äußern Berührungsdreiecke ist größer als das innere Berührungsdreieck um den doppelten Flächeninhalt des Urdreiecks.

Beweis. Da (Fig. 6.) $\triangle ABC : \triangle D'E'F' = 2R : r'$

$$\triangle ABC : \triangle D''E''F'' = 2R : r''$$

$$\triangle ABC : \triangle D'''E'''F''' = 2R : r'''$$

$$\triangle ABC : \triangle DEF = 2R : r \quad (\text{§. 125. 116.}) \text{ ist, so ist}$$

$$\triangle ABC : \triangle D'E'F' + \triangle D''E''F'' + \triangle D'''E'''F''' - \triangle DEF = 2R : r' + r'' + r''' - r; \text{ also auch}$$

$$2 \triangle ABC : \triangle D'E'F' + \triangle D''E''F'' + \triangle D'''E'''F''' - \triangle DEF = 4R : r' + r'' + r''' - r.$$

Nun ist aber $r' + r'' + r''' - r = 4R$ (§. 28.); also ist auch

$$\triangle D'E'F' + \triangle D''E''F'' + \triangle D'''E'''F''' - \triangle DEF = 2 \triangle ABC.$$

A n h a n g.

A. Besondere Eigenschaften der rechtwinkligen Dreiecke in Bezug auf die Berührungskreise und den Winkelfreis.

1.

Die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Halbmesser der beiden äußern zu den Katheten gehörigen Berührungskreise und gleich dem Ueberschuß des Halbmessers des zu der Hypotenuse gehörigen äußern Berührungskreises über den Halbmesser des innern Berührungskreises.

Beweis. Nach §. 26. ist $R + p' = \frac{1}{2}(r' + r'')$. Wenn nun (Fig. 1.) $A = R$, also BC die Hypotenuse ist, so fällt M auf BC, weil BAC Winkel im Halbkreise ist, und daher ist, wenn die Hypotenuse $= h$ gesetzt wird, $R = \frac{1}{2}h$, und $p' = 0$; folglich ist $\frac{1}{2}h = \frac{1}{2}(r' + r'')$, also $h = r' + r''$. Ferner ist nach §. 27. $R - p' = \frac{1}{2}(r' - r)$, also wieder $\frac{1}{2}h = \frac{1}{2}(r' - r)$, und daher $h = r' - r$.

2.

Jede Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Halbmesser des zu ihr gehörigen äußern Berührungskreises und des innern Berührungskreises, und gleich dem Ueberschuß des Halbmessers des zur Hypotenuse gehörigen äußern Berührungskreises über den Halbmesser des zur andern Kathete gehörigen.

Beweis. Da M auf BC fällt, wenn $A = R$ ist, und BC in M halbiert wird, so ist $p' = \frac{1}{2}c$, da p' und c auf b senkrecht stehen, also einander parallel sind. Nun ist $R - p' = \frac{1}{2}r' - \frac{1}{2}r$ (§. 27.), also da $R = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}r' + \frac{1}{2}r''$ ist, so ist $\frac{1}{2}r' + \frac{1}{2}r'' - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}r' - \frac{1}{2}r$, oder $r' + r'' - c = r' - r$; folglich $c = r'' + r$. Ebenso ist $b = r' + r$. Ferner ist $R + p' = \frac{1}{2}r' + \frac{1}{2}r''$ (§. 26.), d. h. $\frac{1}{2}r' + \frac{1}{2}r'' + \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}r' + \frac{1}{2}r''$, oder $r' + r'' + c = r' + r''$; also ist $c = r' - r''$. Ebenso ist $b = r' - r''$.

3.

Die Summe beider Katheten ist gleich der Summe der Halbmesser des zu der Hypotenuse gehörigen äußern und des innern Berührungskreises, und größer als die Hypotenuse um den Durchmesser des innern Berührungskreises.

Beweis. Da $b = r' - r''$ und $c = r'' + r$ ist, so ist $b + c = r' - r'' + r'' + r = r' + r$. Ebenso da $b = r' + r$ und $c = r'' + r$ ist, so ist $b + c = r' + r'' + 2r$; aber $r' + r'' = h$, also $b + c = h + 2r$.

Zus. Da auch $b = r' - r''$ und $c = r' - r''$ ist, so ist $b + c = r' - r'' + r' - r'' = 2r' - (r' + r'') = 2r' - h$.

4.

Der Halbmesser des zu der Hypotenuse gehörigen äußern Berührungskreises ist gleich der Summe der Halbmesser der drei übrigen Berührungskreise.

Beweis. Da $h = r' + r''$, und $h = r' - r$ ist, so ist $r' - r = r' + r''$, also $r' = r'' + r' + r$.

5.

Der Halbmesser des zu der Hypotenuse gehörigen äußern Berührungskreises ist gleich dem halben Umfange des Dreiecks, der Halbmesser des zu einer Kathete gehörigen äußern Berührungskreises gleich dem halben Ueberschusse der Summe dieser Kathete und der Hypotenuse über die andere Kathete, und endlich der Halbmesser des innern Berührungskreises gleich dem halben Ueberschusse der Summe beider Katheten über die Hypotenuse.

Beweis. Da $h = r' - r$, also $r' = h + r$ ist, so ist $2r' = 2h + 2r$; aber $h + 2r = b + c$ (Nr. 3.); also $2r' = h + b + c$, und daher $r' = \frac{1}{2}(h + b + c)$. Ferner ist $r' - r = h$, $r' + r = b$, also $r' + r' =$

$h + b$, $r' - r'' = c$; also $r' + r'' - (r' - r'') = h + b - c$, d. h. $2r'' = h + b - c$; folglich ist $r'' = \frac{1}{2}(h + b - c)$; ebenso ist $r'' = \frac{1}{2}(h + c - b)$. Endlich ist $b + c = h + 2r$, also $2r = b + c - h$, und daher $r = \frac{1}{2}(b + c - h)$.

6.

Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechtecke aus den Halbmessern des zu der Hypotenuse gehörigen äußern und des innern Berührungskreises; und ebenso gleich dem Rechtecke aus den Halbmessern der beiden andern äußern Berührungskreise.

Beweis. $\triangle ABC = \frac{1}{2}r(h + b + c)$ (§. 52.); aber $\frac{1}{2}(h + b + c) = r'$ (Nr. 5.); also $\triangle ABC = rr'$. Ebenso ist $\triangle ABC = \frac{1}{2}r''(h + c - b)$; aber $\frac{1}{2}(h + c - b) = r''$ (Nr. 5.); folglich ist $\triangle ABC = r''r''$.

Zus. Da also $rr' = r''r''$ ist, so ist $r:r'' = r'':r'$.

7.

Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ist die Hälfte des Rechtecks aus den Entfernungen der Spitze des rechten Winkels von den Mittelpunkten der zu den Katheten gehörigen äußern Berührungskreise und ebenso gleich der Hälfte des Rechtecks aus den Entfernungen derselben Winkelspitze von den Mittelpunkten der beiden übrigen Berührungskreise.

Beweis. $bc = Am'' \cdot Am'' = Am' \cdot Am$ (§. 42.); aber $\triangle ABC = \frac{1}{2}bc$, wenn $BAC = R$ ist; folglich ist auch $\triangle ABC = \frac{1}{2}Am'' \cdot Am'' = \frac{1}{2}Am' \cdot Am$.

8.

Die Entfernung der Mittelpunkte der beiden zu den Katheten gehörigen äußern Berührungskreise ist gleich der Entfernung der Mittelpunkte der beiden andern Berührungskreise.

Beweis. Da $m'm''^2 = D(d'' + d''')$ und $mm'^2 = D(d' - d)$ (§§. 63. 62.), aber $d' + d'' = d' - d = 2h$ ist (Nr. 1.), so ist $m'm''^2 = mm'^2$, also $m'm'' = mm'$. U. s. w.

B. Ueber die Höhenperpendikel des Dreiecks, und die Eigenschaften des durch die Endpunkte derselben bestimmten Dreiecks.

In §. 5. wurde bewiesen, daß (Fig. 1.) $m'A$, $m'B$, $m''C$ Höhenperpendikel des Dreiecks $m'm'm''$ sind, deren Endpunkte die Winkelspitzen A , B , C , des Urdreiecks bilden. Dasselbe gilt für die Dreiecke $mm'm''$, $mm'm''$, $mm'm''$. Betrachtet man nun $m'm'm''$ als Urdreieck, so kann man $\triangle ABC$ dadurch aus dem Urdreiecke ableiten, daß man die Endpunkte der Höhenperpendikel durch gerade Linien verbindet. In Beziehung auf das Urdreieck $m'm'm''$ soll das auf die angegebene Art entstandene Dreieck ABC das Höhendreieck genannt werden, weil es durch die Höhen des Urdreiecks bestimmt ist. Ebenso wäre (Fig. 3.), wenn GH , HK , KG gezogen würden, $\triangle GHK$ Höhendreieck in Beziehung auf das Urdreieck ABC .

Es läßt sich beweisen, daß das Höhendreieck zu dem Urdreiecke immer in demselben Verhältnisse steht, in welchem in der vorangegangenen Abhandlung das Urdreieck zu den Centralendreiecken stand. Der Beweis beruht auf folgenden zwei Sätzen.

Satz a.

Wenn man die Endpunkte der Höhenperpendikel eines Dreiecks durch gerade Linien verbindet, so sind die drei von dem Urdreiecke abgeschnittenen Dreiecke, von denen jedes mit dem Urdreiecke einen gemeinschaftlichen Winkel hat, dem Urdreiecke und einander ähnlich.

Beweis. Es sey (Fig. 1.) $m'm'm''$ das Urdreieck, $m'A$, $m'B$, $m''C$ die Höhenperpendikel desselben, und AB , AC , BC gezogen. Da $m'A m'' = R$, und $m' C m'' = R$ ist, so geht ein über $m'm''$ als Durchmesser beschriebener Kreis durch A und C ; $m'm''AC$ ist also ein Viereck im Kreise, und daher ist $m''AC + m''m'C = 2R$; aber auch $m''AC + m''m'AC = 2R$; folglich ist $m''m'AC = m''m'C$. Auf dieselbe Art ist $m''CA =$

$m'm''A$; folglich ist $\triangle m'AC \propto \triangle m'm''m''$. Ebenso wird bewiesen, daß $\triangle m''AB \propto \triangle m'm''m''$ und $\triangle m'BC \propto \triangle m'm''m''$ ist. Daher ist auch $\triangle m'AC \propto \triangle m''AB \propto \triangle m'BC$.

Zus. 1. Betrachtet man $\triangle ABC$ als Höhendreieck für das Urdreieck $mm'm''$, so gilt dasselbe in Beziehung auf die Dreiecke $m'AC$, $m''BC$, mAB .

Zus. 2. Bei dem rechtwinkligen Dreiecke ist das Höhendreieck $= 0$. (Vergl. die Analogie mit §. 15. Zus. u. §. 17. Zus. 1.)

Satz b.

Die innern und äußern Winkel des Höhendreiecks werden durch die Seiten und Höhenperpendikel des Urdreiecks halbiert.

Beweis. Es sey $m'm'm''$ (Fig. 1.) Urdreieck für das Höhendreieck ABC . Da $m'AC = m'm'm''$ und $m''AB = m'm'm''$ ist, so ist $m'AC = m'AB$; aber $m'AF'' = m'AB$; also $m'AC = m'AF''$, oder der Außenwinkel CAF'' von $\triangle ABC$ halbiert. Ferner da $m'AC = m'AB$, und $m'Am' = m''Am' = R$ ist, so ist auch $m'AC = m'AB$, oder der innere Winkel BAC durch $m'A$ halbiert.

Zus. 1. Dasselbe gilt für das Höhendreieck ABC , wenn $mm'm'$ als Urdreieck betrachtet wird.

Zus. 2. Die drei Winkelspitzen des Urdreiecks und der Durchschnitt der Höhenperpendikel bilden also die Mittelpunkte der vier zu dem Höhendreiecke gehörigen Berührungskreise.

Aus den obigen beiden Sätzen folgt nun, daß alle frühern Sätze, die sich auf die Centralen der Berührungskreise und ihr Verhältniß zu den Seiten des Urdreiecks bezogen, jetzt auf die Seiten des Höhendreiecks und die obern Abschnitte der Höhen desselben und auf ihr Verhältniß zu den Seiten des Höhendreiecks angewendet werden können, und ebenso, daß Alles, was von dem Urdreiecke im Verhältnisse zu den Centralendreecken galt, auf dieselbe Art von dem Höhendreiecke im Verhältnisse zu dem Urdreiecke gültig ist. Folgendes enthält einige Andeutungen über die wichtigsten für das Höhendreieck u. s. w. sich ergebenden Lehrsätze, wobei die Paragraphen, aus denen die Beweise sich ergeben, kurz angegeben sind. Es bleibt dem Leser überlassen, die Zahl dieser Sätze aus der vorstehenden Abhandlung zu vermehren.

1) Der Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel ist von den Seiten des Höhendreiecks gleichweit entfernt; ebenso hat jede Winkelspitze des Urdreiecks von den Seiten des Höhendreiecks gleiche Entfernung. (Einleit. Nr. 2. 5.)

2) Der Winkelfreis des Höhendreiecks halbiert die Seiten des Urdreiecks und die obern Abschnitte der Höhenperpendikel. (§. 25.)

3) Der Halbmesser des Winkelfreises des Höhendreiecks ist halb so groß, als der Halbmesser des Winkelfreises des Urdreiecks. (§§. 141. 148.)

4) Die Verbindungslinie zwischen dem Halbirungspunkte einer Seite des Urdreiecks und dem Halbirungspunkte des obern Abschnittes des zu dieser Seite gehörigen Höhenperpendikels steht senkrecht auf einer Seite des Höhendreiecks. (§. 22.)

5) Jeder Halbirungspunkt einer Seite des Urdreiecks hat von den beiden Winkelspitzen des Höhendreiecks, die auf den beiden andern Seiten liegen, eine Entfernung gleich der Hälfte der erstgenannten Seite; ebenso ist die Entfernung des Halbirungspunktes des obern Abschnittes eines Höhenperpendikels von den an den beiden andern Höhenperpendikeln liegenden Winkelspitzen des Höhendreiecks gleich der Hälfte dieses obern Abschnittes. (§. 24. 25.)

6) Wenn man von den drei Winkelspitzen des Urdreiecks und dem Durchschnitte der Höhenperpendikel auf eine Seite des Höhendreiecks Perpendikel fällt, so ist die Summe der drei außerhalb des Höhendreiecks liegenden Perpendikel größer als der innerhalb dieses Dreiecks liegende um den Durchmesser des Winkelfreises des Urdreiecks. (§. 28. und Nr. 2.)

7) Die Entfernung des Durchschnittspunktes der Höhenperpendikel von dem Mittelpunkte des Winkelfreises des Urdreiecks ist die mittlere Proportionale zwischen dem Halbmesser dieses Winkelfreises und zwischen der Summe oder Differenz dieses Halbmessers und der vierfachen Entfernung des genannten Durchschnittspunktes von den Seiten des Höhendreiecks, je nachdem dieser Durchschnittspunkt außerhalb oder innerhalb

halb des Urdreiecks liegt. (§§. 60. 61. wenn man die dortigen Proportionen so ausdrückt : $D : 2 Mm = 2 Mm : D - 4r$, und $D : 2 Mm' = 2 Mm' : D + 4r'$, und damit §§. 112. 120. 118. verbindet.)

8) Jede Seite des Urdreiecks ist die mittlere Proportionale zwischen dem Halbmesser des Winkelfreises dieses Dreiecks und zwischen der Summe oder Differenz der Entfernung der Endpunkte dieser Seite von den Seiten des Höhendreiecks, je nachdem entweder diese beiden Endpunkte außerhalb des Höhendreiecks liegen, oder einer derselben in das Dreieck fällt. (§§. 62. 63. 118.)

9) Die von den Winkelspitzen des Urdreiecks auf die zwischen den einschließenden Seiten derselben liegenden Seiten des Höhendreiecks gefällten Perpendikel gehen durch den Mittelpunkt des Winkelfreises des Urdreiecks. (§§. 110. 119.)

10) Der Mittelpunkt des Winkelfreises des Urdreiecks, der Durchschnittspunkt der Höhen desselben, und der Mittelpunkt des Winkelfreises des Höhendreiecks liegen in einer geraden Linie, und zwar der letztere von beiden erstern gleichweit entfernt. (§§. 112. 120.)

11) Das Rechteck aus dem Höhenperpendikel einer Seite und dem untern Abschnitte eben dieses Höhenperpendikels ist gleich dem Rechtecke aus den beiden vom Endpunkte dieses Höhenperpendikels ausgehenden Seiten des Höhendreiecks, und gleich dem Rechtecke aus den Entfernungen eben dieses Endpunktes von den Endpunkten der Seite, auf welcher der Höhenperpendikel steht. (§. 42.)

12) Das Rechteck aus den beiden Abschnitten eines Höhenperpendikels ist gleich dem doppelten Rechtecke aus dem Halbmesser des Winkelfreises des Urdreiecks und aus der Entfernung des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes der Höhenperpendikel von den Seiten des Höhendreiecks. (§. 52. 54. 111. 118.)

Anm. Es darf hier nicht vergessen werden, daß als Abschnitte der Höhenperpendikel die Entfernungen ihrer Anfangs- und Endpunkte von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte betrachtet werden; also z. B. in $\triangle mm'm''$ ist $m'A$ ein Höhenperpendikel, m'' der gemeinschaftliche Durchschnitt der drei Höhenperpendikel, also $m''m$ und $m''A$ die beiden Abschnitte des Höhenperpendikels $m'A$.

13) Das Rechteck aus einer Seite des Urdreiecks und dem auf dieser Seite stehenden Höhenperpendikel ist gleich einem Rechtecke, dessen eine Seite der Halbmesser des zum Urdreiecke gehörigen Winkelfreises und dessen andere Seite, wenn das Höhendreieck innerhalb des Urdreiecks liegt, gleich dem Umfange desselben, wenn aber das Höhendreieck zum Theil außerhalb des Urdreiecks liegt, gleich dem Ueberschuß derjenigen zwei Seiten des Höhendreiecks, welche theilweise in dem Urdreiecke liegen, über die dritte Seite desselben ist. (§§. 56. 55. 111. 118. wobei noch aus der Ähnlichkeit z. B. von $\triangle mm''C$ und $\triangle m'm''B$ bewiesen werden muß, daß $m'm'' \cdot mC = mm'' \cdot m'B$ ist).

14) Das Rechteck aus zwei Seiten des Urdreiecks ist gleich dem Rechtecke aus dem Durchmesser seines Winkelfreises und aus dem zur dritten Seite gehörigen Höhenperpendikel. (§§. 57. 58. 111. 118. übereinstimmend mit §. 41.)

15) Die Summe der Quadrate der drei Seiten des Urdreiecks ist, wenn sich die Höhenperpendikel desselben innerhalb des Dreiecks schneiden, größer, wenn sie sich außerhalb desselben schneiden, kleiner als das doppelte Quadrat des Durchmessers des zum Urdreiecke gehörigen Winkelfreises um das doppelte Rechteck aus diesem Durchmesser und der Entfernung des Durchschnittspunktes der Höhenperpendikel von den Seiten des Höhendreiecks. (§§. 69. 111. 118.)

16) Die Summe der Quadrate der drei von dem Durchschnittspunkte der Höhen nach den Winkeln des Urdreiecks gezogenen geraden Linien ist, wenn sich die Höhenperpendikel außerhalb des Dreiecks schneiden, größer, wenn sie sich aber innerhalb desselben schneiden, kleiner als das Quadrat des Durchmessers des zu dem Urdreiecke gehörigen Winkelfreises um das doppelte Rechteck aus diesem Durchmesser und der Entfernung des Durchschnittspunktes der Höhen von den Seiten des Höhendreiecks. (§§. 66. 67. 111. 118.)

17) Die Summe der Quadrate einer Seite des Dreiecks und des obern Abschnitts des zu ihr gehörigen Höhenperpendikels ist gleich dem Quadrate des Durchmessers des Winkelfreises. (§§. 64. 111. 118. übereinstimmend mit §. 88.)

18) Das Quadrat der Entfernung des Mittelpunktes des Winkelfreises von dem Durchschnittspunkte der Höhen ist halb so groß als ein Rechteck, dessen eine Seite der Halbmesser dieses Winkelfreises, die andere entweder die Summe dieses Halbmessers und der vierfachen Entfernung des Durchschnittspunktes der Höhen von den Seiten des Höhendreiecks, oder die Differenz beider ist, je nachdem der Durchschnittspunkt der Höhen außerhalb oder innerhalb des Urdreiecks liegt. (§§. 112. Zuf. 3. 120. Zuf.)

19) Das Parallelepipedon aus den drei obern Abschnitten der Höhenperpendikel ist gleich einem Parallelepipedon, dessen Basis das Quadrat des Durchmessers des zum Urdreiecke gehörigen Winkelfreises, und dessen Höhe die Entfernung des Durchschnittspunktes der Höhenperpendikel von den Seiten des Höhendreiecks ist. (§§. 76. 77. 111. 118.)

20) Das Parallelepipedon aus den drei Seiten des Urdreiecks ist das Doppelte eines Parallelepipedons, dessen Basis der Halbmesser des zu dem Urdreiecke gehörigen Winkelfreises, und dessen Höhe, wenn das Höhendreieck innerhalb des Urdreiecks liegt, der Umfang desselben, wenn es aber zum Theile außerhalb desselben liegt, der Ueberschuß der beiden theilweise innerhalb des Urdreiecks liegenden Seiten des Höhendreiecks über die dritte Seite ist. (§§. 79. 80. 111. 118.)

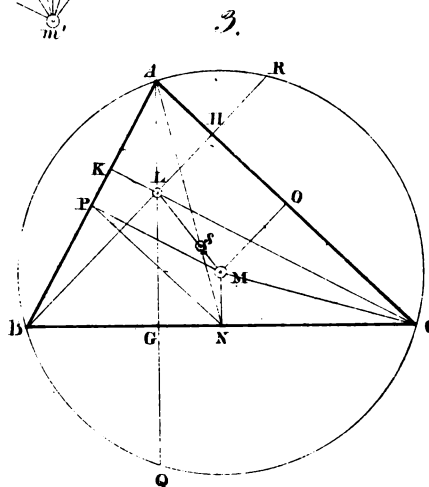
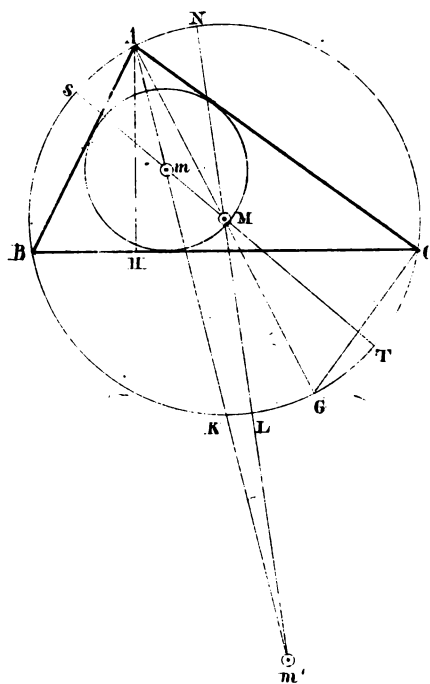
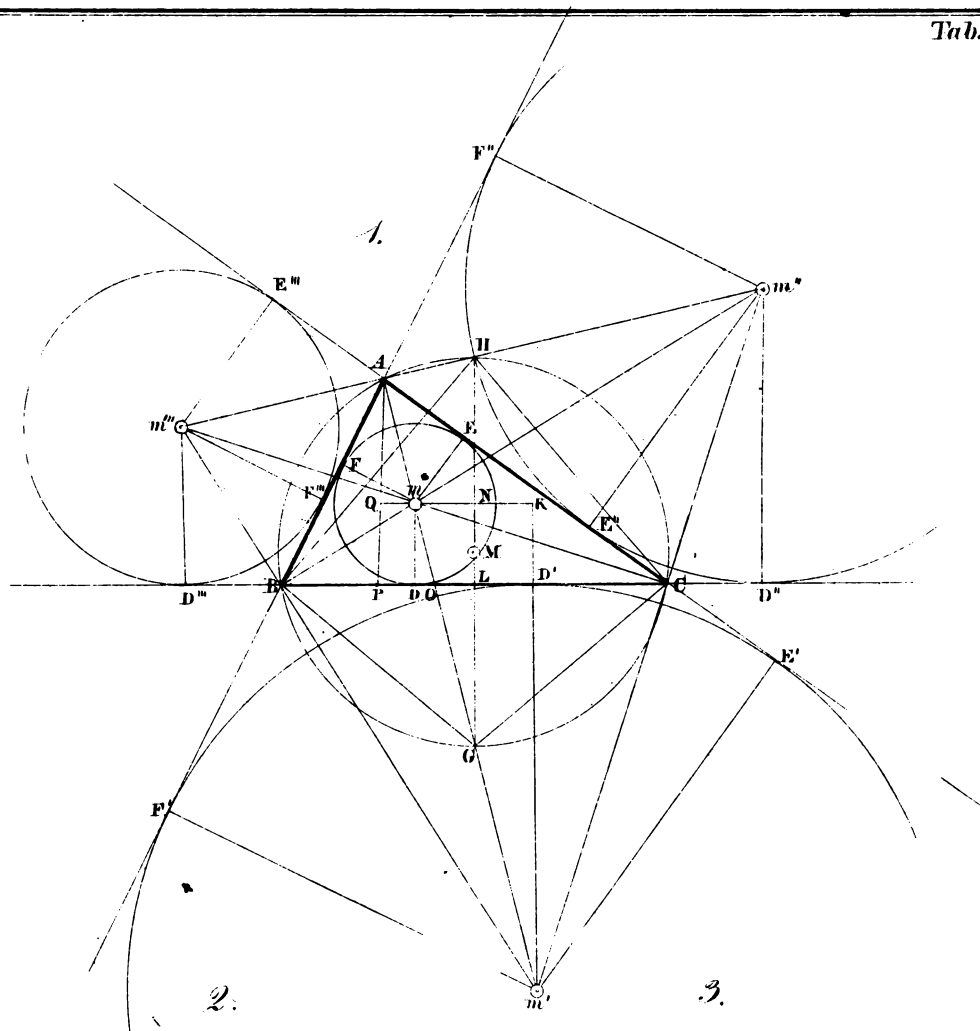
21) Das Parallelepipedon aus den drei Seiten des Höhendreiecks ist gleich einem Prisma, dessen Basis das Höhendreieck, und dessen Höhe der Durchmesser des zum Urdreiecke gehörigen Winkelfreises ist. (§§. 72. 111. 118.)

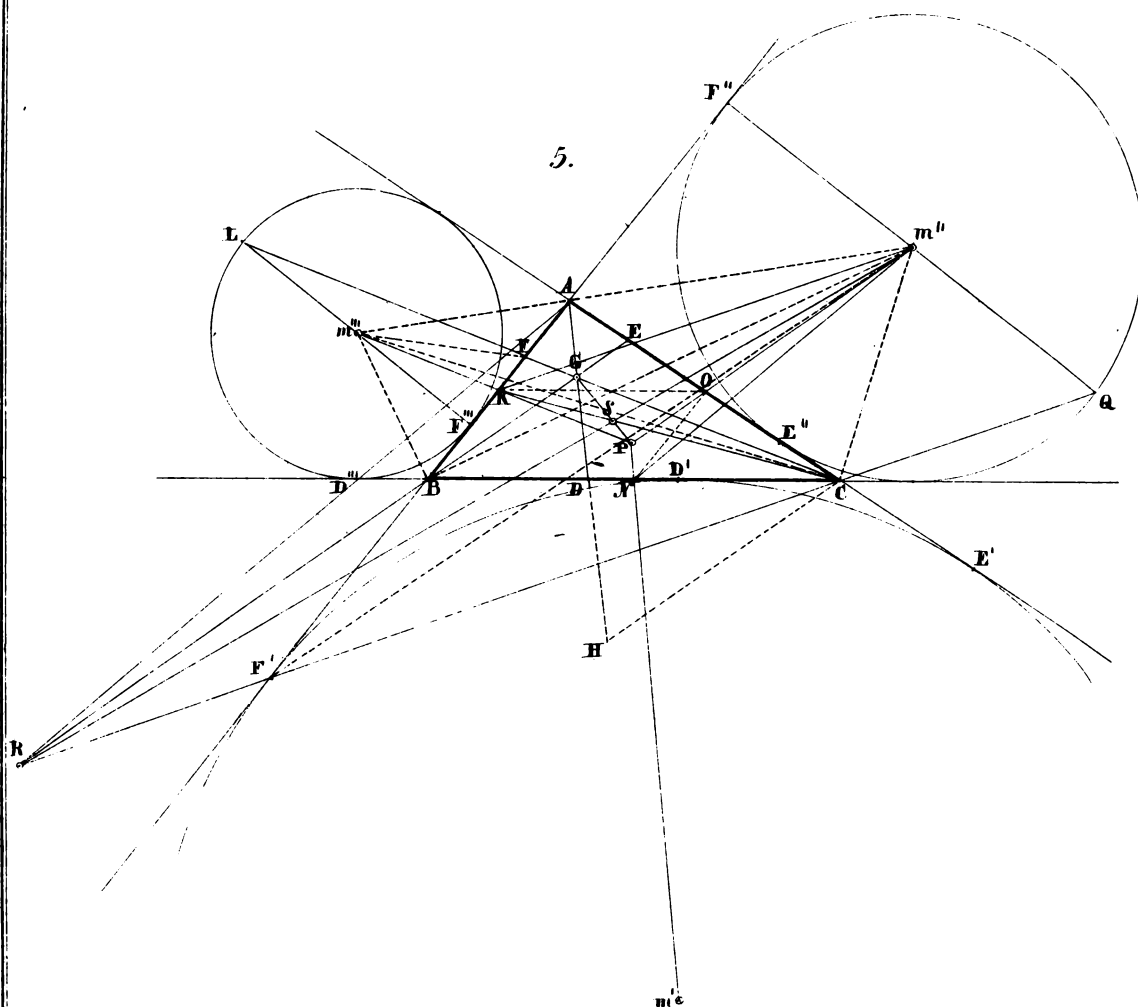
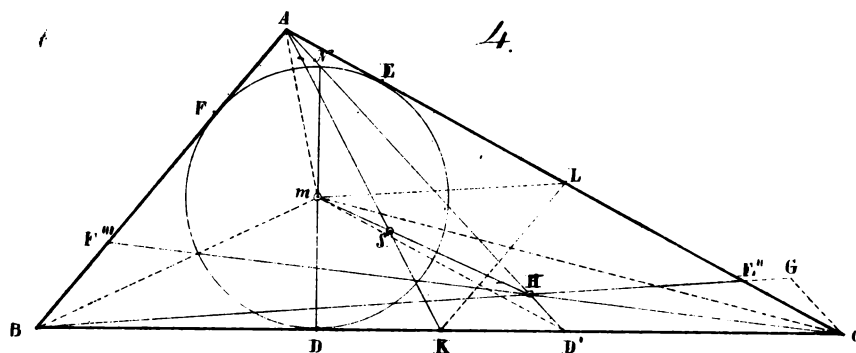
22) Das Parallelepipedon aus den untern Abschnitten der Höhenperpendikel ist gleich einem Parallelepipedon, dessen Basis das Quadrat der Entfernung des Durchschnittspunktes der Höhenperpendikel von den Seiten des Höhendreiecks und dessen Höhe der Durchmesser des Winkelfreises des Urdreiecks ist. (§§. 83. 84. 111. 118.)

23) Der Rauminhalt des Urdreiecks verhält sich zum Rauminhalte des Höhendreiecks, wie der Halbmesser des Winkelfreises des erstern zur Entfernung des Durchschnittspunktes der Höhenperpendikel von den Seiten des Höhendreiecks. (§§. 114. 122.)

B e m e r k u n g.

Auf Tab. II. Fig. 4. ist die Linie mK zu ziehen.





6.

