БИБЛІОТЕКА КЛАССИКОВЪ ТОЧНАГО ЗНАНІЯ. IV.

Б. БОЛЬЦАНО

ПАРАДОКСЫ БЕЗКОНЕЧНАГО

изданные по посмертной рукописи автора

Др. Фр. Пржигонскимъ

переводъ с немецкаго подъ редакціей

Проф. И. В. СЛЕШИНСКАГО.

Je suis tellement pour l'infinie actuel, qu'au lieu d'admettre, que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. (Leibniz. Opera omnia studio Ludov. Dutens. Tom. II. part. I. p. 243).

(Я в такой мере стою за актуальную бесконечность, что не только не допускаю, что природа боится ее, как обыкновенно выражаются, но и признаю, что природа всюду являет именно такую бесконечность, чтобы лучше отметить совершенство своего Творца).

ОДЕССА 1911

От редактора перевода.

Бернард Больцано (Bernard Bolzano. 5.X.1781 – 18. XII.1848) занимал с 1805 по 1820 год кафедру истории религии в Пражском университете. Уволенный на основании доносов врагов, обвинявших его в отступлении от догматов католической церкви, он посвятил остальную часть жизни исключительно научным занятиям в области логики и математики.

Приводя список его работ в этой области, я пользуюсь случаем обратить внимание на хранящиеся в венской придворной библиотеке не опубликованные рукописи Больцано. Они составляют десять кип, помеченных буквами A, B, C, D, E, F, H, H, J. Только часть одной кипы содержит лекции этики, все остальное математического содержания.

Больцано первый ввел в математику понятие о верхней границе и раньше Коши установил понятие о сходимости рядов, формулируя также общий критерий сходимости, известный под именем критерия Коши. (См. сочинения, помещенные в списке под нумерами 3 и 4).

В сочинении, перевод которого здесь предлагается (№9 списка), Больцано является предшественником Георга Кантора (Georg Kantor. 3.III.1845) в теории бесконечных многообразий. Именно, в §§ 20-24 он устанавливает и развивает те свойства бесконечного, которые легли в основание теории Кантора.

Я хотел бы обратить внимание читателя еще на некоторые замечательные места этой книги. В §5 дается то определение суммы, на котором построил свою арифметику Г.Грассман (H.Grassmann. 15.IV.1809 – 26.IX.1877). В §34 дается научное определение нуля. Очень интересны разъяснения, содержащиеся в конце §36. Замечательные мысли содержит §37, посвященный обоснованию анализа. Отметим еще конец §40, конец §41, начало §49 и конец §70.

С некоторыми взглядами автора, в особенности в области метафизики, трудно согласиться. Утверждения, содержащиеся в примечаниях на страницах 61 и 64, оказались неверными, но мнения эти разделялись наиболее знаменитыми математиками этой эпохи.

Понимание математических частей сочинения предполагает лишь элементарные знания из области высшей математики. Для понимания сказанного на странице 91 необходимо знать свойства логарифмической спирали.

И. Слешинскій.

30.III.1911 Одесса.

Сочинения Больцано по логике и математике.

1. Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie. Prag. 1804

2. Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. 1. Lieferung. Prag. 1810.

3. Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen. Prag. 1816.

4. Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Prag. 1817. Berlin 1894.

5. Die drei Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung ohne Betrachtung des unendlich kleinen, ohne die Annahme des Archimedes und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst, zugleich als Probe einer gänzlichen Umstaltung der Raumwissenschaft allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt. Leipzig. 1817.

6. Dr. B. Bolzano's Wissenschaftslehre, Versuch einer ausfürlichen und grösstentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter. Herausgegeben von mehreren seiner Freunde. Mit einer Vorrede des Dr. J. G. A. Heinroth. 4. Bde. Sulzbach 1837.

7. Versuch einer objektiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte. Prag. 1842.

8. Versuch einer objektiven Begründung der Lehre von den drei Dimensionen des Raumes. Prag. 1843.

9. B. Bolzano's Paradoxieren des Unendlichen. Herausgegeben von Prihonsky. Leipzig. 1851. Berlin. 1889.

Материалы для биографии и оценки деятельности Больцано

1. Lebensbeschreibung des Dr. B. Bolzano mit einigen seiner ungedrukten Aufsätze und dem Bildnisse des Verfassers, eingeleitet und erläutert vom Herausgeber. Sulzbach. 1836. (Автобиография).

2. Skizzen aus dem Leben Dr. B. Bolzano's von dessen Artze Dr. A. Wisshaupt. Leipzig. 1850.

3. Bruchstücke zu einer künftigen Lebensbeschreibung des sel. Professors Bernard Bolzano von Josef Hoffman in Techobuz. Wien. 1850.

4. Bernard Bolzano. Zivotopisny nastin. Sepsala Marie Cervinkova. V.Praze. 1881.

5. B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. Von Stolz in Innsbruck. 1881. Math. Ann. Bd. XVIII. s.255.

6. Erdmann. Grundriss der Geschichte der Philosophie. Bd. 2. 1878. S. 389.

7. Bernard Bolzano. Prednaska Marie Cervinkove-Riergove. V Praze. 1893.

8. Husserl. Logische Untersuchungen. 1900. s. 225.

9. Palagyi. Kant und Bolzano. 1902.

Предисловие издателя.

Б о л ь ц а н о начал писать замечательное сочинение «о п а р а д о к с а х б е с к о н е ч н о г о» еще летом 1847-го года на прелестной даче в Либохе близ Мельника, в сообществе издателя, но, вследствие перерыва, обусловленного другими работами, закончил это сочинение только летом следующего года, последнего года своей жизни. Б о л ь ц а н о доказал этим сочинением, что, несмотря на поздний возраст – 66 лет – и на очевидный упадок телесных сил, его духовные силы сохранили еще всю свежесть и подвижность. Кроме того, эта работа показала всему ученому миру всю самобытность его воззрений на самые отвлеченные и глубокие вопросы математики, чистого естествознания и метафизики. Действительно, если бы Б о л ь ц а н о не написал и не оставил нам ничего больше, кроме этого трактата, то и в таком случае его следовало бы причислить, по нашему глубокому убеждению, к самым выдающимся людям нашего столетия. Самые интересные м запутанные вопросы, возникающие при исследовании понятия о бесконечности, вопросы, которые занимали с давних времен ученых, работавших в области априорных наук, он умеет разрешать с поразительной легкостью. Кроме того, он умеет излагать и развертывать перед глазами читателя эти вопросы с такой ясностью, что они в большинстве случаев становятся доступными для каждого, кто не вполне чужд этой области и лишь немногое усвоил в ней. Знаток же, если только он отнесется к этому трактату с некоторым вниманием, (и разве мы не вправе ожидать этого от каждого ученого?) вскоре узнает значение взглядов Б о л ь ц а н о, намеченных здесь и разработанных обстоятельнее в других его сочинениях (особенно в его «Логике» и в «Athanasia»), и вскоре заметит, что ими намечается полное преобразование всей современной науки.

Издатель, получив этот трактат в рукописи от наследников автора с обязательством напечатать его возможно скорее, принял на себя это обязательство тем охотнее, что оно вполне согласовалось с его самым сокровенным желанием (Б о л ь ц а н о был его незабвенным учителем и другом). Он охотно исполнил бы и раньше это обязательство, если бы не возникли препятствия, которые он мог устранить лишь в течении настоящего года. Только теперь сделалось для него возможным исправить переписанное по рукописи, не всегда четкой и представляющей кое-где даже неправильности, составить точный указатель содержания для удобства в пользовании книгой и найти подходящее место для ее издания. Для этой цели он выбрал Лейпциг, с одной стороны, надеясь на более широкое распространение сочинения, напечатанного именно в Лейпциге; с другой стороны, желая почтить знаменитый город книг, украшение и гордость новой родины издателя (он чех по происхождению), так как он

верит, что в будущем, когда великий гений Б о л ь ц а н о будет признан всеми, Лейпциг прославится тем, что был местом, где появились впервые «Парадоксы».

Будиссин, 10 июля, 1850.

Содержание

§ 45. Учение о бесконечно малом тоже дало повод к некоторым несообразностям.

§ 46. Что следует думать о предложении Галилея: окружность круга также велика, как и его центр.

§ 47. Объяснение предложения, что обыкновенная циклоида имеет бесконечную кривизну в той точке, где она встречает свое основание.

§ 48. Каким образом происходит то, что некоторые протяжения, распространяясь в бесконечном пространстве, тем не менее имеют конечную величину; другие же, напротив того, будучи ограничены конечным пространством, имеют все-таки бесконечную величину; и далее, некоторые другие сохраняют конечную величину, хотя делают бесконечное число оборотов вокруг одной точки.

§ 49. Еще некоторые парадоксальные отношения пространственных протяжений, имеющих бесконечную величину.

§ 50. Парадоксы бесконечного в области физики и математики.

Какие истины следует признать, чтобы судить правильно об этих парадоксах.

Доказательство того, что нет двух совершенно равных вещей, а также, следовательно, двух совершенно равных атомов (простых субстанций) во вселенной; далее, - что несомненно существуют простые субстанции, и что это суть переменные субстанции.

§ 51. Предрассудки, от которых следует освободиться, чтобы правильно судить об относящихся сюда парадоксах. Нет мертвого вещества, но есть инертное вещество.

§ 52. Предположение, что непосредственное действие субстанций недопустимо, представляет предрассудок школы.

§ 53. Подобным же образом уверенность в том, что непосредственное влияние на расстоянии невозможно, является предрассудком.

§ 54. Проникновение одной субстанции в другую безусловно отрицается.

§ 55. Предрассудок, состоящий в том, что духовные существа не занимают пространства, так что не могут даже занимать места одной точки.

Между созданными субстанциями нет других различий, кроме различий в степени.

§ 56. С этой точки зрения устраняется сам собой парадокс о связи духовных и материальных субстанций.

§ 57. Ошибочное представление о построении вселенной из одних сил, без субстанций.

§ 58. Нет ни высшей, ни низшей ступени бытия в творении Бога.

§ 59. Непрерывное наполнение бесконечного пространства субстанциями хорошо согласуется с различной плотностью тел, и нет

никакой надобности предполагать, что субстанции проникают одна в другую.

§ 60. Каждая субстанция в мире находится в постоянном взаимодействием с каждой другой.

§ 61. Существуют между ними субстанции господствующие, но ни одна из них не обладает силами, которые бы превосходили силы подчиненных субстанций на бесконечную величину.

§ 62. Существует ли господствующая субстанция в каждой совокупности субстанций.

§ 63. Кроме господствующих субстанций существует еще мировое вещество – эфир, которое заполняет все остальное мировое пространство и соединяет все мировые тела.

Между субстанциями существует притяжение и отталкивание, и каким образом автор представляет себе это.

Отчего происходит, что вещества различающиеся между собой своими силами, а именно степенью взаимного притяжения, по весу равны между собой или что веса их относятся между собою, как массы.

§ 64. В чем проявляется господство определенных субстанций или атомов над другими, и что отсюда следует.

§ 65. Ни одна особенная субстанция не может испытывать такого изменения, чтобы, благодаря ему, освободиться от всех ближайших частиц, окружающих ее.

§ 66. Где кончается одно тело и начинается другое или вопрос о границах тела.

§ 67. Находятся ли тела в непосредственном соприкосновении одно с другим, и когда это бывает.

§ 68. Возможные виды движений во вселенной.

§ 69. Описывает ли какой-нибудь атом во вселенной в какое-либо время линию вполне прямую или вполне кривую.

Принимая во внимание мнение автора о бесконечности вселенной, возможно ли допустить поступательное движение ее в каком-нибудь определенном направлении или вращательное движение ее вокруг данной мировой оси или мирового центра.

§ 70. Два парадокса, получивших, благодаря Э й л е р у, большую известность.

§ 1.

Хотя и нельзя согласиться с мнением Кестнера, что все встречающиеся в математике парадоксальные утверждения представляют собою предложения, которые либо непосредственно заключают в себе понятие о бесконечном, либо так или иначе опираются на это понятие, когда делается попытка их доказать, но это несомненно справедливо для большей части этих утверждений. Еще бесспорнее то, что к разряду таких утверждений принадлежат именно те математические парадоксы, которые заслуживают наибольшего внимания по той причине, что решение важнейших вопросов в некоторых других науках, как, например, в метафизике и физике, зависит от удовлетворительного опровержения кажущихся противоречий, заключающихся в этих утверждениях.

Это же и составляет причину, по которой я в предлагаемом сочинении занимаюсь исключительно рассмотрением парадоксов бесконечного. Прежде всего необходимо выяснить, какое собственно понятие мы разумеем под словом "бесконечное"; иначе окажется для нас невозможным обнаружить, что противоречия, заключающиеся в этих математических парадоксах, представляются лишь кажущимися. Поэтому то мы и начинаем с определения понятия бесконечного.

§ 2.

Само название показывает, что бесконечное противоставляется всему конечному. То обстоятельство, что мы выводим название бесконечного из названия конечного, указывает нам сверх того, что мы представляем себе понятие бесконечного происходящим из понятия конечного, вследствие присоединения к нему новой составной части (такой частью является уже и понятие о простом отрицании). Что оба эти понятия относятся к многообразиям, к количествам (т.е. к многообразиям единиц), а потому и к величинам, этого нельзя отрицать уже по той причине, что именно в математике, т.е. в науке о величинах, мы и говорим чаще всего о бесконечном, рассматривая конечные и бесконечные множества и делая предметом нашего исследования и даже вычисления, наряду с конечными, не только бесконечно большие, но даже и бесконечно малые величины. Не делая еще предположения, что оба эти понятия – конечного и бесконечного – применяются всегда только к таким вещам, в которых в каком-либо смысле могут быть обнаружены величина и множество, мы вправе надеяться, что более точное исследование вопроса, при каких

обстоятельствах мы считаем многообразие конечным или бесконечным, даст нам возможность определить, что такое бесконечность вообще.

§ 3.

С этой целью мы должны однако обратиться к одному из простейших понятий нашего ума, имея в виду установить значение термина, который будем употреблять для обозначения этого понятия. Мы говорим о понятии, лежащем в основе союза ***и***. Для того, чтобы сделать это понятие настолько ясным, насколько этого во множестве случаев требуют математика и философия, я думаю, лучше всего выразить его следующими словами: совокупность известных вещей или целое, состоящее из известных частей. При этом мы должны установить, что эти слова принимаются в том широком значении, что во всех предложениях, где употребляется союз ***и***, предмет речи есть известная совокупность предметов, целое, состоящее из известных частей. Например: 1) солнце, земля и луна находятся во взаимодействии; 2) роза и понятие о розе – две различные вещи; 3) имена Сократ и сын Софрониска обозначают одно и то же лицо. В первом примере это целое составляют солнце, земля и луна, и об этом целом высказывается мысль, что части его находятся во взаимодействии. Во втором примере это совокупность двух вещей: розы и понятия о ней, при чем высказывается суждение, что это две совершенно различные вещи и т.д. Этих немногих слов уже будет достаточно для установления соглашения относительно понятия, о котором идет речь, если мы при этом еще, конечно, прибавим, что любая вещь A с любыми вещами B, C, D... может составить совокупность вещей, или еще, говоря точнее, сама по себе составляет совокупность, о которой можно высказать много более или менее важных истин, постольку, поскольку представления A, B, C, D... в действительности соответствуют различным предметам, т.е. поскольку ложно каждое из следующих предложений: A есть то же, что B; A есть то же, что C; B есть то же, что C; и т.д. Если бы, например, A было тоже самое, что и B, то конечно было бы нелепым говорить о совокупности вещей A и B.

§ 4.

Существуют совокупности, которые, хоть и заключают те же части *A, B, C, D...,* но являются различными (мы назовем их существенно различными) в зависимости от точки зрения (понятия), с которой мы их рассматриваем, например, целый и разбитый в куски стакан, рассматриваемые, как сосуды для питья. То, что лежит в основании различия таких совокупностей, мы называем способом соединения или расположения их частей. Совокупность, определяемую таким понятием, при котором расположение частей безразлично (в которой, следовательно, не происходит никаких существенных изменений, если меняется только расположение частей), - такую совокупность я называю многообразием; а такое многообразие, все части которого будут рассматриваться как единицы известного рода *A*, т.е как предметы, содержащиеся в понятии *A*, называется множеством предметов *A*.

§ 5.

Известно, что существуют совокупности, части которых являются также составными, т.е. представляют из из себя опять совокупности. Между ними есть также совокупности, которые мы рассматриваем с такой точки зрения, что в них не произойдет существенного изменения, если мы станем рассматривать части частей, как части целого. Этого рода совокупности я назову термином заимствованным у математиков, – суммами. Действительно, понятие суммы и состоит в том, что

$$A + (B + C) = A + B + C.$$

§ 6.

Если мы рассматриваем предмет, как принадлежащий к такому роду вещей, что любые две из них M и N не могут никогда иметь другого отношения между собой, как то, что они или равны между собой, или одна из них представляет сумму, содержащую часть равную другой, т.е., что или $M = N$ или $M = N + \nu$ или $N = M + \mu$; причем для составных частей ν и μ имеет место тоже самое, т.е., что они или равны между собой, или одна из них может быть рассматриваема как часть другой, то этот предмет мы рассматриваем как величину.

§ 7.

Если данная совокупность предметов *A, B, C, D, E, F . . . . L, M, N . . . .* обладает таким свойством, что для каждой части M можно указать одну и только одну часть N такого рода, что мы можем определить помощью закона одинакового для всех частей совокупности, – или N его отношением к M, или M его отношением к N, – то такое собрание я называю рядом, а части его членами этого ряда. Закон, по которому или N определяется отношением к M, или M отношением к N, закон этот называется законом составления ряда. Один из членов ряда, притом какой угодно, я назову предыдущим, другой – последующим (не обозначая этим названием действительной последовательности во времени или пространстве). Я назову внутренним членом ряда каждый член M, который имеет предыдущий член и последующий, т.е. не только сам получается из другого члена, но и от которого тоже получается третий член, по закону составления этого ряда. Отсюда уже само собой ясно, какие члены я назову внешними, в случае если только они существуют, какой член я назову первым или последним.[1]

§ 8.

Представим себе ряд, первый член которого есть единица рода A, а каждый последующий член составляется из своего предыдущего таким образом, что, взяв предмет ему равный, соединяют его с новой единицей рода A, образуя из них сумму. Тогда все входящие в этот ряд члены, за исключением первого, который представляет простую единицу рода A, будут количествами. Они будут представлять именно те количества, которые я называю конечными или исчислимыми количествами или даже – со включением первого члена – числами, более определенно: целыми числами.

§ 9.

Смотря по различным свойствам понятия, которое мы здесь обозначаем через A, оно может заключать в себе то большее, то меньшее количество предметов, т.е. единиц рода A; поэтому в вышеупомянутом

[1] Дальнейшие разъяснения этих и некоторых из установленных в предыдущих §§ понятий следует искать в «Wissenschaftslehre».

ряде может быть и большее и меньшее количество членов. Их может быть также столько, что ряд, который должен исчерпать все эти единицы, не будет иметь последнего члена, как это мы покажем обстоятельнее впоследствии. Установив это, я буду называть бесконечным количеством количество большее, чем каждое конечное, т.е. количество такого рода, что каждое конечное многообразие представляет только часть его.

§ 10.

Со мной, я надеюсь, согласятся в том, что приведенное здесь определение обоих понятий, конечного и бесконечного количества, устанавливает различие между ними так, как его представляли себе те, кто употреблял эти выражения в строгом смысле слова. Со мною согласятся и в том, что в этих определениях нет ложного круга. Теперь для нас является важным только то, сможем ли мы при посредстве определения одного только бесконечного количества дать определение бесконечности вообще. Это было бы так, если бы оказалось, что понятие бесконечного в настоящем значении слова может быть применено только к количествам, т.е., что бесконечность есть свойство одних только количеств; иначе говоря, что мы, называя нечто бесконечным, постольку даем ему это название, поскольку мы находим в нем свойство, которое можно рассматривать как бесконечное количество. А это, по моему, действительно справедливо. Математик, очевидно, не употребляет никогда этого слова в другом смысле, так как он вообще занимается почти исключительно определением величин, принимая одну из них, того же рода, за единицу и пользуясь понятием о числе. Если он находит величину, которая больше, чем любое число тех которые приняты за единицу, то он называет ее бесконечно большой. Если же он находит величину столь малую, что каждое кратное ее оказывается меньше единицы, то он называет ее бесконечно малой. Кроме этих двух родов бесконечного и кроме выводимых из них родов бесконечно больших и бесконечно малых величин высшего порядка, которые вытекают все из того же понятия, не существует для него ничего бесконечного.

§ 11.

Это, столь известное математикам, понятие о бесконечном не удовлетворяет однако некоторых философов, особенно философов новейшего времени, как Гегеля и его последователей. Они называют его презрительно плохим бесконечным и думают, что знают несравненно

более высокое, истинное, качественное бесконечное, которое они находят только в Боге и вообще в абсолюте. Если они, как Гегель, Эрдман и другие, представляют себе математическую бесконечность только как величину, которая изменяется и не имеет границ в своем возрастании (что принимается некоторыми математиками, как мы вскоре увидим, за определение этого понятия), – то я охотно присоединяюсь к ним в отрицательном отношении к этому понятию о величине, которая только бесконечно возрастает, но никогда не достигает бесконечности. Действительная бесконечная величина, например, длина целой прямой, неограниченной с обеих сторон (т.е. величина протяжения, заключающего все точки, которые определяются только выражаемым в понятиях отношением к двум данным точкам), не должна быть переменной, чего и нет на самом деле в приведенном здесь примере. Величина, которая может быть всегда взята большей, чем мы ее брали раньше, и которая может стать больше, чем каждая данная (конечная) величина, может при этом оставаться всегда просто конечной величиной, что верно, например, для каждой числовой величины 1, 2, 3, 4, ...[2] Я не допускаю только того, чтобы философу известен был какой либо предмет, которому он был бы вправе приписать свою бесконечность, как качество, не обнаружив раньше в этом предмете, в каком-либо отношении, бесконечной величины или бесконечного количества. Если я могу доказать, что даже говоря о Боге, которого мы рассматриваем как всесовершенно единое, можно указать такие точки зрения, с которых мы видим в нем бесконечное количество, и что эти-то точки зрения и позволяют приписывать ему бесконечность, то вряд ли нужно доказывать дальше, что подобные соображения лежат также в основе всех остальных случаев, где правильно употребляется понятие о бесконечности. Я же говорю: мы называем Бога бесконечным, потому что мы должны признать, что он владеет силами более, чем одного рода, имеющими бесконечную величину. Так мы должны приписать ему силу познания, которая и есть истинное всеведение, т.е. обнимает бесконечное множество истин, а именно все истины, и т.д. Что же это за понятие об истинно бесконечном, которое нам хотят навязать вместо того, которое мы здесь установили? Это должно быть Все, заключающее в себе каждое нечто, абсолютное Все, вне которого нет ничего. Согласно такому объяснению это была бы бесконечность, заключающая в себе и по нашему определению бесконечно многое. Это была бы совокупность не только всех действительных вещей, но также и всего того, что не имеет никакой

[2]Мысль автора заключается, по видимому, в том, что переменная величина, принимающая сколь угодно большие значения, не есть истинно бесконечная величина, потому что каждое значение ее конечно.

действительности, совокупность предложений и истин в себе. Итак, не принимая даже в расчет всех остальных ошибок, которые вплетены в это учение о понятии "все", мы не имеем никакого основания отказываться от нашего понимания бесконечности и принимать учение наших противников.

§ 12.

Я должен, однако, признать неправильными и отвергнуть также некоторые другие определения бесконечного, которые были предложены даже математиками, полагавшими при том, что эти определения представляют только составные части одного и того же понятия.

1. В самом деле, как я уже упоминал, некоторые математики, в том числе даже Cauchy (в своем *«Cours d'analyse»* и некоторых других сочинениях), автор статьи «бесконечное» в словаре Клюгеля (Klugel) считали, что дают определение бесконечного, описывая его, как переменную величину, которая возрастает безгранично и может сделаться больше всякой данной величины, как бы велика она ни была. Граница этого безграничного возрастания должна быть бесконечно большой величиной. Так, тангенс прямого угла, рассматриваемый как величина непрерывная, безграничная, не имеющая конца, является в собственном смысле слова бесконечным. Ошибочность этого определения ясно видна уже из того, что то, что математики называют переменной величиной, на самом деле не есть величина, а только понятие, представление о величине, и при том такое представление, которое заключает в себе не одну величину, а бесконечное множество различающихся по своим значениям величин, то есть величин, которые отличаются друг от друга по своей величине (Grossheit). Называют бесконечным не различные значения приведенного здесь для примера $tang\,\varphi$ при различных значениях φ, а только то единственное значение, о котором думают, хотя в данном случае и неправильно, что это выражение принимает его для значения $\varphi = \pi/2$. Противоречиво также говорить о границе безграничного возрастания и, при определении бесконечно малого, о границе безграничного убывания. Если мы считаем первую определением бесконечно большого, то по аналогии следовало бы считать нуль (ничто) определением бесконечно малого, что, однако, несомненно неправильно, и чего не позволяют себе говорить ни Cauchy, ни Grunert.

2. Если вышеприведенное определение слишком широко, то определение принятое Спинозой (Spinoza) и многими другими

философами и математиками, напротив того, слишком узко. Это определение состоит в том, что только то бесконечно, что не способно к дальнейшему увеличению, или – к чему не может быть ничто прибавлено (приложено). Математик позволяет себе прибавлять к каждой величине, также и к бесконечно большой, еще другие величины, и не только конечные, но даже и бесконечные; он даже повторяет бесконечную величину бесконечное число раз и т.д. Если некоторые и спорят еще о том, законно ли это, то какой математик – если только он не отрицает все бесконечное – откажется признать, что длина прямой, ограниченной с одной стороны, но простирающейся в бесконечность с другой, бесконечна, и может быть, несмотря на это, увеличена прибавлениями с первой стороны.

3. Мы не можем признать более удовлетворительным также определение, предлагаемое теми, которые, придерживаясь точно значения составных частей слова, говорят, что бесконечное есть то, что не имеет конца. Если бы при этом они имели в виду только конец во времени, т.е. прекращение, то только вещи, существующие во времени, могли бы называться конечными или бесконечными. Но ведь мы спрашиваем также о вещах, которые существуют не во времени, например, о линиях и вообще о величинах, конечны ли они или бесконечны? Если же понимают это слово в более широком смысле, например, в смысле границы вообще, то я напомню, во-первых, что существуют предметы, для которых нельзя надлежащим образом доказать, что они имеют границу, если не придавать этому слову в высшей степени неопределенного и сбивчивого значения; а между тем никто не причислит их к бесконечным. Так, например, каждая простая часть времени или пространства (точка во времени или пространстве) не имеет границ, а, напротив того, рассматривается сама как граница (промежутка времени или линии), даже определяется многими именно так, как будто бы это и составляло ее сущность; но, однако, не пришло еще в голову никому (даже Гегелю) увидеть бесконечность в простой точке. Точно также математик не знает границы окружности и столь многих других замкнутых линий и поверхностей, считает их однако предметами конечными (если только он не имеет в виду бесконечного множества точек, заключающихся в них, хотя с этой точки зрения он должен признать нечто бесконечное в каждой ограниченной линии). Я замечу, во-вторых, что существует много предметов, бесспорно ограниченных, но рассматриваемых как величины бесконечные. Это имеет место не только для ранее упомянутой прямой, которая только с одной стороны простирается в бесконечность, но также для площади, ограниченной двумя бесконечными параллельными прямыми или двумя простирающимися в бесконечность сторонами угла, начерченного на плоскости и т.д. Точно также, в рациональной психологии мы назовем бесконечно большой познавательную силу в том

случае, когда, не будучи всеобъемлющей, она может обозревать только какое-либо бесконечное множество истин, например, только бесконечный ряд десятичных знаков, заключающихся в единственной величине $\sqrt{2}$.

4. Самое обыкновенное определение таково: бесконечно большим называется то, что больше всякой данной величины. Здесь приходится прежде всего определить точнее, что подразумевается под словом «данный». Означает ли оно нечто возможное, т.е. то, что может существовать в действительности или лишь то, что не содержит в себе противоречия? В первом случае понятие конечного ограничивают только разрядом предметов, принадлежащих к реальностям, т.е. таких, которые всегда реальны или были когда то, ли еще только станут реальными, или, по крайней мере, могли бы когда либо стать реальными. Fries (Naturphilosophie, §47), как кажется, и понимает бесконечность именно в этом смысле, называя ее неосуществимой. В разговорном языке, однако, применяется понятие конечного, также, как и бесконечного, в обоих случаях: и к предметам, которым присуща действительность, как, например, к Богу, и к другим предметам, о существовании которых не может быть и речи, каковы, например, простые предложения и истины сами в себе, вместе со своими составными частями, представлениями в себе; при этом мы допускаем, как конечные, так и бесконечные множества их. Если же понимать под данным все то, что только не содержит внутреннего противоречия, то уже в самое определение понятия вносится утверждение, что бесконечное не существует, потому что величина, большая, чем каждая величина, не заключающая в себе внутреннего противоречия, должна быть больше самой себя, что, очевидно, нелепо. Но есть еще третье значение, в котором можно принимать слово данный, а именно, если мы под этим словом подразумеваем все, что нам может быть только дано т.е. что может сделаться предметом нашего опыта. Но я обращаюсь с вопросом к каждому, не понимает ли он выражение «конечное» и «бесконечное» именно так (и, если только употребление их должно быть полезно науке, то не должен ли он их понимать непременно в этом смысле), что эти выражения относятся во всяком случае к известным внутренним свойствам предметов, а никоим образом не касаются только отношений их к нашей познавательной способности, даже к нашим чувствам (в том смысле, можем ли мы или не можем производить над ними опытов). Следовательно, вопрос о том, конечно ли что-нибудь или бесконечно, не может зависеть от того, имеет ли предмет, о котором идет речь, такую величину, которую мы можем воспринимать (например, от того, можем ли мы его обозревать или нет).

§ 13.

Как только мы пришли к соглашению, какое понятие мы должны связывать со словом бесконечный, и как только мы уяснили себе вполне составные части этого понятия, то ближайшим вопросом является следующий: обладает ли это понятие предметностью, то есть существуют ли предметы, к которым оно применимо, многообразия, которые мы можем назвать бесконечными в установленном нами значении. На этот вопрос я смело отвечаю утвердительно самым решительным образом. Уже в ряду тех предметов, которые не имеют никаких притязаний на действительность и даже на возможность, бесспорно существуют многообразия бесконечные. Очень легко заметить, что многообразие предложений и истин самих в себе – бесконечно. Если мы станем, например, рассматривать какую-нибудь истину, скажем, что истины вообще существуют, или любую другую истину, которую мы обозначим через *A*, то мы увидим, что предложение, выраженное словами «*A* истинно», уже отлично от *A*, потому что предложение *A* имеет, очевидно, совершенно другое подлежащее, а именно: подлежащим второго предложения будет все первое предложение *A*. Далее, по тому самому закону, по которому мы вывели из предложения *A* отличное от него предложение, которое мы назовем *B*, мы можем вывести из *B* третье предложение *C*, и так далее без конца. Совокупность всех этих предложений, из которых каждое последующее находится к непосредственно предыдущему в только что указанном отношении, а именно, что подлежащим последующего предложения является предыдущее предложение, о котором высказывается, что оно истинно, совокупность эта – утверждаю я – обнимает такое многообразие частей (предложений), которое больше, чем всякое конечное многообразие. Ибо читатель заметит без указаний с моей стороны сходство, которое имеет ряд предложений, составленных по только что приведенному закону образования с рядом чисел, рассмотренных в §8. Сходство это состоит именно в том, что к каждому члену последнего ряда найдется соответствующий в первом ряду, что, следовательно, для каждого числа, как бы велико оно ни было, найдется равное ему число различных предложений, и что мы можем всегда составить новые предложения, или, лучше сказать, что существуют сами по себе подобные предложения, независимо от того, будем ли мы их составлять или нет. Отсюда следует, что совокупность всех этих предложений имеет множественность, которая больше всякого числа и, следовательно, бесконечна.

§ 14.

Как ни просто и как ни ясно только что приведенное доказательство, однако есть много ученых и очень остроумных людей, которые считают парадоксальным и даже ложным то предложение, которое я считаю здесь доказанным. Они отрицают существование чего-либо бесконечного. Они утверждают, что не только среди реальных, но и среди остальных предметов нет ни отдельного предмета, ни совокупности нескольких предметов, в которых можно было бы допустить наличность бесконечного множества частей. Мы рассмотрим позже возражения, которые они приводят против бесконечного в области действительного, так как мы только позже приведем основания существования такой бесконечности. Здесь же мы рассмотрим только те положения, которыми пользуются для доказательства того, что нет бесконечного нигде, даже и в области предметов, не имеющих притязаний быть действительными. 1. «Бесконечного множества», как говорят наши противники, «не может быть нигде уже потому, что бесконечное не может быть соединено в одно целое, не может быть объято целиком в "мысли"». Это утверждение я должен назвать попросту ошибочным. Ошибка вытекает из ложного убеждения, что для того, чтобы вообразить себе целое, состоящее из известных предметов *a, b, c, d, . . .* нужно сперва составить себе представление о каждом отдельном предмете. На самом деле, это совершенно неверно. Я могу вообразить себе множество или совокупность всех жителей Праги или Пекина или, если уж так предпочитают, целое население этих городов, не представляя себе каждого из жителей в отдельности, т.е. не составляя отдельных представлений о каждом. Я это и делаю в данную минуту, говоря об этом множестве и высказывая, например, суждение, что количество это в Праге колеблется между 100000 и 120000. Как только мы имеем представление *A*, которое соответствует каждому из предметов *a, b, c, d, . . .* и не соответствует ничему другому, то нам очень легко составить представление о совокупности всех этих предметов. Для этого не нужно ничего другого, как только связать понятие, заключенное в слове совокупность с представлением *A* таким образом, как это указывают слова: совокупность всех *A*. Одно это замечание, правильность которого, я думаю, очевидна каждому, уничтожает все трудности, которые хотят усмотреть в понятии о многообразии, состоящем из бесконечного числа частей. Для этого нужно только, чтобы было на лицо родовое понятие, заключающее в себе все эти части [и не] заключающее ничего другого, как это, например, имеет место

в понятии «совокупность всех предложений или истин в себе», в котором необходимым родовым понятием является «предложение или истина в себе».

Я, однако, не могу оставить незатронутой еще другую ошибку, которая таится в обсуждаемом возражении.

А именно – мнение, которое гласит, что «многообразие не существовало бы, если бы не было кого-либо, кто бы думал о нем». Утверждающий это – если только он желает быть последовательным настолько, насколько это возможно, защищая ошибочное положение – должен не только утверждать, что нет бесконечных многообразий предложений или истин в себе, но должен также утверждать, что нет вообще ни предложений, ни истин в себе. Действительно, если мы уяснили себе вполне понятие о предложениях и истинах в себе и если мы не сомневаемся нисколько в их существовании, то вряд ли мы дойдем до подобных утверждений и уже во всяком случае не будем на них настаивать. Чтобы сделать это вполне очевидным, я позволю себе предложить один вопрос: находятся ли на полюсах земли тела жидкие и твердые, воздух, вода, камни, и т.п., действуют ли эти тела по известным законам друг на друга, например, так, что скорости, которые они передают друг другу при ударе, находятся в отношении обратном к их массам и т.п., и происходит ли это и тогда, когда это не наблюдает ни один человек, ни вообще ни одно мыслящее существо? Если на этот вопрос последует утвердительный ответ (а кто же мог бы ответить иначе?), то имеются предложения и истины в себе, которые выражают все эти явления, несмотря на то, что никто не думает и не знает о них. В этих же предложениях часто говорится о целом, о множестве, потому что каждое тело есть ведь целое и производит многие из своих действий только благодаря множеству своих составных частей. Существуют, следовательно, множества и целые независимо от того, имеется ли существо, которое бы о них думало. А если бы этого не было, если бы даже эти множества не существовали, то каким образом могли бы быть правильными суждения, которые мы о них высказываем? Или, больше того, какой был бы смысл этих суждений, если бы они были истинными лишь постольку, поскольку есть кто-то, воспринимающий эти явления? Когда я говорю «Эта глыба оторвалась на моих глазах от той скалы и упала вниз, рассекая воздух.», то это должно было бы иметь приблизительно следующий смысл: в то время как я представлял себе мысленно известные простые существа там наверху, произошло соединение их, которое я назову глыбой; это соединение отделилось от других соединений, которые, в то время, как я соединял их мысленно, объединились в одно целое, которое я называю скалой и т.д.

2. Можно было бы, однако, сказать: «при всем том остается все же справедливым тот факт, что исключительно от нас, и по большей части

вполне от нашего произвола зависит то, захотим ли мы соединить несколько простых предметов в одну совокупность или нет, и что только в случае, когда мы это делаем, между ними возникают известные отношения. Центральный атом пуговицы на моем сюртуке и центральный атом того яблока на башне не имеют ни малейшего отношения друг к другу и друг с другом ничем не связаны, и только благодаря тому, что я думаю о них одновременно, возникает некоторый род связи между ними.». – Но я должен высказаться и против этого. Еще до того, как мыслящее существо связало оба атома в своем представлении, они уже находились во взаимодействии, например, в силу притяжения и т.п.; и если бы только это мыслящее существо не предприняло под влиянием своих мыслей никаких действий, которые повлияли бы на отношения между обоими атомами, то было бы совершенно неверно утверждать, что только благодаря тому, что их мыслят вместе, между ними возникли отношения, которых без этого не было бы; неправильно также утверждать, что эти отношения не существовали между ними и раньше. Если я сужу правильно, что один атом находится ниже, а другой выше, и что, следовательно, этот притягивается тем несколько вверх и т.д., то все это имеет место и в том случае, когда я не думаю об этом.

3. Некоторые говорят: «Для того чтобы существовала совокупность, нет надобности в том, чтобы мыслящее существо *действительно думало о ней*, но необходимо, чтобы о ней *можно* было думать. А так как мыслящее существо не может представить себе бесконечное множество вещей, каждую в отдельности, и связать затем эти представления в совокупность, то невозможна и совокупность, заключающая в себе бесконечное множество вещей в качестве составных частей».

Мы уже видели в №1, насколько ошибочно повторенное здесь предположение, что для того, чтобы мыслить о совокупности, необходимо мыслить все ее части в отдельности, т.е. мыслить каждую отдельную часть при посредстве соответствующего ей единичного представления. Не представляется нам также никакой надобности в том, чтобы указывать на всеведущее существо, как на такое, которого не затрудняет даже понимание бесконечного множества предметов, каждого в отдельности. Мы не должны соглашаться даже и с первым предположением, а именно с тем, что существование совокупности вещей покоится на *возможности думать* об этой совокупности. Ибо *возможность мыслить* вещь никоим образом не составляет основания для возможности ее существования. Напротив того, возможность существования вещи составляет основание для того, чтобы разумное существо, если оно только не впадает в ошибку, нашло эту вещь *возможной* или, как говорят (в переносном смысле), мыслимой, т.е. чтобы ее можно было мыслить. Мы убедимся вполне в правильности этого

замечания и в полной несостоятельности, правда, очень распространенного мнения, которое я здесь оспариваю, если постараемся уяснить себе составные части важного понятия “возможности”. Если называют *возможным* то, что *может* быть, то это, очевидно, еще не будет разложение понятия о возможности, так как оно заключается целиком в выражении “может быть”. Но еще неправильнее было бы пытаться установить следующее определение: возможно то, *что можно мыслить*. Мыслить, в собственном значении этого слова, включая сюда уже и простое *представление*, мы можем и невозможное. Это мы и делаем в действительности каждый раз, когда мы высказываем о нем суждение, – признаем его, например, невозможным. Так, мы говорим, что нет и не может быть величины, которая бы выражалась нулем или $\sqrt{-1}$. Но даже если бы мы разумели под мышлением не простое представление, а *признание действительного существования*, то ложным является утверждение, что возможно все, что мы можем считать истинным. Ведь мы считаем иногда ошибочно и невозможное истинным, как, например, то, что мы нашли квадратуру круга. В таком случае, следовало бы сказать (с поправкой, которую я уже делал выше), что возможно то, о чем мыслящее существо, при условии правильности суждения, высказывает, что оно может случиться, т.е. возможно. Объяснение, заключающее в себе очевидный ложный круг! Итак, мы вынуждены отказаться окончательно от отношения к мыслящему существу при объяснении возможного и поискать другого признака. Иногда говорят, что возможно то, *“что себе не противоречит”*. Все, что содержит в себе противоречие, конечно, невозможно, так, например, суждение, что шар не есть шар. Но не все невозможное является именно таким, что противоречие содержится уже в составных частях, из которых составлено представление. Невозможно, чтобы тело, ограниченное семью плоскими гранями, имело равные грани, но в данном случае противоречие еще не обнаруживается сразу в соединении слов. Следовательно, мы должны расширить наше определение. Если бы мы сказали, что невозможно все, что противоречит какой-либо истине, то этим мы бы провозгласили невозможность всего, что не существует, потому что суждение, что возможное есть, противоречит истине, что его нет. В таком случае мы не допускали бы никакой разницы между возможным и истинным, и даже необходимым, что мы делаем однако все. Отсюда мы видим, что область истин, которым противоречит невозможное, должна быть ограничена только известным родом их, и вряд ли теперь от нас может ускользнуть, какого рода будут эти истины. Это – истины, содержащие чистые понятия. Что противоречит истине, содержащей чистые понятия, то следует назвать *невозможным*; возможно, следовательно, то, что не противоречит никакой истине, содержащей чистые понятия. Кто раз постиг, что это и есть правильное определение понятия возможности, тому вряд ли придет на ум утверждать, что нечто возможно лишь тогда, когда оно мыслимо, т.е. когда мыслящее существо не ошибающееся в своем суждении, найдет его возможным. Это ведь значило бы: «Предложение лишь тогда не противоречит истине, содержащей чистые понятия, когда не противоречит никакой истине, содержащей чистые понятия то, что что существует мыслящее существо, которое в согласии с истиной находит, что это предложение не противоречит никакой истине, содержащей чистые понятия». Кто же не заметит, каким лишним, не относящимся к делу является здесь введение этого мыслящего существа? Если же решено, что возможность создается не *мышлением*, то где же найдется основание для вывода о невозможности бесконечного множества на основании мнимого обстоятельства, что невозможно *мыслить совместно* бесконечное множество вещей?

§ 15.

Я считаю теперь достаточно обоснованным и доказанным мнение, что существуют бесконечные множества, по крайней мере, среди вещей нереальных, что именно множество *всех истин в себе бесконечно*. Подобно тому, как это было сделано в §13, мы придем к заключению, что бесконечно также множество всех *чисел* (так называемых натуральных или целых чисел, сущность которых мы определили в §8). Но и это положение звучит *парадоксально*, и мы можем, собственно, считать его *первым* среди *парадоксов*, появляющихся в области математики, так как раньше рассмотренный парадокс относится к более общей науке, чем наука о величинах.

«Если каждое число», можно сказать, «по самому понятию о числе, есть лишь простое конечное множество, то каким образом может быть бесконечным множество *всех* чисел? Когда мы рассматриваем ряд натуральных чисел

1, 2, 3, 4, 5, 6, . . .

то мы замечаем, что множество чисел, которое содержит этот ряд, начиная с первого (единицы), до какого-нибудь другого, например, до числа 6, выражается всегда этим последним числом. Поэтому множество *всех* чисел должно быть именно так велико, как *последнее* из них и, следовательно, само должно быть числом, а не бесконечностью».

Обманчивость этого вывода исчезает тотчас же, как только мы вспомним, что во множестве всех чисел в натуральном ряду *нет последнего* числа, что таким образом понятие о последнем (высшем) числе – понятие беспредметное, потому что содержит противоречие. Ибо, по *закону образования* этого ряда, данном в определении его (§8), каждый член ряда имеет *последующий*. Одним этим замечанием разрешается уже этот парадокс.

§ 16.

Если множество чисел (и именно так называемых целых чисел) бесконечно, то тем более *бесконечно* множество величин (по определению, приведенному в §6 и в «Wissenschaftslehre» в §87). В самом деле, по этому определению не только все числа будут также и величинами, но имеется гораздо больше величин, чем чисел, так как дроби 1/2, 2/3, 1/4, . . . , а равно и так называемые *иррациональные выражения* $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, . . π, e, . . также обозначают величины. По этому определению нет противоречия в том, чтобы говорить о *бесконечно больших и бесконечно малых* величинах, если под *бесконечно большой* величиной подразумевается лишь такая величина, которая при раз положенной в основание единице является целым, по отношению к которому каждое конечное множество этих единиц составляет только часть; а под *бесконечно малой* величиной подразумевается такая, по отношению к которой сама единица является целым, частью которого будет каждое конечное множество этих величин. Множество всех чисел является неоспоримым примером бесконечно большой *величины*. Я говорю: величины, а не бесконечно большого *числа*, потому что, как мы уже заметили в предыдущем параграфе, никак нельзя назвать числом это бесконечно большое множество. Если же величину, *бесконечно большую* по сравнению с другой величиной, взятой за единицу, мы примем за единицу и станем ею измерять ту величину, которую мы прежде принимали за единицу, то эта последняя представится нам *бесконечно малой*.

§ 17.

Время и пространство представляют в высшей степени важный род бесконечно больших величин, которые также еще не принадлежат к области реального, хотя и могут *определять* реальное. Ни время, ни пространство не представляют ничего реального, так как они не представляют из себя ни *субстанций*, ни *свойств* субстанций. Они выступают только, как нечто *определяющее* для всех несовершенных (ограниченных, конечных или, что сводится к одному и тому же, зависимых, сотворенных) *субстанций*, а именно, каждая из последних должна постоянно пребывать в некотором времени и известном пространстве, таким образом, что каждая простая субстанция в каждом пункте времени, т.е. в каждой простой части времени должна пребывать в какой-нибудь простой части пространства, т.е. в какой-нибудь его точке. Множество простых частей или точек, из которых состоит время и пространство, бесконечно. бесконечно не только количество простых частей, из которых состоит все время и все пространство, т.е. количество точек времени и пространства вообще, но и количество точек времени между двумя точками *a* и *b*, как бы близко ни отстояли эти точки друг от друга, тоже бесконечно. Точно так же бесконечно и количество точек пространства между любыми двумя точками пространства *a* и *b*, как бы близко не отстояли друг от друга эти две точки. Мне нет нужды защищать эти предложения, так как вряд ли найдется математик, (если только он не отрицает всякой бесконечности), который не согласился бы с ними. Чтобы спасти себя от признания бесконечного, которое здесь столь явно обнаружено, противники *всякой* бесконечности приводят следующее возражение: «Мы можем, конечно, всегда *мыслить* большее количество точек времени и пространства, чем то, которое мы мыслили, но количество точек *действительно существующих* останется всегда конечным». Но на это я возражаю, что ни время, ни пространство, а потому также ни простые части времени, ни простые части пространства не представляют ничего действительного, и что поэтому не сообразно говорить о конечном множестве их, как существующих в *действительности*. Тем более несообразно воображать, что эти части становятся действительными только через наше *мышление*. Ибо ведь отсюда следовало бы, что свойства времени и пространства зависят от нашего мышления и нашей оценки истинности, и что, следовательно, отношение диаметра к окружности круга было рационально, пока мы ошибочно считали его рациональным, и что пространство получит только тогда все те свойства, которые мы узнаем впоследствии, когда они нам станут известны. Если же наши противники исправят вышеприведенное выражение в том смысле, что настоящие свойства пространства и времени определяются только мышлением, соответствующим истине, то сказанное ими представит нечто тавтологическое, а именно: истинно то, что истинно; откуда, конечно, нельзя вывести ни малейшего возражения против утверждаемой нами бесконечности времени и пространства. Во всяком случае, нелепо

говорить, что время и пространство заключают столько точек, сколько мы их мыслим.

§ 18.

Хотя каждая величина, вообще каждый предмет, который нам представляется бесконечным в каком-либо отношении, должен представляться нам именно в этом отношении, как целое, состоящее из бесконечного множества частей, – невозможно однако утверждать наоборот, чтобы каждая величина, которую мы рассматриваем, как сумму бесконечного множества других конечных величин, была непременно бесконечной. Так, например, всеми признается, что иррациональные величины, как $\sqrt{2}$, по отношению к единице, положенной в основание, будут величинами конечными, хотя их можно рассматривать, как составленные из бесконечного множества дробей вида 14/10 +1/100+4/1000+2/10000+. . ., числители и знаменатели которых – целые числа; точно также известно, что сумма бесконечного ряда слагаемых вида $a + ae + ae^2 + ae^3$ . . in inf. $= a/(1 - e)$, т.е. равняется конечной величине каждый раз, как $e<1$[3]. Итак, в утверждении, что сумма бесконечного

[3] Так как обыкновенно доказательство суммирования этого ряда представляется не вполне строгим, то да будет мне позволено по этому случаю привести следующее доказательство. Если мы будем считать a=1 и e положительным (применение этого доказательства к другим случаям делается само собой), и если мы напишем символическое равенство

(1) $S = 1 + e + e^2 + . . .$ in inf.

то верно, по крайней мере, то, что S означает величину положительную, конечную или бесконечно большую. Но для каждого целого n

$S = 1 + e + e^2 + . . . + e^{n-1} + e^n + e^{n+1} + ...$ in inf.

или также

(2) $S = (1 - e^n)/(1 - e) + e^n + e^{n+1} + ...$ in inf.

вместо чего мы можем также написать

$(3)\ S = (1 - e^n)/(1 - e) + P^{(1)}$,

если обозначим значение бесконечного ряда $e^n + e^{n+1} + \ldots$ in inf. через $P^{(1)}$. При этом мы, по крайней мере, знаем, наверное то, что $P^{(1)}$ означает величину, зависящую от e и от n, измеримую или неизмеримую, во всяком случае положительную. Но тот же бесконечный ряд мы можем представить еще следующим образом:

$$e^n + e^{n+1} + \ldots \text{ in inf.} = e^n [1 + e + e^2 + \ldots \text{ in inf.}]$$

Здесь сумма бесконечного числа членов, стоящая в скобках в правой части равенства, а именно

$$[1 + e + e^2 + \ldots \text{ in inf.}]$$

совершенно сходна по виду с рядом, который в символическом равенстве (1) положен = S, но не следует считать ее одной и той же, так как *множество* слагаемых здесь и в (1), хотя оно и бесконечно в обоих случаях, не будет одним и тем же; здесь в нем несомненно *членов на n меньше*, чем в (1).

Итак, мы можем с полной уверенностью написать равенство $[1+e+e2+ \ldots \text{ in inf.}] = S - P^{(2)}$, при чем мы можем предположить, что $P^{(2)}$ обозначает во всяком случае величину, зависящую от n и всегда положительную. Поэтому мы получаем:

$$(4)\ S = (1 - e^n)/(1 - e) + e^n[S - P^{(2)}] \text{ или}$$

$$S[1 - e^n] = (1 - e^n)/(1 - e) - e^n P^{(2)}, \text{ или, наконец,}$$

$$(5)\ S = 1/(1 - e) - \{e^n/(1 - e^n)\}P^{(2)}$$

Соединение обоих равенств (3) и (5) дает

$$- e^n /(1 - e) + P^{(1)} = \{ - e^n/(1 - e^n)\}P^{(2)}$$

или

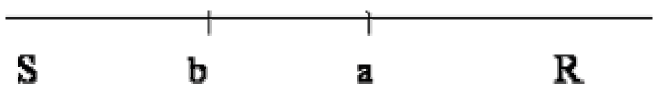
$$P^{(1)} + \{e^n /(1 - e^n)\}\ P^{(2)} = e^n /(1 - e^n),$$

откуда можно видеть, что если мы примем n сколь угодно большим и сделаем таким образом значение $e^n /(1 - e^n)$ меньше любой, сколь угодно малой величины 1/N, то каждая из величин $P^{(1)}$ и $\{e^n /(1 -$

количества конечных величин сама будет величиной конечной, нет никакого противоречия, потому что иначе оно не могло бы оказаться правильным. Парадокс, который можно было бы в нем усмотреть, происходит только от того, что забывают о том, как складываемые здесь члены становятся все меньше и меньше. Никого ведь не удивит, что сумма слагаемых, в которой каждое последующее слагаемое составляет только половину предыдущего, не может никогда составить больше, чем удвоенное первое слагаемое, потому что в каждом самом далеком члене этого ряда не достает до этого удвоенного числа именно столько, сколько составляет этот последний член

§ 19.

Мы не могли не заметить уже в примерах бесконечного, приведенных до сих пор, что не следует считать *равными между собой* все бесконечные многообразия в *отношении их множественности*. Напротив того, некоторые из них *больше*, другие *меньше*, т.е. одно многообразие может заключать в себе другое, как часть (или, наоборот, может само составлять часть другого). Это утверждение также звучит парадоксально для многих. Конечно, всем тем, кто определяет бесконечное, как нечто неспособное к дальнейшему увеличению, должно казаться не только парадоксальным, но даже *противоречивым* утверждение, что одно бесконечное больше другого. Но мы уже нашли выше, что это мнение опирается на такое понятие о бесконечном, которое не согласно с обыкновенным употреблением этого слова в речи. По нашему определению, соответствующему не только обычному употреблению этого понятия, но и целям науки, никто не может найти ничего противоречивого или даже странного, в мысли, что одно бесконечное множество может быть больше другого. Для кого, например, не будет ясно, что длина прямой,



простирающейся безгранично в направлении aR, бесконечна, но что

$e^n)\}\ P^{(2)}$ должна сделаться также меньше любого значения. Но раз это так, то каждое из равенств (3) и (5) показывает, что $S = 1/(1 - e)$, так как S при одном значении e может иметь только одну неизменную величину, следовательно не может зависеть от n.

прямая bR, из точки b идущая в том же направлении, больше, чем aR на отрезке ba? и, наконец, что прямая, идущая неограниченно в обоих направлениях aR и aS, должна быть названа большей на величину, которая сама бесконечна, и т.д.

§ 20.

Перейдем теперь к рассмотрению в высшей степени замечательной особенности, которая может встретиться в отношении двух многообразий, *если они оба бесконечны*; она, собственно говоря, действительно имеет всегда место, но ее упускали до сих пор из виду в ущерб познанию многих важных истин метафизики, физики и математики – и она, пожалуй, и теперь, когда я это высказываю, покажется в такой степени парадоксальной, что весьма необходимо остановиться несколько дольше на ее рассмотрении. Я утверждаю: два бесконечных многообразия могут быть в таком отношении одно к другому, что, *с одной стороны*, возможно соединить каждую вещь одного многообразия с некоторой вещью другого в пару таким образом, что не останется в обоих многообразиях ни одной вещи, не соединенной в пару, и ни одна вещь не будет входить в две или несколько пар. *С другой стороны*, возможно при этом, что одно из этих многообразий заключает в себе другое просто как *часть*, так что множества, которые они представляют, если рассматривать составляющие их вещи как равные, т.е. как единицы, имеют между собой *самые разнообразные отношения*. Я докажу это утверждение, приведя два примера, в которых сказанное несомненно имеет место.

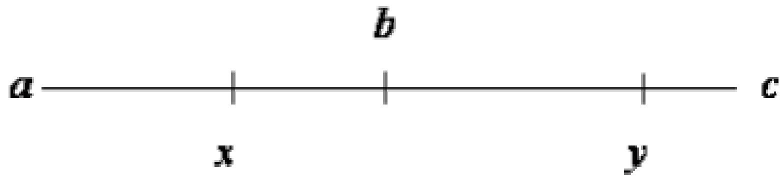
1. Возьмем любые две (отвлеченные) величины, например, 5 и 12; очевидно, что многообразие величин между нулем и пятью (или величин меньших, чем 5), а также многообразие величин, меньших чем 12, бесконечно. Точно также ясно, что последнее многообразие должно считаться большим, чем первое, так как первое составляет только часть второго. Если мы возьмем другие величины вместо величин 5 и 12, то мы принуждены будем сказать, что оба эти многообразия не всегда сохраняют одно и то же отношение друг к другу, а, напротив того, вступают в самые разнообразные отношения. Но не менее всего этого истинно и следующее: если x обозначает любую величину, содержащуюся между 0 и 5, и если мы определим отношение между x и y уравнением

$$5y = 12x$$

то y будет величиной лежащей между 0 и 12, и, наоборот, если только y содержится между 0 и 12, то x содержится между 0 и 5. Из этого

уравнения следует также, что каждому значению x принадлежит только одно значение y, и наоборот. Отсюда ясно, что для каждой величины многообразия величин между 0 и 5, равной x, существует в многообразии величин, лежащих между 0 и 12, величина, равная y, которая может быть соединена с ней в пару таким образом, что ни одна из вещей, составляющих оба эти многообразия, не останется не соединенной в пару и ни одна не окажется в двух или в нескольких соединениях.

2. Второй пример заимствуем из пространственной вещи. Кто уже знает, что свойства пространства основываются на свойствах времени, а свойства времени на свойствах отвлеченных чисел и величин, тот не нуждается, конечно, в примере для усмотрения того, что и во времени и в пространстве находятся такие бесконечные многообразия, какие мы нашли в области величин вообще. Однако, ради правильного применения нашего предложения впоследствии, необходимо рассмотреть подробно по крайней мере один случай, в котором бы встречались такие многообразия. Пусть будут поэтому *a, b, c* три любые точки на прямой; отношение расстояний *ab*:*ac* может быть каким угодно, лишь бы *ac* означало большее из двух расстояний. В таком случае, хотя многообразия точек лежащих на *ab* и на *ac*, оба бесконечны,



однако многообразие точек на *ac* превзойдет многообразие их на *ab*, так как на *ac*, кроме точек *ab*, находятся еще точки *bc*, которых нет на *ab*. Если изменить произвольно отношение *ab*:*ac*, то мы даже принуждены будем сказать, что и отношение этих многообразий будет совершенно изменено. Относительно этих двух многообразий также справедливо то самое, что прежде было показано для двух многообразий величин, содержащихся между 0 и5 и между 0 и 12, относительно пар, которые можно составить из любой вещи одного многообразия и любой вещи другого. В самом деле, пусть x – точка лежащая на *ab*; если мы возьмем точку y в направлении *ax* таким образом, что *ab*:*ac* = *ax*:*ay* то y будет точкой, лежащей на *ac*. Если же, наоборот, y – точка, лежащая на *ac*, если только мы будем определять *ax* по *ay* из того же уравнения, то x будет точкой лежащей на *ab*. Точно также всякое другое x будет определять другое y, и, наоборот, всякое другое y будет определять другое x. Из этих двух истин опять очевидно, что для каждой точки отрезка *ab* можно выбрать точку отрезка *ac* и для каждой точки отрезка *ac* – точку отрезка *ab* таким образом, что относительно пар, образованных соединением любых двух таких точек, можно утверждать, что нет ни одной точки ни в многообразии точек *ab*, ни в многообразии точек *ac*, которая не входила бы в одну из этих пар, и что нет также ни одной точки, которая бы входила в две или более пары.

§ 21.

Только на том основании, что два многообразия *A* и *B* находятся друг к другу в таком отношении, что к каждой части *a*, находящейся в *A*, поступая по известному правилу, мы можем найти находящуюся в *B* часть *b*, так, что все пары *(a + b)*, которые мы составим таким образом, заключают в себе каждую вещь, находящуюся в *A* и в *B* и заключают ее только по одному разу, – на одном только этом основании невозможно еще заключить, как видим, что эти о б а м н о г о о б р а з и я , е с л и о н и б е с к о н е ч н ы р а в н ы д р у г д р у г у в отношении множества своих частей (т.е. если мы не примем во внимание никаких других различий между частями). Однако, несмотря на это отношение между ними, которое само по себе, во всяком случае, представляется одинаковым для обоих многообразий, они могут находиться в отношении неравенства своих множеств, так что одно из них может представлять целое, а другое – его часть. О равенстве этих множеств можно будет заключить только тогда, когда для этого будет существовать еще какое-нибудь другое основание, как, например, то, что оба многообразия имеют совершенно одинаковые определяющие их основания, например, совершенно одинаковое происхождение.

§ 22.

Парадоксальность, связанная (чего я вовсе не отрицаю) с этим утверждением, проистекает единственно из того обстоятельства, что взаимное отношение, которое мы находим в двух сравниваемых между собою многообразиях, и которое состоит в том, что мы можем соединить их части в пары по способу, уже многократно указанному, – что это взаимное отношение в том случае, когда эти многообразия к о н е ч н ы , совершенно достаточно для того, чтобы признать их вполне равными в отношении м н о ж е с т в а их частей. Действительно, два конечных многообразия такого свойства, что для каждой вещи *a* одного многообразия можно найти вещь *b* в другом и соединить их в пары таким образом, чтобы не осталось ни одном из обоих многообразий ни одной вещи, для которой не нашлось бы соответствующей в другом, и чтобы не было ни одной вещи, которая бы входила в две или несколько пар, – два таких многообразия в отношении множества всегда равны между собой.

Поэтому кажется, что то же должно иметь место, если многообразия будут бесконечны.

Так кажется, говорю я; но при ближайшем рассмотрении обнаруживается, что это вовсе не является необходимым, так как основание, почему это всегда так во всех конечных многообразиях, заключается, именно, только в конечности их и, следовательно, отпадает для многообразий бесконечных. Действительно, положим, что два многообразия *A* и *B* конечны или (так как и этого уже достаточно), что мы знаем об одном из них *A*, что оно конечно, и, положим также, мы не обращаем внимания ни на какие различия между вещами их составляющими, с целью рассмотреть эти многообразия только в отношении их множеств. Тогда, обозначив любой предмет в многообразии *A* через 1, и какой-нибудь другой через 2 и продолжая таким образом дальше, то есть, обозначая каждый последующий всегда числом вещей, рассмотренных раньше (со включением его самого), мы должны будем дойти наконец до предмета в *A*, после обозначения которого не останется больше ни одного, не обозначенного. Это есть непосредственное следствие понятия о множестве конечном или исчислимом. Если этот последний предмет в *A*, о котором мы только что говорили получил для своего обозначения число *n*, то число вещей в *A* будет равно *n*. Так как для каждой вещи в *A* должна находиться вещь в *B*, которую можно соединить с ней в пару, то, обозначив каждую вещь в *B* тем самым символом, которым обозначили в *A* ту вещь, с которой вещь *B* соединяется в одну пару, мы необходимо должны прийти к тому, что число вещей взятых нами таким образом из *B*, также будет равно *n*, при чем каждая из них снабжена знаком, дающим возможность узнать, сколько мы до нее употребили вещей. Отсюда ясно, что в *B* вещей не меньше чем *n*, ибо этим знаком отмечена одна вещь (та, которую мы употребили последней). Но их также будет и не больше, потому что, если бы была хотя еще одна сверх уже употребленных, то не было бы такой вещи в *A*, с которой можно было бы соединить ее в пару, – а это противоречит предположению. Итак, число вещей в *B* не меньше и не больше, чем *n*, следовательно, равно *n*. Оба многообразия имеют, значит, одно и то же множество, или, как еще можно выразиться, р а в н о е множество. Очевидно, что это заключение не имеет места, как только многообразие вещей в *A* б е с к о н е ч н о , потому что в таком случае не только мы, с ч и т а ю щ и е , не дойдем никогда до последней вещи в *A*, но, по определению бесконечного многообразия, такая п о с л е д н я я вещь в *A* сама по себе не существует, т.е. сколько бы мы не означали вещей в *A*, все еще останутся другие для обозначения. Поэтому, несмотря на то, что в многообразии *B* никогда не будет недостатка в вещах, которые могли бы быть соединены все в новые и новые пары с вещами многообразия *A*, исчезнет, однако, всякое основание к заключению, что множество обоих многообразий одно и тоже.

§ 23.

Из сказанного только что ясно, что *для бесконечных многообразий исчезает основание*, обуславливающее необходимое равенство конечных многообразий, как только имеет место то отношение, о котором мы много раз говорили. Но сказанное не указывает нам, каким образом и вследствие чего является неравенство в бесконечных многообразиях. Это становится ясным только после рассмотрения приведенных примеров. Они именно учат нас тому, что взятые из сравниваемых многообразий две части a и b, которые мы соединяем в пару $a + b$, *входят в свои многообразия не вполне одинаковым образом*. В самом деле, если части a' и b' образуют еще одну вторую пару, и если мы сравним отношения, в которых находятся a и a' в многообразии A, b и b' в многообразии B, то тотчас же окажется, что эти отношения различны. Если мы возьмем (в первом примере) из многообразия величин, содержащихся между 0 и 5, совершенно произвольно, две величины, например, 3 и 4, то величины, соответствующие им в B (т.е. образующие с ними пары), будут следующие:

$$\frac{12}{5}\text{Ч}3 \text{ и } \frac{12}{5}\text{Ч}4\text{, т.е. } 7\frac{1}{5} \text{ и } 9\frac{3}{5}\,.$$

Если мы правильно понимаем под *отношением* двух предметов совокупность *всех* свойств, обнаруживающихся при их соединении, то при рассмотрении отношения, в котором находятся в одном многообразии части 3 и 4, в другом – части $7^1/_5$ и $9^3/_5$, мы должны обратить внимание не только на так называемое *геометрическое* отношение, но и на все, сюда относящееся, а именно также и на то, что *арифметическое* отношение между величинами 3 и 4 совершенно иное, чем между величинами $7^1/_5$ и $9^3/_5$, а именно – первое равно 1, второе $2^2/_5$. Итак, хотя каждая величина в A или в B может соединиться в пару с одной, и только с одной, величиной в B или в A, но однако множество величин в B иное (больше), чем в A, потому что *расстояние* между двумя любыми величинами в B будет иным (больше), чем *расстояние*, разделяющее две соответствующие им величины в A. Отсюда, естественно, следует, что в промежутке каждых двух величин в B содержится другое (большее) количество величин, чем это имеет место в A; таким образом, нет ничего удивительного, что и все количество величин в B другое (больше), чем в A. – Во втором примере мы имеем случай совершенно сходный с первым; поэтому мы скажем о нем только то, что точки в ab, составляющие пары с точками в ac, стоят друг к другу ближе, чем соответственные точки в *ac*, так как разстояние любых двух точек первого отрезка всегда относится к разстоянию соответственных двух точек второго отрезка как *ab*:*ac*.

§ 24.

Если мы можем считать теперь вполне доказанным и разъясненным предложение §20, то ближайшим следствием его является то, что мы не можем считать сейчас же равными две суммы величин, которые попарно равны (т.е. каждая величина из одной суммы равна некоторой величине из другой), если множество их бесконечно. Это возможно лишь в том случае, когда мы заранее убедились в том, что бесконечное множество этих величин в обеих суммах то же самое. Что сумма определяется своими слагаемыми и что, следовательно, равные слагаемые дают равные суммы, это конечно бесспорно и имеет место не только тогда, когда многообразие этих слагаемых конечно, но и тогда, когда оно бесконечно. Но, так как бесконечные многообразия бывают различны, то в последнем случае должно быть также доказано, что бесконечное многообразие слагаемых в одной сумме в точности таково же, как и в другой. Но, чтобы иметь право сделать это заключение, недостаточно ни в каком случае, по нашей теореме, только того обстоятельства, что можно будет найти по какому-нибудь способу для каждого члена одной суммы равный ему член другой суммы. Мы можем сделать это заключение с полной уверенностью только тогда, когда оба эти многообразия имеют одинаковые определяющие их основания. Впоследствии мы увидим на нескольких примерах, к каким несообразностям можно прийти при вычислениях с бесконечностями, если не принять этого в расчет.

§ 25.

Я обращаюсь теперь к утверждению, что существует бесконечное не только среди вещей, не имеющих действительности, но также и в самой области действительного. Кто только пришел к чрезвычайно важному убеждению (с помощью ли ряда заключений из истин, касающихся чистых понятий, или другим каким-либо образом), что существует Бог, существо, не имеющее причины своего бытия ни в каком другом существе и, вследствие этого, всесовершенное, т.е. соединяющее в себе все совершенства и силы, которые только могут совмещаться, и каждую из них в самой высшей степени, в какой только она может существовать наряду с

другими – кто пришел к этому убеждению, тот принимает уже этим самым, что есть существо бесконечное не в одном только отношении, в своем ведении, в своей воле, в своем внешнем воздействии, т.е. могуществе, такое существо, которое бесконечно много знает (совокупность всех истин), бесконечно многого желает (сумму всего в себе возможного добра), и все, чего только хочет, силою внешнего воздействия осуществляет в действительности. Из этого последнего свойства Бога вытекает дальнейшее следствие, что, кроме него, существует существа созданные, которые мы назовем, в противоположность ему, существами конечными, в которых, однако, можно усмотреть нечто бесконечное. В самом деле, уже самое многообразие этих существ должно быть бесконечным; точно так же многообразие состояний, испытываемых каждым из этих существ в отдельности, хотя бы в самое короткое время, должно быть бесконечно (потому что каждый промежуток времени содержит в себе бесконечно много мгновений) и т.д. Итак, и в области действительного мы встречаем везде бесконечное.

§ 26.

Не согласны с этим, однако, многие из тех ученых, которые не находят возможным отрицать бесконечность в вещах недействительных (как, например, в предложениях и истинах в себе). Допустить бесконечность также и в области действительного, это, по их мнению, запрещается древним основным положением, по которому все действительное должно иметь полную определенность. Однако, я считаю уже доказанным в «Wissenschaftslehre» (Bd. 1 § 45), что это основное положение относится и к предметам недействительным в том же смысле, как и к действительным. Оно справедливо везде только в том смысле, что из двух противоречащих друг другу свойств у каждого предмета одно должно ему принадлежать, а наличность другого должна отрицаться. Поэтому, если бы утверждение, что мы совершаем погрешность против этого положения, допуская бесконечность вещей действительных, было обосновано, – мы бы не имели права говорить о бесконечности даже в случае недействительных объектов нашего мышления, следовательно, мы бы не могли допускать бесконечного многообразия истин в себе или простых чисел. Но тем только, что мы признаем нечто бесконечным, мы не противоречим еще вышеприведенному основному положению. Мы говорим только, что в данном предмете, в известном отношении, существует множество частей большее, чем какое угодно число, следовательно, во всяком случае, такое множество, которое невозможно определить просто числом. Отсюда, однако, вовсе не следует, чтобы это множество было чем-то, не поддающимся никоим образом определению; вовсе не следует также, чтобы существовала хоть одна пара свойств, противоречащих друг другу, *b* и не-*b*, и чтобы ни одно из них не было присуще этому множеству. Что не имеет цвета, например, предложение, не может быть и определено указанием цвета; что не издает никакого тона, не может быть определено указанием тона и т.д. Но отсюда вовсе не следует, чтобы подобные вещи были неопределимы; они и не составляют исключения из того основного положения, что один из предикатов, *b* или не-*b* (голубой или неголубой, благозвучный или неблагозвучный и т.д.), относятся к каждой вещи, если только мы эти предикаты понимаем так, как следует, т.е. так, чтобы они остались противоречивыми. Совершенно так, как неголубое и неблаговонное является определением (правда, очень широким) теоремы Пифагора, так и простое указание того, что многообразие точек между *m* и *n* бесконечно, является одним из определений этого многообразия. И часто нет надобности во многих данных для того, чтобы вполне определить подобное бесконечное многообразие вещей, т.е. так, чтобы все его свойства сами собой вытекали из тех именно нескольких, которые даны. Так, мы определили самым совершенным образом только что упомянутое бесконечное многообразие точек между *m* и *n*, как скоро мы определили только две точки *m* и *n* (например, наглядно). Ибо этими немногими словами уже устанавливается дизъюнкция между принадлежностью или непринадлежностью к этому многообразию всякой другой точки.

§ 27.

Если я имел смелость в предыдущем защищать существование бесконечного в некоторых случаях против лиц, оспаривающих его, то теперь я должен признать с тою же откровенностью, что многие ученые, особенно математики, зашли слишком далеко в сторону противоположную, принимая бесконечно большое и бесконечно малое в таких случаях, когда, по моему глубокому убеждению, не существует ни того, ни другого.

1. Я не имею ничего возразить против допущения бесконечно большого периода времени, если разуметь под этим период, не имеющий начала или конца, или ни того, ни другого (следовательно, все время или совокупность всех точек времени вообще). Но отношение, которое имеет величина одного расстояния между

двумя точками времени, или одного промежутка времени к каждому другому расстоянию между двумя точками времени, или к каждому другому промежутку времени, я нахожу нужным признать только конечным отношением величин, вполне определенным с помощью одних понятий, и потому не нахожу возможным предположить, что промежуток времени, ограниченный началом и концом, в бесконечное число раз меньше или больше другого подобного промежутка. А это именно и делают, как известно, многие математики, говоря не только о бесконечно больших промежутках времени, ограниченных при этом с обеих сторон, но и еще чаще о бесконечно малых частях времени, в сравнении с которыми каждый конечный промежуток времени, например, одна секунда, должен быть признан бесконечно большим.

2. То же самое следует сказать о расстояниях между двумя точками в пространстве, которые, по моему мнению, могут быть друг ко другу всегда только в отношении конечном (определяемым вполне с помощью чистых понятий). Между тем нет ничего более обыкновенного у наших математиков, как речь о бесконечно больших и бесконечно малых расстояниях.

3. То же самое следует наконец сказать о принимаемых в метафизике и физике силах, действующих во вселенной. Мы не должны предполагать, чтобы одна из этих сил была в бесконечное число раз больше или меньше, чем другая; напротив того, мы должны думать, что все они находятся между собой в отношениях, вполне определяемых посредством понятий, как бы часто не позволяли себе делать обратное. Я не могу, конечно, с достаточной ясностью указать здесь основание этого утверждения тому, кому не известно, какие понятия я связываю со словами: воззрение и понятие, выводимость одного предложения из другого, объективный вывод одной истины из других, и многими другими словами, а также определение времени и пространства. Кто, однако, прочел, по крайней мере, две статьи: «Опыт объективного обоснования учения о сложении сил»[4] и «Опыт объективного обоснования учения о трех измерениях пространства»,[5] тому не покажется вполне непонятным следующее доказательство.

Из определения времени и пространства следует непосредственно, что все субстанции зависимые, т.е. созданные, находятся в

[4] “Versuch einer objectiven Begrundung der Lehre von der Zusamesetzung der Krafte”. (Prag 1842. In Commission bei Kronberger & Rziwnas).

[5] “Versuch einer objectiven Begrundung der Lehre von der drei Dimensionen des Raumes”. (Prag 1843. In Commission bei Kronberger und Rziwnas).

беспрестанном взаимодействии; а также, что для каждых двух точек времени α и β, как бы близко или далеко они друг от друга не отстояли, возможно рассматривать состояние вселенной в предыдущий момент α, как п р и ч и н у , а состояние вселенной в последующий момент β, как с л е д с т в и е (по крайней мере, не непосредственное), однако постольку, поскольку мы при этом отнесем к причине непосредственное воздействие Бога, которое могло иметь место в промежуток времени αβ. Отсюда следуеn дальше, что раз даны обе точки времени α и β, все с и л ы , которые имели созданные субстанции в точке времени α, м е с т а нахождения каждой субстанции, наконец, даны божественные влияния, которые испытала одна или другая из этих субстанций внутри промежутка αβ, – то с и л ы , которые получили эти субстанции в точке времени β, а также м е с т а , которые эти субстанции заняли, могут быть выведены таким же образом, как выводится д е й с т в и е (непосредственное или через посредство из своей полной причины. Это же опять требует, чтобы все свойства действия могли быть выведены из свойств причины с помощью составленной из одних чистых понятий большой посылки следующего вида: «каждая причина, обладающая свойствами u, u', u'' . . ., имеет действие, обладающее свойствами w, w', w'' . . . Отсюда легко вывести следствие, нужное для нашей цели: каждое обстоятельство в причине, н е б е з р а з л и ч н о е для действия, т.е. обстоятельство такого рода, что при его изменении действие не остается без изменения, должно быть в п о л н е о п р е д е л и м о при помощи одних понятий, при чем в основание могут быть положены в крайнем случае лишь такие воззрения, которые также необходимы для определения действия.

После этих предпосылок легко обосновать выше установленные утверждения. Действительно:

1. если бы имелись даже только две точки времени α и β, разстояние которых друг от друга было бы в бесконечное число раз больше или меньше чем разстояние двух других точек γ и δ, то отсюда вытекала бы та несообразность, что решительно невозможно было бы определить состояние вселенной, которое должно наступить в момент β, по тому ее состоянию, которое имело место в момент α, если даже принять при этом в расчет божественные влияния за промежуток времени αβ и величину этого промежутка. Далее, для определения состояния, в котором находятся созданные существа, и даже только для определения в е л и ч и н ы и х с и л в момент α, необходимо положить в основание особую единицу времени; в самом деле, так как эти силы только силы и з м е н я ю щ и е , то мы не можем определить иначе величину их, как приняв во внимание некоторый промежуток данный времени, в течении которого они производят данное действие. Следовательно, если мы примем (имея на это право) промежуток времени

γδ за эту единицу времени, то даже в самом благоприятном случае, т.е. если бы возможно было определить при этой единице времени все силы созданных субстанций в точке времени α, и если бы возможно было определить совершенно точно все другое, что составляет полную причину состояния вселенной в точке времени β, то, однако, невозможно было бы, пользуясь этой единицей времени, определить разстояние, в котором находится эта точка времени от α, так как оно оказалось бы бесконечно большим или бесконечно малым. Поэтому, если можно н а о б о р о т рассматривать любое состояние вселенной (при несколько раз уже упомянутых выше условиях), как причину любого позднейшего, то не могут существовать две точки времени α и β, разстояние которых было бы бесконечно большим или бесконечно малым в сравнении с разстоянием, в котором находится другая пара γ и δ.

2. Если бы были даны только две точки в пространстве *a* и *b*, расстояние которых друг от друга в сравнении с расстоянием другой пары *c* и *d*, оказалось бы бесконечно большим или бесконечно малым, то в определение состояния вселенной в любой точке времени α, входило бы между прочим определение величины силы (например, притяжения или отталкивания), с которой действует в этот момент времени находящаяся в точке *a* субстанция *A* на находящуюся в точке *b* субстанцию *B*. Это, однако, оказалось бы невозможным для этой силы, если бы мы приняли (что, во всяком случае, позволительно) расстояние *cd* за единицу, и если бы даже, в самом благоприятном случае, это могло быть сделано для всех прочих сил. В самом, деле, если бы сила притяжения или отталкивания, с которой субстанция *A* действует на субстанцию, вполне впрочем сходную с субстанцией *B*, но находящуюся в разстоянии, принятом за единицу длины (*cd*), имела даже совершенно определенную величину, то, именно вследствии ее определенности, сила притяжения или отталкивания, с которой *A* действует на *B*, была бы неопределенной, если бы отношение расстояний *ab*:*cd*, от которого она во всяком случае зависит, было бесконечным и потому неопределенным.

3. Если бы, наконец, была только одна сила *k*, которая, по сравнению с другой силой *l*, оказалась бы бесконечно большой или бесконечно малой, и если бы мы обозначили точку времени, в которой имеет место это отношение через α, то для этой самой точки времени в самом благоприятном случае, именно если бы все остальные силы при выбранных для их измерения единицах времени и пространства оказались конечными, причем, следовательно, и *l* была бы величиной конечной, – величина *k*, именно вследствие этого, оказалась бы бесконечно большой или бесконечно малой, т.е. неопределимой. Но вследствие этого все состояние вселенной в точке времени α оказалось бы неопределимым; поэтому невозможным оказалось бы вывести позднейшее состояние вселенной как результат действия первого.

§ 28.

Мне кажется, что я установил уже в предыдущем основные правила, которые дадут возможность судить правильно о всех тех странных учениях, которые нам придется изложить ниже, а также решить, следует ли нам отбросить эти учения, как заблуждения или принять их, признав их истинность, несмотря на всю их кажущуюся несообразность. Порядок, в котором мы будем приводить эти парадоксы, будет определяться научной областью, к которой они принадлежат, и их большей или меньшей важностью.

Первая и самая обширная наука, в области которой мы встречаем парадоксы бесконечного, это, как нам показали уже некоторые примеры, есть о б щ е е у ч е н и е о в е л и ч и н а х, где нет недостатка в парадоксах даже в у ч е н и и о ч и с л а х. С них мы и начнем.

Уже само п о н я т и е и с ч и с л е н и я б е с к о н е ч н о с т и, я признаю это, кажется заключающим в себе противоречие. Действительно, и с ч и с л и т ь – значит попытаться о п р е д е л и т ь с помощью чисел. Но как же возможно пытаться определить с помощью чисел бесконечное, то бесконечное, которое, по нашему собственному определению, должно представлять из себя нечто, состоящее из бесконечно многих частей, т.е. такое многообразие, которое больше всякого числа, и которое, поэтому, не может быть определено никаким числом? Это сомнение исчезнет однако, как только мы сообразим, что правильное исчисление бесконечного имеет целью не вычисление того, что в бесконечности неопределимо никаким числом (а именно, не вычисление бесконечного множества самого в себе): целью этого исчисления является определение о т н о ш е н и я между одним бесконечным и другим, что выполнимо в известных случаях, как мы это покажем на многих примерах.

§ 29.

Кто признает существование бесконечных множеств, а следовательно, и бесконечных величин вообще, тот не станет оспаривать существование бесконечных величин, очень различных по размерам. Если мы изобразим, например, ряд натуральных чисел таким образом:

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots n, n+1, \ldots \text{ in inf.},$$

то изображение

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n + (n + 1) + \ldots\ldots \text{ in inf.},$$

будет представлять с у м м у этих натуральных чисел; следующее же изображение

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 + \ldots\ldots + n^0 + (n + 1)^0 + \ldots\ldots \text{ in inf.},$$

в котором отдельные слагаемые 1^0, 2^0, 3^0 . . . суть простые единицы, представляет просто к о л и ч е с т в о или число всех натуральных чисел. Если мы обозначим его через $N^{(0)}$, составив таким образом чисто символическое равенство

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 + \ldots\ldots + n^0 + (n+1)^0 + \ldots \text{in inf.} = N^{(0)} \;.\,.\; (1),$$

и обозначим подобным же образом количество натуральных чисел от (n+1) через $N^{(n)}$, составив таким образом равенство

$$(n+1)^0 + (n+2)^0 + (n+3)^0 + \ldots \text{in inf.} = N^{(n)} \;.\,.\; (2),$$

то мы получим, при посредстве отнимания, совершенно безупречное равенство

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 + \ldots\ldots + n^0 = N^{(0)} - N^{(n)} \;.\,.\,.\; (3),$$

из которого мы видим, как иногда две бесконечные величины $N^{(0)}$ и $N^{(n)}$ имеют совершенно определенную конечную разность.

Если же мы обозначим величину, которая представляет с у м м у всех натуральных чисел, через $S^{(0)}$ или составим просто символическое равенство

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + n + (n + 1) + \ldots\ldots \text{ in inf.} = S^{(0)} \;.\,.\,.\; (4),$$

то мы тотчас же поймем, что $S^{(0)}$ должно быть много больше, чем $N^{(0)}$; но не так легко удается точно определить разность между этими двумя бесконечными величинами или их (геометрическое) о т н о ш е н и е друг к другу. Действительно, если мы составим, как это делали некоторые, равенство

$$S^{(0)} = N^{(0)} \cdot (N^{(0)} + 1)/2$$

то для оправдания его вряд ли нашлось бы у нас другое основание, кроме того, что при каждом конечном числе членов справедливо равенство

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n \cdot (n + 1)/2$$

откуда, по-видимому, следует, что, в случае бесконечного количества чисел, n переходит только в $N^{(0)}$. Однако, на самом деле, это не так, потому что было бы бессмысленно, в случае бесконечного ряда, говорить о его последнем члене, имеющем значение $N^{(0)}$.

Положив же в основание символическое равенство (4), последовательным умножением обеих его частей на $N^{(0)}$, можно конечно вывести следующие равенства:

$$1^0 \cdot N^{(0)} + 2^0 \cdot N^{(0)} + 3^0 \cdot N^{(0)} + 4^0 \cdot N^{(0)} + \ldots \text{ in inf.} = (N^{(0)})^2,$$

$$1^0 \cdot (N^{(0)})^2 + 2^0 \cdot (N^{(0)})^2 + 3^0 \cdot (N^{(0)})^2 + 4^0 \cdot (N^{(0)})^2 + \ldots \text{ in inf.} = (N^{(0)})^3$$

и т.д.

Из этого мы видим, что существуют бесконечные величины так называемых высших порядков, из которых одна превосходит другую в бесконечное число раз. Существование бесконечных величин, имеющих рациональное, также как и иррациональное отношение $\alpha:\beta$, вытекает уже из того, что, поскольку $N^{(0)}$ означает неизменную бесконечную величину, постольку $\alpha \cdot N^{(0)}$ и $\beta \cdot N^{(0)}$ представляют пару бесконечных величин, находящихся в отношении $\alpha:\beta$.

Не менее ясным окажется и то, что все многообразие (множество) величин, находящихся между двумя данными, например, между 7 и 8, хотя оно и бесконечно и не может быть вследствие этого определено никаким числом, как бы велико последнее ни было, зависит однако единственно от величины разстояния этих двух крайних величин, т.е. зависит от величины 8 – 7 и должно быть вследствие этого одинаковым, как только это разстояние одинаково. В этом предположении, если обозначить количество всех величин, лежащих между a и b через

$$\text{Mult} \cdot (b - a),$$

то получатся бесчисленные равенства следующего вида:

$$\text{Mult} \cdot (8 - 7) = \text{Mult} \cdot (13 - 12),$$

а также и следующего:

$$\text{Mult} \cdot (b - a) : \text{Mult} \cdot (d - c) = b - a : d - c,$$

против правильности которых нельзя возразить ничего основательного.

§ 30.

Эти немногие примеры показали уже в достаточной степени, что существует исчисление бесконечно большого; точно также существует и исчисление бесконечно малого. В самом деле, если $N^{(0)}$ представляет величину бесконечно большую, то

$$1/(N^{(0)})$$

будет, бесспорно, представлять величину бесконечно малую, и не будет никакого основания к тому, чтобы считать подобное представление беспредметным, по крайней мере в общем учении о величинах. Возьмем один только пример. Пусть будет поставлен следующий вопрос: если кто-нибудь стреляет наудачу, то какова вероятность, чтобы центр пули на пути своем прошел точно через центр того яблока, которое висит на этом дереве. Каждый должен признать, что многообразие всех возможных здесь случаев, отвечающих подобной или еще меньшей вероятности будет бесконечно, откуда следует, что степень этой вероятности имеет величину, которая = или $< \frac{1}{\Gamma\ddagger}$. Этим уже доказано существование бесконечного количества бесконечно малых величин, взаимные отношения которых могут быть какие угодно, а именно: одна бесконечно малая величина может быть больше другой бесконечно малой величины в бесконечно большое число раз. Поэтому, как между бесконечно большими, так и между бесконечно малыми величинами, существует бесконечно много порядков, и, при соблюдении известных правил, будет, конечно, возможно найти некоторые правильные равенства между величинами этого рода.

Пусть будет, например, установлено, что значение, переменной величины y зависит от другой величины x таким образом, что между ними всегда имеет место уравнение:

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Если природе того особенного рода величин, которые обозначены здесь через x и y не противоречит то обстоятельство, что они могут сделаться бесконечно малыми и получат, следовательно, бесконечно малые приращения, то увеличив x на бесконечно малую часть, которую мы обозначим через dx, и обозначив через dy изменение, которое получает вследствие этого y, мы поймем, что в таком случае необходимо будет иметь место следующее равенство:

$$y + dy = (x + dx)^4 + a(x + dx)^3 + b(x + dx)^2 + c(x + dx) + d,$$

из которого бесспорно вытекает равенство:

$$dy/dx = (4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c) + (6x^2 + 3ax + b)dx + + (4x + a)dx^2 + dx^3,$$

которое представляет отношение обеих бесконечно малых величин в зависимости не только от a, b, c и x, но также от значения переменной dx.

§ 31.

Большинство математиков, которые решились заниматься исчислением бесконечного, пошло, однако, гораздо дальше, чем это возможно на основании установленных здесь основных положений. Они не только позволяли себе предполагать, без дальнейших размышлений, бесконечно большое или бесконечно малое в величинах, с природой которых это предположение несогласно (примеры чего мы приведем лишь впоследствии), но даже величины, получаемые от суммования бесконечного ряда, они позволяли себе – то считать равными, то считать одну большей, чем другую; и это только потому, что в обеих величинах можно указать попарно члены, находящиеся в этом отношении равенства или неравенства, хотя их многообразия были очевидно не равны. Они имели смелость утверждать, что не только исчезает каждая бесконечно малая величина в сложении с величиной конечной или каждая величина высшего порядка при величине низшего порядка, но даже каждая бесконечно большая величина низшего порядка в сложении наряду с величиной высшего порядка исчезает подобно простому нулю. Чтобы оправдать, хотя бы до некоторой степени, свой метод исчисления, основанный на этом предложении, они стали утверждать, что можно принимать и нуль за делитель, и что частное

$$1/0$$

означает, в сущности, не что иное, как бесконечно большую величину, а частное 0/0 величину совершенно неопределенную. Мы должны показать, насколько эти понятия ложны и как они вводят в заблуждение, потому что они еще и теперь более или менее в ходу.

§ 32.

Еще в 1830 году в Gergonne Annales de mathematique (T. 20. № 12) некто, подписавшийся буквами M.R. S., пробовал доказать, что известный бесконечный ряд

$$a – a + a – a + a – a + \ldots \text{ in inf.}$$

имеет значение a/2. Предположив, что это значение = x, он счел себя вправе заключить, что

$$x = a – a + a – a + a – a + \ldots \text{ in inf.} = a – (a – a + a – a + a – a + \ldots \text{ in inf.}),$$

и что ряд, заключенный в скобках, тождествен с рядом подлежащим вычислению, и потому может быть положен равным x, что дает

$$x = a – x$$

и, следовательно,

$$x = a/2.$$

Не трудно найти ошибку в этом заключении. Ряд в скобках представляет, очевидно, не то самое многообразие членов, как ряд, который был положен равным x; в нем недостает первого *a*. Поэтому, в случае, если бы вообще можно было найти значение ряда, заключенного в скобки, то его следовало бы обозначить через x – a, а это дает тождественное равенство

$$x = a + x – a.$$

На это можно было бы возразить следующее: «В этом-то именно и лежит нечто парадоксальное, а именно в том, что этот ряд, который несомненно не бесконечно велик, оказывается не имеющим измеримого, поддающегося точному определению значения, и при том еще он происходит от продолженного в бесконечность деления *a* на 2 = 1 + 1, а это происхождение говорит в пользу предположения, что его настоящее значение именно a/2.»

Я напомню, что нет ничего непонятного в том, что существуют выражения величин, не обозначающие никакой д е й с т в и т е л ь н о й в е л и ч и н ы ; так, мы все считаем и должны считать нуль таким выражением.

Если мы в частности определим р я д , только как величину, а именно, как сумму его членов, то, в силу п о н я т и я о сумме (которая принадлежит к многообразиям, т.е. к таким совокупностям, в которых не должно обращать внимания на п о р я д о к частей), этот ряд должен обладать таким свойством что, как ни изменять порядок его членов, значение его не изменится. Для величин должно быть

$$(A + B) + C = A + (B + C) = (A + C) + B.$$

Этот признак дает нам ясное доказательство того, что изображение о котором здесь говорится,

$$a - a + a - a + a - a + \ldots \text{ in inf.}$$

не будет изображением действительной величины. В самом деле, мы не изменили бы наверное ничего в представленной здесь величине, если бы только это была величина, изменяя это изображение следующим образом:

$$(1) \qquad (a - a) + (a - a) + (a - a) + \ldots \text{ in inf.},$$

так как здесь не произошло ничего другого, кроме соединения в частные суммы каждых двух членов, следующих непосредственно друг за другом; это же наверное возможно, так как данный ряд действительно не должен иметь последнего члена. Но таким образом мы получаем

$$0 + 0 + 0 + 0 + \ldots \text{ in inf.},$$

что очевидно равно 0.

Точно также ничто не может измениться в величине, представляемой этим выражением, в случае, когда оно выражает действительно некоторую величину, если мы его преобразуем либо к виду

$$(2) \qquad a + (-a + a) + (-a + a) + (-a + a) + (-a + a) + \ldots \text{ in inf.},$$

при чем, пропуская первый член, мы соединяем каждые два следующих в частную сумму, либо к виду

$$(3) \qquad -a + (a - a) + (a - a) + (a - a) + (a - a) + \ldots \text{ in inf.},$$

что мы получим из выражения (1), переставляя члены в каждой паре и производя в полученном выражении те же изменения, посредством

которых получилось (2) из (1). Если бы данное выражение не было б е с п р е д м е т н ы м , то выражения (1), (2) и (3) должны были бы обозначать все одну и ту же величину, так как очевидно, представление суммы одного и того же многообразия величин не может представлять нескольких о т л и ч н ы х д р у г о т д р у г а величин, как это имеет место для выражений $\sqrt{+1}$, , *arcsin* = 1/2 и во многих других случаях. Рассматриваемое здесь выражение

$$a - a + a - a + a - a + \ldots \text{ in inf.},$$

если оно не вполне беспредметно, с таким же правом, с каким мы хотели бы положить его равным нулю (который, в несобственном значении этого слова, тоже обыкновенно называют величиной), должно бы быть также положенным равным +a, а также и – a. Но это совершенно бессмысленно и дает нам право заключить, что мы имеем здесь перед собой совершенно беспредметное выражение.

Справедливо, что ряд, о котором мы говорили, получается от продолженного до бесконечности деления на 2=1+1, но, именно потому, что это деление дает всегда остаток (здесь, попеременно, то –a, то +a), все ряды, которые получают таким образом, только тогда представляют истинное значение частного (здесь a/2), когда остатки, получаемые при дальнейшем делении, становятся меньше каждой, сколь угодно малой величины, как это имеет место для рассмотренного в §18 ряда $a + ae + ae^2 + \ldots$in inf., который получается от деления a на 1 –e, при e<1. Если же, как в рассматриваемом случае, e=1 или даже e>1, так что остатки возрастают тем более, чем дольше продолжается деление, то нет ничего понятнее, как то, что невозможно значение ряда положить равным частному a/(1 – e). Ибо каким образом можно было бы, например, положить 1/11 равной знакопеременному ряду

$$1 - 10 + 100 - 1000 + 10000 - 100000 + \ldots \text{ in inf.},$$

получаемому продолженным в бесконечность делением 1 на 1+10? Кто бы захотел считать ряд

$$1 + 10 + 100 + 1000 + \ldots \text{ in inf.},$$

составленный из одних положительных членов, равным отрицательной величине – 1/9, только потому, что разложение 1/(1 – 10) ведет к этому ряду? Тем не менее, упомянутый выше M.R.S. защищает и такие суммования и хочет доказать, например, справедливость равенства

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 \ldots \text{in inf.} = 1/3$$

только на том основании, что

$$x = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \ldots$$
$$= 1 - 2(1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots) = 1 - 2x.$$

При этом упущено опять из виду, что ряд, содержащийся в скобках, вовсе не тождествен с первоначальным, так как он уже не имеет того же количества членов. Что это выражение также беспредметно, обнаруживается подобно тому, как и в раньше рассмотренном случае, потому что и это выражение ведет к противоречию. В самом деле, с одной стороны, должно было бы быть:

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \ldots =$$
$$= 1 + (-2 + 4) + (-8 + 16) + (-32 + 64) + \ldots =$$
$$= 1 + 2 + 8 + 32 + 64 + \ldots$$

С другой стороны, также верно, что рассматриваемое выражение

$$= (1 - 2) + (4 - 8) + (16 - 32(+ 64 - 128) + \ldots$$
$$= -1 - 4 - 16 - 64 - \ldots$$

Таким образом, двумя правильными способами получается сперва бесконечно большое положительное значение, затем бесконечно большое отрицательное значение одного и того же выражения.

§ 33.

Итак, если мы не желаем впадать в заблуждение в наших вычислениях бесконечного, то мы не должны никогда позволять себе считать, что две бесконечно большие величины, происшедшие от сложения членов двух бесконечных рядов, равны или что одна больше или меньше другой на том только основании, что каждый член одного ряда соответственно равен, больше или меньше некоторого члена другого ряда. Столь же мало мы имеем право считать одну сумму большей только потому, что она заключает все члены другой суммы и, кроме того, еще много, даже бесконечно много, других (положительных) членов, которых нет в другой сумме. Несмотря на все это, первая сумма может быть меньше, даже в бесконечное число раз меньше, чем вторая. Пример этого представит нам очень известная сумма к в а д р а т о в всех натуральных

чисел, если мы сравним ее с с суммой п е р в ы х с т е п е н е й этих чисел. Конечно, никто не станет оспаривать, что каждый член ряда всех квадратов

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots \text{in inf.} =$$
$$1 + 4 + 9 + 16 + \ldots \text{in inf.} = S^{(2)}$$

будучи также натуральным числом, встречается и в ряду всех первых степеней натуральных чисел

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 +$$
$$+ 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + \ldots \text{in inf} = S^{(1)};$$

точно также никто не станет оспаривать, что в последнем ряду $S^{(1)}$, кроме всех членов ряда $S^{(2)}$, содержится еще много, даже бесконечно много членов отсутствующих в ряду $S^{(2)}$, так как они не квадратные числа. Тем не менее, $S^{(2)}$, сумма всех квадратов, вовсе не меньше, а, напротив того, бесспорно, больше $S^{(1)}$, суммы первых степеней всех чисел. В самом деле, во-первых, к о л и ч е с т в о ч л е н о в в обоих рядах (если они еще не рассматриваются, как суммы и потому не разлагаемы на произвольное количество частей) наверное одно и то же, несмотря на всю кажущуюся верность противоположного. Возвышая в квадрат каждый отдельный член ряда $S^{(1)}$ при образовании ряда $S^{(2)}$, мы изменяем только свойство (величину) этих членов, а не их количество. Если же множество членов $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ одно и то же, то очевидно, что $S^{(2)}$ должно быть много больше, чем $S^{(1)}$, так как, за исключением п е р в о г о члена, каждый из остальных членов $S^{(2)}$ решительно больше соответствующего члена $S^{(1)}$. Таким образом, рассматривая $S^{(2)}$ как величину, мы видим, что $S^{(2)}$ заключает в себе $S^{(1)}$ как часть, и содержит в себе еще другую часть, которая представляет опять бесконечный ряд с таким же числом членов как и $S^{(1)}$, а именно:

$$0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, \ldots \text{in inf.};$$

В этом ряду, если исключить д в а первых члена, все следующие члены больше соответственных членов в $S^{(1)}$, так что сумма целого ряда опять бесспорно больше, чем $S^{(1)}$. Если мы отнимем от этого остатка снова ряд $S^{(1)}$, то мы получим в качестве второго остатка ряд с тем же самым количеством членов

$$-1, 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, \ldots n(n-2) \ \ldots \text{in inf.};$$

за исключением т р е х первых членов все следующие снова будут больше тех же по порядку членов в $S^{(1)}$, так что и этот третий остаток следует считать бесспорно большим, чем $S^{(1)}$. А так как такие заключения могут быть продолжены до бесконечности, то ясно, что сумма $S^{(2)}$ в бесконечное число раз больше суммы $S^{(1)}$, так как вообще имеем

$$S^{(2)} - m\,S^{(1)} = (1 - m) + (2^2 - 2m) + (3^2 - 3m) + (4^2 - 4m) + \\ + \ldots (m^2 - m^2) + \ldots + n(n - m) + \ldots \text{ in inf.};$$

и в этом ряду только конечное число отрицательных членов, а именно, только $m - 1$ первых членов, m-ый член = нулю, все же остальные имеют положительные значения и возрастают до бесконечности.

§ 34.

Прежде, чем разъяснить надлежащим образом неправильность утверждений, упомянутых уже в §31-ом, мы должны определить понятие о н у л е точнее, чем это делается обыкновенно.[6]

Бесспорно, все математики связывают со знаком 0 лишь такое понятие, которое позволяет всегда написать оба следующих равенства:

I. $A — A = 0$, II. $A \pm 0 = A$,

независимо от того, какое выражение представляет А: соответствует ли оно действительной величине, или совершенно беспредметно. Каждый согласится, что это возможно только при условии, что мы рассматриваем знак 0 не как представление действительной величины, но просто, как отсутствие величины, а изображение $A \pm 0$ мы рассматриваем, как требование, состоящее в том, чтобы к величине, которую мы обозначим через А, н е б ы л о н и ч е г о п р и б а в л е н о и чтобы н и ч е г о о т н е е н е б ы л о о т н я т о. Ошибочно было бы думать, что для полного определения понятия которое математики связывают с этим знаком, достаточно простого определения, состоящего в том, что нуль есть безпредметное представление величины. В самом деле, известно, что существуют и другие употребительные в математике обозначения величин, которые также безпредметны, но которых мы не

[6] Очень охотно уступаю Г. М. Ohm'y заслугу, заключающуюся в том, что он первый обратил внимаше математиков (в своем очень ценном «опыте вполне последовательной системы математики»— «Versuch eines vollkommen consequenten System der Mathematik») на трудности понятия о нуле.

можем считать равными нулю, как например, знак, получивший такую важность в анализе, $\sqrt{-1}$. Если же мы определим точнее значение знака 0, говоря, что его следует так понимать, чтобы оба уравнения I и II всегда имели место, то мы установим понятие, которое, с одной стороны, настолько широко, насколько этого требует обычное употребление и интересы науки, с другой же стороны, достаточно узко для того, чтобы не допустить неправильного употребления его.

Требование, чтобы равенства I и II всегда выполнялись, не только определяет особым образом понятие о нуле, но, если присмотреться ближе, то окажется, что и понятия о с л о ж е н и и и в ы ч и т а н и и, которые здесь являются выраженными при помощи знаков + и —, благодаря установлению этих равенств, получают некоторое своеобразное расширение, которое очень полезно для науки.

Польза науки требует еще, чтобы понятие об у м н о ж е н и и было так расширено, чтобы возможно было при всяком А (будет ли оно величиной конечной, бесконечно большой или бесконечно малой, или просто безпредметным представлением величины, как например, $\sqrt{-1}$ или 0) написать равенство

III. $0 \cdot A = A \cdot 0 = 0$.

Наконец, в интересах науки следует обобщить насколько возможно и понятие д е л е н и я так, чтобы не оказаться в противоречии с тремя установленными уже уравнениями; нужно, следовательно, также в равенстве

IV. $B \times (A/B) = (A/B) \times B = A$

дать знаку В настолько широкое значение, насколько это позволяют сделать первые три равенства при уже установленной общности их. Эти три равенства допускают, чтобы В означало любую величину, конечную, также как и бесконечно большую или бесконечно малую, также и мнимую $\sqrt{-1}$, но не допускают никоим образом, чтобы считать $B = 0$, т. е. не допускают, чтобы был принят когда-либо д е л и т е л е м 0 или какое-либо выражение, равносильное нулю. В самом деле, так как по равенству III $0 \cdot A$ должно быть равно 0 при всяком А, то положив $B = 0$ в равенстве IV, мы найдем, что $B \cdot (A/B)$ должно быть также = 0; это согласуется с требованием равенства (IV), а именно с тем, что $B \cdot (A/B) = A$, только в одном случае, когда $A = 0$. Чтобы не впасть в противоречие, мы должны, следовательно, установить правило, что н у л ь и л и р а в н о с и л ь н о е н у л ю в ы р а ж е н и е н е м о ж е т б ы т ь у п о т р е б л я е м о, к а к д е л и т е л ь, в р а в е н с т в е, к о т о р о е д о л ж н о б ы т ь ч е м - н и б у д ь о т л и ч н ы м о т п р о с т о г о т о ж д е с т в а, как например:

$$A/0 = A/0.$$

Необходимость соблюдения этого правила, кроме только что сказанного, доказывается еще многими, крайне нелепыми следствиями, которые получаются из совершенно правильных посылок, как только мы допустим деление на нуль.

Пусть *a* будет какой-либо вещественной величиной; тогда, если бы было возможно деление на выражение, равнозначное нулю, как например, на 1—1, то по известному, конечно, совершенно правильному методу деления получилось бы следующее равенство:

$$a/(1 - 1) = a + a + a + a + \ldots + a + a/(1 - 1)$$

в котором может быть любое количество слагаемых вида a. Если-же мы отнимем от обеих частей одно и тоже выражение $a/(1 - 1)$ то получится в высшей степени нелепое равенство

$$a + a + a + a + \ldots + a = 0.$$

Если *a* и *b* пара различных величин, то будут иметь место следующие два тождества:

$a - b = a - b$
$b - a = b - a$; поэтому сложение дает
————————
$a - a = b - b$ или
$a(1 - 1) = b(1 - 1)$

Если же можно делить обе части равенства на множитель, равный нулю, то мы получим нелепый результат $a = b$ при всяких a и b. Впрочем, всем известно, что при более длинных вычислениях слишком легко натолкнуться на неправильный результат, отбрасывая множитель общий обеим частям уравнения, не убедившись предварительно, что он не равен нулю.

§ 35.

Теперь легко будет показать, как неправильно обычное утверждение, что не только бесконечно малая величина высшего порядка

в соединении с помощью сложения или вычитания с конечной величиной, но также каждая конечная, даже бесконечно большая величина всякого, сколь угодно высокого порядка, в соединении с помощью сложения или вычитания с другой бесконечно большой высшего порядка и с ч е з а е т, п о д о б н о п р о с т о м у н у л ю. Если сказанное следует понимать таким образом (а в обыкновенном изложении, которое еще более неосмотрительно, чем употребленные нами выражения, не предупреждают против такого ложного толкования), — если это, говорю я, следует понимать так, что в комплекс двух величин $M \pm m$, из которых первая в бесконечное число раз больше второй, можно вторую выбросить, даже и в том случае, когда в дальнейших вычислениях величина *M* сама исчезнет (например, вследствие вычитания равной ей величины), то мне незачем и доказывать ошибочность этого правила.

Мне скажут, однако, что это следует понимать иначе. Считая величины M и $M \pm m$ равными, этим не хотят еще выразить, что они дают один и тот же результат, когда в продолжении вычислений они войдут в новые соединения с помощью сложения или вычитания; равенство же их состоит только в том, что они дадут одинаковые результаты при процессе и з м е р е н и я именно величиною *N*, которая, будучи одного с ними порядка, находится к одной из них в конечном (следовательно, вполне определимом) отношении. Для утверждения, что величины равны между собою, невозможно, правда, требовать меньше. Но удовлетворяют ли по крайней мере, этому требованию M и $M \pm m$? Если одна из них, например, *M*, находится в иррациональном отношении к мере *N*, то при самом обыкновенном способе измерения, при котором к любому числу *q*, как бы ни было оно велико, ищут другое число *p* такого свойства, что

$$M/N > p/q < (p + 1)/q;$$

может случиться, что также и $(M \pm m)/N$ заключается постоянно в тех же границах, т.е. что

$$(M \pm m)/N > p/q < (p + 1)/q.$$

Но если отношение M/N будет рациональным, то существует число *q*, для которого

$$M/N = p/q,$$

а $(M \pm m)/N$, напротив того, или > или < p/q, и здесь, очевидно, обнаруживается разница между этими величинами даже по сравнении с обыкновенными (конечными) ч и с л а м и. Каким же образом можем мы их назвать равными?

§ 36.

Чтобы избежать подобных противоречий, многие математики прибегали, по примеру Э й л е р а , к определению, состоящему в том, что бесконечно малые величины, на самом деле, — п р о с т ы е н у л и , бесконечно большие—частные, которые произошли от деления конечного числа на простой нуль. Это определение оправдывало с избытком исчезновение или отбрасывание бесконечно малой величины в соединении ее посредством сложения с конечной, но зато тем труднее оказалось сделать понятным существование бесконечно больших величин и возможность получения конечной величины от деления двух бесконечно малых или бесконечно больших величин, а также существование бесконечно малых и бесконечно больших величин высших порядков. В самом деле, бесконечно большая величина являлась таким образом, как результат деления на нуль или на выражение, равнозначное нулю (т. е., собственно, беспредметное представление); она получалась, следовательно, способом, запрещенным законами вычислений; на всех же конечных или бесконечных величинах, которые получались от деления бесконечного числа на бесконечное, лежало многократное пятно незаконного происхождения.

Что, по-видимому, больше всего говорит в пользу правильности этого вычисления с нулями, это способ, которым вычисляется значение величины y, зависящей от переменной x, значение, определяемое уравнением

$$y = Fx/\Phi x$$

в том частном случае, когда известное значение $x = a$ обращает в нуль или одного знаменателя этой дроби, или вместе числителя и знаменателя. В первом случае, когда $\Phi a = 0$, а Fa остается величиной конечной, приходят к заключению, что y сделался б е с к о н е ч н о б о л ь ш и м . Во втором же случае, когда Φa, также как и Fa, равно нулю, приходят к заключению, что оба выражения Фx и Fx содержат по одному или по нескольку раз сомножитель формы (x—a) и поэтому должны быть следующего вида:

$$\Phi x = (x - a)^m . \varphi x;\ Fx = (x - a)^n .\ fx,$$

при чем φx или fx могут представлять постоянные величины. Если теперь $m > n$, то приходят к заключению, что после сокращения дроби $Fx/\Phi x$, не изменяющего ее значения, знаменатель для $x = a$ все еще делается нулем; поэтому утверждают, что значение $x = a$ дает бесконечно большое значение для y. Если же $m = n$, то конечная величина, которая выражается дробью $fa/\varphi a$, будет истинным значением y, так как должно быть $Fx/\Phi x = fx/\varphi x$. Если наконец $m < n$, то, в виду того, что

$$Fx/\Phi x = ((x - a)^{n-m} \cdot fx)/\varphi x$$

при $x = a$, обращается в нуль, приходят к заключению, что значение $x = a$ обращает в нуль величину y.

Я думаю об этом способе следующее: если значение y, отвечающее $x = a$, в приведенных случаях считается бесконечно большим, то это, очевидно, может быть случайно правильным только тогда, когда величина y принадлежит к роду тех, которые могут делаться также и бесконечно большими. Этот результат не вытекает, однако, из данного выражения, которое требует деления на нуль. Из того только обстоятельства, что сказано, что значение y всегда одно и то же, а именно то, которое определяется данным выражением $Fx/\Phi x$, можно сделать заключение о свойстве величины y для всех тех значений x, которые дают действительную величину, но не тех значений x, при которых это выражение становится беспредметным, как это бывает в случае, когда его знаменатель или его числитель, или оба делаются нулями. Конечно, можно сказать, что величина y в первом только случае, когда $\Phi x = 0$, больше всякой данной величины; во втором же случае, где $Fx = 0$ меньше всякой данной величины; в третьем случае, наконец, когда $Fx/\Phi x$ заключает одинаковое число сомножителей вида $(x - a)$ в числителе и знаменателе, приближается к значению $fa/\varphi a$ так близко, как только угодно, если значение x будет сколь угодно приближено к a. Однако, из всего этого не следует ничего относительно свойств этого значения там, где выражение $Fx/\Phi x$ беспредметно, т.е. не имеет никакого значения, потому что принимает форму 0 или c/0, или даже 0/0. В самом деле, предложение о равенстве двух дробей, из которых одна отличается от другой только тем, что отброшен общий сомножитель в числителе и знаменателе, справедливо, конечно, во всех случаях, за исключением одного, когда этот сомножитель нуль. Иначе, с таким же правом, с каким мы пожелали бы утверждать что $\dfrac{2 \bullet 0}{2 \bullet 0} = \dfrac{2}{3}$, можно было бы утверждать, что любая величина, например 1000 = 2/3. В самом деле, точно так же

верно то, что $3000 \cdot 0 = 0$, как и то, что $2 \cdot 0 = 0$. Поэтому, если можно положить $\dfrac{2 \bullet 0}{2 \bullet 0} = \dfrac{2}{3}$, то можно также положить

$$\frac{2\,\text{Ч}(3000 \bullet 0)}{3\,\text{Ч}(2 \bullet 0)} = \frac{(2 \bullet 3000) \bullet 0}{(3 \bullet 2) \bullet 0} = \frac{2 \bullet 3000}{3 \bullet 2} = 1000\,.$$

Ошибка в заключении, которая бросается здесь в глаза, только от того была менее заметна выше, что там деление на множитель $x - a$, равнозначный нулю, производится в такой форме, которая скрывает это нулевое значение. А так как отбрасывание общего сомножителя во всяком другом случае позволительно, то с тем большей уверенностью позволяют себе поступать так и в этом случае, что значение y оказывается как раз таким, каким его ожидают,—а именно, когда оно конечное, то оно является таким, каким оно должно быть по закону непрерывности; оно оказывается равным нулю, когда смежные с ним значения стремятся к нулю, – и бесконечно большим, когда смежные с ним возрастают до бесконечности. Забывают при этом, однако, что закону непрерывности не подчиняются все переменные величины, что величина, которая становится сколь угодно малою, вследствие того, что значение x делают сколь угодно близким к значению a, еще не должна по этой причине сделаться равной нулю для $x = a$; и что, точно также возрастая до бесконечности, с приближением x к a, она не должна сделаться действительно бесконечной для $x = a$. В геометрии именно имеется бесконечно много величин, не подчиняющихся закону непрерывности, например, величины линий и углов, которые служат для определения периферии и поверхности многоугольников и многогранников, и многие другие.

§ 37.

Хотя в принятом до настоящего времени изложении учения о бесконечном можно указать,—и не без основания, по моему мнению,—много важных недочетов, однако известно, что результаты, по большей части, получаются совершенно верные, если только следовать с надлежащей осмотрительностью правилам, общепринятым в исчислении бесконечного. Такие результаты не могли бы никогда получиться, если бы не существовал действительно безупречный способ понимания этого метода исчисления и употребления его. Я охотно допускаю, что только этот способ и был тем, который неясно рисовался в уме остроумных изобретателей этого метода, хотя они и не были еще в состоянии изложить вполне ясно свои мысли в этом направлении, что в труднейших случаях удается обыкновенно только после многократных попыток.

Да будет мне дозволено указать здесь в немногих чертах, как, по моему мнению, следует понимать этот метод, чтобы считать его вполне обоснованным. Достаточно будет поговорить о приеме, который следует соблюдать в дифференциальном и интегральном исчислении, так как метод исчисления бесконечно больших величин вытекает уже отсюда по простой противоположности, особенно после всего того, что сделал Cauchy в этом направлении.

А именно, я не нуждаюсь вовсе в том стеснительном предположении (которое считалось необходимым), что рассматриваемые в вычислении величины могут становиться бесконечно малыми, —ограничение, которое исключает из области приложения этого метода исчисления все ограниченные величины времени и пространства, а также все силы ограниченных субстанций, следовательно, в сущности, все величины, определение которых для нас наиболее важно. Я требую только, чтобы эти величины, в случае, если они переменные, но не произвольные переменные, а зависящие от одной или нескольких других величин, имели свои производные (une fonction derivee, по определению Lagrange'a), если не для всех значений определяющих величин, то, по крайней мере, для тех значений, к которым исчисление должно быть приложено. Другими словами, если x одна из произвольно изменяющихся величин, а $y=fx$, зависящая от нее величина, и если наше исчисление должно дать правильный результат для всех значений, содержащихся между $x = a$ и $x = b$, то y должно зависеть от x таким образом, чтобы для всех значений x, содержащихся между a и b, частное

$$\Delta y/\Delta x = (f(x + \Delta x) - fx)/\Delta x,$$

получаемое от деления приращения y на соответствующее ему приращение x, подходило бы к постоянной или к зависящей только от x величине $f'x$ сколь угодно близко, если только Δx будет взято достаточно малым; затем оставалось бы столь близким или приближалось бы еще больше, если Δx будет еще уменьшено[7].

[7] Можно доказать, что все зависимые переменные величины, если только они вообще определимы, должны следовать этому закону в такой мере, что исключения могут встречаться, если и в безконечном множестве, всегда однако только для изолированных значений их произвольных переменных.

Если дано уравнение между x и y, то очень легким и известным делом является нахождение производной от y. Если, например,

$$(1) \qquad y^3 = ax^2 + a^3,$$

то для каждого Δx, которое лишь неравно нулю, имеем:

$$(2) \qquad (y + \Delta y)^3 = a(x + \Delta x)^2 + a^3,$$

откуда, следуя известным правилам, получим:

$$(3) \qquad \Delta y/\Delta x = (2ax + a\,\Delta x)/(3y^2 + 3y\,\Delta y + \Delta y^2) =$$
$$=(2ax)/(3y^2) + (3ay^2\Delta x - 6axy\Delta y - 2ax\Delta y^2)/(9y^4 + 9y^3\Delta y + 3y^2\Delta y^2).$$

Искомая же производная функция от функции y или (по обозначению Lagrange'a) y' будет

$$2ax/3y^2,$$

функция, которая получается из выражения

$$\Delta y/\Delta x,$$

если после надлежащего его преобразования, состоящего в том, что мы в числителе и знаменателе отделим члены умножаемые на Δx или на Δy от остальных членов, т. е. придадим ему вид

$$(2ax + a\,\Delta x)/(3y^2 + 3y\,\Delta y + \Delta y^2,$$

положив Δx и $\Delta y = 0$.

Мне незачем говорить о том, в сколь многих отношениях полезно нахождение этих производных; а также, каким образом вычисляется с помощью этих производных каждое конечное приращение y, соответствующее конечному приращению x, и каким образом, если дана, наоборот, только производная $f'x$, может быть определена первоначальная функция fx до постоянной.

Но так как мы получаем (что и было только что замечено) производную функцию зависимой величины y в отношении к ее переменной x, полагая Δx и $\Delta y = 0$ в выражении

$$\Delta y/\Delta x,$$

после того, как оно преобразовано таким образом, что ни Δx, ни Δy не являются нигде делителями, то можно с удобством представить производную с помощью такого изображения, как dy/dx, если мы при этом скажем, что, с одной стороны, все Δx, Δy, являющиеся в преобразованном выражении $\Delta y/\Delta x$, или написанные вместо них dx, dy, должны быть рассматриваемы и употребляемы, как простые нули; и что, с другой стороны, на dy/dx следует смотреть не как на частное, а только как на символ производной от y по x.

Ясно, что подобный прием не заслуживает ни в каком случае упрека в том, что при употреблении его рассматриваются отношения между величинами, которые вовсе не существуют (нуля к нулю), так как под этим изображением ничего другого, кроме простого знака, не разумеют.

Далее, так же безупречным будет и то, что мы обозначим через d^2y/dx^2 вторую производную от y по x, т.е. ту, зависящую только от x (или может быть и постоянную) величину, к которой частное

$$\Delta^2y/\Delta x^2,$$

подходит сколь угодно близко, если только взять Δx произвольно малым, и будем понимать это таким образом, что величины Δx, $\Delta^2 y$, являющиеся в разложении $\Delta^2y/\Delta x^2$, мы будем рассматривать и употреблять как простые нули; в изображении же d^2y/dx^2 мы будем видеть не деление нуля на нуль, но только символ функции, в которую обращается разложение $\Delta^2y/\Delta x^2$ после указанного изменения.

Предполагая, что символы dy/dx, d^2y/dx^2 . . . имеют эти значения, мы можем строго доказать, что для каждой переменной

$$y = fx,$$

зависящей определенным образом от произвольной переменной x, за исключением лишь известных изолированных значений x и Δx, имеет место уравнение:

$$f(x + \Delta x) = fx + \Delta x.(dfx/dx) + (\Delta x^2/(1.2)).(d^2fx/dx^2) + (\Delta x^3?(1.2.3)).(d^3fx/dx^3) +$$

$$+ \ldots +(\Delta x^n/(1.2. \ldots .n)).(d^nf(x +\mu. \Delta x)/dx^n),$$

где $\mu<1$[8]

Всем известно, сколь много важных истин общего учения о величинах (особенно так называемого высшего анализа) может быть обосновано с помощью этого одного равенства. Но и в прикладном учении о величинах, в учении о пространстве (геометрии), в учении о силах (статике, механике и т. д.) это уравнение открывает путь к решению труднейших задач, например, к спрямлению линии, к вычислению величины поверхностей, объемов тел, без предположения о существовании бесконечно малых, которое здесь составляло бы противоречие, и без помощи какой-либо так называемой аксиомы, как например, известной аксиомы Архимеда и многих других.

Но если возможно установить уравнение такого рода, как например, формула для спрямления кривых в прямоугольной системе координат

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2 + (dz/dx)^2}$$

в выше изложенном значении, то будет также возможно, без опасения ошибки, написать уравнения, подобные следующим:

$$d(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots) = bdx +2cxdx + 3dx^2dx + \ldots,$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

или, если r означает радиус круга кривизны для линии одной кривизны:

$$r = -(ds^3)/(d^2y.dx)$$

и много других, в которых мы не рассматриваем знаки dx, dy, dz, ds, d^2y и т. д., как знаки действительных величин, а считаем их, напротив того, равнозначными нулю. При этом мы рассматриваем все уравнение, только как такое соединение знаков, которое при производстве над ним

[8] Доказательство этого предложения для всякого рода зависимости переменной y от x, будет ли эта зависимость известной и выражаемой при помощи известных до настоящаго времени знаков, или нет, —давно уже написано автором и, быть может, будет вскоре опубликовано. *Примеч. издателя.*

преобразований, установленных правилами алгебры для символов действительных величин (здесь, следовательно, также деление на *dx* и т. п.), никогда не дает неправильного результата в том случае, когда окажется возможным освободить обе части уравнения от *dx*, *dy* и т. д.

Легко понять, что это действительно справедливо и что иначе и быть не может. Потому что, если уравнение

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$$

правильно, то как же могло бы быть неправильным уравнение

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

из которого, по только что упомянутому способу, можно сейчас же вывести первое.

Легко, наконец, понять, что не будет ошибки, если мы в каком-нибудь уравнении, заключающем в себе знаки *dx*, *dy*, . . . с самого начала выбросим для сокращения все те слагаемые, о которых мы наперед точно знаем, что они исчезают в конце вычислений, как равнозначные нулю. Так, если, например, мы получили после некоторых вычислений вытекающее из равенств 1 и 2 уравнение

$$3y^2.\ \Delta y + 3y\ \Delta y^2 + \Delta y^3 = 2ax\ \Delta x + a\ \Delta x^2,$$

которое, при переходе к символам равнозначным нулю, принимает вид

$$3y^2dy = 2axdx$$

то мы можем тотчас же заметить, что слагаемые, которые заключают высшие степени dy^2, dy^3, dx^2, во всяком случае исчезнут в конце концов ; поэтому можно сразу положить

$$3y^2dy = 2axdx,$$

получается искомая производная от *y* по *x*

$$dy/dx = 2ax/3y^2.$$

В заключение скажем кратко, что весь этот прием основывается на положениях, совершенно подобных тем, которые служат основанием исчисления так называемых мнимых величин (которые, также как наши *dx*, *dy* . . . , суть только простые символы) или найденного в последнее время сокращенного метода деления и других подобных сокращенных методов вычислений. Здесь именно так же, как и там, для оправдания употребляемого приема, достаточно придавать вводимым символам (dx, dy/dx, d^2y/dx^2, . . . $\sqrt{-1}$, $(\sqrt{-1})^3$, $\sqrt{-1}/\sqrt{-1}$, и т.п.) только такие значения и производить над ними только такие преобразования, чтобы каждый раз, когда в конце появятся, вместо беспредметных символов, символы, обозначающие настоящие величины, обе части уравнения были действительно равны между собою.

§ 38.

Если мы обратимся к прикладной части учения о величинах, то мы встретим первые парадоксы в области учения о времени в самом понятии о времени, особенно, поскольку оно должно быть непрерывным протяжением. Но столь известные уже с древних времен кажущиеся противоречия, которые считались содержащимися в понятии о непрерывном протяжении, континууме, тяготеют равным образом на протяжении времени, пространства и даже материи, поэтому мы и будем рассматривать их одновременно.

Конечно, было замечено, что все протяженное, по самому своему понятию, должно состоять из частей; заметили далее, что невозможно объяснить без ложного круга существование протяженного составлением его из частей, которые сами имеют протяжение, но, тем не менее, усматривалось также противоречие в предположении, что протяженное происходит от соединения частей, не имеющих протяжения, безусловно простых (точек во времени или в пространстве, атомов, т.е. простых субстанций, во вселенной в области действительности).

На вопрос, что представляется в этом последнем объяснении странным, отвечали одно из двух: или, что свойство, которое не принадлежит ни одной из частей, не может принадлежать целому, или же, что между любыми двумя точками, как во времени, так и в пространстве, и точно также между любыми двумя субстанциями, существует всегда некоторое разстояние, так что они не могут образовать континуума.

Но, чтобы заметить несообразность этих возражений, действительно, нет надобности в долгих размышлениях. Если части не обладают некоторым свойством, то должно ли оно также отсутствовать в целом? Наоборот, каждое целое имеет, и должно иметь, много свойств, которые не принадлежат частям. Автомат имеет свойство подражать почти до неузнаваемости движениям живого человека; отдельные же его части, пружины, колеса и т.д. лишены этого свойства.—Что любые две точки времени отделены одна от другой бесконечным множеством точек, лежащих между ними; что между любыми двумя точками пространства тоже лежит бесконечное множество точек; что даже в области действительности между любыми двумя субстанциями существует еще бесконечное множество других субстанций,—со всем этим, конечно, следует согласиться,—но вытекает ли отсюда следствие, заключающее в себе противоречие? Отсюда следует только то, что две точки, три, четыре, любое *конечное* множество точек не образует еще протяжения. Со всем этим согласны и мы; мы даже признаем, что и бесконечного количества точек не всегда достаточно для того, чтобы образовать континуум, например, самую короткую линию, если эти точки не имеют надлежащего *распределения*. А именно, если мы попытаемся уяснить себе понятие, которое мы называем *непрерывным протяжением*, или *континуумом*, то мы принуждены будем признать, что континуум существует там, и только там, где имеется совокупность простых предметов (точек во времени или в пространстве или субстанций), расположенных таким образом, что каждый из них на каждом, сколь угодно малом, расстоянии, имеет, по крайней мере. один соседний с ним предмет. Если это не имеет места, если, например, в данной совокупности точек в пространстве найдется хотя бы одна только точка, которая окружена соседними точками не настолько плотно, чтобы на каждом достаточно малом расстоянии находилась соседняя точка, то мы скажем, что эта точка *уединенная* (изолирована), и что эта совокупность именно поэтому не представляет совершенного континуума. Если же, напротив того, в данной совокупности точек нет ни одной точки в этом смысле изолированной, следовательно, если для каждой из них на каждом сколь угодно малом расстоянии существует, по крайней мере, одна соседняя точка, то нет никаких оснований не назвать этой совокупности континуумом. Иначе чего же еще мы станем требовать?

«Должно требовать того», возражают нам, «*чтобы каждая точка соприкасалась непосредственно с другой*». Но в таком случае ставится очевидно невозможное требование, заключающее в себе явное противоречие. В самом деле, когда же можно сказать, что две точки соприкасаются? Быть может тогда, когда граница одной точки (скажем, правая ее сторона) совпадает с границей другой (скажем, с ее левой стороной)? Но ведь точки— *простые*

части пространства: они, следовательно, не имеют никаких границ, никакой правой и левой стороны. Если бы одна точка имела только одну часть, общую с другой, то она совпадала бы с этой точкой; а если одна из них имеет нечто отличное от другой, то они обе должны лежать совершенно отдельно и, следовательно, между ними должно быть место еще для одной точки, даже для бесконечного количества точек, так как для этой средней точки, при сравнении ее с другими точками, справедливо то же самое.

«*Но это все*», говорят, «*недоступно пониманию!*» Конечно, этого нельзя ни осязать, ни воспринять с помощью зрения, но это познается умом и познается как нечто, что должно быть именно так и не может быть иначе, так что противоречие может появится только в случае, если представлять себе это иначе, т.е. неправильно.

Однако, на это скажут еще: «Слишком трудно представить себе в самой малой линии скопление бесконечно многих точек, даже бесконечное множество этих скоплений, как это приходится делать, следуя обыкновенному учению! Ведь мы должны быть в состоянии разложить самую малую линию еще на бесконечное множество других линий, разлагая ее сперва на две половины, потом эти половины опять пополам и так без конца!». Во всей этой совокупности мыслей я не нахожу ничего ни ошибочного, ни странного, за исключением одного только выражения: *самой малой линии*. Это выражение, встречаемое у многих, можно объяснить только недостатком внимания, так как самая малая линия вовсе не существует и не может существовать, и именно о рассматриваемых здесь линиях было сказано, что они могут быть разложены еще на меньшие. Каждое бесконечное многообразие, не только многообразие точек, образующих линию, может быть разложено на части, которые сами заключают бесконечные многообразия, даже на бесконечное число таких частей. Действительно, если Γ означает бесконечное многообразие, то $\Gamma/2$, $\Gamma/4$, $\Gamma/8$ ... *также будут бесконечными многообразиями*. Это заключается в понятии бесконечного.

Удовлетворившись после продолжительного обсуждения представленными объяснениями, нам могут сказать наконец: «Как же истолковать объяснения тех математиков, которые говорят, что протяженное не может быть составлено никаким, даже самым большим. накоплением точек и не может быть разложено на простые точки, как бы ни было велико множество частей, на который мы его разлагаем». Строго говоря, *с одной стороны*, следовало бы, конечно, учить, что конечное множество точек не составит никогда протяжения, бесконечное же множество непременно составит его, но только тогда, когда будет выполнено уже многократно упомянутое условие, а именно, чтобы для каждой точки существовали известные соседние точки на каждом достаточно малом расстоянии. При этом, с другой стороны, следовало бы признать, что не всякое разложение данного протяжения на части приводит к простым частям, а именно, этого не достигает никакое разложение на такие части, которых многообразие конечно; далее, этого достигает даже не всякое такое разложение, которое простирается в бесконечность (например, посредством последовательного деления пополам), как мы видели раньше. Тем не менее, следует настаивать на том, что каждый континуум не может произойти в конце концов ни из чего другого, кроме точек, и только точек. При правильном понимании одно согласуется с другим вполне хорошо.

§ 39.

Можно было наперед предугадать, что несомненные трудности представятся при рассмотрении свойств того особенного непрерывного протяжения, которым является время. Учение о времени должно было представлять благодарную почву, особенно для тех философов, которые, подобно скептикам, прилагали старания не к тому, чтобы уяснить человеческие понятия, а к тому, чтобы их запутывать, находя в них всюду кажущиеся противоречия. Здесь мы будем касаться только важнейших пунктов этого вопроса, тем более, что не все, относящееся сюда, касается понятия о бесконечности.

Поставлен был вопрос, представляет ли время нечто реальное и, если это так, то будет ли оно субстанцией или атрибутом и, в первом случае, если оно представляет из себя субстанцию, то какою она будет, сотворенною ли или несотворенной? Рассуждали так: «если время — субстанция, сотворенная, то оно должно было иметь начало, а также будет иметь конец; следовательно, оно должно изменяться, а потому должно нуждаться в другом времени, в течение которого оно бы изменялось. Еще несообразнее считать время самим Богом или находящимся в нем атрибутом. Противополагают, конечно, время вечности, но что же такое вечность? Каким образом возможно, чтобы бесконечное многообразие не только мгновений, но и целых промежутков времени заключалось в одном только, сколь угодно коротком, промежутке, например, в одном мгновении ока, каждая часть которого также носить название мгновения? На самом деле (говорят наконец) нет никакого времени. Ибо, прошедшего времени, очевидно, уже нет, именно потому, что оно прошло; будущего еще нет, так как оно еще будет; что же касается настоящего, то это ничто иное, как простое мгновение в самом строгом значении этого слова, мгновение, не

имеющее продолжительности, которое, следовательно, не может иметь претензий на имя времени».

По моим понятиям, время, без сомнения, не представляет ничего действительного в собственном значении этого слова, при чем действительность приписывается только субстанциям и их силам. Я не считаю поэтому времени ни Богом, ни созданной субстанцией, ни атрибутом Бога или какой-нибудь созданной субстанции, или совокупности нескольких субстанций. Поэтому самому оно не есть нечто переменное, оно, напротив того, есть то, в чем происходят все изменения. Если высказывают противоположное, как например, в поговорке: «времена меняются», то, как мы уже ранее говорили, здесь под временем подразумевают лишь находящиеся в нем вещи и их состояния. Желая объяснить ближе, что такое время, мы должны сказать, что оно есть то «определение», присущее всякой зависимой (или, что тоже самое, переменной) субстанции, представление, о котором мы должны присоединить к представлению этой субстанции для того, чтобы из двух противоречащих друг другу свойств b и не-b одно могло быть ей правильно приписано, а другое отвергнуто. Точнее говоря, упомянутое здесь «определение» есть только одна простая часть времени, точка времени или мгновение, в котором мы должны себе представить субстанцию x, которой мы желаем приписать с достоверностью одно из противоречащих свойств b и не-b, так что наше суждение должно быть, собственно, выражено следующим образом: x в точке времени t имеет или свойство b или не-b. Если только читатель согласится со мною в правильности этого определения понятия о мгновении, то я могу представить отчетливое объяснение того, что такое само время, а именно: что такое все время или вечность, т. е. то целое, для которого все мгновения суть лишь части. Всякое конечное время, т.е. каждый заключенный между двумя данными мгновениями промежуток времени или продолжительность времени, я определяю, как совокупность всех мгновений, заключенных между этими двумя крайними мгновениями. Согласно этим определениям, нет никакой разницы между временем и вечностью, если подразумевать под временем, как это часто бывает, не ограниченное, конечное время, а все время, бесконечное в обоих направлениях. Но есть большая разница в способе, как пребывает в этом времени Бог и переменные или созданные существа. Созданные существа пребывают во времени, изменяясь в нем, Бог же во все времена неизменно тот же. Это и подало повод называть его одного вечным, прочие же существа, его создания — временными существами. — Представить себе в чувственном образе, что каждое, даже самое короткое, мгновение, как например, один миг, заключает уже бесконечное множество целых промежутков времени, это — задача, конечно, трудная для нашего воображения. Довольно и того, что мы понимаем это у м о м и признаем, что иначе оно и не может быть. Из указанного здесь понятия о времени можно вывести и объективное его основание, но изложение этого здесь было бы слишком пространным. Несообразно было бы только утверждать, что в коротком промежутка времени заключается такое же множество мгновений, как и в более длинном, или что бесчисленные промежутки времени, на которые можно разложить данный промежуток, имеют ту же длину, как и в каком-либо более длинном промежутке времени.

Наконец, то ошибочное заключение, с помощью которого предполагают совершенно уничтожить реальность понятия о времени, представляется столь простым, что едва ли требует опровержения. Мы ведь признаем, что времени вообще не существует, и потому, конечно, нет ни прошедшего, ни будущего времени, так как нет даже настоящего, но каким образом может отсюда следовать, чтобы время представляло собою н и ч т о ? Ведь предложения и истины сами по себе составляют нечто, хотя никому не придет в голову утверждать, что они представляют нечто существующее, если не смешивать их с их пониманием в сознании мыслящего существа т.е. с действительными мыслями и суждениями?

§ 40.

Относительно парадоксов в у ч е н и и о п р о с т р а н с т в е известно, что и для пространства также не найдено определения. Часто принимали его за нечто существующее, то смешивая его с субстанциями, которые в нем находятся, то считая его даже самим Богом или, по крайней мере, атрибутом божества. Даже великому Н ь ю т о н у пришла мысль определить пространство, как сензорий божества. Другие полагали, что д в и ж у т с я не только субстанции, находящиеся в пространстве, но и само пространство, так что меняются места мест. Далее, во времена Д е к а р т а , провозглашали, как новое открытие, мысль, что в пространстве находятся не все, а только, так называемые, чувственные субстанции, пока наконец не пришла К а н т у неудачная мысль, которую многие еще теперь за ним повторяют, не считать пространство ничем объективным, а только (субъективною) ф о р м о ю н а ш е г о в о з з р е н и я . Далее был поставлен вопрос. не имеют ли другие существа иного пространства, например, пространства о двух или о четырех измерениях. Г е р б а р т , наконец, хотел одарить нас двойным н е п о д в и ж н ы м и н е п р е р ы в н ы м пространством и точно также двойным временем. Обо всем этом я уже высказывал свое мнение в других местах.

Для меня пространство, подобно времени, н е е с т ь с в о й с т в о с у б с т а н ц и й , а только некоторое к ним относящееся определение, а именно: те определения в созданных субстанциях, которые дают основание того, что, владея своими свойствами, они вызывают в известное время одна в другой определенные изменения, я называю м е с т а м и , на которых эти субстанции находятся; совокупность же всех мест я называю п р о с т р а н с т в о м , целым пространством. Это определение дало мне возможность вывести о б ъ е к т и в н о учение науки о пространстве из учения о времени, например, показать, что пространство имеет три измерения, и почему это так и многое другое.

Парадоксы, которые были найдены уже в самом понятии о пространстве, в той п р е д м е т н о с т и , которая ему присуща, несмотря на то, что оно не представляет ничего действительного, в бесконечном множестве его частей и в непрерывности целого, которое они образуют, несмотря на то, что даже никакие две из этих частей (точек) не соприкасаются непосредственно между собою,—эти кажущиеся противоречия я не считаю нужным еще рассматривать и думаю, что вправе считать их разъясненными.

Первое, что требует еще более близкого освещения, это, конечно, понятие о в е л и ч и н е пространственного протяжения. Не подлежит сомнению, что всякое протяжение имеет в е л и ч и н у . Все согласны также в том, что величины, встречающиеся как в одном измерении времени, так и в трех измерениях пространства, могут быть определены только с помощью своего отношения к одной величине, выбранной произвольно за е д и н и ц у м е р ы , и что это протяжение, принятое за единицу, должно быть однородно с теми протяжениями, которые будут измеряемы, т. е. должно быть для л и н и и — л и н и е й , для поверхностей — поверхностью, для тел — телом[9].

[9] При этом случае некоторые, быть может, охотно прочтут определение этих трех видов пространственного протяжения. Если признать правильным определение п р о т я ж е н и я в о о б щ е , данное в параграфе 38 (а это определение имеет то достоинство, что его можно легко распространить на те из величин, рассматриваемых в о б щ е м у ч е н и и о в е л и ч и н а х , которые называются н е п р е р ы в н о п е р е м е н н ы м и), то я говорю, что нечто пространственно протяженное будет просто протяженным, или линией, если каждая его точка на каждом достаточно малом расстоянии имеет одну или больше соседних точек, но никоим образом, не так много чтобы совокупность их с а м а п о с е б е составляла уже протяжение; я говорю дальше, пространственное протяжение будет протяжением двух измерений или поверхностью, если каждая точка на каждом достаточно малом

Если же мы спросим теперь, в чем собственно состоит то, что мы называем величиной пространственного протяжения, то, принимая во внимание, что такое протяжение состоит только из точек, расположенных по известному правилу, и что при суждении о величине принимается в расчет не порядок частей, а только их множество, можно было бы легко прийти к заключена, что под величиной каждого протяжения мы подразумеваем именно это самое множество точек, на что, по-видимому, указывает и самое имя, когда мы называем величину поверхности или тела содержанием этих протяжений. Но ближайшее рассмотрение показывает, что это не так. Иначе как же мы могли бы принять, (а мы это делаем, однако, всегда и не задумываясь), что величина протяжения, например, куба, нисколько не изменится, присчитаем ли мы к его содержанию и границу его, т.е. поверхность куба (которая и сама имеет уже известную величину) или нет? А таким образом мы поступаем бесспорно. когда мы находим, например, что величина куба, которого ребро равно 2, в восемь раз больше, чем величина куба, ребро которого = 1, несмотря на то, что первый куб имеет на 12 квадратных боковых сторон величиной в 1 меньше, чем восемь последних, ибо, при соединены меньших кубов в один больший. из тех 24 квадратов, которые попадают внутрь большего куба, половина отбрасывается[10]. Отсюда вытекает, что под величиной пространственного протяжения, будет ли это линия, плоскость или тело, мы подразумеваем не что иное, как величину, которая выводится из протяжения, принятого за единицу и однородного с измеряемым протяжением, по закону, удовлетворяющему следующему требованию: если мы нашли, следуя этому закону, для куска M величину m и для куска N величину n, то мы найдем по тому же закону для протяжения, происходящего от соединения кусков M и N, величину $m+n$, будем ли при этом принимать в расчет границы, которые имеют куски M и N и составленное из них целое $M + N$, или нет. Из этого понятия могут быть выведены самые общие формулы, которые дает наука о пространстве для спрямления, вычисления поверхностей и объемов, при чем не приходится прибегать ни к какому другому предположению, в том числе и к предложениям, ложно названным основными предложениями Архимеда.

расстоянии имеет целую линию соседних точек; я говорю наконец, что пространственное протяжение будет протяжением трех измерений, или телом, если каждая точка на каждом достаточно малом расстоянии имеет целую поверхность соседних точек.

[10] Куб, ребро которого равно 2, рассекается 3-мя плоскостями, соответственно параллельными его граням, на 8 кубов. Полная поверхность рассеченного куба вместе с суммой площадей сечения равна 36. Сумма полных поверхностей 8-ми составляющих кубов = 48; 48 —36 = 12. (*Прим. ред.*)

Справедливость этого утверждения доказана в работе, упомянутой в параграфе 37[11].

§ 41.

Мы можем теперь, опираясь на данные выше определения и не опасаясь обвинения в противоречии, установить следующие предложения, как бы ни показались парадоксальными некоторые из них для обычного способа представления.

1. Совокупность всех точек, лежащих между двумя точками a и b, представляет протяжение простого рода или линию, независимо от того, присчитаем ли мы к ней точки a и b (в таком случае, она будет прямой ограниченной), или не присчитаем одной или другой, или обеих крайних точек (в таком случае она будет неограниченной); во всяком случае, она будет всегда той же длины, как и прежде. Каждая подобная неограниченная прямая с той стороны, где недостает крайней точки, именно поэтому не имеет самой крайней (самой отдаленной) точки; за каждой ее точкой находится, напротив того, дальнейшая, хотя расстояние остается всегда конечным.

2. Периферия треугольника abc может быть составлена: 1) из прямой ab, ограниченной с обеих сторон, 2) из прямой ac, ограниченной только с одной стороны, при c, и 3) из неограниченной с обеих сторон прямой bc; длина периферии, однако, равна сумме трех длин ab, bc, ca.

3 Если мы представим себе, что прямая az разделена пополам в точке b, часть bz разделена опять пополам в точке c, часть cz опять разделена в точке d и что продолжают поступать таким образом без конца; далее, если мы предположим, что эти бесконечно многие точки деления b, c, d,... и точка z мысленно удалены из совокупности точек, лежащих между a и z, то совокупность остальных точек все-таки заслуживает названия линии и величина ее будет та же, что и прежде. Если же мы присчитаем z к совокупности, то нельзя будет уже назвать целое непрерывно-протяженным; в самом деле, точка z является изолированной, ибо для нее нет такого, хотя бы сколь угодно малого расстояния, о котором можно было бы сказать, что на этом расстоянии и на каждом

---

[11] В параграфе 37 нет однако упоминания о какой-либо работе. Автор, очевидно, имеет в виду появившуюся в 1817 году работу:«Die drei Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich kleinen, ohne der Anname des Archimedes und ohne irgend einer nicht streng erweislichen Voraussetzung gelost, zugleich als Probe einer ganzlichen Umstaltung der Raumwissenschaft, alien Mathematikern zur Prüfug vorgelegt. (*Прим. ред.*)

меньшем точка z имеет соседнюю точку в этой совокупности точек. А именно, на всех расстояниях, которые имеют форму $az/2^n$ не имеется точек, соседних с z.

4. Если разстояние точек a и b равно разстоянию точек α и β, то и множество точек между a и b должно считаться равным множеству точек между α и β.

5. Протяжения, которые имеют равное множество точек, имеют также равную величину, но нельзя сказать наоборот, чтобы два протяжения равной величины имели одинаковое количество точек.

6. В двух протяжениях совершенно подобных между собою, множества их точек должны находиться в таком же отношений, как их величины.

7. Поэтому, если отношение величин двух совершенно подобных протяжений иррационально, то и отношение множеств их точек будет тоже иррационально. Существуют, следовательно, множества (именно только бесконечные), отношения которых представляют всякого рода иррациональности.

§ 42.

Из этих предложений, число которых (как видим) могло бы быть легко увеличено, насколько я знаю, было обращено внимание в сочинениях математиков только на шестое, и то лишь таким образом, что в противоположность ему было установлено предложение: «подобные линии, как бы ни были они различны по величине, должны иметь одинаковое количество точек». Это утверждал Фишер[12] в отношении подобных и концентрических дуг, приводя притом, как основание, то, что через каждую точку одной дуги можно провести радиус, который встречает точку другой, Как известно, уже Аристотель занимался этим парадоксом. Заключение Фишера обнаруживает, очевидно, убеждение, что два многообразия, если они даже бесконечны, должны быть между собою равны, как только каждая часть одного может быть соединена в пару с некоторой частью другого. После того, как это заблуждение раскрыто, нет никакой надобности в дальнейшем опровержении этого учения, в котором сверх того вовсе нельзя понять, почему, в случае его правильности, нужно было бы ограничивать утверждение о равном множестве точек только случаем дуг

[12] Dr. I. K. Fischer. Grundriss der gesammten hoheren Mathematik. Leipzig, 1809. Bd. II. § 51. Anm.

круга, и притом концентрических и подобных: ведь это самое основание могло бы быть приведено также и для всех прямых и для разнообразнейших кривых линий, вовсе не подобных между собою.

§ 43.

Едва ли существует истина в науке о пространстве, против которой учители этой науки так часто грешили, как против той, что «каждое расстояние между двумя точками, а следовательно, и каждая ограниченная с обеих сторон прямая, представляется конечной, т. е. находится с каждой другой в отношении, которое может быть точно определено с помощью понятий. В самом деле, вряд ли найдется геометр, который бы не говорил иногда о бесконечно больших расстояниях и не превращал бы при известных обстоятельствах ограниченной прямой в бесконечно большую. Достаточно указать на известную пару линий, которые, в геометрическом значении этого слова, называют тангенсом и секансом угла или дуги. На основании совершенно ясного определения, они должны представлять пару прямых линий, ограниченных с обеих сторон; однако, как мало найдется людей, которые не решались бы учить, что тангенс и секанс прямого угла бесконечно велики. Это ложное учение немедленно влечет за собою наказание в виде затруднения, возникающего, как только приходится решать, следует ли считать эти две бесконечно большие величины положительными или отрицательными? Действительно, основание, которое можно привести в пользу одного предположения, оказывается справедливым и для другого, так как известно, что прямая, проведенная через центр круга, параллельно к касательной его, имеет совершенно одинаковое отношение к обеим сторонам этой касательной и, следовательно, не встречается с ней ни с одной, ни с другой стороны. В выражении для этих линий 1/0 нет также не малейшего основания к тому, чтобы считать эту предполагаемую бесконечную величину положительной или отрицательной, так как 0 не является ни положительным, ни отрицательным. Поэтому не только парадоксально, но совершенно ложно предполагать существование бесконечно большого тангенса прямого угла, а также всех углов вида:

$$\pm n\pi \mp \pi/2.$$

Напомним при этом случае, что, строго говоря, ни синус, ни тангенс не существуют также и для угла, равного нулю или для угла, равного $\pm n\pi$. Разница в обоих допущениях только та, что в последнем из них не получается ложного результата, если, в случае, когда эти выражения являются сомножителями, считают произведения несуществующими; в тех же случаях, когда они являются делителями, заключают, что вычисление требует чего-то незаконного.

§ 44.

Таким же незаконным приемом, который, к счастью, нашел мало последователей, является вычисление Іоганна Ш у л ь ц а (loh. Schulz) в е л и ч и н ы в с е г о б е с к о н е ч н о г о п р о с т р а н с т в а. Основываясь на том обстоятельстве, что возможно провести прямые линии в бесконечность из каждой данной точки *a* во все стороны, т.е. во всевозможных направлениях, а также и на том, что каждая мыслимая точка *m* мирового пространства должна лежать на одной, и только на одной, из этих линий, он счел себя вправе заключить, что можно считать бесконечное пространство ш а р о м, описанным из любой точки *a* радиусом, равным ∞; отсюда он тотчас же получил, что все бесконечное пространство имеет величину $(4/3)\pi\infty^3$.

Если бы это предложение оказалось правильным, то оно составило бы, конечно, одно из важнейших предложений науки о пространстве. Едва ли можно представить основательные возражения против обеих посылок (которые я излагаю, однако, не точно по Ш у л ь ц у, так как предо мной нет его книги). В самом деле, если бы кто-нибудь сказал, что вторая посылка ошибочна уже потому, что из нее следует очень неравномерное распределение точек вселенной, а именно более плотное скопление их вокруг произвольно избранного центра а, то этим он показал бы только, что не преодолел еще предубеждения, которое опровергнуто нами в параграфе 21 и след. Ошибка, и совершенно очевидная ошибка, Ш у л ь ц а состоит в том, что прямые, которые должны быть проведены из точки *a* в беспредельность по всем направлениям, для того, чтобы каждая точка пространства лежала на какой-нибудь из этих линий, он считает однако же р а д и у с а м и, т. е. линиями, ограниченными с двух сторон. Ведь только из этого выводится шарообразность бесконечного пространства и вычисление его величины = $(4/3)\pi\infty^3$. Из этой ошибки вытекает также следующая несообразность: так как для каждого шара существует объемлющий его цилиндр или такой же куб, и еще многие другие протяжения, например, бесконечное количество объемлющих его шаров одного и того же диаметра, то пространство, которое предполагалось целым пространством, оказывается не целым, а только частью, вне которой находится еще бесконечно много других пространств.

Чтобы обнаружить несостоятельность большей части парадоксов (mysteria infiniti), приведенных Босковичем (B o s c o w i c h) в Diss. de transformatione locorum geometricorum (прибавление к его Elem. univ. Matheseos T. III. Romae 1754), достаточно одного замечания, а именно, что прямая, простирающаяся в бесконечность, хотя бы в одну только сторону, по этому самому не может быть линией ограниченной с этой стороны, и что поэтому говорить о ее конечной точке точно также невозможно, как говорить об острии шара или о кривизне прямой, или отдельной точки, или о точке встречи двух параллельных.

§ 45.

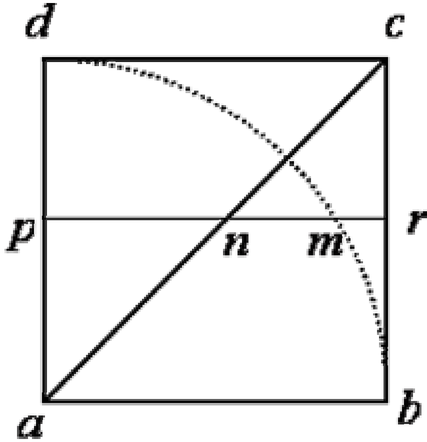
Несколько реже, чем бесконечно большие, вводились также и б е с к о н е ч н о м а л ы е р а с с т о я н и я и линии в пространстве, особенно, когда казалось нужным рассматривать, как прямые линии или как плоскости, такие линии и поверхности, которых ни одна часть (имеющая еще протяжение) не является прямой или плоской, например, для более легкого определения их длины или величины их кривизны, или известных замечательных свойств, имеющих значение в механике. В таких случаях позволяли себе даже измышлять расстояния, которые должны быть измеряемы бесконечно малыми величинами второго, третьего и других высших порядков.

Тот факт, что употребление таких приемов, особенно в геометрии, редко приводило к ложным результатам, произошел благодаря упомянутому в § 37 обстоятельству, а именно благодаря тому, что переменные величины, относящиеся к пространственным протяжениям, поддающимся определению, обладают тем свойством, что, за исключением отдельных и з о л и р о в а н н ы х з н а ч е н и й, они имеют первую, вторую и каждую следующую п р о и з в о д н у ю функцию. В самом деле, где существуют производные, там то, что утверждают о так называемых бесконечно малых линиях, поверхностях и телах, имеет место вообще для всех линий, поверхностей и тел, которые,—хотя и остаются постоянно конечными,—могут быть взяты сколь угодно малыми, т.е, как говорят, могут убывать до бесконечности. Для этих-то переменных и было, собственно, справедливо то, что ложно высказывалось о бесконечно малых расстояниях.

Само собой понятно, что, при подобном изложении предмета, должны были предлагать и как будто доказывать много парадоксального и даже много совершенно ложного. Каким странным, например, представлялось утверждение, что каждая кривая линия и поверхность есть не что иное, как соединение бесконечно многих прямых линий и плоскостей, которые нужно только предполагать бесконечно малыми;

особенно, если наряду с этим признавалось опять существование бесконечно малых линий и поверхностей, которые были однако кривыми. Каким странным является утверждение, что линии, которые в одной из своих точек не имеют кривизны, как например, в точке перегиба, что эти линии имеют в этой точке бесконечно малую кривизну и бесконечно большой радиус. Таким же странным являлось утверждение, что линии, заканчивающиеся в одной из своих точек, имеют в этой точке бесконечно большую кривизну и бесконечно малый радиус кривизны, и тому подобное.

§ 46.



В качестве действительно поразительного и, вместе с тем, очень простого примера того, к каким несообразностям приводит допущение таких бесконечно малых расстояний, я позволю себе привести предложение, которое, по свидетельству Кестнера (Anfangsgrunde der hoh. Analysis, Bd. II, Vorr.), дает уже Галилей в своих «Discorsi e dimostrazioni matematiche etc.», конечно, только с целью вызвать размышление, а именно, что о к р у ж н о с т ь к р у г а т а к ж е в е л и к а, к а к е г о ц е н т р.

Чтобы получить представление о том, как пытались это доказать, пусть читатель вообразит себе квадрат *abcd*, в нем квадрант *bd*, описанный из *a*, как центра, радиусом *ab* = *a*; далее, прямую *pr*, проведенную параллельно *ab* и пересекающую стороны квадрата *ad* и *bc* в *p* и *r*, диагональ *ac* в *n*, а квадрант в *m*; словом,— известную фигуру, которая употребляется для доказательства того, что круг радиуса *pn* равняется кольцу, которое остается после вычитания круга радиуса *pm* из круга радиуса *pr*, или, что

$$\pi \bullet pn^2 = \pi \bullet pr^2 - \pi \bullet pm^2.$$ [13]

Если *pr* подходит все ближе к *ab*, то очевидно, что круг радиуса *pn* будет делаться все меньше и меньше, а кольцо между кругами радиусов *pm* и *pr* все уже и уже. Геометры, которые не встречали никакого затруднения в том, чтобы допустить бесконечно малые расстояния, распространили это отношение также и на тот случай, когда *pr* подходит бесконечно близко к *ab*, так что, например, разстояние *ap* делается равным *dx*, и получается уравнение

$$\pi \bullet dx^2 = \pi \bullet a^2 - \pi(a^2 - dx^2),$$

которое в действительности оказывается просто тождеством. Но в этом случае, согласно их представлению, круг радиуса *pn* становится бесконечно малым второго порядка; кольцо, которое остается после вычитания круга радиуса *pm* из круга радиуса *pr*, получит теперь ширину[14]

$$mr = \frac{1}{2} \bullet \frac{dx^2}{a} + \frac{1}{2 \bullet 4} \bullet \frac{dx^4}{a^3} + \ldots,$$

которая сама представляет бесконечно малую величину второго порядка. Если же принять окончательно, что *pr* переходить *ab*, то бесконечно малый круг стягивается в одну точку *a*, а бесконечно узкое кольцо ширины *mr* превращается в окружность радиуса *ab*. Поэтому считали возможным заключить, что простой центр *a* любого круга радиуса *ab* имеет одинаковую величину с его окружностью.

Обманчивость этого заключения произошла, главным образом, вследствие введения бесконечно малых. Оно же и приводит читателя к ряду мыслей, которые не дают ему заметить, как много несообразного содержится и в утверждении, что от круга радиуса *pn*, когда вместо точки *p* берется окончательно точка *a*, и когда радиуса *pn* уже больше не существует, о с т а е т с я е щ е, о д н а к о, ц е н т р *a*, и в утверждении, что кольцо, получаемое от вычитания круга с меньшим радиусом *pm* из круга с большим радиусом *pr*, когда оба радиуса, а следовательно, и оба круга, сделаются равными друг другу, обращается в окружность того круга, который был раньше большим. В самом деле, в случае бесконечно малых величин, конечно, привыкли считать те же самые величины то равными между собою, то одну больше или меньше другой на бесконечно малую величину высшего порядка, то совершенно равными нулю. Если мы будем выводить правильные заключения, то из правильно составленного уравнения

$$\pi \bullet pn^2 = \pi \bullet pr^2 - \pi \bullet pm^2,$$

[13] $pn = ap$, $pr = am$,
$pr^2 = am^2 = ap^2 + pm^2 = pn^2 + pm^2$; $pn^2 = pr^2 - pm^2$. *Прим. ред.*

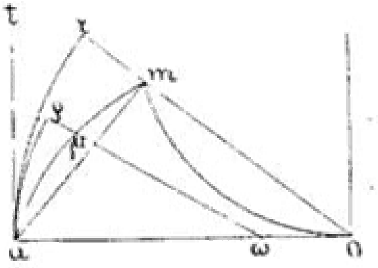
[14] $mr = a - ((a^2 - dx)^2)^{1/2} = a - a(1 - (dx/a)^2)^{1/2}$. *Прим. ред.*

в котором сравниваются только величины (площадей) кругов, о которых идет речь, мы можем заключить только, что в случае, когда *pr* и *pm* станут равными между собою, круг радиуса *pn* не будет иметь никакой величины и потому не будет вовсе существовать.

Конечно, справедливо (и я сам установил посылки, ведущие к этой истине, в § 41), что существуют круги с периферией и без нее, и что это не изменяет их величины, которая зависит только от величины их радиуса. Кто-нибудь мог бы вывести отсюда еще новое мнимое доказательство предложения Галилея, исходя из требования, допустимого во всяком случае, чтобы воображать себе круг радиуса *pm* без периферии, а круг радиуса *pr* с периферией. Тогда, после отнятия круга радиуса *pm* от круга радиуса *pr* и перехода от *pr* к *ab*, в действительности останется только окружность круга радиуса *ab*. Однако, и теперь все-таки невозможно говорить о круге около *a*, который стягивается в одну точку, и еще менее будет возможно ссылаться на вышеприведенное уравнение с целью вывести из него следствие, что точка *a* и известная окружность будут равны между собою, так как сказанное уравнение имеет в виду только величины трех кругов, взятых с периферийми или без них.

§ 47.

Сам изобретатель этого примера, как уже было упомянуто выше, предложил его не с тою целью, чтобы ему удивлялись,, как научной истине. Однако, как серьезную истину, излагают следующее предложение об обыкновенной циклоиде. Циклоида имеет бесконечно большую кривизну в точке ее встречи с основанием, или (что представляет то же самое) она в этой точке имеет бесконечно малый радиус кривизны и перпендикулярна в ней к основанию. Это утверждение совершенно справедливо, если понимать его так, что радиус кривизны бесконечно уменьшается, когда дуга циклоиды бесконечно приближается к основанию; а также, что направление ее в этой точке перпендикулярно к основанию. Но то, что говорится о радиусе кривизны бесконечно малом или (выражаясь правильнее) обращающемся в нуль, сводится лишь к следующему. Кривая, как известно, простирается бесконечно в обе стороны над основанием и, следовательно, н е   и м е е т   к о н ц о в; поэтому в рассматриваемой точке сходятся также две дуги и притом так, что будучи перпендикулярны к основанию, они образуют здесь о с т р и е, а именно такое острие, в котором обе имеют одно и то же направление или (по менее



правильному выражению) направления их образуют у г о л равный нулю.

Однако, можно убедиться с помощью вычислений, что все это так и есть на самом деле, и все-таки не понимать, как это происходит или даже, как это возможно. Чтобы сделать и это очевидным, а это необходимо для разрешения парадокса, мы должны сперва понять, почему направление, в котором поднимается обыкновенная циклоида над своим основанием, является перпендикулярным.

Из самого способа построения обыкновенной циклоиды (через каждую точку *O* основания проводят дугу круга, который, касаясь основания, имеет радиус, равный радиусу образующего круга, и, отсекая от дуги часть *Om*, равную по длине разстоянию точки *O* от начальной точки *a*, рассматривают *m*, как точку циклоиды) обнаруживается тотчас же, что угол *maO* тем ближе подходит к прямому, чем ближе точка *O* подходит к *a*, так как угол *mOa*, который измеряется половиной дуги *om*, делается все меньше и меньше, а отношение обеих сторон *Oa* и *Om* в треугольнике *mOa* все более и более приближается к отношению равенства; поэтому и углы при третьей стороне *am* отличаются все меньше и меньше от прямого. Действительно, вычисление показывает это совершенно ясно. Отсюда сверх того следует, что дуга циклоиды *am* лежит всеми своими точками по одну сторону хорды *am*, а именно между нею и восстановленным в точке *a* перпендикуляром *at* и, следовательно, этот перпендикуляр определяет направление кривой в точке *a*. Далее, если мы из точки *O*, как центра, опишем радиусом *Oa* дугу, выходящую из точки *a*, то она, очевидно, пересечет хорду *Om* только в точке ее продолжения *r*, так как должно быть $Or = Oa > Om$. Если μ есть какая-нибудь точка кривой, лежащая еще ближе к *a*, то существует для нее другая точка ω, лежащая на *aO* еще ближе к *a* и имеющая то свойство, что для хорды ωμ будет справедливо то же самое, что только что было сказано об *Om*, а именно, что дуга, описанная из *a*, как центра, радиусом ω*a*, встречает продолжение ωμ в сторону точки μ в некоторой точке ρ. Но, вследствие того, что $\omega a < Oa$, дуга *a*ρ лежит внутри дуги окружности *ar*, т. е. между дугой циклоиды *a*μ и дугой окружности *ar*. Мы видим поэтому, что для каждой дуги окружности *ar* (каким бы малым радиусом *Oa* она ни была описана), которая касается циклоиды *am* в *a*, существует другая дуга *a*ρ, которая в этой области подходит к циклоиде еще ближе. Другими словами, не существует столь малого круга, который можно было бы рассматривать, как меру кривизны в *a*, если здесь кривизна существует. Поэтому здесь в действительности нет никакой кривизны, и кривая, которая не оканчивается в этой точке, имеет здесь, как мы уже знаем, острие.

§ 48.

Часто находили парадоксальным также и то, что некоторые пространственные протяжения, *простираясь в бесконечном пространстве* (т. е. имея точки, разстояние которых друг от друга превосходит всякое данное расстояние), тем не менее, имеют *величину конечную*; другие же, *которые ограничены конечным пространством* (т. е. все точки которых лежат так, что их разстояния друг от друга не превосходят некоторого данного расстояния), имеют *бесконечно большую величину*; или, наконец, что некоторые пространственные протяжения сохраняют конечную величину, хотя и *делают бесконечно много оборотов вокруг одной точки*.

1. Мы должны здесь прежде всего различать, следует ли понимать под пространственным протяжением, о котором будет речь, целое, состоящее из нескольких, *отделенных друг от друга, частей* (например, гипербола о четырех ветвях), —или *вполне односвязное целое*, т. е, протяжение, не имеющее ни одной протяженной части, в которой не было бы, по крайней мере, *одной точки* такого свойства, что, если ее присчитать к остальным частям, то она составит с ними опять одно протяжение.

Что протяжение, состоящее из отделенных друга от друга частей, может простираться в бесконечное пространство, не делаясь само вследствие этого бесконечным,— этого не найдет странным никто, кто только подумает, что и бесконечный ряд величин, убывающих в геометрической прогрессии, представляет только конечную сумму. В этом смысла может, конечно, и *линия* простираться в бесконечность, оставаясь при этом конечной, как например, та, которая получится, если мы из данной точки *a* в данном направлении *aR* отложим ограниченную прямую *ab*, затем отложим в некотором разстоянии, остающемся все время неизменным, прямую *cd*, которая вдвое меньше предыдущей, и будем поступать по тому же закону, продолжая этот процесс бесконечно.

Если же мы говорим (что и будем делать впредь постоянно) только о таких пространственных протяжениях, которые представляют *односвязное целое*, то ясно, конечно, что нельзя найти среди протяжений *наинизшего порядка*, т. е. среди *линий*, ни одной, которая бы простиралась в бесконечность и сама не имела бы *бесконечной величины* (длины). В самом деле, это представляет необходимое следствие известной истины, что только

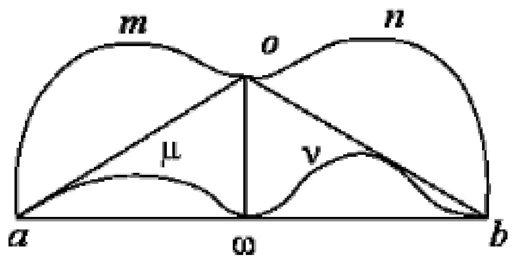
прямая линия есть кратчайшая вполне односвязная линия, соединяющая две данные точки[15]

Иное мы видим в случае *поверхностей, которые*, при той же длине, можно уменьшить сколь угодно, уменьшая ширину, а также и в случае тел, которые, при той же длине и ширине, могут быть сколь угодно уменьшены путем уменьшения их высоты. Отсюда понятно, почему поверхности, при бесконечной *длине*, и тела, при бесконечной *длине и ширине*, сохраняют иногда конечную величину. Мы представим пример, понятный даже для самого несведущего. Представим себе, что на бесконечно простирающейся прямой *aR* отложены равные отрезки $ab = 1 = bc = cd$ и т. д. до бесконечности; далее, над первым отрезком *ab* вообразим

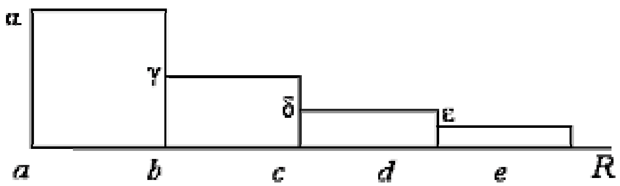
---

15 Доказательство_этой истины столь кратко, что я позволю себе поместить его в этом примечании. Если линия *amonb* не прямая, то на ней должна находиться точка *o*, лежащая вне прямой *ab* и, если мы опустим перпендикуляр *o*ω на *ab*, то расстояния удовлетворят неравенствам

$$a\omega < ao,\ b\omega < bo.$$



Но так как все системы двух точек подобны между собою, то между точками *a* и ω существует линия *a*μω, подобная той части *amo* данной линии *amonb*, которая лежит между точками *a* и *o*; между точками *b* и ω существует другая линия *b*νω, подобная той части *bno* данной линии *bnoma*, которая лежит между точками *b* и *o*. Но это подобие требует, чтобы длина прямой *a*ω относилась к длине *a*μω так, как длина прямой *ao* к длине части *amo*, и чтобы длина прямой *b*ω относилась к длине *b*νω так, как длина прямой *bo* к длине части *bno*. А так как $a\omega < ao$, то $a\mu\omega < amo$, и так как $b\omega < bo$, то и длина *b*νω должна быть меньше, чем *bno*. Следовательно, и целое *a*μων*b* меньше целого *amonb*. Кривая линия *amonb* не будет, следовательно, кратчайшей линией между *a* и *b*, и кривая *a*μων*b* будет короче ее



квадрат *ba*, над вторым *bc*—прямоугольник *c*γ, который имеет только половину высоты *bc*, и так над каждым следующим отрезком — прямоугольник, который вдвое ниже, чем предыдущий. Тогда легко убедиться, что связная площадь, представляющаяся здесь, простирается в бесконечность и, однако, будет не больше, чем 2. Не более трудно будет представить себе куб, сторона которого = 1, и приставить мысленно к нему снизу второе тело, основание которого представляет квадрат со стороною 2, т. е. в 4 раза больший, чем основание предыдущего куба, высота же составляет только 1/8; к этому приставить снизу третье тело, основание которого вчетверо больше основания предыдущего, высота же составляет только 1/8 высоты предыдущего; представим себе продолжение этого процесса по тому же закону до бесконечности. Тогда будет понятно, что длина и ширина подставляемых здесь тел увеличивается до бесконечности, хотя их объем делается все меньше и меньше, а именно, каждое последующее тело составляет только половину предыдущего, так что величина пирамидального целого, которое получается таким образом, несмотря на бесконечное основание, не превзойдет никогда объема, равного 2.

2. Вышерассмотренный случай, в котором протяжение, имеющее в себе нечто бесконечное (бесконечную длину или ширину), оказывается имеющим, однако, величину конечную, может встретиться только в двух высших родах протяжения, в поверхностях и телах, а не в линиях. Теперь же мы будем говорить о случае противоположном, когда протяжение, кажущееся конечным, потому что ограничено конечным пространством, на самом деле имеет, однако, величину бесконечную. Этот случай может иметь место только в двух низших родах протяжения, в линиях и поверхностях, но — никогда не в телах. Тело, не имеющее таких точек, взаимные разстояния которых превосходили бы любую данную величину, наверно не может быть никогда бесконечно большим. Это вытекает непосредственно из известной истины, что из всех тел, в которых взаимные разстояния точек не превышают данного разстояния ε, наибольшим будет шар диаметра ε. В самом деле, шар, описанный из одной из этих точек радиусом ε, заключает все эти точки, а величина шара равна только $(\pi/6)\cdot\varepsilon^3$; поэтому каждое другое тело, не превосходящее этого пространства, будет необходимо меньше, чем

$(\pi/6)\cdot\varepsilon^3$. Линий же, которые можно начертить на протяжении хотя бы самой малой поверхности, например, квадратного фута, существует бесконечное множество, и возможно дать каждой из них конечную величину, например, длину квадратного фута, а прибавлением одной или даже бесконечно многих соединительных линий можно образовать из них всех одну связную линию, длина которой в таком случае будет несомненно бесконечной. Совершенно так же существует бесконечное количество поверхностей, которые можно вписать в пространство сколь угодно малого тела, например, кубического фута, и каждой из них мы можем дать величину, например, квадратного фута; а прибавив одну или бесконечное количество соединительных поверхностей, мы можем соединить их все в одну, величина которой, бесспорно, будет бесконечно большой. Все это не должно удивлять никого, кто только не забывает, что линии, плоскости и тела измеряются не одной и той же единицей меры, и что, хотя множество точек в каждой сколь угодно малой лиши бесконечно, нужно, однако, допустить, что в каждой сколь угодно малой, поверхности это множество, во всяком случае, в бесконечное число раз больше, чем в линии, и также, наконец, несомненно, что в теле оно в бесконечное число раз больше, чем в поверхности.

3. В третьем парадоксе, о котором мы упомянули в начале этого параграфа, говорится, что существуют протяжения, которые делают бесконечное число оборотов вокруг одной точки и сохраняют все-таки при этом величину конечную. Если это протяжение должно быть линейным, то, как мы видели только что в No1, это может иметь место только в том случае, когда вся линия находится в конечном пространстве. При этом же условии нет ничего непонятного в том, что она сохраняет конечную длину, хотя и делает бесконечно много оборотов вокруг данной точки. Для этого должно быть только соблюдено еще дальнейшее условие, что эти обороты, начиная с некоторой конечной величины, бесконечно убывают надлежащим образом. Требование же это может быть выполнено, благодаря тому обстоятельству, что обороты будут происходить вокруг одной только точки. В самом деле, благодаря этому оказывается возможным, чтобы разстояние отдельных точек одного оборота от центра, а следовательно, также и их расстояния между собой, убывали бесконечно, при чем, как это видно уже для окружности, и длина этого оборота может быть бесконечно уменьшена. Логарифмическая спираль сама собой наверно представится нашему читателю, как пример линии, о которой мы здесь говорили; следует принять во внимание только ту ее часть, которая, начиная с некоторой данной точки, постоянно приближается к центру, никогда однако его не достигая.

Если же пространственное протяжение, делающее бесконечно много оборотов вокруг одной данной точки, должно быть *поверхностью* или *телом*, то не представляется надобности даже и в ограничительном условии, чтобы ни одна из точек протяжения не удалялась от центра дальше определенного расстояния. В самом деле, для того чтобы возможно скорее понять мою мысль, пусть читатель представит себе упомянутую спираль, как некоторый род линии абсцисс, из каждой точки которой проводятся ординаты перпендикулярно к ней и ее плоскости. Совокупность всех этих ординат образует тогда, очевидно, поверхность (из рода цилиндрических), которая, с одной стороны, приближается в бесконечном количестве оборотов к центру, никогда не достигая его; с другой же стороны — удаляется в бесконечность. Величина этой поверхности будет зависеть от закона, по которому мы будем увеличивать или уменьшать ординаты. Часть, приближающаяся к центру, останется всегда конечной, если только ординаты этой стороны (т. е. только ординаты, отвечающие конечной ветви линии абсцисс) не будут увеличиваться до бесконечности, потому что каждая поверхность, которой абсциссы и ординаты не возрастают до бесконечности, будет конечной. Но и та часть поверхности, которая находится над другой ветвью спирали, удаляющейся в бесконечность, останется конечной, если только ординаты убывают в более быстром отношении, чем возрастают абсциссы (т, е. длины дуг спирали). Поэтому, если. мы примем за линию абсцисс *натуральную* спираль, в которой ветвь, приближающаяся к центру (считая от точки, в которой радиус = 1), имеет длину $\sqrt{2}$, и если для ограничения поверхности возьмем дугу гиперболы высшего порядка, имеющей уравнение $yx^2 = a^3$, то та часть этой поверхности, которая отвечаег $x = a$ и всем большим значениям x, будет иметь только величину a^2, между тем как другая, отвечающая всем меньшим значениям x, будет увеличиваться до бесконечности. Если же мы возьмем $a > \sqrt{2}$, и переставим конечную точку абсциссы $x = a$ в ту точку спирали, которая имеет радиусом 1, то центр совпадает с конечной точкой абсциссы $x = a - \sqrt{2}$, и потому будет иметь конечную ординату,[16] а часть поверхности, отвечающая этой ветви спирали, будет не больше, чем

$$a^3\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right) = a^2 - \frac{a^3}{a-\sqrt{2}} = -\left(\frac{a^3}{a-\sqrt{2}} - a^2\right);$$

[16] Гипербола не перемещается. *Прим. ред.*

вся же поверхность, покрывающая спираль по обе стороны (чтобы получить величину этой поверхности, мы должны сложить величины обеих ее частей, беря их положительный значения), будет поэтому =

$$= a^2 + \left(\frac{a^3}{a \quad \sqrt{2}} - a^2\right) = \frac{a^3}{a-\sqrt{2}}$$

Таким образом, например, для $a = 2$ вся поверхность выражается только числом $4(2+\sqrt{2})$.

Подобные обстоятельства имеют место также для телесных протяжений. Следует только заметить, что здесь часть тела, стремящаяся к центру, стала бы входить в пространство своих собственных оборотов, если бы мы стали увеличивать ее протяжение в ширину и толщину. Если желательно избежать этого и иметь тело, все части которого лежать каждая вне другой, то можно достигнуть этой цели, например так: возьмем поверхность такого рода, как рассмотренная нами выше, которая, при приближении к центру, все увеличивается в ширину, и придадим ей еще третье измерение,—толщину, которая, однако, при приближены к центру, уменьшалась бы в таком отношении, чтобы составлять постоянно менее половины расстояния между двумя ближайшими оборотами спирали.

§ 49.

Пространственные протяжения, имеющие бесконечную величину, находятся к этой самой величине в столь разнообразных и часто столь парадоксальных отношениях, что мы должны рассмотреть в отдельности, по крайней мере, некоторые из этих отношений.

Что протяжение, заключающее в себе бесконечное множество точек, вследствие этого еще не должно быть непрерывным протяжением, и что в непрерывном протяжении величина его вовсе не определяет множества его точек; что из двух протяжений, которые мы считаем равновеликими, одно может заключать на бесконечное множество точек больше или меньше, чем другое; далее, что поверхность может даже заключать в себе в бесконечное число раз больше или меньше линий, тело в бесконечное число раз больше или меньше поверхностей, чем протяжение того же рода, которое мы считаем с ним равновеликим—все это мы в праве считать достаточно разъясненным выше.

1. Первое, на что мы хотим обратить внимание читателя, это то, что множество точек, которое заключает в себе хотя бы самая короткая прямая *az*, должно быть рассматриваемо, как множество, которое в безконечно большое число раз больше бесконечного же множества, получаемого из первого следующим образом: начиная с одного из концов, с точки *a*, берем в надлежащем расстоянии вторую точку *b*, за нею, в меньшем расстоянии, третью точку *c*, и так продолжаем без конца, уменьшая эти расстояния по такому закону, чтобы бесконечное их множество в сумме было равно или меньше расстояния *az*. В самом деле, так как бесконечно многие части *ab*, *bc*, *cd* . . . на которые распадается *az*, все суть линии конечные, то с каждой из них можно поступить точно так же, как мы только что поступили с *az*, т. е., в каждой можно будет опять указать такое же бесконечное множество точек, как и в *az*, и эти точки будут находиться также в *az*. Следовательно, в целой линии *bz* такое бесконечное множество точек должно заключаться бесконечное число раз.

2. Каждой прямой или даже вообще пространственному протяжению, которое (геометрически) равно другому (т.е. совпадает с ним во всех признаках, которые, с помощью сравнения с данным расстоянием, можно выразить в понятиях), должно приписать одинаковое множество точек, если мы в них одинаково выберем границы, например, в линиях, присчитаем концы или не присчитаем их. В самом деле, противное могло бы иметь место только в том случае, если бы существовали расстояния, которые, будучи равными, допускали бы неодинаковое множество точек между теми точками, между которыми они служат расстояниями. Однако, это противоречит понятию,

которое мы связываем со словом «геометрически равный», потому что мы называем расстояние *ac* только тогда

неравным расстоянию *ab*, а именно большим, когда точки *b* и *c* лежат по одну сторону точки *a*, и точка *b* находится между *a* и *c*, так что все точки, лежащие между *a* и *b* будут лежать также между *a* и *c* но не наоборот, т е. не все точки, лежащие между *a* и *c*, будут лежать также и между *a* и *b*.

3. Если мы обозначим множество точек, лежащих между *a* и *b*, вместе с *a* и *b*, через *E*, и примем прямую *ab* за единицу всех длин, то множество точек прямой *ac*, которая имеет длину *n* (под *n* мы разумеем теперь только целое число), если присчитать и ее крайние точки *a* и *c*, будет равно $nE—(n — 1)$.

4. Множество точек, содержащихся в площади квадрата, сторона которого равна 1 (в обыкновенной мере площадей), будет равно E^2, если мы присчитаем и периферию ее.

5. Множество точек в каждом прямоугольнике, одна сторона которого имеет длину *m*, другая—длину *n*, будет равно $mnE^2 – [n(m – 1) + m (n – 1)] E + (m – 1) (n – 1)$, если присчитать и периферию его.

6. Множество точек в кубе, сторона которого = 1 (в обыкновенной мере тел), будет E^3, если мы присчитаем и точки его поверхности.

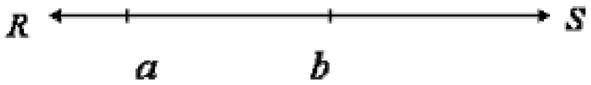
7. Множество точек в параллелепипеде, стороны которого имеют длины *m*, *n*, *r*, с присоединением поверхности, будет равно

$$mnr \cdot E^3 – [nr(m – 1) + mr(n – 1) + mn(r – 1)]E^2 +$$
$$+ [m(n – 1) (r – 1) + n(m – 1)(r – 1) +$$
$$+ r(m – 1)(n – 1)]E – (m – 1)(n – 1)(r – 1).$$

8. Прямой, простирающейся бесконечно в обе стороны, мы должны приписать бесконечную длину и множество точек, которое будет в бесконечное число раз больше, чем множество точек прямой, принятой за единицу и равной *E*. Мы должны признать также, что все такие прямые имеют равную длину и равное множество точек, так как определяющие их части, с помощью которых могут быть определены для двух таких прямых две точки, через которые они проходят (если мы возьмем одинаковое разстояние между этими точками), будут не только подобны друг другу, но и (геометрически) равны.

9. Положение любой точки на такой прямой совершенно одинаково с обеих сторон прямой и представляет лишь такие признаки,

допускающие выражение в понятиях, какие представляет положение каждой другой точки. Тем не менее, нельзя сказать, что такая точка разделяет линию на две части одинаковой длины, потому что, если бы могли сказать это об одной точке *a*, то, на том же основании, мы бы должны были утверждать это о каждой другой точке *b*, что однако заключает в себе противоречие, так как если бы длина *aR* была равна длине *aS*, то не могло бы быть *bR(= ba + aR) = bS(= aS — ab)*.



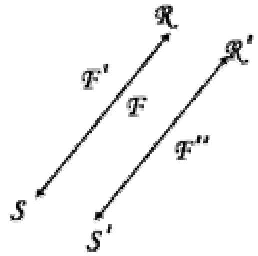
Напротив того, мы должны утверждать, что прямая, простирающаяся неограниченно в обе стороны, совсем не имеет середины, т. е. не имеет такой точки, которая могла бы быть определена только с помощью выражаемого в понятиях отношения ее к этой линии.

10. Плоской поверхности, которую заключают между собою две параллельные прямые, неограниченные с обеих сторон (т. е. совокупности всех тех точек, которые содержат перпендикуляры, опущенные из каждой точки одной из этих параллельных прямых на другую), мы должны приписать бесконечно большую площадь и множество точек, которое в бесконечное число раз больше множества точек в квадрате, равном E^2 и принятом за единицу площадей. Всем подобным полосам, ограниченным параллельными прямыми, если они имеют одинаковую ширину (длина перпендикуляра), мы должны приписать равную величину и равное множество точек. В самом деле, их также можно определить таким образом, что определяющие части не только подобны, но и равны геометрически между собой, например, если мы определяем их с помощью равносторонних прямоугольных треугольников с равными сторонами, при чем будет установлено, что одна из параллельных проходит через основание, а другая через вершину треугольника.

11. Положение любого перпендикуляра в такой полосе, ограниченной параллельными прямыми, одинаково с обеих сторон плоскости и не представляет никаких других, выражаемых в понятиях, признаков, по сравнению с положением каждого другого перпендикуляра. Несмотря на это, невозможно сказать, что такой перпендикуляр делит плоскость на две геометрически равные друг другу части, потому что такое предположение привело бы нас, как в №9, к противоречию, чем и доказывается его неправильность.

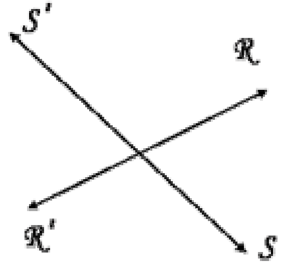
12. Если мы возьмем плоскость, простирающуюся во всех направлениях в бесконечность, то мы должны приписать ей бесконечно большую площадь и множество точек, которое в бесконечное число раз

больше множества точек, заключающихся в полосе, ограниченной параллельными прямыми. Совершенно так, как подобным полосам одинаковой ширины, мы должны также приписать и безграничным плоскостям равное бесконечное множество точек. В самом деле, для них оказывается также верным то, что они могут быть определены не только при помощи подобия, но и (геометрического) равенства: например, если мы будем определять каждую из них с помощью трех точек, лежащих на ней и образующих подобные и равные треугольники.

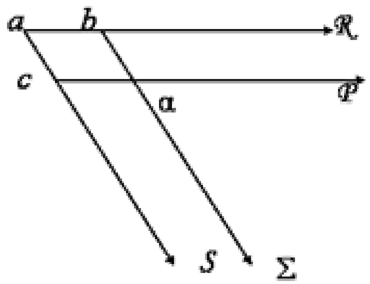


13. Положение неограниченной прямой, взятой произвольно на такой безграничной плоскости, совершенно одинаково на обеих сторонах плоскости; оно представляет, кроме того, те же самые, выражаемые в понятиях, признаки, как и положение всякой другой прямой этого рода. Однако, невозможно сказать, что такая прямая разделяет плоскость на две геометрически равные части, потому что, если бы стали утверждать это о прямой *RS*, то должны были допустить это и в отношении всякой другой *R'S'*, что ведет, однако, к явному противоречию, как только мы возьмем эти прямые параллельными между собой.

14. Две неограниченные прямые, которые, находясь в одной плоскости, не параллельны между собою и, следовательно, где-нибудь пересекаются и образуют четыре угла (попарно равных), делят все пространство неограниченной плоскости на четыре части, из которых каждые две, заключающиеся в равных (подобных) углах *RaS = R'aS' RaS' = R'aS*, подобны между собою. Каждое из этих четырех пространств,



заключающихся в углах, содержит в себе бесконечное множество, простирающихся с одной стороны в бесконечность, полос любой ширины, ограниченных параллельными прямыми и подобных тем, о которых мы говорили в №11. Если мы мысленно отбросим любое конечное множество полос, то останется еще угловое пространство, заключающееся



в у г л е, р а в н о м п е р в о н а ч а л ь н о м у. Но совершенно так же, как после объяснений, изложенных в №9 и №11, мы не в праве назвать равными стороны этих углов или полосы, которые являются частями занимаемого ими пространства,—точно так же, и на подобных же основаниях, мы не в праве назвать равными по величине и эти бесконечные угловые пространства, заключенные хотя бы и в равных углах. Так, относительно двух частей плоскости, ограниченных углами RaS и $P\alpha\Sigma$, мы видим ясно, что первая больше второй, хотя углы и равны друг другу, если $b\Sigma \| aS$, $cP \| aR$.

15. Пространство, которое заключают между собою две параллельные безграничные плоскости (т. е. совокупность всех тех точек, которые находятся на всех перпендикулярах, опущенных из каждой точки одной плоскости на другую), этот (если его так можно назвать) б е з г р а н и ч н ы й т е л е с н ы й с л о й, мы должны считать, во всяком случае, б е с к о н е ч н о б о л ь ш и м, какова бы ни была его ш и р и н а (т.е. длина такого перпендикуляра). При равной ширине двух таких телесных слоев мы можем назвать равными эти величины, а также можем считать равными множество точек в двух таких телесных слоях, основываясь на том же заключении, которым мы пользовались уже много раз (№№8, 10, 12).

16. Положение, которое занимает в безграничном т е л е с н о м с л о е произвольно взятая, перпендикулярная к его плоскостям и ограниченная п а р а л л е л ь н ы м и п р я м ы м и п о л о с а, является совершенно сходным с обеих сторон телесного слоя, и положение всякой другой полосы этого рода в отношении к этому самому безграничному телесному слою, или к любому другому, является также подобным. Однако, нельзя сказать, чтобы обе части телесного слоя, отделенные одна от другой полосою, должны были иметь непременно р а в н ы е в е л и ч и н ы.

17. Две неограниченные п е р е с е к а ю щ и е с я плоскости разделяют все неограниченное пространство на четыре большие части, из которых каждые две противолежащие бесспорно п о д о б н ы одна другой, но не должны еще считаться вследствие этого равными.

18 Так же мало следует считать равными по величине два телесных пространства, которые заключаются между продолженными в бесконечность гранями двух п о д о б н ы х или (как говорят) равных телесных углов.

19. Точно так же не следует считать г е о м е т р и ч е с к и р а в н ы м и, т. е. имеющими равную величину, а тем более заключающими одинаковое множество точек, те две части, на которые делит пространство б е с к о н е ч н а я п л о с к о с т ь, хотя они и будут бесспорно подобными.

§ 50.

Остается еще рассмотреть кратко те парадоксы, которые мы встречаем в области м е т а ф и з и к и и ф и з и к и.

В этих науках я устанавливаю следующие предложения: «во вселенной н е т д в у х с о в е р ш е н н о р а в н ы х в е щ е й а, с л е д о в а т е л ь н о, и д в у х с о в е р ш е н н о р а в н ы х а т о м о в или простых субстанций, но необходимо допустить существование подобных простых субстанций, как скоро допускается существование с л о ж н ы х т е л в мире; наконец, необходимо также предположить, что все эти субстанции п е р е м е н н ы и постоянно изменяются». Я утверждаю все это, потому что мне кажется, что это все суть истины, которые могут быть так же строго и ясно доказаны, как любое предложение в математике. Несмотря на это, я должен опасаться, что большая часть физиков отнесется неодобрительно к этим предложениям. Они ведь ставят себе в заслугу установление только таких истин, которым их учить о п ы т, а опыт не обнаруживает никакой разницы между мельчайшими частицами тела, в особенности одного рода, например, между мельчайшими частицами золота, добытого из того или другого рудника. Далее, говорят они, опыт учит, конечно, что каждое тело сложно, но никто не видел атомов, так как они, будучи совершенно простыми, не имеют никакого протяжения. Опыт показывает, наконец, что различные вещества, например, кислород, водород и т. д. входят между собою то в одни, то в другие соединения и оказывают то одно, то другое действие, – но чтобы они сами претерпевали вследствие этого внутренние изменения, чтобы, например, кислород превратился постепенно в другое вещество, – это, по их мнению, простая выдумка.

1. По моему мнению, ошибочно утверждать, что о п ы т учить нас вышеприведенным положениям. Опыт, простой, непосредственный опыт или восприятие, не соединенное с известными истинами, касающимися чистых понятий, учит нас только тому, что мы вообще имеем те или другие восприятия или представления. Откуда являются эти представления, вследствие ли действия какого-либо отличного от нас предмета, нуждаются ли они вообще в какой-нибудь причине, и какие свойства имеет эта причина, – в этом отношении непосредственное восприятие не учит нас ровно ничему; об этом мы выводим заключения только на основании истин, касающихся чистых понятий и придумываемых нашим разумом; заключаем мы, в большинстве случаев, по простому правилу вероятности, о том, например, что красный цвет, который мы теперь видим, вызван болезненным состоянием наших глаз, а ощущение запаха вызвано близостью цветка Напротив, для того, чтобы

заметить, что между любыми двумя вещами должно быть какое-нибудь различие, нет надобности ни в каком выведенном из опыта заключении простой вероятности. Напротив того, мы можем прийти к этому с полной достоверностью после небольшого размышления. Если *A* и *B* – две вещи, то именно вследствие этого должна иметь место истина, что вещь *A* не есть вещь *B*, – истина, которая предполагает существование двух представлений *A* и *B*, из которых одно служит представлением только вещи *A*, но не *B*; другое же только вещи *B*, но не *A*. В этом уже обстоятельстве лежит, конечно, различие (и притом внутреннее) между вещами *A* и *B*. Если мы видим таким образом, что между любыми двумя вещами необходимо есть известные различия, то каким образом можем мы себе позволить сомневаться в таком различии только потому, что мы его иногда не замечаем. Для того, чтобы его заметить, ведь нужна особая острота чувств и много других обстоятельств.

2. Правильно то, что только опыт учит нас тому, что существует много вещей, оказывающих на нас свое действие, и что именно те, которыми обуславливаются наши восприятия, с л о ж н ы . Однако, опыт учит нас этому только в предположении известных истин, касающихся чистых понятий, как например, той, что различные действия вызываются различными причинами, и т. д. Но не менее верны и выражающиеся в понятиях истины, что каждая причина должна быть чем-то действительным, что все действительное есть или субстанция, или совокупность многих субстанций либо свойств одной либо многих субстанций; равным образом, что свойства, представляющие нечто действительное, не могут существовать без существования субстанции, в которой они находятся, а совокупности субстанций не могут существовать без субстанций, которые составляют части этих совокупностей. Однако, отсюда следует со строгой необходимостью существование простых субстанций, и было бы смешным не признавать их существования только потому, что мы их не видим; и это делается еще более несообразным, когда дальнейшее размышление учит, что каждое тело, которое мы можем воспринимать с помощью внешних чувств, должно быть сложно, даже должно быть составлено из бесконечного количества частей.

3. Подобное же ошибочное заключение от невосприятия к несуществованию получается, при нежелании допустить то, что все конечные субстанции подлежат никогда не прекращающемуся и з м е н е н и ю . На своей собственной д у ш е мы достаточно знаем изменчивость ее состояний, представлений, свойств и сил; простая аналогия побуждает нас сделать подобное заключение о душах животных и о растениях. Но только основываясь на разуме мы в праве принять, что в действительности изменяются все субстанции, даже и те, которые в течение столетий не обнаруживают никаких заметных для нас изменений. Кто хочет оспаривать это, кто высказывается против этого, по крайней

мере, в отношении так называемой м е р т в о й м а т е р и и и ее п р о с т ы х ч а с т е й , или атомов, тот вынужден утверждать, что все изменения, являющиеся нам в этой части творения (если, например кусок льда, который был только что твердым, теперь растаял к в течение ближайшего часа улетучится в форме пара) – что все эти изменения (говорю я) суть перемены, касающиеся мест, занимаемых меньшими или большими частицами этих тел, при чем в самих частицах не происходить никаких внутренних перемен. Но как же можно не заметить противоречия в которое впадают при этом объяснении? В самом деле, если бы не происходило никакого изменения в простых субстанциях – внутри их, то в таком случае, что могло бы быть причиной перемен в отношении их мест, и какие следствия должны были бы иметь эти только внешние изменения, каковы были бы их цели и по каким признакам они могли бы быть хотя бы только узнаны? На все эти вопросы можно ответить разумно только в том случае, если признать, что простые субстанции, именно те, которые не совершенны, т.е. могут вместить большее количество сил, чем в них есть, по этому самому имеют способность к и з м е н е н и ю при взаимодействии, и если рассматривать их м е с т а только как такие их определения, которые заключают основание, почему именно, владея данной мерой сил в данном промежутке времени, они вызывают одна в другой именно это, а не большее или меньшее изменение. Только при этом предположении, столь ясном и очевидном даже для обыкновенного человеческого ума, и исчезает всякое противоречие в учении о вселенной; нужно только подняться выше некоторых почти устарелых школьных мнений для признания того, что все находится в полном согласии.

§ 51.

1. Первое из этих ш к о л ь н ы х м н е н и й , от которых мы должны отказаться, есть придуманная прежними физиками м е р т в а я или просто н е д е я т е л ь н а я м а т е р и я , простые части которой, если таковые существуют, все равны между собою, вечно неизменны и не имеют никаких собственных сил, кроме разве так называемой с и л ы и н е р ц и и . Что всегда д е й с т в и т е л ь н о , то должно и д е й с т в о в а т ь , а следовательно, имеет с и л ы для действия. Субстанция же о г р а н и ч е н н а я , и поэтому переменная, не может, конечно, иметь никакой силы, которая по самой своей природе не допускала бы изменения в своем действии и, следовательно, в особенности, не может владеть творческой силой и должна иметь только силы изменения, которые могут быть или и м м а н е н т н ы м и , как сила о щ у щ е н и я , или п е р е х о д я щ и м и , как сила движения.

Как бы там ни было, для того, чтобы научиться постепенно с достаточной точностью судить о результатах. которые произойдут от известного соединения многих тел, да будет нам дозволено теперь и после представлять себе рассматриваемый случай сначала значительно более простым и предположить, вместо бесконечного множества сил, которые здесь действуют на самом деле, присутствие только некоторых, немногих сил, и даже вообще рассматривать такие тела и их свойства, которые в действительности вовсе не существуют, с целью определить, что они могут произвести. Но, не обсудив надлежащим образом предмета, мы не в праве предполагать, что результаты, получаемые в этом воображаемом случай, согласуются, до известной степени, с теми, которые получатся в действительности. Невнимание к этой предосторожности, как мы впоследствии увидим, было причиною различных знаменитых парадоксов.

§ 52.

2. Другой школьный предрассудок состоит в том, что никакое предположение непосредственного действия одной субстанции на другую недопустимо в науке. Верно только то, что мы никогда не в праве предполагать без предварительного доказательства, что известное действие совершается непосредственно. Верно также, что прекратилась бы всякая научная работа, если бы мы стали объяснять каждое наблюдаемое нами явление тем только, что говорили бы, что оно возникает непосредственно. Однако, очевидно, что мы заходим слишком далеко и впадаем в новую, также очень вредную ошибку, когда считаем каждое действие одной субстанции на другую не непосредственным, даже не допуская нигде непосредственного действия. В самом деле, каким же образом могло бы произойти посредственное действие, если бы совсем не было бы непосредственного действия? Так как это достаточно ясно, то мы и не станем останавливаться на этом дальше. Мы ограничимся только тем, что выразим удивление, как мог такой великий и осторожный мыслитель, как Лейбниц, прийти к неудачной гипотезе предустановленной гармонии, которая испортила всю его прекрасную систему космологии. И это только потому, что он не знал никакого средства, которое давало бы простым субстанциям возможность взаимодействия.

§ 53.

3. С этим предрассудком теснейшим образом связан, и этим самым уже опровергается, тот еще более давний предрассудок, что невозможно никакое (именно никакое непосредственное) действие одной субстанции на другую, находящуюся от нее в некотором расстоянии. В самом резком противоречии с этим представлением, я утверждаю наоборот, что каждое действие одной (находящейся в пространстве, следовательно, ограниченной) субстанции на другую есть actio in distans уже по той очень простой причине, что две различные субстанции в каждое мгновение занимают также два различных места и, следовательно, должны находиться на некотором расстоянии одна от другой. Я говорил уже выше о кажущемся противоречии между этим утверждением и тем, что пространство наполнено непрерывно.

§ 54.

4. Это наше утверждение противоречит, конечно, и другому предрассудку школ новейшего времени, который усматривает проникновение одной субстанции в другую именно в каждом химическом соединении. Я безусловно отрицаю всякую возможность такого проникновения, потому что, на сколько я вижу, уже в самом понятии простого места (точки) заключается то, что оно есть место, где может находиться только одна (простая) субстанция. Где находятся два атома, там и два места. Из многократно уже повторенного нашего определения пространства вытекает также непосредственно, что только величина расстояния двух действующих друг на друга атомов определяет величину изменения, которое они вызывают друг в друге в течение некоторого данного промежутка времени.

Если бы две или больше субстанции хотя бы самое короткое время могли находиться в одном и том же месте, то оказалось бы абсолютно невозможным определить величину их взаимодействия в это время; даже если бы это было только одно мгновение, невозможно было бы определить их состояние в это мгновение.

§ 55.

5. Но со времен Des Cartes'а возник еще новый предрассудок в школах. Считая (с очень похвальным намерением), что невозможно оценить достаточно высоко различие между субстанциями мыслящими и немыслящими (духом и материей, как он их назвал), он пришел к поразительному для

человеческого ума, даже немыслимому, утверждению, что не только нельзя считать духовное существо протяженным, т. е. состоящим из частей, но что даже невозможно рассматривать его, как какое бы то ни было существо, находящееся в пространстве, т.е. заполняющее своим присутствием хотя бы одну точку пространства. Так как позднее Кант зашел так далеко, что объявил пространство (так же, как и время) только парою форм нашей чувственности, которым не соответствуем никакой предмет сам по себе; далее, так как он противоставляет друг другу два мира, духовный и чувственный, то нельзя и удивляться, если предрассудок, что духовные существа не занимают места в пространстве, укоренился так глубоко, по крайней мере, в Германии и если он держится в наших школах до сегодняшнего дня. Относительно оснований, при помощи которых, как я думаю, я опроверг этот предрассудок, я должен указать на другие мои сочинения, а именно на Wissenschaftshlehre и на Athanasia. Каждый должен будет признать то, по крайней мере, что установленный мною взгляд, по которому все созданные субстанции на общем основании, должны находиться как во времени, так и в пространстве, и все различие в их силах составляет только различие степени, имеет уже преимущество простоты перед всеми другими, до сих пор известными взглядами.

§ 56.

6. Такой взгляд устраняет также и большой парадокс, который до сих пор всегда усматривали в связи между духовными и материальными субстанциями. Как может действовать материя на дух и – обратно – дух на материю, если они столь разнородны, – это считалось тайной, неподдающейся исследованию для нас, людей. Из вышеприведенных взглядов, однако, следует, что это взаимодействие должно быть, по крайней мере, отчасти непосредственным, а следовательно, не может заключать в себе ничего тайного и сокровенного для нас; этим, однако, мы отнюдь не хотели сказать, чтобы не было очень многого достойного познания и исследования в той части этих воздействий, которые вызываются при посредстве чего либо и особенно при посредстве организмов.

§ 57.

7. Если в древности представляли себе субстанции без сил, то в новейшее время, наоборот, стремились создать вселенную из одних сил, без субстанций. То обстоятельство, что каждая субстанция проявляет свое существование не иначе, как при помощи

своих действий, следовательно, при помощи сил, вызвало, без сомнения, ошибочное определение понятия субстанции, как совокупности одних сил. Грубый чувственный образ, на который указывает этимология слов: субстанция, субстрат, субъект, носитель и т. п., казалось, давал ясное доказательство того, что господствующее вообще учение, по которому для существования субстанции нужно нечто особенное, чему эти силы принадлежат, как его свойства, представляет простой обман чувств, потому что здесь, конечно, нет никакой надобности в носителе, в основе, в собственном значении этого слова. Но разве мы должны оставаться при этом чувственном истолковании? Любое нечто, даже простое понятие о ничто, мы должны ведь рассматривать, как предмет, который имеет не одно только свойство, а целую совокупность бесконечно многих свойств, Мыслим ли мы на этом основании любое нечто, как носителя в собственном значении этого слова? Конечно, нет! Но если мы будем мыслить нечто, определяя его как нечто действительное, не являющееся качеством другого действительного, то оно будет заключаться в понятии субстанции, согласно с правильным определением этого слова. Кроме одной несотворенной субстанции, таких сотворенных субстанций существует множество. Мы называем силами, в общепринятом значении этого слова, все те свойства этих субстанций, которые мы должны считать ближайшей (т.е. непосредственной) причиной какого либо явления внутри или вне производящей его субстанции. Сила, которая не являлась бы свойством какой-либо субстанции, должна быть названа не просто силой, а самостоятельной субстанцией, так как она, в качестве причины, была бы чем-то действительным и при том действительным, не находящемся ни в каком другом действительном.

§ 58.

Что ни одна ступень бытия не является ни наивысшей, ни наинизшей в творении Бога; далее, что на каждой ступени, как бы ни была она высока, во всякое, хотя бы самое раннее время существовали творения, которые, благодаря своему быстрому развитию, достигли уже этой ступени; что на каждой, даже самой низшей ступени и во всякое, даже самое позднее время будут существовать творения, которые, несмотря на постоянное движение вперед, только теперь достигают этой ступени, – все эти парадоксы не нуждаются ни в каком дальнейшем объяснении после всего того, что мы говорили по поводу подобных вопросов (§38 и след.) относительно времени и пространства.

§ 59.

Однако, еще более странно звучит следующий парадокс: «Несмотря на то, что все бесконечное пространство вселенной везде и во все времена наполнено субстанциями таким образом, что ни одна точка ни на одно мгновение не остается без находящейся в ней субстанции, а также ни одна точка не содержит двух или многих субстанций, – несмотря на это, существует бесконечное множество различных степеней плотности, присущих субстанциям, наполняющим различные части пространства в различные времена, – так что одно и то же количество субстанций, наполняющее в это мгновение, например, этот кубический фут, в другое время может занимать в миллионы раз большее пространство, или быть сжатым в пространство, в тысячу раз меньшее, и при том так, что при расширении ни одна точка в большем пространстве не останется пустой, а при сжатии ни одна точка меньшего пространства не будет заключать двух или больше атомов».

Я знаю очень хорошо, что это мое утверждение в глазах большинства физиков представляет до сих пор несообразность. В самом деле, так как они утверждают невозможность согласования факта неодинаковой плотности тел с предположением непрерывно наполненного пространства, то они рассматривают некоторый род пористости, как общее свойство всех тел, даже и тех у которых (как у газов и у эфира) на это не указывает никакое наблюдение. В этих то порах, из которых большие считаются наполненными газами, значит, собственно, только в никогда не виденных порах жидкостей, физики предполагают до сих пор так называемое *vacuum dispertitum*, т.е. известные пустые пространства в таком множестве и такого протяжения, что едва ли биллионная часть пространства, наполненного только эфиром, заключает в себе настоящую материю. Тем не менее я надеюсь; что для всех, кто настоящим образом взвесил сказанное в §20 и след., будет достаточно ясно, что нет ничего невозможного в том, чтобы то же самое (бесконечное) множество атомов занимало то большее, то меньшее, пространство без того, чтобы, в первом случае, хотя бы одна точка осталась не занятой и чтобы, во втором, хотя бы одна точка заключала в себе два атома.

§ 60.

После этого вряд ли покажется странным уже давно установленное в древней метафизике, в учении *de nexu cosmico*,

утверждение, что каждая субстанция в мире находится в непрерывном общении с каждой другой, при том таким образом, что изменение, которое одна из них вызывает в другой, делается тем меньше, чем больше расстояние между ними, и что общий результат влияния всех субстанций на каждую в отдельности представляет то изменение, которое (если не принимать во внимание случай, когда происходит непосредственное воздействие Бога) происходит по известному закону непрерывности, так как уклонение от этого последнего требует такой силы, которая должна быть бесконечно большой по сравнению с непрерывной силой.

§ 61.

Несмотря на легкость, с которой из простых понятий выводится учение о господствующих субстанциях, установленное уже в первом издании Athanasia (1829), в этом учении найдутся, однако, также парадоксы; поэтому является необходимым упомянуть здесь о них в нескольких словах.

А именно: я исхожу (*l.c.*) из мысли, что, так как между двумя субстанциями во вселенной во всякое время, как известно должна существовать некоторая разница конечной величины, то во всякое время существуют субстанции, силы которых возросли уже настолько, что они приобретают некоторое превосходство над всеми, лежащими вокруг них субстанциями, хотя бы в сколь угодно малой окрестности. – Было бы ошибкой, и притом ошибкой набрасывающей на это предположение подозрение во внутреннем противоречии, вообразить, что такая господствующая субстанция должна обладать силами, бесконечно превосходящими силы подчиненных субстанций. Но это ни в каком случае не верно. В самом деле, допустим что в пространстве конечной величины, например, в шаре (положим, в его центре), находится субстанция, силы которой превосходят силы каждой из простых субстанций в конечное число раз; например, пусть каждая из прочих субстанций будет вдвое слабее ее. Конечно, невозможно сомневаться в том, что совокупное действие этих бесконечно многих, более слабых субстанций, в случае, когда они объединяются в своей деятельности (как это, например, бывает при их стремлении приблизиться к некоторому центральному телу, – о чем мы будем вскоре говорить), превзойдет в бесконечное число раз действие более сильной субстанции. Однако, могут и должны быть и другие случаи, когда эти силы не направлены к одной и той же цели. А именно, если обратить теперь внимание только на то действие, которое оказывает каждая из субстанций, находящихся в пространстве, на всякую другую, и на то, которое она взаимно испытывает, – то следует сказать, что обыкновенно это взаимодействие окажется более сильным у сильнейшей субстанции именно в отношении, соответствующем ее силе. В нашем примере, следовательно, та субстанция, которую мы предполагаем, по крайней мере, вдвое более сильной, чем каждую из соседних, будет действовать на каждую из них, по крайней мере, вдвое сильнее, чем те на нее. Это именно мы и имеем в виду, когда говорим что она господствует над другими.

§ 62.

Нам могут, однако, возразить, что если это верно, то не только в некоторых пространствах, а в каждом, даже сколь угодно малом пространстве, даже в любой совокупности атомов должен находиться господствующий атом, так как в каждой совокупности многих атомов должен быть, как самый сильный, так и самый слабый. Я надеюсь, однако, что никто из моих читателей не нуждается в указании, что только для конечных множеств это должно быть всегда верно; там же, где имеется бесконечное множество, для каждого члена может существовать больший (или меньший), несмотря на то, что ни один из них не превосходит (или не меньше) некоторой конечной величины.

§ 63.

Эти господствующие субстанции, уже по самому понятию о них, являются в каждом конечном пространстве только в конечном количестве, при чем каждая из них окружена большей или меньшей оболочкой подчиненных субстанций. Соединившись в группы конечной величины, эти господствующие субстанции и образуют то, что мы называем разнообразными, встречающимися в мире телами (газообразными, капельножидкими, твердыми,, органическими и т.д.). В противоположность им, я называю эфиром всю остальную мировую материю, которая, не имеет особенных атомов, наполняет все остальное пространство и соединяет, следовательно, все тела вселенной. Здесь не место излагать, как некоторые явления, до сих пор лишь несовершенно объясненные или вовсе не нашедшие себе объяснения, объясняются с величайшей легкостью на основании этого предположения (если угодно смотреть на него, только как на предположение). Сообразно с целью этой работы, я должен себе позволить лишь несколько указаний, которые выясняют кажущиеся противоречия.

Если все созданные субстанции различаются между собою только степенью своих сил; если поэтому для каждой из них нужно

допустить некоторую, хотя бы самую малую степень чувствования и если все они влияют одна на другую, – то нет ничего понятнее, чем то, что для каждых двух каких бы то ни было субстанций, а тем более для двух особенных субстанций, не всякое расстояние является одинаково приятным (одинаково полезным для них), так как от величины расстояний зависит и сила влияния, которое они оказывают, а также и сила того влияния которому они подвержены. Если разстояние, в котором они находятся, больше, чем это является приятным для одной из субстанций, то в ней проявится стремление сократить это разстояние, т. е. проявится так называемое притяжение, в противоположном же случае проявится отталкивание. Ни то, ни другое не должны мы представлять себе непременно взаимным; и еще менее должны мы думать, что действие сопровождается всегда действительным перемещением; но мы можем принять, как достоверное, то, что для каждых двух субстанций во вселенной существует расстояние, достаточно большое для того, чтобы для него и для всех больших расстояний имело место взаимное притяжение, и что точно также существует расстояние, достаточно малое для того, чтобы для него и для всех меньших расстояний имело место взаимное отталкивание. Но как бы сильно с течением времени ни изменялась величина этих двух расстояний, которые составляют границы притяжения и отталкивания двух субстанций, не только вследствие свойств этих субстанций, но также и вследствие свойств смежных с ними субстанций, лежащих в их окрестности, – остается бесспорным то, что влияние, которое оказывают две субстанции одна на другую, при условии сходства прочих обстоятельств, должно уменьшаться с увеличением расстояния между ними, хотя бы уже по той причине, что множество тех субстанций, которые могли бы находиться в равном расстоянии и претендовать на одинаковое действие, увеличивается, как квадрат расстояния. Далее, так как перевес, который имеет каждая особенная субстанция над каждой подчиненной, достигает всегда только конечной величины, между тем как количество последних субстанций превосходит в каждом пространстве количество первых в бесконечное число раз, то понятно, что сила притяжения, которую оказывают все субстанции, находящиеся в данном пространстве, на один атом, вне лежащий, когда его расстояние достигло достаточной величины, будет приблизительно такая же, какая проявлялась бы, когда пространство не заключало бы никаких особенных субстанций, а только содержало бы то же самое множество простых атомов. Если связать это с предыдущим, то получится важное заключение, что между всеми телами, расстояния которых друг от друга имеют достаточную величину, существует сила притяжения, находящаяся в прямом отношении к сумме их масс (т. е. множеству их атомов), и обратном к квадрату их расстояния. Ни один физик и ни один астроном, не отрицает в наше время, что этот закон наблюдается во всей вселенной, но, по-видимому, до сих пор редко обращали внимание на то, как трудно он согласуется с обыкновенным взглядом на свойства элементарных частей различных тел Если бы дело обстояло так, как его себе обыкновенно представляли, т.е. так, что те 55 и более простых тел, с которыми познакомились наши химики на земле, образуют массу всех встречающихся здесь тел, при чем каждое из них представляет лишь совокупность атомов одного или другого, или нескольких из этих простых тел (так что, например, золото – просто совокупность одних атомов золота, сера—совокупность одних атомов серы и т. д.), – если бы это было так, то пусть кто может объяснит мне, каким образом вещества столь различные по своим силам, а именно по степени своего притяжения, несмотря на это, по весу друг другу вообще равны, т.е. что их веса относятся, как их массы. Справедливость же последнего утверждения доказывается непосредственно известным опытом, что шары из любого вещества, если только они будут равны по весу, сталкиваясь друг с другом, обнаруживают при ударе такие же свойства, как тела одинаковой массы, так что, например, при одинаковой скорости (насколько устранено действие упругости или насколько оно принято в расчет) они приводят друг друга в состояние покоя. Если же мы предположим, что все тела состоят собственно только из бесконечного количества эфира, в котором находится совершенно исчезающее в сравнении с этим множеством число особенных атомов, силы которых превосходят только в конечное число раз силы атома эфира, то станет понятным, что сила притяжения, которую испытывают эти тела от всего земного шара, не может быть ни в каком случае заметно повышена малым числом особенных атомов и что, следовательно, вес их должен быть пропорционален лишь всей их массе. Однако, и теперь найдется не мало физиков, рассматривающих тепловую материю (т.е. собственно, то самое вещество, которое я отождествляю с эфиром), как жидкость, которая находится во всех телах и никогда не может быть вполне удалена из них. Следовательно, если бы они не составили себе, к несчастью, представления, что эта тепловая материя невесома, и если бы они возвысились до взгляда, что множество атомов, находящихся в каждом отдельном теле вместе с теплотой, в сравнении с последней, является количеством исчезающим (а как близки они были к этой мысли, представляя себе иногда атомы отделенными друг от друга расстояниями, бесконечно большими по сравнению с их диаметрами), то им вскоре стало бы совершенно ясно, что эта их теплота и есть то, что определяет вес всех тел.

§ 64.

Легко понять, что господство особенной субстанции над ближайшею областью состоит, если не в чем-либо другом, то, по крайней мере, в известном более сильном притяжении соседних атомов, вследствие чего эти последние сближаются друг с другом и с этой субстанцией плотнее, чем это имело бы место без такого притяжения; по этой причине они имеют стремление при удобном случае удалиться опять, как от этого центра притяжения, так и друг от друга, т. е. стремление отталкиваться. На это указывают многие опыты, для объяснения которых, однако, совершенно напрасно предполагали существование первоначальной силы взаимного отталкивания частиц эфира.

§ 65.

Из этого обстоятельства вытекает легкое доказательство того предложения, которое я установить уже в Athanasia, что ни одна особенная субстанция не испытывает в своей оболочке такого изменения, при котором она не удерживала бы известной, хотя бы самой малой части своей ближайшей окрестности. Конечно, никто не подумает, что некоторая особенная субстанция *a* лишится ближайших к ней эфирных атомов, если ни одна из всех окружающих ее соседних особенных субстанций *b*, *c*, *d*, *e*. . . не изменяет своего расстояния от *a*. Можно было бы ожидать этого лишь в том случае, если бы некоторые из них, или все удалились. Однако, если даже это случится, то только часть частиц эфира, окружающих *a*, последует за удаляющимися субстанциями *b*, *c*, *d*, *e*. . . ; другая же часть их, а именно часть тех, которые находятся ближе всего к *a*, должна всегда оставаться, хотя мы не только признаем, но даже утверждаем, как необходимое, что эта часть займет большее пространство. Смотря по обстоятельствам, эфирные частицы могут притекать даже из известных отдаленных областей и проникать в те места, которые наполнены эфиром, сравнительно более разреженным, вследствие слишком больших расстояний, на которые раздвинулись субстанции *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. . . Но нет никакого основания к тому, чтобы этот эфир, притекающий издалека, стал отталкивать эфир, окружающий субстанцию *a*, и занимать его место. Притекающий эфир, вместо того, чтобы вытеснить эфир, окружающий субстанцию *a*, должен только препятствовать его дальнейшему расширению и сжимать его до тех пор, пока плотность его не уравновесит притягательных сил всех окружающих атомов.

§ 66.

Вслед за этим могут быть разрешены некоторые прежние вопросы; ответы на них могли бы показаться парадоксальными, если бы они не нашли себе объяснения в предыдущем. К этому роду вопросов относится вопрос о границах т е л а : где, собственно, кончается одно тело и начинается другое? Под г р а н и ц е й тела я разумею совокупность тех с а м ы х к р а й н и х атомов эфира, которые еще п р и н а д л е ж а т телу, т.е. таких атомов, которые сильнее притягиваются особенными его атомами, чем другими, находящимися по близости, господствующими атомами, так что, при изменении положения тела относительно окружающей среды (например, удалении от нее), внешние частицы эфира, составляющие его границу, у д а л я т с я вместе с ним, если и не с той же скоростью, то все же так, что не наступит ни разделения, ни вторжения посторонних атомов. Если мы примем это определение понятия о границе, то окажется тотчас же, что граница тела представляет нечто очень изменчивое. Она изменяется даже почти постоянно, как только произойдет какое-нибудь изменение в самом теле или в соседних телах. Понятно, что все подобные изменения могут произвести много изменений, как в силе, так и в направлении притяжения, которое испытывают не только подчиненные, но и господствующие атомы. Так например многие частицы этого пера, которые еще незадолго перед этим сильнее притягивались его массой, чем окружающим воздухом, и потому составляли его часть, теперь притягиваются сильнее моими пальцами, чем массой пера, и потому отрываются от него. – Более точное рассуждение показывает, что некоторые тела на известных местах не имеют вовсе атомов границы, т, е. таких атомов, которые были бы самыми к р а й н и м и среди атомов, еще принадлежащих к телу и следующих за ним при изменении его положения. В самом деле, всякий раз, когда одно из двух соседних тел имеет в определенном месте самый крайний вместе с ним перемещающийся атом, то другое тело, по этому самому, уже не будет иметь подобного крайнего атома, так как все атомы, находящиеся за этим крайним, уже составляют принадлежность другого тела.

§ 67.

Таким же образом получается ответ на вопрос, находятся ли тела в непосредственном с о п р и к о с н о в е н и и друг с другом или отделены некоторым промежутком, и когда имеет место то или другое. Если я позволю себе предложить определение (которое мне кажется самым целесообразным) – что два тела соприкасаются друг с другом, если

самые крайние атомы, которые принадлежат одному из них, на основании объяснения в предыдущем параграфе, составляют непрерывное протяжение с некоторыми атомами другого, то, конечно, невозможно будет отрицать что существует много тел, соприкасающихся между собою не только тогда, когда одно из них или оба жидкие, но и тогда, когда они твердые, – если только сначала сильным сжатием или другим каким-либо способом будет удален воздух, прилегающий к ним в обыкновенном их состоянии на земле. Если два тела не касаются друг друга, то промежуток между ними должен быть наполнен каким-нибудь другим телом или, по крайней мере, эфиром, потому что совершенно пустого пространства не бывает. Поэтому можно утверждать, что каждое тело находится со всех сторон в соприкосновении с некоторыми другими телами или, в случае отсутствия тел, с чистым эфиром.

§ 68.

Что касается различных видов происходящих во вселенной движений, то, в виду того обстоятельства, что (по нашему воззрению) никакая часть пространства не бывает пустой, можно было бы думать, что возможно только такое движение, при котором вся одновременно движущаяся масса образует цельное замкнутое протяжение, где каждая часть всей массы занимает только те места, которые непосредственно перед тем занимала другая часть массы. Но кто помнит то, что было сказано в §59 о различных степенях плотности, присущих субстанциям, наполняющим пространство, тот поймет, что могут и должны существовать еще многие другие движения. Особенно одно движение, – к о л е б а т е л ь н о е , должно встречаться почти всегда не только у всех эфирных атомов, но также почти у всех особенных атомов по причине, которая столь очевидна, что я и не стану приводить ее. После колебательного, наиболее часто встречающимся и очень обыкновенным должно быть в р а щ а т е л ь н о е движение, особенно у т в е р д ы х тел. Как следует представлять себе это движение и как при допущении материальной оси вращения (что, по нашему мнению, всегда должно быть) следует объяснять то обстоятельство, что те же самые атомы, которые теперь находятся по ту ее сторону, через пол-оборота, не отделившись, окажутся на противоположной ее стороне, – все это может ввести в затруднение только того, кто забывает, что в континууме, также, как и вне его, каждый атом находится в известном расстоянии от другого и, следовательно, может обращаться около него, не отрываясь и не заставляя его поворачиваться; это последнее, т.е. вращение вокруг самого себя для простого протяжения представляло бы нечто, содержащее противоречие.

§ 69.

Не желая утверждать, чтобы хотя один господствующий или подчиненный атом во вселенной в какое-либо время описывал совершенную прямую линию или совершенную окружность круга (что представлять крайне малую, бесконечно малую вероятность при бесконечном множестве нарушений, которые испытывает каждый атом от действия всех остальных атомов), – тем не менее, мы не имеем права считать, что подобные движения невозможны сами по себе. Мы можем, однако, утверждать, что движение по ломаной линии, например, только тогда может осуществиться, когда скорость атома к концу части *ab* постепенно так уменьшится, что в точке *b* сделается нулем. Если движение после этого не должно быть прервано конечным промежутком покоя, то в каждое мгновение, следующее за прибытием в *b*, должна оказаться опять некоторая (возрастающая от нуля) скорость.

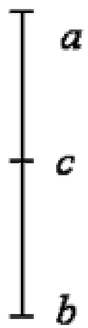
Не так обстоит дело с некоторыми другими линиями, как, например, с логарифмической спиралью. Независимо от всех внешних нарушений, противоречивым представляется уже то, что атом описывает в конечное время хотя бы ту ветвь этой линии, которая, начинаясь в какой-нибудь ее точке, направляется к центру. Еще несообразнее требовать, чтобы атом, описывающий эту ветвь, достиг, наконец, центра спирали. Чтобы доказать это только для того случая, когда атом описывает свой путь равномерно, вообразим себе сначала, что он движется один. В таком случае, сейчас же оказывается, что его движение по спирали можно рассматривать, как составленное из двух движений: одного равномерного по лучу в направлении к центру, и другого углового вращения вокруг этого центра; скорость этого вращения, возрастая равномерно, должна сделаться больше всякой конечной величины, как скоро атом подойдет к центру сколь угодно близко. Конечно, нет такой силы в природе, которая могла бы сообщить ему эту скорость; тем более нет такой силы, которая бы могла сообщить целой массе атомов, простирающихся в пространстве трех измерений, такую скорость, какая нужна для того, чтобы рассматриваемый атом мог в конечное время пробежать бесконечное множество оборотов спирали до центра. Но если бы атом даже имел такую скорость, то возможно ли было бы сказать о нем, что он достигнет центра? Я, по крайней мере, не думаю этого. В самом деле, хотя можно сказать, что этот центр составляют континуум с точками спирали (которые, бесспорно принадлежать ей), потому что среди них найдется соседняя с центром на каждом, сколь угодно малом, расстоянии, – тем не менее, этому линейному протяжению недостает еще второго свойства, необходимого для того, чтобы оно могло быть описано движением атома,

а именно, чтобы оно имело одно или несколько определенных направлений в каждой своей точке. Этого, как известно, нет в центре.

Сюда относится, наконец, еще один любопытный вопрос: возможно ли при наших воззрениях на бесконечность вселенной движение целой вселенной в определенном направлении или вращательное движение ее вокруг мировой оси или мирового центра? Мы ответим на это, что следует признать невозможным как одно, так и другое движение не потому, что невозможно найти для каждого атома место, которое он мог бы занять, но нужно признать эти движения невозможными потому, что не существует причин (сил), которые могли бы вызвать подобное движение. В самом деле, нельзя придумать причины, которая сделала бы возможным этого рода движения— ни физической причины, или распорядка, который являлся бы просто необходимым (т, е. представлял бы только следствие чисто теоретических истин, касающихся понятий), ни нравственной причины, или распорядка, который являлся бы только условно необходимым (т.е. такой распорядок, который мы встречаем в мире только потому, что Бог осуществляет всякое событие, направленное ко благу его творений).

§ 70.

Заключим эти рассуждения двумя парадоксами, которые сделались особенно знаменитыми благодаря Эйлеру. Уже Боскович (Boscowich) обратил внимание на то обстоятельство, что на один и тот же вопрос, а именно, как движется атом *a*, если он притягивается силой, находящейся в *c* в обратном отношении квадрату расстояния, получаются различные ответы. Различие это зависит от того, рассматривают ли этот случай, как такой, в который постепенно переходит эллиптическое движение, когда скорость вержения убывает до нуля, или же, когда, независимо от этой фикции, рассматривают вопрос сам по себе.



Если бы атом *a*, вследствие вержения или по другой какой-нибудь причин, в начале своего движения получил боковую скорость, перпендикулярную к *ac*, то (отвлекаясь от всякого сопротивления среды) он должен был бы описать эллипс, фокус которого находится в *c*. Если эта боковая скорость уменьшается бесконечно, то и меньшая ось этого эллипса тоже уменьшается бесконечно. Отсюда Эйлер и вывел заключение, что в случае, когда атом не имеет никакой скорости в точке *a*, должно наступить колебание его между точками *a* и *c*; при этом он полагает, что только это движение и есть то, в которое переходит эллиптическое движение без нарушения закона непрерывности. Напротив того, другие, особенно Буссе (Busse), находили несообразным, чтобы атом, скорость которого в направлении *ac* при приближении к точке *c* должна возрастать бесконечно, останавливался здесь без всякой видимой причины (присутствие, например, постоянного и непроницаемого атома, которое бы составляло препятствие к прохождению через это место, не предполагалось вовсе) и устремлялся бы в противоположном направлении. Они утверждали поэтому, что он должен, напротив того, продолжать свое движение в направлении *ac* за точку *c* но уже с убывающей скоростью, пока не достигнет конца отрезка $cb = ca$, затем, подобным же образом, он должен вернуться от *b* опять к *a*, и так далее, без конца. По моему мнению, ссылка Эйлера на закон непрерывности здесь еще ничего не разрешает. В самом деле, явление, о котором здесь спорят, будет ли колебание атома происходить внутри границ *a* и *b* или внутри *a* и *c*, – одинаково мало находится в противоречии с тем родом непрерывности, который действительно, как это можно доказать, управляет изменениями вселенной (возрастанием и убыванием сил отдельных субстанций). Однако же, впадают в противоречие с этим законом самым непозволительным образом уже вследствие того, что предполагают здесь силу, а именно силу притяжения, возрастающею бесконечно. Нельзя поэтому удивляться, если из противоречивых посылок вытекают противоречивые заключения. Отсюда, однако, видно, что не только Эйлер, но и Буссе неправильно отвечают на вопрос, так как они предполагают нечто такое, что само по себе невозможно, а именно бесконечно большую скорость в точке *c*. Если исправить эту ошибку, если предположить, следовательно, что скорость, с которой движется атом, изменяется по такому закону, при котором она остается постоянно конечной; если принять, наконец, в соображение, что невозможно говорить о движении отдельного атома, не предположивши среды, в которой он движется, и большего или меньшего количества атомов, движущихся вместе с ним, то получится совершенно иной результат, подробным описанием которого нам нет надобности здесь заниматься.

Второй парадокс, который мы изложим здесь лишь в немногих словах, касается движения маятника и состоит в. том, что половина времени качания простого маятника, длина которого = *r*, на протяжении бесконечно малой дуги по вычислению оказывается, как известно, равной $\frac{\pi}{2}\sqrt{r/g}$, между тем как время падения по хорде этой дуги, которую по длине считали обыкновенно равною дуге, оказывается равным $\sqrt{2}\sqrt{r/g}$. То обстоятельство, что Эйлер видел в этом парадокс, основывается единственно на его неправильном представлении о бесконечно малом, которое он себе представлял

равнозначным нулю. На самом же деле не может быть бесконечно малых дуг, также как и хорд; а то, что утверждают математики о своих так называемых бесконечно малых дугах и хордах, было ими доказано, собственно, только для дуг и хорд, которые могут быть взяты сколько угодно малыми. Вышеприведенные два равенства, если понять их правильно, не могут иметь никакого другого значения, кроме следующего: половина времени качания маятника подходит сколь угодно близко к величине $\frac{\pi}{2}\sqrt{r/g}$, если взять дугу, по которой происходит качание, сколь угодно малой; время же падения по хорде этой дуги подходит сколь угодно близко, при тех же обстоятельствах, к величине $\sqrt{2}\sqrt{r/g}$. Что эти две величины различны, что, следовательно, дуга и ее хорда, как бы они ни были малы, различны в отношении упомянутого времени падения, – в этом столь же мало странного, как и во многих других различиях между ними, исчезновения которых, пока дуга и ее хорда существуют, никто и не станет ожидать. Примером подобного различия может служить то, что дуга сохраняет всегда кривизну, а именно такую, величину которой мы можем измерить посредством $\frac{1}{r}$, между тем как хорда всегда остается прямой, т.е. не имеет никакой кривизны.