МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЮЖНО-УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ НАЦИОНАЛЬНОГО КОМИТЕТА ПО ИСТОРИИ И ФИЛОСОФИИ НАУКИ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ИЗ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ XVIII ВЕКА

К ПРЕДСТОЯЩЕМУ 300-ЛЕТНЕМУ ЮБИЛЕЮ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА (1707—1783)

Выпуск 4

Оренбург
Издательство ОГПУ
2004

УДК 51 (091)
ББК 22.1 г
И32

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук, профессор
Г. П. Матвиевская

Настоящий сборник был опубликован благодаря
спонсорской поддержке компьютерного магазина «**Хард**»
460000, г. Оренбург, ул. Советская, 46
Тел.: (3532) 777350, 781583
Факс: (3532) 781468
e-mail: hard@mail.esoo.ru

И32 **Из истории математики XVIII века. К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера** : Сборник научных статей. Вып. 4 / Отв. ред. Г. П. Матвиевская. — Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2004. — 160 с. ; 6 л. ил.
ISBN 5-85859-221-X

УДК 51(091)
ББК 22.1 г

ISBN 5-85859-221-X © Оформление. Издательство ОГПУ, 2004

СОДЕРЖАНИЕ

От редактора 4

Г. П. Матвиевская. О БИБЛИОТЕКЕ ЭЙЛЕРА. Каталог книг Эйлера в его записной книжке....6

Ж. Ю. Личикова. МЕТОД ЛОМАНЫХ ЭЙЛЕРА В ВАРИАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ 14

Ж. Ю. Личикова. МЕТОДЫ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ПРИБЛИЖЁННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ «НЕПРЕДСТАВИМОЙ» ФУНКЦИИ....31

В. Д. Павлидис. СПОР О ПРИРОДЕ ЛОГАРИФМОВ В XVIII ВЕКЕ. ЛОГАРИФМЫ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ И МНИМЫХ ЧИСЕЛ В ИССЛЕДОВАНИЯХ Л. ЭЙЛЕРА....44

Т. И. Иванова. ЭЙЛЕР И ЛАГРАНЖ: ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ВОПРОСОВ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ И АЛГЕБРЫ 63

И. К. Зубова. ТЕОРИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ В РАБОТАХ ЭЙЛЕРА И ЕГО СОВРЕМЕННИКОВ....73

И. В. Игнатушина. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ЭЙЛЕРА ПО ТЕОРИИ БЕТА-ФУНКЦИИ (ПО ПЕЧАТНЫМ РАБОТАМ И НЕОПУБЛИКОВАННЫМ МАТЕРИАЛАМ)....83

И. В. Игнатушина. РАЗВИТИЕ ИДЕЙ Л. ЭЙЛЕРА ПО ТЕОРИИ Г- И B-ФУНКЦИЙ В XIX в. 121

Г. М. Гузаиров. ОБОБЩЕННЫЕ ГАММА- И БЕТА-ФУНКЦИИ НА ГРУППОВЫХ ХАРАКТЕРАХ ПОЛЯ *R* КАК МОДИФИКАЦИИ ИНТЕГРАЛОВ ЭЙЛЕРА 145

Краткие сведения об авторах....159

От редактора

Настоящий выпуск сборника по содержанию является продолжением трех предыдущих, опубликованных издательством Оренбургского государственного педагогического университета в 2000—2002 гг. В них печатались результаты исследования по теме «Неопубликованные заметки по математике из записных книжек Леонарда Эйлера», проводившегося в университете при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

В предлагаемый сборник, сохранивший прежнее название, включены статьи, которые посвящены как изучению научного наследия Эйлера, так и вопросам истории математики, связанным с развитием идей великого ученого. Основное внимание по-прежнему уделяется выявлению и анализу новых заметок из неопубликованных записных книжек Эйлера, фотокопии которых имеются в распоряжении исследовательского коллектива.

В статье Г. П. Матвиевской рассматривается заметка Эйлера, которая находится в записной книжке, датируемой 1749—1757 гг., и содержит список книг его библиотеки. Этот список в сопоставлении с перепиской Эйлера позволяет подробнее осветить некоторые моменты его научной биографии.

Ж. Ю. Личикова, исследующая вопрос о роли Эйлера в создании приближенных методов математического анализа, представляет две статьи. В первой из них дан анализ метода приближенного вычисления производной «непредставимой» функции, который Эйлер изложил в своем труде «Дифференциальное исчисление». Во второй статье речь

идет о применении Эйлером разработанного им метода ломаных к решению задач вариационного исчисления. Автор рассматривает как опубликованные сочинения ученого, так и заметки из его записных книжек.

В статье В. Д. Павлидис сообщаются сведения относительно знаменитого спора математиков XVIII в. (И. Бернулли, Г. В. Лейбница, Л. Эйлера, Ж. Л. Даламбера) о логарифмах отрицательных чисел, который сыграл важную роль в формировании теории функций комплексной переменной. Приводятся фрагменты из записных книжек Эйлера, имеющие отношение к этому спору.

В двух следующих статьях — Т. И. Ивановой и И. К. Зубовой — содержатся примеры плодотворного творческого сотрудничества ученых XVIII в. в разработке актуальных проблем математики того времени. Т. И. Иванова останавливается на некоторых вопросах алгебры и теории чисел, которые исследовались одновременно Л. Эйлером и Ж. Л. Лагранжем. И. К. Зубова предлагает обзор исследований, в результате которых в XVIII в. были заложены основы важного раздела дифференциальных уравнений — теории малых колебаний.

Три последние статьи, связанные общей тематикой, посвящены теории бета- и гамма-функций.

В первой из них И. В. Игнатушина на основании печатных работ Эйлера, его переписки и записных книжек дает обзор результатов, полученных им в теории бета–функции. Во второй статье того же автора речь идет о развитии в XIX в. идей созданной Эйлером теории гамма- и бета-функций.

Работа Г. М. Гузаирова, в которой рассматриваются обобщенные гамма- и бета-функции на групповых характерах поля R как модификации интегралов Эйлера, служит примером отражения этих идей в творчестве современного математика.

Г. П. Матвиевская

Г. П. Матвиевская

О БИБЛИОТЕКЕ ЭЙЛЕРА

Каталог книг Эйлера в его записной книжке

Среди рукописей Эйлера, хранящихся в Архиве РАН, особого внимания заслуживают его записные книжки, куда на протяжении всей жизни великий ученый систематически вносил заметки по интересующим его вопросам [1]. Эти двенадцать рукописных томов различного формата представляют собою важный источник материала для научной биографии Эйлера. В них отражается ход его работы над многими научными проблемами, окончательное решение которых известно по опубликованным трудам. Встречается также немало записей, где рассматриваются вопросы, не затронутые в печатных работах; такие записи, естественно, вызывают наибольший интерес.

Часто заметки из записных книжек касаются решения задач, обсуждавшихся Эйлером в его переписке с учеными. В таких случаях оказывается возможным с достаточной точностью датировать эти и соседние записи и, судя по содержанию писем, выяснить, когда и в какой связи перед Эйлером встала та или иная математическая проблема. Иногда удается проследить, как, развивая возникшую идею, он приходит к совершенно новой постановке вопроса, далекой от первоначальной и давшей результаты, видимо, неожиданные для него самого.

Исследователи научного творчества Эйлера уже давно оценили важность изучения его записных книжек. Впервые на них обратил внимание Г. Энестрем (G. Enestrom, 1852—1923) в докладе, представленном эйлеровской комиссии в 1913 г. Изучая материалы архива Эйлера, он выделил записные книжки, установил их хронологическую последовательность, дал приблизительную датировку каждой и выразил пожелание, чтобы они были внимательно исследованы [2]. Он отметил, однако, большую трудоемкость такой задачи и, как выяснилось в дальнейшем, это замечание не содержало преувеличения.

Интерес к записным книжкам проявился вновь после возвращения в 1949 г. рукописей Эйлера из Швейцарии в Архив АН СССР и начала их широкого исследования в Советском Союзе [3]. Было дано общее описание книжек и на основании анализа содержания — более точная их датировка [4—7]. Исследовались заметки по механике, теории чисел, алгебре, астрономии, физике и т.д. Однако и сейчас изучение этих ценных материалов далеко не завершено.

В записной книжке, которая датирована приблизительно 1749—1755 гг. [8], содержится список книг библиотеки Эйлера, озаглавленный «Каталог моих книг» (Catalogus Librorum meorum). Он бегло упоминается в статье Г. К. Михайлова [4, с. 88], где приведена также фотокопия двух фрагментов текста. Однако этот каталог, несомненно, заслуживает внимательного изучения, так как набор книг в библиотеке красноречиво говорит об интересах и склонностях ее владельца.

Список занимает 20 страниц записной книжки (л. 192—201 об.) и включает 539 названий сочинений на разных языках — латинском, немецком, французском, английском, русском, греческом. Книги описаны без какой-либо определенной системы и подразделены только на издания in folio и in quarto.

Даже беглый обзор каталога показывает, что к 1750 г. Эйлер владел большой и богатой по содержанию библио-

текой, в которой представлены не только естественные, но и гуманитарные науки, а также религиозная и художественная литература, главным образом классическая. В списке фигурируют сочинения Гомера (№ 379), Овидия (№ 317), Тацита (№ 282), Геродота (№ 473), Сенеки (№ 366), Цицерона (№ 49, 201, 398), Вергилия (№ 187), собрание древних латинских поэтов (№ 404), произведения Корнеля (№ 270—275).

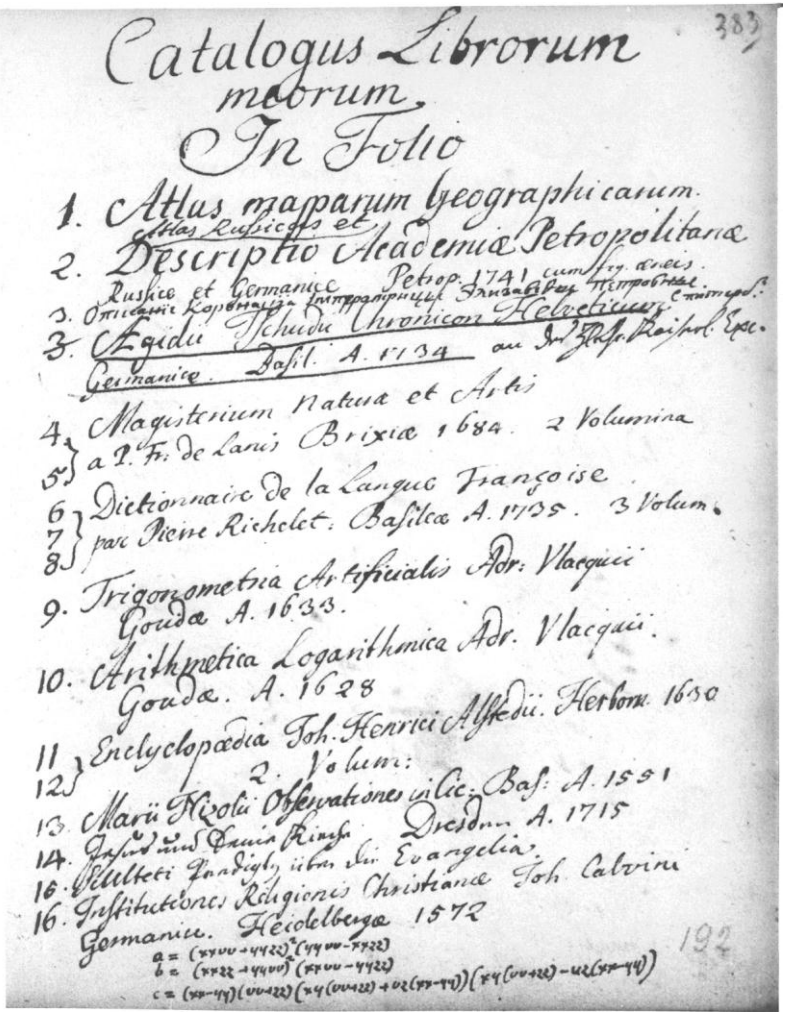
В библиотеке было много старинных книг, изданных в XVII и даже в XVI в. Наиболее древнее издание — латинская Библия 1524 г. (№ 376), уже во время Эйлера являвшаяся библиографической редкостью. Немалую ценность с этой точки зрения представляло и немецкое издание «Основ христианской религии» Кальвина (№ 16), выпущенное в 1572 г. в Гейдельберге. Сочинения Вергилия, значащиеся под № 187, были изданы в 1583 г.

Каталог показывает, что Эйлер интересовался и новой историей. В его библиотеке были книги по истории Франции (№ 283), Голландии (№ 281), России (№ 170; французское издание, Гаага, 1725 г.; автор не указан), по всеобщей истории (№ 314—315).

Из философских произведений обращают на себя внимание прижизненные издания Р. Декарта: «Размышления о первой философии», опубликованные в Амстердаме в 1645 году (№ 303), и «Письмо к Боэцию» (№ 304), вышедшее из печати там же в 1643 г. Имеются также произведения Ф. Бэкона (№ 324; без указания года издания), русский перевод трактата Фонтенеля о множественности миров (№ 412), сочинение Т. Кампанеллы об испанской монархии (№ 465) и др.

Важное место в библиотеке Эйлера занимали словари древних и современных языков (№ 60, 69, 81, 94, 104, 130, 375 и др.), а также различные учебники грамматики.

Среди математических книг больше всего современных Эйлеру изданий — его собственные работы и сочинения ученых, с которыми он периодически поддерживал



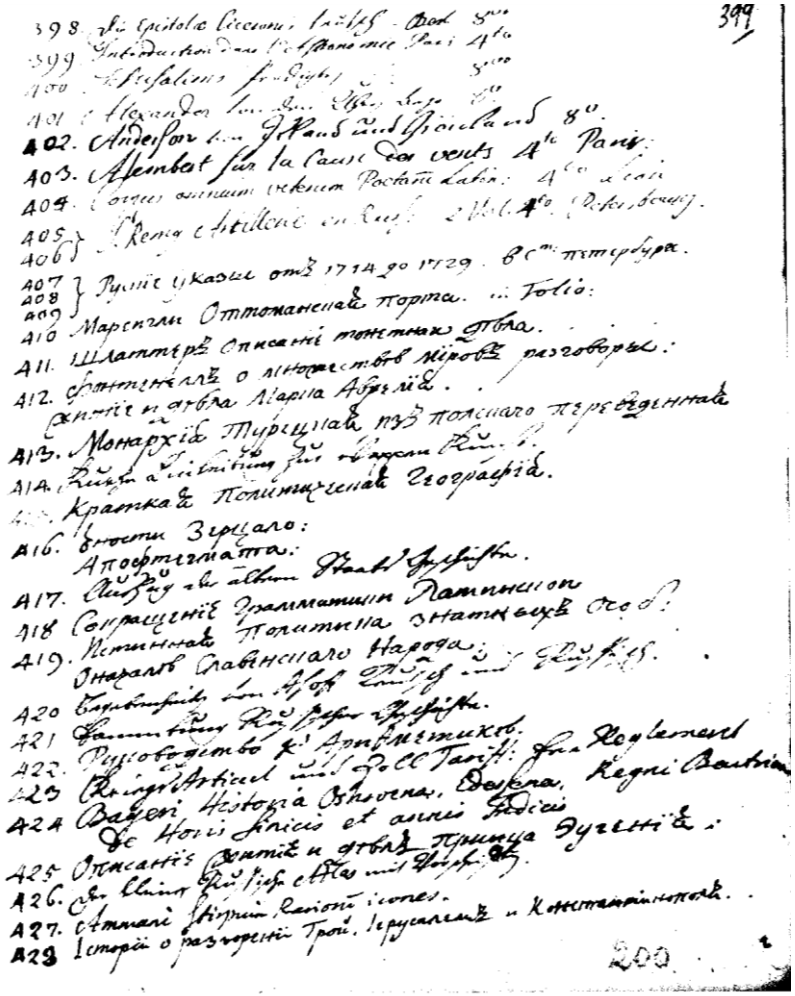
Catalogus Librorum
rarorum.
In Folio

1. Atlas mapparum geographicarum.
2. Descriptio Academiæ Petropolitanæ
3. Ægidii Tschudi Chronicon Helveticum
4. Magisterium Naturæ et Artis
5. a P. Fr. de Lanis Brixiæ 1684. 2 Volumina
6. Dictionnaire de la Langue Françoise
7. par Pierre Richelet. Basileæ A. 1735. 3 Volum.
8.
9. Trigonometria Artificialis Adr. Vlacqii
10. Arithmetica Logarithmica Adr. Vlacqii
11. Encyclopædia Joh. Henrici Alstedii. Herbornæ 1630
12. 2. Volum:
13. Marii Nizolii Observationes in Cic.
14. Jussu Augusti Regis Dresdæ A. 1715
16. Pellicani Postilla, über die Evangelia
16. Institutiones Religionis Christianæ Joh. Calvini
Germanice. Heidelbergæ 1572

192

Страница записной книжки Л. Эйлера
Ф. 136. Оп. 1. № 134. Л. 192

Каталог книг библиотеки Эйлера



399

398. Die Epistolæ Ciceronis [illegible] Basil. 8vo
399. Introductio [illegible] Parisiis 4to
400. Hierosalems [illegible] 8vo
401. Alexandri [illegible] 8vo
402. Anderson [illegible] 8vo
403. Allembat sur la cause des vents 4to Paris.
404. Corpus omnium veterum Poetarum Latinorum 4to [illegible]
405. Rerum a Stellone [illegible] 1656. 4to Petropolitanæ.
406.
407. Русскіе указы отъ 1714 до 1729. 8vo Петербурга.
408.
409.
410. Мирныя Оттоманскія порты. in Folio.
411. Шлантръ Описаніе монетнаго двора.
412. Антенелль о лѣтописяхъ міровыхъ разговоры.
Описаніе и автора Марка Аврелія.
413. Монархія Турецкая изъ полезнаго переведенная
414. Книга [illegible]
415. Краткая политическая географія.
416. Зрѣлости Зерцало:
Апофтегматта.
417. [illegible]
418. Сокращеніе грамматики Латинскихъ
419. Нѣмецкая политика знатныхъ
Знаралъ Славянскаго народа
420. [illegible]
421. [illegible]
422. Руководство къ Арифметикѣ.
423. [illegible]
424. Bayeri Historia Osrhoena. Edessa. Regni Bactriani
De Horis Sinicis et aliis Indicis
425. Описаніе [illegible]
426. [illegible]
427. Атласъ [illegible]
428. Исторія о разсѣяніи Трои. Іерусалимѣ и Константинополѣ.

200

Страница записной книжки Л. Эйлера
Ф. 136. Оп. 1. № 134. Л. 200

Каталог книг библиотеки Эйлера

научные связи. К ним относятся труды братьев Бернулли, занесенные в список в самом его начале (№ 37, 40—45), сочинения Ж. Даламбера, в частности трактат о причине ветров (№ 403), который неоднократно обсуждался в переписке Эйлера с Д. Бернулли [9, с. 32—34].

Обращаясь к опубликованной корреспонденции Эйлера, иногда мы можем выяснить происхождение той или иной книги, указанной в каталоге. Так, оказывается, что изданную в 1745 г. двухтомную переписку Г. В. Лейбница с Иоганном Бернулли (№ 44—45) последний прислал Эйлеру в том же году, о чем сообщается в его письме от 23 сентября [9, с. 42, письмо № 188]. Числящаяся в списке под № 121 книга А. К. Клеро (A. C. Clairaut, 1713—1765) «Теория фигуры Земли», которая была издана в Париже в 1743 г., также была подарена Эйлеру автором: о ее отправке он сообщал в письме от 7 сентября 1743 г. [9, с. 139—140, письмо № 1104].

В каталоге отмечено несколько (№ 120, 122—125, 131) сочинений П. Л. Мопертюи (P. L. Maupertuis, 1698—1759), с которым Эйлера долгие годы связывали дружеские отношения. В их числе — «Фигура Земли» («La figure de la terre». Paris, 1738), посланная автором 20 мая 1738 г. [9, с. 213, письмо № 1736]. За этот подарок Эйлер выразил ему «величайшую благодарность» в письме от 23 ноября (4 декабря) того же года [10, с. 169—174; 9, с. 213, письмо № 1737] и сообщил о нем Д. Бернулли [9, с. 25, письмо № 85]. Труды Мопертюи «Рассуждение о параллаксе Луны» («Discourse sur la parallaxe de la Lune». Paris, 1741) и «Морская астрономия» («Astronomie nautique». Paris, 1743), фигурирующие под № 120 и 123, также упоминаются в переписке [9, с. 232, письмо № 336; с. 32, письмо № 126].

Под номерами 119 и 126 в списке значатся сочинения маркизы Дю Шатле (G. E. du Chatelet, 1706—1749) — одной из образованнейших женщин Франции того времени, научные исследования которой высоко ценил Вольтер, отмечавший ее «обширный и могучий ум» [11]. Первое из

них — «Основы физики» («Institutions physiques»), изданные в 1742 г. в Амстердаме, второе — «Диссертация о природе и распространении огня» («Dissertation sur la nature et la propagation de la feu». Paris, 1744). Эйлер, как видно из его переписки, относился к трудам Дю Шатле с большим вниманием и дал им высокую оценку. «Диссертация о природе и распространении огня» была представлена на конкурс в связи с премией, установленной в 1738 г. Парижской Академией наук за работу на указанную тему. Победу в нем одержал Эйлер [12], но исследование Дю Шатле было также отмечено и напечатано в 1744 г. Еще до публикации она послала копию работы Эйлеру через Мопертюи. В письме к последнему от 19 февраля (1 марта) 1740 г. [9, с. 213, письмо № 1738; 10, с. 174] Эйлер выражает признательность за посланные им, но задержавшиеся в дороге статьи и замечает: «Я огорчен этой задержкой, так как охвачен нетерпением увидеть среди других статью знаменитой маркизы, которая соизволила почтить меня, выступив моим конкурентом». Тем же числом помечено его письмо к самой Дю Шатле [9, с. 263, письмо № 2234; 10, с. 280—281]. В нем сказано: «Для меня, милостивая государыня, крайне почетно работать на одном поприще с особой, которая является одним из самых редких украшений своего пола, благодаря тому блеску, каким Вы озарили даже самые возвышенные науки, в которые Вы внесли величие Вашего таланта». Понятно поэтому, что после выхода из печати это сочинение Дю Шатле заняло место в библиотеке Эйлера.

Экземпляр «Основ физики» Дю Шатле, опубликованных в 1742 г. (первое издание — Париж, 1740), был также прислан Эйлеру автором. Об этом свидетельствуют письмо Эйлера к Гольдбаху от 27 апреля (8 мая) 1742 г. [9, с. 89, письмо № 648], в котором сказано: «Мадам маркиза Дю Шатле прислала мне экземпляр нового издания «Основ физики» вместе со своим портретом» [13, с. 101]. По-видимому, после получения книги Эйлер написал письмо к Дю Шатле, по-

священное разбору этого сочинения и содержащее весьма лестный отзыв о нем; письмо датируется приблизительно 1742 г. [9, с. 164, письмо № 2235; 10, с. 275—280].

Диссертация астронома и математика Г. Гейнзиуса (G. Heinsius, 1709—1769) о кольце Сатурна («De apparentiis annuli Saturni commentario». Lipsiae, 1745), была, как свидетельствует переписка [9, с. 77, письмо № 534], выслана автором Эйлеру 25 июля 1745 г.; она числится в каталоге под № 79.

В списке упоминаются также книги (№ 95, 97, 98) астронома Ч. Лидбеттера (Ch. Leadbetter, ум. 1744). Среди них «Полная система астрономии» («A complete system of astronomy. With new tables and astronomy of satellits», London, 1729), на которую ссылается Гейнзиус при оценке лунных таблиц Эйлера в письме от 26 февраля 1746 г. [9, с. 77, письмо № 538].

Под № 53 в списке Эйлера значится сочинение академика Ж. Н. Делиля (J. N. Delisle, 1688—1768). Это «Memoires pour servire a l'histoire et au progrès de l'astronomie, de la geographie et de la physique» (St.-Pet., 1738), в котором собраны материалы по истории астрономии [14, с. 65].

Трактат данцигского математика Г. Кюна (H. Kühn, 1690—1769) «Рассуждение о происхождении источников» («Meditationes de origine fontiüm et aquae putealis». Bordeaux, 1741), высланный автором Эйлеру 28 февраля 1742 г. [9, с. 163, письмо № 1309], занесен в каталог под № 32. В письме к Гольдбаху от 13 (24) августа 1743 г. Эйлер неодобрительно отозвался об этой книге, сообщая, что внимательно прочел ее и свои замечания отправил Кюну [13, с. 178—179]. Они вызвали оживленную переписку [9, с. 163—164; 10, с. 133—140].

Под № 128 числится трактат о комете 1743—1744 г. («Traité de la comete qui a paru décembre 1743 jusqu' mars 1744», Paris, 1744) швейцарского астронома Ж. Ф. Шезо (J. Ph. Loys de Cheseaux, 1718—1751). Это сочинение, не раз упоминающееся в переписке Эйлера с учеными, вызва-

ло интерес и одобрение как самого Эйлера, так и Д. Бернулли, Ж. Н. Делиля, Г. Гейнзиуса [9, с. 31, 116, 271, письма № 115, 117, 880, 2309]. В письме к Шумахеру от 10 ноября 1744 г. Эйлер, высоко оценивая трактат Шезо, рекомендовал его автора на место Делиля в случае отъезда последнего из Петербурга [9, с. 271, письмо № 2309].

Наряду с книгами современных Эйлеру математиков и астрономов в его библиотеке имелись труды классиков древности, в том числе греческие и латинские издания «Начал» и других сочинений Евклида (№ 235, 284, 357), «Конические сечения» Аполлония издания 1669 г. (№ 259). Насчитывалось также немало книг европейских математиков XVI—XVII вв.: алгебраический трактат Христофора Рудольфа в обработке Михаэля Штифеля (№ 165), «Ключ математики» В. Оутреда (№ 332), труды Непера (№ 78), Стевина (№ 62), Кеплера (№ 257), Ван Схоутена (№ 117).

Почетное место в библиотеке Эйлера принадлежало, по-видимому, трудам Ньютона (№ 38—39, 448—450). Его «Математические начала натуральной философии» имелись в трех экземплярах, которые числятся в каталоге под № 448—450. Рядом с названием сочинения Эйлер приписал: «С замечаниями». Вероятно, здесь речь идет о его собственноручных пометках на полях принадлежавшей впоследствии С. И. Вавилову книги, которые были исследованы В. И. Лысенко [15]. Запись в каталоге позволяет уточнить время составления этих заметок Эйлера.

Список литературы

1. Санкт-Петербургский филиал Архива РАН (ПФА РАН). Ф. 136. Оп. 1. № 129—140.

2. Eneström G. Bericht an die Eulerkomission der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft über die Eulerschen Manuscripte der Peterburger Akademie // Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 22. 1913. № 11—12. S. 191—205.

3. Михайлов Г. К., Смирнов В. И. Неопубликованные материалы Леонарда Эйлера в Архиве Академии наук СССР // Леонард Эйлер. К 250-летию со дня рождения. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 47—79.

4. Михайлов Г. К. Записные книжки Леонарда Эйлера в Архиве АН СССР (Общее описание и заметки по механике) // Историко-математические исследования. Вып. X. М., 1957. С. 67—94.

5. Матвиевская Г. П. О неопубликованных рукописях Леонарда Эйлера по диофантову анализу // Историко-математические исследования. Вып. XIII. М., 1960. С. 107—186.

6. Кноблох Э. Математические записные книжки Леонарда Эйлера // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 102—121.

7. Матвиевская Г. П. О рукописном наследии и записных книжках Эйлера // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 122—129.

8. ПФА РАН. Ф. 136. Оп. 1. № 134.

9. Леонард Эйлер. Переписка. Аннотированный указатель / Под ред. В. И. Смирнова и А. П. Юшкевича. Л.: Наука, 1967.

10. Леонард Эйлер. Письма к ученым / Под ред. В. И. Смирнова. М.; Л.: Наука, 1963.

11. Кладо Т. Н. Г. Э. дю Шатле // Леонард Эйлер. Письма к ученым. М.-Л.: Наука, 1963. С. 275.

12. Минченко Л. С. Физика Эйлера // Труды Института истории естествознания и техники АН СССР. 1957. Т. 19.

13. Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729—1764. Hrsg. und eingeleitet von A. P. Juškevič und E. Winter. Zur Druck vorbereitet von P. Hoffmann, T. N. Klado und Ju. Ch. Kopelevič, Berlin, 1965.

14. Невская Н. И. Жозеф-Никола Делиль и петербургская Академия наук (XVIII в.) // Вопросы истории астрономии. Вып. 3. М., 1974. С. 61—93.

15. Лысенко В. И. О замечаниях Эйлера к «Математическим началам натуральной философии» // Вопросы истории естествознания и техники. Вып. 20. 1966. С. 38—46.

Ж. Ю. Личикова

МЕТОД ЛОМАНЫХ ЭЙЛЕРА В ВАРИАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Приоритет в создании вариационного исчисления принадлежит Леонарду Эйлеру (1707—1783). С помощью этого исчисления им были получены решения многих задач: о геодезических линиях, о максимальной и минимальной площади поверхности тела вращения, ряд изопериметрических задач и т.д. Кроме того, Эйлер создал метод приближённого решения вариационных задач, который получил название метода ломаных [1—6] и стал первым из большого класса методов, называемых прямыми методами вариационного исчисления.

Использование метода ломаных связано с громоздкими преобразованиями и вычислениями. Поэтому Эйлеру удалось дать его ясное и полное изложение только в результате многолетнего упорного труда. Проследить за созданием метода ломаных можно, рассмотрев работы Эйлера по вариационному исчислению (E9, E16, E27, E56, E65[*] [7—11]), особенно «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле»

[*] Труды Эйлера указаны по порядковым номерам из библиографического списка Г. Энестрёма.

(E65) [7], а также заметки из записных книжек, хранящихся в Санкт-Петербургском филиале Архива Российской Академии Наук (ПФА РАН) [12].

Первые результаты Эйлер опубликовал в 1734 г. в работе «Общее решение изопериметрической задачи, взятой в самом общем смысле» [10]. В ней изложен метод решения задач на относительные максимумы и минимумы, который сейчас носит название «правила Эйлера». Его применение для решения различных задач механики Эйлер продемонстрировал во втором томе сочинения «Механика, то есть наука о движении, изложенная аналитическим способом» [9], вышедшего из печати в 1736 г.

Основной труд Эйлера, в котором заложены основы вариационного исчисления, — «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума…» [7], — был опубликован только в 1744 г. В этой работе он обобщил все более ранние результаты своих исследований и изложил общий метод решения многих вариационных задач, который назвал «методом максимумов и минимумов в применении к кривым линиям».

Вначале Эйлер подробно останавливается на постановке задачи и вводит необходимые определения и обозначения. Он пишет: «Метод максимумов и минимумов в применении к кривым линиям есть метод нахождения таких кривых, которые обладали бы каким-либо наперед заданным свойством максимума или минимума… Задачи, относящиеся к этому методу, должны ставиться так, чтобы отысканию подлежали кривые, отнесенные к заданной по положению оси и обладающие свойством максимума или минимума среди всех тех кривых, которые соответствуют одной и той же абсциссе… и проходят через две заданные точки» [7, с. 25—28].

Отличительной особенностью «Метода нахождения кривых линий…» является специальная символика, введенная Эйлером, чтобы избежать громоздких выражений.

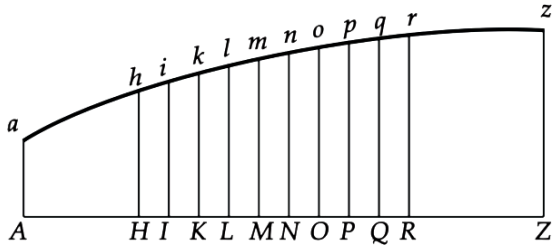


Рис. 1

Рассматривается кривая az (рис. 1) и точка M на отрезке AZ с ординатой Mm ($AM = x,\ Mm = y$). От точки M в обе стороны откладываются отрезки длины dx, т. е.

$$dx = HI = IK = KL = \ldots = MN = NO = OP = \ldots$$

и обозначаются ординаты в точках $N, O, P, Q, \ldots$ через

$$Mm = y,\quad Nn = y^{\mathrm{I}},\quad Oo = y^{\mathrm{II}},\quad Pp = y^{\mathrm{III}},\ldots,$$

а в точках $L, K, I, H, \ldots$ —

$$Mm = y,\quad Ll = y_{\mathrm{I}},\quad Kk = y_{\mathrm{II}},\quad Ii = y_{\mathrm{III}},\ldots$$

При таких обозначениях производные

$p = \dfrac{dy}{dx}$, $q = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $r = \dfrac{d^3y}{dx^3}$, ... в точках $N, O, P, Q, \ldots$ суть

$$p = \frac{y^{\mathrm{I}} - y}{dx},\quad p^{\mathrm{I}} = \frac{y^{\mathrm{II}} - y^{\mathrm{I}}}{dx},\quad p^{\mathrm{II}} = \frac{y^{\mathrm{III}} - y^{\mathrm{II}}}{dx},\ldots$$

$$q = \frac{p^{\mathrm{I}} - p}{dx} = \frac{y^{\mathrm{II}} - 2y^{\mathrm{I}} + y}{dx^2},\quad q^{\mathrm{I}} = \frac{y^{\mathrm{III}} - 2y^{\mathrm{II}} + y^{\mathrm{I}}}{dx^2},\ldots$$

и в точках $L, K, I, H, \ldots$ —

$$p = \frac{y^{\mathrm{I}} - y}{dx},\quad p_{\mathrm{I}} = \frac{y - y_{\mathrm{I}}}{dx},\quad p_{\mathrm{II}} = \frac{y_{\mathrm{I}} - y_{\mathrm{II}}}{dx},\ldots$$

$$q = \frac{p^{\mathrm{I}} - p}{dx} = \frac{y^{\mathrm{II}} - 2y^{\mathrm{I}} + y}{dx^2},\quad q_{\mathrm{I}} = \frac{y^{\mathrm{I}} - 2y + y_{\mathrm{I}}}{dx^2},\ \ldots$$

Далее Эйлер вводит понятие «формулы максимума или минимума»: он рассматривает величину W, «которая для разыскиваемой кривой должна получить наибольшее или

наименьшее значение», и доказывает, что эта «формула W должна быть неопределенной интегральной величиной, которая может быть проинтегрирована только в том случае, когда будет взято заданное соотношение между x и y, т. е. должна иметь такой вид: $\int Z\,dx$» [7, с. 38—46].

Как отметил К. А. Рыбников, «хотя во всех вариационных задачах, решавшихся до Эйлера, формула максимума или минимума всегда была задана в конечном счёте в виде определённого интеграла (или, в случае словесного выражения, речь всегда шла о свойстве, дававшем при переводе на язык символов тоже интеграл), но только Эйлер сформулировал задачу вариационного исчисления в общем виде, именно как задачу на экстремум некоторого «интегрального выражения вида $W = \int Z(x, y, y', y'', \ldots)\,dx$» [3, с. 460].

Эйлер указывает на три различных рода формул W. Первый род — это те формулы, в которых Z есть «либо алгебраическая, либо вообще определенная функция от величин $x, y, p, q, r, \ldots$». Ко второму роду относятся те формулы, в которых выражение Z содержит интегральные соотношения, «т. е. само Z будет неопределенной величиной, значение которой нельзя указать, если не дано соотношения между x и y». Третий род составляют формулы, в которых значение Z определяется дифференциальным уравнением, «не поддающимся интегрированию» [7, с. 48].

Для первого рода Эйлер доказывает, что если amz есть кривая, для которой значение формулы $\int Z\,dx$ достигает максимума или минимума, где Z представляет собой алгебраическую или какую-либо иную определенную функцию от $x, y, p, q, r, \ldots$, то любой части mn этой кривой, соответствующей отрезку MN, значение $\int Z\,dx$ будет также максимумом или минимумом (рис. 1).

Доказательство основано на том, что если значения формулы $\int Z\,dx$, соответствующие отрезкам *AM, MN, NZ*, обозначить через *P, Q* и *R*, то они не будут зависеть одно от другого. Поэтому когда их сумма $P+Q+R$ достигает максимума или минимума, необходимо, чтобы каждое из них в отдельности обладало тем же свойством.

Если же формула *W* относится ко второму или к третьему роду, то свойство максимума или минимума будет присуще только всему отрезку кривой *AZ*. В этих случаях Эйлер предлагает «варьировать» данные кривые. Он пишет: «Если *amnoz* есть отнесенная к данной абсциссе *AZ* кривая (рис. 2), для которой формула $\int Z\,dx$ получает наибольшее или наименьшее значение, и мы представим себе другую кривую *amvoz*, бесконечно мало отличающуюся от нее, то значение формулы $\int Z\,dx$ для обеих кривых будет одно и то же» [7, с. 62].

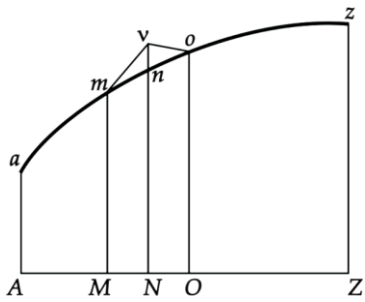


Рис. 2

На основании варьирования кривых Эйлер дает определение «дифференциального значения» формулы *W*, называя так «разность значений, принимаемых этой формулой для разыскиваемой экстремальной кривой и для той же кривой, испытавшей бесконечно малое изменение» [7, с. 66].

«Таким образом, — пишет он, — вся трудность при нахождении кривых, обладающих экстремальными свойствами, свелась к тому, чтобы для каждой формулы максимума или минимума отыскать соответствующее ей дифференциальное значение». И затем «если положить дифференциальное значение равным нулю, то получится уравнение, которым выразится природа разыскиваемой функции» [там же].

Все вариационные задачи Эйлер подразделяет на задачи о нахождении абсолютных и относительных экстремумов и решает их с помощью «абсолютного» и «относительного» методов. «Абсолютный метод максимумов и минимумов, — разъясняет он, — учит среди всех вообще кривых, отнесенных к одной и той же абсциссе, определять ту, для которой какая-либо наперед заданная переменная величина получала бы наибольшее или наименьшее значение… Относительный метод максимумов и минимумов учит определять кривую, обладающую свойством максимума или минимума, не среди всех вообще кривых, соответствующей одной и той же абсциссе, а среди только тех, которые имеют какое-либо наперед указанное общее свойство» [7, с. 29—31]. При этом Эйлер отмечает, что задача, решаемая относительным методом, может быть сведена к задаче на нахождение абсолютного экстремума.

Нахождению абсолютных максимумов и минимумов посвящается вторая и третья главы мемуара «Метод нахождения кривых линий…».

Сначала Эйлер ищет приращения, получившиеся из-за увеличения «какой-нибудь из ординат Nn кривой линии amz на бесконечно малую частицу $n\nu$» [7, с. 68—70]. Найденные приращения он собирает в таблицу:

y^{I}	$+n\nu$	p	$+\frac{n\nu}{dx}$	q_{I}	$+\frac{n\nu}{dx^2}$	r_{II}	$+\frac{n\nu}{dx^3}$	s_{III}	$+\frac{n\nu}{dx^4}$	t_{IV}	$+\frac{n\nu}{dx^5}$
		p^{I}	$-\frac{n\nu}{dx}$	q	$-\frac{2n\nu}{dx^2}$	r_{I}	$-\frac{3n\nu}{dx^3}$	s_{II}	$-\frac{4n\nu}{dx^4}$	t_{III}	$-\frac{5n\nu}{dx^5}$
				q^{I}	$+\frac{n\nu}{dx^2}$	r	$+\frac{3n\nu}{dx^3}$	s_{I}	$+\frac{6n\nu}{dx^4}$	t_{II}	$+\frac{10n\nu}{dx^5}$
						r_{I}	$-\frac{n\nu}{dx^3}$	s	$-\frac{4n\nu}{dx^4}$	t_{I}	$-\frac{10n\nu}{dx^5}$
								s^{I}	$+\frac{n\nu}{dx^4}$	t	$+\frac{5n\nu}{dx^5}$
										t^{I}	$-\frac{n\nu}{dx^5}$

Далее, полагая, что функция Z зависит только от x и y, Эйлер ищет кривую az, для которой значение формулы $\int Z\,dx$ было бы наибольшим или наименьшим» [7, с. 72—75]. Для решения этой задачи он заменяет интеграл $\int Z\,dx$ суммой

$$\ldots + Z_{\mathrm{II}}\,dx + Z_{\mathrm{I}}\,dx + Z\,dx + Z^{\mathrm{I}}\,dx + Z^{\mathrm{II}}\,dx + \ldots,$$

т. е. площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой az, заменяется суммой площадей прямоугольников, у которых одна сторона равна dx, а другая — соответствующему значению функции Z.

Если одну из ординат Nn увеличить на бесконечно малую величину $n\nu$, то сумма должна сохранить то же самое значение, и следовательно, дифференциальное значение формулы $\int Z\,dx$ должно исчезнуть, т. е. дифференциальное значение выражения

$$\ldots + Z_{\mathrm{II}}\,dx + Z_{\mathrm{I}}\,dx + Z\,dx + Z^{\mathrm{I}}\,dx + Z^{\mathrm{II}}\,dx + \ldots$$

должно быть равно нулю.

Функция Z зависит только от x и y, поэтому дифференциалы значений $Z, Z^{\mathrm{I}}, Z_{\mathrm{I}}, \ldots$ будут иметь следующий вид:

$$dZ = M\,dx + N\,dy,$$
$$dZ^{\mathrm{I}} = M^{\mathrm{I}}\,dx + N^{\mathrm{I}}\,dy,$$
$$dZ_{\mathrm{I}} = M_{\mathrm{I}}\,dx + N_{\mathrm{I}}\,dy, \ldots$$

Эйлер предлагает продифференцировать члены $Z\,dx,\ Z_{\mathrm{I}}\,dx,\ Z^{\mathrm{I}}\,dx, \ldots$ и в полученных дифференциалах «вместо dy^{I} написать $n\nu$, а вместо остальных дифференциалов — нуль». Из данных членов только один будет иметь дифференциальное значение, отличное от нуля, которое будет равно $N^{\mathrm{I}}dx \cdot n\nu$. Так как $N^{\mathrm{I}} = N + dN$, где dN — бесконечно малая величина, то $N^{\mathrm{I}} \approx N$. Таким образом, Эйлер получает уравнение $N \cdot dx \cdot n\nu = 0$ или $N = 0$, определяющее искомую кривую.

Затем Эйлер усложняет задачу, предполагая, что Z есть функция, зависящая от x, y и p. При этом

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp.$$

Для решения этой задачи он поступает аналогично предыдущему [7, с. 87—97].

Как и раньше, интеграл $\int Z\,dx$ заменяется суммой $\ldots + Z_{\mathrm{II}}\,dx + Z_{\mathrm{I}}\,dx + Z\,dx + Z^{\mathrm{I}}\,dx + Z^{\mathrm{II}}\,dx + \ldots$, для которой ищется дифференциальное значение. Приравняв его нулю и пользуясь таблицей приращений, Эйлер получает уравнение

$$N - \frac{dP}{dx} = 0,$$

которым «и выразится природа искомой функции». Это уравнение вариационного исчисления сейчас носит название «классического уравнения Эйлера».

В конце второй главы «Метода нахождения кривых линий…» Эйлер решает общую задачу: «Найти кривую, для которой значение формулы $\int Z\,dx$ было бы наибольшим или наименьшим, если Z есть функция, заключающая в себе дифференциалы любого порядка, так что

$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + \ldots$» [7, с. 144].

Такой постановкой вопроса Эйлер распространил метод максимумов и минимумов на решение задач, в которых подынтегральная функция зависит от производных более высокого порядка и от бесконечно большого числа производных. В последнем случае он получает уравнение:

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots$$

В третьей главе Эйлер излагает метод нахождения кривых в тех случаях, когда функция Z, входящая в неопределенную интегральную величину W, зависит от неопределенной величины $\Pi = \int [Z]\,dx$, где $[Z]$ — функция, зависящая от $x, y, p, q, r, \ldots$

Вначале он составляет таблицу приращений, получаемых в любой точке оси при увеличении ординаты Nn на бесконечно малую частицу $n\nu$:

$$d(\Pi) = 0,$$

$$d(\Pi^{\mathrm{I}}) = n\nu \cdot dx \frac{[T]}{dx^5},$$

$$d(\Pi^{\mathrm{II}}) = n\nu \cdot dx \left(\frac{[S^{\mathrm{I}}]}{dx^4} - \frac{4[T] + 5\,d[T]}{dx^5} \right),$$

$$d(\Pi^{\mathrm{III}}) = n\nu \cdot dx \left(\frac{[R^{\mathrm{II}}]}{dx^3} - \frac{3[S^{\mathrm{I}}] + 4\,d[S^{\mathrm{I}}]}{dx^4} + \frac{6[T] + 15\,d[T] + 10\,d^2[T]}{dx^5} \right), \ldots$$

Далее рассматривается простой случай, когда величина $[Z]$ зависит только от переменных $x, y, p, q, \ldots$, т. е. $dZ = L\,d\Pi$ и $\Pi = \int [Z]\,dx$, при условии, что

$$d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + \ldots$$

Как и во второй главе, Эйлер предлагает заменить интеграл $\int Z\,dx$ суммой

$$Z\,dx + Z^{\mathrm{I}}\,dx + Z^{\mathrm{II}}\,dx + Z^{\mathrm{III}}\,dx + Z^{IV}\,dx + Z^{V}\,dx,$$

ограничившись лишь шестью членами [7, с. 169—173].

Учитывая, что

$$d\left(Z\,dx\right)=L\,dx\cdot d\Pi,\quad d\left(Z^{\mathrm{I}}dx\right)=L^{\mathrm{I}}\,dx\cdot d\Pi^{\mathrm{I}},$$
$$d\left(Z^{\mathrm{II}}dx\right)=L^{\mathrm{II}}\,dx\cdot d\Pi^{\mathrm{II}},\ldots$$

и используя составленную таблицу приращений, Эйлер получает «дифференциальное значение»

$$n\nu\cdot dx\left([N]\,(H-\int L\,dx)-\frac{d([P]\,(H-\int L\,dx)\,)}{dx}+\right.$$
$$\left.+\frac{d^2([Q]\,(H-\int L\,dx))}{dx^2}-\ldots-\frac{d^5([T]\,(H-\int L\,dx))}{dx^5}\right),$$

которое, «будучи приравнено к нулю, даст уравнение искомой кривой» [7, с. 173]. Здесь H — это значение формулы $\int L\,dx$, которое получится при $x=a$.

В следующем предложении исследуется более сложная зависимость, когда Z является функцией от $x, y, p, q, \ldots$ и неопределённых величин вида $\Pi=\int [Z]\,dx$: «Пусть Π есть некоторая неопределённая интегральная функция $\int [Z]\,dx$, причем

$$d[Z]=[M]\,dx+[N]\,dy+[P]\,dp+\ldots,$$

и пусть Z означает некоторую функцию как от этой величины Π, так и от определенных величин $x, y, p, q, r, \ldots$, так что

$$dZ=L\,d\Pi+M\,dx+N\,dy+P\,dp+\ldots;$$

найти кривую az, которая для данной абсциссы $AZ=a$ сообщала бы наибольшее или наименьшее значение формуле $\int Z\,dx$» [7, с. 185].

Для решения этой задачи Эйлер составляет дифференциалы следующим образом:

$$d\left(Z\,dx\right)=dx\left(L\cdot d\Pi+M\,dx+N\,dy+P\,dp+\ldots\right),$$
$$d\left(Z^{\mathrm{I}}dx\right)=dx\left(L^{\mathrm{I}}\cdot d\Pi^{\mathrm{I}}+M\,dx+N\,dy+P\,dp+\ldots\right),$$
$$d\left(Z^{\mathrm{II}}dx\right)=dx\left(L^{\mathrm{II}}\cdot d\Pi^{\mathrm{II}}+M\,dx+N\,dy+P\,dp+\ldots\right),\ldots$$

Тогда уравнение искомой кривой есть

$$0=[\,N\,]\left(H-\int L\,dx\right)-\frac{d\left([\,P\,]\left(H-\int L\,dx\right)\right)}{dx}+$$
$$+\frac{d^{2}\left([\,Q\,]\left(H-\int L\,dx\right)\right)}{dx^{2}}-\ldots+N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^{2}Q}{dx^{2}}-\frac{d^{3}R}{dx^{3}}+\ldots$$

В последнем предложении третьей главы [7, с. 213—220] Эйлер рассматривает случай, когда функция Z зависит от величины Π, заданной посредством дифференциального уравнения $d\Pi=[\,Z\,]\,dx$, в котором $[\,Z\,]$ зависит и от величин $x,y,p,q,r,\ldots$ и от величины Π. При этом

$$d[\,Z\,]=[\,L\,]\,d\Pi+[\,M\,]\,dx+[\,N\,]\,dy+[\,P\,]\,dp+\ldots,$$

и

$$dZ=L\,d\Pi+M\,dx+N\,dy+P\,dp+\ldots$$

Положив, что дифференциалы суть

$$d\Pi=n\nu\cdot\alpha,\quad d\Pi^{\mathrm{I}}=n\nu\cdot\beta,\quad d\Pi^{\mathrm{II}}=n\nu\cdot\gamma,\ldots \qquad (1)$$

и составив соответствующие «дифференциальные значения»

$$d\left(Z\,dx\right)=n\nu\cdot dx\left(L\alpha+\frac{Q}{dx^{2}}\right),$$
$$d\left(Z^{\mathrm{I}}\,dx\right)=n\nu\cdot dx\left(L^{\mathrm{I}}\beta+\frac{P^{\mathrm{I}}}{dx}-\frac{2Q^{\mathrm{I}}}{dx^{2}}\right),$$
$$d\left(Z^{\mathrm{II}}\,dx\right)=n\nu\cdot dx\left(L^{\mathrm{II}}\gamma+N^{\mathrm{II}}-\frac{P^{\mathrm{II}}}{dx}+\frac{Q^{\mathrm{II}}}{dx^{2}}\right),$$
$$d\left(Z^{\mathrm{III}}\,dx\right)=n\nu\cdot dx\,L^{\mathrm{III}}\delta,\ldots$$

Эйлер находит из (1) значения $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots$:

$$\alpha = 0,$$

$$\beta = \frac{[Q]}{dx},$$

$$\gamma = [L^{\mathrm{I}}][Q] + [P^{\mathrm{I}}] - \frac{[Q] + 2d[Q]}{dx},$$

$$\delta = [L^{\mathrm{I}}][Q] + [L^{\mathrm{II}}][L^{\mathrm{I}}][Q]\,dx +$$
$$+ [L^{\mathrm{II}}][P^{\mathrm{I}}]\,dx - [L^{\mathrm{II}}][Q] - 2[L^{\mathrm{II}}]\,d[Q] +$$
$$+ [N^{\mathrm{II}}]\,dx - d[P^{\mathrm{I}}] + \frac{d^2[Q]}{dx},$$

...

«Дифференциальное значение», соответствующее элементам $Z\,dx + Z^{\mathrm{I}}\,dx + Z^{\mathrm{II}}dx$, будет равно

$$n\nu \cdot dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} + L\,[L][Q] + L\,[P] - \frac{[Q]\,dL + 2\,L\,d[Q]}{dx}\right).$$

Для вычисления «дифференциального значения» всех остальных элементов Эйлер предлагает рассмотреть следующую сумму:

$$V = L\,dx + L^{\mathrm{I}}\,dx\,(1 + [L]\,dx) + L^{\mathrm{II}}\,dx(1 + [L]\,dx)\,(1 + [L^{\mathrm{I}}]\,dx) +$$
$$+ L^{\mathrm{III}}\,dx(1 + [L]\,dx)\,(1 + [L^{\mathrm{I}}]\,dx)\,(1 + [L^{\mathrm{II}}]\,dx) + \ldots$$

Составив уравнение $dV + V\,[L]\,dx = -L\,dx$ и проинтегрировав его, он получает значение для

$$V = e^{-\int [L]\,dx}\left(H - \int e^{\int [L]\,dx} L\,dx\right),$$

где H есть значение «интегральной формулы» $\int e^{\int [L]\,dx} L\,dx$ при $x = a$.

Учитывая (2) и полученную сумму, Эйлер составляет «дифференциальное значение», из которого получает уравнение искомой кривой:

$$0 = N + [N]\,V - \frac{d(P + [P]\,V)}{dx} + \frac{d^2(Q + [Q]\,V)}{dx^2} - \frac{d^3(R + [R]\,V)}{dx^3} + \ldots$$

Далее Эйлер излагает метод нахождения относительных максимумов и минимумов. Этому вопросу посвящены

пятая и шестая главы мемуара «Метод нахождения кривых линий…».

В начале пятой главы Эйлер вводит определение общего свойства, которое «есть интегральная формула или неопределенное выражение, имеющее одинаковое значение для всех кривых, из числа которых надо определить искомую» [7, с. 318]. Затем формулируется обобщенная изопериметрическая задача: «Среди всех кривых, обладающих на данном отрезке оси одним и тем же общим свойством $\int Y\,dx$, определить ту, которая сообщала бы наибольшее или наименьшее значение формуле $\int Z\,dx$» [7, с. 323].

Эйлер дает общие правила решения таких задач. Пусть az есть та кривая, которая среди всех кривых, обладающих одним и тем же общим свойством B, сообщает наибольшее или наименьшее значение выражению A. Увеличив две ординаты Nn и Oo (рис. 3) на бесконечно малые «частицы $n\nu$ и $o\omega$», Эйлер находит «дифференциальные значения» обоих выражений A и B, полученных при этом, и приравнивает их нулю.

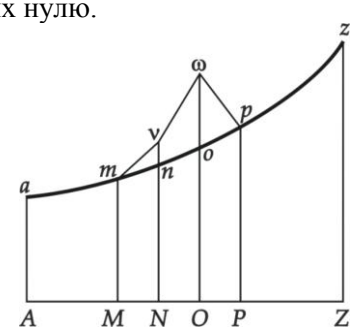


Рис. 3

«Таким образом, — пишет он, — будут получены два уравнения, одно из общего свойства, другое из выражения максимума или минимума; оба они будут иметь форму $S\cdot n\nu + T\cdot o\omega = 0$, где S и T будут величины, относящиеся к кривой линии» [7, с. 325—328]. Исключив из этих двух

уравнений «частицы $n\nu$ и $o\omega$», Эйлер получает уравнение искомой экстремальной кривой. При этом он уточняет, что такое же уравнение получается, если искать кривую, для которой выражение $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$ достигает абсолютного максимума или минимума. Следовательно, получено правило, позволяющее вместо обобщенной изопериметрической задачи решать задачу на абсолютный экстремум.

Этот метод Эйлер распространяет и на тот случай, когда имеет место несколько общих свойств. Пусть среди всех кривых, обладающих общими свойствами A и B, ищется кривая, которая будет сообщать наибольшее или наименьшее значение выражению C; в то же время она сообщает наибольшее или наименьшее значение выражению $\alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$. Эйлер указывает на возможность распространения этого метода на решение задач, в которых кривая ищется среди всех кривых, имеющих «сколько угодно» общих свойств.

Применение метода максимума и минимума Эйлер демонстрирует на большом количестве примеров из математического анализа и механики.

Иллюстрации того, каким образом создавался и использовался общий метод решения вариационных задач, мы находим в записных книжках Эйлера. Так, в записной книжке **№ 131** [13], датированной 1736—1740 гг., имеется заметка о методе ломаных, в которой Эйлер ставит следующую задачу: «Среди всех кривых найти ту, которая сообщает величине $\int Z\,dx$ максимальное или минимальное значение. Функция Z есть функция, зависящая от двух переменных x, y и выражений вида $\int S\,dx, \int T\,dx, \ldots$».

Полагая, что дифференциал функции Z есть

$$dZ = A\ Sdx + B\ Tdx + \ldots + F\ dy + G\ dx + H\ dp + I\ dq + \\ + K\ dr + \ldots,$$

где $dy = p\,dx,\quad dp = q\,dx,\ dq = r\,dx,\ dr = s\,dx, \ldots,$

и $dS = M\,dp,\ \ dT = N\,dp$, Эйлер утверждает, что найдется величина P, которая примет вид:

$$P = dM \int A\,dx + dN \int B\,dx + \ldots + A\,M\,dx +$$

$$+ B\,N\,dx + F\,dx - dH + \frac{d^2 I}{dx} - \frac{d^3 K}{dx^2} + \frac{d^4 L}{dx^3} - \ldots$$

Нахождение этой величины сводится к вычислению интегралов $\int A\,dx$ и $\int B\,dx$. Эта величина, будучи приравнена нулю, даст уравнение искомой кривой.

В записной книжке **№ 133** [14], датированной 1749—1753 гг., Эйлер решает задачу, сформулированную, как он пишет, Я. Бернулли: «Найти кривую, сообщающую величине $\int S\,dx$ максимум или минимум. Величина S зависит от неопределенной величины $\Pi = \int \left(1 - p^2\right) dx$ и имеет дифференциал $dS = L\,dp$. Для решения этой задачи применяется абсолютный метод, рассмотренный в «Методе нахождения кривых линий…».

В записной книжке **№ 132** (1740—1744 гг.) Эйлер рассматривает вариационную задачу для интеграла $\int Z\,dx$, при условии, что функция Z зависит от $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots$ [6, с. 81], и формулирует теорему об однородных функциях:

$$nZ = \frac{\partial Z}{\partial x}\,x + \frac{\partial Z}{\partial y}\,y + \frac{\partial Z}{\partial z}\,z.$$

На **л. 173** [15] Эйлер записывает метод для отыскания минимума интеграла $\int \frac{ds}{R^2}$, который ему сообщил Д. Бернулли в письме от 20 октября 1742 г., и развивает этот метод. Некоторые эти результаты были опубликованы в «Методе нахождения кривых линий…» [7].

Таким образом, вариационное исчисление в трудах Эйлера приобрело вид общего метода для решения любой

изопериметрической задачи, который можно сформулировать следующим образом:

1. Производная y_i' заменяется отношением $\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}$, где $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, интеграл $W = \int_a^b f(x,y,y')\,dx$ — суммой $\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)$, т.е. с геометрической точки зрения кривая интеграции W заменяется ломаной.

2. Задача об отыскании экстремума переменной величины W преобразовывается в задачу об отыскании экстремума функции $S(y_0, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)$.

Список литературы

1. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т. III. Математика XVIII столетия / Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1972. 495 с.

2. Башмакова И. Г., Юшкевич А. П. Леонард Эйлер // Историко-математические исследования. Вып. 7. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1954. С. 453—512.

3. Рыбников К. А. Первые этапы развития вариационного исчисления // Историко-математические исследования. Вып. 2. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949. С. 355—498.

4. Кошляков Н. С. Вариационное исчисление Эйлера // Леонард Эйлер (1707—1783): Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1935. С. 39—50.

5. Дорофеева А. В. Развитие вариационного исчисления как исчисления вариаций // Историко-математические исследования. Вып. 14. М.: Физматгиз, 1961. С. 101—180.

6. Михайлов Г. К. Записные книжки Леонарда Эйлера в Архиве АН СССР (общее описание и заметки по механике) // Историко-математические исследования. Вып. 10. М.: Гостехтеориздат, 1957. С. 67—94.

7. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающий свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле / Пер. Я. М. Боровского; Под ред. Н. С. Кошлякова. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1934. 593 с.

8. Euler L. De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente // Comment. Acad. Sci. Imp. Petrop. 1732. 3. P. 124—134. То же: // Opera omnia. Ser. I. Vol. 25. 1952. P. 1—12. (E9)

9. Euler L. Mechanica sive motus scientia analytice exposita. T. II. Petrop. 1736. То же: // Opera omnia. Ser. 2. Vol. 2. 1912. (E16)

10. Euler L. Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis // Comment. Acad. Sci. Imp. Petrop. 1738. 6. P. 123—155. То же: // Opera omnia. Ser. I. Vol. 25. 1952. P. 13—40. (E27)

11. Euler L. Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis // Comment. Acad. Sci. Imp. Petrop. 1741. 8. P. 159—190. То же: // Opera omnia. Ser. I. Vol. 25. 1952. P. 54—80. (E56)

12. Санкт-Петербургский филиал Архива Российской Академии наук (ПФА РАН), Ф. 136. Оп. 1. № 129—140.

13. ПФА РАН. Ф. 136. Оп. 1. № 131. Л. 82.

14. Там же. № 133. Л. 109.

15. Там же. № 132. Л. 173.

Ж. Ю. Личикова

МЕТОДЫ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ПРИБЛИЖЁННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ «НЕПРЕДСТАВИМОЙ» ФУНКЦИИ

Леонарду Эйлеру (1707—1783) принадлежит большая заслуга в разработке приближённых методов математического анализа. Он является создателем различных методов приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, краевых задач, методов численного интерполирования, интегрирования и дифференцирования.

В своём знаменитом труде «Дифференциальное исчисление» [1], опубликованном впервые в 1755 г., Эйлер предложил как точные методы нахождения производных функций, так и приближённые. На основе теории конечных разностей он получил производные «непредставимых» функций.

Непредставимыми функциями он называл такие функции, которые нельзя выразить определённым аналитическим выражением, т.е. которые не являются алгебраическими или известными ему трансцендентными функциями. Эйлер рассмотрел два вида непредставимых функций — это функции, представленные в виде суммы $S = A + B + ... + X$ и в виде произведения $S = A \cdot B \cdot ... \cdot X$.

«Общее понятие о непредставимых функциях, — пишет он, — может нам дать рассмотрение рядов. В самом деле, пусть предложен какой-либо ряд

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & x \\ A+B+C+D+\ldots+X \end{matrix}; \qquad (1)$$

если его сумму S нельзя выразить конечной формулой, то она будет непредставимой функцией от x, а именно, $S = A+B+C+D+\ldots+X$ » [1, с. 509].

Предполагая изложить метод разыскания дифференциалов таких непредставимых функций, Эйлер отмечает: «Так как это исследование является совершенно новым, и никем до сих пор не производилось, то мы настолько ещё далеки от возможности исчерпать эту часть дифференциального исчисления, что попытаемся лишь наметить её основы. А затем я приведу несколько вопросов, разрешение которых требует дифференцирования такого рода функций, чтобы можно было тут же видеть пользу этого исследования. В будущем она, несомненно, станет гораздо большей» [1, с. 510].

Свои исследования Эйлер начинает с рассмотрения простейшего случая, когда член ряда X с индексом x стремится к нулю при $x \to \infty$.

Пусть дана функция $S = A+B+C+D+\ldots+X$ и Σ есть то значение функции S, которое она получает, если вместо x положить $x+\omega$. Члены, соответствующие индексам $x,\ x+1,\ x+2,\ldots,x+\infty$, Эйлер обозначает через $X, X', X'',\ldots, X^{|\infty|}$, а члены, соответствующие индексам $x+\omega,\ x+\omega+1,\ x+\omega+2,\ \ldots,\ x+\omega+\infty$, — через $Z, Z', Z'',\ldots,Z^{|\infty|}$. При таких обозначениях он получает:

$$\begin{array}{l|l} S' = S + X', & \Sigma' = \Sigma + Z', \\ S'' = S + X' + X'', & \Sigma'' = \Sigma + Z' + Z'', \\ S''' = S + X' + X'' + X''', & \Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z''', \\ \ldots & \ldots \\ S^{|\infty|} = S + X' + X'' + \ldots + X^{|\infty|}. & \Sigma^{|\infty|} = \Sigma + Z' + Z'' + \ldots + Z^{|\infty|}. \end{array} \qquad (2)$$

Если последовательность $X, X', X'', \ldots$ имеет конечный предел, то разности ряда $S, S', S'', \ldots$ становятся равными. В этом случае ряд $S^{|\infty|}, S^{|\infty+1|}, S^{|\infty+2|}, \ldots$ будет представлять собой арифметическую прогрессию, т. е.

$$S^{|\infty+\omega|} = S^{|\infty|} + \omega \cdot \left(S^{|\infty+1|} - S^{|\infty|}\right) = \omega \cdot S^{|\infty+1|} + (1-\omega) \cdot S^{|\infty|}.$$

Так как $\Sigma^{|\infty|} = S^{|\infty+\omega|}$ и $S^{|\infty+1|} = S^{|\infty|} + X^{|\infty+1|}$; то

$$\Sigma^{|\infty|} = S^{|\infty|} + \omega \cdot X^{|\infty+1|}.$$

Используя (2), получаем

$$\Sigma = S + \omega \cdot X^{|\infty+1|} + X' + X'' + X''' + \ldots$$
$$- Z' - Z'' - Z''' - \ldots$$

Если бесконечно удалённые члены ряда $A + B + C + \ldots$ исчезают, то член $\omega \cdot X^{|\infty+1|}$ исчезает, и его можно опустить.

«Итак, — заключает Эйлер, — значение количества Σ выражается новым рядом; его можно получить, если известен общий член ряда $A + B + C + \ldots$, из которого можно определить значения членов $Z', Z'', Z''', \ldots$ Таким образом, если ω положить бесконечно малым, то, поскольку тогда $\Sigma - S$ есть дифференциал функции S, этот дифференциал dS можно будет выразить бесконечным рядом. Если же не пренебрегать высшими степенями ω, то мы получим полный дифференциал этой непредставимой функции S» [1, с. 513].

Этот метод применяется и для случая, когда для ряда $S = A + B + C + D + \ldots + X$ бесконечно удаленные члены не обращаются в нуль. Тогда член Z, соответствующий $x + \omega$, равен

$$Z = X + \frac{\omega \cdot dX}{dx} + \frac{\omega^2 \cdot d^2 X}{1 \cdot 2\, dx^2} + \frac{\omega^3 \cdot d^3 X}{1 \cdot 2 \cdot 3\, dx^3} + \ldots, \qquad (3)$$

а сумма $x + \omega$ членов есть

$$\Sigma = S + \omega \cdot X^{|\infty+1|} - \frac{\omega}{dx} \cdot d\left(X' + X'' + X''' + \ldots\right) -$$

$$- \frac{\omega^2}{1 \cdot 2\, dx^2} \cdot d^2\left(X' + X'' + X''' + \ldots\right) - \ldots$$

Эйлер пишет: «Если $X^{|\infty+1|}$ не равен нулю, то, чтобы устранить из рассмотрения бесконечность, можно представить это количество следующим образом:

$$X^{|\infty+1|} = X' + \left(X'' - X'\right) + \left(X''' - X''\right) + \ldots$$» [1, с. 517].

Откуда следует, что сумма Σ будет равна

$$\Sigma = S + \omega \cdot X' + \omega \cdot \left(\left(X'' - X'\right) + \left(X''' - X''\right) + \ldots\right) -$$

$$- \frac{\omega}{dx} \cdot d\left(X' + X'' + X''' + \ldots\right) - \frac{\omega^2}{1 \cdot 2\, dx^2} \cdot d^2\left(X' + X'' + X''' + \ldots\right) -$$

$$- \frac{\omega^3}{1 \cdot 2 \cdot 3\, dx^3} \cdot d^3\left(X' + X'' + X''' + \ldots\right) - \ldots \qquad (4)$$

Положив $\omega = dx$, Эйлер получает следующую формулу для вычисления дифференциала функции S:

$$dS = X' \cdot dx + dx \cdot \left(\left(X'' - X'\right) + \left(X''' - X''\right) + \ldots\right) -$$

$$- d\left(X' + X'' + X''' + \ldots\right) - \frac{1}{2} d^2\left(X' + X'' + X''' + \ldots\right) -$$

$$- \frac{1}{6} d^3\left(X' + X'' + X''' + \ldots\right) - \ldots$$

Если $x = 0$, то $S = 0$ и Σ будет суммой ω членов $A + B + C + \ldots + Z$, где Z есть член, индекс ω которого является или целым или дробным числом.

Далее Эйлер рассматривает ряды с общими членами $X, \frac{dX}{dx}, \frac{d^2X}{dx^2}, \frac{d^3X}{dx^3}, \ldots$ и обозначает их суммы через

$$\sum X = \mathsf{A},\ \sum \frac{dX}{dx} = \mathsf{B},\ \sum \frac{d^2X}{dx^2} = \mathsf{C}, \ldots$$

Тогда формулу (4) можно переписать так:

$$\Sigma = \omega \cdot A + \omega \cdot \left((B - A) + (C - B) + (D - C) + ... \right) -$$
$$- \omega \cdot \mathsf{B} - \omega^2 \cdot \mathsf{C} - \omega^3 \cdot \mathsf{D} - ...$$

Таким образом, для любого x значение суммы S выразится формулой

$$S = x \cdot A + x \cdot \left((B - A) + (C - B) + (D - C) + ... \right) -$$
$$- x \cdot \mathsf{B} - x^2 \cdot \mathsf{C} - x^3 \cdot \mathsf{D} - ...,$$

производные будут иметь вид:

$$\frac{dS}{dx} = A + (B - A) + (C - B) + (D - C) + ... - \mathsf{B} -$$
$$- 2\mathsf{C} \cdot x - 3\mathsf{D} \cdot x^2 - 4\mathsf{E} \cdot x^3 - ...,$$

$$\frac{d^2 S}{2\, dx^2} = -\mathsf{C} - 3\mathsf{D} \cdot x - 6\mathsf{E} \cdot x^2 - 10\mathsf{F} \cdot x^3 - ...,$$

а полный дифференциал:

$$dS = A \cdot dx + (B - A) \cdot dx + (C - B) \cdot dx + (D - C) \cdot dx + ...$$
$$- \mathsf{B}\ dx - \mathsf{C}\left(2x\, dx + dx^2\right) - \mathsf{D}\left(3x^2 dx + 3x\, dx^2 + dx^3\right) -$$
$$- \mathsf{E}\left(4x^3 dx + 6x^2 dx^2 + 4x\, dx^3 + dx^4\right) - ...$$

«Итак, — пишет Эйлер, — этим способом можно выразить дифференциал какой-либо непредставимой функции S, если бесконечно удаленные члены ряда $A + B + C + ...$ либо исчезают, либо равны между собой. Если бесконечно удалённые члены этого ряда не будут равны нулю, то сумма ряда, образованного из общего члена $\frac{dX}{dx}$, будет бесконечной, но в соединении с рядом $A + (B - C) + (C - B) + (D - C) + ...$ дает конечную сумму» [1, с. 518].

В главе «О дифференцировании непредставимых функций» Эйлер рассматривает случай, когда не только сумма B ряда $\sum \frac{dX}{dx}$, но и сумма C ряда $\sum \frac{d^2 X}{dx^2}$ становится бесконечно большой величиной и замечает, что «в этом случае не достаточно прибавить сумму $A + (B - C) + (C - B) + (D - C) + ...$». Теперь в (2) бесконечно

удаленные значения $S^{|\infty|}$, $S^{|\infty+1|}$, $S^{|\infty+2|}$,... уже не составляют арифметической прогрессии. «Прежде мы принимали, — пишет Эйлер, — что первые разности этих членов равны; теперь распространим этот метод на случай, когда лишь вторые разности или третьи, или более высокие полагаются постоянными» [1, с. 518].

Сначала Эйлер полагает, что вторые разности являются постоянными, и составляет таблицу:

Значения: $S^{|\infty|}$, $S^{|\infty+1|}$, $S^{|\infty+2|}$,...

Первые разности: $X^{|\infty+1|}$, $X^{|\infty+2|}$,...

Вторые разности: $X^{|\infty+2|} - X^{|\infty+1|}$,...

Отсюда следует

$$\Sigma^{|\infty|} = S^{|\infty+\omega|} = S^{|\infty|} + \omega \cdot X^{|\infty+1|} + \frac{\omega(\omega-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(X^{|\infty+2|} - X^{|\infty+1|}\right) =$$

$$= S^{|\infty|} - \frac{\omega\cdot(\omega-3)}{1\cdot 2} X^{|\infty+1|} + \frac{\omega\cdot(\omega-1)}{1\cdot 2} X^{|\infty+2|}.$$

Таким образом, получается следующая формула:

$$\Sigma = \omega\cdot X^{|\infty+1|} + \frac{\omega\cdot(\omega-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(X^{|\infty+2|} - X^{|\infty+1|}\right) + S + X' + X'' + X''' +$$

$$+ X'''' + X''''' + \ldots - Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - Z''''' - \ldots$$

Полагая $\omega = dx$ и расписав бесконечно удаленные члены $X^{|\infty+1|}$, $X^{|\infty+2|}$ и члены Z', Z'', Z''',... по формуле (3), Эйлер окончательно получает значение «полного дифференциала предложенной непредставимой функции S»:

$$dS = dx\cdot\left\{\begin{matrix} + X'' + X''' + X'''' + \ldots \\ - X' - X'' - X''' - \ldots \end{matrix}\right\} + X'\cdot dx -$$

$$- \frac{dx\cdot(1-dx)}{1\cdot 2}\cdot\left\{\begin{matrix} + X''' + X'''' + X''''' + \ldots \\ - 2X'' - 2X''' - 2X'''' - \ldots \\ + X' + X'' + X''' + \ldots \end{matrix}\right\} - \frac{dx\cdot(1-dx)}{1\cdot 2}\cdot X'' +$$

$$+\frac{dx\cdot(1-dx)}{1\cdot 2}\cdot X'+$$

$$+\frac{dx\cdot(1-dx)\cdot(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\begin{Bmatrix}+X''+X'''+X''''+\ldots\\-3X'''-3X''''-3X'''''-\ldots\\+3X''+3X'''+3X''''+\ldots\\-X'-X''-X'''-\ldots\end{Bmatrix}+$$

$$+\frac{dx\cdot(1-dx)\cdot(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot X'''-2\frac{dx\cdot(1-dx)\cdot(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot X''+$$

$$+\frac{dx\cdot(1-dx)\cdot(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot X'-d\left(X'+X''+X'''+\ldots\right)-$$

$$-\frac{1}{2}d^3\left(X'+X''+X'''+\ldots\right)-\frac{1}{6}d^3\left(X'+X''+X'''+\ldots\right)-\ldots$$

Он отмечает: «Это выражение имеет общий характер и даёт искомый дифференциал, каков бы ни был порядок тех разностей, которые становятся постоянными. Эта формула приспособлена к постоянным разностям, причём видно, каков будет закон её составления, если для получения постоянных разностей придётся идти дальше» [1, с. 520].

Далее Эйлер полагает $x=0$ и по аналогии с первым случаем обозначает суммы рядов

$$\sum X=\mathsf{A},\quad \sum\frac{dX}{dx}=\mathsf{B},\quad \sum\frac{d^2X}{dx^2}=\mathsf{C},\ldots$$

Тогда если бесконечно удаленные члены ряда $A+B+C+\ldots$ исчезают, то

$$S=-\mathsf{B}\,x-\mathsf{C}\,x^2-\mathsf{D}\,x^3-\mathsf{E}\,x^4-\ldots$$

Если бесконечно удаленные члены имеют только постоянные первые разности, то к этому значению необходимо добавить следующий ряд:

$$x\cdot\begin{Bmatrix}A&+B+C+D+E+\ldots\\&-A-B-C-D-\ldots\end{Bmatrix}.$$

Если же исчезают лишь вторые разности этих бесконечно удаленных членов, то добавляется ряд

$$\frac{x\cdot(x-1)}{1\cdot 2}\cdot\begin{Bmatrix}+B & +C+D+E+F+\ldots\\ -A & -2B-2C-2D-\ldots\\ & +A+B+C+D+\ldots\end{Bmatrix}.$$

Если третьи разности —

$$\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\begin{Bmatrix}+C & +D+E+F+G+\ldots\\ -2B & -3C-3D-3E-\ldots\\ +A & +3B+3C+3D+\ldots\\ & -A-B-C-D-\ldots\end{Bmatrix}.$$

В «Дифференциальном исчислении» Эйлер рассматривает ещё один род непредставимых функций, которые выражены в виде произведения членов ряда (1):

$$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad \ldots\quad x$$

$$S = A\cdot B\cdot C\cdot D\cdot\ldots\cdot X.$$

Он пишет: «Так как прежде всего нам нужно дифференцировать такого рода непредставимые функции, то здесь мы найдём дифференциал функции $S = A\cdot B\cdot\ldots\cdot X$» [1, с. 524].

Для того чтобы свести этот случай к первому, он предлагает взять логарифмы от S, т. е.

$$\ln S = \ln(A\cdot B\cdot C\cdot\ldots\cdot X) = \ln A+\ln B+\ln C+\ldots+\ln X\ . \quad (5)$$

Если бесконечно удалённые члены этого ряда исчезают, то, применив рассмотренный выше метод, Эйлер получает:

$$\ln\Sigma = \ln S+\ln X'+\ln X''+\ln X'''+\ldots-$$
$$-\ln Z'-\ln Z''-\ln Z'''-\ldots \quad (6)$$

или

$$\Sigma = S\cdot\frac{X'}{Z'}\cdot\frac{X''}{Z''}\cdot\frac{X'''}{Z'''}\cdot\ldots$$

Учитывая, что

$$\ln Z = \ln X+\frac{\omega}{dx}\cdot d\ln X+\frac{\omega^2}{2dx^2}\cdot d^2\ln X+\ldots,$$

формулу (6) можно переписать следующим образом:

$$ln\,\Sigma = ln\,S - \frac{\omega}{dx}\cdot d(ln\,X' + ln\,X'' + ln\,X''' + \ldots) -$$

$$-\frac{\omega^2}{2\,dx^2}\cdot d^2(ln\,X' + ln\,X'' + ln\,X''' + \ldots) - \ldots$$

Затем Эйлер обозначает $\omega = dx$, тогда

$$d\,ln\,S = \frac{dS}{S} = -d(ln\,X' + ln\,X'' + ln\,X''' + \ldots) -$$

$$-\frac{1}{2}d^2(ln\,X' + ln\,X'' + ln\,X''' + \ldots) - \ldots \quad (7)$$

Если бесконечно удаленные члены ряда (5) не исчезают, но имеют исчезающие разности, то к найденному ряду для $ln\,\Sigma$ нужно добавить ряд:

$$\omega\cdot ln\,X' + \omega\cdot\left(ln\frac{X''}{X'} + ln\frac{X'''}{X''} + ln\frac{X''''}{X'''} + \ldots\right),$$

т.е.

$$\Sigma = S\cdot X'^{\omega}\cdot\frac{X''^{\omega}\cdot X'^{1-\omega}}{Z'}\cdot\frac{X'''^{\omega}\cdot X''^{1-\omega}}{Z''}\cdot\frac{X''''^{\omega}\cdot X'''^{1-\omega}}{Z'''}\cdot\ldots,$$

а к выражению полного дифференциала —

$$dx\cdot ln\,X' + dx\cdot\left(ln\frac{X''}{X'} + ln\frac{X'''}{X''} + ln\frac{X''''}{X'''} + \ldots\right). \quad (8)$$

Далее Эйлер полагает $x = 0$ и получает следующую формулу

$$S = \frac{A}{X'}\cdot\frac{B}{X''}\cdot\frac{C}{X'''}\cdot\ldots,$$

при условии, что логарифмы бесконечно удаленных членов ряда $A, B, C, D, \ldots$ исчезают. Если же исчезают их разности, то S примет вид

$$S = A^x\cdot\frac{B^x\cdot A^{1-x}}{X'}\cdot\frac{C^x\cdot B^{1-x}}{X''}\cdot\frac{D^x\cdot C^{1-x}}{X'''}\cdot\ldots$$

Образовав ряды $\sum ln\,X$, $\sum\frac{d\,ln\,X}{dx}$, $\sum\frac{d^2\,ln\,X}{dx^2}$,... и обозначив их суммы через $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \ldots$ соответственно, Эйлер получает выражение:

$$\ln S = x \cdot \ln A + x \cdot \left(\ln \frac{B}{A} + \ln \frac{C}{B} + \ln \frac{D}{C} + \ldots \right) -$$
$$- \mathrm{B} \cdot x - \mathrm{C} \cdot x^2 - \mathrm{D} \cdot x^3 - \ldots$$

из которого находит дифференциал «количества $\ln S$»

$$\frac{dS}{S} = dx \cdot \ln A + dx \cdot \left(\ln \frac{B}{A} + \ln \frac{C}{B} + \ln \frac{D}{C} + \ldots \right) - \mathrm{B} \cdot dx -$$
$$- 2\,\mathrm{C} \cdot dx^2 - 3\,\mathrm{D} \cdot dx^3 - \ldots$$

и значение полного дифференциала

$$\frac{dS}{S} = dx \cdot \ln A + dx \cdot \left(\ln \frac{B}{A} + \ln \frac{C}{B} + \ln \frac{D}{C} + \ln \frac{E}{D} + \ldots \right) -$$
$$- \mathrm{B}\ dx - \mathrm{C}\left(2x\,dx + dx^2\right) - \mathrm{D}\left(3x^2 dx + 3x\,dx^2 + dx^3\right) -$$
$$- \mathrm{E}\left(4x^3 dx + 6x^2 dx^2 + 4x\,d^3 x + dx^4\right) + \ldots$$

Ещё один метод численного дифференцирования, предложенный Эйлером, основан на известной формуле суммирования:

$$\sum_{x=0}^{n} f(x) = \int_{0}^{n+1} f(x)\,dx + \frac{f(n+1) - f(0)}{2} + \frac{f'(n+1) - f'(0)}{12} -$$
$$- \frac{f'''(n+1) - f'''(0)}{720} + \ldots,$$

называемой сейчас формулой Эйлера — Маклорена.

Впервые Эйлер привел эту формулу без доказательства и примеров в работе 1732 г. «Общий метод суммирования рядов» (E25) [2], а её вывод — в статье 1735 г. «Отыскание суммы ряда по данному общему члену» (E47) [3].

В 1742 г. Колин Маклорен (1698—1746) в «Трактате о флюксиях» получил её иным способом — последовательным дифференцированием разложения функции $f(x)$ в степенной ряд, после чего каждый из полученных рядов интегрировался на промежутке [0, 1]. Из найденной системы уравнений Маклорен выразил значение $f(0)$ через интегралы и производные данной функции. Аналогично он нашел значения $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$, которые затем про-

суммировал, что дало ему искомую формулу [4, с. 227—230; 5, с. 52; 6, с. 57—63; 7, с. 454—458].

Формула Эйлера — Маклорена универсальна: с её помощью можно находить как сумму ряда, так и приближенно вычислять интеграл функции, выражающий общий член этого ряда.

В «Дифференциальном исчислении» (глава XVI) Эйлер предложил с помощью этой формулы приближенно дифференцировать непредставимые функции. Он пишет: «Изложенный метод дифференцирования непредставимых функций основан на предположении, что бесконечно удалённые члены ряда $A, B, C, D, \ldots$ либо равны нулю, либо имеют исчезающие разности. Если ни то, ни другое не имеет места, то пользоваться этим методом нельзя. Поэтому я изложу здесь другой метод, не стесняемый этим условием; он основан на общем способе суммирования ряда, имеющего заданный общий член» [1, с. 532].

Эйлер рассматривает непредставимую функцию $S = A + B + C + \ldots + X$. По формуле Эйлера — Маклорена он получает

$$S = \int X\, dx + \frac{1}{2}X + \frac{\mathrm{A}\, dX}{1 \cdot 2\, dx} - \frac{\mathrm{B}\, d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\, dx^3} + \\ + \frac{\mathrm{C}\, d^5X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6\, dx^5} - \ldots,$$

где $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots$ — бернуллиевы числа.

Отсюда следует, что дифференциал данной функции есть

$$dS = X\, dx + \frac{1}{2}dX + \frac{\mathrm{A}\, d^2X}{1 \cdot 2\, dx} - \frac{\mathrm{B}\, d^4X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\, dx^3} + \\ + \frac{\mathrm{C}\, d^6X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6\, dx^5} - \ldots$$

Аналогично рассматривается функция вида

$$S = A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot \ldots \cdot X,$$

«независимо от того, имеют ли логарифмы бесконечно удаленных сомножителей постоянные разности или нет» [1, с. 533].

Так как

$$ln\,S = ln\,A + ln\,B + ln\,C + ... + ln\,X\ ,$$

то

$$ln\,S = \int ln\,X\ dx + \frac{1}{2} ln\,X + \frac{\mathrm{A}\ d\ ln\,X}{1 \cdot 2\ dx} - \frac{\mathrm{B}\ d^3\ ln\,X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\ dx^3} + ...$$

Дифференцируя это выражение, Эйлер получает следующую формулу для вычисления dS:

$$\frac{dS}{S} = ln\,X\ dx + \frac{d\ ln\,X}{2} + \frac{\mathrm{A}\ d^2\ ln\,X}{1 \cdot 2\ dx} - \frac{\mathrm{B}\ d^4\ ln\,X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\ dx^3} +$$

$$+ \frac{\mathrm{C}\ d^6\ ln\,X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6\ dx^5} - ...$$

Методы численного дифференцирования для «непредставимых» функций, предложенные Эйлером в «Дифференциальном исчислении», представляют особый интерес. Выведенные им формулы для вычисления дифференциалов и производных таких функций являются общими формулами, которые можно применять для любого интерполяционного многочлена. Однако в научной и историко-математической литературе эти результаты Эйлера, имеющие важное теоретическое и практическое значение, вообще не отмечаются.

Список литературы

1. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление / Пер. с лат., вступ. статья и примеч. М. Я. Выгодского. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949. 582 с.

2. Euler L. Metodus generalis summandi progressiones // Comment. Acad. Sci. Imp. Petrop. 1738. 6. P. 28—36. То же: // Opera omnia. Ser. 1. Vol. 14. 1925. (E25)

3. Euler L. Inventio summae cujusque seriei ex dato termino generali // Comment. Acad. Sci. Imp. Petrop. 1741. 8. P. 9—22. То же: // Opera omnia. Ser. 1. Vol. 14. 1925. P. 108—123. (E47)

4. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т. III. Математика XVIII столетия / Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1972. 495 с.

5. Рыбников К. А. История математики. Т. II. М.: Изд-во МГУ, 1963. 334 с.

6. Коренцова М. М. Колин Маклорен (1698—1740). М.: Наука, 1998. 144 с.

7. Чириков М. В. Из истории асимптотических рядов // Историко-математические исследования. Вып. 13. М.: Физматгиз, 1960. С. 441—472.

В. Д. Павлидис

СПОР О ПРИРОДЕ ЛОГАРИФМОВ В XVIII ВЕКЕ. ЛОГАРИФМЫ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ И МНИМЫХ ЧИСЕЛ В ИССЛЕДОВАНИЯХ Л. ЭЙЛЕРА

К началу XVIII в. одним из основных направлений в исследованиях математиков стало формирование основ теории аналитических функций. Исходным пунктом теории аналитических трансцендентных функций послужили бесконечные ряды, выражающие всевозможные аналитические функции. Однако ее самостоятельное развитие представляло бы большие трудности без всестороннего предварительного изучения некоторых элементарных функций, например показательной и логарифмической. Изучением их свойств занимались Ньютон, Лейбниц, И. Бернулли и некоторые другие математики XVII — начала XVIII века, но общая теория логарифмов была сформирована лишь в работах Л. Эйлера.

Результаты, полученные Эйлером в теории аналитических функций, в частности в теории логарифмов, изучали И. Ю. Тимченко [1], А. П. Юшкевич [2], А. И. Маркушевич [3], С. Е. Белозеров [4], Э. Фельманн [5]. Ими был дан общий обзор этих результатов, рассмотрены его сочинения «Введение в анализ бесконечных» [6, 7, 8] и «О споре господина Лейбница и господина Бернулли о логарифмах отрицательных и мнимых чисел» [9, 10], переписка Эйлера с

современными ему учеными. При этом вне поля зрения исследователей остались мемуар Эйлера «О логарифмах отрицательных и мнимых чисел» [11] (E807), который лишь вскользь упоминается некоторыми авторами, часть научной переписки и богатейший материал его неопубликованных записных книжек [12]. Данная статья посвящена изучению этих материалов.

В современной интерпретации логарифмическая функция комплексного переменного определяется по формуле

$$Lnz = ln|z| + iArgz,$$

где *Argz* — многозначная функция. Логарифмическая функция *Lnz* определена для любого комплексного $z \neq 0$ и является многозначной функцией: в каждой точке $z \neq 0$ она принимает бесконечное число различных значений, отличающихся друг от друга на $2k\pi i$, $k = 0, \pm1, \pm2,\ldots$

Однозначная ветвь этой функции, определяемая как $ln\, z = ln|z| + i\, arg\, z$, называется главным значением логарифмической функции.

Математики долгое время не знали, что нужно понимать под логарифмом отрицательного и мнимого числа. Неясность природы таких логарифмов приводила к различному толкованию их сути. Следствием этого и был спор о логарифмах отрицательных чисел, начавшийся в 1712 г. между Лейбницем и И. Бернулли, а затем продолжившийся между Даламбером и Эйлером с участием других математиков XVIII века.

В одном из писем к И. Бернулли (от 16 марта 1712 г.) Лейбниц, рассматривая соотношение 1 : (–1) = (–1) : 1, утверждал, что это равенство отношений нельзя принять за действительное, так как здесь отношение большего к меньшему равно отношению меньшего к большему, и заключил, что это мнимое равенство. Рассматривая логарифмы отрицательных чисел, Лейбниц также считал их мнимыми. Бернулли не согласился с этим утверждением и попытался доказать, что $ln(-x) = lnx$ и, следовательно,

$ln(-1) = 0$, хотя ранее доказал, что $\frac{ln\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\pi}{2}$. Лейбниц, не соглашаясь с И. Бернулли в том, что $ln(-1) = 0$, также неясно представлял существо этого вопроса. Хотя он занимал в этом споре формально правильную позицию, однако, по существу, был далек от истины: как и его противник, он не подозревал, что логарифм многозначен. Теорию, устраняющую все затруднения, предложил Эйлер в работе «О споре между господином Бернулли и господином Лейбницем о логарифмах отрицательных и мнимых чисел» [9, 10]. Однако Даламбер и после публикации мемуара Эйлера продолжал защищать точку зрения И. Бернулли, приводя новые «аргументы» в доказательство того, что $lnx = ln(-x)$.

Спор между Лейбницем и И. Бернулли, не решив вопроса о логарифмах отрицательных чисел, оставил заметный след в истории математики. В результате этого спора были получены некоторые важные формулы, вошедшие затем в теорию аналитических функций.

Эйлер начинает изучение элементарных трансцендентных функций с рассмотрения показательной функции a^z во «Введении в анализ бесконечных». Он говорит о неудобстве введения отрицательных оснований a, при которых изменение показателя не дает непрерывного ряда действительных значений этой функции [8, с. 88—89]. Далее он отмечает, что a^z не может стать отрицательной величиной при действительных значениях z. Это замечание дало ему право при изложении теории логарифмов встать на сторону Лейбница в споре о логарифме отрицательного числа. Он пишет: «Только положительные числа могут иметь вещественные логарифмы… Что же касается логарифмов отрицательных чисел, то они совсем не вещественны, а мнимы…» [8, с. 90]. Таким образом, показательная функция не может быть определена выражением a^z без дополнительных условий. Такими условиями для Эйлера служат требования однозначности и непрерывности определяемой функции [8, с. 87—88].

Рассмотрим, как Эйлер определил показательную и логарифмическую функции во «Введении в анализ бесконечных» [8, с. 101—104].

«Так как $a^0 = 1$, и при возрастании показателя числа a одновременно увеличивается значение степени, если только a есть число, большее единицы, то отсюда следует, что когда показатель бесконечно мало превышает нуль, то сама степень также бесконечно мало превзойдет единицу. Если ω будет числом бесконечно малым…, то $a^\omega = 1 + \psi$, причем ψ также будет бесконечно малым числом» [8, с. 101]. Полагая $\psi = k\omega$, где k — произвольное действительное число, Эйлер записывает равенство $a^\omega = 1 + k\omega$, а затем, логарифмируя по основанию a, получает выражение $\omega = log_a(1 + k\omega)$ [8, с. 101]. Из этих формул можно вывести разложение показательной и логарифмической функции в бесконечные ряды. Разлагая $a^{i\omega}$ в ряд Маклорена, Эйлер получает:

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2 + \\ + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3 + \ldots,$$

где i — произвольное действительное число.

Полагая $i = \frac{z}{\omega}$ — бесконечно большим, так как ω является бесконечно малым, он выражает ω следующим образом: $\omega = \frac{z}{i}$, и получает

$$a^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n z^n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}. \qquad (1)$$

Из $\omega = log_a(1 + k\omega)$ следует, что $i\omega = log_a(1 + k\omega)^i$. Полагая $(1 + k\omega)^i = 1 + x$, Эйлер находит: $log_a(1 + x) = i\omega$, где i — бесконечно большая величина, x — конечно. Отсюда:

$$1+k\omega=(1+x)^{\frac{1}{i}},$$

следовательно,

$$i\omega=log_a(1+x)=\frac{1}{k}[(1+x)-\frac{i}{k}].$$

Разлагая это выражение по формуле бинома Ньютона, Эйлер получает:

$$log_a(1+x)=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) вытекают равенства, связывающие a и k:

$$a=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n};\ k=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(a-1)^n}{n}.$$

Значения этих величин определяют ту или иную систему логарифмов.

Если положить основание $a = e$, $z=i\omega$, $\frac{z}{n}=k\omega$ при z действительном и n стремящемся к бесконечности, то установленные Эйлером формулы для показательной и логарифмической функций в современной записи выглядят так:

$$e^z=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n;\ \ln z=\lim_{n\to\infty}n(z^{\frac{1}{n}}-1).$$

Во «Введении в анализ бесконечных» Эйлер не разбирает вопроса о логарифмах мнимых чисел. Однако установленные им здесь результаты — в особенности его формулы, выражающие связь между показательными и тригонометрическими функциями [8, с. 118—119], дают точную основу для его решения.

Особенно обстоятельно вопрос о логарифмах мнимых чисел Эйлер рассматривает в мемуаре «О споре между господином Лейбницем и господином Бернулли о логарифмах отрицательных и мнимых чисел» [10], написанном в 1749 г., опубликованном в 1751 г. В нем Эйлер дал основательный анализ взглядов Лейбница, Даламбера, Бернулли,

показал, в чем состояли трудности этой проблемы, дал ее правильное решение.

Остановимся подробнее на этом мемуаре. Здесь Эйлер детально разбирает аргументы И. Бернулли в защиту утверждения $ln(-x) = ln(x)$ и возражения Лейбница.

Первым аргументом в пользу заявленного утверждения И. Бернулли считал тот факт, что оно следует из «очевидного» равенства: $\frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$, а следовательно, и $ln(-x) = ln(x)$. Лейбниц возражал, что правило дифференцирования логарифмов $d\,ln(x) = \frac{dx}{x}$ справедливо лишь для положительных значений аргумента, значит, нельзя утверждать, что $\frac{d(-x)}{-x} = d\,ln(-x)$.

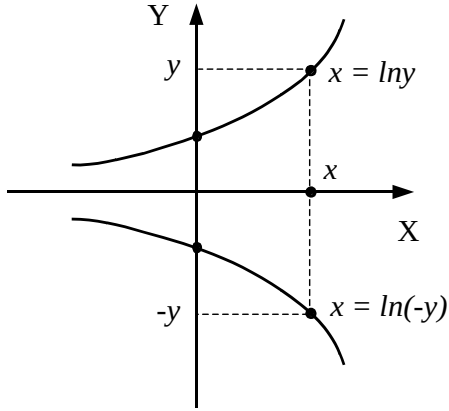
Эйлер, считая этот довод неубедительным, заявляет, что «это возражение, если бы оно было верно, поколебало бы основное положение всего анализа, заключающееся в общности правил и операций, признаваемых справедливыми, какова бы ни была природа количеств, к которым они прилагаются» [10, с. 58—59]. По его мнению, несмотря на справедливость правила дифференцирования логарифмов, аргумент И. Бернулли не доказывает того, что он хочет доказать.

Действительно, из равенства дифференциалов двух функций $dln(x)$ и $dln(-x)$ следует, что сами функции отличаются друг от друга на аддитивную постоянную, причем она равна $ln(-1)$, так как $ln(-x) = ln(-1 \cdot x) = ln(-1) + ln(x)$. Следовательно, утверждение И. Бернулли означает, что $ln(-1) = 0$. В таком случае это должно быть доказано.

Вторым подтверждением своей гипотезы И. Бернулли считал то, что интегральные кривые дифференциального уравнения $dx = \frac{dy}{y^n}$, выражаемые уравнением

$$x = C - \frac{1}{(n-1)y^{n-1}},$$

при n — нечетном, симметричны относительно оси абсцисс. Поэтому и при $n = 1$ интегральные кривые, выражаемые уравнением $x = C + ln\, y$, будут симметричны относительно этой оси. А это означает, что логарифмическая кривая $x = ln\, y$ состоит из двух ветвей, симметричных относительно оси абсцисс, т.е. $ln(-y) = ln\, y$. Этот довод, считая его более серьезным, Эйлер опроверг следующим образом. Интегрирование дифференциала $x^n dx$ приводит к степенной функции при $n \neq -1$. Случай $n = -1$ является исключением и, следовательно, на него нельзя распространять вывод, полученный для $n \neq -1$.



Далее, Эйлер обсуждает аргумент Бернулли, позже поддержанный Даламбером и состоящий в том, что наличие у логарифмической кривой двух ветвей, иногда выводят из того, что ее можно получить путем квадратуры гиперболы, а эта кривая состоит из двух ветвей. Он замечает, что нужно еще доказать, что построенные две ветви составляют одну и ту же непрерывную кривую.

Следующий аргумент Бернулли состоит в том, что из $(-a)^2 = (+a)^2$ вытекает, что $ln(-a)^2 = ln(+a)^2$, а значит,

$2ln(-a)=2ln(+a)$ и $ln(-a)=ln(+a)$. Эйлер указывает, что этот факт сомнителен. Для подтверждения своей позиции он приводит следующий довод: из $(a\sqrt{-1})^4=(+a)^4$ следует, что $lna=lna\sqrt{-1}=lna+ln\sqrt{-1}$. Отсюда будет следовать, что $ln\sqrt{-1}=0$. Но сам И. Бернулли доказал следующее равенство:

$$\frac{ln\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=\frac{\pi}{2}.$$

При этом в доказательстве, как говорит Эйлер, сомневаться не приходится, так как оно проведено наиболее надежными средствами анализа.

Вслед за обсуждением позиции И. Бернулли Эйлер переходит к анализу аргументов Лейбница, утверждавшего, что логарифмы отрицательных чисел не могут быть действительными, и в частности $ln(-1)\neq 0$.

Во-первых, Лейбниц опирался на то, что если в разложении

$$ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots,$$

положить $x=-2$, то получится

$$ln(-1)=-2-\frac{4}{2}-\frac{8}{3}-\ldots,$$

что, по его мнению, означает $ln(-1)\neq 0$.

Эйлер приводит пример разложения:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots,$$

в котором сначала полагает $x=-3$, а затем — $x=1$ и при этом получает следующие соотношения:

$$-\frac{1}{2}=1+3+9+27+\ldots$$

и

$$\frac{1}{2}=2+2+10+26+\ldots.$$

Складывая их, он получает: $0 = 2 + 2 + 10 + \ldots$ и заключает, что правая часть представляется отличной от нуля, в то время как левая — точно нуль. Таким образом, он показывает, что арифметические действия над рядами вне их области сходимости приводят к парадоксам. Следовательно, применение такого способа доказательства некорректно.

Другое доказательство того, что $ln(-1) \neq 0$ Лейбниц получает из соотношения

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots.$$

Если положить $e^y = -1$ и, следовательно, $y = ln(-1)$, то получаем соотношение вида

$$-1 = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots,$$

которое не выполняется при $y = 0$.

На это Эйлер возражает, указывая, что функция может иметь и такие значения, которые не могут быть получены из порожденного ею ряда. Так

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^2 + \ldots,$$

где сумма ряда является однозначной функцией, в то время как $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ — двузначная функция.

Критика предшественников позволила Эйлеру показать, что ни один из них не сумел обосновать свою позицию. Выяснив это и одновременно охарактеризовав трудность вопроса, он изложил правильное решение. Суть его в том, что значение $y = ln\,x$ определяется из уравнения $x = e^y = (1 + \frac{y}{i})^i$, где i — бесконечно большое число. Отсюда имеем: $x^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{y}{i}$ и $y = i(x^{\frac{1}{i}} - 1)$, что в современной интерпретации означает:

$$y = \ln x = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1).$$

Так как корень с «бесконечно большим показателем» [10, с. 73—74] имеет бесконечное множество различных значений, вообще говоря, мнимых, то и логарифм имеет бесконечное множество различных значений, вообще говоря, мнимых.

Полагая

$$x = a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = e^c(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

можно представить все эти значения в виде

$$y = \ln x = C + (\varphi \pm 2\lambda\pi)\sqrt{-1},$$

где λ — произвольное натуральное число или нуль.

Таким образом, мало утверждать, что логарифмы отрицательных (и мнимых) чисел — мнимы, как это делал Лейбниц. Нужно еще указать, что логарифм каждого числа имеет не одно, а бесконечное множество различных значений, отличающихся друг от друга на $2\lambda\pi\sqrt{-1}$. При этом для действительного положительного числа лишь одно из значений логарифма действительно, а все остальные мнимы; для отрицательных действительных и мнимых чисел мнимыми оказываются все значения логарифма.

Другим оппонентом Эйлера в споре о природе логарифмов, как мы упоминали выше, стал Даламбер. Между ними возникла переписка, продолжавшаяся в течение 1747 и 1748 гг. Теории логарифмов касаются 6 писем, два из которых (от 15 апреля и 19 августа 1747 г.) принадлежат Эйлеру [13, с. 263—266, 270—272]. Его письма, по большей части, содержат рассуждения и результаты, опубликованные позже в мемуаре «О споре между Лейбницем и Бернулли о логарифмах отрицательных и мнимых чисел» [10]. В основе всех рассуждений Даламбера о логарифмах отрицательных и мнимых чисел лежит уравнение логарифмической кривой $y = c^x$ [13, с. 261]. По его мнению, свойства логарифмической кривой дают ему право утверждать, что $\ln x = \ln(-x)$ и поддержать точку зрения И. Бернулли, изло-

женную в письмах к Эйлеру от 1727 г. [14, с. 77—88]. В своих возражениях Эйлер дает весьма простое доказательство мнимости $ln\sqrt{-1}$, основанное на формуле

$$\frac{ln\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \pm\frac{4n+1}{2}\pi. \qquad (3)$$

Даламбер отвечает, что вывод формулы (3) предполагает совершенно особую теорию логарифмов, в которой: 1) подкасательная логарифмической кривой есть $y = \frac{1}{\sqrt{-1}}$;

2) функция $y = ln\frac{\sqrt{-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$ получает мнимые значения для всех аргументов *x*, лежащих в промежутке [0; 1]. Далее он замечает: «Эта система (теория логарифмов) не имеет ничего общего с уравнением логарифмики $x = ln\, y$, в котором подкасательная всегда вещественна и в котором *y* предполагается всегда вещественным» [13, с. 274].

Таким образом, Даламберу пришлось совсем отвергнуть теорию логарифмов Эйлера. Он ввел свое определение логарифма, полностью зависящее от построения логарифмической кривой. Эту связь он выразил следующим образом: найти логарифм неизвестного — это значит найти кривую, абсциссы точек которой пропорциональны логарифмам соответственных ординат, или точнее, пропорциональны соответственным площадям $\int\frac{dy}{y}$ [13, с. 274—275]. Изложение своей теории логарифмов Даламбер опубликовал в 1761 г. в первом томе «Opuscules Mathematiques» [15].

Отвергая принципы, на которых Эйлер строил свою теорию логарифмов, Даламбер старался найти другое обоснование непрерывности, которому подчинялась бы определенная им логарифмическая функция. С этой целью он обратился к рассмотрению дифференциального уравнения:

$$dx = \frac{ady}{y}. \qquad (4)$$

Его рассуждения основаны на изучении интеграла дифференциального уравнения (4) как частного случая при $n = 1$ более общего интеграла дифференциального уравнения $dx = \frac{a^n dy}{y^n}$, где n — положительное нечетное число.

Даламбер так и остался непреклонным противником теории Эйлера. И. Бернулли же к 1729 г. был склонен, в какой-то мере, принять взгляды Лейбница — Эйлера. Об этом свидетельствует письмо И. Бернулли к Эйлеру от 18 апреля 1729 г. [14, с. 99—109]. В нем он дает формулу для выражения площади сектора круга, угол которого равен φ, радиус — a в виде:

$$\frac{1}{2}a^2\varphi = \frac{a^2}{4\sqrt{-1}}L\frac{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi}{\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi} + n\frac{a^2\pi}{2}.$$

Обозначая $2\varphi = \psi$ и $(-n) = k$, можно получить формулу Эйлера для мнимого логарифма

$$L(\cos\psi + \sqrt{-1}\sin\psi) = (\psi + 2\pi k)\sqrt{-1}.$$

Понимая несовместимость своих же собственных выводов о мнимых логарифмах со своими старыми воззрениями на логарифмы отрицательных чисел и не находя возможности отказаться от этих воззрений, И. Бернулли в начале письма различает логарифмы отрицательных чисел двух видов $L-(x)$, $L(x)$.

Насколько можно судить по содержанию письма, под первым обозначением автор подразумевает вещественную часть мнимого логарифма $L(-x)$. Попытка примирить два подхода к понятию логарифма отрицательных и мнимых чисел, предпринятая И. Бернулли в этом письме, оказалась неудачной, но идеи, высказанные в нем, были подхвачены, как удалось выяснить, Эйлером.

В числе сочинений Эйлера есть мемуар на французском языке, имеющий абсолютно законченный характер и носящий название «О логарифмах отрицательных и мнимых чисел» [11]. Этот мемуар имеет большое сходство с мемуаром E168 [9—10], но между ними есть существенные отличия. Работа [11] посвящена анализу аргументов И. Бернулли и Лейбница, но не содержит никаких намеков на работы Даламбера. В ней нет вывода о том, что $L(-1) \neq 0$, основанного на исследовании расходящихся рядов, и основная формула

$$L(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}) = (\varphi \pm 2\pi n)\sqrt{-1}$$

выведена с помощью интегрального исчисления. При этом его рассуждения имеют большое сходство с доказательством И. Бернулли в письме от 18 апреля 1729 г. Эйлер исходит из формулы

$$d\varphi = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

где x и y соответственно синус и косинус дуги φ единичной окружности. Полагая $x = z\sqrt{-1}$, он преобразует формулу к виду

$$d\varphi = \frac{dz\sqrt{-1}}{\sqrt{1+z^2}}$$

и находит интеграл $\int_0^x \frac{dz\sqrt{-1}}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} L(y + x\sqrt{-1}) = \varphi$.

При этом он замечает, что найденное соотношение между x, y, φ имеет место для всех дуг с тем же самым синусом и косинусом, т.е., используя периодичность тригонометрических функций, получает формулу в виде

$$L(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}) = (\varphi \pm 2\pi n)\sqrt{-1}.$$

Процесс создания Эйлером теории логарифмов нашел отражение в его записных книжках [12].

Нами было обнаружено девять достаточно полных записей, разбросанных по пяти записным книжкам (**№ 129**,

131, **132**, **133**, **139**), относящихся к периоду с 1725 по 1779 г.

Остановимся подробнее на заметках. Самая ранняя находится в записной книжке **№ 129** на **л. 22 об. — 23**. Она содержит записи, посвященные исследованию дифференциалов вида $\frac{x^n dx}{\sqrt{a-x}}$ и $\frac{x^n dx}{\sqrt{ax-x^2}}$. Интегралы от этих функций выражены через логарифмы отрицательных чисел. Судя по содержанию, заметка является частью черновика исследований, опубликованных в мемуаре «О логарифмах отрицательных и мнимых чисел» [11].

В этой же записной книжке (**№ 129**) на **л. 54** был найден отрывок под названием «Канон о логарифмах», содержащий разложение $ln\frac{1+x}{1-x}$ в бесконечные ряды для произвольного подлогарифмного выражения.

В записной книжке **№ 131** на **л. 269** найдены формулировки следующих трех теорем:

1) $\frac{(1+t\sqrt{-1})^{2n}-(1-t\sqrt{-1})^{2n}}{(1+t\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1}+(1-t\sqrt{-1})^{2n}\sqrt{-1}} = tg\,2nA\cdot tgt$

2) $(1+t\sqrt{-1})^{2n}+(1-t\sqrt{-1})^{2n} = 2(1+t^2)^n\,cos\,2nA\cdot tgt$

3) $(1+t\sqrt{-1})^{2n}-(1-t\sqrt{-1})^{2n} = 2(1+t^2)^n\,sin\,2nA\cdot tgt$,

которые не вошли в таком виде ни в один из опубликованных мемуаров.

Заметка на *л.* **129** записной книжки **№ 132** содержит формулу $\frac{x^{+\sqrt{-1}}+x^{-\sqrt{-1}}}{2} = cos(A ln\,x)$, которая в частном виде $\frac{2^{+\sqrt{-1}}+2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ была сообщена Эйлером в письме к Гольдбаху от 9 декабря 1741 г. [16]. Действительно, если ее представить в виде

$$\frac{e^{\sqrt{-1}\,ln2}+e^{-\sqrt{-1}\,ln2}}{2}$$

и использовать формулу $cos\varphi = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2}$, то она дает $cos\,ln\,2$.

Наиболее интересные записи находятся в записной книжке **№ 133** на **л. 59—59 об.** и содержат следующее рассуждение Эйлера:

Пусть $y = ln\,x$, тогда $dy = \frac{dx}{x} = x^{-1}dx$ и пусть $\omega \to 0$, следовательно $dy = x^{-1+\omega}dx$. Интегрируя это выражение, получим $y = \frac{1}{\omega}x^{\omega} - \frac{1}{\omega}1^{\omega}$.

При $x = 1$ из выражения следует, что $y = 0$.

Пусть $\omega = \frac{1}{n}$, тогда $y = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$. Так как $x^{\frac{1}{n}}$ — это есть $\sqrt[n]{x}$ и n принимает бесконечное число значений, то и $y = ln\,x$ имеет бесконечное число значений.

Ниже решается задача о нахождении значений логарифма единицы.

Пусть $y = ln\,a$, тогда $y = n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$, следовательно, $\left(\frac{y}{n} + 1\right) = a^{\frac{1}{n}}$ и имеет место уравнение $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - a = 0$.

Пусть $a = 1$ и $ln\,a = ln\,1 + ln\,a$. Рассмотрим уравнение $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - 1 = 0$, приводя его к виду $p^n - 1 = 0$. Корни этого уравнения определяются из общей формулы $1 + \frac{y}{n} = cos\frac{2k\pi}{n} \pm sin\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}$, т.е.

$$p = cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Следовательно, $y = -n + n\cos\frac{2\pi k}{n} \pm n\sqrt{-1}\,\frac{2\pi k}{n}$, так как n — бесконечно большое число, то $y = \pm 2\pi k\sqrt{-1}$, логарифм единицы равен: 0; $\pm 2\pi\sqrt{-1}$; $\pm 4\pi\sqrt{-1}$; $\pm 6\pi\sqrt{-1}$; etc.

На обороте (**л. 59 об.**) решается вопрос о логарифме отрицательного числа $-a$.

Пусть $-a = -1 \cdot a$, тогда $ln(-a) = ln\,a + ln(-1)$.

Рассмотрим выражение для $ln(-1)$ в виде: $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n + 1 = 0$, приведем уравнение к виду $p^n + 1 = 0$, а затем:

$$p^2 - 2p\cos\frac{2k-1}{n}\pi + 1 = 0.$$

Решением этого уравнения является

$$p = \cos\frac{2k-1}{n}\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2k-1}{n}\pi,$$

следовательно, $y = -n + n\cos\frac{2k-1}{n}\pi \pm n\sqrt{-1}\,\sin\frac{2k-1}{n}\pi$; и так как n — бесконечно большое число, то $y = \pm(2k-1)\pi\sqrt{-1}$, логарифм (–1) равняется: $\pm\pi\sqrt{-1}$; $\pm 3\pi\sqrt{-1}$; $\pm 5\pi\sqrt{-1}$; etc.

Рассмотрев нахождение логарифма действительного положительного, действительного отрицательного числа, Эйлер дает ответ на вопрос, что есть логарифм комплексного числа.

Пусть дано $a + b\sqrt{-1}$ и $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Тогда $\frac{a}{c} = \cos\varphi$, $\frac{b}{c} = \sin\varphi$ и можно перейти к тригонометрической форме комплексного числа: $c(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)$.

Логарифмируя это выражение, получаем:

$$ln\,c + ln(cos\varphi + \sqrt{-1}\,sin\,\varphi).$$

Пусть $cos\varphi + \sqrt{-1}\,sin\,\varphi = y$, тогда

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = cos\varphi + \sqrt{-1}\,sin\,\varphi = 1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{1} + \frac{\varphi^2}{1\cdot 2} +$$

$$+\frac{\varphi^3\sqrt{-1}}{1\cdot 2\cdot 3} + ..etc = \left(1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n.$$

Рассмотрим уравнение

$$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n - \left(1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n = 0,$$

приведем его к виду $p^n - q^n = 0$, а затем

$$p^2 - 2pqcos\frac{2\pi k}{n} + q^2 = 0.$$

Отсюда получаем: $p = q\left(cos\frac{2\pi k}{n} \pm \sqrt{-1}\,sin\frac{2\pi k}{n}\right)$.

Тогда $\left(1+\frac{y}{n}\right) = \left(1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)\left(cos\frac{2\pi k}{n} \pm \sqrt{-1}\,sin\frac{2\pi k}{n}\right)$,

следовательно,

$$y = -n + (n + \varphi\sqrt{-1})\left(cos\frac{2\pi k}{n} \pm \sqrt{-1}\,sin\frac{2\pi k}{n}\right) =$$

$$= -n + (n + \varphi\sqrt{-1})(1 \pm \frac{2\pi k}{n}\sqrt{-1}),$$

следовательно, $y = \varphi\sqrt{-1} \pm 2\pi k\sqrt{-1}$ и логарифм $(cos\varphi + \sqrt{-}\,sin\varphi)$ будет равен: $\varphi\sqrt{-1}$; $(\varphi \pm 2\pi)\sqrt{-1}$; $(\varphi \pm 4\pi)\sqrt{-1}$; etc.

Изучив эту заметку и сравнив ее содержание с содержанием мемуара E168 [10], можно заключить, что она является фрагментом черновика этого мемуара и содержит доказательства основных положений теории логарифмов Эйлера.

Заметки на **л. 56—56 об.** записной книжки **№ 139** содержат решение задач теории чисел о выражении натуральной степени числа формулой x^2+7y^2, доказательство равенства $\left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)^n=\frac{a+b\sqrt{-7}}{2}$, где $b=\pm 1$ и n = 1, 2, 3, 5, 13, в котором используются факты теории логарифмов.

Таким образом, заметки из записных книжек Эйлера свидетельствуют о следующем:

- ведя переписку с И. Бернулли, Эйлер с самого начала своих исследований был занят самостоятельным изучением логарифмической и показательной функций;
- в течение продолжительного периода 1725—1749 гг. Эйлер планомерно занимался проблемой логарифмов отрицательных и мнимых чисел, что позволило ему к началу 1746 г. окончательно сформировать свою теорию логарифмов;
- теория логарифмов Эйлера была применена им к решению задач теории чисел.

Список литературы

1. Тимченко И. Ю. Основание теории аналитических функций. Одесса, 1899.
2. Юшкевич А. П. Об архивном наследии Л. Эйлера // Вопросы истории естествознания и техники. 1982. Вып. 3. С. 137—139.
3. Маркушевич А. И. Очерки по истории аналитических функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1951.
4. Белозеров С. Е. Основные этапы развития общей теории аналитических функций. М.: Физматгиз, 1962.
5. Fellmann E. A. Leonard Euler // Enzyklopädie «Die Groβen der Weltgeschichte». Band VI. Zürich, 1975.
6. Euler L. Introductio in analysin infinitorum // Opera omnia. Ser. I. Vol. 8. 1748 (E101).
7. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых / Пер. с лат. Е. Л. Пацановского; Под ред. С. Я. Лурье. Т. 1. М.; Л., 1936.
8. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. 2-е изд. / Пер. с лат. Е. Л. Пацановского; Под ред. И. Б. Погребысского. Т. 1—2. М., 1961.
9. Euler L. De la controverse entre Mrs Leibnitz et Bernoulli sur les logarithms des nombers négatifs et imaginaires // Opera omnia. Ser. I. Vol. 17. P. 195—232.

10. Euler L. Über die Kontroverse zwischen den Herren Leibnitz und Bernoulli über die Logarithmen negativer und imaginärer Zahlen // Leonhard Euler. Zur Theorie komplexer Funktionen. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 261. Leipzig, 1983. S. 54—100.

11. Euler L. Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaries // Opera postuma. T. 1. 1862. P. 269—281 (E807).

12. Санкт-Петербургский филиал Архива РАН. Ф. 136. Оп. 1. № 129—140.

13. Leonhard Euler. Correspondance avec A. C. Clairaut, J. D'Alembert et J. L. Lagrange / Publiée par A. P. Juškevič et R. Taton // Opera omnia. Series quarta A. Vol. 5. Basel, 1980. P. 256—274.

14. Leonhard Euler. Briefwechsel mit Iohann (I) Bernoulli und Niklaus (I) Bernoulli / Hrsg. von E. A. Fellmann und G. K. Mikhajlov // Opera omnia. Series quarta A. Vol. II. Basel, 1998. P. 38—39.

15. D'Alembert J. Opuscules Mathématiques. T. 1. Paris, 1761. P. 180—209.

16. Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729—1764 / Hrsg. und eingeleitet von A. P. Juškevič und E. Winter. Berlin, 1965.

Т. И. Иванова

ЭЙЛЕР И ЛАГРАНЖ: ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ВОПРОСОВ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ И АЛГЕБРЫ

Великие математики Леонард Эйлер (1707—1783) и Жозеф Луи Лагранж (1736—1813), которые внесли огромный вклад в развитие теории чисел и алгебры, были современниками и интересовались одними и теми же математическими проблемами, актуальными в XVIII веке. Их научная переписка, которая была опубликована в 1980 г. [1], показывает, что, решая одни и те же задачи, они сообщали друг другу полученные результаты, дополняли их, делали обобщения или находили новые способы решения.

Предмет переписки учёных отражается и в неопубликованных записных книжках Эйлера, которые хранятся в Санкт-Петербургском филиале Российской Академии наук [2].

Это позволяет взглянуть на общение Эйлера и Лагранжа как на научное сотрудничество. Для иллюстрации остановимся на некоторых вопросах теории чисел и алгебры, которые ими обсуждались.

По теории чисел будет рассмотрено: 1) доказательство теоремы Вильсона; 2) теория степенных вычетов; 3) диофантов анализ: а) уравнение Пелля; б) решение квадратных неопределённых уравнений с двумя неизвестными.

Эйлер не только доказал почти все теоремы Ферма, но и приложил их к решению труднейшего вопроса теории чисел — к разложению больших чисел на простые множители. Кроме того, он открыл множество новых фактов и указал пути, следуя по которым позднейшие учёные создали то стройное целое, каким является в настоящее время классическая теория чисел [3, 4].

1. Теорема Вильсона гласит: число n является простым в том и только в том случае, если сумма

$$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) + 1$$

делится на n, или $(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$. Её доказательство дал Лагранж в статье «Доказательство новой теоремы, касающейся простых чисел» [5]. Оно основано на свойствах коэффициентов разложения полинома

$$(x+1)(x+2)(x+3)\cdot \ldots \cdot (x+n-1)$$

по степеням x. Из рекуррентных формул, которые связывают эти коэффициенты, следует, что все они делятся на n, кроме свободного члена, который, будучи сложен с единицей, делится на n. В одном из трёх примечаний Лагранж даёт более простое доказательство теоремы. Другое доказательство теоремы Вильсона было дано Эйлером в мемуаре «Аналитические сочинения смешанного содержания» (E 560) [6]. Оно основано на теории вычетов. В современной записи ход доказательства представлен А. О. Гельфондом [4, с. 82]: чтобы доказать, что $(m-1)! + 1$ всегда делится на m, где m — простое, полагается, что a — первообразный корень модуля m; тогда

$$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (m-1) \equiv a^{0+1+2+\ldots+m-2} = a^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} \equiv$$

$$\equiv a^{\frac{m-1}{2}} a^{(m-1)\frac{m-3}{2}} \equiv a^{\frac{m-1}{2}} \equiv -1 \bmod m,$$

так как (при простом m) $a^{m-1} \equiv 1, \left[a^{\frac{m-1}{2}} \right]^2 \equiv 1 \Rightarrow a^{\frac{m-1}{2}} \equiv -1$,

вследствие того, что a — первообразный корень, и сравне-

ние $a^{\frac{m-1}{2}} \equiv 1$ невозможно. Таким образом, каждый из учёных, независимо друг от друга, предложил свой способ доказательства теоремы Вильсона.

2. Эйлер, который является создателем теории степенных вычетов, посвятил несколько работ важному частному случаю — квадратичным вычетам. В мемуаре «Наблюдения о делении квадратов на простые числа» (E 552) [7], опубликованном в 1772 г., он установил на многих числовых примерах и сформулировал свойство квадратичных вычетов, которое называется теперь законом взаимности квадратичных вычетов. Доказательства этого закона у Эйлера ещё не было. Современная формулировка закона дана А. М. Лежандром (1752—1833): если p и q — простые нечётные числа, то $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\times\frac{q-1}{2}}$. Здесь используется символ Лежандра $\left(\frac{a}{p}\right)$, определяемый следующим образом: если a взаимно просто с p, то полагают $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, когда a — квадратичный вычет, и $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, когда a — квадратичный невычет.

В разработку теории квадратичных вычетов внёс значительный вклад и Лагранж. В связи с рассмотрением неопределённого уравнения

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \varsigma = 0,$$

у которого он искал все рациональные решения, им была сформулирована и доказана теорема, на которой основано доказательство закона взаимности квадратичных вычетов [8]. Она состоит в следующем: чтобы уравнение $Ar^2 = p^2 - Bq^2$ допускало решение в целых рациональных числах, необходимо и достаточно, чтобы A было делителем

формы $\alpha^2 - B$ (т.е. было делителем некоторого числа, представимого в форме $\alpha^2 - B$); согласно современной терминологии должно иметь место равенство *(B/p) = +1* для всякого простого числа *p*, входящего в *A* в нечётной степени. Эта теорема содержит, в сущности, по словам Н. Г. Чеботарёва [8, с. 88], главную часть доказательства знаменитого закона взаимности. Основанное на этом результате доказательство Лежандра было неполным [9]. Полное доказательство было дано позднее (в 1801 году) К. Ф. Гауссом (1777—1855) [10].

3. Эйлер и Лагранж, как и другие современные им математики, много внимания уделяли диофантову анализу, то есть решению неопределённых уравнений в целых и рациональных числах. Большой интерес они проявляли, в частности, к решению уравнения Пелля: $x^2 - Dy^2 = 1$, где D — любое число, не равное квадрату. Сформулировал задачу в 1657 г. П. Ферма (1601—1665). Он утверждал, что существует бесконечное множество целых решений этого уравнения. Метод его решения в рациональных, а затем и в целых числах был предложен У. Броункером (1620—1684) и Д. Валлисом (1616—1703) [11]. Эйлер исследовал уравнение Пелля в мемуарах E 29 [12], E 279 [13], E 323 [14], E 559 [15]. Он всегда исходил из одного имеющегося решения и ставил цель найти при его помощи все остальные решения. Своё название уравнение получило от Эйлера, который ошибочно связал его решение с именем английского математика Джона Пелля (1611—1685). Основной результат Эйлера по этой проблеме приведён в работе E 323 [14] (1765), где дан метод решения уравнения, основанный на разложении $\sqrt{D}$ в непрерывную дробь. На численных примерах Эйлер нашёл связь периодичности этой дроби с решением уравнения в целых числах и привёл таблицу его наименьших решений для всех значений *D* до 100. Однако он не дал доказательства того, что непрерывная дробь всегда периодична, т.е. что уравнение имеет решение

при любом *D*. Доказал это Лагранж в 1768 году [16], завершив тем самым решение проблемы Пелля.

Другим вопросом диофантова анализа, исследованием которого занимались Эйлер и Лагранж, является задача о решении в рациональных числах квадратного уравнения с двумя неизвестными.

Эйлер, исходя из того, что одно решение $x = \alpha$, $y = \beta$ известно, находил другие решения и выяснял, будет ли их число конечным или бесконечным. Он ограничивался только целочисленными решениями (E 454) [17]. Лагранж дал полное решение неопределённых квадратных уравнений с двумя неизвестными как в целых, так и в рациональных числах [18]. Они оба использовали в своих рассуждениях решение уравнения Пелля и метод непрерывных дробей.

При рассмотрении некоторых вопросов о решении в целых числах неопределённых уравнений второй степени Лагранж продолжил и завершил исследования Эйлера. В переписке Эйлер и Лагранж обменивались полученными результатами. Например, в письме от 30 декабря 1770 г. Лагранж сообщил Эйлеру о найденном им очень простом решении уравнения $ax^2 + b = y^2$. Кроме этого, в письмах от 16 января, 12 февраля и 9 марта 1770 г. они обращались к решению в целых числах неопределённого уравнения второй степени $A = pp \pm Bqq$, особенно заинтересовавшись случаем, когда A = 101, B = 13 [1, с. 466, 467, 471—476, 477, 483].

По алгебре будут рассмотрены следующие вопросы:

1) основная теорема алгебры;

2) учебная литература по алгебре.

1. Одной из центральных проблем алгебры XVIII в. являлось доказательство основной теоремы алгебры, утверждающей, что каждое алгебраическое уравнение

$$f_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

произвольной степени n, где $a_1, a_2, ..., a_n$ — действительные числа, имеет по крайней мере один действительный или комплексный корень [19]. В то время чаще пользовались эквивалентной формулировкой: любой многочлен $f_n(x)$ с действительными коэффициентами может быть разложен в произведение множителей первой и второй степени с действительными коэффициентами. В 1746 г. Эйлер представил в Берлинскую академию наук мемуар «Исследования о мнимых корнях уравнений», в котором содержится доказательство основной теоремы (E170) [20]. В своём доказательстве Эйлер использовал две теоремы аналитического характера:

1) каждое уравнение нечётной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень;

2) каждое уравнение чётной степени с действительными коэффициентами и отрицательным свободным членом имеет по крайней мере два действительных корня.

Дальнейшее доказательство состоит в проведении редукции, сводящей решение уравнения степени $2^k m$, где m нечётно, к уравнению степени $2^{k-1} m_1$, где m_1 нечётно. В ходе доказательства Эйлер применяет, не доказывая, предложения:

А. Любая рациональная симметрическая функция от корней уравнения является рациональной функцией от коэффициентов уравнения (основная теорема о симметрических функциях).

Б. Рациональная функция корней уравнения $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$, принимающая при всевозможных перестановках корней k различных значений, удовлетворяет уравнению степени k, коэффициенты которого рационально выражаются через коэффициенты исходного уравнения.

Последняя теорема была впоследствии доказана Лагранжем. Изложенные выше предложения стали центральными в теории Лагранжа, а затем и в теории Галуа (Э. Галуа, 1811—1832).

Эйлер в своих рассуждениях каждому уравнению степени n с действительными коэффициентами приписывал n корней $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, т.е.

$$f_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\times...\times(x+\alpha_n),$$

где $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ — некие символы, с которыми, однако, можно оперировать как с обычными числами, например, можно записать, что

$$\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=a_1,$$
$$\alpha_1\alpha_2+...+\alpha_{n-1}\alpha_n=a_2,(*)$$
$$.....$$
$$\alpha_1\alpha_2\times...\times\alpha_n=a_n.$$

Основная теорема алгебры при таком подходе равносильна утверждению, что все корни $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ являются действительными или комплексными числами.

Лагранж посвятил строгому проведению редукции Эйлера мемуар «О форме мнимых корней уравнений» (1772) [21], в котором восполнил все пробелы в его доказательствах. Лагранж полностью принимал точку зрения Эйлера относительно того, что любому уравнению n-й степени можно «приписать» n корней-символов, с которыми затем следует оперировать по обычным правилам арифметики. В частности, оказывается справедливым соотношение (*). Этой точки зрения придерживались и другие математики XVIII в., считая постановку вопроса Эйлером вполне законной.

К. Ф. Гаусс полагал, что в доказательстве основной теоремы алгебры, данном Эйлером, содержится порочный круг. Однако это неверно: в нём нет порочного круга, но содержится пробел, который заключается в том, что Эйлер не доказывал, а постулировал существование поля, над которым $f(x)$ разлагается на линейные множители [19].

2. Л. Эйлер создал учебник алгебры, который стал прообразом всех последующих, вплоть до учебников конца XIX — начала XX веков. Двухтомное «Полное введение в

алгебру» Эйлер подготовил по возвращении из Берлина в Петербург. Оно издано в 1770 г. на немецком языке (E387, E388) [22]. Ранее, в 1768—1769 гг., вышел русский перевод этой книги под названием «Универсальная арифметика». Этот учебник написан в двух планах — учебном и исследовательском. В первом томе разработан основной алгебраический аппарат. Второй том посвящён уравнениям. В нём излагаются сведения о решении уравнений до 3-й и 4-й степени включительно, в том числе приближённые методы вычисления действительных корней. Второй том содержал и научные результаты самого Эйлера в области диофантова анализа. Это сочинение неоднократно переиздавалось на немецком языке, а также в русском, французском, английском и голландском переводах [23].

Важные дополнения к французскому переводу (1773) двухтомного труда Эйлера по алгебре сделал Лагранж в «Приложениях к элементам алгебры Эйлера» [24]. Он систематически изложил теорию непрерывных дробей, а также приложил её к решению нескольких арифметических проблем. При помощи непрерывных дробей, знаменатели которых не превышают заданной границы, он решил задачу о наилучшем приближении произвольного вещественного числа. Лагранжу принадлежит постановка и решение ряда математических проблем, в том числе относящихся к теории диофантовых приближений. О «Полном введении в алгебру», его переводе на французский язык и о дополнениях, сделанных Лагранжем к французскому переводу, идёт речь в письмах Лагранжа к Эйлеру от 12 февраля 1770 г., 30 декабря 1770 г. и 13 июля 1773 г.. Так, в письме от 30 декабря 1770 г. Лагранж сообщал, что получил «Алгебру» в подарок и сделает перевод со своими дополнениями [1, с. 472, 483, 494].

Список литературы

1. Euler L. Correspondance de Leonhard Euler avec J. L. Lagrange // Opera omnia. Ser. 4A. Vol. 5. 1980. S. 359—510.

2. Санкт-Петербургский филиал Архива РАН. Ф. 136. Оп. 1. № 129—140.

3. Венков Б. А. О работах Леонарда Эйлера по теории чисел // Леонард Эйлер. М.; Л., 1935. С. 81—87.

4. Гельфонд А. О. Роль работ Л. Эйлера в развитии теории чисел // Леонард Эйлер. М., 1958. С. 80—95.

5. Lagrange J. L. Démonstration d'un théorème nouveau concernant les nombres premiers // Nouveau mém. de l'Acad. de Berlin, 1771; То же: Oeuvres. T. 3. P. 425—438.

6. Euler L. Miscellanea analytika // Opuscula analytika. 1783. 1. P. 329—344.

7. Euler L. Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos // Opuscula analytika. 1783. 1. P. 64—84.

8. Чеботарёв Н. Г. О значении работ Лагранжа по теории чисел и алгебре // Жозеф Луи Лагранж. М.; Л., 1937. С. 85—103.

9. Legendre A. M. Théorie des nombres. 3-me éd. Paris, 1830. P. 230—238, 41—48.

10. Gauss K. F. Disqusitiones arithmeticae, art. 135.

11. Wallis J. Treatise of Algebra. London, 1685.

12. Euler L. De solutione problematum Diophantaeorum per numeros integros // Comment. Acad. Sci. Imp. Petrop. 1738. 6. P. 175—188.

13. Euler L. De resolutione formularum quadraticarum indeterminatarum per numeros integros // Novi comment. Acad. Sci. Imp. Petrop. 1764. 9. P. 3—39.

14. Euler L. De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo // Novi comment. Acad. Sci. Imp. Petrop. 1767. 11. P. 28—66.

15. Euler L. Nova subsidia pro resolutione formulae $axx + 1 = yy$ // Opuscula analytica. 1783. 1. P. 310—328.

16. Lagrange J. L. Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré // Mém. de l'Acad. de Berlin. 1769. 23; То же: Oeuvres. T. 2. P. 377—535.

17. Euler L. De resolutione irrationalium per fraktiones continuas, ubi simul nova quaedam et singularis species minimi exponitur // Comm. ar. coll. 1772. T. 1. P. 570.

18. Lagrange J. L. Addition a la théorie de la résolution des équations numériques // Oeuvres. 1768. T. 2.

19. Башмакова И. Г., Смирнова Г. С. Возникновение и развитие алгебры // Очерки по истории математики / Под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. С. 185—191.

20. Euler L. Recherches sur les racines imagipaires des equations // Mém. Acad. Roy. Sci. et belles-lettres. 1751. 5. P. 222—288.

21. Lagrange J. L. Sur les formes des racines imaginaries des equations // Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin. 1772; То же: Oeuvres. T. 3. P. 479—516.

22. Euler L. Vollstandige Anleitung zur Algebra. St-Pet., 1770.

23. Полякова Т. С. «Универсальная математика» Л. Эйлера // История отечественного школьного математического образования. Два века. Кн. 1: Век восемнадцатый / Под ред. Т. С. Поляковой. Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. пед. ун-та, 1997. С. 150—153.

24. Lagrange J. L. Additions aux éléments d'algèbre d'Euler. Analyse indéterminé // Oeuvres. T. 7. P. 7—179.

И. К . Зубова

ТЕОРИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ В РАБОТАХ ЭЙЛЕРА И ЕГО СОВРЕМЕННИКОВ

Теория колебаний — одна из древнейших научных теорий — берет начало еще в школе Пифагора (ок. 570 — ок. 500 гг. до н. э.). На примере звучащей струны пифагорейцы выяснили, что в основе звуковых явлений лежат колебания. Было замечено, что высота звука, издаваемого струной, зависит от ее длины и натяжения. Затем появилась мысль представлять тоны числами, а музыкальные интервалы — отношениями чисел. Сохранились сведения, что Пифагор «натянул струну на линейку и разделил ее на 12 частей. После этого он заставил звучать сначала всю струну, а затем ее половину, т.е. 6 частей, и нашел, что вся струна была в консонансе со своей половиной, причем музыкальный интервал представлял октаву. После того же, как заставил сначала звучать всю струну, а затем 3/4 ее, он услышал консонанс кварты, и аналогично для квинты» [1, с. 403].

Таким образом были выведены законы музыкальной гармонии, основанные на числовых соотношениях. Последователи Пифагора: Гиппас (V в. до н.э.), Архит (ок. 428—365 гг. до н.э.), Евдокс (ок. 408 — ок. 355 гг. до н.э.), Гераклит Понтийский (ок. 350 г. до н.э.) — завершили пифагорейскую теорию музыки. Ее излагали выдающиеся ученые древности Аристотель (384—322 гг. до н.э.) и Птоле-

мей (II в.). Античные ученые поставили вопрос о связи между частотой колебаний и скоростью распространения звука, который в то время не получил решения.

Значительное движение вперед в изучении колебательных явлений произошло в эпоху Возрождения, когда на базе экспериментальных исследований наука начала делать важные теоретические обобщения. Они касались, в частности, акустики.

Леонардо да Винчи (1452—1519), которому принадлежит много изобретений в области практической механики и который был также прекрасным музыкантом, конструировавшим музыкальные инструменты, ясно понимал колебательную природу звука. «Как брошенный в воду камень, — писал он, — становится центром и причиною различных кругов, так же кругами распространяется и звук, порожденный в воздухе» [12, с. 203]. Такое движение воды вообще представлялось ему интересным примером колебательного движения. По его словам, «это возникшее от внезапного размыкания и замыкания воды движение производит в ней некое сотрясение, которое гораздо скорее можно рассматривать как дрожание, нежели как движение» [12, с. 204]. Леонардо да Винчи описал резонанс [там же, с. 201]. Корректное описание резонанса дал также известный астроном, врач, философ, поэт эпохи Возрождения Джироламо Фракасторо (1478—1553) в сочинении «О симпатии и антипатии предметов».

Важное значение для акустики и теории колебаний имела деятельность Джамбаттисты Бенедетти (1530—1590), которого иногда считают наиболее значительным предшественником Галилея. В его книге «О различных математических и физических рассуждениях» (1585), в которой акустике посвящена отдельная глава «О музыкальных интервалах», было введено понятие частоты колебаний.

С именем Галилео Галилея (1564—1642) связывают начало теории колебаний как науки. Изучая колебания маятника, он пришел к фундаментальному открытию изо-

хронности малых колебаний, сделанному при наблюдении качаний паникадил Пизанского собора. Вопрос о механических колебаниях Галилей рассматривал в тесной связи с задачами акустики (колебания струны, теория резонанса).

В «Дне первом» своих «Бесед и механических доказательств» Галилей уделяет много внимания теории музыки. Обсудив законы качания маятника и установив, что «длины маятников обратно пропорциональны квадратам числа их качаний, совершаемых в течение определенного промежутка времени» [2, с. 190], он переходит к анализу звуковых явлений — подробно рассматривает колебательное движение струны и описывает явление резонанса. «Струна, — пишет Галилей, — после удара по ней издает звук, продолжающийся все время, пока длятся ее колебания; эти колебания заставляют дрожать и колебаться прилегающий к ней воздух, сотрясения и колебания которого распространяются на большое пространство и отзываются на всех струнах того же инструмента и других соседних» [там же]. Далее Галилей дает развернутое объяснение консонансов и диссонансов. Он пришел к выводу, что «непосредственная причина формы музыкальных интервалов… заключается в отношении между числами колебаний» [там же]. Поставив задачу об определении частоты любого звука, он полагал, что «сосчитать колебания струны, которая, давая звук, вибрирует с большой быстротой, совершенно невозможно» [там же, с. 194].

Одновременно с Галилеем этими же вопросами занимались И. Бекман (ок. 1570—1637) и М. Мерсенн (1588—1648). Бекман в 1614—1618 гг. пришел к выводу об изохронности звуковых колебаний, показал, что частота колебаний обратно пропорциональна длине струны, а затем провел аналогию между колебаниями струны и движениями подвешенного тела. Некоторые результаты, полученные Бекманом, стали известны благодаря Р. Декарту (1596—1650) и М. Мерсенну.

Марен Мерсенн сыграл большую роль в развитии физической акустики XVI в. В его сочинении «Универсальная

гармония, содержащая теорию и практику музыки», изданном в 1636 г., с большой основательностью рассматриваются теоретические вопросы акустики и механики. В частности, он стремился выяснить законы колебания струны и достиг успеха. Считают [14, 15], что если основная идея, возможно, принадлежала Галилею, то окончательную формулировку этих законов дал Мерсенн.

Эти законы следующие: 1) частота колебаний любого звука обратно пропорциональна длине струны, если натяжение ее, удельный вес и диаметр одни и те же; 2) частота колебаний обратно пропорциональна корню квадратному из натягивающей струну силы (при прочих равных условиях); 3) частота колебаний обратно пропорциональна корню квадратному из удельного веса струны (при прочих равных условиях); 4) частота колебаний обратно пропорциональна диаметру струны (при прочих равных условиях). Другими словами $\nu \propto \frac{1}{r}\sqrt{T:a}$, где T — натягивающий струну вес, a — площадь поперечного сечения.

Мерсенн определил нижний предел слышимости для человеческого уха — 16 колебаний в секунду. В переписке Мерсенна и Декарта впервые встречаются догадки о существовании обертонов, о том, что любой звук есть сумма основного тона и ряда обертонов.

Мерсенну принадлежат важные результаты в теории маятника. В 1634 г. он установил закон о том, что частота колебаний маятника обратно пропорциональна квадратному корню из его длины. Он поставил также задачу о центре качаний маятника, которая была решена впоследствии Х. Гюйгенсом (1629—1695).

Конец XVII века в области точных наук, в частности, теории колебаний, связан с именами Х. Гюйгенса, Р. Гука (1635—1703), И. Ньютона (1642—1724). Толчком для ряда новых исследований в области акустики послужило открытие вакуума Э. Торричелли (1608—1647). Выяснилось, что

для распространения звука необходимо существование среды — газообразной, твердой или жидкой.

Следующий важный шаг в развитии колебаний сделал Ньютон. В «Математических началах натуральной философии» (книга II, раздел 8) он предложил теорию волнового распространения движения в плотных средах, которую применил и к распространению звуков, считая, что они есть не что иное, как толчки воздуха [16, с. 470]. Ньютон нашел формулу скорости звука в зависимости от плотности среды. Он впервые определил понятие длины звуковой волны и установил ее связь со скоростью звука.

В то же время стала очевидной аналогия между звуковыми и световыми явлениями. Р. Гук уже в 1665—1674 гг. утверждал, что эти явления родственны, поскольку в основе и тех и других лежат колебания, которые в первом случае воспринимаются ухом, а во втором — глазом. В «Микрографии» (1665) он писал, что свет представляет собой весьма короткие колебательные движения, совершающиеся в поперечных направлениях к линии распространения света. Он создал свою теорию колебательных процессов, согласно которой колебания составляют основу почти всех физических явлений.

Заложенные в трудах Гука основы волновой теории света развил Гюйгенс [3]. Принцип Гюйгенса со временем стал применяться не только в теории света, но и в общей теории передачи движения. Таким образом, оптика в этот период начала приобретать связь с механикой и общей теорией колебаний. Кроме того, с технических изобретений Гюйгенса, в частности с изобретения маятниковых часов в 1657 г., началось практическое применение теории колебаний [4].

В начале XVIII в. было дано аналитическое описание колебательных процессов с помощью дифференциальных уравнений. Вопрос о колебании струны, с которого, в сущности, началась в древности «музыка», т.е. теория звука, стал осмысливаться заново, с привлечением новых достижений математики.

Первую попытку в этом направлении сделал, исходя в значительной мере из эмпирических соображений, Брук Тейлор (1685—1731) в 1713—1715 гг. В работах «О движении колеблющейся струны» [26] и «Метод прямых и обратных приращений» [27] он рассмотрел задачу о малых плоских колебаниях тонкой однородной струны длины l, закрепленной на концах и выведенной из состояния равновесия кратковременным воздействием. Тейлор предположил, что все точки колеблющейся струны возвращаются одновременно в первоначальное положение равновесия на одной прямой, а также что сила, действующая на некоторую точку струны, пропорциональна расстоянию точки от оси.

Используя механико-геометрические соображения, он, по существу, вывел дифференциальное уравнение колебания струны, хотя форма записи отличалась от современной. Из его рассуждений следовало, что колеблющаяся струна в каждый момент принимает форму синусоиды с амплитудой, зависящей от времени. Считая, что первоначальное положение струны совпадает с осью x, а концы струны закреплены, он получил два уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -b^2y,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -(ab)^2$$

и дал решение в виде: $y = A\sin bx \cdot \sin abt$, где $A = const$.

В 1727 г. работами Тейлора заинтересовался Иоганн Бернулли (1667—1748). Вероятно, именно благодаря ему проблемы, связанные с колебательными системами, привлекли внимание его ученика Леонарда Эйлера (1707—1783) и сына, Даниила Бернулли (1700—1782).

В вышедшем в 1736 г. труде Эйлера «Механика, или Наука, изложенная аналитически» [22] рассматривается задача о малых колебаниях точки, находящейся под действием заданной силы и вынужденной двигаться по заданной кривой. В разделе о теории движения твердых тел [22, с. 438—

442] Эйлер исследовал колебание простого маятника и нашел период этого колебания. Немалое значение имела «Корабельная наука» [23] Эйлера (1749), в которой наряду с прикладными задачами рассматриваются теоретические проблемы устойчивости малых колебаний плавающего тела.

Важнейшие для развития теории колебаний результаты получил Ж. Л. Даламбер (1717—1783). Частично они были изложены в его «Динамике» [5], опубликованной в 1743 г. Он рассмотрел, например, задачу о колебании сложного маятника, представляющего собой систему двух точечных грузов, подвешенную на невесомой и нерастяжимой нити, и решил ее как без учета сопротивления среды [5, с. 175—178], так и учитывая это сопротивление [5, с. 204—205]. Здесь и в других работах Даламбер обратился к связанным с теорией колебаний задачам о движении небесных тел.

В 1788 г. вышла первым изданием «Аналитическая механика» [11] Ж. Л. Лагранжа (1736—1813) — одна из важнейших научных работ столетия. В ней содержались основные положения теории малых колебаний консервативной системы около положения равновесия. Во втором издании (1811 г.) Лагранж существенно дополнил свою теорию.

Цель «Аналитической механики», по словам автора, состоит в том, чтобы «свести теорию механики и методы решения связанных с ней задач к общим формулам, простое развитие которых дает все уравнения, необходимые для решения каждой задачи» [11, с. 9]. Сочинение состоит из двух частей — «Статики» и «Динамики». Из первых шести разделов «Динамики» пять имеют общий характер. Определяются основные принципы динамики (принципы сохранения живых сил, сохранения движения, центра тяжести, сохранения моментов вращения и принцип наименьшего действия) и выводится общая формула динамики для движения системы тел, находящихся под действием каких-либо сил. Из этой формулы выводится дифференциальное уравнение для решения этих задач, основанное на вариации

произвольных постоянных. В шестом разделе излагаются сформировавшиеся в течение XVIII в. основы теории малых колебаний.

Лагранж пишет, что «дифференциальные уравнения любой системы тел бывают всегда интегрируемыми в том случае, когда тела лишь очень мало удаляются от своих положений равновесия; тогда можно определить законы колебания всей системы» [11, с. 438]. Выражая потенциальную энергию V системы с конечным числом степеней свободы в виде квадратичной формы от обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots q_n$, а кинетическую энергию T — в виде квадратичной формы от первых производных этих координат, он получает уравнения движения системы, которые в современной записи имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,$$

где $k = 1, 2, \ldots n$, $L = T - V$.

Публикации Эйлера и Д. Бернулли по вопросам теории колебаний появились в 30-х годах XVIII в., но занялись они этими вопросами значительно раньше. Об этом свидетельствует их многолетняя переписка, начавшаяся в 1726 г. [19, с. 20—35; 24, т. 2, с. 409—655]. Вскоре в эту переписку вступил Даламбер, а затем и Лагранж [24]. Хорошо зная друг друга, занимаясь одновременно близкими проблемами, ученые обсуждали методы решения задач о колебании маятника, струны, упругого стержня, пластинки, плавающих тел и т.д.

Задача о колеблющейся струне занимала в исследованиях Эйлера, Д. Бернулли, Даламбера, Лагранжа и их современников особое место. Ее решение вызвало спор, который сыграл значительную роль в истории математики. Он имел важнейшее значение для развития понятия функции и решения таких проблем математического анализа, как представимость функции тригонометрическими рядами и т.д. [17; 20; 21; 28]. В истории науки о дифференциаль-

ных уравнениях, как показано в работах С. С. Демидова [6—10], эта дискуссия начинает новую эпоху.

В результате общих усилий выдающихся ученых XVIII века были не только решены задача о колебании струны и ряд других частных задач, но и заложены основы общей теории колебаний систем с конечным числом степеней свободы. Теория малых колебаний разрабатывалась с помощью дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Этими уравнениями задавался закон движения; решая их, получали координаты точки в виде функций от времени с произвольными коэффициентами, определить которые можно по начальным условиям движения.

Список литературы

1. Ван дер Варден Б. Л. Пифагорейское учение о гармонии // Б. Л. Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. М.: Физматгиз, 1959. С. 395—437.

2. Галилей Г. Избранные труды. Т. 2. М.; Л.: Наука, 1964.

3. Гюйгенс Х. Трактат о свете / Пер. Н. Фредерикс. М.; Л.: ОНТИ, 1935.

4. Гюйгенс Х. Три мемуара по механике / Пер., ред. и примеч. К. К. Баумгарт. М.: Изд-во АН СССР, 1951.

5. Д'Аламбер Ж. Л. Динамика. Трактат, в котором законы равновесия и движения тел сводятся к возможно меньшему числу и доказываются новым способом и в котором излагается общее правило для нахождения движения нескольких тел, действующих друг на друга произвольным образом / Пер. и прим. В. П. Егоршин. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

6. Демидов С. С. Возникновение теории дифференциальных уравнений с частными производными // Историко-математические исследования. Вып. XX. М., 1975. С. 204—220.

7. Демидов С. С. Дифференциальные уравнения с частными производными в работах Ж. Даламбера // Историко-математические исследования. Вып. XIX. М., 1974. С. 94—124.

8. Демидов С. С. Математика и физическая реальность в споре о колебании струны в XVIII в. // Математическая физика. Межвузовский сборник научных трудов. Л.: ЛГПИ, 1984. С. 16—21.

9. Демидов С. С. О понятии решения дифференциальных уравнений с частными производными в споре о колебании струны в XVIII в. // Историко-математические исследования. Вып. XXI. М., 1976. С. 158—181.

10. Демидов С. С. Спор о колебании струны // Роль дискуссий в развитии естествознания. М.: Наука, 1986. С. 78—102.

11. Лагранж Ж. Л. Аналитическая механика. Т. 1—2. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

12. Леонардо да Винчи. Избранное. М.: Изд-во АН СССР, 1952.

13. Льоцци М. История физики / Пер. с итал. М.: Мир, 1970.

14. Миридонова О. П. Эволюция представления о частоте и скорости звука // Вопросы истории физико-математических наук. М.: Изд-во МГУ, 1963. С. 449—450.

15. Миридонова О. П. Первые шаги физической акустики в трудах Галилея и Мерсенна // Вопросы истории естествознания и техники. Вып. XVI. М., 1964. С. 85—90.

16. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / Пер. с лат. и поясн. А. Н. Крылова. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936.

17. Тюлина И. А. Жозеф Луи Лагранж. М.: Наука, 1977.

18. Эйлер Л. Основы динамики точки. М.; Л.: ОНТИ, 1938.

19. Эйлер Л. Переписка. Аннотированный указатель / Отв. ред. В. И. Смирнов и А. П. Юшкевич. Л.: Наука, 1967.

20. Юшкевич А. П. К истории спора о колеблющейся струне // Историко-математические исследования. Вып. XX. М., 1975. С. 221—231.

21. Юшкевич А. П. Леонард Эйлер. М.: Знание, 1982.

22. Euler L. Mechanica, sive motus scientia analytica exposita. Petrop., 1736.

23. Euler L. Scientia novalis seu tractatus de construendis ac derigendis navibus. T. 1—2. Petrop., 1749.

24. Euler L. Correspondance // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. 4A. Commercicum epistolicum. Vol. V / Red. A. Juškevic et R. Taton. Basel, 1980.

25. Fuss P. Correspondance mathématique et physique de quelques célébres géométres du XVIII-eme siecle. T. I—II. St-Pét, 1843.

26. Taylor B. De motu nervi tensi / Philos. Transactions. 1714. Vol. 28. № 337. P. 26—32.

27. Taylor B. Methodus incrementorum directa et diversa. London, 1715.

И. В. Игнатушина

ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ЭЙЛЕРА ПО ТЕОРИИ БЕТА-ФУНКЦИИ (ПО ПЕЧАТНЫМ РАБОТАМ И НЕОПУБЛИКОВАННЫМ МАТЕРИАЛАМ)

Леонарду Эйлеру (1707—1783), одному из основоположников современной математики, принадлежит решающая роль в формировании основ математического анализа и создании ряда его ветвей, в том числе некоторых разделов теории специальных функций. В частности, его можно назвать основоположником теории функции бета (B). Вопросам этой теории Эйлер посвятил около 20 мемуаров.

Содержание его мемуаров, в которых речь идет о функции бета, рассматривалось во вводной статье Г. Фабера и А. Крацера к 19 тому полного собрания сочинений Л. Эйлера («Leonhardi Euleri opera omnia») [1], в магистерской диссертации А. Жбиковского «Об Эйлеровых интегралах» (1867) [2] и работах по истории теории специальных функций А. Н. Гусева [3], В. В. Гуссова [4, 5], Н. Нильсена [6] и др. Однако многие вопросы, касающиеся возникновения и ранней истории B-функций, остались неизученными.

Настоящая статья является продолжением работ [7, 8] и посвящена творчеству Эйлера в указанной области математического анализа. Для представленного здесь обзора соответствующих результатов Эйлера, помимо мемуаров, вошедших в тома «Opera omnia» (14, 16а, 16б, 17—19), и

опубликованной переписки ученого, были также использованы неопубликованные материалы из его записных книжек, которые хранятся в Санкт-Петербургском филиале Архива РАН (ПФА РАН. Ф. 136. Оп. 1. № 129 —140).

Эйлеру принадлежит открытие многих свойств интеграла $\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, а следовательно, и B-функции. Так, уже в одном из своих ранних мемуаров E19 («О трансцендентных рядах, т.е. о рядах, общий член которых не может быть выражен алгебраически» [9]), сданном в печать 28 ноября 1729 г. (но опубликованном в 1738 г.), исходя из определения для биномиальных коэффициентов

$$\left(\frac{n}{q}\right) = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{(1\cdot 2\cdot ..q)(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-q))} = \frac{n!}{q!\,(n-q)!}$$

и заменив здесь факториалы соответствующими интегральными формулами, т. е.

$$n! = \int_0^1 (-\ln x)^n dx,$$

а также применив соотношение $\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q\int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-q}dx}$

(где $q > 0$ и $p - q > -1$), он получил выражение

$$\frac{1}{q\int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{n-q}dx} = \frac{\int_0^1 (-\ln x)^n dx}{\int_0^1 (-\ln x)^q dx \int_0^1 (-\ln x)^{n-q} dx}, \qquad (1)$$

которое для n и q натуральных показывает связь между B- и Γ-функциями

$$B(q, n-q+1) = \frac{\Gamma(q)\Gamma(n-q+1)}{\Gamma(n+1)}.$$

Позже в мемуаре E421 («Разложение интегральной формулы $\int x^{f-1}dx(lx)^{\frac{m}{n}}$, где интегрирование распространя-

ется от значений *x = 0* до *x = 1*», 1772 [10]) Эйлер, используя разложения соответствующих интегралов в бесконечные произведения, показал справедливость равенства (1) для *n* и *q* дробных.

Соотношение (1) играет важную роль в исследованиях Эйлера. Так, например, в мемуаре E663 («Полное изложение рядов, замечательных тем, что содержат биномиальные коэффициенты с дробными индексами», 1776 [11]), используя это соотношение, Эйлер доказал теорему о том, что сумма произведений коэффициентов, полученных при перемножении разложений биномов $(1 + z)^m$ и $(1 + z)^n$, т.е.

$$1+\left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{n}{1}\right)+\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)+\left(\frac{m}{3}\right)\left(\frac{n}{3}\right)+\ldots+1$$

равна $\dfrac{\int_0^1\left(ln\frac{1}{x}\right)^{m+n}dx}{\int_0^1\left(ln\frac{1}{x}\right)^{m}dx\cdot\int_0^1\left(ln\frac{1}{x}\right)^{n}dx}$.

Установленная связь (1) между эйлеровыми интегралами первого и второго рода позволила строить теории B- и Г-функций параллельно.

Эйлер получил и другие формулы, выражающие эйлеров интеграл второго рода через произведение эйлеровых интегралов первого рода. Например, в уже упомянутом мемуаре E19 [9] имеется следующее равенство

$$\int_0^1(-\ln x)^{\frac{p}{q}}dx=$$

$$=\sqrt[q]{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot p\cdot(p+1)\left(\frac{2p}{q}+1\right)\left(\frac{3p}{q}+1\right)\left(\frac{4p}{q}+1\right)\ldots\left(\frac{p(q-1)}{q}+1\right)}\cdot\int_0^1(x-xx)^{\frac{p}{q}}dx\int_0^1(x^2-x^3)^{\frac{p}{q}}dx\int_0^1(x^3-x^4)^{\frac{p}{q}}dx\ldots\int_0^1(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}dx.$$

Для нахождения значений B-функции Эйлер установил соотношения между различными эйлеровыми интегралами первого рода при одном и том же значении *n*. Например, в мемуаре E122 («Бесконечные произведения дробей», (1739) 1750 [12]) получено представление частного двух интегралов первого рода в виде бесконечного произведения:

$$\frac{\int_0^1 x^{m-1}(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}dx}{\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}dx} =$$

$$= \frac{\mu(m+k)}{m(\mu+k)} \cdot \frac{(\mu+n)(m+k+n)}{(m+n)(\mu+k+n)} \cdot \frac{(\mu+2n)(m+k+2n)}{(m+2n)(\mu+k+2n)} \cdot \ldots \quad (2)$$

Отсюда, положив $\mu = n$ и учитывая, что тогда $\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}dx = \int_0^1 x^{n-1}(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}dx = \frac{1}{k}$, Эйлер получил разложение интеграла $\int_0^1 x^{m-1}(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}dx$ в виде бесконечного произведения

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}dx =$$

$$= \frac{n}{mk} \cdot \frac{2n(m+k)}{(m+n)(k+n)} \cdot \frac{3n(m+k+n)}{(m+2n)(k+2n)} \cdot \frac{4n(m+k+2n)}{(m+3n)(k+3n)} \cdot \ldots \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) имеются в записной книжке **№ 131**, датируемой 1736—1740 гг. [1], на **л. 184 об**. и **186 об**.

Из соотношения (3) при $n = 1$ следует разложение для B-функции:

$$B(m,k) = \frac{1}{mk} \cdot \frac{2(m+k)}{(m+1)(k+1)} \cdot \frac{3(m+k+1)}{(m+2)(k+2)} \cdot \frac{4(m+k+2)}{(m+3)(k+3)} \cdot \ldots,$$

которое Эйлер привел в записной книжке **№ 132**, датируемой 1740—1744 гг., на **л. 157 об**.

[1] Датировка записных книжек Эйлера приведена по Г. П. Матвиевской [13 , с. 140].

Используя разложение (3), Эйлер в записных книжках **№ 132** (**л. 156**) и **№ 134** (**л. 169**) устанавливает, что показатели степеней *m* и *k* можно менять местами, т.е.

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}\,dx = \int_0^1 x^{k-1}(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}\,dx.$$

Таким образом, здесь доказано свойство симметричности для B-функции относительно своих аргументов:

$$B(m, k) = B(k, m).$$

Эти идеи Эйлер в дальнейшем развивает в мемуаре E254 («О представлении интегралов дробями», (1756) 1761 [14]), где получены многочисленные представления частного двух интегралов первого рода в виде бесконечных произведений. Здесь же путем сравнения различных представлений для равных произведений выводятся новые соотношения между соответствующими интегралами.

Например: если $a + c = b + e = s$, то

$$\frac{\int_0^1 x^{a-1}dx(1-x)^{c-1}}{\int_0^1 x^{b-1}dx(1-x)^{e-1}} = \frac{\int_0^1 x^{a-1}dx(1-x)^{s-a-b-1}}{\int_0^1 x^{b-1}dx(1-x)^{s-a-b-1}}$$ [14, с. 256].

Указанные результаты Эйлер позже включил в первый том своего «Интегрального исчисления» (1768) [15].

В записной книжке **№ 132** (**л. 157 об.**) из соотношения (3) выводится разложение логарифма B-функции в ряд:

$$\ln P = \ln\frac{1}{s} + \ln\frac{k+s}{k} + \ln\frac{2}{s+1} + \ln\frac{k+s+1}{k+1} + \ln\frac{3}{s+2} + \ldots,$$

где $P = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{k-1}dx$.

Отсюда Эйлер получил разложение частной производной для логарифма B-функции:

$$\frac{\partial P}{P\partial s} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{k+s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{k+s+1} - \frac{1}{s+2} + \ldots.$$

Здесь же, разложив подынтегральную функцию по формуле бинома Ньютона, а затем почленно проинтегрировав, Эйлер представил B-функцию в виде ряда:

$$P = \frac{1}{s} - \frac{(k-1)}{(s+1)} + \frac{(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot (s+2)} - \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{1\cdot 2\cdot 3(s+3)} + \ldots.$$

Отсюда он выводит представление частной производной для логарифма B-функции в виде частного двух рядов:

$$\frac{\partial P}{P\partial s} = \frac{-\frac{1}{s^2} + \frac{(k-1)}{(s+1)^2} - \frac{(k-1)(k-2)}{1\cdot 2(s+2)^2} + \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{1\cdot 2\cdot 3(s+3)^2} - \ldots}{\frac{1}{s} - \frac{(k-1)}{(s+1)} + \frac{(k-1)(k-2)}{1\cdot 2(s+2)} - \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{1\cdot 2\cdot 3(s+3)} + \ldots}.$$

Рассмотренные результаты были частично опубликованы лишь в 1776 г. в мемуаре E499 («Об интегральной формуле $\int \frac{lxdx}{\sqrt{1-xx}}$, где переменная изменяется от $x = 0$ до $x = 1$» [16]) .

Эйлер установил также различные соотношения между эйлеровыми интегралами первого рода и тригонометрическими функциями. Например, в записной книжке **№ 131** (датируемой 1736—1740 гг.) на **л. 236 об**. содержится следующее:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-m-1}}{1+x^n} dx = \frac{\pi}{n \sin \frac{m}{n}\pi},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1-x^n} dx = \frac{\pi}{n tg \frac{m}{n}\pi}.$$

В июне 1742 г. эти результаты Эйлер сообщил в письме к Гольдбаху [17, с.108], а через год опубликовал в мемуаре E59 («Теоремы, выражающие интегральные формулы через квадратуры кругов», 1743 [18]).

В этом же мемуаре, используя формулу (2), а также разложения в бесконечные произведения для тригонометрических функций, которые были получены ещё во «Вве-

дении в анализ бесконечно малых» [19, гл. XI, с. 170], Эйлер выводит формулы:

$$\sin\frac{m}{2n}\pi = \frac{\int_0^1 z^{n-m-1}dz(1-z^{2n})^{-\frac{1}{2}}}{\int_0^1 z^{n-m-1}dz(1-z^{2n})^{\frac{-2n+m}{2n}}},$$

$$\cos\frac{m}{2n}\pi = \frac{\int_0^1 z^{m-1}dz(1-z^{2n})^{-\frac{1}{2}}}{\int_0^1 z^{m-1}dz(1-z^{2n})^{\frac{-n-m}{2n}}},$$

$$tg\frac{m}{2n}\pi = \frac{\int_0^1 z^{n-1}dz(1-z^{2n})^{\frac{-n-m}{2n}}}{\int_0^1 z^{n-1}dz(1-z^{2n})^{\frac{m-2n}{2n}}}.$$

Эти же выражения имеются в записной книжке **№ 132** (датируемой 1740—1744 гг.) на **л. 108.**

Здесь Эйлер использовал в основном первую интегральную формулу для B-функции. Однако ему была известна и вторая интегральная формула:

$$B(q, p-q+1) = \int_0^\infty \frac{z^{q-1}dz}{(1+z)^{p+1}},$$

которую он получил из интеграла $\int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-q}dx$, применив подстановку $x = \frac{z}{1+z}$.

В записной книжке **№ 131** (датируемой 1736—1740 гг.) на **л. 187** встречается формула: $\int_0^1 \frac{x^{n-1}dx}{(1-x)^n} = \frac{\pi}{\sin n\pi}$, которая выражает важное свойство B-функции и в настоящее время записывается в виде:

$$B(a;1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

В той же записной книжке на **л. 242** содержится и другая ее запись:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}. \qquad (4)$$

Полученные формулы позволяют вычислять значения B-функции в случае, когда сумма её аргументов равна единице.

Это свойство B-функции было опубликовано в § 30—31 мемуара E60 («О нахождении интегралов, если после интегрирования изменяются пределы изначальной величины», 1743 [20]). Здесь же в § 34, используя равенство (4) и то, что

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^k}=\frac{(k-1)q-p}{(k-1)q}\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^{k-1}},$$

Эйлер, взяв последовательно k равным 2, 3, 4, 5, etc., установил следующее соотношение:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^k}=$$

$$=\frac{(q-p)(2q-p)(3q-p)...((k-1)q-p)}{q\cdot 2q\cdot 3q...(k-1)q}\cdot\frac{\pi}{q\sin\frac{p\pi}{q}}. \qquad (5)$$

Этот результат имеется в записной книжке **№ 131**, датируемой 1736—1740 гг.) на **л. 242 об**. Найденные заметки, очевидно, являются черновым наброском к мемуару E60 [20].

Позже в мемуаре E588 («Нахождение интегральной формулы $\int\frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^n}$ в случае, когда после интегрирования $x=\infty$», 1785 [21]) Эйлер обобщил формулу (5) на случай, когда k является дробным числом, и в результате получил:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^k} = \frac{\pi}{q\sin\frac{p\pi}{q}} \cdot \frac{\int_0^1 y^{kq-p-1}(1-y^q)^{\frac{p}{q}-1}}{\int_0^1 y^{q-p-1}(1-y^q)^{\frac{p}{q}-1}}.$$

В мемуаре E254 [14] (§ 56—57) Эйлер перечислил известные ему представления тригонометрических функций через интегралы первого рода.

Например, $\sin\frac{m}{n}\pi$ равен:

$$I.\ \frac{\pi}{n\int_0^\infty \frac{y^{m-1}dy}{1+y^n}};\quad II.\ \frac{\int_0^\infty y^{\frac{1}{2}n-m-1}dy}{2\int_0^\infty \frac{y^{n-2m-1}dy}{1+y^n}};\quad III.\ \frac{\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}n-1}dy}{(1+y^n)^{\frac{m}{n}}}}{\int_0^\infty \frac{y^{n-m-1}dy}{\sqrt{1+y^n}}};$$

$$IV.\ \frac{\int_0^\infty \frac{y^{m-\frac{1}{2}n-1}dy}{(1+y^n)^{\frac{m}{n}}}}{\int_0^\infty \frac{y^{m-\frac{1}{2}n-1}dy}{\sqrt{1+y^n}}};\quad V.\ \frac{\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}n-1}dy}{(1+y^n)^{1-\frac{m}{n}}}}{\int_0^\infty \frac{y^{m-1}dy}{\sqrt{1+y^n}}};\quad VI.\ \frac{\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}dy}{(1+y^n)^{1-\frac{m}{n}}}}{\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}n-m-1}dy}{\sqrt{1+y^n}}}.$$

Интересное разложение функции *B(n–1; n)* в ряд вида

$$\int_0^1 x^n(1-x)^{n-1}dx = \frac{1}{n}\cos n\varphi - \frac{2n}{1(n+1)}\cos(n+1)\varphi +$$

$$+\frac{2n(2n+1)}{1\cdot 2(n+2)}\cos(n+2)\varphi - \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{1\cdot 2\cdot 3(n+3)}\cos(n+3)\varphi + \ldots$$

выведено в мемуаре E555 («О замечательной пользе метода интерполяции в учении о рядах», 1783 [30]).

В записной книжке **№ 134**, датируемой 1749—1757 гг., на **л. 169 об. — 171** рассмотрена задача о сведении эйлеровых интегралов первого рода к наименьшему числу основных видов.

Для её решения Эйлер использовал установленные им свойства интеграла первого рода $\left(\frac{p}{q}\right)=\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$:

1) свойство симметричности относительно своих аргументов:

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right); \tag{6}$$

2) если один из аргументов p или q равен n, то

$$\left(\frac{n}{q}\right)=\left(\frac{q}{n}\right)=\frac{1}{q},$$
$$\left(\frac{p}{n}\right)=\left(\frac{n}{p}\right)=\frac{1}{p}; \tag{7}$$

3) в случае, когда $p + q = n$, выполняется

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{p\pi}{n}}; \tag{8}$$

4) все интегралы $\left(\frac{p}{q}\right)$, где p или q больше n, можно при помощи формулы

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p-n}{p-n+q}\left(\frac{p-n}{q}\right)=\frac{p-n}{p-n+q}\left(\frac{q}{p-n}\right)=$$
$$=\frac{(p-n)}{(p+q-n)}\cdot\frac{(q-n)}{(q+p-2n)}\cdot\left(\frac{q-n}{p-n}\right); \tag{9}$$

свести к таким, у которых эти аргументы будут принимать одно значение из ряда чисел: 1, 2, ... n;

5) для всех значений переменных p, q, r, s, при которых определены соответствующие интегралы, справедливы следующие равенства:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right) \tag{10}$$

и $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{s}\right)\left(\frac{p+r+s}{q}\right)=$

$$=\left(\frac{p}{s}\right)\left(\frac{p+s}{q}\right)\left(\frac{p+q+s}{r}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{s}\right)\left(\frac{q+r+s}{p}\right). \quad (11)$$

На основе этих свойств Эйлер в мемуаре E321 («Рассмотрение интегральной формулы $\int x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}dx$, где после интегрирования полагается $x = 0$» (1762) 1766) [22, § 10, с. 278—281], а также в первом томе «Интегрального исчисления» [15, гл. IX, § 387, с. 218—219] выводит алгоритм для выражения интеграла $\left(\frac{p}{q}\right)$ в случае, когда p, q и n — натуральные, через комбинации основных видов интегралов. У Эйлера их три:

1. $\left(\frac{n}{p}\right)$, где $1 \le p \le n$; 2. $\left(\frac{n-p}{p}\right)$, где $1 \le p \le \frac{n}{2}$;

3. $\left(\frac{n-(p+1)}{p}\right)$, где $1 \le p \le \frac{n-1}{2}$.

Значения интегралов первого и второго вида находятся по соответствующим формулам:

$$\left(\frac{n}{p}\right)=\left(\frac{p}{n}\right)=\frac{1}{p};$$

$$\left(\frac{n-p}{p}\right)=\left(\frac{p}{n-p}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{p\pi}{n}}.$$

Для вычисления значений интегралов третьего вида Эйлер в § 48—53 мемуара E640 («Представление величины интегральной формулы $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, где переменная изменяется от $x = 0$ до $x = 1$» (1787), 1789 [23]) предлагает

разбить отрезок интегрирования [0; 1] на две части: от 0 до $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ и от $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ до 1. Затем во втором интеграле вместо переменной интегрирования x он вводит новую переменную y, которая определяется формулой $y^n = 1 - x^n$, и в результате получает:

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[n]{2}}} \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt[n]{2}}} \frac{y^{q-1}dy}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{n-p}}}. \quad (12)$$

Разлагая подынтегральные выражения по формуле бинома Ньютона и почленно интегрируя, Эйлер получает ряды, которые хорошо сходятся для обоих интегралов, стоящих в правой части равенства (12). С помощью этих рядов и находятся значения искомых интегралов.

На **л. 170 об. — 171** записной книжки **№ 134**, датируемой 1749—1757 гг., приведены таблицы, в которых интегралы вида $\left(\frac{p}{q}\right) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ при $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ выражены через интегралы основных видов. Эти таблицы (до $n = 9$ включительно) Эйлер позже опубликовал в E321 [22] и первом томе «Интегрального исчисления», а в мемуаре «Дополнение к работе о величине интегральной формулы $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, где переменная изменяется от $x = 0$ до $x = 1$» (1776) [24] привел таблицу и для $n = 10$.

Отметим, что случай $n = 1$, когда интеграл $\left(\frac{p}{q}\right)$ равен B(p, q), не рассмотрен, так как здесь Эйлер брал p, q и n — натуральные, причем в силу свойства (9) рассматривал только те случаи, когда p и q не превосходят n.

Однако найденный им алгоритм позволяет вычислять значения B-функции для положительных рациональных аргументов, так как $B\left(\frac{p}{n},\frac{q}{n}\right)=n\left(\frac{p}{q}\right)$.

В § 28 мемуара E768 («Об интерполировании последовательности биномиальных коэффициентов с дробными индексами» (1781) 1824 [25]) Эйлер сформулировал важное утверждение, которое, по сути, является критерием сходимости интегралов первого рода: «Интегральная формула $\int x^{q-1}dx(1-x)^{p-q}$, взятая от $x = 0$ до $x = 1$, имеет величину, если $q > 0$ и $p - q > -1$» [25, с. 267].

В этом же мемуаре он находит представление для биномиальных коэффициентов в интегральном виде $C_p^q=\frac{1}{q\int\limits_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-q}dx}$ и показывает, что функция $y(q,p)=\frac{1}{q\int\limits_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-q}dx}$ имеет свое наибольшее значение M в случае, когда второй аргумент в два раза больше первого, т.е. $p = m$, $q = \frac{1}{2}m$ при m — натуральном. При этом:

1) если m — четное , т.е. $m = 2i$, где $i \in N$, то

$$M=\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14\cdot\ldots\cdot(4i-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot i};$$

2) если m — нечетное , т.е. $m = 2i + 1$, где $i \in N \cup \{0\}$, то $M=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32\cdot\ldots\cdot 8i}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2i+1)}$.

В главе XI второго тома «Интегрального исчисления» (1769) [15] Эйлер установил, что интеграл

$$\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du,$$

удовлетворяющий гипергеометрическому дифференциальному уравнению

$$x(1-x)d^2y+\left[c-(a+b+1)x\right]dydx-abydx^2=0,$$

разлагается в ряд вида

$$B(b,c-b)\left[1+\frac{ab}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2+\ldots\right].$$

Таким образом, здесь Эйлер показал связь бета-функции с гипергеометрической функцией. В XIX в. к аналогичным результатам пришел К. Ф. Гаусс (1777—1855).

Все работы Эйлера, связанные с вопросами теории *B*-функции, можно условно разделить на две группы. В первую входят мемуары 1729—1768 гг., где выражение $\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ рассматривается только в качестве интеграла первого рода, устанавливаются различные соотношения между такими интегралами и тем самым накапливаются отдельные факты, которые затем легли в основу теории *B*-функции. Основные результаты, касающиеся теории *B*-функции, полученные в этот период, Эйлер опубликовал в «Интегральном исчислении».

Во второй период (после 1768 г.) выражение $\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ выступает уже как аналитический способ задания особого рода функции, которая тесным образом связана с *B*-функцией. В это время Эйлер не только получил многие положения теории *B*-функции в действительной области, но и сделал попытку распространить её на комплексную область. Об этом свидетельствует мемуар E745 («О бесконечных дробях Валлиса» [26]), сданный в печать в 1780 г. Здесь, решая задачу о выражении членов последовательности *A, B, C, D, ...*, где

$$AB = f^2 + c;$$
$$BC = (f + a)^2 + c;$$
$$CD = (f + 2a)^2 + c;$$
$$DE = (f + 3a)^2 + c; \ldots$$

через известные f и a, Эйлер получил:

1) если $c = -b^2$, то

$$A = (f - b\sqrt{-1}) \int_0^1 \frac{x^{f+a-1-b\sqrt{-1}}\,dx}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int_0^1 \frac{x^{f-1+b\sqrt{-1}}\,dx}{\sqrt{1-x^{2a}}};$$

2) если $c = b^2$, то

$$A = (f + b\sqrt{-1}) \int_0^1 \frac{x^{f+a-1+b\sqrt{-1}}\,dx}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int_0^1 \frac{x^{f-1-b\sqrt{-1}}\,dx}{\sqrt{1-x^{2a}}}.$$

Таковы основные опубликованные результаты Эйлера по теории B-функции.

Перейдем теперь к описанию заметок из записных книжек Эйлера, касающихся этой теории. Они позволят глубже вникнуть в рассуждения ученого, понять, каким путем были получены многие из перечисленных выше результатов Эйлера, а также уточнить датировку его научных открытий в указанной области математического анализа.

Записная книжка № 131 (1736—1740 гг.).

На **л. 9 об.** содержится формула перехода от интеграла $\int_0^1 x^{\mu}(1-x^n)^k\,dx$ к $\int_0^1 x^{\mu-n}(1-x^n)^k\,dx$:

$$\int_0^1 x^{\mu}(1-x^n)^k\,dx = \frac{\mu - n + 1}{\mu + nk + 1} \int_0^1 x^{\mu-n}(1-x^n)^k\,dx.$$

Она является одной из шести формул, выражающих соотношения между интегралами первого рода, которые имеются на **л. 11**:

1. $$\int_0^1 x^m(1-x^n)^k\,dx = \frac{nk}{m+nk+1} \int_0^1 x^m(1-x^n)^{k-1}\,dx;$$

2. $\int_0^1 x^m(1-x^n)^{k-1}dx = \frac{m+nk+1}{nk}\int_0^1 x^m(1-x^n)^k dx$;

3. $\int_0^1 x^m(1-x^n)^k dx = \frac{nk}{m+1}\int_0^1 x^{m+n}(1-x^n)^{k-1}dx$;

4. $\int_0^1 x^{m+n}(1-x^n)^{k-1}dx = \frac{m+1}{nk}\int_0^1 x^m(1-x^n)^k dx$;

5. $\int_0^1 x^m(1-x^n)^k dx = \frac{m-n+1}{m+nk+1}\int_0^1 x^{m-n}(1-x^n)^k dx$;

6. $\int_0^1 x^{m-n}(1-x^n)^k dx = \frac{m+nk+1}{m-n+1}\int_0^1 x^m(1-x^n)^k dx$.

Отметим, что равенства с четными номерами являются следствиями из соответствующих равенств с нечетными номерами.

Эти формулы позволяют установить некоторые соотношения между значениями B-функции. Так, из первого равенства получается одно из свойств B-функции:

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1),$$

позволяющее уменьшить второй аргумент.

Из соотношений 1 и 5 следует, что

$$\frac{nk}{m+nk+1}\int_0^1 x^m(1-x^n)^{k-1}dx = \frac{m-n+1}{m+nk+1}\int_0^1 x^{m-n}(1-x^n)^k dx.$$

Отсюда при $n = 1$ имеем:

$$\frac{k}{m+k+1}\int_0^1 x^m(1-x)^{k-1}dx = \frac{m}{m+k+1}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^k dx,$$

что соответствует свойству симметричности B-функции относительно своих аргументов.

Формулы 1—6 являются следствием из равенств для интегралов от биномиальных дифференциалов, которые приведены на **л. 11 об.**:

1. $\int x^m(a+bx^n)^{k-1}dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^k}{nka} + \frac{m+nk+1}{nka}\int x^m(a+bx^n)^k dx;$

2. $\int x^m(a+bx^n)^{k+1}dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{k+1}}{m+nk+n+1} + \frac{(k+1)na}{m+nk+n+1}\int x^m(a+bx^n)^k dx;$

3. $\int x^{m+n}(a+bx^n)^{k-1}dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^k}{nkb} - \frac{(m+1)}{nkb}\int x^m(a+bx^n)^k dx;$

4. $\int x^{m-n}(a+bx^n)^{k+1}dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{k+1}}{m-n+1} - \frac{nb(k+1)}{m-n+1}\int x^m(a+bx^n)^k dx;$

5. $\int x^{m+n}(a+bx^n)^k dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{k+1}}{(m+nk+n+1)b} - \frac{a(m+1)}{(m+nk+n+1)b}\int x^m(a+bx^n)^k dx;$

6. $\int x^{m-n}(a+bx^n)^k dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{k+1}}{(m-n+1)a} - \frac{(m+nk+1)b}{(m-n+1)a}\int x^m(a+bx^n)^k dx.$

Эти равенства позволяют понижать показатель степени выражения, стоящего под интегралом, и таким образом сводить интегралы $\int x^{m\pm\alpha n}(a+bx^n)^{k\pm\beta}dx$ к $\int x^m(a+bx^n)^k dx$.

На **л. 95 об.** Эйлер перечислил все случаи, когда выражение $x^m(a+bx^n)^k dx$ интегрируется в конечном виде.

Содержание этих заметок позволяет установить, что они являются подготовительными записями к «Интегральному исчислению» [15].

На **л. 9 об.** приводится следующее разложение:

$$\frac{E^2}{2A}=\frac{1}{m+1}-\frac{k(2m+2)}{(2m+nk+n+2)(m+n+1)}+$$

$$+\frac{k(k-1)(2m+2)(2m+n+2)}{1\cdot 2(2m+nk+n+2)(2m+nk+2n+2)(m+2n+1)}-etc.,$$

где $E=\int_0^1 x^m(1-x^n)^k dx$, $A=\int_0^1 x^{2m+1}(1-x^n)^k dx$.

Далее на **л. 10—11** рассматриваются примеры этого разложения при $n = 2$, $k=-\frac{1}{2}$ и

1) $m = 0$, тогда $A=\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=1, E=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$ и

$$\frac{E^2}{2A}=\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}+etc.;$$

2) $m = 1$, тогда $A=\int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{3}$, $E=\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=1$ и

$$\frac{E^2}{2A}=\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 5\cdot 7}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 7\cdot 9}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 9\cdot 11}+etc.,$$

отсюда, после умножения обеих частей на 2/3, следует

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 11}+etc.;$$

3) $m = 2$, тогда $A=\int_0^1 \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}$, $E=\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{4}$

и

$$\frac{E^2}{2A}=\frac{\pi^2}{128}=\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3^2\cdot 5}+\frac{2\cdot 3}{3\cdot 5^2\cdot 7}+\frac{3\cdot 4}{5\cdot 7^2\cdot 9}+\frac{4\cdot 5}{7\cdot 9^2\cdot 11}+etc.;$$

4) $m=\frac{\nu}{2}$, тогда $A=\int_0^1 \frac{x^{\nu+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $E=\int_0^1 \frac{x^{\frac{\nu}{2}}dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и

$$\frac{E^2}{2A}=\frac{2}{\nu+2}+\frac{2\cdot1(\nu+2)}{2(\nu+3)(\nu+6)}+\frac{1\cdot2\cdot3(\nu+2)(\nu+4)}{2\cdot4(\nu+3)(\nu+5)(\nu+10)}+$$

$$+\frac{2\cdot1\cdot3\cdot5(\nu+2)(\nu+4)(\nu+6)}{2\cdot4\cdot6(\nu+3)(\nu+5)(\nu+7)(\nu+14)}+etc.$$

В частности при $\nu = -1$

$$A=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad E=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}\ \text{и}$$

$$\frac{E^2}{4A}=1+\frac{1^2}{2^2\cdot5}+\frac{1^2\cdot3^2}{2^2\cdot4^2\cdot9}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot13}+etc.$$

Эти разложения Эйлер нигде не опубликовал, поэтому непонятно, откуда возникла эта задача и почему он рассмотрел именно разложение $\frac{E^2}{2A}$.

На **л. 11—11 об.** сформулировано утверждение: ряд следующего вида

$$\frac{1}{a}+\frac{c\cdot b\cdot p}{1(a+n)(b+nk+n)}+$$

$$+\frac{c(c-1)b(b+n)p^2}{1\cdot2(a+2n)(b+nk+n)(b+nk+2n)}+etc.$$

имеет сумму, равную $\dfrac{\int_0^1 x^{b-a-1}(1-x^n)^k dx\int_0^1 x^{a-1}(1+px^n)^c dx}{\int_0^1 x^{b-1}(1-x^n)^k dx}$.

Из этого утверждения на **л. 95 об.** Эйлер, положив $c=-\frac{1}{n}, p=-p, a=1, k=-\frac{n-1}{n}, b=n$, выводит, что сумма ряда

$$\frac{1}{1^2}+\frac{p}{(1+n)^2}+\frac{p^2}{(1+2n)^2}+\frac{p^3}{(1+3n)^2}+etc.$$

равна $\dfrac{\int_0^1\frac{x^{n-2}dx}{(1-x^n)^{\frac{n-1}{n}}}}{\int_0^1\frac{dx}{(1-px^n)^{\frac{1}{n}}}}$.

Эти результаты тоже не были опубликованы.

Как показывают приведенные фрагменты записных книжек, в исследованиях Эйлера ряды и интегралы находятся в тесной взаимосвязи, что позволяет ему выражать одни через другие.

На **л. 170** приводится разложение неопределенного интеграла $\int x^m(1-x)^n dx$ в ряд

$$-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}+\frac{m(1-x)^{n+2}}{1(n+2)}-\frac{m(m-1)(1-x)^{n+3}}{1\cdot 2(n+3)}+etc., \quad (13)$$

откуда, если взять пределы интегрирования от 0 до 1, получим разложение для B-функции.

Это разложение было получено следующим образом

$$\int x^m(1-x)^n dx=\left[\begin{matrix}1-x=z\\ dx=-dz\end{matrix}\right]=-\int z^n(1-z)^m dz=$$

$$=-\int z^n\left(1-\frac{m}{1}z+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}z^2-etc.\right)dz=-\frac{z^{n+1}}{n+1}+\frac{m}{1}\frac{z^{n+2}}{n+2}-$$

$$-\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{z^{n+3}}{n+3}+etc.=-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}+\frac{m}{1}\frac{(1-x)^{n+2}}{n+2}-$$

$$-\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{(1-x)^{n+3}}{n+3}+etc.$$

Используя разложение (13), Эйлер нашел, что выражение

$$s=\frac{-ax^p}{(1-x)^{n+1}}\int x^m(1-x)^n dx$$

при $x = 1$ равно дроби $\frac{a}{n+1}$.

Само разложение интеграла первого рода в ряд Эйлер вывел на **л. 226**:

$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x^n)^s dx=1-\frac{s}{(r+n)}+\frac{s(s-1)}{1\cdot 2(r+2n)}-etc.$$

Здесь же получено разложение в ряд и для частного таких интегралов:

$$\frac{\int_0^1 x^{m-1}(1-x^n)^{k+q}dx}{\int_0^1 x^{m-1}(1-x^n)^k dx} = 1 - \frac{qm}{(m+(k+1)n)} +$$

$$+ \frac{q(q-1)m(m+n)}{1\cdot 2(m+(k+1)n)(m+(k+2)n)} - etc.$$

На этом же листе Эйлер отмечает, что интеграл

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^n)^{\frac{-m-n}{n}} = \infty .$$

Это утверждение справедливо, так как при $-\frac{m}{n} < 0$ интеграл $\int_0^1 x^{m-1}(1-x^n)^{\frac{-m-n}{n}} = \frac{1}{n}B\left(\frac{m}{n};-\frac{m}{n}\right)$ расходится.

Далее на **л. 226** содержится следующее утверждение: интеграл $\int_0^1 x^{r-1}(1-x^n)^s dx$ имеет конечную величину, если $-s < \frac{r+n}{n}$.

Заметим, что оно является следствием из признака сходимости для B-функции: интеграл

$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x^n)^s dx = \frac{1}{n}B\left(\frac{r}{n};s+1\right)$$

сходится, если $\frac{r}{n} > 0$ и $s > -1$.

Отсюда если интеграл

$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x^n)^s dx = \frac{1}{n}B\left(\frac{r}{n};s+1\right)$$

сходится, то $-s < \frac{r+n}{n}$, что и соответствует условию, имеющемуся у Эйлера.

Заметки на **л. 184 об.** и **186 об.** содержат представление частного интегралов первого рода в виде бесконечного произведения:

$$\frac{\int_0^1 x^p(1-x^n)^k\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x^n)^k\,dx} =$$

$$= \frac{(m+1)}{(p+1)}\frac{(p+kn+n+1)}{(m+nk+n+1)}\frac{(p+mk+2n+1)}{(m+nk+2n+1)}\frac{(m+2n+1)}{(p+2n+1)}etc.$$

или при $m + 1 = a$; $p + 1 = b$; $nk + n = c$.

$$\frac{\int_0^1 x^{b-1}(1-x^n)^{\frac{c-n}{n}}\,dx}{\int_0^1 x^{a-1}(1-x^n)^{\frac{c-n}{n}}\,dx} =$$

$$= \frac{a(b+c)(a+n)(b+c+n)(a+2n)(b+c+2n)}{b(a+c)(b+n)(a+c+n)(b+2n)(a+c+2n)}etc.$$

Отсюда Эйлер получил разложение интеграла первого рода в виде бесконечного произведения:

$$\int_0^1 x^{b-1}(1-x^n)^{\frac{c-n}{n}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{c}\frac{n(b+c)2n(b+c+n)3n(b+c+2n)}{b(n+c)(b+n)(2n+c)(b+2n)(3n+c)}etc.$$

Отметим, что данные заметки являются черновым наброском к мемуару E122 [12], в котором и были опубликованы эти результаты.

Далее на **л. 184 об. — 185** рассматриваются примеры этих разложений и дается представление отношения интегралов первого рода в виде непрерывных дробей:

1) при $a = 1; b = 2; n = 2; c = 1$

$$\frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8}etc. = \frac{\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{2}{\pi}$$ и

$$2\frac{\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + etc.}}}$$;

2) при $a = 3; b = 1; c = 2; n = 4$

$$\frac{3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot11\cdot11}{1\cdot5\cdot5\cdot9\cdot9\cdot13}etc. = \frac{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}}{\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{9}{4 + \frac{25}{4 + etc.}}}$$ и др.

Здесь же Эйлер заключает, что

$$n + \frac{1}{2n + \frac{9}{2n + \frac{25}{2n + \frac{49}{2n + etc.}}}} = (n+1)\frac{\int_0^1 \frac{x^{\frac{n+1}{2}}dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int_0^1 \frac{x^{\frac{n-1}{2}}dx}{\sqrt{1-x^2}}}$$.

В дальнейшем эти идеи Эйлер оформил в стройную теорию[1], которую опубликовал в E123 («Наблюдения о бесконечных дробях» (1739), 1750 [29]).

На примере этих заметок видно, как установленные связи между рядами, произведениями, интегралами и непрерывными дробями позволяли Эйлеру находить новые пути решения различных задач.

[1] О непрерывных дробях в исследованиях Эйлера см. статьи А. Н. Хованского [27] и В. Д. Павлидис (Горловой) [28].

Используя формулу разложения в бесконечное произведение частного двух интегралов первого рода, Эйлер на **л. 201** получил:

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{(1-x^b)^{1-c}} \cdot \int_0^1 \frac{x^{a+bc-1}dx}{(1-x^b)^{1-\nu}} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{(1-x^b)^{1-\nu}} \cdot \int_0^1 \frac{x^{a+b\nu-1}dx}{(1-x^b)^{1-c}}.$$

Кроме того, здесь имеются следующие равенства:

$$\frac{b+1}{c+1} = \frac{\int_0^1 x^{b\left(\frac{1}{2}-n\right)-1}\left(1-x^b\right)^c dx \cdot \int_0^1 x^{b\left(\frac{3}{2}+c-n\right)-1}\left(1-x^b\right)^{-\frac{1}{2}+n} dx}{\int_0^1 x^{b\left(\frac{1}{2}+n\right)-1}\left(1-x^b\right)^h dx \cdot \int_0^1 x^{b\left(\frac{3}{2}+h+n\right)-1}\left(1-x^b\right)^{-\frac{1}{2}-n} dx},$$

$$\frac{(b+1)(h-n+1)}{(c+1)(c+n+1)} = \frac{\int_0^1 x^{b(1+n)-1}\left(1-x^b\right)^c dx \cdot \int_0^1 x^{b(1-n)-1}\left(1-x^b\right)^{c+n} dx}{\int_0^1 x^{b(1-n)-1}\left(1-x^b\right)^h dx \cdot \int_0^1 x^{b(1+n)-1}\left(1-x^b\right)^{h-n} dx},$$

$$\frac{f}{a} = \frac{\int_0^1 x^{a-1}\left(1-x^b\right)^{-\frac{1}{2}+n} dx \cdot \int_0^1 x^{a+b\left(\frac{1}{2}+n\right)-1}\left(1-x^b\right)^{-\frac{1}{2}-n} dx}{\int_0^1 x^{f-1}\left(1-x^b\right)^{-\frac{1}{2}-n} dx \cdot \int_0^1 x^{f+b\left(\frac{1}{2}-n\right)-1}\left(1-x^b\right)^{\frac{1}{2}+n} dx}.$$

Отсюда Эйлер выводит общую теорему об интерполяционном члене особого вида:

если $\frac{dx}{\left(1-x^q\right)^{\frac{q-p}{q}}} = Xdx$ и $\frac{x^{a-1}dx}{\left(1-x^{q^2}\right)^{\frac{q-p}{q}}} = Ydx$, то

$$\frac{a(a+g)(a+2g)(a+3g)\ldots(a+(p-1)g)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot p} g^{q-p} =$$

$$= \frac{\int_0^1 Xdx}{\int_0^1 Ydx} \cdot \frac{\int_0^1 xXdx}{\int_0^1 x^g Ydx} \cdot \frac{\int_0^1 x^2 Xdx}{\int_0^1 x^{2g} Ydx} \cdot \frac{\int_0^1 x^3 Xdx}{\int_0^1 x^{3g} Ydx} \cdot \ldots \cdot \frac{\int_0^1 x^{q-1} Xdx}{\int_0^1 x^{(q-1)g} Ydx}.$$

Содержание и примерная датировка (до 1739 г.) этой заметки позволяют сделать вывод, что она является фрагментом черновика к мемуару E122 [12].

Заметка на **л. 187** содержит равенство

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}dx}{(1-x)^n} = \frac{\pi}{\sin n\pi},$$

которое устанавливает связь между B-функцией и тригонометрической функцией синус. Найденное равенство позволяет вычислить значение B-функции в случае, когда сумма её аргументов равна единице.

Этот же факт, но в другой форме, Эйлер привел на **л. 242**:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Кроме того, эта заметка свидетельствует о том, что уже в то время (до 1740 г.) ему была известна вторая интегральная формула для B-функции.

На **л. 242 об.** Эйлер обобщает свой результат на интегралы вида $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^n)^{k+1}}$ и получает:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^n)^{k+1}} =$$

$$= \frac{(n-m)(2n-m)(3n-m)\ldots(kn-m)}{n\cdot 2n\cdot 3n\cdot\ldots\cdot kn}\cdot\frac{\pi}{n\sin\frac{m}{n}\pi}.$$

Форма рассуждения и содержание заметок позволяют заключить, что они являются черновыми к соответствующим фрагментам мемуара E60 [20].

В этой записной книжке содержатся и другие формулы, связывающие тригонометрические функции с интегралами первого рода. Так, на **л. 187** имеется равенство:

$$\int_0^1 \frac{x^{n-m-1}dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} : \int_0^1 \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} = tg\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2},$$

а на **л. 236 об.** следующие:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-m-1}}{1+x^n}dx = \frac{\pi}{n\sin\frac{m}{n}\pi},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}-x^{n-m-1}}{1-x^n}dx = \frac{\pi}{n\,tg\frac{m}{n}\pi}.$$

В июне 1742 г. эти результаты Эйлер сообщил в письме к Гольдбаху [17, с. 108], а через год опубликовал в мемуаре E59 [18].

Формула

$$\int_0^1 \left(-\ln x\right)^{\frac{p}{q}}dx = \sqrt[q]{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot p\left(\frac{2p}{q}+1\right)\left(\frac{3p}{q}+1\right)\left(\frac{4p}{q}+1\right)\ldots(p+1)}\cdot\int_0^1 (x-xx)^{\frac{p}{q}}dx\cdot\int_0^1 (x^2-x^3)^{\frac{p}{q}}dx\cdot\int_0^1 (x^3-x^4)^{\frac{p}{q}}dx\ldots\cdot\int_0^1 (x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}dx,$$

содержащаяся на **л. 242**, показывает связь между интегралами первого и второго рода. Её Эйлер опубликовал в мемуаре E19 [9, с. 19] и сообщил в письме к Гольдбаху от 8 января 1730 г. [17, с. 27].

Отсюда Эйлер вывел представление интеграла $\int_0^1 x^n\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{q}}dx$ через произведение интегралов первого рода:

$$\int_0^1 x^n\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{q}}dx = \sqrt[q]{\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots p}{(n+1)^{p+q}}\cdot\frac{p^{q-1}}{q}}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{p-q}{q}}dx\cdot\int_0^1 x^{2p-1}(1-x^q)^{\frac{p-q}{q}}dx\ldots\int_0^1 x^{(q-1)p-1}(1-x^q)^{\frac{p-q}{q}}dx$$

Записная книжка № 132 (1740—1744 гг.).

На **л. 77—78** Эйлер продолжает заниматься вопросом о связи между интегралами и непрерывными дробями. Так, на **л. 77 об.** получено следующее представление частного двух интегралов первого рода:

$$(p+2q-r)\frac{\int_0^1 \frac{y^{p+2q-1}dy}{\sqrt{1-y^{2r}}}}{\int_0^1 \frac{y^{p-1}dy}{\sqrt{1-y^{2r}}}} = m-r+$$

$$+\cfrac{P}{m+\cfrac{p(p+2q-r)(P+Q)}{2rR+\cfrac{(p+r)P(P+2Q)}{2r(R+2S)+\cfrac{(p+3r)(p+2q+2r)(P+2Q)(P+4Q)}{2r(R+3S)+etc.}}}},$$

где $P = pp + 2pq - pr - mm + mr$, $Q = 2r(p + q - m)$, $R = pp + 2pq - mp - mq + qr$, $S = r(p + r - m)$.

На **л. 78** рассматривается частный случай:

$$(q+s)\frac{\int_0^1 \frac{y^{q+r+s-1}dy}{\sqrt{1-y^{2r}}}}{\int_0^1 \frac{y^{r+s-q-1}dy}{\sqrt{1-y^{2r}}}} = s+\cfrac{q(r-q)}{2s+\cfrac{(r+q)(2r-q)}{2s+\cfrac{(2r+q)(2r-q)}{2s+\cfrac{(3s+q)(4r-q)}{2s+etc.}}}}.$$

Эти результаты были позже опубликованы в мемуаре E123 [29].

На **л. 108** Эйлер отмечает, что в **записной книжке № 131** на стр. 480 (**л. 242 об.**) он получил формулу для выражения интеграла $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^n)^{k+1}}$.

Применив подстановку $x = \frac{y}{(1-y^n)^{\frac{1}{n}}}$, он выводит из этой формулы, что

$$\int_0^1 \frac{y^{m-1}dy}{(1-y^n)^{\frac{m-nk}{n}}} = \frac{(n-m)(2n-m)(3n-m)\ldots(kn-m)}{n\cdot 2n\cdot 3n\ldots kn}\cdot\frac{\pi}{n\sin\frac{m}{n}\pi}.$$

Отсюда, после замены выражения

$$\frac{(n-m)(2n-m)(3n-m)\ldots(kn-m)}{n\cdot 2n\cdot 3n\ldots kn}$$

на $\dfrac{1}{\int_0^1 y^{n-m-1}(1-y^n)^k dy}$, устанавливается равенство:

$$\frac{\pi}{(n(k+1)-m)n\sin\frac{m}{n}\pi} = \int_0^1 y^{m-1}(1-y^n)^{\frac{nk-m}{n}} dy \cdot \int_0^1 y^{n-m-1}(1-y^n)^k dy \cdot$$

В частности, отмечает Эйлер, если $k = 0$, то $\int_0^1 y^{m-1}(1-y^n)^{-\frac{m}{n}} dy = \dfrac{\pi}{n\sin\frac{m}{n}\pi}$, а если $k = \dfrac{m}{n}$, то

$$\int_0^1 y^{n-m-1}(1-y^n)^{\frac{m}{n}} dy = \frac{m\pi}{n^2\sin\frac{m}{n}\pi} \cdot$$

Эта заметка, по-видимому, является подготовительной к § 36—37 мемуара E60 [20].

На **л. 156 об.** Эйлер в явном виде сформулировал свойство симметричности B-функции относительно своих аргументов:

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx .$$

Здесь же утверждается, что бесконечное произведение

$$s = \frac{p}{q}\cdot\frac{q+r}{p+r}\cdot\frac{p+1}{q+1}\cdot\frac{q+r+1}{p+r+1}\cdot\frac{p+2}{q+2}\cdot etc. \qquad (14)$$

можно представить следующим образом:

$$s = \frac{\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{q-1}dx}{\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{p-1}dx}; \quad s = \frac{\int_0^1 x^{-r-1}(1-x)^{p+r-1}dx}{\int_0^1 x^{-r-1}(1-x)^{q+r-1}dx};$$

$$s=\frac{\int_0^1 x^{p-q-1}(1-x)^{q-1}dx}{\int_0^1 x^{p-q-1}(1-x)^{q+r-1}dx};\quad s=\frac{\int_0^1 x^{q-p-1}(1-x)^{p+r-1}dx}{\int_0^1 x^{q-p-1}(1-x)^{p-1}dx}.$$

Отсюда следует соотношение:

$$\frac{\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{q-1}dx}{\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{p-1}dx}=\frac{\int_0^1 x^{p-q-1}(1-x)^{q-1}dx}{\int_0^1 x^{p-q-1}(1-x)^{q+r-1}dx}. \qquad (15)$$

В частности при $q = 0$, учитывая свойство симметричности B-функции относительно своих аргументов, Эйлер выводит:

$$\int_0^1 \frac{x^{r-1}dx}{1-x}=\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1-x}=\int_0^1 \frac{(1-x)^{p-1}}{x}dx.$$

Полученные здесь результаты были позже опубликованы в мемуаре E254 [14], а также в первом томе «Интегрального исчисления» [15].

В заметках на **л. 108, 156 об. — 157 об.** Эйлер получил большое количество формул, показывающих связь между интегралами первого рода и тригонометрическими функциями.

Так, на **л. 108**, сравнив разложения в бесконечные произведения для функций синуса и косинуса с соответствующим разложением для частного интегралов 1-го рода, он установил, что

$$\cos\frac{m}{n}q=\frac{\int_0^1 \frac{x^{m-1}dx}{(1-x^{2n})^{\frac{1}{2}}}}{\int_0^1 \frac{x^{m-1}dx}{(1-x^{2n})^{\frac{m+n}{2n}}}},\quad \sin\frac{m}{n}q=\frac{q}{n\int_0^1 \frac{x^{m-1}dx}{(1-x^{2n})^{\frac{m}{2n}}}}.$$

Далее на **л. 156 об.** Эйлер сопоставляет разложение

$$\frac{\sin n\pi}{n\pi} = \frac{1-n}{1}\cdot\frac{1+n}{1}\cdot\frac{2-n}{2}\cdot\frac{2+n}{2}\cdot\frac{3-n}{3}\cdot etc.$$

с (14) и получает, что они совпадают, если $p = 1 - n$, $q = 1$, $r = n$. Отсюда, учитывая равенство (15), он выводит:

$$\frac{\sin n\pi}{n\pi} = \frac{\int_0^1 x^{n-1}dx}{\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{-n}dx} = \frac{1}{n\int_0^1 \frac{x^{n-1}dx}{(1-x)^n}} \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{\sin n\pi} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}dx}{(1-x)^n};$$

$$\frac{\sin n\pi}{n\pi} = \frac{\int_0^1 x^{-n-1}dx}{\int_0^1 x^{-n-1}(1-x)^n dx} = -\frac{1}{n\int_0^1 \frac{(1-x)^n dx}{x^{n+1}}} \Rightarrow .$$

$$\frac{\pi}{\sin n\pi} = -\int_0^1 \frac{(1-x)^n dx}{x^{n+1}}.$$

Из этих соотношений следует:

$$\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi} = \frac{\int_0^1 \frac{x^{n-1}dx}{(1-x)^n}}{\int_0^1 \frac{x^{m-1}dx}{(1-x)^m}};$$

$$\frac{\sin 2n\pi}{\sin n\pi} = \frac{2\sin n\pi\cos n\pi}{\sin n\pi} = 2\cos n\pi = \frac{\int_0^1 \frac{x^{n-1}dx}{(1-x)^n}}{\int_0^1 \frac{x^{2n-1}dx}{(1-x)^{2n}}}.$$

По аналогичной схеме строятся рассуждения и на **л. 157—157 об.**:

$$1)\ \cos n\pi = \frac{\frac{1}{2}-n}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}+n}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\frac{3}{2}-n}{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\frac{3}{2}+n}{\frac{3}{2}}\cdot etc.,$$

$$s = \cos n\pi \text{ и } p = \frac{1}{2} - n, \quad q = \frac{1}{2}, \quad r = n,$$

следовательно,

$$\cos n\pi = \frac{\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx}{\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}dx}; \quad \cos n\pi = \frac{\int_0^1 x^{-n-1}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx}{\int_0^1 x^{-n-1}(1-x)^{n-\frac{1}{2}}dx};$$

$$2)\ tgn\pi = \frac{n}{\frac{1}{2}-n} \cdot \frac{1-n}{\frac{1}{2}+n} \cdot \frac{1+n}{\frac{3}{2}-n} \cdot \frac{2-n}{\frac{3}{2}+n} \cdot \frac{2+n}{\frac{5}{2}-n} \cdot etc.,$$

$$s = tgn\pi,\ p = n,\ q = \frac{1}{2} - n,\ r = \frac{1}{2},$$

следовательно,

$$tgn\pi = \frac{\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}dx}{\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{n-1}dx}; \quad tgn\pi = \frac{\int_0^1 x^{-\frac{3}{2}}(1-x)^{n-\frac{1}{2}}dx}{\int_0^1 x^{-\frac{3}{2}}(1-x)^{-n}dx};$$

$$tgn\pi = \frac{\int_0^1 x^{2n-\frac{3}{2}}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}dx}{\int_0^1 x^{2n-\frac{3}{2}}(1-x)^{-n}dx}; \quad tgn\pi = \frac{\int_0^1 x^{-2n-\frac{1}{2}}(1-x)^{n-\frac{1}{2}}dx}{\int_0^1 x^{-2n-\frac{1}{2}}(1-x)^{n-1}dx};$$

$$tgn\pi = \frac{\int_0^1 x^{n-\frac{1}{2}}(1-x)^{-2n-\frac{1}{2}}dx}{\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{-2n-\frac{1}{2}}dx};$$

$$3)\ \sin n\pi = \frac{n}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1-n}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1+n}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2-n}{\frac{3}{2}} \cdot etc.,$$

$$s = \sin n\pi,\ p = n, \quad q = \frac{1}{2}, \quad r = \frac{1}{2} - n,$$

следовательно,

$$\sin n\pi = \frac{\int_0^1 x^{-n-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx}{\int_0^1 x^{-n-\frac{1}{2}}(1-x)^{n-1}dx};\quad \sin n\pi = \frac{\int_0^1 x^{n-\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx}{\int_0^1 x^{n-\frac{3}{2}}(1-x)^{-n}dx}.$$

Форма рассуждений и содержание этой заметки позволяют установить, что данные записи являются подготовительными к мемуарам E59 [18] и E254 [14].

На **л. 157 об.** из разложения B-функции в бесконечное произведение Эйлер получает представление логарифма этой функции в виде ряда:

$$\ln P = \ln\frac{1}{s} + \ln\frac{k+s}{k} + \ln\frac{2}{s+1} + \ln\frac{k+s+1}{k+1} + \ln\frac{3}{s+2} + etc.,$$

где $P = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{k-1}dx$.

Отсюда, почленно продифференцировав обе части, он находит разложение частной логарифмической производной для B-функции:

$$\frac{\partial P}{P\partial s} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{k+s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{k+s+1} - \frac{1}{s+2} + etc.$$

Здесь же получено разложение B-функции в ряд:

$$P = \frac{1}{s} - \frac{(k-1)}{(s+1)} + \frac{(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot(s+2)} - \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{1\cdot 2\cdot 3(s+3)} + etc.$$

Из последнего соотношения Эйлер нашел представление частной логарифмической производной для B-функции в другом виде :

$$\frac{\partial P}{P\partial s} = \frac{-\frac{1}{s^2} + \frac{(k-1)}{(s+1)^2} - \frac{(k-1)(k-2)}{1\cdot 2(s+2)^2} + \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{1\cdot 2\cdot 3(s+3)^2} - etc}{\frac{1}{s} - \frac{(k-1)}{(s+1)} + \frac{(k-1)(k-2)}{1\cdot 2(s+2)} - \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{1\cdot 2\cdot 3(s+3)} + etc}.$$

Полученные здесь результаты Эйлер частично опубликовал спустя тридцать лет в мемуаре E499 [16].

Заметка на **л. 242 об.** посвящена решению задачи об интерполировании последовательности биномиальных коэффициентов:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

$$1 \; ; \; \frac{n}{1} \; ; \; \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} \; ; \; \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \; ; \; \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \; ;$$

etc.

Здесь утверждается, что член с индексом x имеет вид:

$$\frac{(1+x)(1+n-x)}{1(1+n)}\cdot\frac{(2+x)(2+n-x)}{2(2+n)}\cdot\frac{(3+n)(3+n-x)}{3(3+n)}\cdot etc.,$$

и если положить $x = m$, то

$$\frac{(1+m)(1+n-m)}{1(1+n)}\cdot\frac{(2+m)(2+n-m)}{2(2+n)}\cdot \\ \cdot\frac{(3+n)(3+n-m)}{3(3+n)}\cdot etc. = \frac{1}{m\int_0^1 z^{m-1}(1-z)^{n-m}\,dz}.$$

Таким образом, здесь в явном виде получено решение задачи об интерполировании этой последовательности. Подробно ход своих рассуждений Эйлер изложил в мемуаре E768 [25].

Заметка в **записной книжке № 133** (1749—1753) на **л. 141** повторяет результаты по теории интегралов первого рода, которые ранее были установлены в записных книжках **№ 131 (л. 186 об., 187, 242), № 132 (л. 108)**.

Записная книжка № 134 (1749—1757 гг.).

На **л. 157 об.** найдены значения интегралов $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$, где $n = 0, ..., 11$.

Далее, обозначив $(1-x^n)^{\frac{1}{n}}$ через y, Эйлер на **л. 169** сформулировал утверждение о том, что в интегралах первого рода можно поменять местами показатели степеней (p и q):

$$\frac{pq}{p+q}\int_0^1 x^{p-1}y^{q-n}dx=\frac{pq}{p+q}\int_0^1 x^{q-1}y^{p-n}dx\,.$$

Развивая эту идею, он вывел аналогичную «теорему» для произведения двух интегралов первого рода:

$$\int_0^1 x^{p-1}y^{q-n}dx\cdot\int_0^1 x^{p+q-1}y^{r-n}dx=\int_0^1 x^{q-1}y^{r-n}dx\cdot\int_0^1 x^{q+r-1}y^{p-n}dx=$$

$$=\int_0^1 x^{r-1}y^{p-n}dx\cdot\int_0^1 x^{p+r-1}y^{q-n}dx.$$

Доказательство этих утверждений следует из разложения соответствующих интегралов в бесконечные произведения. Например, если рассмотреть произведение трех интегралов первого рода, то получим:

$$\int_0^1 x^{p-1}y^{q-n}dx\cdot\int_0^1 x^{p+q-1}y^{r-n}dx\cdot\int_0^1 x^{p+q+r-1}y^{s-n}dx=$$

$$=\frac{p+q+r+s}{pqrs}\cdot\frac{n^3(p+q+r+s)}{(p+n)(q+n)(r+n)(s+n)}\cdot$$

$$\cdot\frac{8n^3(p+q+r+s+2n)}{(p+2n)(q+2n)(r+2n)(s+2n)}\cdot etc.$$

Здесь, отмечает Эйлер, буквы *p, q, r, s* можно поменять местами, и таким образом получается равенство:

$$\int_0^1 x^{p-1}y^{q-n}dx\cdot\int_0^1 x^{p+q-1}y^{r-n}dx\cdot\int_0^1 x^{p+q+r-1}y^{s-n}dx=$$

$$=\int_0^1 x^{p-1}y^{r-n}dx\cdot\int_0^1 x^{p+r-1}y^{s-n}dx\cdot\int_0^1 x^{p+q+s-1}y^{q-n}dx=$$

$$=\int_0^1 x^{p-1}y^{s-n}dx\cdot\int_0^1 x^{p+s-1}y^{q-n}dx\cdot\int_0^1 x^{p+q+s-1}y^{s-n}dx=$$

$$=\int_0^1 x^{q-1}y^{r-n}dx\cdot\int_0^1 x^{q+r-1}y^{s-n}dx\cdot\int_0^1 x^{q+r+s-1}y^{p-n}dx.$$

На **л. 169 об.** для обозначения интеграла

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}\,dx$$

Эйлер ввел специальный символ $\left(\frac{p}{q}\right)$. Используя новую символику, он записывает ранее установленные теоремы:

1) если $p+q=n$, то $\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{p\pi}{n}}$;

2) $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$;

3) если один из аргументов p или q равен n, то

$$\left(\frac{n}{q}\right)=\left(\frac{q}{n}\right)=\frac{1}{q},$$

$$\left(\frac{p}{n}\right)=\left(\frac{n}{p}\right)=\frac{1}{p};$$

4) интегралы $\left(\frac{p}{q}\right)$, где p или q больше n, при помощи формулы

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p-n}{p-n+q}\left(\frac{p-n}{q}\right)=\frac{p-n}{p-n+q}\left(\frac{q}{p-n}\right)=$$

$$=\frac{(p-n)}{(p+q-n)}\cdot\frac{(q-n)}{(q+p-2n)}\cdot\left(\frac{q-n}{p-n}\right)$$

сводятся к таким, у которых эти аргументы будут принимать одно значение из ряда чисел: 1, 2, ... n;

5) справедливы следующие равенства:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right)$$ и

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{s}\right)\left(\frac{p+r+s}{q}\right)=$$

$$=\left(\frac{p}{s}\right)\left(\frac{p+s}{q}\right)\left(\frac{p+q+s}{r}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{s}\right)\left(\frac{q+r+s}{p}\right).$$

Далее на **л. 169 об. — 170** приведены примеры, иллюстрирующие последние два равенства для n от 1 до 7.

На основе открытых свойств интегралов первого рода Эйлер на **л. 170 об. — 171** выводит алгоритм сведения любого интеграла вида $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}\,dx$, где p, q и n — натуральные, к основным интегралам. Здесь же показано применение этого алгоритма для интегралов первого рода, у которых показатель n является натуральным числом от 2 до 8, а p и q не превосходят n [см. вклейки].

Этот алгоритм Эйлер опубликовал в мемуаре E321 [22] и в первом томе своего «Интегрального исчисления» [15, гл. IX, § 387, с. 218—219].

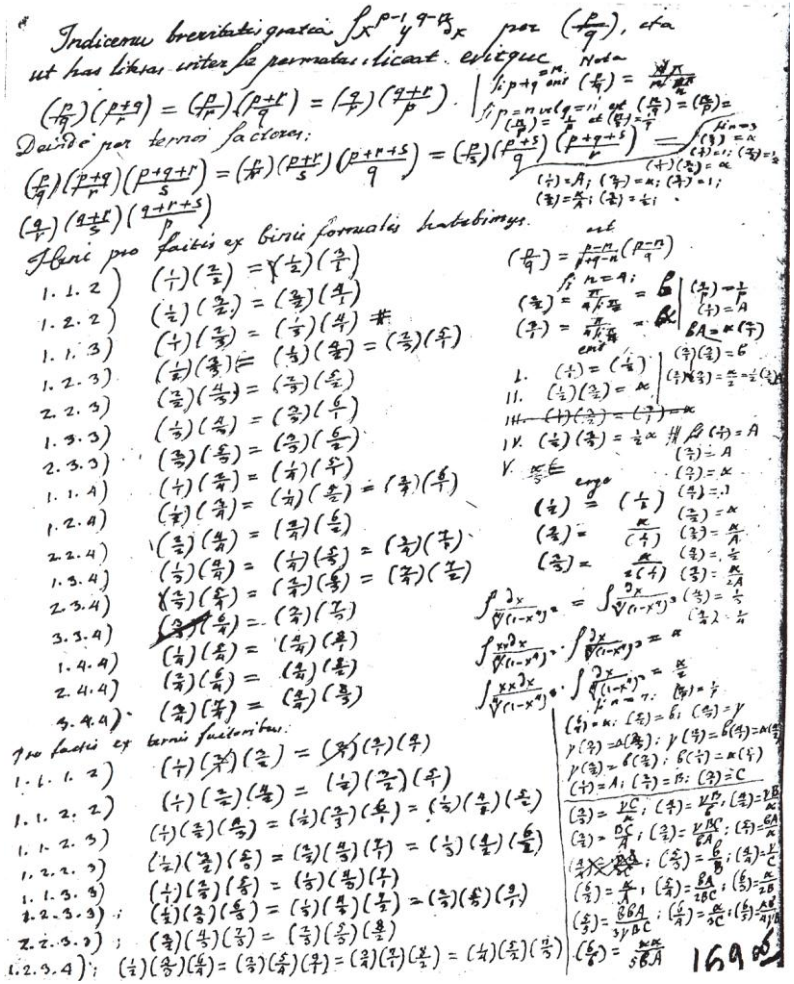
При построении теории B-функции Эйлер использовал разнообразные подходы (интерполирование последовательности биномиальных коэффициентов, исследование интегралов первого и второго рода, разложение в ряды и бесконечные произведения и т.д.), поэтому часто к одному и тому же результату он приходил при решении различных задач. Кроме того, многие соотношения, касающиеся бета-функции, он старался выводить несколькими способами. Это служило для него подтверждением правильности результата.

Список литературы

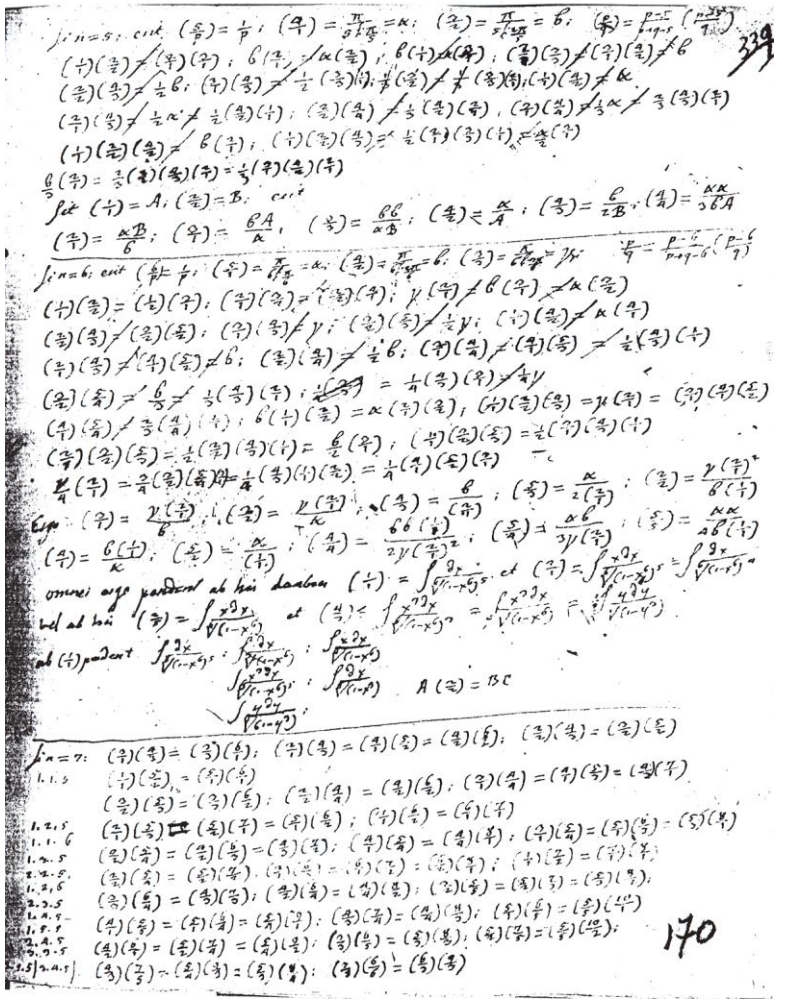
1. Krazer A., Faber G. Übersicht über die Bände 17, 18, 19 der ersten Serie // Opera omnia. I. 19, § V Betafunktionen. S. XLVII—LVII. Turici (Zürich), 1932.

2. Жбиковский А. Об Эйлеровых интегралах: Дис. на степень магистра. Казань, 1867.

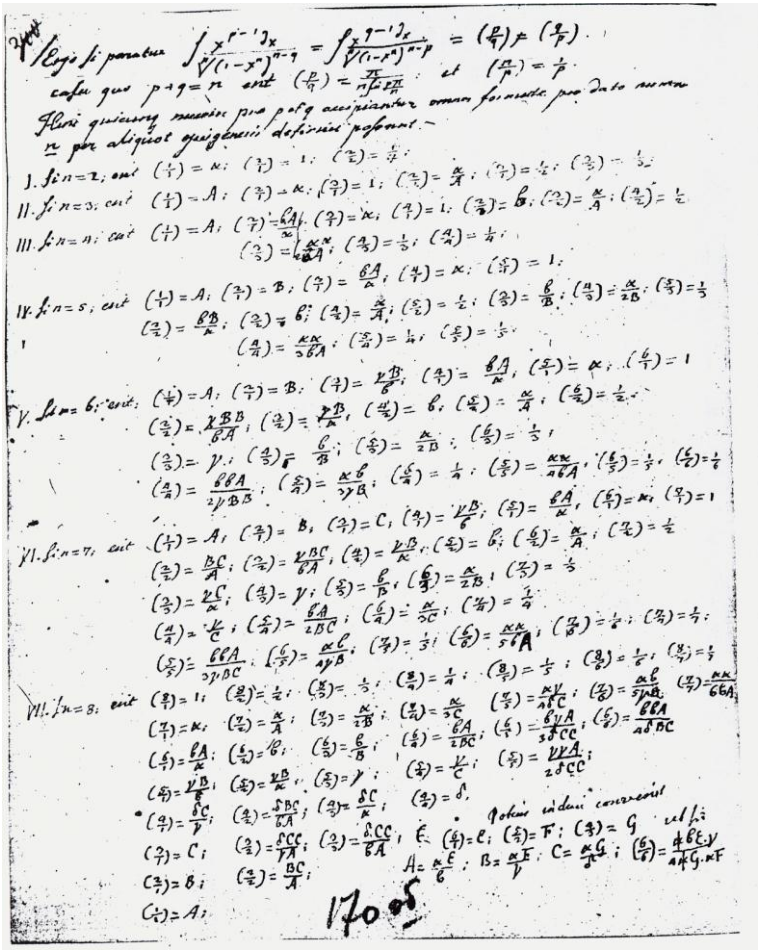
3. Гусев А. Н. Бесконечные ряды у Л. Эйлера: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Кострома, 1963.



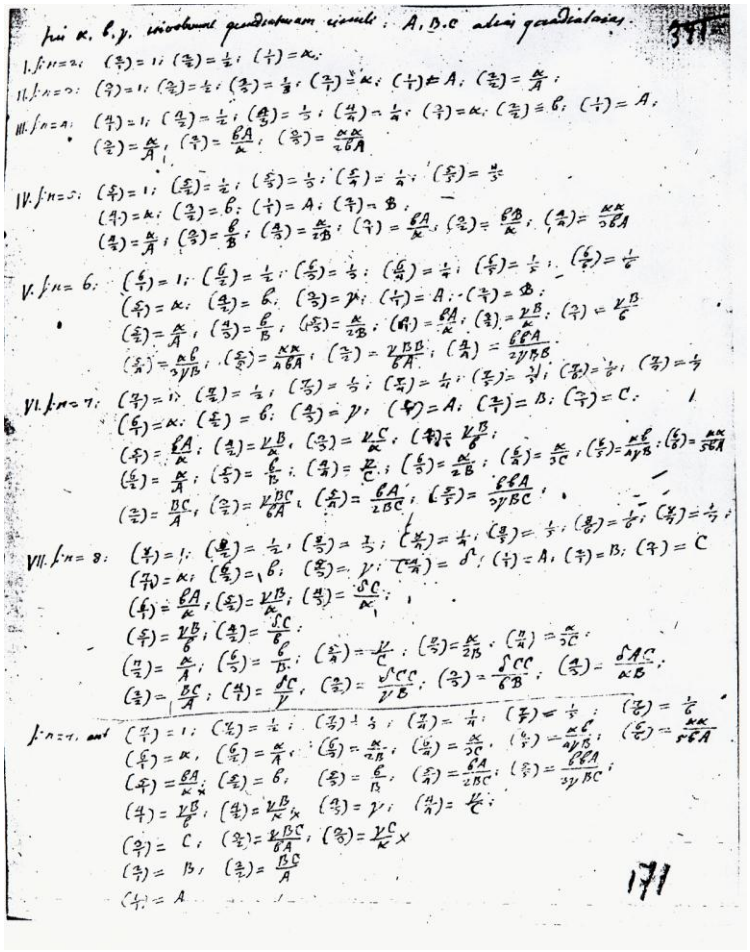
Страница записной книжки Л. Эйлера
Ф. 136. Оп. 1. № 134. Л. 169 об.



Страница записной книжки Л. Эйлера
Ф. 136. Оп. 1. № 134. Л. 170



Страница записной книжки Л. Эйлера
Ф. 136. Оп. 1. № 134. Л. 170 об.



Страница записной книжки Л. Эйлера
Ф. 136. Оп. 1. № 134. Л. 171

4. Гуссов В. В. Из истории трансцендентных функций в России и СССР: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1950.

5. Гуссов В. В. Работы русских ученых по теории гамма-функции // Историко-математические исследования. Вып. V. М., 1952. С. 421—472.

6. Nielsen N. Handbuch der Teorie der Gamma-funktion. Leipzig, 1906, 326 s.

7. Прокина-Игнатушина И. В. Теория бета-функции в «Интегральном исчислении» Л. Эйлера // Из истории математики XVIII века. К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера (1707—1783). Вып. 2. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2001. С. 57—85.

8. Игнатушина И. В. Возникновение начал теории бета-функции в работах Л. Эйлера // Из истории математики XVIII века. К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера (1707—1783). Вып. 3. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2002. С. 54—68.

9. Euler L. De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraici dari nequent [1738] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 14. 1925. S. 1—24. (E19).

10. Euler L. Evolutio formulae integralis $\int x^{f-1} dx (lx)^{\frac{m}{n}}$ integratione a valore $x = 0$ ad $x = 1$ extensa [1772] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 17. 1914. S. 316—357. (E421).

11. Euler L. Plenior expositio serierum illarum memorabilium quae ex unciis potestatum binomii formatur [1794] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 16a. 1935. S. 193—234. (E663).

12. Euler L. De productis ex infinitis factoribus ortis [1750] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 14. 1925. S. 260—289. (E122).

13. Матвиевская Г. П. О неопубликованных рукописях Л. Эйлера по диофантову анализу // Историко-математические исследования. Вып. XIII. М., 1960. С. 107—186.

14. Euler L. De expressione integralium per factores [1756] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 17. 1914. S. 233—267. (E 254).

15. Эйлер Л. Интегральное исчисление / Пер. с лат. С. Я. Лурье и М. Я. Выгодского; Предисл. М. Я. Выгодского: В 2 т. М., 1956. Т. 1. 414 с.; Т. 2. 368 с.

16. Euler L. De integratione formulae $\int \frac{dx lx}{\sqrt{(1-xx)}}$, ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensa [1776] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 18. 1920. S. 3—28. (E499).

17. Juškevič A. P., Winter E. Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729—1764. Berlin: Akademie-Verlag, 1965.

18. Euler L. Theoremata circa reductionem formularum integralium ad quadraturam circuli [1743] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 17. 1914. S. 1—33. (E59).

19. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых / Пер. с лат. Е. Л. Пацановского; Ред., вступ. ст. и примеч. проф. С. Я. Лурье. М.; Л., 1936. Т. 1. 352 с.

20. Euler L. De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur [1743] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 17. 1914. S. 129—171. (E60).

21. Euler L. Investigatio formulae integralis $\int \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^n}$, casu quo post integrationem statuitur $x = \infty$ [1785] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 18.1920. S. 2—54. (E588).

22. Euler L. Observationes circa integralia formularum $\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$ posito post integrationem $x = 1$ [1766] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 17. 1914. S. 268—288. (E321).

23. Euler L. Comparatio valorum formulae integralis $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ a termino $x = 0$ usque ad $x = 1$ extensae [1789] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 18. 1920. S. 392—423. (E640).

24. Euler L. Additamentum ad dissertationem de valorum formulae integralis $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensae [1789] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 18. 1920. S. 424—434.

25. Euler L. De unciis potesta binomii earumque interpolatione [1824] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 16б. 1935. S. 241—266. (E768).

26. Euler L. De fractionibus continuis Wallisii [1815] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 16б. 1935. S. 178—199. (E745).

27. Хованский А. Н. Работы Л. Эйлера по теории цепных дробей // Историко-математические исследования. Вып. X. М., 1957. С. 305—326.

28. Павлидис (Горлова) В. Д. Рекуррентные ряды в сочинениях и записных книжках Л. Эйлера // Из истории математики XVIII в. К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера. Вып. 1. Оренбург, 2000. С. 22—37.

29. Euler L. De fractionibus continuis observationes [1750] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 14. 1925. S. 32—81. (E123).

30. Euler L. De eximio usu methodi interpolationum in serierum doctrina [1783] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 15. 1927. S. 435—497.

И. В. Игнатушина

РАЗВИТИЕ ИДЕЙ Л. ЭЙЛЕРА ПО ТЕОРИИ Г- И В-ФУНКЦИЙ В XIX в.

В работах Эйлера было положено начало теории специальных функций. Введенные им дзета-, гамма-, бета-функции, а также цилиндрические функции *n*-го порядка первого и второго рода являются наиболее ранними примерами неэлементарных функций. В историко-математической литературе освещен вопрос о роли Эйлера в создании теории дзета-функции [1] и цилиндрических функций [2, 3]. Проведенный нами анализ [4—9] его работ, касающихся Г- и В-функций, позволяет заключить, что Эйлер рассматривал эти функции в действительной области и сделал попытку распространить бета-функцию на случай комплексного переменного.

Факты, которые легли в основу этой теории, накапливались у Эйлера при решении разнообразных задач математики и механики. Важную роль при этом сыграло исследование вопросов об интегрируемости функций, интерполировании последовательностей, решении некоторых видов дифференциальных уравнений. При построении теории Г- и В-функций Эйлер использовал различные методы, в частности, разложение функций в ряды, бесконечные произведения и цепные дроби, которые в его исследованиях находились в тесной взаимосвязи. Такое разнообразие ис-

пользуемых подходов позволяло получать новые пути решения различных задач. Многие соотношения, содержащие функции Г и В, Эйлер старался выводить несколькими способами. Это служило для него подтверждением правильности результата.

Теории Г- и В-функций разрабатывались Эйлером параллельно, взаимно дополняя друг друга. Все его исследования по этой тематике можно условно разделить на два периода. В течение первого периода в ходе решения задач математического анализа и механики накапливались отдельные факты, касающиеся Г- и В-функций; для теории Г-функции этот период охватывает 1725—1739 гг., для теории В-функции — 1729—1768 гг. Во второй период, который продолжался до 1783 г., Эйлер обобщил и систематизировал полученные факты, создав основы теории Г- и В-функций в действительной области, и рассмотрел задачу, где В есть функция комплексного переменного.

Основные результаты по теории Г-функции Эйлер изложил во втором томе «Дифференциального исчисления» (1755 г.) [10] и мемуарах Е19 («О трансцендентных рядах, т.е. о рядах, общий член которых не может быть выражен алгебраически», 1738 [11]), Е368 («О гипергеометрической кривой, заданной уравнением $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x$», 1769 [12]), Е421 («Разложение интегральной формулы $\int x^{f-1} dx (lx)^{\frac{m}{n}}$, где интегрирование распространяется от значения $x = 0$ до $x = 1$», 1772 [13]), Е662 («О величине интегральной формулы $\int dx \left(l \frac{1}{x} \right)^n$, где x изменяется от $x = 0$ до $x = 1$», 1794 [14]), а по теории В-функции — в первом томе «Интегрального исчисления» (1768) [15] и мемуарах Е321 («Рассмотрение интегральной формулы $\int x^{p-1} (1 - x^n)^{\frac{q}{n}-1} dx$, где после интегрирования полагается $x = 0$», 1766 [16]), Е640 («Пред-

ставление величины интегральной формулы $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, где значение переменной распространяется от $x = 0$ до $x = 1$», 1789 [17]), E768 («Об интерполировании последовательности биномиальных коэффициентов с дробными индексами», 1824 [18]).

Задача об интерполировании последовательности факториалов, которая привела к появлению понятия Г-функции, была поставлена в 1722 г. Хр. Гольдбахом и позже решена Д. Бернулли и Л. Эйлером. Найденное в записной книжке № 129 представление общего члена последовательности факториалов в виде бесконечного произведения позволяет утверждать, что решение данной задачи Эйлер получил, возможно, даже раньше, чем Д. Бернулли, но, по крайней мере, независимо от него. Эта заметка позволяет также примерно установить время начала исследований Эйлера по теории Г-функции (1725—1727 гг.).

Распределение материала, касающегося Г- и B-функций, по записным книжкам неравномерно. Следующая таблица схематически дает общую картину занятий Эйлера в этой области.

Номер записной книжки	Годы	Количество заметок, посвященных	
		Г-функции	B-функции
129	1725—1727	2	0
130	1725—1727	0	0
131	1736—1740	5	19
132	1740—1744	2	13
133	1749—1753	1	1
134	1749—1757	0	6
135	1759—1763	0	0
136	1759—1763	0	0
137	1760—1764	0	0
138	1767—1775	0	0
139	1775—1779	0	0
140	1779—1783	0	0

Отметим также что, если в начале творчества публикация полученных результатов по теории Г- и В-функций непосредственно следует за внесением соответствующей заметки в записную книжку или упоминанием в письме, то впоследствии Эйлер значительно дольше занимается исследованием вопроса и его разработкой, прежде чем опубликовать соответствующий материал.

Заметка, обнаруженная в записной книжке № 134, свидетельствует о том, что в период с 1749 по 1757 гг. Эйлер разработал алгоритм для выражения интегралов первого рода $\left(\frac{p}{q}\right)=\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ в случае, когда p, q и n — натуральные, через комбинации основных видов интегралов:

1. $\left(\frac{n}{p}\right)$, где $1 \le p \le n$; 2. $\left(\frac{n-p}{p}\right)$, где $1 \le p \le \frac{n}{2}$;

3. $\left(\frac{n-(p+1)}{p}\right)$, где $1 \le p \le \frac{n-1}{2}$.

Этот алгоритм, который позволяет находить значения В-функции для положительных рациональных аргументов, позже был опубликован в мемуаре E321 [16] и в первом томе «Интегрального исчисления» [15].

Эйлером была установлена зависимость между функциями Г и В:

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

В мемуаре E421 [13] (1772 г.) он показал способ нахождения значений Г-функции через известные значения В-функции:

$$\int_0^1 \left(-\ln x\right)^{\frac{p}{q}} dx =$$

$$= \sqrt[q]{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot p\cdot (p+1)\left(\frac{2p}{q}+1\right)\left(\frac{3p}{q}+1\right)\left(\frac{4p}{q}+1\right)\ldots\left(\frac{p(q-1)}{q}+1\right)}\cdot \int_0^1 (x-xx)^{\frac{p}{q}} dx \int_0^1 (x^2-x^3)^{\frac{p}{q}} dx \int_0^1 (x^3-x^4)^{\frac{p}{q}} dx \ldots \int_0^1 (x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}} dx.$$

Эйлер также вывел формулы, выражающие связь между функциями Г, В и тригонометрическими функциями. Например, для Г-функции им была найдена формула дополнения: $\Gamma(1-x)\cdot\Gamma(x)=\dfrac{\pi}{\sin \pi x}$, для В-функции, в частности, установлено, что $B(x,1-x)=\dfrac{\pi}{\sin \pi x}$.

Кроме того, во втором томе «Интегрального исчисления» (1769) [15] он получил разложение интеграла $\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-xu)^{-\alpha}du$ в ряд вида

$$B(b,c-b)\left[1+\frac{ab}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2+\ldots\right],$$

которое устанавливает зависимость между В-функцией и гипергеометрической функцией.

Отметим, что вначале Эйлер получил выражение для Г-функции в виде бесконечного произведения:

$$\Gamma(x+1)=\frac{1\cdot 2^x}{1+x}\cdot\frac{2^{1-x}\cdot 3^x}{2+x}\cdot\frac{3^{1-x}\cdot 4^x}{3+x}\cdot\frac{4^{1-x}\cdot 5^x}{4+x}\ldots,$$

а потом установил соответствующие интегральные выражения:

$$\Gamma(x+1)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{t}\right)^x dt\ ,\ \Gamma(x+1)=\int_0^\infty t^x e^{-t}dt\,.$$

Для В-функции наоборот: вначале она выступает у Эйлера как интеграл вида

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,$$

а затем он находит для неё разложение в бесконечное произведение:

$$B(a,b)=\frac{1}{ab}\cdot\frac{2(a+b)}{(a+1)(b+1)}\cdot\frac{3(a+b+1)}{(a+2)(b+2)}\cdot\frac{4(a+b+2)}{(a+3)(b+3)}\ldots$$

Для интегралов, выражающих Г- и В-функции, в работах Эйлера содержатся утверждения, которые по сути являются критериями сходимости этих интегралов в действительной области.

Эйлер нашел разложения логарифмов функций Г и В в ряды, откуда получил выражения для производной $\ln\Gamma(1+x)$ и частной производной для функции $\ln B(a, b)$. Отметим, что содержащийся в «Дифференциальном исчислении» степенной ряд для логарифма Г-функции:

$$\ln\Gamma(x+1)=-x\cdot 0{,}5772156649015325+$$
$$+\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right)-$$
$$-\frac{1}{3}x^3\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots\right)+$$
$$+\frac{1}{4}x^4\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots\right)-\ldots, \qquad (1)$$

сходится при $0 < x \le 1$ и позволяет определить значения $\ln\Gamma(x + 1)$, а следовательно, и $\Gamma(x + 1)$, на указанном промежутке.

Отсюда, используя свойство Г-функции

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x),$$

доказанное Эйлером в мемуаре E662 [14], можно найти ее значения во всех интервалах $n < z \le n + 1$ и $-n < z < -n + 1$, где $n \in N$. Кроме того, формула (1) устанавливает связь между гамма-функцией и дзета-функцией $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, играющей важную роль в теории чисел.

В мемуаре E368 [12] проведено достаточно полное исследование функции $\Gamma(1 + x)$, дана таблица её значений с шагом 1/2 и построен график этой функции для $x \in (-1; +\infty)$.

В ходе разработки теории Г- и В-функций Эйлер пришел к результатам, которые повлекли за собой развитие других областей математики. Например, полученное им из общей формулы суммирования Эйлера — Маклорена разложение для Г-функции в ряд Стирлинга

$$\ln y = \ln\Gamma(x+1) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - x +$$

$$+\frac{1}{12x} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6x^3} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 6x^5} - \frac{3}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10x^7} + \ldots,$$

явилось одним из первых примеров асимптотических рядов, строгая теория которых начала оформляться в XIX в.

Установленные Эйлером факты теории Г- и В-функций для действительных аргументов вызвали интерес у многих математиков XIX в. и явились основой для дальнейших исследований.

П. С. Лаплас (1749—1827) использовал Г- и В-функции при решении некоторых задач теории вероятностей. Так, задачи, связанные с биномиальным законом распределения вероятностей, привели его к проблеме приближенного вычисления интегралов вида $\int_0^1 x^p(1-x)^q dx = B(p+1, q+1)$, когда p и q очень большие числа.

Это повлекло за собой рассмотрение им вообще таких интегралов, где показатели степеней подынтегральных множителей очень велики, и в частности интегралов вида $\int_0^\infty x^p e^{-x} dx = \Gamma(p+1)$ при больших значениях p.

В ходе этих изысканий Лаплас установил некоторые результаты, касающиеся Г- и В-функций. Например, в «Мемуаре о вероятности причин по событиям» (1774) [19] он вывел соотношение:

$$\frac{\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^q dx}{\int_0^1 x^p(1-x)^q dx} = \frac{B(p+2;q+1)}{B(p+1;q+1)} = \frac{p+1}{p+q+2},$$

которое является частным случаем формулы Эйлера:

$$\frac{\int_0^1 x^{m-1}(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} dx}{\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} dx} = \frac{\mu(m+k)}{m(\mu+k)} \cdot \frac{(\mu+n)(m+k+n)}{(m+n)(\mu+k+n)} \cdot$$

$$\cdot \frac{(\mu+2n)(m+k+2n)}{(m+2n)(\mu+k+2n)} \cdot \ldots \text{ при } n = 1,\ k = q + 1,\ m = p + 2,$$

$\mu = p + 1$.

В «Мемуаре о вероятностях» (1780) [20], Лаплас получил разложение для Г-функции

$$\Gamma(p+1) = p^{p+\frac{1}{2}} e^{-p} \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12p} + \frac{1}{288p^2} + \ldots\right), \qquad (2)$$

которое уточняет соответствующий результат Эйлера

$$\Gamma(x+1) \approx \frac{x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^x}.$$

Отметим, что для получения разложения (2) Лаплас применил метод [21, § 7, с. 107], который явился основой современного метода перевала [22, с. 148 —164].

В работе «Аналитическая теория вероятностей» (1814) [23] он рассмотрел функцию $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, которая выражается через неполную функцию гамма

$$\gamma(p,x) = \int_0^x e^{-t} t^{p-1} dt$$

равенством $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}; x^2\right)$.

Здесь же он получил представление Г-функции от натурального переменного в виде интеграла по прямой, параллельной мнимой оси:

$$\int_{-\mu-i\infty}^{-\mu+i\infty} \frac{e^{-x}dx}{x^{\mu}} = \frac{2\pi(-1)^{-\mu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\mu)}.$$

Таким образом, Лаплас пришел к представлению Г-функции контурным интегралом.

Отметим, что для Лапласа сами Г- и В-функции не являлись целью исследования, оставаясь лишь вспомогательным средством в решении конкретных задач.

Первым, для кого произведения вида

$$p(p–1)(p–2)...(p–n+1),$$

а следовательно, и Г-функция, стали специальным объектом исследований, был К. Крамп (1760—1826).

В своей работе «Анализ астрономических рефракций» (1798 г.) [24] он ввел специальную функцию $a^{m|r}$, определив ее при m целом положительном следующим равенством: $a^{m|r} = a(a + r)(a + 2r)...(a + (m – 1)r)$.

Впоследствии в «Мемуаре о числовых свойствах» (1812—1813) [25] он распространил ее на случай любого m и указал, что функция $a^{m|r}$ сводится к Г-функции:

$$a^{m|r} = \frac{r^m \Gamma\left(\frac{a}{r} + m\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)}.$$

В работе [24] Крамп рассмотрел функцию $I(x) = \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$, которая сводится к дополнительной неполной Г-функции $\Gamma(p,x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt$, а именно

$$I(x) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}; x^2\right).$$

Для функции *I(x)*, а также для её логарифмов он составил обширные таблицы с шагом 0,01.

В работе [25] Крамп рассмотрел Г-функцию и от комплексного переменного при исследовании вопроса о виде выражения

$$\ln a^{m|r} = -m + m\ln a + \left(m - \frac{1}{2} + \frac{a}{r}\right)\ln\frac{a+mr}{a} -$$

$$-\Gamma\left(\frac{r}{a}\right) + \Gamma\left(\frac{r}{a+mr}\right)$$

при $m = p + iq$. Он пришел к выводу, что $\ln a^{p+iq|r}$ примет вид двучлена $M + iN$, где

$$M = p(-1+\ln a) + \left(p - \frac{1}{2} + \frac{a}{r}\right)\ln\frac{k}{a} - q\varphi - \Gamma\left(\frac{r}{a}\right) +$$

$$+ B_2\frac{r}{k}\cos\varphi + B_4\frac{r^3}{3k^3}\cos 3\varphi + B_6\frac{r^5}{5k^5}\cos 5\varphi + \ldots,$$

$$N = q(-1+\ln a) + \left(p - \frac{1}{2} + \frac{a}{r}\right)\varphi + q\ln\frac{k}{a} -$$

$$- B_2\frac{r}{k}\sin\varphi - B_4\frac{r^3}{3k^3}\sin 3\varphi - B_6\frac{r^5}{5k^5}\sin 5\varphi - \ldots,$$

где B_{2n} — числа Бернулли, $k^2 = (a+pr)^2 + (qr)^2$, $tg\varphi = \dfrac{qr}{a+pr}$.

Здесь же, используя полученные Эйлером результаты $\sin b = \dfrac{e^{bi} - e^{-bi}}{2i}$ и $\Gamma(1+y)\Gamma(1-y) = \dfrac{\pi y}{\sin \pi y}$, Крамп установил, что $\Gamma(1+iy)\Gamma(1-iy) = \dfrac{2\pi y}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}$.

Характеризуя исследования Крампа, А. И. Курдюмова в своей работе «Развитие теории гамма-функции после Эйлера» [26] пишет: «...он был, по-видимому, первым математиком, который свободно пользовался Г-функцией при комплексных значениях независимой переменной, ввел ряд

соответствующих формул и поставил задачу о составлении таблиц для вычисления значений Г-функции от комплексного аргумента» [26, с. 93].

Под влиянием работ Крампа исследованиями по той же тематике занялся Ф. В. Бессель (1784—1846). Он вычислил таблицу значений функции $\frac{1^{x-1|1}}{\sqrt{2\pi}}$, а также рассмотрел функции $J_n(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}}{\nu!\,\Gamma(n+\nu+1)}$, связанные с функцией гамма и названные позже его именем.

Полученные результаты по теории Г- и В-функций были приведены в систему и изложены с единых позиций К. Ф. Гауссом (1777—1855) и А. М. Лежандром (1752—1833).

Изучая вслед за Эйлером свойства интеграла вида $\int_0^1\frac{x^{a-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-b}}}$, Лежандр в работе «Упражнения по интегральному исчислению» (1817) [27] заметил, что с помощью подстановки $x^n = y$ он сводится к выражению $\frac{1}{n}\int_0^1 y^{\frac{a}{n}-1}(1-y)^{\frac{b}{n}-1}dy$, т.е. зависит от интеграла вида $\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}dy$. Поэтому Лежандр подчеркнул важность именно этого интеграла, который Я. Ф. М. Бине (1786—1856) позже (в 1839 г.) назвал В-функцией. Лежандр отмечал, что эта функция может рассматриваться «как непрерывная функция p и q или как третья координата криволинейной поверхности, у которой p и q две другие координаты», причем они могут быть «по желанию рациональными или иррациональными; но обе они должны быть положительными, так как без этого условия интеграл имел бы бесконечное значение» [цит. по 2, с. 61]. Новых результатов в этой области по сравнению с имеющимися у Эйлера Лежандр не получил.

При изложении теории Г-функции Лежандр в качестве исходного момента выбрал интегральное представление этой функции: через *Г(а)* он обозначил $\int_0^1 (-\ln x)^{a-1} dx$. При таком подходе происходит сужение области определения этой функции на промежуток (0, +∞). Обобщение Г-функции на область отрицательных значений аргумента Лежандр производил при помощи соотношения *Г(1 + x) = xГ(x).*

Все полученные Лежандром результаты, относящиеся к теории Г- и В-функций, были изложены им в связном виде во втором томе его «Трактата об эллиптических функциях и эйлеровых интегралах» (1826) [28].

К. Ф. Гаусс отправлялся от данного Эйлером определения этой функции через бесконечное произведение $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot k^x}{x(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+k)}$ (при $k \to \infty$) и далее доказывал, что для положительных значений аргумента Г-функция представима с помощью интеграла второго рода. Такой подход обладает очевидным преимуществом, так как сразу позволяет определить Г-функцию во всей действительной области, за исключением целых отрицательных значений аргумента, в силу сходимости соответствующего бесконечного произведения. В статье «Общие исследования о бесконечных рядах» (1812) [29] Гаусс дал строгое доказательство сходимости этого произведения, основанное на необходимом и достаточном критерии Коши (хотя сам критерий еще не был сформулирован явно) [26, с. 63].

В этой статье Гаусс подробно рассмотрел поведение функции Г(*x* + 1), которую он обозначал через П(*x*), в действительной области и указал, что для определения соответствующих значений этой функции достаточно составить таблицу её значений в интервале от *x = 0* до *x = 1*.

Здесь же, опираясь на результаты проведенного им исследования коэффициентов гипергеометрического ряда

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)}x^2+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots,$$

Гаусс установил, что при $\gamma-\alpha-\beta>0$ справедлива формула

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\prod(\gamma-1)\prod(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\prod(\gamma-\alpha-1)\prod(\gamma-\beta-1)},$$

которая показывает связь между гипергеометрической функцией и функцией гамма.

Далее Гаусс отметил, что функция

$$\psi(x)=\frac{d\,ln\prod x}{dx}=\frac{1}{\prod x}\frac{d\prod x}{dx}$$

«почти так же замечательна, как и функция $\prod x$» [цит. по 2, с. 68], и нашел интегральное представление для логарифмической производной от гамма-функции:

$$\psi(x)=\frac{d}{dx}ln\,\Gamma(x)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right)dt.$$

Как показал В. В. Гуссов [30, с. 437], который занимался вопросом формирования теории Г-функции, существенно новых фактов в эту теорию Лежандр и Гаусс почти не внесли, за исключением того, что Гаусс открыл теорему умножения для функции гамма

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right)=(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}m^{\frac{1}{2}-ma}\Gamma(ma)$$

(опубл. в [29]), а Лежандр дал имя этой функции (гамма-функция) и получил формулу[1]

[1] Здесь m — модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным ($m = lge \approx 0{,}43429$); c — постоянная Эйлера; $S_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}$.

$$\ln\Gamma(1+x)=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi x}{\sin\pi x}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+Bx-B_3x^3-B_5x^5-B_7x^7-\dots,$$

$$m(1-c)=B,\ \frac{m}{3}(S_3-1)=B_3,\ \frac{m}{5}(S_5-1)=B_5,\dots,$$ удобную для определения её численных значений (опубл. в [27]).

Кроме того, Гаусс и Лежандр практически одновременно опубликовали таблицы значений рассматриваемой функции, причем таблицы Лежандра явились основой для всех изданных до настоящего времени таблиц подобного рода. Изучив поведение Г-функции при различных положительных значениях аргумента, Лежандр в монографии [31] писал: «...Наилучшим способом построения таблицы значений *Г(а)* является её вычисление в интервале между *а = 1* и *а = 2*, так как в этом интервале функция изменяется только в пределах от 1 до 0,8856033 и потому разности оказываются очень малыми и таблицу очень легко интерполировать» [цит. по: 2, с. 56]. Здесь же он привел и таблицу логарифмов Г-функции для аргументов от 1 до 2 с шагом 0,001.

И Гаусс, и Лежандр рассматривали Г-функцию только для действительных значений аргумента. Однако Гауссу не была чужда мысль о том, что эту функцию можно распространить и на комплексную область. Об этом свидетельствует его письмо к Бесселю от 21 ноября 1811 г., где отмечается, что определение Г-функции в виде бесконечного произведения имеет смысл и для мнимых значений аргумента.

Первым, кто стал систематически рассматривать Г-функцию для комплексных значений аргумента, был О. Л. Коши (1789—1857). В «Мемуаре об определенных интегралах, взятых между воображаемыми пределами» (1825) [32] он доказал справедливость формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ibx}}{(r+ix)^a}dx=\frac{2\pi}{\Gamma(a)}b^{a-1}e^{-br}$$

для комплексных значений переменных *а* и *b*. Отсюда А. И.

Курдюмова заключила, что Коши распространил определение Г-функции и на комплексные значения аргумента [26, с. 31—32].

Говоря о работах Коши, отметим также его статью «О новом типе интегралов» (1826) [33], где он определил Г-функции действительного переменного с помощью введенного им понятия «экстраординарного» интеграла [34].

В «Мемуаре о различных функциях, касающихся теории определенных интегралов» (1841) [35] он нашел выражение для $\ln\Gamma(z)$ при Re $z > 0$ в виде определенного интеграла:

$$ln\,\Gamma(z)=\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-\pi t}-e^{-t}}{1-e^{-t}}+(z-1)e^{-t}\right)\frac{dt}{t}.$$

Отметим, что Бине в «Мемуаре об эйлеровых интегралах...» (1839) [36] дал два интегральных представления для $\ln\Gamma(z)$ при Re $z > 0$:

1) $$ln\,\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)ln\,z-z+,$$

$$+\frac{1}{2}ln\,2\pi+\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right)\frac{e^{-tz}}{t}dt;$$

2) $$ln\,\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)ln\,z-z+\frac{1}{2}ln\,2\pi+$$

$$+2\int_0^{\infty}\left(\frac{arctg(t/z)}{e^{2\pi t}-1}\right)dt,$$

где *arctg u* определяется интегралом $arctgu=\int_0^u\frac{dt}{1+t^2}$, в котором путь интегрирования есть прямая линия.

Несколько позже Н. И. Лобачевский (1792—1856) тоже построил строгую теорию Г-функции в комплексной области. Подход к определению гамма-функции, изложенный в статье «Способ уверяться в исчезании бесконечных строк и приближаться к значению функций от весьма больших чи-

сел» (1835) [37, т. V, с. 81—162], совершенно оригинален и находится в соответствии с общей установкой Лобачевского опираться в определении функций на понятие сходящегося ряда. (Подробно об этом см. статью Г. Л. Лунца [38, с. 43—58].)

В указанной работе Лобачевский доказал теорему умножения Гаусса, вычислил многие значения определенных интегралов и бесконечных произведений, доказал для общего случая равенство $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(p+ix)^a} dx = \frac{2\pi}{\Gamma(a)} e^{-p}$ ($p > 0$, $Re(a) > 0$), т.е. $\int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \frac{e^z dz}{z^a} = \frac{2\pi i}{\Gamma(a)}$.

Отметим, что для частного случая (когда a — натуральное и $p = a$) этот интеграл был ранее вычислен Лапласом [23], Лежандром [31].

В том же 1835 году общий случай такого интегрирования рассмотрел Ж. Лиувилль (1809—1882) в «Мемуаре о способе...» (1835) [39]. Его доказательство было основано на дифференцировании нецелого порядка, которое ранее применялось Эйлером, но все еще было лишено достаточной строгости. Впервые обоснование операции дифференцирования нецелого порядка было дано А. В. Летниковым (1837—1888). Им же в статье «Об определенных интегралах, содержащих функции, удовлетворяющие гипергеометрическому уравнению» (1883) [40] были получены формулы, представляющие собой обобщение эйлеровых интегралов первого рода [41, с. 223—225].

В процессе формирования теории Г- и B-функций устанавливались различные связи этих функций с другими специальными функциями. Так, в 1859 г. Г. Ф. Б. Риман (1826—1866) опубликовал [42] функциональное уравнение

$$\zeta(1-n)=\frac{2}{(2\pi)^n}\cos\frac{n\pi}{2}\Gamma(n)\zeta(n),$$

показывающее связь между гамма-функцией и дзета-функцией $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$.

Это уравнение в несколько другой записи

$$\frac{1-2^{n-1}+3^{n-1}-4^{n-1}+\ldots}{1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}+\ldots}=-\frac{(n-1)!(2^n-1)}{\pi^n(2^{n-1}-1)}\cos\frac{n\pi}{2}$$

было получено Эйлером еще в 1749 г., а опубликовано почти через двадцать лет в E352 («Заметки о красивом отношении между рядами как прямых, так и обратных степеней» (1768) [43, с. 83]). Риман, очевидно, об этом факте ничего не знал.

Разложение $\frac{1}{\Gamma(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n^z n!}$, известное еще в 1729 г. Эйлеру, стало отправным пунктом для К. Вейерштрасса (1815—1897) в исследованиях о функции гамма, которую он рассматривал как пример целой функции. В работе [44] им был получен следующий общий результат:

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{cz}\left[\left(1+\frac{z}{1}\right)e^{-z/1}\right]\left[\left(1+\frac{z}{2}\right)e^{-z/2}\right]\ldots$$

Важные результаты по теории Г-функции получил Н. Я. Сонин (1849—1915). Первый в серии его работ по теории Г-функции мемуар «Заметка об одной формуле Гаусса» (1881) [45] посвящен выводу теоремы умножения Гаусса. В основу доказательства здесь положено установленное Эйлером уравнение

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x). \qquad (3)$$

Ранее аналогичная попытка получить теорему Гаусса из уравнения (3) с учетом, что $\Gamma(1)=1$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, была

предпринята Бине в работе [36]. Однако его доказательство было ошибочным, так как выбранные им условия не определяют вполне функцию $\Gamma(x)$: этим же условиям удовлетворяет произведение $\Gamma(x)$ на периодическую функцию от x с периодом 1, обращающуюся в единицу при $x = 1$ и $x=\frac{1}{2}$, например $\Gamma(x)\cos 4\pi x$. Сонин дал правильное решение задачи, использовав наряду с соотношениями (3), $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ еще и то, что выражение

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)\frac{1}{\Gamma(x)},$$

где $Re(x) > 0$, не обращается в бесконечность ни при каком значении x.

Отметим, что уравнение (3) послужило основой теории Г-функции и в работе «О функции гамма» (1859) [46] М. В. Остроградского (1801—1862).

В XX в. Э. Артин (1898—1962) доказал [47], что свойство логарифмической выпуклости гамма-функции в действительной области определяет её с точностью до постоянного множителя среди всех решений функционального уравнения (3). Отправляясь от соотношения

$$\ln\Gamma(x+1)-\ln\Gamma(x)=\ln x,$$

Сонин по примеру Бине исследовал разностное уравнение

$$F(x + 1) – F(x) = f(x), \qquad (4)$$

где x — действительная переменная; функция $f(x)$ имеет непрерывные производные всех порядков, причем $\lim\limits_{x\to\infty} f^{(k)}(x)=0$, начиная с $k \geq p$.

Применение этих результатов к частному случаю $f(x) = \ln x$ позволило Сонину в работе «О прерывной функции $[x]$ и её применениях» (1889) [48] получить новые формулы, относящиеся к теории Г-функции [30, с. 441—454; 49, с. 79—85]. Например, он установил новое представление функции $\ln\Gamma(x+1)$ в виде интеграла

$$\ln\Gamma(1+x)=\int_1^{\infty}[z]\left\{\frac{1}{x+z}+\frac{x-1}{z}-\frac{x}{z+1}\right\}dz,$$

имеющего место при всех x, кроме $x = –2, –3, –4, ...$

В другой статье — «Об остаточных членах формул суммирования Эйлера и Стирлинга» (1889) [50] он усовершенствовал формулу Стирлинга, получив выражение:

$$\Gamma(1+x)=\sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{\theta}{12(x+\theta)}}\ ,\ \ 0<\theta<\frac{1}{2},$$

уточняющее формулу Эйлера $\Gamma(1+x)\approx\dfrac{x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^x}$.

Эти изыскания привели Сонина к вопросу об асимптотических значениях интегралов разностного уравнения типа (4).

Исследования XIX в., связанные с асимптотическими представлениями Г- и В-функций, составляют отдельное направление в развитии теории специальных функций. Так, например, Ш. Эрмит (1822—1901) записал ряд Стирлинга для логарифма Г-функции в следующем виде:

$$\ln\Gamma(1+z)=\frac{z(z-1)}{1\cdot 2}\ln 2+\frac{z(z-1)(z-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\ln 3-2\ln 2)+...$$

и показал, что это разложение справедливо и для комплексных z вида $a + ib$, где $a > 0$ [59, с. 862].

Еще одно направление в развитии теории Г- и В-функций было связано с задачей о представлении этих функций в виде контурных интегралов. Эта задача для Г-функции была успешно решена в 1863 году Г. Ганкелем (1839—1873) [51]. Он доказал, что для всех значений z, за исключением $0, \pm1, \pm2, ...$, справедливо

$$\Gamma(z)=-\frac{1}{2i\sin\pi z}\int_{\infty}^{+0}(-t)^{z-1}e^{-t}dt.$$

Для В-функции аналогичный результат в 1890 г. был получен Л. Похгаммером [52]: если P — какая-либо точка на вещественной оси между 0 и 1, тогда

$$B(\alpha,\beta) = e^{-\pi i(\alpha+\beta)} \int_P^{(1+,0+,1-,0-)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt .$$

Математики XIX в. (С. Д. Пуассон (1781—1840), К. Г. Я. Якоби (1804—1851), П. Г. Лежен-Дирихле (1805—1859), Ж. Бине (1786—1856) и др.) дали несколько разных доказательств формулы, связывающей Г- и В-функции:

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} . \qquad (5)$$

По этому поводу Н. Нильсен, автор замечательной книги [53] по теории гамма-функции, писал: «Хотя уже Эйлер... указал формулу (5), все же еще долго рассматривали бета-функцию как функцию независимую и устанавливали... между бета-функциями большое количество соотношений, которые зачастую после применения этого соотношения превращались в простые тривиальности» [53, с. 15].

В XX веке теория Г- и В-функций не утратила своего значения для математики и её приложений. Об этом свидетельствуют публикации специальных исследований по различным вопросам этой теории (В. А. Стеклов [54, 55], В. И. Романовский [56], Е. Е. Слуцкий [57, 58] и др.) и появление многочисленных справочников по теории специальных функций, в которых большие разделы посвящены Г- и В-функциям.

Список литературы

1. Горлова В. Д. Неопубликованные материалы Эйлера по аналитической теории чисел. Элементы теории дзета-функции в его записных книжках: Автореф. дис. ... канд. физ-мат. наук. Оренбург, 1998.

2. Гуссов В. В. Из истории трансцендентных функций в России и СССР: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1950.

3. Гуссов В. В. Развитие теории цилиндрических функций в России и СССР // Историко-математические исследования. Вып. VI. М., 1953. С. 355—475.

4. Прокина-Игнатушина И. В. Теория бета-функции в «Интегральном исчислении» Л. Эйлера // Из истории математики XVIII века. К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера (1707—1783). Вып. 2. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2001. С. 57—85.

5. Прокина-Игнатушина И. В. О возникновении теории Г-функции в исследованиях Л. Эйлера // Материалы XXIII преподавательской научно-практической конференции ОГПУ. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2001. С. 13—18.

6. Прокина-Игнатушина И. В. О некоторых результатах Л. Эйлера по теории гамма-функции // Из истории математики XVIII века. К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера (1707—1783). Вып. 2. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2001. С. 86—100.

7. Игнатушина И. В. Вопросы теории Г-функции в записных книжках Л. Эйлера // Из истории математики XVIII века. К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера (1707—1783). Вып. 3. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2002. С. 30—53.

8. Игнатушина И. В. Возникновение начал теории бета-функции в работах Л. Эйлера // Из истории математики XVIII века. К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера (1707—1783). Вып. 3. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2002. С. 54—68.

9. Игнатушина И. В. Формирование основ теории гамма-функции в трудах, переписке и записных книжках Л. Эйлера // Историко-математические исследования. Вып. VIII (43). М., 2003. С. 140—161.

10. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление / Пер. с лат., вступит. ст. и примеч. М. Я. Выгодского. М.; Л., 1949. 579 с.

11. Euler L. De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraici dari nequent [1738] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 14. 1925. S. 1—24. (E19).

12. Euler L. De curva hypergeometrica hac aequatione expressa $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x$ [1769] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 28. 1955. S. 6—98. (E368).

13. Euler L. Evolutio formulae integralis $\int x^{f-1} dx (lx)^{\frac{m}{n}}$ integratione a valore $x = 0$ ad $x = 1$ extensa [1772] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 17. 1914. S. 316—357. (E421).

14. Euler L. De vero valore formulae integralis $\int dx \left(l \frac{1}{x} \right)^n$ a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = 1$ extensae [1794] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 19. 1932. S. 63—83. (E662).

15. Эйлер Л. Интегральное исчисление / Пер. с лат. С. Я. Лурье и М. Я. Выгодского; Предисл. М. Я. Выгодского: В 2 т. М., 1956. Т. 1. 414 с.; Т. 2. 368 с.

16. Euler L. Observationes circa integralia formularum $\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$ posito post integrationem $x = 1$ [1766] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 17. 1914. S. 268—288. (E321).

17. Euler L. Comparatio valorum formulae integralis $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ a termino $x = 0$ usque ad $x = 1$ extensae [1789] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 18. 1920. S. 392—423. (E640).

18. Euler L. De unciis potesta binomii earumque interpolatione [1824] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 16б. 1935. S. 241—266. (E 768).

19. Laplace P. S. Mémoire sur la probabilité des causes par événements. Mém. Acad. Roy. Sci. Paris, 1774.

20. Laplace P. S. Mémoire sur les probabilités. Mém. Ac. Paris, 1780.

21. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции / Пер. с англ. Ю. А. Брычкова; Под ред. А. П. Прудникова. М., 1978. 375 с.

22. Петрова С. С., Соловьев А. Д. Об истории создания метода перевала // Историко-математические исследования. Вып. XXXV. М., 1994. С. 148—164.

23. Laplace P. S. Théorie analytique des probabilités. Paris, 1814.

24. Kramp C. Analyse des réfractions astronomiques et terrestres. Leipzig, 1798; Strassburg, 1799.

25. Kramp C. Mémoire sur les facultés numériques. Annales de Mathematiques pures et appliques. T. III. Nismes, 1812—1813.

26. Курдюмова А. И. Развитие теории гамма-функции после Эйлера: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1975.

27. Legendre A. M. Exercices de calcul intégral. T. II. Paris, 1817.

28. Legendre A. M. Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes. T. II. Paris, 1826.

29. Gauss C. F. Disquisitiones generales circa seriem infinitam... [1812] Werke. III. Göttingen, 1876.

30. Гуссов В. В. Работы русских ученых по теории гамма-функции // Историко-математические исследования. Вып. V. М., 1952. С. 421—472.

31. Legendre A. M. Exercices de calcul intégral. T. I. Paris, 1811.

32. Cauchy A. L. Mémoires sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires. Paris, 1825.

33. Cauchy A. L. Sur un nouveau genre d'intégrales // Exercices de Mathématiques. T. I. Paris, 1826.

34. Курдюмова А. И. Экстраординарные интегралы Коши // Историко-математические исследования. Вып. XXII. М., 1977. С. 82—84.

35. Cauchy A. L. Mémoire sur diverses formules relatives a la theorie des intégrales définies // Journ. Ec. Pol. XVII. Paris, 1841.

36. Binet J. Mémoire sul les intégrales Euleriénnes..., Comptes rendus Ac. Sc., IX, Paris, 1839.

37. Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений / Гл. ред. В. Ф. Каган. Т. V. М.; Л., 1951. 499 с.

38. Лунц Г. Л. О работах Н. И. Лобачевского по математическому анализу // Историко-математические исследования. Вып. II. М.; Л., 1949. С. 10—71.

39. Liouville J. Mémoire sur l'usage l'on peut faire... // Journal für die reine und angew. Math., XIII, Berlin, 1835.

40. Летников А. В. Об определенных интегралах, содержащих функции, удовлетворяющие гипергеометрическому уравнению // Математический сборник. Т. XI. 1883. С. 327—414.

41. Шостак Р. Я. Алексей Васильевич Летников // Историко-математические исследования. Вып. V. М., 1952. С. 163—238.

42. Riemann B. Berliner Monatsberichte. 1859. S. 671—680; Ges. Werke. 1876. S. 136—144.

43. Euler L. Remarques sur un beau rapport entre les series des puissances tant directes que reciproques [1768] // Opera omnia. Ser. I. Vol. 15. 1927. S. 70—90. (E352).

44. Weierstrass K. Über die Theorie der analytischen Fakultäten // Juornal für die reine und angew, Math. 51, Berlin, 1856.

45. Sonine N. Note sur une formule de Gauss, Bulletin de la Soc. Mathématique de France, publié par les serétaires. T. IX. Paris, 1881. P. 162—166.

46. Остроградский М. В. О функции гамма [1859] / Публикация и комментарии И. Б. Погребысского // Историко-математические исследования. Вып. XIV. М. 1961. С. 529—538.

47. Артин Е. Введение в теорию гамма-функции / Пер. с нем. Д. А. Райкова. М.; Л.: Гостехиздат, 1934. 36 с.

48. Сонин Н. Я. О прерывной функции [x] и ее применениях // Варшавские университетские известия. № 7—8. Варшава, 1889. С. 1—78.

49. Кропотов А. И. Николай Яковлевич Сонин. М., 1967. 135 с.

50. Sonine N. Sur les termes complémentaires de la formule sommatoire d'Euler et de celle de Stirling // Ann. de L'Ecole Norm. Sup., 3e série. T. 3. 1889. P. 258—262.

51. Hankel H. Die Eulerschen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Arguments. Diss. Leipzig, 1863 // Zeitschrift für Math. und Physik. 1864. Bd. 9. P. 1—21.

52. Pochhammer L. Zur Theorie der Eulerchen Integrale // Math. Annalen. 1890. Bd. 35. P. 495—526.

53. Nielsen N. Handbuch der Teorie der Gamma-funktion. Leipzig, 1906. 326 s.

54. Стеклов В. А. Замечания о формулах суммирования Эйлера и Буля // Сообщ. Харьк. матем. общ. Сер. 2. Т. VIII. № 2—5. Харьков, 1902.

55. Stekloff W. Sur une formule générale d'Analyse et ses diverses applications // Annali di matematica pura et applicata, III série. 1913. T. 21.

56. Romanovsky W. On certain expansions in series of polynomials of incomplete β-functions // Матем. сб. 1926. 33. Вып. 2.

57. Слуцкий Е. Е. О таблицах обратной неполной бета-функции // Труды ин-та матем. и мех. АН Узб. ССР. Вып. 1. 1946.

58. Слуцкий Е. Е. Таблицы для вычисления неполной Г-функции и функции вероятности χ^2 . М.; Л., 1950.

59. Davis P. J. Leonhard Euler's integral profile of the Gamma funcion // Amer. Math. Mon. 1959. Vol. 66. № 10. P. 849—869.

Г. М. Гузаиров

ОБОБЩЕННЫЕ ГАММА- И БЕТА-ФУНКЦИИ НА ГРУППОВЫХ ХАРАКТЕРАХ ПОЛЯ *R* КАК МОДИФИКАЦИИ ИНТЕГРАЛОВ ЭЙЛЕРА

Здесь будут описаны некоторые модификации бета- и гамма-функций Эйлера

$$B(u;\upsilon)=\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{\upsilon-1}dx,\ \ \Gamma(\omega)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\omega-1}dx, \qquad (0)$$

где $\Re u>0, \Re\nu>0$, $\Re\omega>0$, которые получаются при истолковании этих интегралов[1] с точки зрения полевой структуры множества действительных чисел в терминах гармонического анализа на группах. Заметим сразу, что эта модификация бета- и гамма-функций Эйлера допускает некоторые дальнейшие обобщения, о чем мы скажем ещё в конце работы.

Групповые характеры поля *R*

Множество действительных чисел R является полем, т.е. гибридом двух групп: множество всех действительных

[1] Напомним, что они ещё называются интегралами Эйлера первого и второго рода.

чисел образует группу относительно сложения — *аддитивную группу действительных чисел* — коротко будем обозначать её R_0; множество всех тех же чисел без нуля образует группу относительно умножения — *мультипликативную группу действительных чисел* — будем обозначать её R_1; использованные индексы совпадают с нейтральными элементами этих групп: 0 и 1.

Показательная и степенная функции, участвующие в определениях (0), связаны со структурой поля на R: показательные функции e^{ax} (где $x \in R_0, \alpha \in R$) задают всевозможные дифференцируемые гомоморфизмы группы R_0 в группу R_1, точнее, в её связную подгруппу R_+ — т.е. мультипликативную группу положительных чисел; степенные функции x^{μ} (где $x > 0, \mu \in R$) задают всевозможные дифференцируемые гомоморфизмы группы R_+ в себя:

$$\left.\begin{array}{l} h(x+y) \equiv h(x) \times h(y) \\ h(0) = 1, h'(0) = \alpha \end{array}\right\} \Leftrightarrow h(x) = e^{ax}, \left.\begin{array}{l} h(x \times y) \equiv h(x) \times h(y) \\ h(1) = 1, h'(1) = \mu \end{array}\right\} \Leftrightarrow h(x) = x^{\mu}, \quad (1)$$

хотя степенные функции несколько портят вырисовывающуюся здесь картину тем, что определены не на всей группе R_1. Их доопределение на R_1, сохраняющее статус гомоморфизма R_1 в R_1, является доопределением по признаку четности-нечетности.

Заметим также, что показательные и степенные функции являются собственными функциями операторов *аддитивного* и *мультипликативного дифференцирования*[1]

[1] Мультипликативная производная более подробно была рассмотрена в работе [1], хотя её связь с обычной производной вполне тривиальна и легко получается по правилу Лопиталя: $f^*(x) = xf'(x)$.

$$D' \circ f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t - 0} = f'(x),$$

$$D^* \circ f(x) = \lim_{t \to 1} \frac{f(x \times t) - f(x)}{t - 1} = f^*(x):$$

$$D' \circ h(x) = \alpha h(x) \Leftrightarrow h(x) = e^{\alpha x},$$

$$D^* \circ h(x) = \mu h(x) \Leftrightarrow h(x) = |x|^{\mu - m} x^m,$$

с понятными исключениями $\alpha = 0$ и $\mu = 0$, когда к решениям дифференциальных уравнений добавляются тождественные нули.

Введем обозначения:

$$X^{\alpha}(x) = e^{\alpha x}, \text{ где } \alpha \in C; \; X_m^{\mu}(x) = |x|^{\mu - m} x^m,$$

где $\mu \in C, m \in Z$, (2)

хотя при $x \in R$ можно ограничиться значениями $m = 1$ и $m = 2$. Далее нас будут интересовать именно комплексные значения непрерывных параметров: $\alpha, \mu \in C$. Функции (2) задают непрерывные гомоморфизмы аддитивной и мультипликативной групп поля R в мультипликативную группу комплексных чисел C_1 и, таким образом, являются *характерами* этих групп:

$$X^{\alpha}(x + y) = X^{\alpha}(x) \times X^{\alpha}(y),$$

$$X^{\alpha}(-x) = \left(X^{\alpha}(x)\right)^{-1} = X^{-\alpha}(x), \; X^{\alpha}(0) = 1; \qquad (3)$$

$$X_m^{\mu}(x \times y) = X_m^{\mu}(x) \times X_m^{\mu}(y),$$

$$X_m^{\mu}(x^{-1}) = \left(X_m^{\mu}(x)\right)^{-1} = X_{-m}^{-\mu}(x), \; X_m^{\mu}(1) = 1. \qquad (4)$$

Отличать характеры группы R_1 от характеров группы R_0 мы будем по наличию нижнего индекса.

При чисто мнимых α и μ (и $x \in R$) функции $X^{\alpha}(x)$ и $X_m^{\mu}(x)$ унимодулярны:

$$\left|X^{\alpha}(x)\right| \equiv 1 \Leftrightarrow \alpha \in iR, \; \left|X_m^{\mu}(x)\right| \equiv 1 \Leftrightarrow \mu \in iR (m \in Z),$$

т.е. осуществляют гомоморфизмы соответствующих групп в мультипликативную группу комплексных чисел единичного модуля — $U = \{z \in C : |z| = 1\}$.

Унимодулярные характеры групп R_0 и R_1 образуют полные системы функций на этих группах, т.е. почти всякая функция на группе (и на самом поле R) разлагается в интеграл по этим характерам. Эти разложения известны в классическом анализе как интегральные преобразования Фурье и Меллина (вторые здесь будут использованы с некоторой модификацией).

Разложения функций на R по характерам групп R_0 и R_1

Пусть комплекснозначная функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на R относительно меры dx (заметим, что эта мера является инвариантной мерой на аддитивной группе действительных чисел R_0: $d(x+t)=dx$). Для функций этого класса (обозначим его $C_1(R_0)$) разложение по характерам группы R_0 имеет вид разложения в интеграл Фурье:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{i\alpha x}F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha X^{i\alpha}(x)F(\alpha) \qquad (5)$$

где

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\alpha x} f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx X^{-i\alpha}(x) f(x)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx X^{i\alpha}(-x) f(x). \qquad (6)$$

Для взаимно обратных интегральных преобразований (6) — (5) имеют место:

- теорема о свертке

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)h(u-x)=\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha X^{i\alpha}(u)F(\alpha)H(\alpha), \qquad (7)$$

- равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)h(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha F(\alpha)H(\alpha) \qquad (8)$$

и формула Планшереля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| f(x) \right|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \left| F(\alpha) \right|^2, \qquad (9)$$

которая позволяет рассматривать преобразования Фурье в классе функций $L_2(R_0)$, точнее, позволяет пополнить исходное пространство $C_1(R_0)$ по норме $L_2(R_0)$. Здесь $L_2(R_0)$ — класс измеримых на R_0 функций с интегрируемым относительно меры dx квадратом модуля; для функций из других пространств формулы (5), (7), (8) требуют, вообще говоря, другого контура интегрирования по α.

Разложение функций на R по характерам $X_m^{\mu}(x)$ мультипликативной группы R_1 имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\mu}{2i} \sum_{m=0}^{m=1} |x|^{\mu-m} x^m F_m(\mu) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\mu}{2i} \sum_{m=0}^{m=1} X_m^{\mu}(x) F_m(\mu), \quad (10)$$

где

$$F_m(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx |x|^{-1-\mu+m} x^{-m} f(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x|} X_m^{\mu}(x^{-1}) f(x). \quad (11)$$

Эти преобразования сводятся к традиционным преобразованиям Меллина функций на положительной (R_+) и отрицательной (R_-) полуосях действительной прямой, что легко обнаруживается разбиением интеграла (11) на два — как раз по этим связным компонентам мультипликативной группы R_1. Преобразования (10) — (11) мы тоже будем называть преобразованиями Меллина. Заметим, что в (11)

$\frac{dx}{|x|}$ является инвариантной положительно определенной мерой на мультипликативной группе R_1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x|}f(x^{-1})=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{|y|}f(y),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x|}f(ux)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|u|dy}{u\cdot|y|}f(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{|y|}f(y),$$

положительное направление интегрирования восстанавливается за счет знака «–».

Для взаимно обратных интегральных преобразований (11)—(10) имеют место:

- теорема о свертке

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x|}f(x)h\left(\frac{u}{x}\right)=\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{d\mu}{2i}\sum_{m=0}^{m=1}X_m^{\mu}(u)F_m(\mu)H_m(\mu), \quad (12)$$

- равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x|}f(x)h(x^{-1})=\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{d\mu}{2i}\sum_{m=0}^{m=1}F_m(\mu)H_m(\mu) \quad (13)$$

и формула Планшереля

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x|}|f(x)|^2=\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{d\mu}{2i}\sum_{m=0}^{m=1}|F_m(\mu)|^2. \quad (14)$$

Формула Планшереля позволяет пополнить исходное пространство функций на R_1 по норме $L_2(R_1)$.

Отметим также следующие соотношения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dxf(u+x)h(\upsilon+x)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha X^{i\alpha}(u-\upsilon)F(\alpha)H(-\alpha), \quad (15)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x|}f(ux)h(\upsilon x)=\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{d\mu}{2i}\sum_{m=0}^{m=1}X_m^{\mu}\left(\frac{u}{\upsilon}\right)F_m(\mu)H_{-m}(-\mu). \quad (16)$$

Эти формулы получаются с помощью формул (5)—(6) и (10)—(11). Например:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(u+x)h(\upsilon+x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x+u-\upsilon)h(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x+u-\upsilon)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{\sqrt{2\pi}} e^{i\alpha x} H(\alpha)\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x+u-\upsilon)e^{i\alpha x}\right\} H(\alpha) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x)e^{i\alpha(x-u+\upsilon)}\right\} H(\alpha) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{-i\alpha(u-\upsilon)} \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x)e^{i\alpha(x)}\right\} H(\alpha) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{-i\alpha(u-\upsilon)} F(-\alpha)H(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{i\alpha(u-\upsilon)} F(\alpha)H(-\alpha);$$

произведенное здесь формальное изменение порядка интегрирования налагает на подынтегральные функции некоторые ограничения, но не более значительные, чем на равенство Парсеваля, и формулы (15) и (16) равносильны равенствам (8) и (13). Из (15) и (16) также получаются следующие разновидности равенств Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha F(\alpha)H(-\alpha), \qquad (17)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x|} f(x)h(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\mu}{2i} \sum_{m=0}^{m=1} F_m(\mu)H_{-m}(-\mu). \qquad (18)$$

Модифицированные бета- и гамма-функции

Заметим, что классы функций на R, разложимых в интеграл Фурье или интеграл Меллина, это, вообще говоря, разные классы: во-первых, мы рассматриваем эти функции на разных множествах (аддитивной и мультипликативной группах поля), что несущественно для локально-компактного поля; во-вторых, что существеннее, эти классы опре-

деляются разными инвариантными мерами на группах. В связи с этим нам удобно ещё раз переписать преобразование Меллина:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{d\nu}{2i}\sum_{n=0}^{n=1}|x|^{-\frac{1}{2}+\nu-n}\,x^{n}F_{n}(\nu), \qquad (19)$$

где контур γ идет по мнимой оси в положительном направлении с необходимыми изгибами, и

$$F_{n}(\nu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{R}dx\,|x|^{-\frac{1}{2}-\nu+n}\,x^{-n}f(x). \qquad (20)$$

Здесь мы для удобства отказались от использования инвариантной меры на группе R_1 и, таким образом, несколько отступаем от прежней алгебраической трактовки преобразований Меллина. Теорему о свертке (16) можно переписать теперь в виде:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx f(x)h(ux)=\int_{\gamma}\frac{d\nu}{2i}\sum_{n=0}^{n=1}|u|^{-\frac{1}{2}-\nu+n}\,F_{n}(\nu)H_{-n}(-\nu), \quad (21)$$

где пара функций $h(x)$ и $H_{n}(\nu)$, как пара функций $f(x)$ и $F_{n}(\nu)$, удовлетворяет условиям (20)—(19), с заменой контура γ на симметричный ему относительно нуля.

Модифицированные гамма- и бета-функции мы определим следующим образом:

$$\gamma_{n}(\nu,\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\,|x|^{-\frac{1}{2}-\nu+n}\,(x)^{-n}e^{-i\alpha x}, \qquad (22)$$

$$\beta_{n,m}(\nu,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\,|x|^{-\frac{1}{2}-\nu+n}\,x^{-n}\,|1-x|^{-\frac{1}{2}+\mu-m}\,(1-x)^{m}. \quad (23)$$

В сравнении с интегралами Эйлера здесь худшие условия сходимости интегралов, однако модифицированные функции обладают рядом важных свойств, связанных с общими фактами интегралов Фурье и Меллина, использованных в определениях.

Например, имеют место формулы обращения:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{i\alpha x}\gamma_n(\nu,\alpha)=|x|^{-\frac{1}{2}-\nu+n}(x)^{-n}, \qquad (24)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\tau}\frac{d\nu}{2i}\sum_{n=0}^{n=1}|x|^{-\frac{1}{2}+\nu-n}(x)^n\gamma_n(\nu,\alpha)=e^{-i\alpha x}, \qquad (25)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\tau}\frac{d\nu}{2i}\sum_{n=0}^{n=1}|x|^{-\frac{1}{2}+\nu-n}x^n\beta_{n,m}(\nu,\mu)=|1-x|^{-\frac{1}{2}+\mu-m}(1-x)^m, \qquad (26)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\tau}\frac{d\mu}{2i}\sum_{m=0}^{m=1}|x|^{-\frac{1}{2}-\mu+m}x^{-m}\beta_{n,m}(\nu,\mu)=$$

$$=|1-x|^{-\frac{1}{2}-\nu+n}(1-x)^{-n}, \qquad (27)$$

где контуры интегрирования выбираются из условий (31) и (33).

С помощью замены переменной в интеграле (22) получим

$$\gamma_n(\nu,\alpha)=|\alpha|^{-\frac{1}{2}+\nu-n}\alpha^n\gamma_n(\nu;1). \qquad (28)$$

Из этого простого равенства мы получим формулы связи между γ- и β-функциями.

Обозначим

$$f(x)=|x|^{-\frac{1}{2}+\nu-n}x^{-n}, \qquad h(x)=|x|^{-\frac{1}{2}+\mu-m}x^m.$$

Преобразованиями Фурье этих функций будут, согласно определению (22),

$$F(\alpha)=\gamma_n(\nu;\alpha),\ H(\alpha)=\gamma_{-m}(-\mu;\alpha).$$

С помощью теоремы (7) об аддитивной свертке для преобразований Фурье получим

$$\beta_{n,m}(\nu,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dx f(x)h(1-x)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha e^{i\alpha}F(\alpha)H(\alpha). \qquad (29)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\alpha}{\sqrt{2\pi}}e^{i\alpha}\gamma_n(\nu;\alpha)\gamma_{-m}(-\mu;\alpha)=$$

$$=\gamma_n(\nu;1)\gamma_{-m}(-\mu;1)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\alpha}{\sqrt{2\pi}}e^{i\alpha}\,|\alpha|^{-1+\nu-\mu-n+m}\,\alpha^{n-m}=$$

$$=(-1)^{n-m}\gamma_n(\nu;1)\gamma_{-m}(-\mu;1)\gamma_{m-n}\left(\frac{1}{2}+\mu-\nu;1\right).$$

Приведем без вычислений явные выражения интегралов $\gamma_n(\nu,\alpha)$ и $\beta_{n,m}(\nu,\mu)$ через интегралы Эйлера:

$$\gamma_n(\nu,\alpha)=|\alpha|^{-\frac{1}{2}+\nu-n}(i\alpha)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}Cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\nu+n\right)\right]\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right), \quad (30)$$

где

$$\Re\nu<\frac{1}{2}\ ,\ n\in Z\ ,\ \alpha\in R, \quad (31)$$

и эти условия означают сходимость интеграла (22) в окрестности нуля;

$$\beta_{n,m}(\nu,\mu)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\nu+n\right)\right]cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\mu-m\right)\right]}{cos\left[\frac{\pi}{2}(1-\nu+\mu+n-m)\right]}B\left(\frac{1}{2}-\nu,\frac{1}{2}+\mu\right), \quad (32)$$

где

$$-\frac{1}{2}<\Re\mu<\Re\nu<\frac{1}{2}\ ,\ n,m\in Z \quad (33)$$

и эти условия означают абсолютную сходимость несобственного интеграла (23).

Используя известные соотношения для гамма-функций Эйлера

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{sin(\pi z)}\ \text{и}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{cos(\pi z)},$$

из явных выражений γ-функций можно получить соотношения симметрии

$$\gamma_m(\mu;\alpha)\gamma_{-m}(-\mu;-\alpha)=\frac{1}{|\alpha|},$$

$$\beta_{n;m}(\nu;\mu)\beta_{-n;-m}(-\nu;-\mu)=-\frac{ctg\left(\frac{\pi}{2}(\mu-\nu-m+n)\right)}{\mu-\nu}. \qquad (34)$$

Поскольку величины $\gamma_{-m}(-\mu;-\alpha)$ и $\gamma_m(\mu;\alpha)$ комплексно сопряжены при вещественных α и чисто мнимых μ, то

$$\left|\gamma_m(\mu;1)\right|\equiv 1 \text{ при } \mu\in iR \text{ и } m\in Z. \qquad (35)$$

Из (29) и (34) вытекает также формула

$$\beta_{n;m}(\nu;\mu)=\frac{\gamma_n(\nu;\alpha)\gamma_{-m}(-\mu;\alpha)}{\gamma_{n-m}(\nu-\mu-\frac{1}{2};\alpha)}, \qquad (36)$$

сводящаяся к известной формуле связи для гамма- и бета-функций Эйлера

$$B(u;\upsilon)=\frac{\Gamma(u)\Gamma(\upsilon)}{\Gamma(u+\upsilon)}.$$

Интегральные гамма- и бета-преобразования

Модифицированные гамма- и бета-функции, описанные с помощью преобразований Фурье и Меллина, сами выступают ядрами некоторых индуцированных взаимно обратных интегральных преобразований. Эти преобразования, которые мы будем коротко называть гамма-преобразованиями и бета-преобразованиями, представляют разложения функций на характерах аддитивной и мультипликативной групп поля R (как принято говорить в абстрактном гармоническом анализе — на двойственных объектах этих групп) по γ- и β-функциям. Разумеется, мы будем рассматривать эти функции как функции числовых

переменных, выступающих на многообразиях характеров $X^{\alpha}(x)$ и $X_m^{\mu}(x)$ в качестве параметров — α и μ.

Гамма-преобразования имеют вид разложения функции $\varphi(\alpha)$ переменной $\alpha \in R$ в интеграл Меллина по γ-функциям:

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau} \frac{d\mu}{2i} \sum_{m=0}^{m=1} \gamma_m(\mu;\alpha) \Phi_m(\mu), \qquad (37)$$

где контур τ отделяет полюсы $\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\left(\mu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots.\right)$ от полюсов $\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)$, и коэффициенты $\Phi_m(\mu)$ этого разложения имеют вид

$$\Phi_m(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \gamma_{-m}(-\mu;-\alpha) \varphi(\alpha). \qquad (38)$$

Приведем развернутую запись этих преобразований:

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau} \frac{d\mu}{2i} \sum_{m=0}^{m=1} |\alpha|^{-\frac{1}{2}+\mu-m} (i\alpha)^m \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\mu+m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\right] \Phi_m(\mu), \qquad (39)$$

$$\Phi_m(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha |\alpha|^{-\frac{1}{2}-\mu+m} (-i\alpha)^{-m} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\mu-m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)\right] \varphi(\alpha). \qquad (40)$$

Легко видеть, что с помощью первой из формул (34) и переобозначений

$$F_m(\mu) = \gamma_m(\mu;1)\Phi_m(\mu), \quad f(x) = \varphi(x)$$

гамма-преобразования сводятся к модифицированным преобразованиям Меллина (19)—(20).

Бета-преобразования имеют вид

$$\Phi_m(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\tau_2}\frac{d\nu}{2i}\sum_{n=0}^{n=1}\beta_{m;n}(\mu;\nu)\Phi_n^{\beta}(\nu), \qquad (41)$$

где образ Φ^{β} мы отличаем от прообраза Ф по наличию верхнего индекса, и

$$\Phi_n^{\beta}(\nu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\tau_1}\frac{d\mu}{2i}\sum_{m=0}^{m=1}\beta_{n;m}(\nu;\mu)\Phi_m(\mu). \qquad (42)$$

Для бета-преобразований имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\tau_1}\frac{d\mu}{2i}\sum_{m=0}^{m=1}\Phi_m(\mu)\Psi_{-m}(-\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\tau_2}\frac{d\nu}{2i}\sum_{n=0}^{n=1}\Phi_n^{\beta}(\nu)\Psi_{-n}^{\beta}(-\nu), \qquad (43)$$

где пара двойственных функций $\Psi_m(\mu)$ и $\Psi_n^{\beta}(\nu)$, как и пара двойственных функций $\Phi_n(\mu)$ и $\Phi_n^{\beta}(\nu)$, удовлетворяет соотношениям (42)—(41) с заменой контуров τ_1 и τ_2 на симметричные им относительно нуля комплексной плоскости (но также проходимые в положительном направлении). Равенство (43) получается с помощью формальных выкладок, аналогичных тем, с помощью которых было получено равенство (15).

Заметим, что ядра $\beta_{m;n}(\mu;\nu)$ и $\beta_{m;n}(\nu;\mu)=\beta_{m;n}(-\mu;-\nu)$ взаимно обратных бета-преобразований (42)—(41) получаются одно из другого комплексным сопряжением при чисто мнимых μ и ν. Но контуры τ_1 и τ_2 в равенстве (43) не могут одновременно проходить по мнимой оси, где, согласно второй из формул (34), ядра имеют полюса первого порядка. Поэтому формула Планшереля для бета-преобразований не может быть выписана в своем обычном виде, и мы рассматриваем эти преобразования лишь для функции $\Phi(\mu)$, аналитической в некоторой полосе, содержащей мнимую ось.

Формулы (42)—(41) описывают, фактически, преобразования пары функций от μ: $\Phi_0(\mu)$ и $\Phi_1(\mu)$.

Положим, например,

$$\Phi(\mu)=\Phi_0(\mu)=-\Phi_1(\mu).$$

Тогда прямое бета-преобразование (42) после подстановки явных выражений ядер и суммирования по индексу m примет вид:

$$\Phi^{\beta}(\nu)=\int_{\tau 1}\frac{d\mu}{2\pi i}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}\Gamma(\nu-\mu)\Phi(\mu)=\Phi_n^{\beta}(\nu), \quad (44)$$

где контур τ_1 интегрирования по μ отделяет полюсы $\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)$ от полюсов $\Gamma(\nu-\mu)$[1]. Переобозначение образа $\Phi_n^{\beta}(\nu)=\Phi^{\beta}(\nu)$ связано с тем, что он не зависит от индекса n. Поэтому, подставив в формулу обращения (41) явные выражения ядер и произведя суммирование по n, получим формулу обращения в виде:

$$\Phi(\mu)=\int_{\tau_2}\frac{d\nu}{2\pi i}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)}\Gamma(\mu-\nu)\frac{cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+2\nu-\mu\right)\right]}{cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\mu\right)\right]}\Phi^{\beta}(\nu), \quad (45)$$

где контур τ_2 интегрирования по ν отделяет полюсы $\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)$ от полюсов $\Gamma(\mu-\nu)$.

Равенство Парсеваля (43) для пары (44)—(45) примет вид

$$\int_{\tau_1}\frac{d\mu}{2\pi i}\Phi(\mu)\Psi(-\mu)=\int_{\tau_2}\frac{d\nu}{2\pi i}\Phi^{\beta}(\nu)\Psi^{\beta}(-\nu). \quad (46)$$

На этом мы закончим описание свойств модифицированных γ- и β-функций и гамма- и бета-функций Эйлера,

[1] Отделимость же этих двух серий полюсов ядра обеспечивается уже условием, что ν не является отрицательным полуцелым числом.

которые присутствуют в явных выражениях их модификаций. Заметим, что использованные здесь алгебраические соображения позволяют по аналогии определить обобщенные гамма- и бета-функции на групповых характерах некоторых других полей. Для поля комплексных чисел эти обобщенные функции были описаны в работе [2].

Список литературы

1. Гузаиров Г. М. Мультипликативная производная // Гармонический анализ на группах: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 41. М.: МГОПУ, 2003. С. 20—28.

2. Гузаиров Г. М. Обобщенные бета- и гамма-функции на групповых характерах поля *C* и связанные с ними интегральные преобразования // Гармонический анализ на группах: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 41. М.: МГОПУ, 2003. С. 29—39.

Краткие сведения об авторах

Гузаиров Г. М. — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа и методики преподавания математики Оренбургского государственного педагогического университета.

Зубова И. К. — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Оренбургского государственного университета.

Иванова Т. И. — преподаватель Оренбургского государственного экономического колледжа.

Игнатушина И. В. — старший преподаватель кафедры математического анализа и методики преподавания математики Оренбургского государственного педагогического университета.

Личикова Ж. Ю. — старший преподаватель кафедры информатики Оренбургского государственного педагогического университета.

Матвиевская Г. П. — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и истории математики Оренбургского государственного педагогического университета.

Павлидис В. Д. — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой прикладной математики Оренбургского государственного аграрного университета.

Научное издание

ИЗ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ XVIII ВЕКА

К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера
(1707—1783)

Выпуск 4

Редакторы И. Н. Рожков, Е. С. Рожкова
Технический редактор И. Н. Рожков

Подписано в печать 23.08.2004 г.
Усл. печ. л. 9,59
Тираж 200 экз.

Издательство Оренбургского государственного педагогического университета. 460844, г. Оренбург, ул. Советская, 19