УДК 140.8
ББК 87
Ц34

Исследования, нашедшие отражение в книге, поддержаны Российским гуманитарным научным фондом (грант № 01—03—00131) и Интеграционным проектом Сибирского отделения РАН (грант № 38)

Утверждено к печати Ученым советом
Института философии и права СО РАН

Целищев В.В.

Ц34 Философия математики. Ч. 1. — Новосибирск: Наука, 2002. — 212 с.
ISBN 5—02—031888—4.

В монографии отражены исследования в области философии математики, чрезвычайно важные для понимания соотношения формальных систем и их философских интерпретаций. В центре внимания находятся интерпретации теоремы Левенгейма — Сколема и континуум-гипотезы Кантора, а также обсуждение теоретико-множественных аксиом и логических языков математики. Значительная часть книги посвящена исследованиям философов математики, проведенным за последние два десятка лет.

Книга предназначена всем, интересующимся философией математики.

УДК 140.8
ББК 87

Без объявления

ISBN 5—02—031888—4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Философия математики является восхитительной ветвью философии. Согласно Б. Расселу, «проблема, которую Кант положил в основу своей философии, а именно, “Как возможна чистая математика?”, интересна и трудна, и любая философия, если она не полностью скептическая, должна найти какое-то ее решение»[1]. Правда Я. Хакинг лаконично заметил по этому поводу, что «Рассел преувеличил. Есть много философий, которые не полностью скептичны, и которые вовсе не интересуются проблемой, поставленной Кантом»[2]. Наверное, Хакинг прав, и это обстоятельство, возможно, объясняет тот печальный факт, что философия математики занимает философов все меньше и меньше. В какой-то степени это есть результат определенного застоя в области, которую в начале XX века усилия таких великих мыслителей, как Б. Рассел, Д. Гильберт, Я. Брауэр по разрешению противоречий в основаниях математики поставили в центр внимания философии. Определенные итоги этого огромного интеллектуального предприятия были подведены в 1930-м году на знаменитом симпозиуме в Кенигсберге, где логицизм был представлен в докладе Р. Карнапа, интуиционизм — в докладе А. Гейтинга, а формализм — в докладе Дж. фон Неймана. А затем последовало доказательство К. Геделя о неполноте арифметики, которое почти полностью вытеснило на долгое время традиционную проблематику философии математики. Как бы то ни было, в течение почти пяти десятков лет изучающие философию математики сталкивались в книгах с одними и теми же вопросами и именами.

«Каноническое» состояние проблем философии математики можно найти в известной антологии *Философия математики* под редакцией П. Бенацеррафа и Х. Патнэма издания 1964 года[3]. При-

---

[1] Рассел Б. *Проблемы философии* / Пер. В.В. Целищева. — Новосибирск: Наука, 2001. — С. 57.
[2] Hacking J. *What Mathematics Has Done to Some and Only Some Philosophers* // Mathematics and Necessity / Ed. T. Smiley. — Oxford: University Press, 2000. — P. 83.
[3] *Philosophy of Mathematics* / Ed. P. Benacerraf, H. Putnam. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964.

мерно с этого времени постепенно стали накапливаться аномалии (если прибегнуть к терминологии из философии науки Т. Куна) в стандартной парадигме философии математики, и к началу 1990-х годов стало ясно, что на смену старой парадигме приходит новая. Появились новые яркие имена с новыми идеями и пониманием того, что важно в нынешней философии математики. Однако итоговые книги, которые бы давали более или менее адекватное представление в целом о том, что делается в этой области, пока запаздывают.

Данная книга никоим образом не претендует на попытку восполнить этот пробел в полном объеме, и представляет лишь малую часть материала, который может быть полезен философам, интересующимся последними идеями и работами в философии математики. Как и в любой другой области при написании книги трудно избежать влияния великолепных образцов, представленных читающей публике ранее. В частности, в значительной степени материал данной книги был мотивирован работами М. Тайлс, П. Мэдди и С. Шапиро. Автор старался как можно точнее и адекватнее передавать концепции обсуждаемых исследователей, что крайне необходимо в таких областях, как философия математики. Идеи П. Бенацеррафа инспирировали основную тему книги, а именно эпистемологизацию философии математики. Величественные философские программы Х. Патнэма, основанные на математических результатах, заняли важное место в книге. Подлинными героями нарратива можно назвать Г. Кантора, Э. Цермело, Т. Сколема, идеи которых сыграли важнейшую роль в становлении философии математики, но как-то отошли на задний план в господствующей парадигме. Пересмотр парадигмы в определенной степени является результатом критического анализа ситуации в философии математики, представленного в работе семинара новосибирских математиков и философов под руководством Ю.Л. Ершова и В.В. Целищева *Проблемно-ориентированный подход к философии науки*[4]. Решимости автора данной книги в представлении материала добавила готовность Я. Хинтикки к «деконструкции» современной философии математики, очерк которой был дан им в книге *Принципы математики ревизированные*.

В книгу не вошло значительное число интереснейших тем, в частности, проблемы интуиции в математике, разрабатываемые Ч. Парсонсом, структурализм, развиваемый С. Шапиро и М. Резником, модальные конструкции Г. Хеллмана и Ч. Чихары, фикционализм

[4] *Проблемно-ориентированный* подход к науке: Философия математики как концептуальный прагматизм / Отв. ред. В.В. Целищев. — Новосибирск: Наука, 2001. — 154 с.

Х. Филда и многое другое. Автору лишь остается выразить надежду, что эта работа будет выполнена в ближайшее время и найдет отражение в будущих публикациях частей 2 и 3 *Философии математики*.

В работе над книгой неоценимую помощь оказали библиотеки Университета Тохоку (Япония, Сендай), Миланского и Венского университетов. Автор также благодарен всем коллегам в Европе и Америке, особенно П. Бенацеррафу, Дж. Аззуни, Ч. Парсонсу, Г. Хеллману, Я. Хинтикке за любезное предоставление материалов.

Книга предназначена для всех тех, кто интересуется философией математики. Автор также надеется на то, что она будет полезна и аспирантам, которые должны теперь иметь некоторое представление об истории и философии соответствующей отрасли знания (в данном случае, математики и всего с ней связанного). Наконец, автор пытался сделать книгу не просто информативной, но и отчасти занимательной. В какой мере это удалось, судить читателю.

Философия математики есть философия в ее чистейшем состоянии, свободном от всяких мирских соображений, философия без всякого подслащивания в виде претензий на Важность для Повседневных Проблем.

Поль Бенацерраф

ВВЕДЕНИЕ

Философия долгое время ассоциировалась с математикой, и было бы весьма прискорбно игнорировать это важное историческое обстоятельство. Дело в том, что многие философские аргументы, используемые в тех областях философии, которые имеют приложения, в значительной степени «прокатаны» при обсуждении тех проблем, которые так и или иначе связаны с философией математики. Например, обсуждение таких фундаментальных этических проблем, как Формы Справедливости, Благо и других категорий восходит к проблеме существования абстрактных объектов, которая наиболее успешно и конструктивно обсуждалась и обсуждается во все той же философии математики.

С другой стороны, написание таких книг и апелляция через них к потенциальному читателю всегда проблематичны, поскольку сама область исследований просто зачастую непонятна. Все знают о математике, некоторые знают о философии, но не так много тех, кто имеет представление о философии математики. Известный философ математики П. Мэдди, говорит, что ее признание в обществе образованных людей в том, что она является философом математики, приводит к некоторому замешательству — всем более или менее понятно, что такое математика, менее ясно, что такое философия, но философия математики?..

Известно, что сами работающие математики спокойно обходятся без философии (кроме, может быть, некоторых выдающихся, которых беспокоят вечные философские вопросы). Известно также,

что подавляющее число философов находятся в счастливом неведении относительно тех проблем, которые обсуждаются в математике. Так что эти проблемы могут касаться только весьма узкого круга читателей. Эта ситуация вполне понятна и на обыденном уровне. Для того чтобы читать работы по философии математики, требуется знание не только философии, но и некоторое представление о математике, в частности, о математической логике, а также способность следить за математической аргументацией. Обычному читателю философских книг будут непонятны математические и логические детали, работающему математику будет непонятна возня вокруг «тривиальных» философских положений.

Необходимость разбираться в технических деталях представляет одну из причин того, что часто философии математики отказывают в статусе подлинной философии, которая должна заниматься «реальными» и «жизненными» проблемами. Так, математик Ж.-К. Рота утверждает, что «...философы этого века больше, чем когда-либо страдали от диктата определенности. Иллюзия окончательного ответа, который не смог быть получен на протяжении двух с половиной тысяч лет в Западной философии, обернулась в нынешнем веке рабской имитацией математики»[1]. Далее он говорит: «Снобическое разбрасывание по страницам философских статей символов просто удивляет математиков. Ситуацию можно уподобить тому, как если бы вы расплачивались в магазине долларами из настольной игры *Монополия*»[2].

Этому мнению противостоит мнение известного философа и математика Х. Патнэма: «Орды интеллектуалов жалуются, что философия стала слишком “технической”, что она “отреклась” от реальных проблем, и т.п. ...Но печальным фактом остается то, что добротная философия есть и всегда была трудна, и что гораздо легче выучить имена немногих философов, чем прочитать их книги. Тот, кто находит философию слишком “технической” сегодня, не смог бы найти времени или желания уследить за длинной цепью аргументов Сократа, или же прочитать одну из *Критик* Канта»[3].

Чем занимается философия математики? Прежде всего, такими фундаментальными вопросами, как «Что такое математика?», «Какого рода знанием является математическое знание?», «Какова спе-

[1] Rota G.-C. *The Pernicious Influence of Mathematics upon Philosophy* // Synthese 88: 165—178, 1991. — P. 167.

[2] Ibid. — P. 168—169.

[3] Putnam H. *Review of the Concept of a Person* // Philosophical Papers. Mind, Language and Reality. — Cambridge: University Press, 1975. — Vol. 2. — P. 132—133.

цифика математических объектов?» Все эти вопросы традиционны для философии математики, но сейчас на первый план выходит вопрос о том, каким образом люди, с их ограниченным чувственным видением мира, входят в контакт с идеальными объектами математики и получают знание математических истин об этих объектах. Заранее нужно отметить важный факт по поводу того, как понимается философия математики разными научными сообществами. Философы и математики, занятые основаниями математики, имеют одну точку зрения, а работающие математики — другую. Философы заинтересованы в поиске философских категорий, которые позволили бы объяснить природу математических объектов, т.е. открыть нечто большее о математических объектах, чем это делается в математических теориях. Для этой цели соотносятся математические объекты, например множества, и философские категории, например универсалии. Математические утверждения об объектах математики анализируются в терминах теории познания, а математические теории оцениваются как свидетельства в пользу той или иной философской концепции. При таком подходе осуществляется сведение проблем о природе специфических математических объектов к общефилософским проблемам.

Работающие математики совсем по-другому рассматривают проблемы оснований математики, не считая важными те вопросы, которые считаются таковыми философами. Здесь взгляды на природу математических утверждений и математических объектов в сильнейшей степени зависят от степени интереса математиков к теоретико-познавательным проблемам. Следует признать, что существуют две ориентации, которые можно назвать ориентацией работающего математика и ориентацией философского логика. Обе позиции превосходно охарактеризованы Р. Мартином:

«Внимание математика приковано главным образом к математической структуре, и его интеллектуальный восторг вызывается открытием того, что данная теория проявляет такие-то и такие-то структуры, или открытием, что одна структура "моделируется" другой, или открытием некоторых других структур, и показом того, как они соотносятся с уже изученными структурами... Математик удовлетворен работой с некоторыми "сущностями" или "объектами" ("множествами", "числами", "функциями", "пространствами", "точками"), и он не исследует их внутренний характер или онтологический статус. Философский логик, с другой стороны, более чувствителен к онтологии и будет особенно заинтересован в том, какого рода сущностями они являются в действительности... Он не удовлетворяется тем простым фактом, что такие-то и такие-то сущности проявляют такую-то и такую-то математическую структуру. Он хотел более глубоко исследовать, что это за сущности и как они соотносятся с другими сущностями... Он также хотел бы знать, выступают ли эти сущности как sui generis, или же они в некотором смысле сводимы (или построены в терминах) к другим, вероятно, более фундаментальным»[4].

Учитывая все вышесказанное, ясно, что эта книга обращена к философам, и только к ним. Дело в том, что многие вещи, кажущиеся тривиальными математикам, в сильнейшей степени озадачивают философов. В качестве типичного примера можно указать теорию трансфинитных чисел Кантора. В обычном учебнике по математике, где есть глава с изложением теории множеств, основные результаты этой теории излагаются на нескольких страницах. Между тем философам известно, что при создании теории Кантор огромное значение придавал метафизическим и даже теологическим соображениям о бесконечности. Поэтому для философа математики интерес представляет, скажем, логика теории Кантора, ее генетическая структура, и если прибегнуть к крайностям, можно сказать, что философа интересует как раз то, что совсем не интересует математика.

Однако для понимания проблем философии математики и их решений требуется знание деталей. Степень детализации при изложении таких вопросов — дело тонкое, и зависит от многих вещей. Одним из тезисов этой книги является то, что зачастую невнимание к этим деталям приводит к существенным искажениям интерпретации формализмов, и больше того, к необоснованным философским заключениям. Поэтому технические детали приводятся, по большей части, там, где следует опасаться именно такой напасти.

В книге избегались «избитые» вопросы философии математики, в частности, обсуждение тезисов классических школ философии математики XX в., а именно логицизм, интуиционизм, формализм, потому что по выражению X. Патнэма «ничего из этого уже не работает». Больше того, содержание книги практически ограничено обсуждением проблем, концентрирующихся вокруг двух тем. Это теория множеств Кантора и ее аксиоматизация, а также теорема Левенгейма — Сколема. Хотя обе темы хорошо известны, в традиционных изложениях философии математики они зачастую избегаются, уступая место таким темам, как парадоксы теории множеств и способы их решения в логицизме, интуиционизме и формализме,

[4] Martin R. *Intension and Decision.* — N.Y., 1964. — P. 42.

теорема Геделя о неполноте, формализация математики и пр. Между тем показательно, что теория Кантора, которая часто рассматривается в традиционных курсах лишь как повод для разговора о парадоксах, совсем по-другому рассматривалась теми же классиками в области оснований математики. Б. Рассел, который одновременно с Э. Цермело предложил выход из парадоксов теории множеств (Рассел предложил в 1908 г. теорию типов, а Цермело в том же году — аксиоматическую теорию множеств), уже после публикации *Principia Mathematica,* в работе *Наше познание внешнего мира* 1914 г. значительнейшее место уделил тем следствиям, которые теория Кантора имела для философии. Что касается теоремы Левенгейма — Сколема, то она вообще обойдена вниманием философов, в то время как она породила в последнее время целое философское направление, а именно так называемый внутренний реализм X. Патнэма, направление, которое оказало большое влияние на дискуссии о природе реальности и ее «схватывании» языком.

Наконец, еще одно соображение, которым руководствовался автор книги, избегая «избитых» тем вроде парадоксов, их значимости для ситуации в математике. В большинстве учебников приводится распространенная история о том, что теория множеств возникла как результат наивной интуиции, которая привела к парадоксам, вследствие чего интуиция объявлялась ненадежной, и существующие аксиоматизации теории множеств исторически возникли как реакция на парадоксы. Многие исследователи опровергают эту точку зрения[5]. История с парадоксами касается логического понятия множества, которое использовалось Расселом в чисто философской программе. А в математике применяется комбинаторное понятие множества, и собственно математические исследования Кантора касались этого понятия, связанного с обобщенным понятием функции как полностью произвольного соответствия. Эта точка зрения принимает совсем четкий вид у Геделя: «Более близкий взгляд показывает, что теоретико-множественные парадоксы не причиняют особых неприятностей. Они представляют серьезнейшую проблему, однако не для математики, а скорее для логики и эпистемологии»[6].

Поворот в философии математики скорее к математической практике, а не традиционным философским программам, знаменует собой натурализацию этой дисциплины. Поворот этот прослеживается очень зримо на работах одного из ведущих специалистов в области оснований математики П. Мэдди. Если в книге *Математический реализм*[7], опубликованной в 1990 г., она придерживается реализма, считая его доминирующим взглядом в философии математики, то в новой книге *Натурализм в математике*[8] 1997 г. она отказывается от философских тенет и исповедует принцип «максимизации», согласно которому математик может постулировать любые виды объектов и изучать их, не вопрошая, «а существуют ли эти объекты?». Так что стратегия, принятая в нашей книге по философии математики, и заключающаяся в том, что мы избегаем традиционных вопросов об истине математических утверждений и о существовании математических объектов, имеет свои резоны. Между тем краткую сводку этого традиционного материала можно найти в некоторых *Прелюдиях* к главам; этот нетрадиционный способ преподнесения материала также имеет свои резоны.

С философской точки зрения философия математики претерпела в известной степени «эпистемологический поворот», напоминающий «лингвистический» поворот в аналитической философии полувеком ранее. В значительной степени именно эти тенденции будут фоновыми при рассмотрении различного рода проблем. В целом это книга о взаимоотношениях математики и философии (или математиков и философов). На этот счет имеются самые разные мнения. Цеховые интересы и предпочтения проявляются тут с удивительным непониманием противоположной стороны. Так, по поводу Б. Рассела с его логицистской программой ныне говорят, что в конце концов Б. Рассел был все-таки философом, а по поводу Я. Брауэра говорят о его философских «чудачествах». Об увлечении К. Геделя последние четыре десятка лет его жизни философией И. Канта и Э. Гуссерля говорят со смешанным чувством уважения к достижениям логика и недоумения по поводу странностей гения. Этот перечень можно продолжать достаточно долго, и всякий раз мы сталкиваемся с тем, что превосходно выразил Ж.-К. Рота в статье *Математика и философия: история взаимного непонимания*[9].

Рота говорит о том, что математика имеет дело, во-первых, с фактами, как и любая другая наука. Во-вторых, математика имеет дело с доказательствами, которые кодифицируются в аксиоматических системах. В этом, по его выражению, проявляется двойная жизнь

[5] См., например: Lavine Sh. *Understanding the Infinite.* — Cambridge: Harvard University Press, 1994.

[6] Godel K. *What is Cantor's Continuum Problem?* // Philosophy of Mathematics / Ed. P. Benacerraf, H. Putnam. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964. — P. 262.

[7] Maddy P. *Realism in Mathematics.* — Oxford: University Press, 1990.

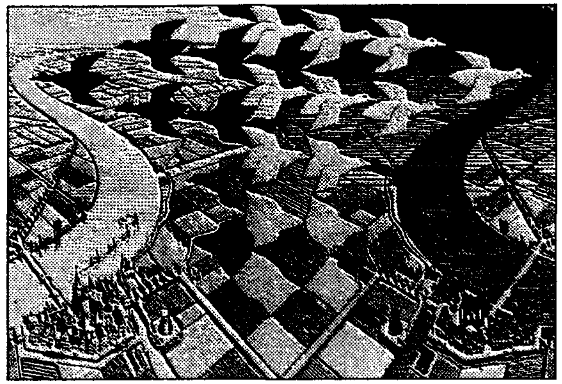
[8] Maddy P. *Naturalism in Mathematics.* — Oxford: University Press, 1997.

[9] Rota G.-C. *Mathematics and Philosophy: Story of Misunderstanding* // Review of Metaphysics. — 1990. — Vol. 44, N 174, Dec.

математики, вполне успешная жизнь, вызвавшая зависть философии. Во-первых, философия имеет дело со способами описания мира, а во-вторых, философия опирается на аргументацию. Но по поводу методов аргументации среди философов никогда не было согласия. «Отношения философов с богиней Разума всегда были ближе к вынужденному сожительству, чем к романтической связи между богиней Разума и математиками»[10].

Попытка устранить неясности в философской аргументации с помощью математики давно превратилась в мощную индустрию. Однако по ходу того, как основная «производительная сила» этой индустрии — математическая логика — становилась все более математической дисциплиной, стало закрадываться сомнение в том, насколько формальный аппарат логики, а также математические теоремы могут быть правильно интерпретированы философски. Именно этим вопросам и посвящена данная книга.

[10] Rota G.-C. *Mathematics and Philosophy*. — P. 260.



ПРЕЛЮДИЯ К ГЛАВЕ 1

В момент возникновения Науки математика и религия были партнерами. От их союза произошли два отпрыска, Платонизм и Основания, с притязаниями на знатность. (Математические истины суть вечные истины в уме Бога; интуиция, способность человека взаимодействовать с этими истинами может дать неоспоримые основания.) После Канта этот союз распался, и религия была изгнана из страны Науки. Одна из главных защитниц Оснований, Евклидова геометрия, была вытеснена своими молодыми кузенами — Неевклидовыми геометриями, и была ущемлена Анализом и Арифметизацией. Их дитя, Множество, обещало защитить отпрысков, но не смогло по причине своей нетвердости. Вопреки усилиям трех защитников — Лог(ицизма), Инт(уиционизма) и Фор(мализма), Основания умерли. Платонизм выжил, и несмотря на то, что его теологические претензии гражданами государства Науки были преданы анафеме, доминирующая философия продолжала предоставлять ему убежище. По ходу всей истории гуманистическое меньшинство пыталось свергнуть Платонизм с его притязаниями. Математика не должна, по заверениям гуманистов, подчиняться диктату Платонизма. Она должна жить своей собственной жизнью, подчиняясь лишь установленным самой правилам. С некоторыми заметными гуманистическими исключениями (среди них Аристотель, Локк, Виттгенштейн, Лакатос, Китчер) доминирующая тенденция включает традиционную и современную философию математики.

Р. Херш. *Что же такое математика, на самом деле?*[1]

[1] Hersh R. *What is Mathematics, Really*? — Oxford: University Press, 1997.

ГЛАВА 1

ПОИСКИ НОВОЙ ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ

1. Философские программы в математике

Философия математики как отдельная ветвь философии родилась сто лет назад. Исследования в области оснований математики и математической логики, начатые в конце XIX — начале XX в., были связаны с грандиозными философскими программами, а именно с логицизмом, интуиционизмом и формализмом.

С тех пор традиционным описанием проблем философии математики стало описание того состояния оснований математики и ее философии, которое явилось естественным завершением попыток преодолеть кризис в основаниях математики, развившийся в начале XX в. Этот уже почти хрестоматийный материал хорошо известен читателю даже в самом простом нетехническом преподнесении, например, через превосходную книгу М. Клайна[1], не говоря уже о массе более технических изложений[2]. Существует много других книг, в которых излагается материал, в той или иной мере связанный с достижениями в математической логике и основаниях математики, и во всех этих книгах фигурируют одни и те же имена и одни и те же проблемы — логицизм Г. Фреге и Б. Рассела, интуиционизм Я. Брауэра и А. Гейтинга, формализм Д. Гильберта и Дж. фон Неймана.

Поначалу эта связь философии и математики казалась необходимой, но со временем росло разочарование в выполнимости этих

[1] Клайн М. *Математика: утрата определенности*. — М.: Мир, 1984.
[2] См., например: Korner S. *The Philosophy of Mathematics*. — L.: Hutchinson, 1960.

программ, и к 1960-м годам в настроениях математиков и логиков стала превалировать усталость. В этом отношении весьма симптоматично замечание А. Мостовского в работе *Тридцать лет исследований в области оснований математики*: «Философские цели трех школ не были достигнуты, и, судя по всему, мы не ближе к полному пониманию математики, чем основатели этих школ»[3]. Многие исследователи полагают, что сами программы не имеют и не имели прямого отношения к основаниям математики и математической логике, а возникновение программ обязано философским талантам и интересам основателей школ. Больше того, другие исследователи полагают, что сами философские программы появились в результате случайных исторических совпадений, в частности того, что такие люди, как Рассел, будучи одинаково компетентными в математике и философии, связали теорию типов как математическую программу с логицизмом как философской программой. По крайней мере, среди философов подобного рода связь закрепилась надолго, и потребовалось значительное время для того чтобы ощутить необходимость в ревизии таких «заблуждений». Другим примером может служить интуиционизм Брауэра, философские основания которого кажутся весьма далекими от конструктивистской математики. Наконец, вступающие в область философии математики встречаются с явным затруднением, пытаясь примирить мнения о формализме Гильберта с его знаменитым лозунгом «Никто не может изгнать нас из рая, созданного для нас Кантором» (рая, естественно, платонистского). Характерно в этой связи свидетельство Хао Вана: «интерес философов к основаниям математики возник как результат той исторической случайности, что Рассел и Фреге правильно или неправильно связали некоторые области математики с философией… Тем не менее, с устойчивостью этого интереса следует считаться, хотя и сожалея о бедности философии»[4].

Определенная стагнация в этой области философии может быть оценена в сравнении с философией науки. В 30—40-х годах XX в. философия науки направлялась логическими позитивистами, влияние которых ослабло лишь с появлением новых идей о решающей роли научной практики и исторических изысканий в науке. Р. Херш говорит, что «философия математики запоздала со своими Поппером, Куном, Лакатосом и Фейерабендом. Она запоздала с анализом

[3] Mostowski A. *Thirty Years of Foundational Studies* // Acta Philosophica Fennica, Fasc. 17. — Helsinki, 1965. — P. 8.

[4] Хао Ван. *Процесс и существование* // Математическая логика и ее применение. — М., 1965.

того, что делают сами математики, и с соответствующими философскими рассмотрениями»[5].

В цитированном выше отрывке А. Мостовский продолжает уже с большим оптимизмом: «Вопреки этому, нельзя отрицать, что активность этих школ принесла огромное число новых важных открытий, которые углубили наше познание математики и ее отношение к логике. Как часто случается, побочные продукты оказались более важными, чем исходные цели основателей трех школ». Но возможно, именно это обстоятельство явилось причиной отсутствия прогресса в философии математики, потому что проблемы, бывшие собственно философскими, перестали быть таковыми, перейдя в разряд «технических», чисто математических или логических. Быть может, исследования в области философии математики, точнее, оснований математики, действительно должны быть в высшей степени техническими исследованиями, а само появление традиционных классических направлений было обязано тому, что «отцы-основатели» сумели соотнести (быть может, и не совсем обоснованно) математические и философские проблемы, как это сделал Рассел, увязав поиски спасения от парадоксов с логицизмом. Кстати, такого рода процессы происходили непрерывно, например, в 60-е годы XX в. одним из аспектов такой технизации философии явилась алгебраизация логики, связанная с развитием теории моделей, когда к удивлению философов, всегда считавших логику своей вотчиной, многие ее положения стали алгебраическими теоремами.

Современными свидетельствами усталости и недовольства могут служить признания двух ведущих философов математики. Недавно видный философ и математик Х. Патнэм опубликовал статью с характерным названием *Почему ничего из этого не работает* (имея в виду традиционно главные направления в философии математики). Далее, видный логик Я. Хинтикка отмечает, что «подобно Деррида, я верю, что современная философия… созрела для деконструкции»[6]. Нет никаких сомнений, какую часть современной философии Хинтикка хочет деконструировать, если иметь в виду вышедшую годом ранее его книгу *Принципы математики ревизированные*[7], название которой, по его признанию, есть аллюзия

[5] Hersh R. *A Fresh Winds in the Philosophy of Mathematics* // Amer. Math. Monthly. — 1995. — Aug.-Sept. — P. 590—591.

[6] Hintikka Ja. *Lingua Universalis vs Calculus Ratiocinator.* — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. — P. 2.

[7] Hintikka Ja. *Principles of Mathematics Revisited.* — Cambridge: University Press, 1996.

к работе Рассела *Принципы математики* 1903 г., в которой изложены многие программные идеи в области оснований математики.

Известный математик Ж.-К. Рота идет еще дальше и дает объяснение тому факту, что философия пошла по неверному пути вообще, ассоциировав себя с математикой. Философия, подобно математике, опирается на аргументацию, поскольку обе науки используют логику. Но в отличие от общепринятых стандартов у математиков стандарты аргументации у философов оказались весьма различными. Рота утверждает, что заключения философов часто диктуются эмоциями, и разум в этих заключениях играет лишь вспомогательную роль, а поиски философией окончательного ответа на свои вопросы вылились в рабскую имитацию математики. Апелляция к математической логике, которая и представляет собой главную основу философии математики, оказалась несостоятельной, потому что логика больше не является частью философии. Математическая логика является процветающей частью математики, и она прекратила свои связи с основаниями математики. «Ценой допущения логики в математическую область было гигиеническое очищение даже от следов философии»[8].

Другими словами, философия математики оказалась в глубоком кризисе, начиная с 50—60-х годов XX в., когда были исчерпаны ресурсы традиционных подходов к пониманию оснований математики. И хотя традиционное преподнесение проблем этой области философских исследований опиралось (да и опирается сейчас) на три великих направления, существует глубокий скепсис относительно возможностей самой дисциплины. И тем не менее, по мнению ряда авторитетных исследователей, дисциплина выжила, поскольку старые проблемы были заменены новыми[9].

2. Сводка направлений в философии математики

Действительно, не все так безнадежно, и в уже цитированной выше работе Х. Патнэм дает краткий перечень устаревших и новых взглядов в философии математики:

логицизм (математика есть логика в чужом одеянии);

[8] Hintikka Ja. *Principles of Mathematics Revisited.*

[9] Maddy P. *Philosophy of Mathematics: Prospects for the 1990s* // Synthese 88. — 1991. — P. 155—164.

логический позитивизм (математические истины суть истины благодаря правилам языка);

формализм (теория множеств и неконструктивная математика суть просто «идеальное» — и само по себе не несущее смысла — расширение «реальной» — конечной и комбинаторной — математики);

платонизм (согласно Геделю, реально существуют математические объекты, и человеческий ум имеет способность, отличающуюся в некоторой степени от восприятия, с помощью которой он приобретает все лучшую интуицию относительно поведения таких объектов);

холизм (В. Куайн полагал, что математика должна рассматриваться не как отдельная наука, а как часть всей науки, и необходимость квантификации над математическими объектами в случае достаточно богатого языка для эмпирических наук есть наилучшее свидетельство в пользу «постулирования множеств с той же степенью обоснования, какую мы имеем при всяком онтологическом постулировании»; множества и электроны рассматривались Куайном на пару как нечто такое, что нужно постулировать в процессе научного исследования);

квазиэмпирический реализм (идея, о том, что есть нечто аналогичное эмпирическому исследованию в чистой математике);

модализм (мы можем переформулировать классическую математику таким образом, что вместо разговора о множествах, числах и других объектах будем просто утверждать возможность или невозможность определенных структур);

интуиционизм (принятие математических утверждений как значимых, и в то же время отказ от реалистических посылок относительно истин, например бивалентности).

Патнэм полагает, что следует отказаться от первых четырех направлений и продолжать исследования, которые представляют собой определенную смесь последних четырех направлений. Другие исследователи считают перспективными направления, которые в той или иной степени пересекаются с этими последними, но в некотором смысле (в другой классификации) являются самостоятельными. Так, Дж. Кетланд говорит о дополнении списка Патнэма еще тремя направлениями, полагая при этом, что в целом этот список, состоящий из 11 направлений, покрывает все направления в философии математики[10]:

номинализм (программа Х. Филда);

[10] www.math.psu.edu/simpson/fom/posting/006/msg00142.html

структурализм (программа С. Шапиро и М. Резника);
натурализм (программа П. Мэдди).

Само многообразие направлений не должно вызывать удивления, поскольку это довольно распространенное явление в современной аналитической философии. Действительно, важнейшим отличием описания того, что собой представляет нынешняя философия математики по сравнению с классической, является почти полная бесполезность устойчивой классификации. В этом отношении ситуация в философии математики похожа на ситуацию в аналитической философии вообще. Дж. Пассмор выразил свое ощущение этой ситуации такими словами: «Буйное, плохо вмещающееся в какие-либо рамки, невероятно разнообразное в целях и методах — можно ли надеяться описать, хоть и кратко, но в то же время с достаточным охватом англо-американское философское предприятие? Ответ на этот вопрос — невозможно. Столь много философов творят в наше время, столь много проблем поднято ими, и поэтому полнота больше не представляется разумной амбицией. Более скромное название моей книги, скажем *Некоторые последние философские споры, слишком кратко описанные*, было бы более подходящим названием в современном стиле»[11].

Далее будет представлено краткое описание новых направлений в философии математики, которые появились за последнее время, будучи реакцией на «усталость» от классических направлений. Описание не претендует на полноту и очерчивает эти направления в самых общих чертах.

3. Структурализм, номинализм, натурализм

Из вышеперечисленных направлений рассмотрим только те, которые широко обсуждаются в нынешней литературе по философии математики. Прежде всего следует рассмотреть структурализм как одно из самых важных направлений современной философии математики. Ранним влиятельнейшим идеологом этого направления выступил Н. Бурбаки. Основными нынешними представителями структурализма являются П. Бенацерраф[12], С. Шапиро[13] и М. Резник[14].

---

[11] Passmore J. *Recent Philosophers*. — N.Y.: Open Court, 1991.
[12] Benacerraf P. *What Numbers Could Not Be* // Philos. Rev. — 1965. — Vol. 74, № 1.
[13] Shapiro S. *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*. — Oxford: University Press, 1997.
[14] Resnik M. *Mathematics as a Science of Patterns*. — Oxford: Clarendon Press, 1997.

А. Структурализм

Платонистская посылка о существовании независимых от человеческого сознания четко определенных объектов является весьма уязвимой с точки зрения современной философии математики. В частности, критике подвергается платонистское утверждение о том, что имеется единственная последовательность абстрактных объектов, которые представляют собой натуральные числа. Отказ от этого утверждения характерен для широко известного направления, называемого структурализмом. Правда, при обсуждении этого направления следует иметь в виду две вещи. Во-первых, сам термин «структурализм» является настолько широким, что его надо понимать здесь в специальном смысле философии математики. Но даже и здесь этот термин имеет расширительное значение благодаря программе Н. Бурбаки. Во-вторых, это философское направление еще не приобрело окончательных очертаний, и скорее, это некоторая перспективная программа исследований.

Структурализм является реакцией на проблему неединственности представления математических объектов. Проблема может быть описана так: платонисты утверждают, что математика говорит об объектах, но мы ничего не можем знать об этих объектах, кроме того, что они соотносятся друг с другом определенным образом. Если математические объекты должны иметь некоторые свойства сами по себе, тогда эти свойства скрыты от математиков и не важны для них. Например, какие конкретные объекты мы можем назвать натуральными числами?

Начиная с работ Фреге, Рассела и Уайтхеда, числа считаются множествами. В этом смысле можно было бы сказать, что натуральными числами мы можем назвать множества. При этом множества могут трактоваться как те самые объекты, которые требуются для платонистской картины. Для этого надо, чтобы редукция натуральных чисел к множествам была единственной, т.е. каждому натуральному числу должно соответствовать определенное множество. Но как раз это условие не может быть выполнено. Бенацерраф первым указал на это обстоятельство. Аргументация Бенацеррафа опиралась на тот факт, что теоретико-множественное моделирование чисел не является единственным. Существуют известные версии перевода чисел во множества Фреге — Рассела, фон Неймана, Цермело и др. Эта ситуация приводит к вопросу, чем же на самом деле являются числа, и вопрос этот относится не к математике, а к философии, будучи типичным онтологическим вопросом. В конце концов, «философия математики… есть онтология математических объектов»[15]. Однако такие вопросы не оказывают на математику никакого влияния. «Особенность математики состоит в том, что она рассматривает только некоторые существенные свойства ее объектов, считая остальные не относящимися к делу. Один из этих несущественных вопросов — об онтологии формальной системы… мы должны принять нечто аналогичное принципу терпимости Карнапа в отношении онтологических вопросов»[16].

Продемонстрируем неединственность теоретико-множественной экспликации понятия числа. Э. Цермело предложил следующую экспликацию натуральных чисел. В качестве 0 берется пустое множество $\varnothing$, а в качестве операции последующего элемента Sx — единичное множество, членом которого является предыдущий элемент, т.е. Sx есть $\{x\}$. Натуральный ряд чисел в теоретико-множественной версии Э. Цермело выглядит так:

0	1	2	3	…
$\varnothing$	$\{\varnothing\}$	$\{\{\varnothing\}\}$	$\{\{\{\varnothing\}\}\}$	…

Таким образом, числа являются множествами определенного рода. Такой вывод следует из наличия вполне удовлетворительной экспликации чисел. Число 3 «в реальности» есть множество $\{\{\{\varnothing\}\}\}$.

Дж. фон Нейман предложил в качестве 0, как и в версии Цермело, пустое множество $\varnothing$, а Sx определил как $x \cup \{x\}$. Тогда натуральный ряд выглядит следующим образом:

0	1	2	3	…
$\varnothing$	$\{\varnothing\}$	$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$	$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$	…

Таким образом, теперь число «три» оказывается множеством $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$. Ясно, что множество $\{\{\{\varnothing\}\}\}$ отлично от множества $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$. Больше того, в теории чисел имеются такие утверждения, которые переводятся в истинное теоретико-множественное утверждение в версии фон Неймана, и в ложное утверждение в версии Цермело, например «$3 \in 5$».

Можно предположить, исходя из онтологических соображений о природе числа, что лишь одна из теоретико-множественных версий числа является правильной. Но как выделить некоторое множество, о котором можно с уверенностью сказать, что именно оно, и никакое другое, указывается некоторым числом? Оказывается, по всем математическим параметрам версии равноправны, и нет никаких аргументов, которые могли бы указать на «правильную» версию. Следовательно, ни одна версия не имеет никаких преимуществ перед другими. Остается заключить, что отличающие условия всех версий правильны, и тогда мы просто не можем сказать абсолютно, что же такое числа. Во всяком случае, мы можем заключить, что числа вовсе не должны быть множествами.

[15] Beth E. *Mathematical Thought*. — Dordrecht: Reidel, 1965. — P. 176.

[16] Curry H. *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*. — Amsterdam, 1970. — P. 30—31.

На вопрос о том, почему числа не могут считаться определенными множествами, в общем дается два ответа. Один из ответов, предлагаемых в структурализме, состоит в том, что числа вообще не объекты, и поэтому цифры как сингулярные термины сопоставляются с различными множествами без оглядки на то, как сопоставляются числа и множества. Знаки, представляющие цифры, не указывают на абстрактные объекты-числа и функционируют в знаковой системе независимым образом. Реальный мир представлен в науке теоретическими схемами, и любой вариант реализма в отношении теорий утверждает истинность предложений теории об объектах этой теории, а также то, что термины теории указывают на эти объекты. Объектами в реалистической схеме могут быть как материальные предметы, так и абстрактные объекты платонистского толка.

Цель аргументации Бенацеррафа может состоять в том, чтобы отвергнуть платонизм, показав возможность математики без предположения о существовании абстрактных объектов. Главная проблема для Бенацеррафа в этом случае — объяснить, как знаки-цифры выполняют все то, что делают по платонистской версии математики числа. Рассмотрим понятие объекта с точки зрения его функционирования в системе. Главный признак существования объекта — наличие у элементов структуры системы знаков свойств, независимых от свойств структуры. Объект можно отличить от других объектов, если имеются процедуры его индивидуализации, которые не должны зависеть от роли, которую объект играет в рамках структуры. Аргумент Бенацеррафа состоит в том, что числам нельзя приписать подобную индивидуальность, потому что, будучи представлены в системе цифрами, они не известны нам помимо цифр. Но цифры являются частью структуры, и их индивидуальность не есть индивидуальность объекта, поскольку роль знака в системе определяется особенностями структуры системы.

Действительно, «быть числом 3 — это не больше и не меньше, чем иметь предшествующими числами 2 и 1, и возможно, 0, и иметь последующие числа 5, 6 и т.д. И быть числом 4 — значит не больше и не меньше, чем иметь в качестве предшествующих чисел 1, 2 и 3, и последующими 5 и 6 и т.д. ...Любой объект может сыграть роль числа 3, то есть, любой объект может быть третьим элементом некоторой прогрессии. Особенностью числа 3 является как раз то, что ...оно представляет собой отношение, которое любой член прогрессии имеет к остальной части прогрессии»[17].

Числа, с этой точки зрения, вообще не объекты, а знаки специфической знаковой системы с определенными законами. Все свойства чисел, определяемые этими законами, принадлежат знаковой системе, и среди свойств нет таких, которые характеризовали бы нечто, выходящее за рамки взаимоотношений элементов структуры. Природа элементов структуры не имеет никакого значения. Определение чисел, по Бенацеррафу, есть совокупность некоторых условий, относящихся не к элементам структуры, а к отношениям, определенным на ней. «Если мы отождествим абстрактную структуру с системой отношений... мы получим арифметику, разрабатывая свойства отношения *меньше-чем*, или всех систем объектов (то есть, конкретных структур), обнаруживающих эту абстрактную структуру»[18]. Итак, индивидуальность знака в системе определяется его функциями в системе, т.е. по природе своей определяется структурой в системе. А вот индивидуальность объекта, как уже было сказано выше, не зависит от структуры. При этом структура понимается как система отношений на совокупности объектов.

Теперь центр тяжести переносится на понятие структуры. Почти всеми признается, что математика состоит из структур. Но что такое структура с онтологической и эпистемологической точек зрения? И является ли это понятие более простым или удобным, или более фундаментальным, чем понятие абстрактного объекта? Это тот самый вопрос, который пытаются разрешить М. Резник и С. Шапиро в целой серии влиятельных статей и книг. Н. Бурбаки полагал, что понятие структуры является более фундаментальным, чем все остальные понятия математики. Сходным образом формулируются посылки Резника и Шапиро. Если структура понимается как область объектов с определенными отношениями между ними, т.е. как структура, изучаемая в математической логике, то тогда нужно иметь в виду, что в математической логике структура определяется теоретико-множественным образом. Но в этом случае следует весьма радикальное заключение, что теория множеств представляет собой дисциплину наравне с другими ветвями математики, но никак не основанием всей математики, т.е. теория множеств изучает одну из множества возможных структур. Например, арифметика — исследование не натуральных чисел, а «натуральных структур». Все это означает, что в этом случае нам нужно определение структуры, которое само не является теоретико-множественным понятием. Шапиро описывает структуру как «возможную систему объектов, находящихся в определенных отношениях друг к другу, когда игнорируются те свойства объектов, которые несущественны для этих отношений». Например, в аксиоматической теории множеств Цермело — Френкеля игнорируется все, кроме отношения членства в множестве. Отметим, что это лишь описание понятия структуры, а не определение. Структуралисты в философии математики избегают давать подобные определения, поскольку само понятие структуры не очень подходит на роль базисного онтологического понятия, и в то же время не снимает эпистемологические проблемы. Понятие структуры не решает, а скорее, «рассасывает» эти проблемы в духе виттгенштейновской терапии.

Несмотря на определенный радикализм, структурализм является лишь модификацией того, что Ч. Чихара назвал «буквалистской точкой зрения». Буквализм состоит в том, что экзистенциальные утверждения математики не отличаются по своей структуре от экзистенциальных утверждений эмпирических наук. Обоснование этого тезиса состоит в том, что математические утверждения делаются в терминах экзистенциальных кванторов логики первого порядка, и поэтому буквально и прямо утверждают существование математических сущностей. И поскольку структура математических утверждений в понимании структуралистов остается именно такой, перед ними встают все те же проблемы, которые они предпочли бы видеть «рассосанными». Действительно, «буквализм» такого структуралиста, как Резник, заключается в двух идеях. Во-первых, логическая форма математических утверждений должна пониматься буквально, и во-вторых, семантика математических утверждений должна быть семантикой естественных наук. В противном случае нельзя будет говорить об истинности математических утверждений, а без этой посылки невозможно ничего сказать о математических объектах. Эти проблемы могли бы быть игнорированы, если бы не общепринятое, разделяемое и структуралистами, убеждение в том, что математические утверждения истинны.

[17] Benacerraf P. *What Numbers Could Not Be.* — P. 23.
[18] Ibid.

Б. Номинализм

Подлинно радикальным взглядом в этом отношении является номинализм Х. Филда, который полагает математические утверждения ложными[19]. Х. Филд считает, что математических объектов не существует, что стандартная математика ложна, но при этом он стремится сохранить математическую практику. Для этого он снабжает физическую реальность значимой математической структурой и описывает физические версии анализа. Математические утверждения типа «континуум-гипотезы» оказываются утверждениями об областях пространства и времени.

Такая позиция возможна лишь при некоторой сильной версии номинализма. Техническим средством выражения такого номинализма является так называемая теорема консервативности, суть которой в том, что любое номиналистическое заключение, которое может быть выведено с помощью математики из номиналистической теории, может быть сделано без помощи математики, с одним лишь использованием логики. Таким образом, в математической практике делается указание на математические сущности, но нет необходимости верить в существование таких вещей, поскольку указание подобного рода не требует признания математических утверждений истинными. Филд полагает математические теоремы просто ложными, а математические объекты — полезными фикциями, которые в теоретическом смысле вполне устранимы.

Теория Филда не только радикальна, но и в значительной степени парадоксальна, так как соединяет в себе логицизм и номинализм. Логицизм виден в самой «теореме консервативности», согласно которой математический вывод можно в принципе заменить более длинным логическим выводом. Под номиналистической теорией Филд понимает теорию, в которой кванторные переменные ограничены нематематическими сущностями. Другими словами, нелогический словарь номиналистической теории не пересекается со словарем математической теории и, значит, абстрактные объекты математики избегаются. Более точно, пусть N — номиналистическая теория первого порядка, а ZF — теория множеств Цермело — Френкеля. Тогда может быть показано, что если $N + ZF$ дает S, тогда N дает S.

Тезис Филда состоит в том, что математика является консервативным расширением номиналистических истин. Но значит ли это,

[19] Field H. *Science without Numbers*. — Princeton: University Press, 1980.

что математика лишь «добавка», позволяющая сократить длинные логические выкладки, которые в принципе могли бы быть получены и без математики? Другими словами, верно ли, как Филд полагает, что использование математики есть уступка физиологической и психологической ограниченности человека?

Это определенно неверно, потому что консервативные расширения несут все-таки новую информацию. Сами методы расширения, хотя бы и консервативного, таковы, что позволяют делать обобщения, которые не могут быть сделаны в расширяемой области. Действительно, консервативность подобного рода характерна для различных областей математики. Так, Г. Такеути показал, что аналитическая теория чисел, использующая полностью комплексное поле, есть консервативное расширение над элементарной теорией чисел[20]. Хотя этот результат интересен и важен, никто не считает аналитические методы устаревшими. Аналитическая теория позволяет делать такие классификации, которые не могут делаться элементарной теорией. Эта большая выразительная сила является причиной того, что доказательства в аналитической теории чисел выглядят «проще». То же относится к первому доказательству теоретико-числовой теоремы о распределении простых чисел. («Первое доказательство» было дано Ж. Адамаром и Ш. Валле-Пуссеном, последующие даны П. Эрдешем и А. Селбергом без использования дзета-функции; эти последние доказательства «элементарны», хотя этот смысл элементарности отличается от того, какой имеется в виду в доказательствах Такеути.)

Номиналистическая программа в первую очередь является программой онтологической. Номиналисты не признают абстрактных объектов, полагая, что реальным существованием обладают лишь физические объекты, или более точно, единичные конкретности (в противоположность универсалиям). Вклад в упрощение, который вносится консервативным расширением, может быть оспорен Филдом на том основании, что, скажем, упрощение теории распределения простых чисел дается ценой увеличения в онтологии. Комплексные числа несчетны, а целые — счетны. Номиналист признает счетные совокупности (скорее, даже конечные), и никак не признает несчетные. Но онтологические соображения вряд ли играют какую-либо роль в математике, где «более простые доказательства» являются подлинным вкладом в теорию. Кроме того, для того чтобы отказаться от приобретений, полученных в ходе консервативного рас-

[20] Takeuti G. *Two Applications of Logic to Mathematics*. — Princeton: University Press, 1977.

ширения, требуются какие-то дополнительные мотивы, кроме установления самого факта консервативности расширения.

Филд понимает это обстоятельство, и считает, что апелляция к исходному ядру, которое подвергается консервативному расширению, будет успешной, если номиналистическая переформулировка будет «разумно привлекательной». Дж. Таппенден отмечает в этой связи, что «любая теория может быть заменена эквивалентной "номиналистической" подтеорией: для этого надо просто убрать (с помощью грубой силы или с помощью теоремы Крэйга) все предложения, кроме тех, которые удовлетворяют подходящим образом выбранному словарю. Но результирующая теория будет столь дезорганизована, что от нее не будет никакой практической пользы. Не может быть выведено никакого философского следствия из наблюдения, что хорошая теория в принципе может быть заменена практически бесполезной теорией, как бы эта последняя теория ни была привлекательной философски»[21]. Таким образом, номиналистическая программа Филда оказывается не столь привлекательной.

В. Квазиэмпирический реализм

Квазиэмпирический реализм представляет собой широкое направление, в значительной степени связанное с натурализацией математики, которая в свою очередь связана с натурализацией эпистемологии. Не претендуя на общность, можно проиллюстрировать квазиэмпирический реализм реалистической программой П. Мэдди. Она считает, что предполагаемые платонистскими сущности могут быть доступны обычному восприятию. На этом мы остановимся чуть позже.

Мэдди полагает, что математики имеют чувственный контакт с множествами в математическом смысле, а не просто с совокупностями материальных вещей. Стандартная точка зрения состоит в том, что множества являются абстрактными объектами, что и позволяет математикам рассматривать такие объекты, как пустое множество, в качестве базиса для построения всей иерархии множеств. Таким образом, речь идет о возможности причинного указания на абстрактные объекты, что напоминает с первого взгляда крайний платонизм К. Геделя.

[21] Tappenden J. *Recent Works in Philosophy of Mathematics* // J. Philosophy. — 2001. — Vol. 97. — P. 488—497.

Однако позиция Мэдди более эмпирична. При указании на объект подразумевается стандартная семантика, а именно, что указание осуществляется сингулярным термином, или же собственным именем, в то время как предикаты, или общие термины, не указывают объектов, а истины о них, обозначая род объектов. Мэдди полагает, что имея некоторый эмпирический опыт в отношении материальных совокупностей, мы образуем общий термин, родовое понятие, которое указывает на множество как абстрактный объект. Тогда возникает важнейший вопрос о пространственно-временной локализации указываемого общим термином объекта.

Мэдди полагает, что абстрактные сущности математики подобны физическим сущностям, и поэтому возможен прямой перцептуальный доступ к ним. Мэдди отличает совокупность физических вещей, скажем, груду камней, от множества тех же самых камней. Отличие состоит в том, как соотносится камень с грудой камней, и как он соотносится с множеством камней. Каждый камень сделан из физического материала, который и образует части физической совокупности. Но никакой камень не является членом физической совокупности, потому что физическая совокупность не имеет членов. Здесь Мэдди апеллирует к идее, что множество (и членство в нем) есть результат деятельности сознания, образования в уме концепции множества. Камень является членом множества, и именно отношение членства делает его таковым. И в этом смысле множество абстрактный объект, а физическая совокупность — нет. Но из такой трактовки следует чрезвычайно важный вывод квазиэмпирического толка: множество камней локализовано точно в том месте, в котором локализована физическая совокупность. Это в высшей степени непривычная трактовка понятия абстрактного объекта. Физические совокупности не имеют членов, в то время как множество определяется отношением членства. Именно по этой причине множество является абстрактным объектом, который, тем не менее, предполагается локализованным в том же месте пространства, в котором локализована физическая совокупность.

Следует еще раз подчеркнуть, что подобная трактовка множеств возможна за счет эпистемологических трактовок восприятия, развитых в самое последнее время. Так, согласно одному из определений, субъект P воспринимает объект K в месте H, если и только если, во-первых, имеется объект, принадлежащий виду K в месте H, во-вторых, P приобретает перцептуальное знание о виде K, и, в-третьих, объект в месте H включен в процесс порождения состояния перцептуальной веры подходящим причинным образом. Не входя в подробности этого определения, отметим, что оно является лишь одним из нескольких подходов к определению перцептуального восприятия, и не ясно, в какой степени трактовка Мэдди множеств как перцептуально воспринимаемых объектов будет оправданной при других определениях восприятия. Действительно, при других определениях возникает основное препятствие пути принятия платонизма, т.е. тезиса о реальном существовании абстрактных объектов, поскольку причинная связь между ними и субъектом представляется невозможной. В трактовке же Мэдди при таком определении восприятия нет существенного различия между восприятием груды камней и множества камней. Хотя восприятие множества камней является актом ментальным, а восприятие груды камней — актом чувственным, трудно провести грань между двумя когнитивными способностями человека. Это нарушает традиционную для философии дихотомию между чувственным и рациональным, и единственным способом отказа от этой дихотомии для Мэдди представляется постулирование специальной когнитивной способности к определению именно «множеств» в отличие от груды.

Ч. Чихара резко критикует точку зрения Мэдди, согласно которой мы можем буквально «видеть» множества[22]. Первым контрпримером служит случай единичного множества. Пусть в помещении имеется один физический предмет, скажем, камень. С точки зрения здравого смысла, в этом помещении ничего больше нет, однако с точки зрения Мэдди существует еще множество, единственным членом которого является камень. Множество есть абстрактный объект, а камень — физический объект, и согласно Мэдди оба расположены в одном и том же месте. Традиционно множество рассматривается как универсалия, лишенная локализации во времени и пространстве. Универсалия с локализацией в пространстве представляет значительные трудности для философии.

Поскольку порождение множеств осуществляется замыканием единичного множества (далее в книге об этом будет сказано более пространно), вместо одного камня и одного множества мы имеем один камень и бесконечное число множеств. Однако в пользу такого взгляда нет эмпирических свидетельств. Больше того, такой взгляд противоречит интуиции, и имеет просто неправдоподобные следствия. Еще более трудным становится понимание позиции Мэдди в случае бесконечных множеств, которые невозможно сопоставить

[22] Chihara Ch. *Constructibility and Mathematical Existence.* — Oxford: University Press, 1990.

с конечными физическими совокупностями. Перед Мэдди встает в высшей степени традиционная проблема понимания природы математической абстракции. Квазиэмпирический подход Мэдди ставит целью сделать более приемлемым с философской точки платонизм, который является «рабочей философией математика».

4. Платонизм как философия работающего математика

Платонизм, безусловно, является философией большинства работающих математиков, а также многих людей, успешно применяющих математику в естественных науках. Подобно мольеровскому герою, всю жизнь не осознававшему, что он говорит прозой, эти люди часто не осознают, что являются платонистами. Ситуация более точно выражена в книге Дэвиса и Херша[23] *Математический опыт*: работающие математики являются платонистами в рабочие дни, а по выходным они являются формалистами. Для Р. Пенроуза «абсолютность математической истины и платонистское существование математических концепций представляет собой одно и тоже. Существование множества Мандельброта есть особенность его абсолютной природы»[24]. Платонистское сознание работающих математиков зачастую не осознается ими как специфически философский взгляд, потому что лежащие в его основе представления абсолютно естественны и просты. Вполне естественно, что существует огромное число математических истин, некоторые из которых открыты, а большая часть остается неоткрытой. Работа математиков заключается в расширении круга открытых истин. Математические объекты существуют вне и независимо от человеческого сознания. Больше того, они существуют не в материальном мире, а в мире идеальных сущностей.

Если платонизм как «рабочая» вера математика не вызывает у него никаких сомнений, то в философском отношении платонизм отягощен массой неприятных аспектов. Прежде всего, весьма проблематично понятие существования в нематериальном мире, которое присуще широкому спектру философских учений, известных под названием «идеализм». Исторически, идеализм как оформленное Пифагором и Платоном философское учение мотивировался математикой. «Увлеченность Пифагора математикой положила начало…

[23] Davis Ph., Hersh R. *The Mathematical Experience.* — Penguin, 1983. — P. 321.
[24] Penrose R. *The Emperor's New Mind.* — L.: Vintage, 1990. — P. 147.

теории универсалий. Когда математик доказывает свою теорему о треугольниках, то он говорит не о какой-либо конкретной фигуре, где-то нарисованной, он говорит о том, что существует в его голове. Так начинает проявляться различие между умственным и чувственным. Более того, доказанная теорема верна без оговорок и на все времена. Отсюда всего лишь один шаг к точке зрения о том, что только умственное — реально, совершенно и вечно, в то время как чувственное — кажущееся, несовершенное и скоротечное»[25]. «Я полагаю, что математика является главным источником веры в вечную и точную истину, как и в сверхчувственный интеллигибельный мир. Геометрия имеет дело с точными окружностями, но ни один чувственный объект не является точно круглым... Это наталкивает на предположение, что всякое точное размышление имеет дело с идеалом, противостоящим чувственным объектам. Естественно сделать еще один шаг вперед и доказывать, что мысль благороднее чувства, а объекты мысли более реальны, чем объекты чувственного восприятия. Мистические доктрины по поводу соотношения времени и вечности также получают поддержку от чистой математики, ибо математические объекты, например, числа (если они вообще реальны), являются вечными и вневременными. А подобные вечные объекты могут быть в свою очередь истолкованы как мысли Бога»[26]. Из этих цитат Рассела видно, сколь «тяжелые» для философии следствия имеет математика. Именно их этих посылок выросли философские представления о природе математики, известные под названием «платонизм». Сама по себе философия платонизма вызывает множество возражений опять-таки чисто философского толка. Но коль скоро математика играет важнейшую роль в этой философии, возникает вопрос, в какой степени математика ответственна за те неприемлемые по философским основаниям положения, которые свойственны платонизму.

В частности, платонизм в области математики утверждает существование другого, нематериального, мира, населенного математическими объектами. Возникают вопросы о том, где находится этот мир, как войти в соприкосновение с ним, как может наш язык указывать на объекты этого мира, если они не являются чувственно воспринимаемыми объектами. Платонисты настаивают на том, что люди имеют внечувственное осознание математических структур,

[25] Рассел Б. *Мудрость Запада*. — М.: Республика, 1998. — С. 50—51.

[26] Рассел Б. *История западной философии*. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1997. — С. 51.

называемое часто интуицией математика, и что при помощи интуиции мы входим в контакт с математическими сущностями.

Вся эта картина в высшей степени затруднительна для ее восприятия натуралистически настроенным умом. Натурализм предполагает, что человеческое познание опирается на разного рода когнитивные способности человека, которые выработаны в процессе эволюции, и поэтому любые познанные структуры объективного мира должны иметь естественное происхождение. А с точки зрения платониста математика изучает не этот мир, а мир внепространственных, вневременных, не созданных сознанием сущностей, который недоступен нашим чувствам. Эта метафизическая картина призвана объяснить существование и применение математики, и такое объяснение вполне устраивает многих математиков, если не всех, за исключением тех, кто чувствителен к философским затруднениям. А они в случае платонизма огромны, и возникает вопрос, в какой степени для объяснения природы математики необходим платонизм.

Реакция против платонизма принимает различные формы. Есть возражения, основанные на том, что платонизм есть результат склонности математиков к вневременным и внепространственным сущностям, что идет вразрез с естественными науками, где изучаются сущности, находящиеся в пространстве и во времени. Больше того, некоторые философы полагают, что такая страсть математиков имеет некоторый нормативный характер, выражающий в известной мере ценности математиков. Так, Р. Нозик утверждает: «Некоторые математики имеют предрассудки, выражающиеся в предпочтении неизменных и вечных математических объектов и структур, которые изучаются ими. Хотя эта традиция имеет почтенный возраст, трудно понять, почему неизменное или вечное более ценно или значимо, почему длительность сама по себе должна быть важной. Рассматривая эти вещи, люди говорят о вечном и неизменном, и этот разговор включает (кроме Бога) числа, множества, абстрактные идеи, само пространство-время. Неужели лучше быть одной из этих вещей? Это странный вопрос: как может быть конкретный человек абстрактным объектом? Можно ли хотеть стать числом 14 или Формой Справедливости или пустым множеством? Хотел ли кто-нибудь иметь такое существование, которое приписывается множеству?»[27].

Другие философы возражают платонизму на том основании, что он бессодержателен уже по своей постановке вопроса. Так, А. Сломан скептически оценивает позицию платонизма Р. Пенроуза. «Все,

[27] Цит. по: Barrow J. *Pi in the Sky*. — Oxford: Clarendon Press, 1992. — P. 257.

что он говорит, состоит в том, что математические истины и концепции существуют независимо от математиков, и что они открываются, а не изобретаются. Это лишает платонизм всякого содержания... Хотя многие люди полагают платонизм как чем-то мистическим, или антинаучным, так же горячо, как Пенроуз защищает платонизм, такие разногласия на самом деле пусты. Нет никакой разницы, существуют ли математические объекты до их открытия или нет. Спор этот, как и всякий спор в философии, зависит от ошибочного предположения, что существует четко определенная концепция (например, "существование математического объекта", которая может быть использована с целью постановки вопроса, на который можно дать определенный ответ. Мы все знаем, что означает существование единорогов, или вполне разумный вопрос о существовании простого числа между двумя заданными целыми числами. Но нет смысла спрашивать, существуют ли все целые числа, или существуют ли они независимо от нас, и все дело в том, что понятие существования весьма плохо определено»[28].

Такие точки зрения резко контрастируют с мнением математиков, исповедующих платонизм. Например, Ш. Эрмит писал: «Я верю, что числа и функции в анализе не являются произвольными продуктами нашего сознания: Я верю, что они существуют вне нас, обладая той же необходимостью, какой обладают вещи объективной реальности; и мы обнаруживаем или открываем их, или изучаем точно так же, как это делают физики, химики и зоологи»[29].

Избегая крайностей, следует признать, что коль скоро платонизм есть успешное с точки зрения математического сообщества объяснение природы математики и математической практики, все, что может сделать аргументативная философия, это исследовать, в какой степени математика ответственна за столь странный взгляд как платонизм. Кроме того, несмотря на странности платонизма, следует понять, в какой степени платонизм неизбежен, и есть ли ему жизнеспособные альтернативы в объяснении природы математики.

Термин «платонизм» настолько устоялся в философии математики, что едва ли кто-либо из вновь приходящих в эту область знает, что несмотря на близость идеологии работающих математиков философии Платона, сам термин «математический платонизм» был введен в обиход относительно недавно, а именно П. Бернайсом в 1934 г. в статье *О платонизме в математике*[30].

[28] Barrow J. *Pi in the Sky*. — P. 273.

[29] Ibid. — P. 259.

[30] См.: *Philosophy of Mathematics* / Ed. P. Benacerraf, H. Putnam. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964.

Между тем более правильно говорить не о платонизме в математике, а о реализме в математике. Подобное терминологическое уточнение важно, потому что фактически философские доктрины, ассоциирующиеся с математикой, напрямую связаны с многими логико-философскими доктринами, в частности, с различными теориями истины, значения, и в целом, с теориями соотношения языка и мира. Поэтому всякому обсуждению собственно платонизма должно предшествовать обсуждение концепции реализма. Этот подход тем более правилен, что модная ныне проблематика противопоставления реализма и так называемого антиреализма имеет прямое отношение к философии математики.

Обсуждение реализма в математике следует начать с того, что все мы, независимо от наших философских убеждений, верим в элементарные математические истины. Поскольку математика успешно применяется для счета и других расчетов, мы полагаем, что математические истины отражают факты в мире. Больше того, сама структура языка подводит нас к такому выводу: если математические истины есть истины в общем понимании этого слова, тогда это должны быть истины о чем-то в мире. Тогда встает вопрос о том, о чем же говорит математика, и вряд ли у кого-либо есть сомнения в том, что математика говорит о реальных объектах. В частности, ее объекты — числа, множества, функции, пространства и пр. — существуют вполне реально. И математика изучает эти объекты точно так же, как естественные науки изучают свои, например, как физик изучает атомы. В свое время подобное кредо реализма категорично было выражено Расселом в отношении логики: «логика имеет дело с реальным миром в той же степени, что и зоология, хотя с его наиболее абстрактными и общими чертами»[31]. Естественность реалистического взгляда в математике объясняется тем, что «основная поддержка реалистическому подходу к математике состоит в инстинктивной уверенности большинства из нас, пытавшихся решить математическую проблему, в том, что мы думаем о "реальных объектах", будь то множества, числа и т.п.»[32].

Проблема реализма разрабатывается в рамках эпистемологии. В настоящее время существует два подхода к эпистемологии. Один следует традиционному картезианскому идеалу теории познания, которая представляет собой исследование знания и обоснования

[31] Рассел Б. *Введение в математическую философию*. — М.: Гнозис, 1996. — С. 155—156.

[32] Moschovakis Y. *Descriptive Set Theory*. — Amsterdam: North Holland, 1980. — P. 605.

знания, априорное по отношению к естественной науке. При таком подходе теория познания ищет основания науки, что выходит за пределы компетенции самой науки, на основе стандартов чистого разума. Другой подход известен под названием «натурализованной эпистемологии»; в ней исследование знания и способов познания становится частью самой науки.

Натурализация эпистемологии имеет большое значение для разрешения споров по поводу реализма. Установление того, что существует реально, — дело не спекулятивных рассуждений, а самых новых научных теорий. Таким образом, при обсуждении реалистической программы в математике нам не следует углубляться в традиционные споры о существовании или несуществовании универсалий, или абстрактных объектов. Нам следует опереться на современные теории. Правда, при этом на нас ложится дополнительное бремя демонстрации того, что математика подобна естественным наукам.

Эта последняя точка зрения находит свое лучшее выражение в аналогии, используемой многими философами — как сторонниками платонизма, так и его противниками. Так, Куайн полагает, что с точки зрения натурализованной эпистемологии, мы считаем существующими физические объекты среднего размера по той причине, что такая онтология дает нам наиболее простое объяснение природных явлений, описываемых физическими теориями. Точно так же, полагает он, мы должны принять в качестве существующих множества, поскольку такое решение упрощает наши математические теории. Действительно, такое предположение выглядит вполне правдоподобно в свете редукции всех математических объектов к множествам[33].

В таком случае теорией, на которую мы будем ориентироваться при исследовании реализма в математике, будет теория множеств. Этот выбор стандартен в исследованиях по философии математики, и не требует особого оправдания. Следует учесть, что именно теория множеств ставит перед философами наиболее острые проблемы. Понимание концепции множества, по сути своей, и представляет собой целую программу исследований, вокруг которой концентрируются многие важнейшие философские проблемы. Реализм в теории множеств означает убеждение в том, что теоретико-множественные утверждения имеют истинностные значения. В качестве лакмусовой бумажки в этом вопросе обычно берется континуум-

---

[33] Quine W.V.O. *Epistemology Naturalized* // Ontological Relativity and Other Essays. — Harvard: University Press, 1969.

гипотеза. Реалист полагает, что истинность или ложность ее является делом объективным даже если (Боже сохрани) мы никогда не узнаем этого[34].

5. Эпистемологизация философии математики

Видимо, следует сказать, что преодоление стагнации в философии математики в последние два десятка лет было связано с общефилософскими тенденциями. Главным обстоятельством тут является то, что философия математики есть часть философии, и на ней отражаются все те тенденции, которые свойственны всей философии. Философия даже относительно элементарных ветвей математики — это такая дисциплина, в которой ясно фокусируются теории о природе языка, знания, указания и истины. Именно это обстоятельство делает исследования в философии математики важным видом философского исследования. Стало очевидно, что традиционная философия математики столкнулась с дилеммами, обусловленными современной теорией познания, и, стало быть, мы имеем дело с эпистемологическим уклоном в философии математики.

Возможны два представления того, что было сделано в философии математики в последнее время. Одно пыталось увязать новые исследования с традиционными направлениями — логицизмом, формализмом и интуиционизмом, т.е. представить новые направления как реакцию на традиционные. Другое связано непосредственно с эпистемологической тенденцией, вызванной к жизни постановкой важной проблемы П. Бенацеррафом в его работе *Математическая истина*[35].

Дилемма формулируется следующим образом: если математика представляет собой исследование объективных идеальных сущностей и если когнитивные способности человека позволяют ему познавать только чувственные объекты, то как он может познавать математические объекты? Апелляция к познанию чувственных объектов подразумевает совершенно определенную концепцию познания — так называемую причинную теорию познания. Можно возразить, что это не единственная теория, и тогда дилемма теряет смысл. Однако можно переформулировать дилемму таким образом, что она не будет опираться на

---

[34] Maddy P. *Mathematical Realism* // Midwest Studies in Philosophy. — 1988. — Vol. 12. — P. 275.

[35] Benacerraf P. *Mathematical Truth* // J. Philosophy. — 1973. — P. 403—419.

специфическую теорию познания. Дилемма ставит перед нами выбор: либо отрицать, что математика говорит о числах, либо предполагать некоторые неестественные способности человека в отношении сбора информации. Поскольку обе возможности не выглядят привлекательными, предпринимались различные попытки разрешить дилемму. Многие исследователи соглашаются, что при обсуждении эпистемологических вопросов приходится решать и главный онтологический вопрос о существовании математических сущностей, и решать его надо так, чтобы не нужно было жертвовать стандартной математикой, как это происходит при традиционном номиналистическом подходе. Но как нам кажется, эпистемологический вызов философии математики, инициированный Бенацеррафом, принят в качестве того, что можно назвать локальной парадигмой этой области философии.

Превосходно «эпистемологический поворот» в философии математики выразил У. Харт: «Во время заката чувственных данных и аналитичности эпистемология как будто потеряла гордое место центра посткритической философии и, вероятно, современной философии вообще. С подъемом семантики и возрождением онтологии эпистемология как будто закатилась. Фреге ниспровергнут, и почти все чувствуют, что древность более уместна, чем современность. Но даже если эпистемология заслуживает пару пинков, тем не менее, она остается полноправным гражданином философской республики. Причины этого очевидны. Некоторые из самых глубоких проблем философии состоят из примирения естественных, но несовместимых эпистемологий и онтологий. Например, не случайно, что есть проблемы других умов и проблема соотношения ума и тела. Но нигде такой конфликт не является более древним, чем в философии математики. Для сочувствующего читателя *Менона* или *Пира* или же середины *Государства* должно быть ясно, как Платон героически сражается в поисках правдоподобной эпистемологии для теории форм. Платонизм кажется ясным, когда вы думаете о математической истине, но невозможным, когда вы думаете о математическом познании. И конечно, эпистемология не умерла в нашем веке; она просто изменилась. Причинность, холизм, и натурализация вытеснили чувственные данные и аналитичность. Так что надо приветствовать переформулировку основных положений эпистемологии математики. Интеллектуальным долгом является не только прогресс в области математической логики, но прогресс в эпистемологии математики»[36].

[36] Из рецензии на кн.: *Mathematical Knowledge* by M. Steiner, Ithaka. — Cornell: University Press, 1975. — 164 p. — Rec. W.D. Hart // J. Philosophy. — 1977. — Vol. 74, N 2, febr. — P. 118—129.

Эпистемологизация математики может рассматриваться в первую очередь как реакция на философски затруднительную позицию платонизма. Традиционно платонизм считался спорным онтологически, т.е. как доктрина о существовании вне и независимо от разума объектов, обитающих в сфере идеального. Эпистемологическое возражение против платонизма, сформулированное четко Бенацеррафом, делает упор на невозможности эпистемологического доступа к такого рода объектам. Другими словами, если мы признаем математическое знание истинным, и его объекты существующими, тогда непонятно, как мы получаем это знание, не имея чувственного контакта с этими объектами. В такого рода аргументации, конечно, важно, что собственно имеется в виду под познанием объектов. Таким образом, мы имеем некоторые очертания эпистемологического подхода к опровержению платонизма.

В некотором смысле вся история философии математики связана с борьбой против платонизма, и поскольку это предприятие нельзя назвать особенно успешным, возникают сомнения относительно того, можно ли вообще найти решение этой проблемы, т.е. можно ли считать, что есть серьезные аргументы за или против платонизма. Причем ситуация тут несимметричная, поскольку платонизм является «намеренной» философией математиков, в то время как антиплатонизм — результат по большей части (если исключить интуиционизм) философских исследований. Поэтому каждый антиплатонистский шаг подразумевает собственную стратегию и классификацию альтернативных решений. В этой связи весьма интересным представляется подход М. Балагера, который полагает, что тщательный анализ технических аргументов не дает оснований считать, что они решительно свидетельствуют в пользу платонизма или антиплатонизма[37]. В следующем ниже обзоре эпистемологических аргументов мы существенно опираемся на эту работу.

Балагер полагает, что работа Бенацеррафа *Математическая истина*, которая, по общему признанию, вызвала к жизни эпистемологические программы опровержения платонизма, явилась не больше чем инспирацией, поскольку в ней были спутаны различные проблемы. В частности, Бенацерраф сделал упор на несовместимости семантики Тарского для математических языков с причинной теорией познания. Недостаток такого подхода состоит в том, что математические языки могут обладать и другой семантикой, например,

[37] Balaguer M. *Platonism and Antiplatonism in Mathematics*. — Oxford: University Press, 1998.

подстановочной[38], а причинная теория познания не является единственной или выделенной среди других теорий[39]. Тем не менее, полезно представить аргументацию Бенацеррафа в следующем виде:

1. Люди существуют в пространстве и времени.
2. Если существуют абстрактные математические объекты, то они существуют вне пространства и времени.

Следовательно, согласно причинной теории познания,

3. Если существуют абстрактные математические объекты, тогда человеческие существа не могут иметь к ним познавательного доступа.

Следовательно,

4. Если математический платонизм верен, тогда человеческие существа не могут иметь к ним познавательного доступа.
5. Человеческие существа имеют-таки математическое знание.

Следовательно,

6. Математический платонизм не верен.

Это несколько дотошный анализ аргументации Бенацеррафа можно было бы заменить одним пунктом 3, который концентрируется вокруг более общей проблемы, как познаются абстрактные объекты. Причинная теория познания утверждает, что для того, чтобы субъект *A* знал *p*, необходимо наличие причинной связи между *A* и *p*, подходящим образом установленной. Поскольку установление причинной связи между субъектом и абстрактными объектами проблематично, аргументация сторонников платонизма направлена против причинной теории познания. Проблематичность эта не усматривается мистически настроенными мыслителями, например, К. Геделем, но в целом ее осознает большинство философов-платонистов.

Как указывает Балагер, разговор о причинной теории познания лишь усложняет ситуацию, поскольку можно обойтись без нее, считая, что заключение (6) прямо следует из посылок (1) и (2). Действительно, человеческие существа и абстрактные объекты не пересекаются, обитая в разных мирах, что соответствует интуиции. Однако факт познания математических объектов налицо, поскольку мы

[38] См.: Целищев В.В., Бессонов А.В. *Две интерпретации логических систем*. — Новосибирск: Наука, 1979.

[39] По поводу причинной теории познания см.: Goldman A.I. *A Causal Theory of Knowledge* // Essays on Knowledge and Justification / Ed. G. Pappas, M. Swain. — Cornell: University Press, 1978.

имеем не только стройные (хочется сказать, непротиворечивые) математические теории, но и крайне успешное применение математики в естественных науках. Это так называемый аргумент о необходимости (indispensability) математики, который играет важную роль в защите платонизма[40].

Заключение (3) можно подвергнуть сомнению тремя разными путями. Во-первых, можно объявить ложной посылку (1). Это значит, что человеческие существа могут иметь доступ к абстрактным объектам, что утверждал, как уже было сказано выше, К. Гедель. Взгляды Геделя по этому поводу крайне туманны, а их интерпретация основывается на часто приводимой цитате из дополнения ко второму изданию его статьи *Что такое континуум-гипотеза?*: «...объекты трансфинитной теории множеств... не принадлежат к физическому миру и даже их косвенная связь с физическим опытом является очень неопределенной (главным образом потому, что теоретико-множественные концепции играют незначительную роль в современных физических теориях). Но вопреки их отдаленности от чувственного опыта, мы имеем нечто подобное ощущению и в случае объектов теории множеств, что видно из факта, что аксиомы вынуждают нас признать их истинность. Я не вижу никаких резонов для того, чтобы испытывать меньшее доверие к этому виду восприятия, т.е. к математической интуиции, чем к чувственному восприятию, которое побуждает нас к построению физических теорий и ожиданию, что будущие чувственные восприятия будут согласованы с ними... Следует заметить, что математическая интуиция не должна рассматриваться как способность получения непосредственного знания соответствующих объектов. Скорее, как и в случае физического опыта, мы образуем наши идеи об этих объектов на основании чего-то еще, что дано нам непосредственно. Только это нечто не есть ощущения, и не главным образом ощущения. То, что это нечто помимо ощущений действительно дано нам непосредственно, следует из того факта, что даже наши идеи касательно физических объектов содержат конституенты, качественно отличные от ощущений или просто их комбинаций, например, идея самого объекта, в то время как, с другой стороны, в нашем мышлении мы не можем создать качественно новых элементов, и можем лишь воспроизвести и скомбинировать только то, что дано. Очевидно, что "данное" в математике близко соотносится с абстрактными элементами, кото-

[40] Сводка результатов этого крайне объемного материала может быть найдена в кн.: Colyvan M. *The Indispensability of Mathematics*. — Oxford: University Press, 2001.

рые содержатся в наших эмпирических идеях»[41]. Эта длинная цитата приведена здесь полностью для того, чтобы можно было убедиться в некоторой расплывчатости видения проблемы Геделем (кстати, тут видно влияние философии Гуссерля, которого Гедель изучал особенно тщательно).

Сразу следует отметить, что сейчас мало кто считает точку зрения Геделя приемлемой, полагая ее странной и слишком метафоричной. Более точная формулировка его представлений включает следующие утверждения: во-первых, математическая интуиция аналогична чувственному восприятию; во-вторых, математическая интуиция включает информационный обмен между абстрактными математическими сущностями и людьми; в-третьих, тезис (1) ложен.

С точки зрения здравого смысла попытка объявить ложным утверждение о том, что человеческие существа не выходят за пределы пространства и времени, отдает мистикой. И действительно, «Гедель разделял с Эйнштейном определенный мистический поворот мысли... Я спросил его [Геделя], верит ли он, что Ум есть везде, в противоположность локализованным мозгам отдельных людей. И Гедель ответил: "Конечно. Это основное мистическое учение"»[42].

Абсолютный Ум, или отдельные умы, имеют нематериальный, и стало быть, внепространственный и вневременной характер. Тогда возражение платонизму на основе причинной, или какой-либо другой теории познания, сводящееся к тому, что трудно представить себе поток информации от абстрактных объектов к человеческим существам, становится как будто менее серьезным, поскольку человеческие существа заменены нематериальными умами. Однако такая замена не спасает платонизм, потому что передача информации, которая является процессом причинным, от абстрактных объектов к нематериальным умам не менее загадочна по сравнению с передачей информации от абстрактных объектов к человеческим существам.

Таким образом, крайний платонизм в версии Геделя неправдоподобен, и объяснение интуиции как средства познания следует искать на другом пути. Недаром Гедель значительную часть времени уделил изучению философии Канта и Гуссерля, в работах которых интуиция занимает важное место. Другими словами, идея контакта с другими мирами не проходит. Впрочем, несмотря на то, что эти идеи исходили от столь авторитетного ученого, как Гедель, их никто не принимал и не принимает всерьез.

[41] Godel K. *What Is Cantor 's Continuum Problem?* // Philosophy of Mathematics / Ed. H. Putnam, P. Benacerraf. — Cambridge: University Press, 1964. — P. 271—272.

[42] Rucker R. *Infinity and the Mind.* — Bantam Books, 1983. — P. 183.

С точки зрения логики вполне возможна защита платонизма путем признания ложным пункта (2), т.е. отказ от утверждения, что абстрактные математические объекты существуют вне пространства и времени. Именно такова позиция П. Мэдди, описанная выше. На сегодняшний день Мэдди отказалась от своего в достаточной мере радикального реализма в пользу натурализма. Менее радикальным решением в выработке стратегии защиты платонизма является признание (1) и (2) с одновременным отказом от того, что из этих утверждений следует (3), а именно, что если существуют абстрактные математические объекты, тогда человеческие существа не могут иметь к ним познавательный доступ. Большая часть исследователей придерживается именно такой стратегии. Наиболее основательная аргументация в этом направлении представлена В. Куайном.

6. Плюрализм и консенсус

Прекрасной иллюстрацией тех трудностей, которые возникают перед желающим дать четкую классификацию направлений и концепций современной философии математики, является понимание основного термина — «реализм». С. Шапиро дает такую сводку: «Реалист говорит, что "числа существуют". Антиреалист говорит: "числа не существуют". Тут страсти нешуточные. Оппонентов часто называют "теологами", "скептиками" — весьма оскорбительные слова на современном жаргоне. Я хочу понимать эти направления как рабочие программы. Реализм может иметь много смыслов. Один — что математические объекты существуют независимо от математиков. Это реализм в онтологии. Другой — что утверждения различных областей математики имеют объективные бивалентные истинностные значения независимо от конвенций, языка и правил математиков, и что основная часть утверждений компетентных математиков истинна. Это — реализм в истинностных значениях. Нет общего согласия относительно соотношения этих двух видов реализма. Мэдди и Гедель — реалисты в обоих смыслах. Даммит — антиреалист в обоих смыслах. Хеллман и Чихара — антиреалисты в онтологии и реалисты в истинностных значениях. Единственный человек — реалист в онтологии и антиреалист в истинностных значениях — это Теннант»[43].

[43] Shapiro S. *Mathematics and Philosophy of Mathematics* // Philosophia Mathematica. — 1994. — Vol. 2, N 3. — P. 148—160.

Перечисленные выше старые и новые направления в философии математики не исчерпывают всех подходов, поскольку все они принадлежат некоторому «канону», который превосходно ощущается аналитическими философами. Однако есть и радикально другие подходы к философии математики, и среди них следует выделить философа Ф. Китчера и математика Р. Херша.

Для Китчера математические утверждения суть совокупность операций, выполняемых идеальным субъектом[44]. Он полагает математику цепью непрерывных концептуальных конструкций и в этой связи развивает эволюционную модель математического познания. Таким образом, ключевой дисциплиной при подобного рода исследованиях предстает история математики, из которой следует извлечь некоторые рациональные принципы, управляющие концептуальными изменениями по ходу развития математики. Ясно, что философия Т. Куна занимает в позиции Ф. Китчера самое значительное место. Кроме того, Китчер прибегает в объяснении математического познания к причинной теории указания Крипке — Патнэма, согласно которой значение термина прослеживается через цепь изменений к некоторому исходному акту употребления термина. Рано или поздно эта цепь упирается в перцептуальное познание наших предшественников-предков. В этом ключе, утверждая важность психологии, Китчер отказывается от эпистемологической ориентации в исследовании природы математических истин. Если обычная позиция в философии математики состоит в том, чтобы обосновать знание этих истин, то Китчер полагает, что большая часть людей уже знает значительную часть математических истин, и задача философского исследования состоит в том, чтобы понять, как мы получаем это знание.

Несмотря на новые программы, все эти направления находятся в русле, если можно так выразиться, классической философии математики. Между тем возможен более радикальный взгляд на философию математики, который, как считает Р. Херш, больше соответствует духу того, что делают работающие математики. Он полагает, что в повороте философии математики к практике некоторые философы высказали новые взгляды, суть которых состоит в следующем.

- Математика является человеческим предприятием и, стало быть, частью человеческой культуры. Значит, математика не есть описание абстрактных концепций Фреге и вневременной объективной реальности.

[44] Kitcher Ph. *The Nature of Mathematical Knowledge.* — Oxford: University Press, 1983.

- Математическое знание погрешимо. Подобно науке, математика прогрессирует через ошибки и их исправление (Лакатос).
- Существуют различные версии доказательства и строгости в зависимости от времени, места и множества других вещей. Использование компьютеров в доказательстве есть нетрадиционная версия строгости.
- Эмпирические свидетельства, числовое экспериментирование, вероятностные доказательства помогают нам решать, во что верить в математике. Аристотелевская логика является не самым лучшим способом решения этих проблем.
- Математические объекты суть специальный вид социально-культурно-исторических объектов. Мы можем выделить математику из литературы или религии. Тем не менее математические объекты являются общими культурными идеями, подобно литературным персонажам или религиозным концепциям[45].

Следует сказать несколько больше относительно того, что же представляет собой так называемая гуманистическая математика. В целом ее можно отнести к новому модному направлению в философии — социальному конструированию, хотя гуманистическая математика является менее радикальным взглядом по сравнению с социальным конструированием[46]. Дело в том, что признание математики просто человеческой активностью, с точки зрения гуманистической математики, вообще не имеет отношения к философии математики. Последняя усматривает скрытый смысл за пределами социально-историко-культурного контекста, который проявляется в неизменной онтологии математических объектов и вневременном характере математических истин. Но если, как это утверждает гуманистическая математика, математическое познание погрешимо, тогда истина и онтология в математике изменяются по ходу познания.

Конфликт между гуманистической математикой и классической философией математики достаточно глубок, поскольку отражает не только недовольство стагнацией в философии математики, но и попытки радикального отделения философии от математики вообще. Р. Херш говорит, что зачастую нет смысла философствовать по поводу математики, ища в ней скрытый смысл. Все, что есть в математике, — это деятельность работающих математиков, и поиски фи-

[45] Rec. Philosophy of Science. — 1966. — N 3. — P. 501—502: Hersh R. *What is Mathematics, Really?* — Oxford: University Press, 1997.

[46] По поводу социального конструирования см.: Hacking I. *The Social Construction of What?* — Harvard: University Press, 1999.

лософов по поводу того, что такое математика, не имеют отношения к деятельности математиков. Философия тут берет ложный след.

Итак, в философии математики создалась следующая ситуация. С одной стороны, хотя есть признание стагнации в классической философии математики и даже признание того, что «ничего из этого не работает», существует ряд направлений, призванных придать философии математики новое дыхание. С другой стороны, есть полное отрицание значимости классической философии математики, обоснованное убеждением, что философская оценка математической деятельности бесплодна: математическая деятельность не имеет в себе скрытого смысла, искомого философией, и сама философия неправильно следует в своих собственных стандартах строгости, на которых основывается философия математики, за этой самой математикой. Ясно, что с классической философией математики что-то не так, но в поисках нового дыхания этой фундаментальной области философии требуется ответить на упреки гуманистической математики. Таким ответом является эпистемологический поворот в исследованиях по основаниям математики и в целом в философии математики.

Теперь рассмотрим радикальный тезис о том, что философия не имеет отношения к математике. С этой точки зрения математика живет своей собственной жизнью независимо от каких-либо философских рассмотрений. Взгляды относительно статуса математических объектов или утверждений ничего не вносят в математику и являются худшей софистикой, бормотаньем и вмешательством посторонних. Надо признать, что большинство математиков вообще не интересуются философией, онтологией или семантикой. Ну а те математики, которые исповедуют философию, часто входят в противоречие со своей собственной практикой.

В этом отношении близким взглядом является натурализм, характеризуемый Куайном как «отказ от первой философии» и «осознание того, что только в рамках самой науки должна описываться и идентифицироваться реальность». Мэдди применяет натурализм к математике, также утверждая, что математика должна быть изолирована от традиционных философских исследований. Ну и все проблемы в математике должны решаться математиками как математиками. Как быть с такой радикальной точкой зрения?

Известно, что многие знаменитые математики были философами. Так, Гедель утверждал, что его реализм был важным фактором открытия полноты первопорядковой логики и неполноты арифметики. Например, теорема полноты есть следствие некоторых резуль-

татов Сколема. Но Сколем не сделал этого шага. Почему? Потому что оба имели различные ориентации в онтологии. Но это лишь немногие счастливые примеры среди моря примеров отрицательного отношения математиков к философии.

Р. Херш продолжает атаковать философию математики еще более яростно, настаивая на том, что даже подразумеваемая философия работающего математика, а именно платонизм, ущербна в самой основе. Характерным подтверждением такой позиции является следующее его высказывание: «Проблема состоит в том, что Платонизм оставил Бога, но продолжает считать Математику мыслями Бога». Херш полагает, что «традиционная философия осознает только передовой фронт математики». Но нельзя понять передовой фронт без того, чтобы понять ее фон. Внутренний участник событий мог бы: 1) помочь лучшему пониманию мешанины в математике и сформулировать проблемы под правильным углом зрения с учетом контекста, с новой возможностью решить их; 2) показать, что нет нужды философствовать по поводу математики, ища скрытый смысл в ней; 3) дать философский ответ на то, что есть математика. Однако пролегомены (1) не должны быть терапевтическими по отношению к (2) и не должны делать позитивного вклада в (3). Херш сам предпочитает заниматься в основном (3). Внутренний участник может дать ответ на (1), но вряд ли на (2) и (3). Большая часть внутренних участников являются повседневными платонистами, а по выходным — формалистами, что вносит философскую путаницу[47].

Большинство внутренних участников (от Декарта до Гильберта) были осведомлены о «задворках» математики, но их, в отличие от Херша, интересовал вопрос не о том, что такое математика, а о том, как мы объясняем объективность математических вер и надежность математического размышления. Социальный характер математики является тривиальным обстоятельством, свойственным всему человеческому знанию.

В подобного рода рассмотрениях важное место занимает позиция работающего математика, или, более фундаментально, математическая практика. Любое обсуждение философии науки требует обращения к научной практике. Но для философских целей понятие практики часто принимает нужную форму в угоду философским предпочтениям. Поэтому желательно заранее сформулировать, что представляет собой научная практика, или, более точно, какова струк-

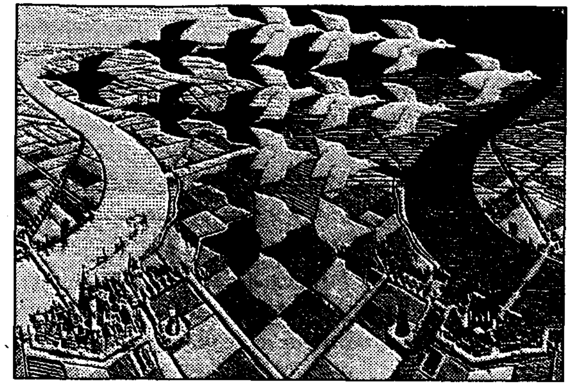
---

[47] Hersh R. *Mathematics has a Front and a Back* // Synthese 88. — 1991. — P. 127—133.

тура научной практики, которая является предметом философского анализа. В случае математики суть практики отнюдь не сводится к доказательству, хотя традиционно считалось, что математик доказывает истины. Само понятие доказательства представляет собой цепь аргументов, значимость которых варьировалась в зависимости от той же самой математической практики. Научная практика имеет много компонентов: язык, теоретические принципы, примеры теоретической и экспериментальной работы, принятые методы размышления, техника разрешения проблем, оценка важности вопросов, метанаучные взгляды на природу научного поиска. Ф. Китчер рассматривает математическую практику как предприятие, включающее в себя пять компонентов: язык, множество принятых предложений, множество принятых способов рассуждения, множество принятых в качестве важных вопросов и множество метаматематических взглядов (стандарты доказательства и определения, а также утверждения о сфере и структуре математики)[48].

Таким образом, традиционные взгляды на философию математики претерпевают значительное изменение. Среди хаоса мнений и предположений о том, в какой степени математика связана с философией, следует найти какой-то порядок, который смог бы дать точку опоры в будущей философии математики, если ей суждено выжить. На мой взгляд, таковой является эпистемологическая ориентация на вопросы математического познания, а не на традиционные вопросы о природе математических объектов и математической истины.

[48] *Kitcher Ph. The Nature of Mathematical Knowledge.*



ПРЕЛЮДИЯ К ГЛАВЕ 2

Притча[1]

Мышь была немецким математиком по имени Давид Гильберт, который свершил много подвигов в наведении порядка на Ручье Математики, и сотворивший там величественные сооружения.

Однажды солнечным утром Гильберт Мышь сидел среди кучек веток и сверкающих камешков и держал речь перед группой почитателей. «Мы должны использовать логику для доказательства непротиворечивости математики, так как — писк! — я уже показал... что мы можем свести всю математику к арифметике».

И его слушатели, подпрыгивая от энтузиазма, резво понеслись в стороны, на ходу крича: «Да! За работу! За работу!».

Лягушка была голландским математиком по имени Лютцен Эгберт Ян Брауэр. Однажды в одно прекрасное

[1] Hays J. *The battle of the Frog and the Mouse* (from the *Fables of Aleph*) // Mathematical Intelligencer. — 1984. — Vol. 6. — P. 77—80 (по мотивам *Война мышей и лягушек*) / Пер. В.В. Целищева.

утро, избавившись с ворчанием от головастиков, Брауэр Лягушка подплыл к лилии, уселся там в позе лотоса, и изложил, к крайнему замешательству прохожих на берегу, результаты своей докторской диссертации:

«Бог помогает тем, кто помогает самому себе! Брек-кек-кек-кек! Мышь Гильберт и Кролик Рассел, вместе с другими логиками и математиками, думают, что они могут отвертеться от меня со своими доказательствами. Брек! Когда слишком трудно доказать утверждение *прямо*, они предполагают противоречащее ему, а затем ищут *противоречие в противоречии*. Квак-квак! Они думают, что Господь Бог, подобно наивному порядочному немецкому профессору или эксцентричному английскому аристократу расчетливо увязал все возможности в *чистые пары противоречий*. А когда любой проницательный мыслитель находит дефектной возможную копию одной из пар, он сооружает для нее погребальный костер с жертвенным дымом, и Бог шлет назад *отрицание* этого ответным зефиром. Брек-кек-кек! Полный вздор! Как знает любая здравомыслящая лягушка, Бог есть трудяга-правитель и любит искусно сооружать вещи собственноручно. Если вы хотите иметь доказательство утверждения, вы должны *сконструировать* его, *прямо*, по вашей собственной инициативе, и тогда Бог одобрит вашу работу. Следовательно, я не приму ничего в качестве *строго* установленного в математике, если не будет предъявлено его *конструирование*. Мы не можем предположить ничего большего, чем, как заметил Кронекер Землеройка, *интуиция целых чисел*, проплывающих бесконечно, подобно ряби по этому холодному чистому ручью...»

Когда окружающие животные оправились от шока, они помчались к Гильберту Мыши рассказать о новой ереси. Между ними прыгал Кузнечик, сплевывая табачную жвачку, и крича: «Будет драчка! Тьфу! Как только мышь и лягушка встретятся, будет отличная потасовка! Тьфу!»

И потасовка началась! — Сначала словесная, с использованием громких сердитых слов, разносившихся по всей Академической Роще, далеко за пределы Ручья Математики.

В одном из эпизодов драчки Гильберт Мышь пропищал публике: «Было два великих кризиса в *Основаниях Математики*. Первый случился, когда Пифагор открыл

иррациональность корня квадратного из двух... Второй произошел, когда философский епископ Беркли Медведь указал на *противоречивость деления на нуль*... Но Кантор Козел, в его *Общей Теории Множеств* показал нам, как решить эти проблемы, и избавиться от кризисов в Основаниях Математики! И теперь мы должны идти вперед к...»

«Не слушайте вы эту квиетистскую пропаганду, — бухнул голос из зарослей. — Теория множеств Кантора атаковала эти проблемы, создав *третий кризис в Основаниях Математики*! Гильберт хорошо знаком с парадоксами теории множеств!»

«Но о них можно позаботиться! — пронзительно пропищал Гильберт Мышь, протестуя. — И математика стала богаче с Общей Теорией Множеств Кантора, с его *бесконечной последовательностью Алефов*. Никто, — отрезал он, вертя усы, сверкая глазами, — не сможет нас изгнать из рая, созданного для нас Кантором!»

«Ну и вздор! Вы постоянно болтаете о сооружении маленького загона из аксиом для того, чтобы оградить невинную овцу ваших доктринальных тезисов от волков противоречия. Вы построили Общую Теорию Множеств. Но как удачно спросил Пуанкаре Выдра: *Какой смысл строить загон для ваших овец, если вы запустили туда волков противоречия?*».

В другой раз Брауэр Лягушка сидел на лилии и выдавал новое реформистское евангелие восхищенной, и в то же время озадаченной толпе слушателей на берегу Ручья Математики.

«Гильберт защищает использование для того, чтобы доказывать любую математическую теорему так называемых правил логики... *Либо само утверждение, либо его отрицание истинно, и третьего не дано*. Но логика не представляет собой заповедей, спущенных с неба, и не камень, через который вы можете перескакивать с одного берега Ручья Математики на другой. Нет! Логика есть множество (возможно) полезных правил того, как мыслить или аргументировать, абстрагированных из нашего математического опыта главным образом, из теории чисел и арифметики. *Как указано в моей докторской диссертации, нам позволительно абстрагировать ограниченную форму этого правила логики из нашего опыта обра-*

щения с конечными совокупностями, так как мы знаем, что если возникнет сомнение в заключениях, полученных посредством этого правила, мы всегда сможем проверить его с помощью конечной последовательности испытаний! Но мы не имеем экспериментальной гарантии безопасности этой процедуры в случае бесконечных совокупностей! Поэтому мы не можем... использовать доказательство существования (или доказательства от противного) для постулирования свойств бесконечных совокупностей, о которых мы знаем столь мало!»

При этом Гильберт Мышь стал прыгать вверх и вниз на берегу в страшных мучениях. «Отказ от закона исключенного третьего для математика равносилен отказу астронома от телескопа, или отказу биолога от микроскопа! Не слушайте Брауэра! Вы же видите, что за жалкие остатки от математики ждут вас, если вы последуете его *конструктивистским методам!*»

Тут заквакал Брауэр Лягушка: «Это не будут жалкие остатки! Но это не будет также Абсурдная Заоблачная Территория, которую вы создаете с вашей *Аксиомой Выбора*... Вы знаете, к каким заблуждениям можно прийти посредством Аксиомы Выбора?»

«Нет, — вскричала толпа, — к каким?»

«Так внимайте! Прибегая к Аксиоме Выбора, я волен заявить, что могу рассечь *луну* на *пять частей*, затем сложить их обратно и затолкать в свой рот, как эту муху! Уп — и одним глотком!.. Эта аксиома заверяет нас, что каждая совокупность — конечная или бесконечная — так же счетна, как круги на этом холодном, свежем ручье!»

«Вот это да! — воскликнули слушатели. — И как же это можно сделать?»

«Будьте бдительны! Не спрашивайте Гильберта Мышь, или же Рассела Кролика, или же Цорна Мускатную Крысу, потому что они не знают как... Они говорят, что Бог был их Советчиком, и запомнил все конечные и бесконечные совокупности, рассовав их по ящикам. И всякий раз, когда в доказательстве требуется пример или контрпример, им стоит лишь обратиться к Богу, их Советчику, и Он тут же, благодетель, вытаскивает соответствующую папку или упорядоченную связку папок, и отсылает их на землю — в последнем математическом журнале».

«Вот это да!» — ахнули слушатели.

«Именно так!» — В этот момент Брауэр выдул огромный пузырь, который лопнул с оглушительным шумом.

«Если преступник при совершении своего поступка ухитряется уничтожить единственную улику, которая могла бы свидетельствовать против него, должен ли я принять вердикт о его невиновности? Нет! Либо может быть доказано, что *он виновен в преступлении*, или же *невиновен в нем*, или же *нет улик, хотя он и виновен*. Точно так же и в математике, утверждение может быть доказано или опровергнуто *конструктивно, или же мы должны признать, что оно не доказано*. Брек-кек-кек!»

Сторонники различных школ мысли спорили часами на берегу Ручья Математики...

Вейль Барсук, долгое время считавшийся учеником Гильберта Мыши, был столь впечатлен аргументами Брауэра Лягушки, что высказал следующее пессимистическое мнение: «Мы должны научиться новой скромности. Мы штурмовали небеса, но преуспели только в том, что водружали один туман на другой, а туман не может поддерживать того, кто хотел бы обрести под ногами твердую почву...»

Тем временем различные аспекты противоречий привели к тому, что население региона разделилось на небольшие группы ссорящихся доктринеров. Среди них были Формалисты, Логицисты, Интуиционисты, Неоинтуиционисты, Финитисты и т.д. Просто невозможно было угнаться за всеми вопросами и действиями, исходящими из столь многих штормовых центров. Поэтому Кузнечик решил, что самое время разрешить противоречия, устроив дебаты между двумя главными (и исходными) противниками — Гильбертом Мышью и Брауэром Лягушкой.

Утром накануне великого события все обитатели Ручья Математики, а также из соседнего Леса Логики, собрались под огромным дубом, в Академической Роще, дабы выслушать основные аргументы.

Но дискуссию открыл не Кузнечик, а Муравей, который сообщил, что его сосед Кузнечик внезапно отлучился, попросив заменить его. И дискуссия началась.

Через час горячность двух докладчиков и интеллектуальные страсти овладели толпой, которая в свою очередь раззадоривала крикливый обмен между двумя сторонниками полностью различных философий математики.

Внезапно, посреди крика и ора, откуда-то выскочил Кузнечик, возбужденный от новостей: «Стойте! Подождите! Есть кое-что лучшее, чем наши дебаты! Гедель Лис получил совершенно неожиданный результат: он доказал, что *вы не можете доказать непротиворечивости арифметики!*»

«Что?» — вскричал ошарашенный Гильберт Мышь.

«И что, он на самом деле сделал это?» — прогудел с сомнением Брауэр Лягушка.

«Да, он сделал это, Брауэр. На самом деле, точно. Гедель Лис использовал методы, с которыми ты не можешь поспорить. Видишь ли, его доказательство сконструировано в соответствии с моделью, которую он извлек из структуры натуральных чисел, как раз твоей парадигмы всей математики. И — Гильберт, мой друг — Гедель доказал, *что любая аксиоматическая система, какая вам угодна, должна либо потерпеть неудачу в схватывании существенных результатов арифметики, или же в нее уже проникли волки противоречия!*»

Полное молчание, павшее на собрание под дубом, было нарушено практичным Муравьем: «Тогда — дебаты завершены. Пора возвращаться к нашим делам...»

А на Лугу Овца, которую пас (классический математический) пастух, блеяла по ходу следующую песню:

Бог мой Советчик; и я не ошибаюсь.
Он устраивает мне публикации
в респектабельных журналах; он учит меня,
как использовать доказательство от противного.
Он направляет меня на путь истинный;
Он ведет меня путем классической логики,
во имя истины.
И в своих блужданиях по долинам
доказательств существования я не боюсь
противоречий,
потому что Он редактирует мою работу.
Меня вполне устраивает и Аксиома Выбора,
и Лемма Цорна.

Он приглашает меня на коллоквиумы
по классическому анализу,
когда там нет конструктивистов.
Он часто и с одобрением отзывается о моих работах
в Mathematical Reviews;
моя репутация растет во всем мире.
Конечно же, на меня изливаются гранты и почести
И я поднимусь в своем департаменте до звания
Почетного Профессора.

Аминь!

ГЛАВА 2

МНОЖЕСТВА

В этой главе речь идет о теории множеств Кантора, которая родилась в последней четверти XIX в. Несмотря на то, что эта теория давно стала классической, представляют интерес те ее аспекты, которые описывают основные идеи, приведшие к теории. Представление этих идей осуществлено в форме нарратива о бесконечности, где показывается, что логика бесконечности Кантора развивалась постепенно. Например, независимое в значительной степени введение кардинальных и ординальных чисел привело к некоторым аномалиям, которые были ликвидированы позднее. Именно логика (и если так можно выразиться, диалектика) построения теории трансфинитных чисел является предметом нашего рассмотрения. И хотя философию теории множеств нельзя назвать современной, до сих пор вокруг самой теории сохраняется атмосфера заоблачных ментальных конструкций, настолько абстрактных, что вызвало восклицание одного из математиков — современника Кантора: «Это уже не математика, а теология какая-то!».

Философия математики концентрируется вокруг небольшого числа избранных примеров, обсуждение которых касается самых трудных и нерешенных проблем теории множеств. Безусловно, речь идет в первую очередь о континуум-гипотезе Кантора и аксиоме конструируемости Геделя. В каждом из этих случаев у нас нет аргументов, которые бы привели к определению истинностного значения соответствующих утверждений. Начиная с позднего Виттгенштейна, мысль о том, что неразрешимые утверждения появляются в результате попыток ответить на неправильно поставленные вопросы, стала почти общим местом в философии. В рамках такого подхода естественно возникает вопрос о том, не является ли, скажем печальная ситуация с континуум-гипотезой результатом того, что вся теория бесконечных множеств и бесконечных чисел Кантора является

продуктом воображения. Если это так, тогда на некоторые вопросы этой теории, — в частности, вопрос, поставленный в континуум-гипотезе — не существует ответа, поскольку создатель вымысла не вложил в него достаточно информации, и в этом случае ответ может быть более или менее произвольным, совместимым, правда, с некоторыми ограничениями. Первым, и самым важным, таким ограничением, является непротиворечивость. Но перед обсуждением основных вопросов нужны некоторые детали трансфинитной теории чисел Кантора.

1. Счет и бесконечность

Понятие целого положительного числа восходит к глубокой древности, и увеличение «числа» чисел по ходу развития математики представляет сложный и долгий процесс на пути все большей абстракции. Можно сказать, что понятие множества является важнейшей вехой на этом пути, коль скоро все числа могут быть представлены как множества. Не входя пока в тонкости, следует просто отметить, что числа (целые положительные) приписываются множествам, т.е. совокупностям вещей. Таким образом, имея в виду конечные совокупности вещей, каждой из них может быть приписано определенное число. Однако это означает, что между каждой вещью совокупности и каждым целым положительным числом существует одно-однозначное соответствие, т.е. одной вещи соответствует 1, другой вещи — 2, еще одной — 3 и т.д. Подобного рода счет позволяет оценить «величину» совокупности, т.е. насколько она велика, и чем больше число, тем больше совокупность. Совокупности, которые имеют одно и то же число, имеют одинаковую величину. Таким образом, мы можем сравнивать множества и упорядочивать их по величине.

Как видно, счет основан на идее установления одно-однозначного соответствия, которая и является базисной логической идеей. Но в этом случае можно отказаться от «посредничества» чисел и прямо сравнивать размеры множеств путем установления одно-однозначного соответствия между элементами множеств. Счет может рассматриваться как установление существования одно-однозначного соответствия между конечным множеством объектов и подмножеством натуральных чисел.

Следует отметить, что концепция соответствия может рассматриваться как логическая, и учитывая базисность этой концепции, можно понять правдоподобность логицистской позиции Фреге и Рассела, согласно которой математика есть логика. Эта позиция усиливается, если учесть, что само понятие множества также определяется логически. Это не аргумент в пользу логицизма, а некоторого рода психологическое пояснение, свидетельствующее в его пользу. Весьма убедительно такой подход представлен в знаменитой книге Б. Рассела *Введение в математическую философию*[1], которая является нетехническим изложением системы *Principia Mathematica* Б. Рассела и А.Н. Уайтхеда, вершины второго этапа математической логики и оснований математики.

В применении к конечным множествам установление того факта, что два множества имеют одинаковое количество элементов, через одно-однозначное соответствие, почти тривиальна. Основной интерес представляет распространение такого представления на все множества, включая бесконечные. Именно это было сделано Г. Кантором и привело к теории трансфинитных чисел. Но следует иметь в виду, что возникающее на этом пути обобщенное понятие числа, а именно, кардинального числа, радикально изменяет бытовавшее до Кантора представление о бесконечности.

Распространение идеи одно-однозначного соответствия на бесконечные множества сталкивается с трудностью, которая была известна еще Галилею. Дело в том, что бесконечные множества имеют парадоксальное свойство: бесконечное множество может быть поставлено в одно-однозначное соответствие с собственным подмножеством. Так, множество натуральных чисел может быть поставлено в такое соответствие с множеством четных или же нечетных чисел. До основополагающих работ Дедекинда и Кантора это обстоятельство считалось, пользуясь терминологией современной философии науки, аномалией в понимании природы бесконечности. Действительно, в случае бесконечных множеств целое оказывается равным части, что было не только парадоксальным, но и делало понятие бесконечности сомнительным. «Реабилитация» Дедекиндом бесконечности состояла в том, что парадоксальное свойство бесконечного множества было положено в основу его определения: множество бесконечно, если можно установить одно-однозначное соответствие между множеством и его собственным подмножеством. Но при этом становится парадоксальным понятие «размера» множества, так как число элементов множества не может теперь считаться показателем его «размера». Таким образом, понятие числа элементов множества вообще не подходит к бесконечным множествам. Тут мы имеем некоторого рода диалектический поворот: сперва мы полагаем, что множество измеряется соответствующим ему числом, через установление одно-однозначного соответствия между элементами множества и натуральными числами. Затем идея такого соответствия распространяется на бесконечные множества. В результате мы получаем, что к ним понятие числа не применимо вообще.

[1] Рассел Б. *Введение в математическую философию* / Пер. В.В. Целищева. — М.: Гнозис, 1996.

Это может означать, что бесконечность как понятие отрицает понятие счетности. В некотором смысле оказывается, что все бесконечные множества имеют один и тот же «размер», который как-то превышает размер конечных множеств. «Как-то» относится к тому факту, что нет возможности сопоставить «размер» бесконечных множеств и размер конечных множеств. Однако оказалось, что некоторые бесконечные множества не могут быть поставлены в одно-однозначное соответствие друг с другом. Значит, идея размера бесконечных множеств имеет смысл, и тогда заключение об «одинаковости» всех бесконечных множеств рушится. Доказательство этого удивительного факта дал Г. Кантор.

Бесконечными множествами, которые в первую очередь приходят в голову, являются множество натуральных чисел и множество действительных чисел. Кантор показал, что не существует одно-однозначного соответствия между элементами двух этих множеств. Но если это так, тогда среди бесконечных множеств одно может быть «больше», а другое «меньше», хотя такое упорядочение не похоже на упорядочение по величине среди натуральных чисел. Частью этого доказательства является установление (Кантором же), что для любого множества A (конечного или бесконечного) не может быть одно-однозначного соответствия между A и множеством всех его подмножеств (множество-степень A). Из этого утверждения следует, что множество натуральных чисел не может быть поставлено в одно-однозначное соответствие с его множеством-степенью. Теперь, каждое подмножество множества натуральных чисел может быть поставлено единственным образом в соответствие с бесконечной последовательностью нулей и единиц. Каждая такая последовательность рассматривается как бинарное десятичное представление действительного числа в интервале (0, 1), и значит, представляет точку на линии, и поскольку действительные числа указывают все точки на линии, это все означает, что натуральные числа не могут быть поставлены в одно-однозначное соответствие с точками на линии. Другими словами, любое подмножество натуральных чисел не исчерпывает всех точек на линии, и стало быть, натуральных чисел меньше, чем точек. Так возникает идея о большем и меньшем в отношении бесконечных множеств.

Любая математическая идея является частично следствием ранее установленных результатов, и частично следствием введенных определений. Не менее важны неявные или явные предположения, лежащие в основе математического рассуждения. Отступая от «диалектического» представления введения меры бесконечных множеств, представим структуру подхода к этому вопросу Кантора.

В качестве определения выступает следующее утверждение: *Множество есть некоторая совокупность определенных и отдельных объектов, собранных в целое нашей интуицией или мыслью.* Это определение представляет наиболее естественное, и в то же самое время, самое проблематичное описание собирания объектов мысли в множество. Сам акт собирания в высшей степени идеален, что вводит в точные концепции расплывчатые принципы типа *Принципа Рефлексивности.*

В качестве предположения берется следующее утверждение: *Каждое множество имеет определенную «мощность», или «кардинальное число.* Здесь присутствует акт постулирования нового типа числа, которое предстоит согласовать с обычным понятием числа, и «сделать» для таких чисел арифметику.

В качестве опять-таки определения выступает следующее утверждение: *Два множества имеют одну и ту же мощность, или кардинальное число, если и только если, имеется одно-однозначное соответствие между ними.* Кантор так комментирует это определение: «Мы назовем “мощностью” или “кардинальным числом” множества *M* общую концепцию, которая посредством нашей активной способности мысли возникает из совокупности *M*, когда мы абстрагируемся от природы ее элементов и порядка, в котором они расположены»[2].

С философской точки зрения трудность состоит в том, что образование множества является чисто умственным актом, который может быть чистым произволом; например, в множество могут быть объединены элементы, которые не имеют между собой ничего общего. Известно, что множества могут быть заданы через объем (экстенсионально) или перечнем элементов, или же через порождающее свойство (интенсионально), присущее всем элементам множества. В случае конечных множеств, если у его элементов нет общего свойства, множество можно задать перечнем элементов. Но как это сделать в случае бесконечного множества? Считается, что бесконечные множества могут быть заданы только через порождающее свойство. Если это так, то нарушается аналогия между конечными и бесконечными множествами, в которой был заинтересован Кантор, считавший, что всякое множество определяется его элементами. Если это условие не будет соблюдено, тогда невозможно будет приписать бесконечному множеству размер. И вот тут Кантор вводит чисто философское предположение о том, что бесконечное множество также может быть задано перечнем, и невозможность такого человеческого мысленного акта означает просто ограниченность человеческого интеллекта, т.е. в принципе бесконечные множества могут быть измерены (через число элементов), но для этого надо их «сосчитать».

[2] Cantor G. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers.* — N.Y.: Open Court, 1955. — P. 86.

2. Ментальный характер множества

Понятие «бесконечного» является таким понятием, которое напрямую связано с понятием идеального. При всем многообразии вещей в материальном мире нет никаких свидетельств в пользу того, что их число бесконечно. Эволюция физических представлений о вселенной не дает противоположных свидетельств. Математика, которая описывает материальный мир, имеет дело с бесконечностью, но этот парадокс разрешается довольно легко многими соображениями относительно природы математики. Например, Д. Гильберт говорил о «высших» математических построениях как идеальных конструкциях, не соответствующих прямо материальным образованиям, а служащих для связки более «приземленных» математических конструкций. Впрочем, такое же объяснение выдвигается и в случае так называемых теоретических конструктов в эмпирических науках, т.е. объектов науки, которые прямо не соответствуют наблюдательным величинам.

Что касается идеального, т.е. мыслей, то тут понятие бесконечности не вызывает особых возражений. Правда, следует оговориться, что в философии ума есть направление, так называемая теория тождества, согласно которой мысль есть определенная конфигурация структур мозга, например, определенный путь вдоль возбужденных нейронов. В этом случае число мыслей также конечно, но поскольку теория тождества не является универсально принятой, будем считать, что бесконечность реализуется именно в мире мыслей. Например, самое простое (и быть может, самое старое) соображение таково. Можно образовать мысль о предмете, затем мысль о мысли о предмете, затем мысль о мысли о мысли о предмете и т.д. Правда, в этом самом «и т.д.» и заключена тайна бесконечности.

Если мысли подлежат счету, то они суть предметы в некотором мире. Возникает вопрос о том, что это за мир. Первая и до сих пор наиболее влиятельная попытка ответить на этот вопрос называется платонизмом. Платон выдвинул идею о существовании мира идей, идеального царства сущностей, где и помещаются математические объекты (поскольку теория идей Платона была инспирирована Пифагором). В современной философии платонизм не находит особо горячего отклика, поскольку утверждение о существовании еще одного мира, помимо материального, ставит перед теорией познания сложнейшие вопросы. Действительно, если существует мир идеальных объектов, то как мы узнаем о них, и более того, делаем весьма осмысленные и даже истинные утверждения? Эта проблема так называемого эпистемического доступа решается по-разному. Есть тут подлинные крайности. Например, Х. Филд, современный философ математики (упомянутый в гл. 1), утверждает, что математические предложения ложны, поскольку нет объектов, о которых делаются математические утверждения. Другая крайность состоит в том, что математические объекты все-таки существуют в идеальном мире, и доступ к ним осуществляется с помощью математической интуиции. Такой точки зрения придерживался знаменитый логик К. Гедель. При этом он усматривал аналогию между ощущениями предметов материального мира и интуицией математических объектов. Между двумя этими крайностями можно найти много промежуточных, частично удовлетворительных, теорий о природе математических объектов. Подлинный теоретический парадокс состоит в том, что с точки зрения оснований классической математики платонизм является наиболее адекватной позицией, в то время как другие позиции не могут привести к обоснованию всей математики. Платонизм есть утверждение, что математические объекты существуют вне и независимо от человеческого разума. Другое направление — интуиционизм — говорит о том, что математические объекты суть умственные конструкции, и в этом смысле субъективны. Так вот интуиционизм не позволяет получить некоторых ключевых теорем математического анализа, тем самым ограничивая математику существенным образом. Парадоксальность тут усматривается в том, что для математики адекватна наиболее спорная, если не сказать, неправдоподобная философски концепция.

Итак, примем пока предположение о том, что мысли существуют в некотором пространстве, общем для всех людей. Это, конечно, весьма спорное предположение, но именно оно, судя по всему, критически важно для обоснования математики. С точки зрения математика, эти мысли существуют объективно, и открываются мыслителями точно так же, как это делают, скажем физики или зоологи в отношении вещей материальных. Эта позиция крайнего платонизма, или, в другой терминологии, реализма, была прекрасно выражена математиком и философом Б. Расселом. Это часто цитируемая фраза нами уже упоминалась: «Логика имеет дело с реальным миром в той же степени, что и зоология, хотя с его наиболее абстрактными и общими чертами»[3]. Правда, как отмечает К. Гедель в своей знаменитой статье о логике Рассела, в более поздних изданиях эта фраза была убрана[4]. Очевидно, надо умерить такой крайний платонизм, и рассматривать такое представление как аналогию, хотя и в высшей степени полезную.

Самым подходящим примером в связи с идеальными объектами является понятие бесконечного множества. Множество обычно задается парой скобок, внутри которых содержится описание содержания множества. Р. Рукер предлагает уподоблять пару скобок мысленному надутому шарику[5]. Суть аналогии в том, что множество представляет собой некоторое единство. Так, множество $\{1, 2\}$ представляет собой единство, образующееся из множественности 1 и 2. Другими словами, мы представляем себе множество $\{1, 2\}$ как мысленный надутый шарик, в котором содержится 1 и содержится 2. Наиболее интригующей для нематематиков вещью в теории множеств является концепция пустого множества, которое традиционно обозначается через $\varnothing$. Пустое множество получается собиранием вместе ничто.

Тут уместен философский комментарий. Пустое множество есть нечто, а внутри него ничто. Существует знаменитый философский вопрос: «Почему существует нечто, а не ничто?» Нет вразумительного ответа на глобальный вопрос о том, почему вообще что-то должно существовать. Это обстоятельство есть просто факт о нашем мире, который следует просто принять. На вопрос о том, почему существует

[3] Рассел Б. *Введение в математическую философию.* — С. 155—156.

[4] Гедель К. *Расселовская математическая логика* // Рассел Б. Введение в математическую философию / Пер. В.В. Целищева. — М.: Гнозис, 1996. — С. 205—232.

[5] Rucker R. *Infinity and the Mind.* — Bantam Books, 1983. — P. 42.

пустое множество, нет вразумительного ответа. Но сама идея образования множеств отвечает, видимо, объективным фактам о мире.

Если мы совершим операцию собирания, символизируемую замыканием парой скобок содержания множества, то в данном случае мы получим пустой мысленный надутый шарик $\{\ \}$. Повторение операции замыкания скобок, т.е. образования множеств, приводит к более сложным множествам. Так, из $\{\ \}$ мы можем получить $\{\{\ \}\}$, или же $\{\{\ \},\{\{\ \}\},\{\{\ \},\{\{\ \}\}\}\}$. Заранее скажем, что последнее образование есть представление числа 3 в терминах множеств. Когда мы говорили о проблематичности «и т.д.» в случае мысли о мысли о мысли… то имели в виду свойство рефлексивности мышления. В более техническом изложении это свойство выглядит так:

Пусть мы начинаем с некоторого множества M такого, что единственным членом его есть оно само, т.е. $M = \{M\}$. А теперь, заменим справа M на $\{M\}$ и получим $M = \{\{M\}\}$. Если мы могли бы производить эту замену бесконечно, тогда мы раздули бы M до размера $\{\{\{\{\{.....\}\}\}\}\}$. Это было бы определением M, чьим единственным членом является оно само, поскольку замыканием скобок $\{\ \}$ мы ничего не изменяем. Множество M есть множество, чьим единственным членом является множество, чьим единственным членом является множество… Но если единственный член множества M есть само это множество, тогда M в реальности имеет один элемент. И если мы пытаемся описать этот элемент при помощи скобок, мы получаем бесконечное описание. Объекты, подобные M, называются саморепрезентативными. Теперь возникает вопрос о том, какова природа M. Ясно, что вряд ли оно может быть материальным объектом, поскольку описанное выше приумножение сущностей не свойственно физическому пространству. Стало быть естественно предположить, что M существует объективно в мысленном пространстве. Коль скоро описанная процедура порождения объектов через скобки дает множества, сама теория множеств может быть представлена как наука, исследующая это пространство. Подчеркнем, что такое представление о множестве требует предпосылки об объективности существования мысленного пространства. Как известно, эта наивная посылка ведет к парадоксам. Тем не менее подобная метафизика необходима для теории множеств, и значительная часть трудностей и проблем в философии математики связана с поразительным контрастом между ясностью техники теории множеств и туманными метафизическими ее предпосылками. Опираясь на эту метафизику (например, рефлексивность ума, далее мы увидим не менее метафизические предпосылки теории), математики утверждают, что существуют бесконечные множества.

На самом деле, в объяснении природы множества появляются вещи, которые даже не требуют «высокой метафизики», но которые, тем не менее, озадачивают, и больше того, приводят к парадоксам. Знаменитое определение Кантора звучит довольно просто: «Множество есть Множественность, которая мыслится как Единое»[6]. Так, множество натуральных чисел рассматривается Кантором как одно число, для которого он ввел символ $\aleph_0$ (Алеф-нуль).

Хотя вопрос о восприятии множеств как об одной из наиболее фундаментальных человеческих способностей, является весьма спорным, надо признать, что именно эта способность представляется очевидной[7]. Рассмотрим пример. Пусть мы имеем набор точек на плоскости, с виду совершенно случайно расположенных. Наша привычка к организации чувственных ощущений приводит к тому, что в случайной картине беспорядочно расположенных точек мы можем увидеть осмысленные контуры. Точки, образующие каждый контур, составляют множество. Поскольку один и тот же набор точек может дать неопределенное число осмысленных контуров, мы можем иметь самое различное число множеств. Если отвлечься от чисто перцептуального аспекта образования множеств, то ясно, что концептуальная организация опыта приводит к образованию множеств. Так, совокупность людей может дать множества любителей животных, алкоголиков, садоводов, родителей и т.д.

Но если образование множеств обязано перцептуальной и концептуальной деятельности человеческого сознания, тогда возникает типично философский вопрос о статусе множества. Так, существует ли множество, если никто не мыслит о нем? Кантор решает этот вопрос достаточно радикально, полагая, что множества уже существуют, независимо от того, являются ли они предметом чьей-либо мысли. Платонизм поднимает огромное множество проблем и вопросов. В некотором, вполне определенном смысле в каждом куске породы уже существует скульптура, которую можно сделать из него. Следует обратить внимание на слово «возможно»: при таком понимании множество есть форма возможной мысли. Более приближенный к математике пример таков: есть такие числа, которые в силу своей огромной величины не могут быть постигнуты челове-

[6] Cantor G. *Gesammelte Abhandlungen* / Ed. A. Fraenkel and E. Zermelo. — Berlin, 1932. — P. 204.

[7] П. Мэдди утверждает, что восприятие материальных объектов, составляющих множество, и самого множества как математического объекта, является одинаковым по своей природе. См.: Maddy P. *Realism in Mathematics*. — Oxford: University Press, 1990.

ческим умом, и тем не менее, сторонник Кантора уверен в том, что множества таких чисел существуют.

Больше того, согласно Кантору, существует бесконечная иерархия бесконечных множеств. Не все согласны с такого рода представлениями, и многие полагают, что существуют лишь конечные множества. Как видим, существование бесконечностей не может быть доказано и появляется в математике как некоторый постулат, часто выражаемый в виде аксиомы бесконечности. Этот постулат принимается платонистами в противовес финитистам, согласно которым бесконечность не существует. Мы не будем описывать эту ставшую традиционной для изложения философии математики дискуссию. Для нас здесь важно то, что аргументация платониста о существовании бесконечности опирается на предпосылку об объективном существовании мысленного пространства, описание которого и есть теория множеств. Надо понимать и другое: принятие бесконечности есть в некотором смысле акт веры, которую в наиболее сильной форме выразил создатель теории множеств Г. Кантор: «Боязнь бесконечности есть форма близорукости, которая предотвращает возможность видения актуальной бесконечности, хотя в наивысшей своей форме она создала и поддерживает нас, а в своей вторичной трансфинитной форме она окружает нас и даже обитает в наших умах»[8].

Как уже было сказано, метафизические, или попросту философские, рассмотрения играют в основаниях математики особую роль. В частности, речь идет о Принципе Рефлексивности. При рассуждении о бесконечности чисто спекулятивно можно прийти к такому понятию как Абсолютная Бесконечность, превыше которой ничего помыслить нельзя. Если все элементы мысленного пространства собрать вместе, мы получаем класс всех множеств, обычно обозначаемый через V. С этим понятием связаны многие парадоксальные заключения. Если V есть множество, тогда оно может быть членом другого (большего) множества, что противоречит условию, что мы имеем класс всех множеств. Тогда, во избежание парадоксов мы вынуждены ввести ограничение — класс всех множеств V не может быть множеством. Так что V представляет собой такое собрание вещей (мыслей), которое никогда не может мыслиться как нечто единое.

Принцип Рефлексивности (в метафизическом варианте) формулируется так: каждое постижимое свойство Абсолютного (именно так можно понимать класс всех множеств) присуще также некото-

[8] Cantor G. *Gesammelte Abhandlungen.* — P. 374.

рой меньшей сущности. В математическом варианте этот принцип таков: каждое постижимое свойство, присущее V, присуще также некоторому множеству. Естественно, что при обсуждении такого рода принципов, как Принцип Рефлексивности, могут иметь место самые разные интерпретации, вплоть до мистических, что не удивительно, поскольку речь идет о бесконечности, да еще и абсолютной (что бы это ни означало). Здесь же мы ведем речь о рациональной реконструкции идеи бесконечного.

Коль скоро речь идет об Абсолютном, всей метафизической традицией предполагается его непостижимость. Так вот Принцип Рефлексивности предотвращает его постижимость. Действительно, предположим обратное, а именно, что Абсолют имеет такое постижимое свойство A, которое принадлежит только ему, и не принадлежит никакой меньшей сущности. Но если A вообще постижимо, тогда сущность, которая обладает этим свойством, не может быть Абсолютом, который сам по себе непостижим, и значит, эта сущность отражает лишь одну из сторон Абсолюта. Принцип Рефлексивности в такой формулировке кажется туманным, и не очень понятно, в чем состоит его польза в математике. Но оказывается, что этот принцип служит мостиком между метафизикой и идеей бесконечных множеств. Пусть мы имеем мысленное пространство, о котором говорили выше. Элементом этого пространства является возможная мысль B. Далее, мысль «B есть возможная мысль» также принадлежит мысленному пространству. Тогда, согласно Принципу Рефлексивности, должна быть некоторая мысль C такая, что для каждой мысли B в C, мысль «B есть возможная мысль» также входит в C, т.е. мы имеем некоторое свойство, специфицированное предложением в кавычках. Тогда C имеет это упомянутое выше свойство мысленного пространства. Действительно, мы можем строить иерархию возможных мыслей, которые не могут исчерпать мысленного пространства. Остается заключить, что C должно быть бесконечным. Это и есть доказательство того, что бесконечная мысль существует. Позднее, этот Принцип Рефлексивности обретет более техническое звучание, а пока можно просто заключить, что если принимается существование бесконечного Абсолюта, тогда допустимо принятие существования бесконечных мыслей и множеств.

Можно подойти к объяснению этого принципа по-другому. Универсум множеств столь сложен, что не может быть полностью описан. Отсюда следует, что нечто истинное о всем универсуме уже должно быть истинно о некотором исходном сегменте универсума. Значит, любая попытка однозначно описать V применима к его меньшей части, которая «отражает» (reflect) свойство, приписываемое V. П. Мэдди при этом добавляет, что рефлексия (отражение) влечет неисчерпаемость.

Все эти рассуждения поднимают проблемы, связанные с концепцией множества. Множество есть нечто, что образуется мысленной операцией, которая организует множества сообразно некоторому свойству или принципу. Из одного и того же набора предметов можно сформировать несколько множеств (в конечном случае из набора n элементов можно сформировать 2^n множеств). При этом вовсе не обязательно, чтобы собираемые в множество элементы имели между собой что-либо общее. Важен акт мысли, делающий из Многого Единое. Тогда возникает вопрос о том, существует ли множество, если никто не мыслит его?

Это очень сложный вопрос, который является точным аналогом традиционных дискуссий в философии, разделяющих идеализм и материализм, реализм и концептуализм и многих других. Если не входить во все эти подробности, можно считать упрощением ситуации убеждение Кантора в том, что множества существуют независимо от того, мыслит кто-либо их или нет. Это явно реалистическая посылка, которая еще будет обсуждаться нами позднее. Как уже было сказано, «множество есть форма возможной мысли». В связи с этим возникает вопрос, есть ли «невозможные мысли», которые не дают множества?

3. Переход к трансфинитному

Принимая во внимание вышесказанное о природе бесконечности и понятии множества, становится понятным подход Кантора к трактовке бесконечных множеств как конечных. Другими словами, он считал, что идентичность множества определяется его элементами, т.е. бесконечное множество по аналогии с конечным может быть специфицировано бесконечным перечнем. Сама идея бесконечного перечня элементов множества представляется весьма трудной, и вот тут-то Кантор и использует реалистическую посылку: вполне возможно, что неспособность мыслить бесконечные множества без какой-то порождающей идеи окажется просто контингентным человеческим ограничением, что никак не ограничивает идеи существования множеств в некотором мысленном пространстве. Контингентному явно не место в платоновском царстве сущностей.

Если бесконечные множества трактуются как конечные, то им можно приписать числа, и они могут быть сосчитаны. Но как это сделать? Ведь понятие кардинального числа, выведенное из идеи одно-однозначного соответствия, не дает числа объектов в интуитивном смысле. Чтобы называть их числами, нужно сравнение их, т.е. чтобы можно было сказать, какое из них больше, а какое меньше.

Рассмотрим два множества, A и B. Пусть C есть кардинальное число каждого из этих множеств, т.е. число, показывающее их «размер». Их можно сравнивать в соответствии со следующим определением:

$C(A) \leq C(B)$, если и только если, имеется подмножество B^* множества B такое, что $C(B^*) = C(A)$.

Таким образом можно ввести отношение порядка среди множеств. Но для того чтобы знать, что это определяет даже частичный порядок, необходимо знать, что

$$C(A) \leq C(B) \ \&\ C(B) \leq C(A) \Rightarrow C(A) = C(B).$$

Это теорема Шредера — Бернштейна, согласно которой если имеется подмножество B^* множества B такое, что существует одно-однозначное соответствие между A и B^*, и существует подмножество A^* множества A такое, что существует одно-однозначное соответствие B и A^*, тогда существует одно-однозначное соответствие между A и B.

Для конечных множеств эта процедура сравнения множеств интуитивно понятна, но в случае бесконечных множеств возникают проблемы. Действительно, рассмотрим общий случай сравнения двух множеств A и B.

Пусть даны два множества A и B. Тогда имеются четыре комбинаторные возможности:

1) $C(A) = C(B)$; 2) $C(A) < C(B)$; 3) $C(A) > C(B)$; 4) A и B несравнимы в отношении кардинальности.

С точки зрения конечных множеств последний вариант не имеет смысла, потому что каждая конечная совокупность имеет определенное число элементов, и эти числа упорядочены отношением «меньше-чем» или «больше-чем». Идея Кантора состояла в том, чтобы позволить эту возможность в отношении бесконечных множеств. Вопрос заключался в статусе этой возможности. Как оказалось, для доказательства этого утверждения требуется условие вполне-упорядоченности любого множества (каждое непустое множество имеет наименьший элемент). Но как раз этого последнего условия Кантор, несмотря на все свои усилия, доказать не смог. Так что утверждение о возможности сравнения кардинальных чисел бесконечных множеств остается посылкой, что очень важно с точки зрения обоснования теории трансфинитных чисел. Известно, что предположение о вполне-упорядоченности множеств равносильно аксиоме выбора, которая имеет громкую историю в основаниях математики.

Для общей трактовки конечных и бесконечных множеств следует ввести определение, которое подходило бы для тех и других. Или же следует показать, что законы для трансфинитных чисел не противоречат законам для конечных чисел. Но надо сразу заметить, что кардинальные числа для бесконечных множеств (далее, просто кардинальные числа) имеют особую арифметику, на которой мы здесь не останавливаемся. В духе принятой Кантором посылки эта арифметика позволяет выразить соотношение между кардинальным числом данного множества A и его множеством-степенью $P(A)$, потому что имеется одно-однозначное соответствие между подмножествами A и множеством всех функций f от A к множеству из двух элементов $\{0, 1\}$, где каждое подмножество рассматривается как те элементы из A, для которых f принимает значение 1. Отсюда следует, что кардинальное число множества-степени от множества A равно 2, возведенному в степень кардинального числа A. Другими словами,

$$C(P(A)) = C(2^A) = 2^{C(A)}.$$

На основании уже установленных результатов можно видеть некоторые соотношения в мире трансфинитных чисел. Кардинальное число точек на линии есть то же самое, что кардинальное число множества действительных чисел в интервале (0, 1). Далее, кардинальное число множества действительных чисел в интервале (0, 1) равно кардинальному числу множества-степени множества натуральных чисел $P(N)$. Но тогда число точек на линии равно $C(P(N)) = 2^{\aleph_0}$. Возникает вопрос, в каком соотношении находятся понятия непрерывной линии и ее точек, рассматриваемых как множества. Это подводит нас к рассмотрению соотношения непрерывного и дискретного.

4. Непрерывное и дискретное

Прежде всего, следует более внимательно рассмотреть понятие множества-степени. Для конечного множества A ясно, что число его

подмножеств равно 2^A, что больше числа элементов A. Как убедиться в том, что это справедливо и для бесконечных множеств? Предположим обратное, а именно, что существует функция, отображающая элементы $P(A)$ в единственный элемент A. Тогда можно показать, что это предположение приводит к противоречию. Это значит, что кардинальное число множества-степени множества натуральных чисел N «больше», чем кардинальное число N. Именно это обстоятельство является одним из главных в споре между финитистами и сторонниками Кантора. Для первых, бесконечное множество есть всегда потенциально бесконечное, незавершенное, и его нельзя рассматривать как отдельную сущность.

Если существуют, по крайней мере, два кардинальных числа, одно из которых больше другого, а именно, $\aleph_0$ и 2 в степени $\aleph_0$, тогда возникает вопрос, что же представляет собой это второе кардинальное число. Естественным ответом было предположение о том, что это число точек на линии. Это поднимает более общий вопрос о природе континуума. Рациональное его понимание состоит в попытке «сосчитать» его, сопоставить непрерывности геометрической меру арифметическую. Другими словами, может ли линейный континуум быть отождествлен с множеством чисел, например, множеством действительных чисел. Ясно, что утверждение о том, что число точек на линии равно 2 в степени $\aleph_0$, не имеет смысла без положительного ответа на второй вопрос.

В истории математики вопрос о природе концепции функции представлен спором Эйлера и Даламбера. Последний понимал функцию как алгебраическое выражение, а первый — как геометрическую фигуру. Спор, продолжавшийся многими математиками и после Эйлера и Даламбера, завершился (в известной степени) победой «алгебраической» точки зрения, поскольку как показал Фурье, любую «патологическую» (неизобразимую) с геометрической точки зрения функцию можно представить в виде бесконечного ряда тригонометрических функций. Эти функции описывают колебательные процессы. Принимая во внимание бесконечную делимость континуума, следует признать, что не существует предела частотам колебаний, которые могут быть упакованы в данный интервал, а также амплитуде этих колебаний. А можно ли говорить о бесконечной частоте? То есть, независимо от того, какой бы величины не был интервал (как бы мал он ни был), могут ли быть внутри него колебания? Утвердительный ответ на этот вопрос дают патологические функции, среди прочих, функция Вейерштрасса (везде непрерывная, но нигде не дифференцируемая) и функция Римана (с бесконечно многими разрывами между двумя пределами, но в то же время интегрируемая).

Если возможны бесконечно плотные колебания, тогда становится ясно, что однородный линейный континуум имеет сложную структуру. В этом случае алгебраический способ представления функции превосходит геометрический. Действительно, графики с бесконечными разрывами или скачками функции, «невидимые глазу», т.е. невыразимые в геометрическом представлении, могут быть представлены только в алгебраическом виде как совокупность точек. Функции становятся множествами точек, и каждое множество имеет приписанное ему число, а также сложную порядковую структуру.

Все предыдущие рассуждения сделаны в предположении существования пределов бесконечных рядов (скажем, для тригонометрических функций Фурье). При сопоставлении точек и чисел (на самом деле, действительных чисел) важен вопрос сходимости рядов, поскольку действительные числа определяются как пределы последовательности рациональных чисел. Не менее важен вопрос о существовании таких пределов. Как и прежде, мы хотели бы выявить логическую структуру математических построений. В данном случае следует отметить, что часто такие пределы вводятся определениями, что не предполагает существования пределов.

Дедекинд определил действительные числа таким образом, что связь между понятиями «точки на линии» и «действительного числа» становится вполне понятной. Поскольку рациональные числа, представляющие точки на линии, не исчерпывают всех точек (что видно из знаменитого аргумента о непредставимости с $\sqrt{2}$ никаким рациональным числом), требуется введение новых чисел, которые, во-первых, «завершили» бы линию, а во-вторых, были бы естественным расширением понятия числа, не противореча арифметическим свойствам предыдущих чисел. Причем это должны быть такие числа, которые восполнят то, чего не хватает до непрерывности. Другими словами, новые числа должны дать все точки прямой линии.

На вопрос, «Из чего все-таки состоит непрерывность», который задал себе Дедекинд, он дал ответ в виде теории действительных чисел. В основе решения Дедекинда лежит введенное им понятие «сечения». Все точки прямой линии делятся на два класса; каждая точка первого класса лежит слева от каждой точки второго класса. При этом существует одна и только одна точка, производящая это деление точек на два класса. Такие сечения линии могут делаться рациональными числами, но это не все сечения. Приведем пример сечения. Пусть A_1 есть множество всех рациональных чисел, меньших $^1/_2$, а A_2 — множество всех рациональных чисел, больших или равных $^1/_2$. Тогда это будет сечение, производимое числом $^1/_2$. Это сечение, производимое рациональным числом. А вот если A_1 есть множество рациональных чисел, меньших $\sqrt{2}$, а A_2 есть множество всех рациональных чисел, больших или равных $\sqrt{2}$, это будет сечение, которое сделано нерациональным числом. Это действительно сечение, потому что каждое рациональное число находится либо в A_1, либо в A_2.

Как уже было сказано, цель конструирования новых чисел состоит в создании непрерывной числовой области. Если сечения должны сыграть роль в решении этой задачи, тогда нужно объявить все сечения, производимые нерациональными числами, этими новыми числами. Дедекинд назвал их иррациональными числами. Эти числа полностью определены сечениями, и кроме того, Дедекинд полагал, что эти числа создаются выборкой множеств рациональных чисел, и при этом не рассматривается, как множества специфицируются. Таким образом, предполагается существование произвольных выборок из данного множества, что вновь подтверждает ключевую роль аксиомы выбора в определении действительных чисел.

В некотором смысле более конструктивная позиция в «изобретении» действительных чисел занята Кантором. Он определяет такое число как бесконечно сходящуюся последовательность рациональных чисел, которая не имеет рационального предела. Отношение порядка среди таких чисел должно строиться на основе приближений. Пусть имеется последовательность $<a_n> = b$, и последовательность $<a'_n> = b'$. Роль приближений видна из следующих рассмотрений: например, для любого положительного рационального числа ε имеется целое число k такое, что для всех $n > k$, если $a_n — a'_n > \varepsilon$, тогда $b > b'$. Кантор далее постулировал, что каждому элементу B соответствует единственная точка на линии, так что у Кантора уже есть при этом арифметическая модель континуума. Объекты b ведут себя как числа, но Кантор прибегает к итерации описанного процесса, получая все более точные приближения. Мотив для такой итерации состоит в том, что Кантор хотел отразить сложную тонкую структуру, а именно, порядковую структуру точек на плоскости. Это, по мысли Кантора, позволило бы характеризовать распределение точек в континууме.

Таким образом, при построении теории действительных чисел Дедекиндом и Кантором устанавливается связь между действительными числами и точками на линии. Кардинальное число множества точек на линии есть то же самое, что кардинальное число множества действительных чисел на интервале (0, 1), а это в свою очередь равно кардинальному числу множества-степени натуральных чисел $P(N)$. Таким образом, мы можем установить, что число точек на линии равно $C(P(N)) = 2^{\aleph_0}$.

Однако проясняет ли это вопрос о том, сколько на самом деле точек на линии? Для этого надо знать, что означает операция возведения в степень в случае бесконечных чисел. Мы знаем, что кардинальное число множества-степени множества натуральных чисел больше, чем кардинальное число множества натуральных чисел. Используя этот результат, мы получаем иерархию множеств N, $P(N)$, $P(P(N))$, $P(P(P(N)))$... с кардинальными числами $\aleph_0$2 в степени $\aleph_0$2 в степени 2 в степени $\aleph_0$ и т.д.

Операция образования множества-степени в случае конечных множеств (экспоненциальная процедура) не ведет нас от одного кардинального числа к следующему, поскольку между ними находится много других чисел, в то время как в случае бесконечных множеств такая операция определяет и порождает следующее кардинальное число. Эта последовательность кардинальных чисел упорядочена, поскольку каждое последующее кардинальное число больше предыдущего. Но мерой чего являются все эти кардинальные числа? И могут ли быть между ними другие кардинальные числа? В случае конечных множеств кардинальные числа служат мерой счета, а в случае бесконечных множеств — мерой размера множеств. Разрыв между двумя этими понятиями непреодолим, так что мы не можем иметь такую числовую шкалу, которая дала бы нам меру бесконечных множеств. Но как мы ранее видели, кардинальные числа были введены без всякой связи с понятием счета и отношением порядка.

Спекулируя относительно последовательности кардинальных чисел, Кантор предположил, что следующим кардинальным числом за кардинальным числом множества натуральных чисел является 2 в степени $\aleph_0$. Мерой континуума является второе кардинальное число. Такое предположение носит имя континуум-гипотезы, одного из наиболее интересных и спорных положений теории множеств.

5. Трансфинитные ординальные числа

Как было замечено ранее, Кантор хотел в своей теории бесконечных чисел отразить сложную структуру точек на линии. Для этой

цели он обобщил понятие натурального ряда чисел, вводя понятие числа как меры числа повторяемых операций. Рассмотрим это понятие более обстоятельно, следуя классическому изложению Рассела[9].

Обсуждаемые нами числа носят название ординальных, из чего ясно, что речь идет о порядковых числах ряда. Кардинальное число ряда натуральных чисел единственно, а вот ординальных чисел натурального ряда может быть много. Ординальное число ряда может изменяться простым переупорядочением его членов. Процедура начинается с натурального ряда чисел

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots, n, \ldots$$

Этот ряд имеет наименьшее ординальное число, названное Кантором ω. Теперь утончим этот ряд путем повторения операции изымания первого четного числа и сдвига его в конец ряда. При этом получается последовательность различных рядов:

$$\begin{array}{llllll} 1, & 3, & 4, & 5, & n, \ldots & 2 \\ 1, & 3, & 5, & 6, \ldots & n+1, \ldots 2, & 4 \\ 1, & 3, & 5, & 7, & n+2, \ldots 2, & 4, \quad 6 \end{array}$$

и так далее. Если этот процесс продолжается сколь угодно долго, в результате мы имеем ряд

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \ \ldots\ 2n+1, \ \ldots\ 2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \ \ldots\ 2n.$$

Ординальное число первого ряда $\omega + 1$, второго — $\omega + 2$, третьего — $\omega + 3$ и итогового — 2ω. Каждое последующее число «больше» предыдущего. Интуитивно введение порядка обосновывается тем, что одно ординальное число больше другого, если ряд, имеющий первое число, содержит часть ряда, имеющего второе число. Приведенный ниже пример сравнивает таким образом два ряда:

$$\begin{array}{lllll} 1, & 3, & 4, & 5, & n, \ \ldots\ 2 \\ 1, & 3, & 5, & 6, \ldots & n+1, \ldots 2, \quad 4. \end{array}$$

Первый ряд подобен части второго ряда, и потому имеет большее ординальное число. Вообще, утончение ряда натуральных чисел можно продолжать и далее. Получение ряда с ординальным числом ω^2 происходит путем помещения в начале ряда нечетных чисел,

[9] Рассел Б. *Введение в математическую философию.* — Гл. 9: Бесконечные ряды и ординальные числа.

затем удвоения этих чисел, затем удвоения и этих чисел и т.д. Таким образом, получается ряд

$$1, 3, 5, 7, \dots; 2, 6, 10, 14, \dots; 4, 12, 20, 28, \dots; 8, 24, 40, 56, \dots .$$

В ходе подобного процесса можно получить и $\omega^3, \omega^4, \dots \omega^\omega$ и т.д. Мы не входим здесь пока в формальные детали подобного рода бесконечного процесса утончения натурального ряда. Отметим важный результат, который получит далее более строгую трактовку. Ряд всех ординальных чисел, которые могут быть получены таким путем, сам по себе больше, чем любой ряд, который может быть получен переупорядочением членов натурального ряда. Кардинальное число такого ряда ординальных чисел имеет кардинальное число $\aleph_1$, которое, как уже было видно, больше $\aleph_0$. Ординальное число такого ряда — ω_1.

Здесь мы видим, что есть прямая связь между двумя видами бесконечных чисел — ординальными и кардинальными. Между тем важно понимать, что каждое из чисел было введено независимым образом, и в дальнейшем Кантор приложил значительные усилия для разрешения вопросов, которые возникли на пути увязывания этих двух видов чисел.

Формальное введение ординальных чисел обладает столь большой новизной, что новая математическая теория столкнулась с активным неприятием. Как уже упоминалось выше, один из математиков, не принимавших теории трансфинитных чисел, воскликнул: «Это уже не математика, а настоящая теология». Действительно, Кантор «творит» ординальные числа, устанавливая три принципа порождения их.

Первый принцип порождения состоит в добавлении единицы к числу, которое уже было порождено. Этот принцип дает числа, принадлежащие к первому числовому классу: (I) = 0, 1, 2, 3, 4, ...

Первый принцип позволяет нам получить натуральный ряд чисел. Теперь в действие вступает основное новшество Кантора, а именно, рассмотрение бесконечного множества как единого объекта. Против такого понимания бесконечности как актуальной бесконечности завершенного процесса, выступали сторонники концепции потенциальной бесконечности как никогда не завершающегося процесса. Если процесс никогда не завершается, тогда мы не выйдем за пределы множества натуральных чисел, или в терминологии Кантора, первого числового класса. Для того, чтобы перейти к трансфинитным числам, нужен «скачок» от первого числового класса к следующему. Для этой цели служит *второй принцип порождения* трансфинитных чисел.

В результате «скачка» получается новое число, которое больше любого натурального числа, каким бы большим оно ни было. Это число обозначено Кантором ω, и оно является пределом, к которому стремится, но никогда не достигает натуральный ряд чисел 1, 2, 3, 4, ...

Второй принцип порождения формулируется так: Если имеется некоторая определенная последовательность целых чисел, в которой нет наибольшего числа, может быть образовано новое число, которое определяется как наименьшее из чисел, которые больше любого целого числа.

Итак, путем «скачка» получено новое число ω. Это то самое ординальное число, которое мы обсуждали ранее. Теперь мы можем перейти к числам $\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \dots$, используя первый принцип порождения. К этой последовательности ординальных чисел применяется второй принцип порождения, в результате чего получается число $\omega 2$ и т.д. Повторяющееся применение двух принципов порождения дает нам бесконечную иерархию ординальных чисел. Все эти числа составляют *второй числовой класс*, и они могут рассматриваться как объекты, полученные описанным выше процессом введения сложного порядка в ряду натуральных чисел («утончение» всякого рода).

Напомним, что Кантор ищет такие бесконечные множества, которые могли бы составить континуум. Тогда встает вопрос, достаточно ли полученных чисел для этих целей? Можно убедиться в том, что все порожденные таким образом числа могут быть поставлены в одно-однозначное соответствие с натуральными числами, и все ординальные числа могут быть приписаны множествам натуральных чисел, когда они считаются не в натуральном порядке (включая процедуры «утончения» и перестроения членов натурального ряда). Так что ординальные числа применяются к множествам, имеющим мощность $\aleph_0$. Таким образом, первые два принципа сами по себе не порождают какого-либо ординального числа, которое могло бы быть числом точек на линии. Нужен еще один «скачок» в трансфинитное, обеспечиваемый *третьим принципом порождения*.

Для того чтобы понять логическую структуру следующего «скачка» в трансфинитное, следует более тщательно проанализировать первый принцип порождения. В неявном виде он утверждает, что никакое ординальное число не может быть меньше самого себя. Если бы для некоторого ординального числа a мы имели бы соотношение $a < a$, тогда бы не могло быть наименьшего ординального числа, превышающего a. Действительно, если $a < a$, тогда в случае $a < b$ можно было бы образовать неравенство $a < a < b$. Но это означает, что между двумя ординальными числами a и b существует еще одно ординальное число, так что b не может быть ординальным числом, превышающим a.

Теперь первый и второй порождающие принципы могут быть объединены в *третий порождающий принцип*, формулировка которого требует более пространных объяснений. Сам принцип можно сформулировать так: для каждого множества A ординальных чисел существует наименьшее ординальное число, превышающее любой член A; это число называется $\sup A$.

Для понимания того, почему третий принцип порождения обеспечивает «решающий скачок» в область трансфинитного, требуется понимание того, какого рода множества A ординальных чисел существуют вообще. Как указывалось ранее, любая совокупность вещей, объединенных мыслью, может быть множеством, при условии, что такая совокупность вообще возможна.

Традиционно изложение оснований математики начинают с парадоксов теории множеств, но простая декларация их мало что говорит об их подлинной значимости, вне технических деталей. Мы приберегли эти парадоксы для данного этапа, чтобы показать их подлинную важность. А действительно, какие множества могут быть, а какие не могут? Самый известный из теоретико-множественных парадоксов — парадокс Рассела — утверждает, что совокупность B всех множеств, которые не являются членами самих себя, не может быть множеством. Потому что если бы B было множеством, тогда было бы противоречие $B \in B$, если и только если, $B \notin B$. Таким образом, никакое множество не может быть элементом самого себя. А это значит, что совокупность всех множеств V не является множеством. Встает вопрос о том, чем же является такая совокупность, которая объемлет все сущее?

Рассмотрим более частный вопрос о множестве всех ординальных чисел, которое обозначим через On. Согласно третьему принципу порождения, тогда существует ординальное число $\Omega = \sup On$. Но это невозможно, так как если Ω есть ординальное число, тогда Ω есть элемент совокупности всех ординальных чисел On. Но это означает, что $\Omega < \sup On < \Omega$. Вот тут мы используем скрытое свойство первого принципа порождения, а именно, что никакое ординальное число не может быть меньше самого себя.

Таким образом, предположение о том, что On есть множество, ведет к противоречию. Это обстоятельство было открыто Бурали-Форти в 1897 г., за несколько лет до открытия Расселом парадокса, носящего его имя. Парадокс Бурали-Форти в момент своего откры-

тия, как полагали, относился к тонкостям теории множеств и не представлял особых проблем. А вот парадокс Рассела задевал саму логику математического размышления, и потому стал наиболее известным. Если действительно считать парадокс Бурали-Форти чем-то не очень существенным, то можно пойти на некоторое ослабление строгости. Ведь на самом деле у нас есть интуитивное понятие множественности, в частности, понятие всех ординальных чисел, и это понятие мы обозначим через On, а интуитивное понятие единого обозначим через Ω. Соотношение между двумя этими понятиями легко видно из формулы $On = \{a\colon a < \Omega\}$, т.е. множество всех ординальных чисел есть множество таких множеств a, каждое из которых меньше Ω.

Мы апеллируем здесь к интуиции, потому что Ω представляется понятием полностью метафизическим. Это абсолютная бесконечность, не поддающаяся рационализации, непостижимая сущность. Эта сущность подобна Богу (так полагал сам Кантор), она не подлежит никаким математическим манипуляциям. Отсюда следует, что разговор о «всех множествах» является лишь приближением к описанию универсума множеств. Но множество как таковое представляется вещью объективной и вполне постижимой. Третий принцип порождения множеств на самом деле есть другая ипостась Принципа Рефлексивности, поскольку утверждает, что никакое множество ординальных чисел A не достигает Ω. Точнее, третий принцип порождения говорит, что для любого данного множества всех ординальных чисел A всегда можно найти некоторое ординальное число большее, чем любой член A. Для любого множества A ординальных чисел существует ординальное число $\sup A$, которое лежит между A и непостижимым Ω.

Возвращаясь к идее очередного «скачка» в трансфинитное, рассмотрим те соображения, которые лежат в основе третьего принципа порождения. Мы имеем всеобщность ординальных чисел, порожденных первыми двумя принципами. Теперь нужно отделить или отграничить эту всеобщность ординальных чисел таким образом, чтобы второй принцип дал новое число, а именно ω_1. Это число больше, чем все числа, принадлежащие второму числовому классу. Сам принцип в формальном виде звучит так: все числа, следующие в процессе порождения за ω, должны быть таковы, что совокупность чисел, предшествующих им, должна иметь ту же самую мощность (или одно и то же кардинальное число), как и первый числовой класс. Эти числа составляют второй числовой класс. А далее в действие вновь вступают первый и второй принципы порождения, расширяя последовательность ординальных чисел. Кантор доказал, что второй числовой класс не может быть поставлен в одно-однозначное соответствие с первым классом и не существует множества с кардинальностью между этими двумя классами. Таким образом, кардинальное число второго числового класса есть следующее за $\aleph_0$, и именуется оно $\aleph_1$. Любое множество, чье ординальное число есть ω_1 или больше, имеет кардинальное число большее $\aleph_0$.

В обобщенном виде *третий принцип порождения трансфинитных чисел* формулируется так: все числа, образуемые вслед за ω_α, должны быть такими, что совокупность чисел, предшествующая каждому такому числу, должна иметь то же кардинальное число, что и $(\alpha + 1)$-й числовой класс. Эти числа будут тогда составлять $(\alpha + 2)$-й числовой класс.

6. Континуум-гипотеза

Теория Кантора, решив огромную часть проблем, связанных с пониманием бесконечности, вместе с тем поставила проблемы, которые до сих пор находятся в центре внимания философов и математиков. Такая ситуация довольно типична для науки, поскольку каждая новая теория ставит новые нерешенные проблемы. Философская проблема состоит в том, что новые проблемы могут оказаться либо псевдопроблемами, либо неразрешимыми. Такая ситуация может возникнуть из-за того, что выразительные средства новой теории слишком богаты для постановки вопросов, но недостаточны для их разрешения. Относится ли все вышесказанное к континуум-гипотезе, трудно сказать, поскольку она имеет громкую историю и в определенном смысле взывает к параллели с неевклидовой геометрией.

Задача определения меры континуума, т.е. определения мощности множества точек на линии, может быть поставлена в терминах кардинальных и ординальных чисел. Как будет указано позднее, два вида чисел были введены Кантором независимым образом, и поэтому такая постановка вопроса вполне допустима с точки зрения логики. Имеется иерархия кардинальных чисел, $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$. Число точек на линии равно $2^{\aleph_0}$, т.е. это число больше множества с мощностью $\aleph_0$. Естественно было бы предположить, что раз вслед за $\aleph_0$ идет $\aleph_1$, тогда число точек на линии равно $\aleph_1$, т.е. $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Это утверждение, которое действительно сделал Кантор, называется континуум-гипотезой. Почему эта гипотеза была столь важной для теории Кантора?

Более общая постановка вопроса о соотношении шкалы алефов и мощности континуума состоит в обнаружении того, какой из алефов представляет число точек на прямой линии. Кантор посчитал, что это $\aleph_1$. Эквивалентное утверждение состоит в следующем: любое бесконечное подмножество континуума имеет мощность либо множества целых чисел, либо всего континуума[10]. Происхождение этого утверждения также понятно из предположения Кантора о том, что система алефов есть не что иное, как система всех трансфинитных кардинальных чисел. А это значит, что мощность континуума должна быть среди системы алефов[11].

Что собой представляет система алефов? Как уже было указано, множество всех трансфинитных чисел никогда не может быть полностью понято, будучи, по мнению Кантора, Абсолютом в религиозно-метафизическом смысле. Именно по этой причине уже известные ему парадоксы теории множеств не беспокоили Кантора, который полагал непротиворечивость своей теории установленным фактом. Полная последовательность трансфинитных чисел существует как абсолютная сущность в неизменном и непостижимом уме Бога. Но учитывая парадокс, который носит его имя, он был вынужден ограничиться только так называемыми непротиворечивыми множествами. При этом он надеялся, что континуум-гипотеза не будет пустой комбинацией бессмысленных символов. Континуум, будучи вполне-определенным и самозамкнутым множеством элементов, должен быть также непротиворечивым множеством, и таким образом, должен быть эквивалентным по мощности некоторому трансфинитному алефу. В системе этих предположений недоставало последнего шага, а именно, доказательства $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Именно поэтому некоторые математики называли утверждение Кантора о том, что континуум равен $\aleph_1$, основной догмой Кантора. Уже говорилось, что идеи Кантора встретили резкое сопротивление большинства современных ему математиков. Превосходной иллюстрацией этого является драматический эпизод, связанный с «основной догмой Кантора». «Основная догма» заслуживала самого тщательного внимания, свидетельством чего является то, что Д. Гильберт, выступая с докладом на Втором международном конгрессе по математике, который состоялся в Париже во время Всемирной выставки в 1900 г., дал перечень основных нерешенных проблем в ма-

[10] Godel K. *What is Cantor's Continuum Problem?* // Philosophy of Mathematics / Ed. H. Putnam, P. Benacerraf. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964.

[11] Dauben J. *George Cantor.* — Princeton: University Press, 1979. — P. 244.

тематике, которые предстоит решать в XX в. Список возглавляла континуум-гипотеза Кантора.

На Третьем международном конгрессе по математике, который состоялся в Гейдельберге в 1904 г., Г. Кантору бросил вызов Юлиус Кениг из Будапешта, в докладе которого было показано, что мощность континуума Кантора вообще не мощность алефов. Больше того, он показал, что континуум не может быть вполне упорядочен, что подрывало «вторую догму» Кантора, что любое множество может быть вполне упорядочено. Кантор был в шоке от того, что две главные фундаментальные доктрины трансфинитной теории множеств были почти подкошены. Даже местные газеты были полны сообщений о сенсационном открытии Кенига, а герцог Бадена попросил Ф. Клейна объяснить ему суть проблемы. Однако через 24 часа ситуация изменилась. В своем доказательстве Кениг использовал так называемую теорему Бернштейна, и хотя Кениг имел среди своих коллег репутацию чрезвычайно надежного в доказательствах человека, в использовании этой теоремы он допустил ошибку, которая была обнаружена Э. Цермело.

В течение ряда лет Кантор пытался доказать свою гипотезу, но не преуспел в этом. Однако исследования на этом пути привели к примечательным результатам, из которых наиболее интересно выделение аксиомы выбора, вокруг которой до сих пор бушуют споры математиков. Как отмечает К. Гедель, так и не установлена мощность континуума, в частности, не определена даже верхняя граница, какой бы большой она ни была, мощности континуума[12]. В то же время известны многие интересные следствия континуум-гипотезы, а также эквивалентные ей утверждения.

Как отмечает Гедель, трудности в доказательстве континуум-гипотезы с первого взгляда кажутся удивительными. Поскольку речь идет о «вычислении» $2^{\aleph_0}$, возникает предположение, что все упирается в «таблицу умножения» кардинальных чисел. Однако произведение трансфинитных чисел не может быть оценено с точки зрения нахождения верхней границы результата умножения. Заранее скажем, что континуум-гипотеза оказалась неразрешимым утверждением. Доказательство этого примечательного факта обязано К. Геделю и Дж. Коэну. Континуум-гипотеза неразрешима в том смысле, что при условии непротиворечивости аксиоматической теории множеств Цермело — Френкеля добавление к ней континуум-гипотезы не приводит к противоречию. Но и добавление к этой системе отри-

[12] Godel K. *What Is Cantor's Continuum Problem?*

цания континуум-гипотезы также не приводит к противоречию. В некотором смысле, в такой ситуации мы имеем две теории множеств, и последняя возможность называется неканторовской теорией множеств.

Поскольку континуум-гипотеза связана с многими интересными результатами, дискуссии в пользу ее принятия или отвержения ведутся с привлечением «правдоподобных» аргументов, а именно, как соотносится континуум-гипотеза с другими аксиомами теории множеств, а также с различными фактами в теоретико-множественных исследованиях. В настоящее время ситуация с континуум-гипотезой может быть охарактеризована рядом положений, среди которых интерес для философов представляют следующие. Во-первых, нынешние математики в целом не разделяют убеждение Кантора в правильности континуум-гипотезы. Во-вторых, континуум-гипотеза следует из аксиом Цермело — Френкеля и аксиомы конструируемости Геделя $(V = L)$. Но многие исследователи полагают последнюю аксиому слишком ограничительной, и поэтому сомнения в ее отношении бросают тень на континуум-гипотезу. В-третьих, те, кто не верит в правильность континуум-гипотезы, полагают, что континуум имеет очень большое кардинальное число, большее, чем $\aleph_2$. (Такая оценка предполагалась Геделем. В этой связи можно упомянуть апокрифический случай с Н. Лузиным, который на одном из семинаров, после долгих безуспешных попыток решить проблему континуума, заявил, что он, наконец, знает, какова мощность континуума — это $\aleph_7$! Этот анекдот говорит о том, какой шутливый произвол может быть в суждениях математиков при отсутствии более или менее четких очертаний в обретении понимания природы континуума.) Одна из работ Д. Мартина может быть интерпретирована так, что континуум имеет мощность $\aleph_3$.

Результат независимости континуум-гипотезы ставит вопрос о том, имеет ли это утверждение истинностное значение вообще. В пользу таких сомнений может быть приведено два соображения — одно философское, другое — математическое. Философское было высказано в начале этого раздела, когда говорилось, что слишком богатые выразительные средства, созданные для решения одной задачи, могут привести к формулировке вопросов, на которые нет ответа[13]. Такой подход к пониманию природы континуум-гипотезы во

[13] Такая точка зрения высказывается Ю.Л. Ершовым. См.: *Проблемно-ориентированный подход к науке* / Отв. ред. В.В. Целищев. — Новосибирск: Наука, 2001.

многом перекликается с мнением Геделя: «Однако эта негативная позиция... никоим образом не является результатом тщательного рассмотрения оснований математики, и является результатом лишь определенной философской позиции в отношении природы математики»[14].

Что касается математического соображения, то тут следует отметить, что неразрешимость континуум-гипотезы в системе Цермело — Френкеля еще не есть окончательное суждение о наличии у гипотезы истинностного значения. В конце концов, аксиоматическая система Цермело — Френкеля не является привилегированной, и впоследствии могут появиться и другие аксиомы. Так, Дж. Коэн указывал, что континуум как невероятно большое множество может быть задан четкой новой аксиомой, и такое множество не может быть получено поэтапным процессом конструирования (который гарантируется аксиомами Цермело — Френкеля).

В конечном счете, все упирается в то, какая философская позиция принимается математиком. С точки зрения платониста, который рассматривает математические объекты как существующие независимо от человеческих ментальных конструкций, континуум-гипотеза либо истинна, либо ложна. Формалист же ограничится результатом независимости континуум-гипотезы, хотя ему придется столкнуться с проблемой интерпретации этого странного результата. Сами математики, будучи по большей части формалистами, предпочитают в «официальных» разговорах не говорить об «истинности» или «ложности» континуум-гипотезы.

Подобная дискуссия поднимает более общие вопросы о том, имеют ли многие вопросы в математике определенное истинностное значение. Это касается «философской совести» математиков, и поскольку философские позиции могут варьироваться, ситуация может быть в высшей степени вариативной. Финитисты доверяют суждениям только в отношении целых чисел, в то время как платонист доверяет суждениям о трансфинитных числах. Между двумя этими крайностями есть множество позиций, которые хорошо видны из следующего опыта с исследователями в области теории множеств[15]. Им были предложены десять утверждений, и пять вариантов ответа на них. Утверждения были таковы: 1) $2 + 2 = 4$; 2) последняя теорема Ферма (тогда она еще не была доказана); 3) аксиомы Пеано непротиворечивы; 4) аксиомы Цермело — Френкеля непро-

[14] Godel K. *What Is Cantor's Continuum Problem?* — P. 262.

[15] Velleman Dan. *Letter of 28 March 1991.* Internet FOM.

тиворечивы; 5) основные теоремы анализа; 6) гипотеза Римана; 7) аксиома выбора; 8) континуум-гипотеза; 9) существуют несчетные предельные кардиналы; 10) существуют измеримые кардиналы.

Ответы были таковы: 1) истинно; 2) ложно; 3) либо истинно, либо ложно, но неизвестно, что именно; 4) ни истинно, ни ложно; 5) либо (ложно или истинно, но неизвестно, что именно), либо (ни истинно, ни ложно), но неизвестно, что именно. Только два человека из опрошенных были настоящими платонистами, ответы которых ограничивались первыми тремя вариантами. Это подрывает убеждение в том, что по большей части математики верят в объективность изучаемого ими мира. Автор книги *Основания конструктивного анализа* Э. Бишоп сделал в этой связи знаменитое замечание: «Математика принадлежит человеку, а не Богу. Нас не интересуют свойства целых положительных чисел, которые не имеют дескриптивного значения для человека как существа, ограниченного в своих возможностях. Когда человек доказывает существование целого положительного числа, он должен знать, как найти его. Если у Бога есть своя математика, которая требует разработки, оставьте эту задачу Ему»[16].

7. Вполне-упорядоченные множества

Концепция вполне-упорядоченного множества играет важную роль в теории Кантора. Когда считаются элементы множества, они считаются в определенном порядке. В случае конечных множеств его элементы ставятся в одно-однозначное соответствие с рядом натуральных чисел, и тогда число элементов определяется последним натуральным числом. Но в случае бесконечных множеств такого последнего числа нет. Таким образом, задача определения мощности континуума в терминах последовательности алефов становится затруднительной. Но у нас имеются ряды ординальных чисел, которые, будучи бесконечными, желательно было бы использовать для решения этой задачи.

Действительно, ординальная числовая последовательность для конечных совокупностей совпадает с рядом натуральных чисел. Затем она расширяется до бесконечной последовательности, имитируя обычную числовую. Тогда можно ожидать, что применение ординальных чисел позволит определить число точек на линии. Если

[16] Bishop E. *Foundations of Constructive Analysis.* — N.Y.: McGraw-Hill, 1967.

это можно было бы сделать, тогда легко ответить на вопрос о кардинальности континуума, потому что нам достаточно знать, в какой числовой класс попадают эти ординальные числа. Таким образом, требуется лишь приписать множеству ординальное число.

Но для того, чтобы сделать это, требуется упорядочить элементы множества точно таким же образом, как это имеет место в ординальной последовательности. Что такое ординальная последовательность? Она начинается с некоторого элемента, продолжается бесконечно, вплоть до следующего ординального числа, с которого начинается новая последовательность, хотя в ординальной последовательности нет последнего (наибольшего) элемента, всегда есть первый (наименьший) элемент. Это значит, что множество, элементы которого «считаются», должно быть вполне-упорядоченным. Это понятие означает, что элементы множества можно построить в линейном порядке, при котором каждое непустое подмножество имеет наименьший элемент.

Концепция вполне-упорядоченных множеств была неявной частью теории Кантора, поскольку натуральные числа служили прототипом вполне-упорядоченных чисел. Порождение чисел первого класса, а также чисел второго и последующих классов было сделано так, чтобы вся последовательность трансфинитных чисел была автоматически вполне-упорядоченной. Вполне-упорядоченные множества были весьма полезны в проведении различий между конечным и бесконечным. Сам Кантор полагал, что главным преимуществом введения трансфинитных чисел было создание концепции перечисления элементов вполне-упорядоченного бесконечного множества. Объективная реальность трансфинитных чисел проистекала из факта существования вполне-упорядоченных множеств, чей порядок выражался различными трансфинитными числовыми классами.

Но проблема состоит в том, что точки на линии, или действительные числа в интервале (0, 1), не являются вполне-упорядоченными. Доказательство этого важного факта легко получить с помощью диагонального аргумента. А это значит, что точкам на линии нельзя приписать ординальные числа. Однако есть еще одна возможность обойти это затруднение и попытаться получить оценку мощности континуума через ординальные последовательности. Числа последовательности числовых классов представляют собой последовательность бесконечных кардинальных чисел. Поэтому последовательность ординальных чисел дает шкалу и кардинальных чисел. Мощность континуума равна $2^{\aleph_0}$, и есть надежда, что где-то

на этой шкале можно будет обнаружить и это множество. Но здесь следует отметить факт чрезвычайной важности, который позволяет по-новому взглянуть на пути создания математических теорий. Кантор прибыл к концепции кардинального числа двумя различными способами, которые в значительной степени независимы друг от друга![17] Поэтому нет никакой гарантии, что каждое кардинальное число как мера мощности множества будет иметь представителей среди кардинальных чисел числовых классов, т.е. классов ординальных чисел, которые порождаются тремя принципами порождения Кантора.

Кантор предполагал, что каждое множество может быть вполне-упорядочено, и поэтому каждое множество имеет по крайней мере одно ординальное число. Без этой предпосылки нет корреляции между двумя видами кардинальных чисел. Точнее, есть существенная асимметрия между кардинальными и ординальными числами. Дело в том, что при введении трансфинитных чисел Кантор, как уже говорилось, верил в объективную реальность, которая описывается его теорией. Так что кардинальные числа как мера мощности множеств «объективны», и можно считать, вместе с Кантором, что «на небесах» существует последовательность алефов. Однако построение с помощью трех порождающих принципов ординальных последовательностей является «произвольным» актом. Кантор вводит определения, которые представляются чисто ментальной конструкцией.

Если переходить на более философский язык, то можно сказать, что кардинальные числа «открываются», в то время как ординальные числа «конструируются». Если это действительно так, тогда континуум-гипотеза принадлежит к такому кругу вопросов, ответ на которые попросту невозможен. Действительно, с одной стороны, есть «объективно» существующая шкала алефов, а с другой — «искусственно сконструированная» концепция ординальных чисел. Континуум-гипотеза предлагает доказать в качестве математической теоремы некоторый факт, который увязывает «объективные» факты с ментальными конструкциями.

Ясно, что подобное описание ситуации вряд ли можно признать удовлетворительным. Прежде всего, такой вопрос, который поставлен в континуум-гипотезе, не родился в результате чистого вымысла, ограниченного самодостаточной областью бесконечных мно-

[17] Этот важный факт особенно подчеркнут в работе: Tiles M. *The Philosophy of Set Theory: An Historical Introduction to Cantor's Paradise.* — Basil: Blackwell, 1989.

жеств. Сама постановка вопроса родилась в ходе очередной попытки математиков ответить на вопросы о точках на прямой. Теория Кантора явилась попыткой разрешить проблемы, связанные с характеристикой непрерывных пространств и функций, определенных на них. Сами эти проблемы возникли в ходе попыток дать основание для теории бесконечно малых, и поэтому теорию множеств можно охарактеризовать как изобретение, помогающее разрешить реально существующую задачу. В этом смысле континуум-гипотеза может рассматриваться в чисто прагматическом плане. Если ее утверждение полезно при разрешении ряда задач математики, тогда следует признать гипотезу истинной. Если более полезно ее отрицание, тогда континуум-гипотеза просто ложна. Теория множеств предстает тогда в виде инструмента.

Безусловно, такой подход к теории множеств не совпадает с тем, что думал сам Кантор. Для него теория представляла описание реальности, универсума множеств, столь же объективных, как и физические предметы. И поэтому любое ее утверждение должно быть либо истинным, либо ложным. Континуум-гипотеза, которую пытался доказать Кантор, может не иметь истинностного значения только в силу того, что мы не имеем достаточного знания о множествах, и как только необходимое знание будет у нас в распоряжении, мы сможем установить истинность или ложность гипотезы.

Как видно, чисто математический вопрос об истинности или ложности континуум-гипотезы становится философским вопросом о том, в каком смысле математическая теория является описанием реальности. Тогда встает вопрос о том, следует ли принять математическую практику как она есть, и не пытаться ревизировать математику, исходя из философских соображений о природе бесконечного, или же принять во внимание те философские посылки, которые беспокоили Кантора и до сих пор беспокоят его последователей.

8. Великий вопрос: философия или математика

В связи с результатом о независимости континуум-гипотезы от системы аксиом Цермело — Френкеля с аксиомой выбора возникает ряд вопросов о ее статусе в современной математике. Если исходить из позиции платонизма, существует вполне определенная математическая реальность, обитателями которой являются множества, и тогда континуум-гипотеза либо истинна, либо ложна. Платонист-

ская трактовка может быть отвергнута на пути формализма, согласно которому неразрешимость континуум-гипотезы ставит точку в этом вопросе. На это платонист мог бы ответить, что неразрешимость показана относительно определенной системы аксиом, которая сама по себе не является священной, и в будущем могут быть открыты аксиомы, которые прольют свет на истинность континуум-гипотезы. Подобного рода спор, с привлечением аргументов других школ в философии математики можно продолжать долго, и поскольку посылки философских направлений «несоизмеримы», вряд ли можно ожидать какого-то разрешения спора — разве что действительно с открытием новых аксиом. Но в последнем предложении употреблено слово «открытие», что является результатом опять-таки платонистской посылки о существовании внечувственной реальности, факты о которой открывают математики. Философские предпочтения столь глубоко укоренены в нас, что избежать их попросту невозможно.

Но следует ли философии играть столь существенную роль в математических вопросах? Быть может, более радикальным разрешением вопроса о континуум-гипотезе является натурализм в математике, который отводит философии гораздо более скромное место в такого рода вопросах, чем она традиционно занимала. Вот как примерно выглядит сводка результатов по поводу континуум-гипотезы у М. Балагера[18] в рецензии на книгу П. Мэдди, философа математики, которая совсем недавно исповедовала реализм, а сейчас усиленно «продвигает» натурализм в философию математики[19].

Во-первых, несмотря на имеющийся как у некоторых математиков, так и у некоторых философов скепсис, вопрос о том, следует ли искать подтверждения (или опровержения) континуум-гипотезы, следует указать, что такие усилия вполне значимы и достойны математического исследования. Во-вторых, философские рассмотрения относительно реальности математических объектов являются полностью несущественными и нерелевантными как к спорам относительно значимости континуум-гипотезы, так и к вопросу о допустимости в математическом дискурсе. Вообще, математический натурализм исключает точку зрения так называемой первой философии, что в истории философии означает первичность философских рассмотрений в любой науке. На этом вопросе мы остановимся ниже. Что касается следствий натурализма для континуум-гипотезы, то следует подчеркнуть, что в вопросе о допустимости ее никакие спо-

---

[18] Philosophical Review. — 2001. — Vol. 110. — P. 502—504.

[19] Maddy P. *Naturalism in Mathematics*. — Oxford: University Press, 1997.

ры о реализме и антиреализме в математике не играют роли. Важны математические аргументы. Натуралистический аргумент о допустимости континуум-гипотезы должен включать следующие ингредиенты: а) объяснение природы целей математики, ее методологии и практики; б) объяснение того, как методология, практика и цели математики могут быть рационально обоснованы согласно внутренним критериям математики, а не исходя из философских представлений; в) объяснение того, как при принятии методологии, целей и практики математики становится ясно, что континуум-гипотеза вполне допустимый и достойный исследования вопрос.

Одним из способов решения этой проблемы является поиск новых теоретико-множественных аксиом. Но в качестве аргументов в пользу кандидатов на новые аксиомы должны выступать только математические аргументы, и никак не философские. Такого рода аргументы следует искать в истории и практике математики. Среди критериев для принятия новых аксиом мы должны учитывать: а) интуитивную правдоподобность аксиомы; б) прагматические рассмотрения относительно привлекательности в целом получающейся теории; в) рассмотрения по поводу того, в какой степени новая аксиома совместима с математическими максимами или установками в исследовании.

В том случае, если все приведенные выше математические рассмотрения не разрешат вопроса о континуум-гипотезе, следует принять две теории — так называемые канторовскую и неканторовскую теории множеств, с утверждением и отрицанием соответственно континуум-гипотезы. Но рассмотрения подобного рода не должны быть философскими, и должны основываться на привлекательности обеих теорий. Конечной целью исследования должна быть унификация этих теорий в одно видение.

При рассмотрении этих рекомендаций натуралиста закрадывается масса сомнений относительно того, достаточно ли будет истории и практики математики, чтобы осуществить все указанные маневры. Многие из них, например, рекомендации по использованию методологии, выглядят как использование философии с черного хода. Все подобные рассмотрения поднимают более общий вопрос о роли философии в математическом исследовании.

В истории взаимоотношений математики и философии четко обозначен этап, когда многие философы и некоторые математики полагали, что онтология и другие философские вопросы определяют практику математики. Так, Платон выражает негодование по поводу «ограниченности» геометров: «они [геометры] выражаются как-

то очень забавно и принужденно. Словно они заняты практическим делом и имеют в виду интересы этого дела, они употребляют выражения “построим” четырехугольник, “проведем” линию, “произведем наложение” и так далее: все это так и сыплется из их уст. А между тем это все наука, которой занимаются ради познания... ради познания вечного бытия, а не того, что возникает и гибнет... Значит, она влечет душу к истине и воздействует на философскую мысль, стремя ее ввысь, между тем как теперь она у нас низменна вопреки должному»[20].

Не менее впечатляющей с точки зрения примата философии в математических исследованиях была философская мотивация Брауэра при обосновании им интуиционизма. В этом отношении интересна судьба обеих атак на математическую практику. Геометры не послушались Платона, а философские воззрения Брауэра вскоре растворились в аксиоматике А. Гейтинга. В ранний период дискуссий по основаниям математики в начале XX в. одним из способов борьбы с парадоксами считался запрет на непредикативные определения. Рассел и Пуанкаре выдвинули «принцип порочного круга», согласно которому нельзя определять сущность с помощью ссылки на совокупность, содержащую определяемую сущность. Здесь вопрос соотносился с допустимостью актуальной бесконечности, согласно которой множества существовали реально, вне и независимо от человеческого сознания. Другими словами, в центр внимания попали типично онтологические вопросы, относящиеся к метафизике. Показательно, что Гедель, исходя из того, что непредикативные определения являются непременной частью классической математики, апеллировал для оправдания этой практики к онтологическим соображениям: «...представляется, что принцип порочного круга... приложим только при принятии конструктивистской (или номиналистической) точки зрения по отношению к объектам математики и логики, в частности, по отношению к суждениям, классам или понятиям... Классы и концепции могут, однако, рассматриваться так же как и реальные объекты, а именно, классы — “как множественности вещей”, или как структуры, состоящие из множественности вещей, а концепции — как свойства и отношения вещей, существующих независимо от наших определений и конструкций. Мне кажется, что предположения о таких объектах столь же допустимы, как и предположения о физических объектах, и имеется столь же

---

[20] Платон. *Государство*: Соч.: В 3 т. — М.: Мысль, 1971. — Т. 3. — С. 337.

много причин верить в их существование. Они в том же самом смысле необходимы для получения удовлетворительной системы математики, как физические тела необходимы для получения удовлетворительной теории наших чувственных восприятий»[21].

Указанные примеры являются демонстрацией вполне определенной тенденции в понимании соотношения математики и философии. Она заключается в том, что сначала нужно определить (естественно, с помощью философии) природу математических сущностей, более точно открыть эту природу, поскольку сущности объективны, или описать ее, если сущности конструируются людьми, и только после этого допустима некоторая математическая практика. Это соображение выглядит несколько утрированно для нынешнего состояния математических исследований, поскольку вряд ли можно найти работающего математика, который согласится с этим соображением, но в неявном виде оно проходит красной нитью через все классические дискуссии логицизма, интуиционизма и формализма. Такой примат философских соображений называется *принципом первичности философии* (philosophy-first principle)[22]. Термин восходит к тем временам, когда философы свободно ставили философские соображения во главу всех научных дискурсов.

А вот противоположный принцип *философия есть последнее дело для математики* (philosophy-last-if-at-all principle), как его сформулировал Шапиро, состоит в том, что философия не имеет никакого отношения к математике, которая живет собственной жизнью. Все философские дискуссии не внесли вклада в собственно математику. С точки зрения сторонников этого принципа, видимые контрпримеры ему, например математическая логика, не являются на самом деле контрпримерами. Та же математическая логика давно перестала иметь какие-то связи с философией, и превратилась в одну из чисто математических дисциплин. Правда, не все в такой аргументации «чисто», поскольку многие математики полагают, что исследования в области «оснований математики» не находятся в русле основных тенденций развития математики (или как сейчас говорят, эти исследования находятся вне «мейнстрима»). Да и сама логика находит мало применения в математике. В качестве представителя такой скептической точки зрения можно привести видного математика Дж. Крайзеля: «...большинство математиков весьма незначительно знакомы с логикой, разве что с символами для логических связок... Лишь немногие одаренные математики нашли превосходнейшие применения логики, используя существенным образом те концепции, которые были патентовано развиты в специфических логических исследованиях... (читателю, имеющему достаточную подготовку для серьезного понимания этой статьи, следует лишь напомнить о работах Матиясевича о диофантовых соотношениях, Акса, Ершова и Кочена о p-адических полях). Другие одаренные математики, подобно Н. Винеру или Дж. фон Нейману, которые исходно специализировались в логике, но не нашли достойного применения своих талантов, позднее использовали свое знакомство с "новой" логикой с выгодой для себя, в работах по кибернетике и программированию компьютеров»[23].

[21] Гедель К. *Расселовская математическая логика.* — С. 216—217.

[22] См.: Shapiro S. *Mathematics and Philosophy of Mathematics* // Philosophia Mathematica. — 1994. — Vol. 2, N 3. — P. 148—160.

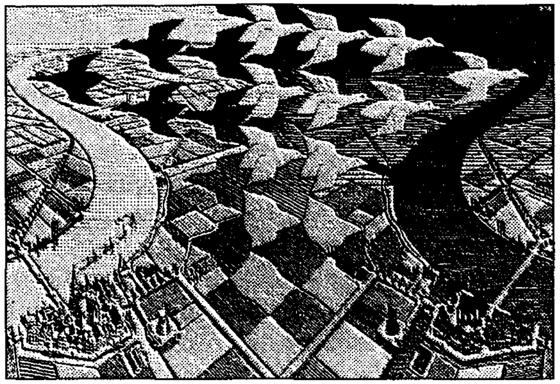
Фактически натурализация эпистемологии и философии в целом есть выражение той ее самой тенденции «философия есть последнее дело для математики». С социологической точки зрения все это представляет собой общую тенденцию низведения философов до уровня «подмастерьев». С. Фуллер многозначительно назвал один и параграфов своей книги по философии науки *Как глубоко мы пали: философы как подмастерья*. Суть процесса, который описывается Фуллером, состоит в том, что «философы науки постепенно принимают как должное ослабление своего нормативного статуса и окончательно смиряются с ролью подмастерьев»[24].

Если эта тенденция возобладает окончательно, то следует с сожалением вспомнить о тех временах, когда не было интеллектуальной стены между математиками и философами. Хрестоматийный пример великих математиков, которые были одновременно философами, — Декарт, Лейбниц, Паскаль, Больцано, Рассел, Гильберт, Фреге — может не очень убедить математиков, но вот утверждение Геделя о том, что принятая им позиция реализма в философии математики помогла ему существенно в доказательстве полноты логики первого порядка и неполноты арифметики, может быть более убедительным примером влияния философии на математику[25].

[23] Kreisel G. *Der unheivolle Einbruch der Logic in die Mathematik* // Acta Philosophica Fennica. — Vol. 28, N 1—3. — P. 167.

[24] Fuller S. *Thomas Kuhn: A Philosophical History for Our Times.* — Chicago: University Press, 2000. — P. 260.

[25] См.: Письмо Геделя. Приведено в работе: Wang Hao. *From Mathematics to Philosophy.* — L., 1974.



ПРЕЛЮДИЯ К ГЛАВЕ 3

В отличие от формалистов Гедель верил, что математическая истина есть объективная истина о чем-то таком, что реально существует, и не является одной из сторон творческой деятельности ума. Но такие идеи могли быть встречены в 1930 году с презрением, так что этот философский взгляд не был упомянут явно в его изложении теорем о неполноте. Здесь, как и во всех аспектах своей жизни, Гедель был параноидально осторожен. Бумаги, которые он оставил после своей смерти, раскрывают перед нами мир острых и глубоких мыслей о математике и философии (записанных в необычной форме немецкой скорописи), ни одну из которых Гедель не обнародовал прижизненно... Наиболее интригующим открытием в его неопубликованных бумагах было «онтологическое доказательство» существования Бога. Впервые попытка доказать существование Бога, исходя из чистого разума, а не из свидетельств внешнего мира, была предпринята архиепископом Ансельмом в XI веке. Геделевская версия доказательства основана на концепции Лейбница «позитивных» и «негативных» свойств. Доказательство Геделя таково:

Аксиома 1: Свойство позитивно, если и только если, его отрицание негативно.

Аксиома 2: Любое свойство, следующее из позитивного, само позитивно.

Теорема 1: Если свойство позитивно, оно непротиворечиво.

Определение 1: Нечто является Богоподобным, если и только если, оно обладает всеми положительными свойствами.

Аксиома 3: Богоподобность есть позитивное свойство.

Следствие 1 (из Аксиомы 3 и Теоремы 1): Свойство быть Богоподобным является самонепротиворечивым, то есть, возможно имеет пример.

Аксиома 4: Позитивное свойство является логически, и отсюда, необходимо.

Определение 2: Свойство Φ есть сущность вещи x, если и только если, x имеет Φ и Φ влечет любое свойство, которое имеет x.

Теорема 2: Если x Богоподобно, тогда Богоподобность есть сущность x.

Определение 3: x существует необходимо, если x имеет существенное свойство.

Аксиома 5: Свойство необходимого существования есть позитивное свойство.

Теорема 3: Необходимо существует некоторый x такой, что x Богоподобен[1].

Когда Геделя спросили по поводу таких логических фантазий, он сказал, улыбаясь, что «аксиоматический метод является очень мощным».

Дж. Бэрроу. *Пи на небесах*[2]

[1] Формулировка доказательства существенно уточнена в соответствии с представлением доказательства в ст.: Anderson F. *Some Correction to Godel's Ontological Proof* // Faith and Philosophy. — 1990. — Vol. 7, N 3.

[2] Barrow J. *Pi in the Sky*. — Oxford: Clarendon Press, 1992. — P. 123—124.

ГЛАВА 3

АКСИОМЫ

1. Мотивация и история вопроса

Рассмотрение аксиом теории множеств в данной книге имеет лишь одну цель — показать значимость эпистемологических рассмотрений в современной философии математики. Поскольку аксиоматический метод в современной математике имеет широчайшее хождение, вопрос об обосновании аксиом не представляется интересным, и введение новых аксиом делается из соображений математической практики. Однако в случае теории множеств ситуация с аксиомами другая; поскольку теория множеств предстает в виде оснований всей математики, аксиомы теории множеств имеют особый статус, не сводящийся к одним лишь соображениям математической практики. Во-первых, аксиомы теории множеств никоим образом не очевидны, и принятие той или иной аксиомы делается на основании многих рассмотрений как методологического (и даже философского), так и соображений, являющихся результатом проб и ошибок. Во-вторых, важнейшим обстоятельством при обосновании аксиом является то, что поиск новых аксиом в теории множеств служит решению проблемы определения размера континуума, одной из наиболее фундаментальных задач как математики, так и философии математики.

Теории о мире основываются на свидетельствах; физические теории — на эмпирических свидетельствах, а математические — на доказательствах. В истории философии значительные усилия были потрачены на споры по поводу того, какие из свидетельств более надежны. Доминировавшая почти во все времена философская традиция полагала математические свидетельства достоверными, а эмпирические — контингентными, и стало быть, по всем эпистемоло-

гическим критериям первые являются предпочтительными. Отсюда, вековое стремление философии быть похожей на математику, — тенденция, которая осуждалась и осуждается многими мыслителями[1]. Но как бы то ни было, само доказательство исходит из аксиом, и тогда достоверность математического знания основывается на аксиомах. Поэтому любой разговор о природе математических истин должен начинаться с обсуждения природы математических аксиом.

Реализм в философии математики, в самой простой формулировке, утверждает, что математика описывает математическую реальность, существующую вне и независимо от человеческого разума. Правильно описывающие эту реальность утверждения являются математическими истинами, которые доказуемы, исходя из аксиом. Если предположить, что вся математика в весьма определенном смысле сводима к теории множеств, тогда аксиомы этой теории должны иметь статус выделенных утверждений, обоснование истинности которых должно представлять собой специальную задачу.

Аксиоматизация как научный метод (если «дедуктивные науки» считать наукой) предполагает, прежде всего, содержательно сформулированные положения, полученные либо интуитивным образом, или же сложным процессом вывода из данных. В любом случае, имеется совокупность утверждений, которая выступает в качестве теории, описывающей некоторый фрагмент реальности. Взаимоотношения утверждений внутри теории обычно в высшей степени запутаны и сложны. Задача аксиоматизации (точнее, одна из задач) состоит в систематизации этих взаимоотношений, т.е. в установлении некоторого порядка среди них, некоторой иерархии утверждений (одни являются более фундаментальными, другие — производными и т.д.). Естественно, что при этом к аксиомам — наиболее фундаментальным предположениям — предъявляются особые требования с точки зрения их ясности, базисного характера, истинности.

Разговор о самоочевидности аксиом в случае теории множеств теряет смысл почти на самых ранних этапах развития этой теории. Так, наиболее очевидное положение о том, что каждое свойство определяет множество, приводит к парадоксам. Больше того, практически все аксиомы не представляют собой ясных положений, и для каждой требуется значительное обоснование, или, по крайней мере, мотивация.

[1] Ярким представителем такой критики в последнее время выступал Жан-Карло Рота, известный математик.

Другая особенность теории аксиоматизации теории множеств заключается в следующем. Обычно сперва мы имеем истины, а затем пытаемся установить среди них порядок через формализацию, важнейшим элементом которой является аксиоматизация. Теория множеств в значительной степени отходит от этого сложившегося идеала аксиоматизации, и ее аксиомы имеют особый статус. С одной (можно сказать, наивной) точки зрения, аксиомы теории множеств могут рассматриваться как истины об универсуме объектов, существующих независимо от мыслей математика. Эта платонистская позиция, как известно, ведет к парадоксам. С другой точки зрения, аксиомы могут рассматриваться как базисные строительные блоки и принципы построения универсума определенного рода объектов. Это точка зрения концептуализма. Наконец, замыкает знаменитую традиционную триаду философии математики формализм, согласно которому аксиомы могут рассматриваться в качестве правил «игры» с заново введенными символами, игры в конструирование доказательств.

Любой разговор об аксиоматизации теории множеств начинается с первой точки зрения, так как это верно уже исторически. Кантор, Дедекинд и другие математики сделали более точными уже существовавшие понятия множества, класса, совокупности. Но новые определения этих понятий встретились со значительными трудностями, крайним выражением которых явились парадоксы.

Существуют две точки зрения на мотивы аксиоматизации наивной теории множеств Кантора. Одна из них, которую предпочитают философы математики, состоит в том, что аксиоматизация была призвана устранить парадоксы и гарантировать их недопущение в будущем. Эта точка зрения превалирует и в литературе по основаниям теории множеств. Другая точка зрения, которая завоевывает все больше сторонников среди тех, кто «учебному» преподнесению материала предпочитает открытие подлинно исторических обстоятельств, состоит в том, что аксиоматизация была предпринята, исходя из внутренних потребностей математики. На самом деле, наверное истина лежит посередине. Ведь можно считать, что аксиомы Э. Цермело и теория типов Б. Рассела, появившиеся в одном и том же 1908 году, представляли собой разные ответы на один и тот же вопрос. Предположение о том, что философски ориентированная теория Рассела и математически ориентированная теория Цермело отвечали на разные вопросы, было бы неестественным как исторически, так и концептуально. А раз эти две теории отвечают на один и тот же вопрос, вряд ли можно считать аксиоматизацию Цермело мотивированной только лишь математическими потребностями.

Однако мотивация аксиоматизации теории множеств внутриматематическими потребностями весьма правдоподобна, если принять во внимание особый статус аксиом теории множеств. Реальная ситуация тут заключается не столько в том, что мы имеем истины теории множеств, и затем организуем их в аксиоматическую систему, а скорее в том, что в теории есть такие вопросы, на которые нет ответов, и в поисках их постулируются новые аксиомы. В обычном случае аксиоматизация считается оправданной, если с ее помощью доказываются новые правильные теоремы. С теорией множеств нет уверенности в отношении многих утверждений, а именно, являются ли они правильными теоремами. Безусловно, существуют косвенные подтверждения правильности теорем, и их роль необычно велика, что и придает аксиомам теории множеств особый статус. П. Мэдди рассматривает в этой связи три разных свидетельства «правильности» математических утверждений — внутриматематические (внутренне присущие системе), внешние и «правило правой руки». В значительной степени, аксиомы теории множеств мотивированы двумя последними свидетельствами, что, с одной стороны, придает им особый статус среди математических аксиом, а с другой — сближает теорию множеств с эмпирическими дисциплинами, где подобного рода подтверждение является обычным делом. С эпистемологической точки зрения такое положение дел представляется чрезвычайно важным.

Различение внешних и внутренних аспектов мотивации аксиом отражает более общую эпистемологическую ситуацию в философии науки. Поиск оснований математики, который превалировал последнюю сотню лет, постепенно вытесняется апелляцией к математической практике. Именно она оказывается существенной при поиске ответов на такие вопросы, как адекватность аксиом. В настоящее время в литературе по философии математики сплошь и рядом разбросаны замечания о том, что считавшиеся ранее важными для математики исследовательские программы в философии математики на самом деле не имели такого уж большого значения. Скорее, все кардинальные вопросы оснований математики мотивировались не столько философскими затруднениями, сколько внутриматематическими потребностями. Дж. Мур[2] демонстрирует исторические свидетельства, согласно которым первые аксиомы теории множеств были мотивированы прагматическим желанием доказать некоторые теоремы, а не программой обезопасить основания мате-

[2] Moore G. *Zermelo's Axiom of Choice.* — Springer, 1982.

матики от парадоксов. Такое переписывание истории науки — типичное занятие победителей, которые представлены исследователями, апеллирующими к математической практике[3]. Хотя эта точка зрения и является господствующей в настоящее время, трудно отделаться от впечатления, что ее приверженцы не принимают во внимание историю создания Кантором теории множеств, где философские и теологические соображения занимают важнейшее место.

В литературе по теории множеств общепринято обсуждение одной аксиоматической системы, а именно системы Цермело — Френкеля. Она является «стандартной» системой, а все остальные в какой-то степени, если использовать сильные выражения, — «экзотическими» (например, таково мнение о системе «New Foundations» В. Куайна). Больше того, в силу этой стандартности многие стали считать, что именно эта аксиоматика отвечает внутренним свойствам множеств, и аксиомы естественно следуют из понятия множества. Как выразилась Мэдди, некоторые математики полагают Цермело — Френкеля буквальной истиной, а остальные дополнительные аксиомы или кандидаты на них полагают просто метафизикой. Между тем статус стандартных аксиомы Цермело — Френкеля приобрели в силу исторической случайности, и поэтому они не могут занимать какого-то привилегированного положения по сравнению с другими аксиоматическими системами. И уж тем более, аксиомы Цермело — Френкеля не имеют предпочтительного эпистемологического статуса по сравнению с другими аксиомами в двух смыслах. Во-первых, эпистемологически интерес могут представлять другие аксиоматические системы, и во-вторых, даже в рамках системы Цермело — Френкеля некоторые кандидаты на аксиомы могут эпистемологически выглядеть не менее респектабельными.

Исходная система Э. Цермело содержала семь аксиом и была замыслена и построена в духе *Оснований геометрии* Д. Гильберта. Аксиоматическая система, с точки зрения Цермело, должна была служить основанием для всей математики. Историки математики утверждают, что парадокс, открытый Расселом, был годом ранее известен уже Цермело[4]. Аксиоматика должна была в первую очередь обезопасить математику от парадоксов, и трудно сказать, является ли эта мотивация философской или математической. Как видно из предыдущего замечания о том, что Цермело знал парадокс, ставший известным под названием «парадокс Рассела», вопрос о приоритете является весьма сложным. И действительно, в 1888 г. Дедекинд установил факт тождества множеств с одними и теми же элементами, а Кантор (в письме Дедекинду в 1899 г.) установил два утверждения, напоминающие аксиому суммы и аксиому выделения. При трактовке пустого множества в качестве множества идеи Шредера могли сыграть свою роль. Но вряд ли можно упрекнуть Цермело в отсутствии оригинальности, поскольку этого всего он мог и не знать. Интересно, что сам Цермело отказывался комментировать историю происхождения своей аксиоматической системы.

[3] По этому поводу см.: Fuller S. *Thomas Kuhn: Philosophical History for Our Times.* — Chicago: University Press, 2001.

[4] См.: Moore G. *Beyond First-Order Logic: Historical Interplay between Mathematical Logic and Axiomatic Set Theory* // History and Philosophy of Logic. — 1980. — Vol. 1. — P. 95—137.

Более интересна история аксиомы бесконечности. Дедекинд полагал необходимой истиной (в 1888 г.), исходя из психологических соображений, что должна существовать бесконечная совокупность мыслей, поскольку мысль о мысли отлична от самой мысли. Это утверждение Дедекинд принял за доказательство существования бесконечного множества. Более четкие формы аналог этого утверждения обретает в Принципе Рефлексивности, который обсуждался выше. Позднее Бурали-Форти отверг необходимый характер утверждения Дедекинда, и придал ему статус гипотезы, используемой при необходимости. Б. Рассел полагал, что такое психологическое предположение является нелогическим по своему содержанию, и поскольку он следовал Фреге в логицистской программе, с его точки зрения в чистой математике не должно было быть нелогических элементов. Цермело сделал решающий шаг, признав за утверждением статус постулата.

Предметом споров между философами математики и работающими математиками является вопрос о мотивации создания аксиоматической теории множеств. Философы в целом говорят о попытках избежать парадоксы теории множеств, в то время как работающие математики склонны к тому, что система была рождена внутриматематическими потребностями. В пользу второго утверждения говорит происхождение важных аксиом Цермело — выделения, аксиомы выбора и множества-степени. Все они явились частью доказательства Э. Цермело теоремы о вполне-упорядоченности множеств, что было частью большой математической программы Кантора.

2. «Простые» аксиомы

Впоследствии аксиомы Цермело были дополнены и модифицированы А. Френкелем, и результирующая система аксиом, названная системой Цермело — Френкеля, стала стандартной. Она настолько стандартна, что у ряда исследователей вызывает протест, крайние формы которого можно видеть из заголовка главы *Чудовище Френкельштейна* (каламбур, основанный на игре слов — Fraenkel и Frankenstein) недавней книги Я. Хинтикки *Принципы математики ревизированные*. Против стандартной аксиоматической теории множеств Хинтикка выдвигает обвинение, что «она не позволяет существовать функциям (множествам), которым следовало существовать, и в этом отношении позволяет существовать лишь немногим множествам»[5]. Это отнюдь не единственное обвинение «стандартной» теории. С философской точки зрения представляют интерес многие системы, чьи онтологические допущения более точны и упорядочены. В этом отношении следует упомянуть две системы В. Куайна[6].

Но поскольку основное внимание в литературе уделяется системе Цермело — Френкеля, что оправдано как исторически, так и практически, далее мы рассмотрим аксиомы этой системы, по мере возможности дополняя их комментариями (хотя при обычном изложении стандартные аксиомы таких комментариев не требуют в силу пресловутой их ясности). Основное внимание при этом будет уделено соотношению «философских» мотивов введения аксиом и прагматических математических мотивов. Заранее следует упомянуть, что вряд ли можно присудить кому-то победу в этом традиционном споре математиков и философов.

Как обычно, предполагается, что аксиомы истинны в области математических сущностей определенного рода — универсуме множеств. Все индивидные переменные x, y, z принимают значения в универсуме множеств. Существует единственное неопределенное отношение «$\in$», которое интерпретируется как отношение членства, так что «$a \in b$» означает «a есть элемент b».

[5] Hintikka Ja. *The Principles of Mathematics Revisited.* — Cambridge: University Press, 1998. — P. 176—177.

[6] Во-первых, это его система «New Foundations» и система, изложенная в кн.: Quine W.V.O. *Set Theory and Its Logic.* — Harvard: University Press, 1963.

Аксиома экстенсиональности

Первой традиционно идет наиболее очевидная аксиома — аксиома экстенсиональности.

> Если два множества имеют одни и те же элементы, они тождественны.
>
> $$\forall x\ \forall y\ \forall z\ [(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y].$$

Эта аксиома как будто не требует комментариев в силу очевидности. Для начала заметим, что эта аксиома отделяет множества от других интенсиональных сущностей типа свойств; это означает, что способ компоновки элементов в совокупность, т.е. способ определения множества, несуществен для задания его тождественности. Одно и то же множество может иметь два определения и более. Другими словами, множество понимается как совокупность элементов, идентичность которой определяется ее членами.

Простота и ясность аксиомы экстенсиональности подводит к мысли, эта аксиома выражает столь фундаментальное свойство множества, что попросту является частью определения концепции множества. Это ощущение превосходно выразил Дж. Булос. Он полагает, что аксиома экстенсиональности имеет специальный эпистемологический статус, которого не имеют остальные аксиомы. Если кто-то скажет, что существуют различные множества с одними и теми же членами, он убедит нас в том, что использует понятия отличным от нашего образом. Это впечатление будет гораздо большим, чем при отрицании кем-либо другой аксиомы. Поэтому возникает искушение назвать эту аксиому «аналитической», поскольку ее значение определяется значением входящих в нее понятий[7]. С аналитическим понятием связано много дискуссий, и одно из утверждений, разделяемых многими исследователями, гласит, что аналитические утверждения пусты, т.е. не несут никакой информации. Это будет противоречить реалистическому пониманию математических истин как информативных утверждений о математической реальности.

Однако нет ничего противоречивого в интенсиональной концепции множества. Тогда аксиома экстенсиональности не будет ана-

[7] Boolos G. *Iterative Conception of Set* // J. Philosophy. — 1971. — Vol. 68. — P. 501.

литической. Действительно, в системе *Principia Mathematica* в качестве базисных сущностей выступают пропозициональные функции, являющиеся интенсиональными концепциями. Но дальнейший анализ этой системы показал, что гораздо проще работать с экстенсиональными сущностями. Дело в том, что одному экстенсиональному множеству соответствует много интенсиональных множеств, и если в основание математики кладутся интенсиональные множества, требуется, во избежание произвола, объяснение, почему выбрано то или иное интенсиональное множество. Ясно, что экстенсиональные множества в этом отношении проще. На такой трактовке настаивают Френкель, Бар-Хиллел и Леви[8]. Таким образом, можно считать, что основным соображением в пользу принятия аксиомы экстенсиональности являются соображения простоты теории. В терминологии П. Мэдди это обстоятельство является внешним по отношению к понятию множества, в то время как аналитичность рассматривалась бы как обстоятельство внутреннее.

Аксиома пустого множества

Эта аксиома представляет технический интерес, будучи отправной точкой конструирования всех остальных множеств. Однако с эпистемологической точки зрения она очень важна. Дело в том, что принято проводить разделительную линию между логикой и теорией множеств таким образом, чтобы все экзистенциальные утверждения принадлежали теории множеств, в то время как логика ничего не говорит о их существовании. Такая точка зрения признается отнюдь не всеми, и далее мы рассмотрим и другие точки зрения, но пока мы будем считать, что теория множеств основана на логике первого порядка, которая не содержит экзистенциальных утверждений.

Сама аксиома пустого множества формулируется так:

> Существует пустое множество $\varnothing$, которое не содержит элементов
>
> $(\exists x)\,(\forall y) \neg\,(y \in x)$.

[8] Fraenkel A., Bar-Hillel Y., Levi A. *Foundations of Set Theory.* — 2-nd ed. — Amsterdam, 1973. — P. 28.

Аксиома утверждает, что существует множество, не содержащее элементов. И эта аксиома утверждает существование множества, из которого конструируются все остальные множества. Таким образом, это практически единственное по-настоящему экзистенциальное утверждение среди аксиом. Если постулируется существование пустого множества, тогда получаются и все остальные множества, и, важно отметить, получаются только множества и никакие другие объекты. Принятие этой аксиомы означает, что весь универсум множеств творится из ничего. Это обстоятельство вызывает массу трудностей в восприятии природы математики, не в последнюю очередь и эпистемологические трудности.

Эта трудность превосходно ощущалась как Цермело, так и Расселом. Цермело называл пустое множество «фиктивным», поскольку под множеством все-таки должно подразумеваться нечто такое, что имеет члены (т.е. множество чего-то). Рассел в одной из своих работ сравнил конструирование множеств из пустого множества с действием фокусника, вытаскивающего кроликов из шляпы. Но он отдавал себе отчет о различии между философскими затруднениями и технической полезностью. «Для символического логика, который ощущает полезность пустого множества, [запрет на пустое множество] выглядит реакционным шагом. Но я в данном случае обсуждаю не то, что должно делаться в логических исчислениях, где практика использования пустого множества представляется мне наилучшей, а философскую истину относительно этого понятия»[9]. На это Расселу можно было бы возразить, что в математике есть много примеров подобного рода «фиктивных» объектов типа точек на бесконечности в геометрии и т.д. Именно такой точки зрения придерживался К. Гедель. Опять-таки, мы имеем дело с «внешним» критерием принятия математических объектов в качестве существующих. Отметим также, что с точки зрения математиков, по поводу пустого множества философы зачастую впадают в излишнюю метафизику, хотя при обсуждении этой концепции без философии не обойтись. Иллюстрацией этого затруднения служит следующий пассаж из книги Р. Рукера *Бесконечность и ум*:

«Универсум теории множеств графически представим в виде конуса, понимание которого связано с многими философскими концепциями. В вершине конуса точка, которая представляет пустое множество. Другими словами, вначале не существует вообще ничего. Затем появляется что-то, и эта мысль отвечает идее образования

[9] Russell B. *Principles of Mathematics.* — N.Y., 1903. — P. 74.

множества. Пустое множество есть нечто, но внутри него нет ничего. В определенном смысле такая мысленная конструкция напоминает фундаментальный философский вопрос о том, почему существует нечто, а не ничто. Утверждение о существовании, в любом случае, описывает бесспорный факт о мире... Но никто не знает, почему существует пустое множество. В пользу такого предположения можно привести лишь расплывчатую идею образования множества, которая отражает некоторый объективный аспект внешнего мира. Начиная с пустого множества, мы входим в мир все более расширяющегося множества V, содержащего множества все большей и большей сложности. Различные уровни этих множеств называются частичными универсумами V_α, где α является рангом множества. В общем, $V_{\alpha+1}$ состоит из всех возможных подмножеств V_α»[10].

Это несколько метафизическое объяснение может быть совмещено с более прозаическим математическим соображением. В целях получения удовлетворительной символической системы, описывающей множества, желательно принять (быть может, в виде конвенции), что пересечение двух множеств, которые не имеют общих элементов, должно быть определено. Таких конвенций в математике весьма много (например, результат возведения в степень 0 некоторого целого числа есть 1), и здесь важно, чтобы такого рода расширения по конвенции не противоречили остальной части символической системы. В данном случае пустое множество постулируется как результат такой операции, и после этого постулируется, что множества имеют элементы, которые кроме членов содержат и пустое множество.

Есть еще одно, возможно более фундаментальное обоснование концепции пустого множества. Как отмечает П. Мэдди[11], согласно итеративной концепции множеств, множества образуются серией шагов, начиная с вещей, которые не являются множествами, и на каждой стадии образуются все возможные множества вещей из предыдущей стадии. Таким образом, первая стадия требует пустого множества. Итеративная концепция множества влечет массу следствий более общего толка, чем вопрос о пустом множестве, но если она принимается, тогда понятие пустого множества является частью значения концепции множества вообще, и не требует специального обоснования.

[10] Rucker R. *Infinity and the Mind.* — Bantam Books, 1983. — P. 211.

[11] Maddy P. *Naturalism in Mathematics.* — Oxford: University Press, 1997. — P. 42—43.

Следует сказать несколько слов о фундаментальной концепции теории множеств, а именно, об итеративной концепции множества. Часто она называется математическим, или комбинаторным понятием совокупности. Объяснение последнего термина состоит в том, что на каждой стадии множество образуется путем комбинации вещей, которые доступны на этой стадии. Итеративная концепция множества противопоставляется логической концепции, по которой множество определяется свойством; эту концепцию использовали Фреге и Рассел (у которого множество определяется пропозициональной функцией).

Аксиома пары

Следующей аксиомой является аксиома пары.

> Если a и b множества, тогда существует множество $\{a\}$ с единственным элементом a, а также существует множество $\{a, b\}$, единственными элементами которого являются a и b
>
> $$(\forall x)\,(\forall y)\,(\exists z)\,(\forall w)\,(w \in z \Leftrightarrow w = x \vee w = y).$$

До сих пор мы имели в качестве существующего только одно множество, которое не имеет членов. Аксиома пары позволяет нам сконструировать другие множества. Во-первых, аксиомой утверждается существование множества, которое имеет член. Пустое множество является множеством, и таким образом, объектом, и по этой аксиоме мы можем образовать множество $\{\varnothing\}$, чьим единственным членом является пустое множество. Так что теперь имеется два множества, $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$. Аксиома пары утверждает существование множеств $\{\{\varnothing\}\}$ и $\{\{\varnothing\},\varnothing\}$; таким образом, у нас уже есть четыре объекта. Повторное применение аксиомы утверждает существование всех множеств пар из этих четырех объектов, и кроме того, множеств, содержащих эти четыре в качестве своего единственного члена. Повторение этого процесса дает какое угодно конечное число множеств, каждое из которых содержит одно или два члена.

Несмотря на ясность этой аксиомы, в ней прослеживается интуитивная идея ограничения размера, а также упомянутая выше идея итеративного множества. Идея ограничения размера множества обсуждается многими математиками и философами как одна из ведущих идей теории множеств. Действительно, Кантор говорит о двух видах трансфинитных сущностей, один из которых является предметом математической теории бесконечности, а второй — абсолютной бесконечностью, постижение которой просто невозможно. Между тем понятие абсолютной бесконечности формулируется довольно точно: это совокупность всех ординальных чисел, которая не может быть представлена в виде «одной вещи», поскольку это приводило бы к парадоксу. Таким образом, математическая теория бесконечности не должна иметь дело со слишком «большими» совокупностями типа совокупности всех ординальных чисел. Значит, задача аксиоматической теории множеств состоит в том, чтобы не позволить образования этих «слишком больших» совокупностей (которые не называются множествами, потому что этот термин зарезервирован как раз для не слишком больших совокупностей). Но как определить, насколько большой является совокупность вещей, определяемых некоторой концепцией?

Дело в том, что процесс порождения, скажем, ординальных чисел не может быть завершен, хотя такая завершенность была бы крайне желательна для того, чтобы совокупность порожденных множеств не была слишком большой. Любая совокупность, превосходящая некоторый такой предел, не будет собственно множеством. Поскольку множества определяются некоторым свойством, отказ от слишком больших множеств есть ограничение на применимость свойства к объектам. Так, можно предположить, что любое свойство имеет объем, если и только если, невозможно установить одно-однозначное соответствие между ординальными числами и вещами с этим свойством. Это будет эффективным ограничением размера множеств. Однако это ограничение имеет большой недостаток, поскольку предполагает существование ординальных чисел. Но откуда мы знаем, насколько далеко должны простираться ряды ординалов? Как заметил Рассел, вполне возможно, что уже множество натуральных чисел ω окажется на этом пути «недопустимым»[12]. Поэтому, говорит он, требуются дальнейшие аксиомы до того, как можно будет сказать, когда ряд становится недопустимо большим.

Если размер множества не может быть критерием того, является ли это множество слишком большим или достаточно малым, тогда существование некоторой совокупности объектов должно быть гарантировано независимо от соображений о размере множества.

[12] Russell B. *On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types* // Essays in Analysis / Ed. D. Lackey. — N.Y., 1974. — P. 153.

Коль скоро критериев размера нет, нужно проявлять осторожность, которая и выражена аксиомой пары. Действительно, множество $\{a, b\}$ имеет весьма скромный размер. Это фактически первый осторожный шаг на пути реализации программы ограничения размера множеств, каким бы тривиальным он ни казался.

Аксиома множества-суммы (аксиома объединения)

Если a есть множество, тогда существует множество $\cup a$, объединение всех элементов множества a; элементами нового множества являются все элементы элементов a

$$(\forall x)\,(\exists y)\,(\forall z)\,[z \in y \Leftrightarrow (\exists\, w)\,(w \in a \,\&\, w \in w)].$$

Аксиома утверждает существование множеств, содержащих любое число элементов. Например, объединение пар множеств, не имеющих общих элементов, — одно множество содержит два элемента, а второе — один элемент — дает множество из трех элементов

$$\cup\{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}.$$

Повторение операции объединения дает большие множества, но опять-таки конечное их число. Этим самым достигается все та же политика получения «небольших» множеств из «небольших» множеств, а именно, совокупность, представляющая объединение «небольших» множеств, сама должна быть «небольшой». Другими словами, объединение небольших совокупностей небольших совокупностей должно быть небольшим.

Но даже в такой «безобидной» аксиоме нас могут подстерегать опасности. Дело в том, что объединение множества a может иметь больше членов, чем само a, что может привести к созданию слишком больших множеств. Но большая часть математиков полагает, что эта аксиома не выведет множества за разумные пределы. Высказанные опасения не являются очень уж актуальными по той причине, что обе аксиомы — пары и объединения — выражают идеологию итеративной концепции множества, которая гарантирует разумные размеры множеств. Действительно, пусть имеются множества A и B, которые сформированы на некоторой стадии α. Тогда объединение A и B можно будет сделать на стадии $\alpha + 1$, что и гарантирует аксиома пары. Для множества A, которое формируется на стадии α, его члены формируются на более ранней стадии, так что объединение членов A — $\cup A$ — формируется на стадии α. Именно это устанавливает аксиома объединения.

Аксиома пары и аксиома множества-суммы, как видно, не дают достаточно больших множеств. Даже если допустить существование бесконечных счетных множеств, эти аксиомы не дадут нам континуума. Поэтому необходима более «сильная» аксиома, и уже Кантор использовал для получения достаточно больших множеств операцию возведения в степень. Полученные таким образом множества оправдываются аксиомой множества-степени. Но до того нам нужно рассмотреть аксиому бесконечности, которая гарантирует существование бесконечных множеств.

Аксиома бесконечности

Имеется множество, которое имеет $\varnothing$ в качестве своего элемента, и такое, что если a есть элемент этого множества, тогда $\cup \{a, \{a\}\}$ (или $a \cup \{a\}$) есть также элемент этого множества

$$(\exists x)\,[\Lambda\in x\ \&\ (\forall y)\,(y \in x \Rightarrow (\exists z)\,(z \in x\ \&\ (\forall w)\,(w \in z \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow w \in y) \vee w = y))].$$

Аксиома бесконечности утверждает существование по крайней мере одного бесконечного множества, из которого могут быть порождены остальные бесконечные множества. Она утверждает существование множества, которому принадлежит $\varnothing$, и такого, что если ему принадлежит $\varnothing$, ему принадлежит и $\varnothing \cup \{\varnothing\}$. Поскольку $\varnothing$ не имеет членов, $\varnothing \cup \{\varnothing\}$ имеет только один член, а именно $\varnothing$, и он, таким образом, тождествен $\{\varnothing\}$. Но тогда $\{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ также принадлежит множеству и т.д. Поэтому множество, о существовании которого говорится в аксиоме, содержит последовательность

$$\underset{0}{\{\varnothing},\ \underset{1}{\{\varnothing\}},\ \underset{2}{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}},\ \underset{3}{\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}},\ \underset{\dots}{\dots}\ .$$

Аксиома бесконечности не вызывает сейчас особых волнений среди математиков. Например, М. Тайлс говорит, что изложенные выше пять аксиом «не представляют особых проблем», а вот остальные аксиомы менее ясны[13]. Другая точка зрения высказана в классическом обзоре А. Френкеля и И. Бар-Хиллела «Основания теории множеств»[14]. Они говорят о той части теории множеств, которая выводится из аксиомы экстенсиональности, аксиомы пары, аксиомы множества-суммы, аксиомы множества-степени, аксиомы выделения, как об общей теории множеств. Аксиома бесконечности у них занимает особое место. При таком положении дел имеет смысл обратиться к философским соображениям Б. Рассела[15]. Как видно, из формулировки аксиомы, «аксиома бесконечности заверяет нас (истинным или ложным образом), что имеются классы, имеющие n членов, и, таким образом, позволяет нам утверждать, что n не равно $n + 1$. Без этой аксиомы мы остаемся с возможностью того, что оба числа n и $n + 1$ могут оказаться нуль-классом.

Давайте проиллюстрируем эту возможность на таком примере[16]: предположим, что в мире есть только 9 индивидов. Тогда индуктивные кардинальные числа от 0 до 9 будут такими, как мы и ожидаем, но 10 (определенное как 9 + 1) будет нуль-классом. Нужно вспомнить, что $n + 1$ есть совокупность всех тех классов, которые имеют термин x такой, что когда x отнят, остается класс n терминов. Применяя это определение, мы видим, что в предполагаемом нами случае 9 + 1 есть класс, не состоящий из классов, то есть нуль-класс. То же самое будет истинным о 9 + 2, и вообще о $9 + n$, если n не есть 0. Таким образом, 10 и все последующие индуктивные числа будут тождественны, так как все они будут нуль-классом. В таком случае индуктивные кардинальные числа не образуют прогрессии, и не будет истинным утверждение о том, что два класса не могут иметь один и тот же последующий элемент, потому что 9 и 10 в качестве последующего элемента будут иметь нуль-класс. И вот для предотвращения таких арифметических катастроф и требуется аксиома бесконечности»[17].

Как отмечает далее Рассел, для того чтобы достигнуть любого заданного индуктивного кардинального числа, нам не требуется ак-

[13] Tiles M. *The Philosophy of Set Theory*. — Basil: Blackwell, 1989.

[14] Френкель А., Бар-Хиллел И. *Основания теории множеств*. — М., 1966.

[15] Рассел Б. *Введение в математическую философию* / Пер. В.В. Целищева. — М.: Гнозис, 1996. — Гл. 13.

[16] Следует иметь в виду, что полное понимание этого примера возможно, если иметь в виду определение числа Фреге — Рассела, а также теорию классов Рассела. Однако эти технические детали не препятствие для понимания сути примера.

[17] Рассел Б. *Введение в математическую философию*. — Гл. 13. — С. 124.

сиомы бесконечности. Она требуется, когда мы имеем дело с целым рядом индуктивных кардинальных чисел, а класс всех индуктивных кардинальных чисел требуется для установления существования $\aleph_0$.

Аксиома бесконечности предоставляет нам прекрасный случай убедиться в том, что аксиомы действительно являются аксиомами, а не доказуемыми утверждениями, и вместе с тем показать, что приобретение аксиомами своего статуса упирается в весьма сложные материи философского толка. Опять прибегнем к обсуждению этого вопроса Расселом. Если образовать полное множество индивидов, классов, классов классов и т.д., тогда взятые все вместе они образуют множество

$n + 2^n + 2$ в степени 2^n ... до бесконечности,

которое есть $\aleph_0$. Таким образом, беря все виды объектов вместе и не ограничивая себя объектами какого-либо одного из типов, мы определенно получим бесконечный класс, и в этом случае аксиома бесконечности нам не нужна. Рассел замечает, что «есть тут ощущение какого-то фокуса: это напоминает фокусника, вытаскивающего из шляпы предметы. Человек, который носил шляпу, полностью уверен в том, что там не было кроликов, но он не в силах объяснить, откуда они там появились. Так и наш читатель, если у него есть здравое чувство реальности, будет убежден, что невозможно произвести бесконечную совокупность из конечной совокупности, хотя он, вполне возможно, не сможет найти изъянов в аргументации... И когда вышеприведенный аргумент подвергается проверке, он оказывается, с моей точки зрения, ошибочным»[18]. Рассел приписывает ошибку смешением типов, апеллируя при этом к своей теории типов. Нам нет нужды углубляться в саму теорию типов, которая в некотором смысле представляет собой конкурента аксиоматической теории множеств в разрешении теоретико-множественных парадоксов. Мы просто показали, что аксиома бесконечности является аксиомой уже потому, что попытки доказать ее приводят к фундаментальным трудностям. Причем трудности эти отнюдь не только математического или логического толка. Например, аксиома бесконечности говорит о множествах (классах в терминологии Рассела), множествах множеств и т.д. Но применима ли она к «подлинным индивидам» (природа которых нами здесь не уточняется, за исключением того, что они не представимы как множества)? Этот вопрос упирается в множество «метафизических» представлений о том, что такое «индивид» или «вещь». Рассел говорит, что «если она [аксиома] истинна о них [вещах или индивидах], то она истинна о классах, из них состоящих, о классах классов и т.д. Подобным же образом, если она ложна о них, она ложна о всей иерархии их. Поэтому вполне естественно провозгласить аксиому бесконечности о них, нежели о некоторой стадии в иерархии. Но что касается вопроса о том, является ли аксиома истинной или ложной, у нас до сих пор нет метода обнаружения этого»[19].

[18] Рассел Б. *Введение в математическую философию*. — С. 126.

Аксиома бесконечности мотивируется, конечно же, идеями Кантора, которые М. Халет назвал «канторовским финитизмом»: «Множества трактуются как простые объекты, независимо от того, являются ли они конечными или бесконечными. Определения Кантора и Дедекинда действительных чисел приводят к рассмотрению бесконечных совокупностей как единых объектов, то есть как индивидов. Несмотря на то, что действительные числа с точки зрения их определений являются чрезвычайно сложными конструкциями, после их введения в теорию мы можем рассматривать их как простые объекты — забудьте про сложность. Кантор распространил эту доктрину на все совокупности, которые являются предметом математического рассмотрения. Все эти совокупности считаются едиными объектами»[20].

Таким образом, аксиома бесконечности представляет собой выражение радикальной идеи Кантора о бесконечных совокупностях, идеи, которая была и остается столь же необычной, сколько и полезной. Прибегая к терминологии Мэдди, неясно, к каким соображениям отнести эту аксиому в нынешнее время — к внутренним или внешним. Ее очевидная полезность, продекламированная во всю мощь Гильбертом, относится к внешним соображениям. Однако коль скоро идеи Кантора стали непременной частью современной математики, это говорит скорее о внутреннем характере.

[19] Там же. — С. 133.

[20] Halett M. *Cantorain Set Theory and Limitation of Size*. — Oxford: University Press, 1984. — P. 32.

3. «Продвинутые» аксиомы

Несмотря на приведенные выше пространные комментарии к этим нескольким аксиомам, практически все согласны с тем, что аксиомы достаточно просты и не вызывают каких-либо возражений. Однако в ходе построения теории множеств потребовались и другие, «менее ясные» аксиомы. Первой из таких аксиом мы представляем аксиому фундирования (foundation — в английской терминологии), — в русской терминологии перевода классической книги Френкеля и Бар-Хиллела.

Аксиома фундирования

> Если a — непустое множество, тогда имеется элемент b множества a такой, что не имеется множеств, которые принадлежат обоим множествам a и b
>
> $$(\forall x)\,[\neg\,(x = \Lambda) \Rightarrow (\exists y)\,(y \in x\ \&\ (\forall z)\,(z \in x \Rightarrow \neg\ (z \in y))].$$

Основная идея этой аксиомы относится к ограничению способа образования множеств из других множеств. Число операций по образованию множеств не должно быть бесконечным, во избежание создания слишком больших множеств. Система Цермело — Френкеля использует только конечное число итераций при собирании вместе всех продуктов конечных итераций. При этом аксиома не позволяет образовать множество, принадлежащее самому себе. В техническом отношении содержание аксиомы таково: она утверждает, что в любом множестве имеются элементы, минимальные при отношении членства. То есть даже когда мы имеем бесконечное множество S, S не может содержать бесконечной последовательности $X = \{x_i : i \in N\ \&\ \neg\,(x_i = \Lambda)\}$ членов таких, что $\ldots \in x2 \in x1 \in x_0$. Потому что X было бы множеством, который имеет элемент, общий с каждым из его элементов, поскольку для каждого x_i, x_{i-1} принадлежит x_i и X. Даже множества типа ω, для которых $0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \ldots$, содержат в качестве членов множества, получающихся в результате конечного числа приложений операции $x \cup \{x\}$ к Λ.

Как видно, кроме ограничения размера множеств, есть более прямые пути избегания парадоксов, в частности парадокса Рассела. Приведенная аксиома исключает членство множества в самом себе,

а также петли типа $A \in B$ и $B \in A$. Однако такая прямота в значительной степени является иллюзией, потому что основные результаты теории множеств можно доказать и без этой аксиомы. Аксиомы представляют собой простой перечень теоретических утверждений, которые позволяют вывести все важнейшие результаты неформальной теории множеств, и при этом избежать парадоксов. Кроме блокировки парадокса Рассела эта аксиома интересна в другом отношении. Мир множеств может быть структурирован по стадиям конструирования множеств: V_0 — множество всех не-множеств, т.е. множество обычных объектов, V_1 — все объекты и множества всех объектов и т.д. Так вот, аксиома фундирования в присутствии других аксиом равносильна утверждению, что каждое множество есть член некоторого V_α, т.е. не выходит за рамки уже полученных конструкций. Эта идея Цермело увязывается им с понятием «базиса» — множеством индивидов области (аксиома фундирования также имеет английское название Grounding), и V_0 совпадает с базисом. Именно поэтому не существует нисходящей эпсилон-цепи. Это важная идея в понимании природы множества, и многие полагают, что эта идея встроена в концепцию стадийного построения множеств. Вполне возможно и другое понимание множеств, которое нарушает аксиому фундирования. Но это были бы, по терминологии Мириманова, «необычные множества», и во избежание парадоксов он рекомендует придерживаться только «обычных множеств». Дж. Булос выражается еще категоричнее, когда утверждает, что «никакая область математики или теории множеств в общем не нуждается в множествах, которые не вполне-обоснованы»[21], т.е. не упираются в базис.

Но именно последнее утверждение вызывает у многих исследователей сомнения в истинности аксиомы фундирования, поскольку остается открытым вопрос о том, являются ли все множества «вполне-обоснованными». Принимать или не принимать в качестве «законных» множеств не вполне-обоснованные множества, вопрос сложный. Если мы хотим получить максимальную общность в трактовке понятия множества, мы не должны исключать не вполне-обоснованные множества, но так как в математической практике такие множества не встречаются, их можно назвать «монстрами» или «патологиями».

---

[21] Цит. по: Maddy P. *Believing Axioms.* I // J. Symbolic Logic. — 1988. — Vol. 53. — P. 481—511.

В любом случае, недавно П. Эжель предложил такую теорию множеств, в которой аксиома фундирования не справедлива[22]. Утверждается, что в применении к некоторым проблемам такая теория (AFA — Anti-Foundation Axiom) работает гораздо лучше, чем система Цермело — Френкеля. Однако в рамках этой теории множеств не удается получить правдоподобные интуитивные модели. Так что аксиома фундирования, будучи менее ясной, чем предыдущие аксиомы, все-таки принадлежит к «классическому» набору аксиом.

Аксиома выделения

Следующей аксиомой является аксиома выделения (или аксиома подмножеств — английские термины Axiom of Subsets, Axiom of Separation, и немецкий термин Aussonderungsaxiom).

> Если a есть множество, и $F(x)$ есть некоторое правильно построенное выражение в языке Цермело — Френкеля с единственной свободной переменной, тогда существует множество b, чьи элементы являются элементами a, для которых $F(a)$ истинно
>
> $(\forall x)\,(\exists y)\,(\forall z)\,[z \in y \Leftrightarrow z \in x \,\&\, F(z)]$.

Согласно наивной точке зрения на процесс образования множеств, каждое из них определяется некоторым свойством, и само множество представляет объем этого свойства. Несмотря на «наивность», это действительно единственно возможное представление о понятии множеств, если бы не было парадоксов, да и понятие свойства было более четким. Согласно определению Кантора, «Множество есть Множественность, которая мыслится как Единое», и единство ему придает предполагаемое свойство. Аксиома стремится ограничить размер множества указанием на уже существующее множество.

Эта аксиома, по замечанию Френкеля и Бар-Хиллела, является наиболее характерной чертой системы Цермело. Именно эта аксиома делает радикальный отход от точки зрения, согласно которой каждому условию $F(x)$ соответствует некоторое множество s такое, что $(\forall x)\,(x \in s \equiv F(x))$. Известно, что эта точка зрения ведет к парадоксам, и Цермело предложил применять операцию образования множеств предметов, обладающих некоторым свойством, к уже имеющимся множествам. Аксиома выделения призвана ограничить предположение Кантора о том, что всегда можно собрать вместе в одну совокупность все вещи, удовлетворяющие данному осмысленному описанию (предположение, известное под именем неограниченной аксиомы свертывания). Аксиомой выделения создаются лишь такие подмножества множества, чье существование гарантировано другими аксиомами. Таким образом, избегаются парадоксы Кантора и Бурали-Форти, поскольку невозможно образовать множество, скажем, всех кардинальных чисел, исходя из определения свойства быть кардинальным числом, и возможно образование лишь тех множеств, которые уже содержатся в некотором множестве. Аксиома также блокирует создание таких больших совокупностей, которые могли бы быть образованы, исходя из свойства «быть множеством», например, такого множества как $\{x : x = x\}$. В этом смысле аксиома является важным фактором в отказе статуса множества таким большим совокупностям.

Хотя аксиома выделения играет важную роль в ограничении размера множеств и блокировании ряда парадоксов, она не дает того, что требуется математике. Если функция рассматривается как операция порождения множеств (отображение одного множества в другое), тогда аксиома требует, чтобы область значений функции была подмножеством области определения функции. Но во многих случаях это просто неверно. Это обстоятельство позволяет оценить роль аксиомы более точно. П. Мэдди полагает, что Цермело, в стремлении сохранить все, что можно, от наивной (неограниченной) аксиомы свертывания (определения множества через свойство), применил «правило правой руки»: один шаг до несчастья. Для того чтобы избежать противоречия в некотором принципе, нужно ослабить принцип так, чтобы блокировать противоречие[23]. Цермело делает два ослабления неограниченной аксиомы свертывания: множество не может задаваться независимо, а всегда должно быть выделено как подмножество уже заданного множества. Кроме того, свойство, по которому множество выделяется, должно быть определенным. Понятие определенности является одним из наиболее дискуссионных понятий в философии математики и ее основаниях. В данном случае можно, следуя Сколему, полагать, что определенность означает

[22] Aczel P. *Non-Well-Founded Sets.* — Stanford, 1988.

[23] Maddy P. *Believing Axioms. I.* — P. 481—511.

формулу первого порядка, единственным нелогическим символом которой является «$\in$».

Следует отметить, что на самом деле мы имеем здесь дело не с аксиомой, а с аксиомной схемой, поскольку она не может быть выражена на языке первого порядка.

Аксиома замещения

> Если a есть множество и $F(x, y)$ есть вполне определенное множество в языке Цермело — Френкеля, которое ассоциирует с каждым элементом x множества a единственный элемент x^*, тогда имеется множество a^*, чьи элементы есть как раз те множества x^*, которые ассоциируются формулой $F(x, y)$ с элементами a:
>
> $$\forall x\,[\forall y\,[y \in x \Rightarrow \exists z\,(F(y, z)\ \&\ \forall w(F(y, w) \Rightarrow w = z))] \Rightarrow$$
> $$\Rightarrow \forall v\ \forall u\,[u \in v \Leftrightarrow \exists t\,(t \in x\ \&\ F(t, u))]].$$

Всякая новая аксиома предназначена для того, чтобы позволить существование тех чисел, которые появляются в неформальной теории множеств. До сих пор приведенные аксиомы (кроме обсуждаемой нами сейчас аксиомы замещения) гарантируют существование таких ординальных чисел, как $\omega + 1$, $\omega + 2$ и т.д., но не любого множества, к которому они принадлежат. Другими словами, нет гарантии существования ординальных чисел за пределами $\omega + n$ для конечного n. Аксиома замещения позволяет определить функцию $f(n) = \omega + n$ над ω, так что гарантируется существование множества значений функции. Объединение этого множества с ω тогда дает представление $\omega + \omega$, и всех ординальных чисел второго числового класса. Аксиома замещения является более сильной аксиомой, чем аксиома выделения, поскольку с ее помощью можно развить общую теорию ординальных чисел. Вместе с тем в этой аксиоме присутствует ограничение, имеющее место в аксиоме выделения, а именно, множество образуется из области значений функции, определенной над уже заданным множеством.

Как и в случае остальных «непростых» аксиом, аксиома замещения принимается не только ради построения более мощных множеств. Дж. фон Нейман показал, что эта аксиома нужна для установления фундаментальных результатов теории множеств, например, для доказательства утверждения Кантора, что «каждое множество может быть поставлено в одно-однозначное соответствие с некоторым ординалом». Кроме того, с помощью этой аксиомы Нейман доказал фундаментальный принцип Трансфинитной Рекурсии. Относительно недавно Мартин доказал теорему, которая демонстрирует центральную роль аксиомы замещения в теории множеств действительных чисел (а именно, свойство регулярности некоторых определимых множеств действительных чисел). Эта ситуация демонстрирует общую тенденцию в принятии аксиом теории множеств; по выражению Булоса, «причины для принятия аксиомы замещения весьма просты: она имеет желаемые следствия, и не имеет нежелательных». Это типично внешнее оправдание введения аксиомы, поскольку ее полезность не мотивируется исключительно соображениями собственно теории множеств.

Гораздо большие множества могут быть образованы с помощью аксиомы множества-степени. Действительно, как утверждает Коэн, одной из причин принятия аксиомы бесконечности является ощущение того, что процесс добавления одного множества за другим не исчерпывает весь универсум. Но аксиомы бесконечности есть наиболее простой, специальный, способ порождения больших кардинальных чисел. А вот с помощью аксиомы множества-степени, новым и более мощным принципом, получается континуум[24].

Аксиома множества-степени

> Если a есть множество, тогда имеется множество $P(a)$, множество-степень от a, чьи элементы — это все подмножества множества a
>
> $$\forall x\ \exists y\ \forall z\,[z \in y \Leftrightarrow \forall w\,(w \in z \Rightarrow w \in x)].$$

В некотором смысле эта аксиома «выбивается» из ряда предыдущих аксиом, которые предназначены ограничить размер получаемых множеств, дабы избежать парадоксов. Именно это соображение, с нашей точки зрения, было положено в основу классификации аксиом Френкелем и Бар-Хиллелом на «конструктивные аксиомы общей теории множеств», куда входит аксиома степени-множества, и «ограничения», куда входят аксиома бесконечности, аксиома за-

[24] Cohen P. *Set Theory and the Continuum Hypothesis.* — Benjamin; Massachusetts, 1966. — P. 65.

мещения, аксиома фундирования. Более поздние авторы предпочитают другой порядок аксиом (например, М. Тайлер), что более естественно, потому что аксиома множества-степени, утверждающая существование, для любого множества a, множества $P(a)$, которое есть множество всех подмножеств a, не налагает никаких ограничений в отношении того, что множества должны быть сконструированы или определены. Нет ничего такого, что говорило бы, что членами $P(a)$ были те, которые могут быть определены посредством выражений, выписанных в языке Цермело — Френкеля. Поэтому, хотя существование $P(a)$ утверждается аксиомой, его точное членство не определено этими аксиомами.

В некотором смысле возникновение теории множеств вообще обязано этой аксиоме, или точнее, идее, лежащей в основе этой аксиомы. Установление Кантором важного результата о том, что для любого множества (конечного или бесконечного) кардинальное число $P(a)$ должно быть больше кардинального числа a, привело его к мысли, что возможно расширение понятия числа на бесконечные совокупности. Важность аксиомы видна уже из того, что без нее было бы невозможно доказать существование любого несчетного множества, и отсюда, ординальных чисел, которые не принадлежат второму числовому классу. С включением аксиомы множества степени становится возможным доказать существование класса чисел второго порядка как множества, в то время как без аксиомы возможно только доказать существование всех членов этого класса.

Аксиома выбора

Если a есть множество, все элементы которого не пустые множества, ни одно из которых не имеет общих элементов друг с другом, тогда имеется множество c, которое имеет точно один общий элемент с каждым элементом a

$$\forall x\,[\forall y\,(y\in x \Rightarrow \neg\,(y=\varnothing))\,\&\,\forall y\,\forall z\,(y\in x\,\&\, z\in x\,(y=z) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \neg\,(\exists w\,(w\in y\,\&\, w\in z))) \Rightarrow \exists u\,\forall y\,(y\in x \Rightarrow \exists z\,(z\in u\,\&$$
$$\&\, z\in y\,\&\,\forall w\,(w\in u\,\&\, w\in y \Rightarrow w=z)))].$$

Аксиома выбора имеет отличный от других аксиом статус. Она является наиболее спорной аксиомой теории множеств, и при доказательстве теорем теории множеств указывается, получен ли этот результат с помощью этой аксиомы или нет. Не очень ясен и статус

аксиомы; сам Цермело считал ее логическим принципом, и этой точки зрения придерживаются и многие современные исследователи (например Я. Хинтикка)[25]. Частичное оправдание этой точки зрения состоит в том, что многие находят аксиому выбора интуитивно правдоподобной. Проблема состоит в том, что эта невинная, с первого взгляда, аксиома имеет неожиданные и очень сильные следствия, и многие их этих следствий считаются противоречащими интуиции. По этой причине, многие математики полагают, что следует избегать, если это возможно, использования этой аксиомы. В связи с этим говорят об «ограниченной теории множеств» без аксиомы выбора, в противоположность «стандартной теории множеств», которая содержит эту аксиому. Правда, К. Гедель показал, что если ограниченная теория непротиворечива, тогда непротиворечива и стандартная теория. Таким образом, аксиома выбора становится не более опасной, чем другие аксиомы.

В контексте аксиоматической теории множеств Цермело — Френкеля аксиома оказывается эквивалентной утверждению, что для данного множества a имеется отношение R, которое является вполне-упорядочением для a. Это известный результат Э. Цермело, известный под названием теоремы о вполне-упорядочении. С помощью аксиомы выбора возможно доказать, что каждое множество может быть вполне-упорядочено, а также доказать, что любые два множества A и B можно сравнить в отношении их кардинального числа.

Генетически аксиома выбора в значительной степени «ответственна» за возникновение всей программы аксиоматизации теории множеств. Действительно, стремление к аксиоматизации было вызвано «законом мышления», как назвал Кантор следующее утверждение: «Всегда возможно любое вполне-определенное множество представить в форме вполне-упорядоченного множества... Этот (закон мысли) является фундаментальным, богатым по следствиям, и поразительным в своей значимости»[26].

Математики не согласились с этим утверждением Кантора, и сам он вынужден был позднее, в 1895 г., признать их правоту, согласившись с тем, что это утверждение должно быть теоремой. Именно при попытках доказать эту теорему возникла, уже усилиями Э. Цермело, аксиома выбора.

Чрезвычайно интересным разделом современной теории множеств является поиск новых аксиом, расширяющих универсум тео-

[25] Hintikka Ja. *The Principles of Mathematics Revisited.*
[26] Moore G. *Zermelo's Axiom of Choice.* — P. 42.

рии множеств. В частности, речь идет об аксиомах, утверждающих существование больших кардинальных чисел, которые все ближе и ближе к Абсолюту — Ω. Это так называемые недостижимые кардинальные числа, гипернедостижимые, гипергипернедостижимые, числа Мало и т.д. На природе этих аксиом мы останавливаться не можем, потому что их принятие связано с тонкими проблемами теории множеств[27].

4. Спорные аксиомы

Среди аксиом теории множеств классическим случаем «спорной» аксиомы является аксиома конструирования (axiom of constructability), обычно в литературе называемая аксиомой конструктивности. Сначала Гедель, введший в обиход эту аксиому, посчитал ее истинной, но затем изменил свою точку зрения. Прежде всего, нужно рассмотреть мотивы введения аксиомы. Одним из достижений Геделя было доказательство того, что утверждение континуум-гипотезы может быть присоединено к некоторой ограниченной версии теории множеств без появления противоречия в результирующей системе (1938 г.). Другими словами, если такое противоречие и существует, оно уже есть в ограниченной теории множеств. Под ограниченной теорией множеств можно понимать систему аксиом, приведенную в предыдущих двух разделах. В 1963 г. Дж. Коэн доказал, что присоединение отрицания континуум-гипотезы к ограниченной теории множеств не приводит к противоречию. Доказанная независимость континуум-гипотезы от стандартной теории множеств немедленно вызвала аналогию с евклидовой и неевклидовой геометриями. Известно, что непротиворечивость неевклидовой геометрии доказывается путем построения ее модели в евклидовой геометрии, которая предполагается непротиворечивой. Это так называемая относительная непротиворечивость. Евклидова сфера является моделью для неевклидовой плоскости. В этом случае одна теория обосновывается в терминах более элементарной теории. Таким образом, при исследовании статуса континуум-гипотезы требуется построение модели.

Идея Геделя состояла в том, чтобы построить модель для ограниченной теории множеств (стандартной теории без аксиомы выбора), и доказать, что в этой модели аксиома выбора и континуум-гипотеза являются теоремами. Использование аксиом ограниченной теории дает сначала существование по крайней мере одного множества, затем существование бесконечной последовательности конечных множеств, затем существование бесконечного множества, затем существование бесконечной последовательности еще больших бесконечных множеств и т.д. Такая процедура обеспечивает класс множеств, который конструируется последовательными шагами из более простых множеств. Таким образом полученные множества Гедель называет «конструируемыми» множествами, и их существование гарантируется аксиомами ограниченной теории множеств. После этого Гедель показывает, что в области конструируемых множеств могут быть доказаны аксиома выбора и континуум-гипотеза. Таким образом, континуум-гипотеза доказана, но при условии, что принимается аксиома о существовании только лишь конструируемых множеств. Вопрос состоит в том, оправдана ли эта аксиома.

Вопрос об интуитивной ясности таких аксиом теории множеств, как аксиома конструируемости, отпадает сразу. Например, сразу возникает подозрение, что для признания некоторой совокупности множеством вряд ли необходимо настаивать на том, что множество должно быть сконструируемо согласно некоторой формуле. Универсум множеств, который конструируется по подобного рода формуле, универсум, сотворенный по рецепту Геделя, обозначается через L. Универсум множеств, полученный применением принципа рефлексивности, обозначается через V. Доказательство Геделем континуум-гипотезы требует аксиомы конструируемости $V = L$. Сам Гедель определил ситуацию следующим образом: «Имеются два совершенно отличным образом определенные классы объектов, которые удовлетворяют всем аксиомам теории множеств. Один класс состоит из множеств, определенных в некоторой манере свойствами своих элементов (L), другой — из множеств в смысле произвольных совокупностей независимо от того, как они определены (V). А теперь, до того, как будет установлено, какие объекты подлежат счету, и на основании какого одно-однозначного соответствия, едва ли возможно определить их число»[28].

В более точном представлении результат Геделя выглядит так. Если ZFC (система Цермело — Френкеля с аксиомой выбора) непротиворечива, тогда непротиворечивой является система $ZFC + V = L$.

[27] См.: Maddy P. *Believing the Axioms.* II // J. Symbolic Logic. — 1988. — Vol. 53, N 3. — P. 736—764.

[28] Godel K. *What Is Cantor's Continuum Problem?* // Philosophy of Mathematics / Ed. P. Benacerraf, H. Putnam. — Cambridge: University Press, 1964. — P. 265—266.

Так как $V = L$ влечет континуум-гипотезу (CH), $ZFC + CH$ непротиворечива. Поэтому в системе ZFC нельзя доказать отрицание CH. Но все эти доказанные факты ничего не говорят нам об истинности $V = L$.

Так стоит или нет принимать эту аксиому? Среди ее несомненных преимуществ — доказательство континуум-гипотезы. Но может статься, что гипотеза несет в себе слишком много ограничений, а сама континуум-гипотеза будет доказана в другой системе аксиом. Действительно, «хотя аксиомы ZFC не могут доказать CH, нет ничего священного в этих аксиомах, и можно будет найти другие аксиомы, которые будут более ясными относительно нашего понятия множества и которые установят CH»[29].

Сомнения относительно пригодности принятой в качестве стандартной системы аксиом Гедель переносит и на саму континуум-гипотезу. Так, «некоторые факты [неизвестные во времена Кантора] указывают на то, что канторовская догадка может оказаться неверной...»[30] Правда, сомнения эти не вполне обоснованы, поскольку Гедель ссылается не столько на факты, сколько на интуицию. Эти интуитивные соображения не принимаются всеми за окончательный вердикт. Так, Д. Мартин замечает: «Гедель цитирует несколько фактов в качестве свидетельств против КГ. Он перечисляет некоторое число следствий континуум-гипотезы, которые полагает интуитивно неправдоподобными. Эти следствия утверждают, что существует каждое тонкое подмножество действительной прямой кардинальности континуума. Гедель говорит, что такие утверждения противоречат интуиции в другом смысле, нежели противоречие в интуиции относительно существования кривой Пеано. Хотя нельзя легкомысленно относится к интуиции Геделя, трудно понять, почему ситуация отлична от ситуации с кривой Пеано, и некоторым из нас трудно понять даже то, почему некоторые цитируемые Геделем примеры противоречат интуиции»[31].

Большая часть исследователей, вслед за Геделем, в настоящее время не верит в аксиому конструируемости. Самой весомой причиной такого неверия является то, что она слишком ограничительна. Так, Д. Скотт свидетельствует: «Как бы ни были прекрасны геделевы так называемые конструируемые множества, они являются специальными сущностями, почти минимальными в выполнении фор-

[29] Martin D. *Hilbert's First Problem: The Continuum Hypothesis* // Proceedings of Symposia in Pure mathematics. — 1976. — Vol. 28. — P. 84.
[30] Godel K. *What Is Cantor's Continuum Problem?* — P. 266—267.
[31] Martin D. *Hilbert's First Problem*... — P. 87.

мальных аксиом в языке первого порядка. Они просто не схватывают понятие множества в общем (и они не имеют этого и в виду)»[32]. Другое свидетельство: «Ключевой аргумент против принятия $V = L$ состоит в том, что аксиома конструируемости неправильно ограничивает понятие произвольного множества»[33].

Таким образом, основные затруднения с принятием аксиомы конструируемости состоят в том, что она требует, чтобы каждое множество было определимо совершенно однородным путем. Это противоречит интуиции понятия множества. Больше того, как и в случае с континуум-гипотезой, аксиома конструируемости подвергает реалистическое сознание математика новым испытаниям. Дело в том, что с точки зрения реализма эта аксиома либо истинна, либо ложна, и явно недостаточно простой фиксации факта, что $ZFC + V = L$ и $ZFC + V \neq L$ равно приемлемы, потому что оба они не противоречат ZFC.

Если внутриматематические критерии принятия аксиомы не позволяют прийти к определенному вердикту относительно ее истинности, следует прибегнуть к «внешним» критериям. П. Мэдди полагает, что таким внешним критерием могут явиться рассмотрения, связанные со сменой парадигм в математике. Правда, она при этом не прибегает к терминологии Т. Куна, и вместо термина «парадигма» употребляет термин «методологическая максима», а во всем остальном картина та же. Развитие науки отвечает следующей парадигме (максиме), а именно, 1) сильная и эффективная методологическая максима формулируется обобщением успешной научной практики; 2) постепенно накапливаются аномалии; 3) возникает новая альтернативная максима, которая вытесняет старую. Вся эта механика призвана объяснить ситуацию с $V = L$. Таким образом, альтернативой реализму является натурализм в математике, который весьма близок куновской философии науки.

Итак, математическая максима, о которой идет речь, это требование, чтобы все математические объекты были определимы строго однородным путем. Исторически дискуссии по поводу этой максимы, точнее, ее становления, связаны с понятием функции. Декарт различал «геометрические» кривые, которые определяются уравнениями, и «механические» кривые, для которых это невозможно. Рождение максимы связано с убеждением, что внимание математика

[32] Scott D. *Foreword to J. Bell, Bolean — Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.* — Oxford: University Press, 1977. — P. xii.
[33] Moschovakis Y. *Descriptive Set Theory.* — Amsterdam, 1980. — P. 610.

должно быть ограничено кривыми первого рода. Эйлер был более точен, и говорил о функциях, не имеющих аналитического представления. Фурье, показав, что любую функцию можно представить в виде бесконечного тригонометрического ряда, укрепил максиму. Одна из аномалий, связанная с этой максимой, в явном виде была выражена Риманом. Он дал огромное число необычных функций, которые не могут быть представлены рядами Фурье. И именно такие функции играют важную роль в обосновании анализа. Последующее развитие понятия функции как произвольного соответствия привело к другой аномалии, состоявшей в том, что имеются такие функции, которые невозможно определить. Как оказалось, в основе такого представления лежит аксиома выбора, которая утверждает существование неспецифицированного множества. Таким образом, максиме, согласно которой всякая функция определима, противостоит в результате накопления аномалий максима, согласно которой понятие функции связано с комбинаторными представлениями.

Несложно установить связь аксиомы конструируемости с двумя максимами. Аксиома устанавливает, что множества определимы в однородной, более точной, предикативной манере. Таким образом, $V = L$ связана со старой максимой определимости функции, в то время как отрицание аксиомы связано с новой комбинаторной максимой. Мэдди резюмирует, что «...глубокое и распространенное сопротивление добавлению $V = L$ в качестве новой аксиомы кажется рациональным»[34].

Однако споры вокруг аксиомы конструируемости вряд ли столь же тесно связаны со сменой одной методологической максимы другой максимой, как это имеет место в случае смены одной парадигмы другой парадигмой в эмпирических науках. Параллели в данном случае не отвечают видам связи, которые имеют с философией математика и, скажем, физика. Аномалии в физике, прежде всего, связаны с экспериментальными данными, чего не может быть в математике. Апелляция к более общему понятию практики, при котором мысленные эксперименты заменяют собой реальные эксперименты, вряд ли поможет прояснению ситуацию с такими вещами, как принятие или отвержение новой аксиомы. В конечном счете, в случае математики все ограничивается общими подозрениями. «Сторонники комбинаторной максимы допускают, что до 60-х годов $V = L$ была достаточно гибким инструментом для того, чтобы справиться со всеми аномалиями для предыдущей версии максимы определимости, и поэтому можно было непротиворечиво предполагать, что все комбинаторно определенные множества окажутся на некотором уровне конструкциями L, но дальнейшее развитие исследований приводит к подозрению, что возникнут новые аномалии и что принятие $V = L$ ограничит плодотворные исследования. Я предлагаю эту линию исследования как правдоподобную реконструкцию случая против $V = L$, которая лежит в основе общего возражения против "ограничительности" аксиомы»[35].

[34] Maddy P. *Naturalism in Mathematics.*

5. Теория множеств и реальность

Апелляция к параллелям между теорией множеств и неевклидовой геометрией для прояснения соотношения теории множеств и реальности вряд ли может быть оправданной. Дело в том, что неевлидовая геометрия имеет важные физические приложения, в то время как теория множеств может в одном случае рассматриваться как «идеальные элементы» в смысле Гильберта, и в другом случае, как теория о мире внечувственных объектов математики. Все зависит от философских установок. Для реалиста (или лучше сказать платониста) доказательство неразрешимости континуум-гипотезы не является поводом для глубоких философских спекуляций формалистского толка: «доказательство неразрешимости континуум-гипотезы Кантора из принятых аксиом теории множеств (в противоположность, например, доказательству трансцендентности числа пи) никоим образом не является решением проблемы. ...теоретико-множественные концепции и теоремы описывают вполне-определенную реальность, в которой догадка Кантора должна быть либо истинной, либо ложной. Отсюда следует, что неразрешимость континуум-гипотезы в рамках системы аксиом означает, что эти аксиомы не содержат полного описания этой реальности. Такая вера никоим образом не является химерической...»[36]

Кроме онтологической веры в существование реальности, описываемой теорией множеств, важны еще и эпистемологические соображения, которые не позволяют развить аналогию между неевклидовой геометрией и неканторовской теорией множеств до такой степени, при которой эта аналогия приобретает по-настоящему философский интерес. В этом смысле опять-таки чрезвычайно важно

[35] Ibid.
[36] Godel K. *What Is Cantor's Continuum Problem?* — P. 264.

мнение самого Геделя: «Высказывались мнения, что если континуум-гипотеза Кантора окажется неразрешимой в рамках принятых аксиом теории множеств, вопрос о ее истинности теряет смысл точно так же, как для математиков бессмыслен вопрос об истинности пятого постулата Евклида после доказательства непротиворечивости неевклидовой геометрии. Я хочу подчеркнуть, что ситуация в теории множеств весьма отлична от ситуации в геометрии, как с математической, так и эпистемологической точек зрения. ...существует поразительная асимметрия, с точки зрения математики, между системой, в которой утверждается (аксиома о существовании недостижимых чисел), и системой, в которой она отрицается (та же асимметрия также встречается в более низких уровнях теории множеств, где непротиворечивость соответствующих аксиом менее подвержена сомнениям скептиков...

Что касается эпистемологической ситуации, то тут следует сказать, что доказательство неразрешимости приводит к потере значимости вопроса об истинности аксиомы только в том случае, если система аксиом интерпретируется как гипотетико-дедуктивная система. Другими словами, если значения примитивных терминов остаются неопределенными. В геометрии, например, вопрос о том, является ли пятый постулат Евклида истинным, сохраняет свое значение только в том случае, если примитивные термины имеют определенный смысл, а именно, с указанием на поведение твердых тел, лучей света и т.д. Подобная ситуация имеет место и в теории множеств, и различие состоит лишь в том, что в геометрии значения берутся из физики, а не из математической интуиции, и поэтому вопрос выпадает за рамки математики. С другой стороны, объекты трансфинитной теории множеств... не принадлежат к физическому миру и даже их косвенная связь с физическим опытом весьма слаба (главным образом, благодаря тому факту, что теоретико-множественные концепции играют лишь малую роль в современной физике)»[37].

К формализму философов математики подталкивает сама природа аксиоматизации. Аксиоматика теории множеств позволяет «рассосать» фундаментальную философскую проблему относительно природы математики. В аксиоматической теории множеств противоположность платонистской и конструктивистской позиций практически невидима. Если математика, как полагает платонист, мыслится как открытие уже существующего универсума множеств, тогда аксиомы прямо утверждают существование множества, удовлет-

[37] Godel K. *What Is Cantor's Continuum Problem?* — P. 270—271.

воряющего определенным условиям. Если же математика, как полагает концептуалист, является человеческим изобретением, тогда аксиомы утверждают способ порождения из одних заданных множеств других множеств. Математика в этом смысле представляет собой структуру, в которой непротиворечиво демонстрируется существование множества. Другими словами, аксиомы позволяют так ограничить понятие множества, чтобы избежать парадоксов, независимо от взгляда на природу математики.

Приведенный выше список аксиом стандартной теории множеств не является каким-то каноническим. Возможны другие перечни и другие аксиомы. Например, есть список аксиом, именуемый аксиомами теории множеств Цермело — Френкеля — Сколема, включающий следующие аксиомы:

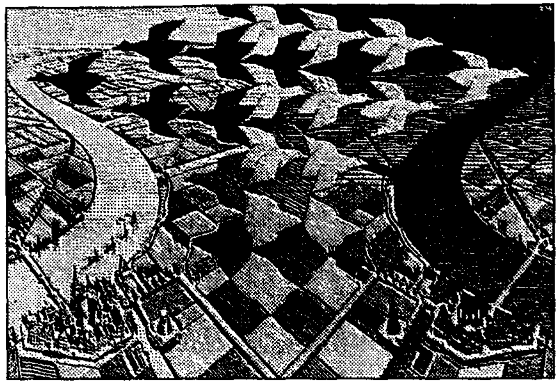
1. Аксиома экстенсиональности.
2. Аксиома пустого множества.
3. Аксиома неупорядоченных пар.
4. Аксиома множества-суммы.
5. Аксиома бесконечности.
6. Аксиома замещения.
7. Аксиома множества-степени.
8. Аксиома выбора.
9. Аксиома регулярности[38].

Наконец, имеет смысл привести исходный перечень аксиом, который появился в работе Э. Цермело[39].

1. Аксиома экстенсиональности.
2. Аксиома элементарных множеств: пустое множество, единичное множество, множество пары.
3. Аксиома свертывания (Aussonderung).
4. Аксиома множества-степени.
5. Аксиома объединение множеств.
6. Аксиома выбора.
7. Аксиома бесконечности.

[38] Приведено в кн.: Davis Ph., Hersh R. *Mathematical Experience.* — Penguin, 1983. — P. 139.

[39] Zermelo E. *Investigations in Foundations of Set Theory.* 1908 // Heijenort J. van. From Frege to Godel. — Harvard: University Press, 1967.



ПРЕЛЮДИЯ К ГЛАВЕ 4

Притча

Коганы не были уверены в том, кто должен быть парой их единственному сыну Абби, и Хаймэн Лапидус, которому они поручили поиски невесты, после долгого перебора и предложений, отклоняемых Коганами, наконец пришел с «окончательным предложением».

Лапидус: Миссис Коган, я нашел то, что нужно Абби. Она прекрасна, из почтенной и богатой семьи, нежная, милая, короче, как раз та девушка, которая хотела бы войти в вашу семью, и стать матерью ваших внуков... Прекрасный загородный дом...

Коганы: Так в чем проблема? Всегда есть какая-то проблема!

Лапидус: Ну, есть одна маленькая проблема, которую я должен упомянуть. Она не еврейка, но доверьтесь мне, она просто ангел и...

Коганы (*в ужасе, негодовании и т.п.*): «Довериться вам!», «Ангел!» Вон отсюда! Безусловно, мы не можем

выбрать для нашего Абби никакой женщины, кроме еврейки. Вы хотите, чтобы наши внуки были гоимы!?!

Лапидус: Подождите. Не торопитесь, ведь речь идет об исключительной девушке, благородной...

Коганы: Никогда! Вон!

Лапидус: По крайней мере, позвольте мне сказать все-таки, кто она. Это принцесса Маргарет! Вы знаете, она из Англии, где живут и Ротшильды... Вообразите только (Боже упаси, чтобы это случилось!), но просто представьте, что если что случится с ней — а в наши дни, знаете ли, может быть все что угодно, — тогда ваш Абби — Король Англии[1], а ваши внуки — наследники трона... А она такая прекрасная девушка и т.п.

После нескольких колебаний «за» и «против»...

Коганы: Хорошо. Достаточно. Согласны.

Позднее, выходя из дома Коганов, утирая пот с лица,

Лапидус: Фу, наконец-то!!! Половина дела сделана. Остается лишь убедить принцессу Маргарет. Ну, это уже другая половина дела!

Анонимная притча из ст.: P. Benacerraf.
What Mathematical Truth Could not Be[2]

---

[1] «Я благодарен анонимному рецензенту за указание на то, что несчастье, о котором говорится в притче, не привело бы Абби на трон Англии. Однако я обязан передать аргументацию Лапидуса так, как он преподнес ее им» (Бенацерраф).

[2] Benacerraf P. *What Mathematical Truth Could not Be* // Philosophy of Mathematics Today / Ed. M. Schirn. — Oxford, 1998. — P. 36.

ГЛАВА 4

ТЕОРЕМЫ И МОДЕЛИ

Математическая логика известна широкой публике в значительной степени благодаря знаменитым теоремам, которые имеют многочисленные философские интерпретации и следствия. К таким результатам принадлежит, например, теорема Геделя о неполноте арифметики, или теорема Тарского о невозможности определить понятие истины для системы внутри самой системы. Однако с широкой известностью подобного рода метаматематических результатов растет число их неправильных интерпретаций и попросту бессмысленных оценок. Вот характерная ситуация, описанная С. Блэкберном в рецензии на книгу К. Эко *Кант и утконос*[1]: «Видные интеллектуалы в области литературы часто оперируют технической терминологией математической логики или философии языка. Один мой друг слышал как-то разговор в Кембридже по поводу дела Деррида, предложение о присуждении которому почетной степени вызвало серьезное сопротивление джентльменов. Журналист, освещающий возникший скандал, спросил Видного Интеллектуала в Литературе, в чем заключается важность Деррида. "Ну, — сказал тот со снисходительной наглостью, — Гедель показал, что любая теория противоречива, если у нее нет поддержки извне, а Деррида показал, что нет этого извне".

Здесь есть по крайней мере три примечательные вещи. Во-первых, того, что якобы сделал Гедель, вообще не может быть, поскольку существует весьма много непротиворечивых теорий. Во-вторых, Гедель на самом деле не доказал этого и не пытался доказать. В-третьих, не имеет смысла говорить, что противоречивая теория могла бы стать непротиворечивой, будучи "поддержанной извне",

[1] Блэкберн С. *Профессор чего угодно* / Пер. с англ. В.В. Целищева // Гуманитарные науки в Сибири. — 2002. — № 3.

что бы это ни значило. (Противоречивость есть вещь упорная; вы можете избавиться от нее не добавлением, а лишь отниманием.) Так что Деррида якобы сделал так же невозможно, как и невозможно то, что якобы сделал Гедель.

Такие ошибки приводят к провалу на экзамене по философии или логике на первом курсе. Однако это обстоятельство не производит особого впечатления в мире Видных Интеллектуалов в Литературе. В их мире простое упоминание Геделя, подобно типичному заклинанию типа "иерархий" и "метаязыков", создает впечатление чего-то страшно глубокого и страшно научного. Это придает Видному Интеллектуалу в Литературе лестный образ человека, которому по плечу самые трудные и глубокие проблемы, образ импрессарио страшно трудных вещей. Я полагаю, что журналист упал в обморок».

Хотя ситуация с аналитическими философами с интерпретацией математических результатов не выглядит столь драматической, тем не менее, и здесь зачастую имеют место не совсем обоснованные заключения от чисто математических результатов к философским следствиям. Мораль притчи Бенацеррафа, приведенной в начале этой главы, состоит в том, что философская интерпретация математического результата всегда содержит две части: «(a) сам по себе метаматематический результат — "это уже полдела!", (b) выжимка философского "сока" — то, что я называю "посылкой принцессы Маргарет"[2], которую еще остается убедить в достоинствах жениха. Далее Бенацерраф продолжает: «обе части важны, и качество аргументации будет зависеть весьма существенным образом от качества того, что может быть независимым аргументом в пользу посылки принцессы Маргарет».

Формализация некоторого контекста всегда сопровождается значительными ограничениями, которые становятся видными именно при формализации, например, четкое определение ресурсов формального языка, выразимость на нем понятий неформализованной практики и т.д. Перенос этих ограничений на неформализованную практику может приводить к значительному искажению представлений о наших интуитивных возможностях и ресурсах. Такая ситуация может иметь место, когда интерпретация формальных результатов переносится на неформализованную практику математиков и философов. Между тем следует еще показать, что такой перенос вообще обоснован: скажем, философов надо убедить в обоснованности применения формальных аргументов для философских заключений.

[2] Benacerraf P. *What Mathematical Truth Could not Be.*

Есть несколько ситуаций взаимодействия технических результатов (с использованием формализмов) с их философскими интерпретациями. Во-первых, есть твердо установленный результат в некоторой формальной системе, и из этого результата выводятся философские следствия с видимой необходимостью. Во-вторых, эти философские заключения должны иметь независимую мотивацию, т.е. иметь значимость только в присутствии «посылки принцессы Маргарет». В-третьих, один и тот же формальный результат можно интерпретировать несколькими противоположными способами, так что конфликтующие философские взгляды равноправны по ряду параметров. В этом случае мы можем говорить о неразрешимости философских интерпретаций формальных результатов. Наконец, может быть и так, что формальный результат, используемый для философской аргументации, оказывается ошибочным, несмотря на внешнюю убедительность философской позиции. Тут мы имеем этакое обращение «посылки принцессы Маргарет». Поразительно, но все четыре позиции могут быть иллюстрированы при обсуждении философских интерпретаций теоремы Левенгейма — Сколема.

1. Теорема и ее интерпретации

Действительно, часто обсуждение философских следствий касается ограничений в ресурсах, которые имеет любой формальный аппарат доказательства соответствующих теорем. При этом доминируют две позиции. Если ресурсы не позволяют смоделировать некоторую концепцию, тогда этой концепции не существует в корректном виде. С другой стороны, полагают, что математическая практика включает такое понимание концепций, которое не подвержено ограничениям в ресурсах формального языка. Оба взгляда вполне правомерны с точки зрения философской интерпретации математических результатов. Но неправомерным является смешение этих двух точек зрения, когда ограничения, касающиеся чисто формальных ресурсов, переносятся автоматически на неформализованную математическую практику. Другими словами, следует быть предельно аккуратным при выведении философских следствий из математических теорем, поскольку часто происходит вышеупомянутое смешение деталей, относящихся к разным областям знания, имеющих разные критерии адекватности и обоснования. Именно такое положение дел наблюдается в связи с философскими следствиями теоремы Левенгейма — Сколема.

Теорема Левенгейма — Сколема как-то обойдена философским вниманием, хотя следствия из нее сколь глубоки, столь и неясны. Формально теорема Левенгейма — Сколема непроблематична: любая теория первого порядка, имеющая несчетную модель, имеет счетную модель. Но почти немедленно в отношении этой теоремы возникает атмосфера парадокса. Согласно диагональной теореме Кантора не существует одно-однозначного соответствия между множеством рациональных чисел и множеством действительных чисел. Если имеется некоторая версия формализованной теории чисел, тогда теорема принимает вид

$\neg (ER)$ (R одно-однозначно. Область определения $R \subset N$. Область значений R есть S),

где R — отношение, N — есть формальный термин для множества всех целых чисел, S — множество действительных чисел, и все три части конъюнкции имеют определение в терминах первого порядка. Поэтому формализованная теория множеств говорит, что определенное множество S несчетно, и теория множеств должна иметь только несчетные модели. Но это невозможно, поскольку по теореме Левенгейма — Сколема, если теория имеет несчетную модель, она также имеет и счетную.

«Популярная» интерпретация теоремы Левенгейма — Сколема представлена Клайном в его превосходной книге: «Предположим, что составлена система аксиом (логических и математических) для какой-то области математики или теории множеств, которая рассматривается как основа для всей математики. Наиболее подходящим примером может служить система аксиом для целых чисел. Составляя ее, математики стремились к тому, чтобы эти аксиомы полностью описывали положительные целые числа, и только целые числа, но к своему удивлению обнаружили совершенно новые интерпретации, или модели, тем не менее удовлетворяющие всем аксиомам. Например, в то время как множество целых чисел счетно, в других интерпретациях возникают множества, содержащие столько же элементов, сколько их содержит множество всех вещественных чисел, и множества, отвечающие еще большим трансфинитным числам. Происходит и обратное. Так, предположим, что некий математик составил систему аксиом для теории множеств таким образом, что они позволяют описывать и описывали несчетные совокупности множеств. Нередко он обнаруживает счетную (перечислимую) совокупность множеств, удовлетворяющую всем аксиомам, и другие трансфинитные интерпретации, совершенно отличные от тех, которые он имел в виду, составляя свою систему аксиом. Более того, выяснилось, что каждая непротиворечивая система аксиом допускает счетную модель.

Иначе говоря, система аксиом, составленная для описания одного-единственного класса математических объектов, явно не соответствует своему назначению. Теорема Левенгейма — Сколема утверждает, что любая система аксиом допускает намного больше существенно различных интерпретаций, чем предполагалось при ее создании. Аксиомы не устанавливают пределов для интерпретаций, или моделей. Следовательно, математическую реальность невозможно однозначно включить в аксиоматические системы»[3].

Хорошо известна релятивистская интерпретация этой теоремы, принадлежащая самому Сколему, которая надолго утвердилась в качестве стандартной интерпретации в философии математики. В популярных изложениях релятивизм подобного рода вполне соответствовал по своему духу «странностям» оснований математики и теории множеств. Сколем и его сторонники делают вывод из теоремы, что не существует такой вещи как «абсолютная» несчетность, а существует несчетность лишь относительно формальной системы, и поэтому во вселенной существуют только конечные или счетные множества. Множество, которое несчетно в формальной теории, счетно вне теории, в метаязыке, и отсюда никакой термин формальной теории не может рассматриваться как обозначающий нечто большее, чем относительно несчетное. Это звучит парадоксально, поскольку предполагается, что теория множеств описывает вполне определенную реальность, которая «схватывается» формальным представлением в аксиоматическом виде. Парадокс этот получил имя Сколема, и хотя он и фигурирует в литературе как «парадокс Сколема», многие отрицают за ним статус подлинного парадокса. Парадоксален релятивизм в понимании мощности множеств, и конечно, он вызывает много возражений. Одно из них является чисто техническим: В. Кленк отмечает, что Сколем проглядел другую сторону медали — «направленной вверх» версии теоремы Левенгейма — Сколема, которая говорит нам, что любая теория с бесконечной моделью имеет модели любой бесконечной кардинальности, включая огромные несчетные модели. И тогда неясно, почему спор идет только о противопоставлении счетных и несчет-

[3] Клайн М. *Математика. Утрата определенности.* — М.: Мир, 1984. — С. 316.

ных моделей. По убеждению противников релятивизма, платонистов, «абсолютно нет причин позволять счетным моделям иметь большую значимость, чем несчетным, если не принимать во внимание упорное предпочтение счетности, которое не имеет ничего общего с доказательством»[4].

Перед тем как перейти к анализу собственно философских интерпретаций теоремы Левенгейма — Сколема, следует отметить некоторого рода скептицизм относительно возможности прийти к какому-то определенному заключению. Многие полагают, что уже сам предмет математики гарантирует необходимую для такого рода заключений убедительность. Одно время Б. Рассел разделял именно такую точку зрения: «Во всей философии математики, в которой есть не меньше сомнений, чем в любой другой части философии, порядок и определенность сменили путаницу и колебания, которые прежде царили здесь. Философы, правда, до сих пор не обнаружили этого факта и продолжают писать о предмете в прежнем стиле. Но математики… обладают такой трактовкой принципов математики, которая точна, и позволяет им определенность математики перенести также на математическую философию»[5]. Однако как покажет дальнейшее изложение вопроса, эта точка зрения вряд ли верна. Определенности нет вовсе, и разброс мнений тут просто огромен. Если одни склоняются к тому, что теорема Левенгейма — Сколема не имеет сама по себе независимого философского значения и безразлична к большинству философских позиций[6], то другие основывают на теореме целое эпистемологическое направление с радикальными выводами относительно природы языка[7].

В более технических терминах ситуация с парадоксом Сколема выглядит следующим образом. Из парадокса могут быть сделаны выводы о том, что:

А) поскольку первого порядка формализации теории множеств имеют счетные модели, они не могут выразить или «схватить» концепцию несчетного множества;

[4] Klenk V. *Intended Models and Lewenheim-Skolem Theorem* // J. Philosophical Logic. — 1976. — N 5. — P. 475—489.

[5] Russell B. *Mathematics and Metaphysicians* // Mysticism and Logic, 1957. — P. 75.

[6] George A. *Skolem and Lewenheim — Skolem Theorem: A Case Study of Philosophical Significance of mathematical Results* // History and Philosophy of Logic. — 1985. — N 6. — P. 75—89.

[7] Puntam H. *Models and Reality* // J. Symbolic Logic. — 1980. — Vol. 45, N 3, Sept. — P. 464—482.

Б) поскольку невозможно «схватить» или выразить концепцию несчетного множества через аксиоматизацию первого порядка теории множеств, мы не обладаем такой концепцией.

Как известно, стандартная аксиоматика для теории множеств представлена системой Цермело — Френкеля, которая рассматривается как вполне удовлетворительная для чисто математических целей. Между тем философские интерпретации концепций, входящих в аксиоматику, встречаются с множеством неясностей и затруднений, которые порождают скепсис в отношении этих концепций.

2. Скептики и релятивисты

Теория множеств имеет дело с бесконечными множествами, и впечатляющим открытием Кантора было обнаружение несчетных множеств, которые вызвали много споров среди математиков. Предложенная аксиоматика должна была отразить это важнейшее положение теории множеств. Между тем теорема Левенгейма — Сколема может быть интерпретирована как утверждение, что считавшееся несчетным множество в одной системе может оказаться счетным в другой. С философской точки зрения, понятие множества, точнее, понятие кардинальности множества, теряет свой онтологический статус, что и является четким выражением скептической позиции в отношении понятия множества.

Не менее важно для скептической позиции убеждение, что формализация теории множеств должна быть первопорядковой. Предпочтение языка первого порядка является вопросом огромной сложности, и здесь следует лишь отметить, что для обсуждения проблем аксиоматизации теории множеств он имеет первостепенное значение. Теорема Левенгейма — Сколема, на которой в значительной степени основан скепсис в отношении концепции множества, формулируется для языков первого порядка. Вес скептической позиции придает то обстоятельство, что критика концепции несчетных множеств, или бесконечности, разделяется многими направлениями в философии математики, и подтверждение их правоты со стороны уже не просто философских позиций, а установленной теоремы, требует серьезной защиты приверженцами канторовской теории.

Следует заметить, что парадокс Сколема с относительностью понятия несчетного множества не считается сторонниками скептического подхода парадоксом вообще, и он не бросает, с их точки зрения, тень на первопорядковую аксиоматизацию теории множеств. Скорее, дело обстоит так, что такая аксиоматизация адекватна в качестве оснований математики, а несчетных множеств просто не существует. На этот счет сам Сколем высказался довольно четко: «Поскольку все размышление в аксиоматической теории множеств или в рамках формальных систем делается таким образом, что абсолютные несчетности не существуют, утверждение о существовании несчетных множеств должно рассматриваться просто как каламбур. Следовательно, такая абсолютная несчетность является просто фикцией. Истинное значение теоремы Левенгейма и заключается в критике абсолютной несчетности. Короче, эта критика не сводит высшие бесконечности простой теории множеств до уровня абсурда, она сводит их до уровня не-объектов»[8].

Таким образом, происхождение скептицизма относительно понятия несчетного множества может быть представлено в виде следующего аргумента:

(1) теоретико-множественные концепции должны быть представлены в аксиоматической форме в формализме первого порядка;
(2) таким образом представленная теория множеств составляет адекватное основание для математики.

Согласно теореме Левенгейма — Сколема,

(3) теоретико-множественные понятия (и математические понятия, определенные ими) *относительны*, неабсолютны.

В данном аргументе, несмотря на его четкость, есть все-таки некоторые неясности. Действительно, если налицо парадокс с несчетностью, то не будет ли естественнее предположить, что формализация первого порядка не «схватывает» концепции множества, и стало быть, не является адекватным основанием для математики. Такое заключение представляется в высшей степени естественным, и разделяется многими исследователями. Далее, коль скоро парадокс присущ уже языку первого порядка, это может означать, что теория множеств не представляет адекватного основания для мате-

[8] Skolem T. *Sur la Portee du Theoreme de Lewenheim — Skolem* // Skolem T. Selected Works in Logic / Ed. E.J. Fenstad. — Universitetsforlaget, 1970. — P. 468.

матики, и вообще, сама идея оснований математики может быть неверной затеей. Наконец, неясно, к чему относится заключение (3) — к самому формализму или же к интерпретации формализма.

Рассмотрим сначала проблему оснований математики. Уже в своих ранних работах Сколем, атакуя Цермело, тем не менее признавал идею оснований математики. Правда, у него были своеобразные представления об этих основаниях. Аксиоматическая теория множеств не признавалась им адекватными основаниями математики. А. Джордж отмечает в этой связи следующее обстоятельство[9]. Согласно Сколему, если некоторая система должна обеспечить адекватное основание для некоторой области, тогда все свойства системы оснований должны быть свойствами области, для которой предлагаются основания. Ментальные объекты математики, составляющие область, для которой предназначены основания, через интуицию обладают непосредственной ясностью. Стало быть, и аксиоматическая теория множеств, претендующая на основания, должна придавать понятиям теории множеств такую же интуитивную ясность. Но этого не происходит из-за релятивизма.

Подобного рода взгляд сходен с интуиционизмом, и многие полагают Сколема действительно интуиционистом, правда, своеобразным. С его точки зрения окончательным критерием значимости доказательства и допустимости объектов является их интуитивная ясность. Апелляция к интуиции вовсе не исключает того, что в принципе мы можем с помощью аксиоматической теории придти к интуитивно оправданной картине математики. Однако Сколем исключил эту возможность, судя по всему, имея в виду парадокс Рассела. Как и большинство математиков того времени, Сколем рассматривал этот парадокс как симптом неясности логических принципов, лежащих в основе нашего логического мышления, и полагал, что математическая интуиция не говорит в пользу множеств. Тем не менее интуиционизм Сколема следует считать весьма своеобразным. Во-первых, по собственному его признанию, свои идеи он развил, не имея представления о работах Брауэра. Во-вторых, будь он полноценным интуиционистом, отказ от признания несчетных множеств был бы просто для него частью его кредо интуициониста, и ему не нужно было бы прибегать к аргументации, связанной с теоремой Левенгейма — Сколема.

При обсуждении теоремы Левенгейма — Сколема и релятивизма Сколема часто упускаются две чрезвычайно важные детали. Во-

[9] George A. *Skolem and Lewenheim — Skolem Theorem.* — P. 75—89.

первых, у Сколема есть два доказательства знаменитой теоремы. В первом (1920 г.) для сведения универсума исходной модели к счетному числу элементов используется аксиома выбора. Во втором (1922 г.) эта аксиома не используется. Так что неправильно говорить о единственной теореме Левенгейма — Сколема. Первый результат с аксиомой выбора сильнее, потому что гарантируемая счетная модель есть ограничение несчетной. Второй результат не дает такой гарантии, и счетная модель строится так, что не имеет отношения к исходной модели. Сколем с неохотой признавал существование этих двух версий, так как он чувствовал, что исследования в основаниях теории множеств лучше всего проводить без аксиомы выбора. По этой причине Сколем ограничил свою отбраковку философских и основательных исследований вторым результатом[10].

Во-вторых, релятивизм Сколема явился результатом внезапного философского обращения, отказа от тех взглядов, которые он исповедовал до начала 1940-х годов. Как уже говорилось, он был своего рода интуиционистом, и интуиционистские следы Сколема видны в его ранней статье 1922 г.[11], где он атакует аксиоматику Цермело, буквально по всем пунктам, т.е. возражая против всех его аксиом. Материал, на который обрушился Сколем, содержался в знаменитой статье Э. Цермело 1908 г.[12]. В этой статье Э. Цермело провозгласил три главных тезиса: во-первых, основанием математики является теория множеств; во-вторых, парадоксы наивной теории множеств могут быть блокированы аксиоматизацией, и в-третьих, аксиомы теории множеств могут служить основаниями всей математики. Сколем возражает всем трем тезисам, и ряд замечаний до сих пор представляет значительный интерес для оснований математики, даже несмотря на то, что сам Сколем отказался от своей критики.

В статье 1922 г.[13] Сколем детально возражает всей программе Цермело, и среди аргументов первого важное место занимает понятие области математических объектов. С точки зрения Сколема, если аксиомы справедливы для некоторой области объектов, то для нее должны быть справедливы и теоремы теории множеств. В этом случае понятие множества сводится к понятию области, что произво-

[10] Ibid. — P. 78.

[11] Skolem T. *Einige Bemerkungen zur aximatischen Begrundung der Mengelehre* / / From Frege to Godel / Ed. van Heijenoort. — Cambridge, 1967. — P. 302—333.

[12] Zermelo E. *Investigations in the Foundations of Set Theory (1908)* // From Frege to Godel / Ed. van Heijenoort. — Cambridge, 1967. — P. 302—333.

[13] Skolem T. *Some Remarks on Axiomatized Set Theory* // From Frege to Godel / Ed. van Heijenoort. — Harvard, 1967.

дит впечатление порочного круга, поскольку понятие множества и есть в некотором роде понятие области. Если же речь идет о специфицированном универсуме, тогда это понятие вряд ли может претендовать на основания математики, будучи просто одной из ее специальных совокупностей.

Беспокойство Сколема вызывает и знаменитая аксиома «свертывания» (в русской терминологии, comprehension — в английской терминологии, или Aussonderungs — в исходной немецкой). Предложение Сколема заменить эту действительно беспокоящую аксиому с ее центральным понятием «определенного свойства», которое приводит к парадоксам, синтаксической концепцией открытого предложения с единственной свободной переменной впоследствии нашло важное применение в математической логике. В частности, такой прием позволяет Сколему предположить, что аксиомы Цермело составляют счетное множество предложений первого порядка, и в силу этого аксиоматика Цермело должна иметь модель в целых числах, если она вообще имеет модель. Фактически это и есть несколько упрощенное доказательство теоремы Левенгейма — Сколема. Имея в виду две версии доказательства теоремы, можно оценить важность уточнения Сколемом понятия «определенного свойства» Цермело.

При этом вину за возникающие трудности Сколем возлагает не на понятие множества, а на понятие конкретной аксиоматизации, и больше того, возникающие при этом трудности с понятием множества считаются им результатом относительности концепции множества в отношении различных аксиоматических систем. Причем такая относительность заходит настолько далеко, что речь идет уже о просто вербальном определении соответствующих математических объектов: «С подходящим аксиоматическим базисом, следовательно, теоремы теории множеств могут быть сделаны справедливыми в простом вербальном смысле, естественно, при предположении, что аксиоматизация непротиворечива; но это покоится на том факте, что использование слова “множество” отрегулировано подходящим образом. Мы всегда можем определить совокупности, которые не называются множествами; если же мы назовем их множествами, теоремы теории множеств перестанут быть справедливыми»[14].

Итак, атака Сколема на аксиоматику теории множеств Цермело основывается на двух «китах»: недоверии аксиоматизации теории множеств и его концепции относительности понятия множества

[14] Skolem T. *Some Remarks on Axiomatized Set Theory*. — P. 296.

в отношении аксиоматической системы. Часто при изложении философии Сколема (если таковая была вообще) заведомо спутываются две эти точки зрения, и результат путаницы представляется как знаменитый релятивизм Сколема (та самая философия, которая все-таки имеется у него). Между тем именно аксиоматика ответственна за этот самый релятивизм, что видно из известного пассажа Сколема: «Благодаря аксиомам, мы можем доказать существование более высоких кардинальностей, более высоких числовых классов, и так далее. Как же может тогда случиться, что вся область *B* может быть уже перенумерована посредством положительных чисел? Объяснение нетрудно найти. В аксиоматизации “множество” не означает произвольно определенной совокупности; множества являются не чем иным, как объектами, связанными друг с другом через определенные отношения, выраженные аксиомами. Отсюда нет никакого противоречия в том, если множество *M* области *B* несчетно в смысле аксиоматизации; потому что это означает просто, что в *рамках B* нет одно-однозначного соответствия *Ф* множества *M* в Z_0 (числовая последовательность Цермело). Тем не менее, существует возможность нумерации всех объектов в *B*, и следовательно, также элементов *M*, посредством позитивных чисел; конечно такая нумерация есть также совокупность определенных частей, но эта совокупность не есть “множество”, то есть, не входит в область *B*)»[15].

Философская нечеткость взглядов Сколема проявилась весьма своеобразным образом. В период между появлением статьи 1922 г., в которой он обрушился на аксиоматику Цермело, и статьей 1941 г.[16], где он выразил свое новое понимание оснований математики, Сколем полностью доверился формализмам (заметим, только формализмам первого порядка) и аксиоматике. При этом следует отметить, что релятивизм остался при нем. Но именно релятивизм представляет собой наибольшую трудность для философии математики, и даже приобрел специальный термин «сколемизма», что равносильно скептической позиции в отношении понятия множества.

Во-первых, есть проблема правомерности утверждений сторонников канторовской теории множеств о существовании множеств с большой кардинальностью — в какой степени эти онтологические допущения могут быть оправданы эпистемологически? Во-вторых, есть проблема чисто техническая — является ли парадокс Сколема подлинным парадоксом, для которого нельзя найти техничес-

[15] Ibid. — P. 295.
[16] Skolem T. *Sur la Portee du Theoreme de Lowenheim — Skolem*.

кого решения? Наконец, в какой степени технические решения парадокса Сколема, если таковые есть, задевают по-настоящему философские основания математики. В отношении последнего вопроса есть свои крайности. Так, Х. Патнэм полагает, что парадокс Сколема является разновидностью более фундаментального затруднения, которое он называет «сколемизацией всего», и что относится к эпистемологии, а не к математике собственно. В любом случае, анализ структуры парадокса Сколема является настоятельно важным. В этом отношении важнейшую роль играет работа П. Бенацеррафа *Сколем и скептик*[17].

3. Разрешение парадокса

До недавнего времени дискуссиям вокруг парадокса Сколема была присуща некоторая нерешительность, связанная с почти полным принятием убеждения, что релятивизм Сколема в отношении понятия множества представляет собой нечто большее, чем просто некоторый тезис философии математики. «Сколемизация всего», провозглашенная Х. Патнэмом, только усилила эту тенденцию, подняв интерпретацию математической теоремы до уровня значительного эпистемологического тезиса о природе языка. Так что непонятно было, что собственно обсуждать, — собственно философскую интерпретацию теоремы Левенгейма — Сколема или же общий скептический вызов теории познания. Поскольку основной целью этого раздела является отделение интерпретации технических результатов от слишком общих философских тезисов, представляется желательным дать все-таки отдельную трактовку собственно парадоксу Сколема и теореме Левенгейма — Сколема и «сколемизации всего» как скептического вызова. В частности, желательно было бы отделить релятивизм, который мотивируется многими внешними факторами (и лишь с первого взгляда является следствием теоремы Левенгейма — Сколема) от анализа собственно парадокса Сколема и теоремы Левенгейма — Сколема.

Рассмотрим «действие» теоремы Левенгейма — Сколема на примере аксиомы множества-степени. С первого взгляда эта теорема противоречит теореме Кантора, согласно которой в данном случае элементы множества-степени целых чисел не могут быть по-

[17] Benacerraf P. *Skolem and Sceptic* // Proceedings of Aristotelian Society. — 1985. — Suppl. vol. 59. — P. 101.

ставлены в 1—1 соответствие с целыми числами. Из теоремы же Левенгейма — Сколема следует, что аксиомы Цермело — Френкеля имеют дело самое большее со счетным числом объектов, и отсюда, множество-степень целых чисел, как объект теории, само счетно. Бенацерраф подчеркивает в связи с этим, что такая формулировка следствий теоремы Левенгейма — Сколема является результатом простой путаницы; в частности, эта теорема не влечет счетности числа тех объектов, с которыми имеет дело система Цермело — Френкеля, ни счетности самих объектов. Речь в теореме идет лишь о том, что если система аксиом Цермело — Френкеля имеет модель вообще, то эта теория множеств имеет и нестандартные модели.

Для понимания того, почему такая путаница возникает, Бенацерраф[18] вводит новую версию теоремы Левенгейма — Сколема, так называемую транзитивную счетную субмодельную версию (далее ТСМ). Модель транзитивна, если и только если, каждый элемент каждого множества в модели принадлежит области модели. Как видно, намеренная интерпретация системы Цермело — Френкеля включает транзитивную модель. Тогда, согласно ТСМ, если система Цермело — Френкеля имеет намеренную модель вообще, эта система может иметь интерпретацию в счетной подобласти множеств, включенных в намеренную интерпретацию, такую, что «$\in$» продолжает оставаться отношением членства, и каждое множество в области новой интерпретации самое большее счетно. Рассмотрим, как появляется противоречие в этой версии теоремы Левенгейма — Сколема. Аксиома множества-степени имеет следующий вид:

$$(\forall x)\,(\exists u)\,(\forall t)\,[\,t\in u\equiv(\forall y)\,(y\in t\supset y\in x)]\,.$$

Пусть x будет Z_0 — множество положительных чисел, D — область намеренной интерпретации и D' — область подмодели. Так как по предположению аргумента Z_0 есть элемент обеих областей и так как аксиома множества-степени справедлива при намеренной интерпретации для D и D' (следует учесть, что «$\in$» имеет в подмодели ту же интерпретацию, что и в модели, и является единственной нелогической константой в аксиоме), множество-степень множества Z_0 — обозначим его через PZ_0, — которое обозначается в аксиоме через u, должно быть элементом как D, так и D'. И вот тут мы имеем противоречие. Канторовская теорема, доказуемая в системе Цермело — Френкеля, влечет, что не существует 1—1 соот-

[18] Ibid. — P. 101.

ветствия между Z_0 и PZ_0; но если PZ_0 есть элемент транзитивной, счетной подмодели системы Цермело — Френкеля, оно должно быть также счетным, и стало быть, должно иметься 1—1 соответствие.

Это противоречие устраняется после экспликации следующего неявного предположения. Оно заключается в том, что если Z_0 есть элемент как D, так и D', тогда тот факт, что аксиома множества-степени справедлива для обеих областей, без переинтерпретации ее единственной нелогической связки, есть гарантия, что PZ_0 также элемент обеих областей. Но, как замечает К. Райт, это предположение попросту неверно[19]. Аксиома лишь гарантирует нам, что каждая область будет содержать для Z_0 множество *u*, которое содержит каждый *t* в этой области, который удовлетворяет условию в правой части эквивалентности наедине с Z_0. Но нет никакой необходимости считать их *одним и тем же* множеством, поскольку это зависит от соответствующих универсумов квантификации *t* в двух областях. Если эти области не одни и те же, нельзя предполагать, что PZ_0, которая есть элемент D', есть в самом деле PZ_0 — полноценное множество-степень целых чисел. Поскольку предположение о тождественности этих двух множеств неосновательно, транзитивная счетность D' никоим образом не находится в противоречии с несчетностью PZ_0.

4. Диалектика философского спора

Следует сделать несколько методологических комментариев к этому техническому устранению кажущегося противоречия. Дело в том, что противоречие может устраняться, а может и избегаться. В случае релятивизма мы имеем классический случай избегания противоречий. К. Райт пишет, что как и в случае морального релятивизма, когда противоречивые моральные суждения оправдываются различными моральными стандартами, так и в случае релятивизма в теории множеств это есть способ избежать противоречия путем постулирования неоднозначности терминов[20].

Релятивист полагает, что внутри системы Цермело — Френкеля не может быть определено 1—1 соответствие между Z_0 и PZ_0, и в то же время такое соответствие может быть определено вне сис-

[19] Wright C. *Skolem and Sceptic* // Proceedings of Aristotelian Society. — 1985. — Suppl. vol. 59. — P. 119—120.

[20] Ibid. — P. 117.

темы, но уже такими методами, для которых формализация системы Цермело — Френкеля не является адекватной. Однако, если неформализуемость отображения Z_0 в PZ_0 в рамках системы Цермело — Френкеля есть результат ограниченности формализации, тогда нужно дать веские аргументы в пользу того, что такое отображение должно быть доказуемо на содержательном уровне. Но такая попытка была бы в высшей степени странной: ведь теорема Кантора как раз и доказана на содержательном уровне, и в ней показана невозможность обсуждаемого отображения. Противоречие устраняется, как видно, при более тщательном анализе двух понятий — области интерпретации и области квантификации. Поэтому Бенацерраф делает вывод, что невыразимость концепции множества в рамках теории первого порядка зависит от этих двух понятий[21].

Понятие интерпретации, при всей своей естественности, несет в себе множество тонких моментов. Рассмотрим, например, попытку характеристики чисел с помощью неинтерпретированных аксиом. Известно, что для каждого натурального числа *n* может быть выписан набор аксиом первого порядка, которые выполнимы в области *D*, если и только если, *D* имеет в точности *n* членов. Однако с помощью неинтерпретированных аксиом нельзя выразить различия между «счетным» и «несчетным». Понятное в содержательной теории, в аксиоматизированной теории подобное различие не проходит, так как хотя можно выписать аксиомы первого порядка, которые выполнимы, но невыполнимы в любой конечной области, нельзя выписать множества аксиом первого порядка, которые выполнимы в несчетной области, но не выполнимы в любой счетной области. Таким образом, не вводя интерпретации аксиом, мы не можем выразить содержательное различие огромной важности. Мораль может быть и более жесткой: выразительные возможности синтаксиса первопорядковой теории слишком скудны для такого различия.

Коль скоро понятие несчетности не является выразимым на уровне логики первого порядка, можно прибегнуть к логике второго порядка, заимствуя из нее самые скромные (минимальные) средства. Типичным вариантом такого подхода будет введение специального предиката второго порядка, скажем, $U(x)$, характеризующего несчетность. Можно представить себе такую ситуацию, при которой в некоторой теории первого порядка $U(x)$ будет теоремой аксиоматической теории. Но хотя содержательно этот предикат выражает несчетность, это значение не «схватывается» на формальном уровне. Па-

[21] Benacerraf P. *What Mathematical Truth Could not Be*. — P. 59.

радоксальность начинается с того момента, когда мы признаем, что теория с $U(x)$ допускает, согласно теореме Левенгейма — Сколема, счетные модели. Как это может случиться? Счетная модель, гарантируемая теоремой Левенгейма — Сколема, состоит из множеств; в то же время у нас имеется «суботношение» принадлежности «$\in$» на некоторой стандартной модели, которая предполагается в качестве исходной при содержательном анализе. При таком анализе мы можем говорить о несчетном множестве, которое может быть перенумеровано некоторой функцией в одной системе, а в другой системе, которая содержит предикат несчетности $U(x)$, эта функция не может быть определена. Другими словами, эта функция находится вне области действия кванторов с предикатом $U(x)$.

Таким образом, вырисовывается фундаментальное различие между теми, кто допускает несчетные множества, которых естественно можно назвать «канторианцами», и теми, кто выражает сомнения по поводу их существования, кого, столь же естественно, можно назвать «сколемитами». Как видно, различие это упирается в соотношение содержательной теории и возможностей ее формализации, цель которой состоит в том, чтобы «схватить» содержание неформальных понятий. Проблема состоит в том, насколько ей это удается в принципе. На уровне содержательных теорий существование несчетных множеств допускается заранее. Но формализация обладает некоторого рода автономией, и если будет решено, что формализация первого порядка достаточна, тогда все, что выходит за ее пределы, все, что не «схватывается» ею, не существует. Именно такова позиция «сколемитов». Они считают, что «бремя доказательства» существования несчетных множеств лежит на «канторианцах».

Коль скоро спор между «сколемитами» и «канторианцами» есть спор о соотношении содержательного и формализованного, вполне возможен спор о том, как получается убеждение в существовании несчетного множества в свете теоремы Левенгейма — Сколема. Спор идет в терминах объяснительных схем, которую предлагает противоположная сторона для объяснения поведения другой.

Начинаем с того, как сколемит объясняет, почему его противник канторианец не может перенумеровать свое «несчетное» множество. (Так это представлено в работе Бенацеррафа[22]). Канторианец начинает с того, что делает упор на том, что предикат несчетности $U(x)$ есть теорема, и если этот предикат истинен для некоторого множества π, тогда это множество существует. Сколемит парирует

[22] Benacerraf P. *What Mathematical Truth Could not Be.* — P. 64—65.

этот аргумент тем, что несчетность эта может быть мнимой, поскольку состоит лишь в том, что у канторианца нет в распоряжении функции, которая устанавливала бы одно-однозначное отношение между целыми числами и множеством π, поскольку эти функции находятся вне области действия кванторов. Таким образом, «на самом деле» π является счетным множеством.

Все это рассуждение справедливо только при условии, что формализация как таковая обладает некоторого рода автономией, и все, что не «схватывается» ею, объявляется несуществующим. Конечно, при этом такая формализация должна иметь массу и других заслуг. Формализация первого порядка имеет столько заслуг, что Куайн бросил в свое время громкий лозунг «логики первого порядка вполне достаточно» (в подлиннике это звучит гораздо более афористично — first-order logic is logic enough). Так что сколемит имеет свои резоны в приведенном выше рассуждении.

Но вопрос состоит в том, готов ли канторианец принять логику первого порядка в качестве такой логики, которая «схватывает» интуитивное содержание математических понятий. В частности, сохраняется ли значение, которое канторианец придает концепции несчетности, при формализации его в теории первого порядка? Это поднимает более общий вопрос о том, как термины содержательной математики приобретают значение в формализованной теории. Обыденное представление о соотношении содержательной теории и ее формального аналога состоит в том, что терминам содержательной теории ставятся в соответствие формальные символы, так что при интерпретации формальной теории этим символам придается значение, совпадающее с содержательным. Но дело в том, что введение формальной теории подразумевает неинтерпретированное исчисление; термины этого неинтерпретированного исчисления мы снабжаем значением, и в случае совпадения этого значения с содержательным мы получаем «намеренную» интерпретацию. Приписывание интерпретации часто носит характер постулирования.

Поскольку постулирование в значительной степени произвольное, с первого взгляда, действие, сколемиты утверждают, что значение терминов интерпретированного формального языка вовсе не обязано совпадать со значением терминов содержательной теории. Поскольку существование несчетных множеств утверждается канторовской содержательной теорией, существование несчетных множеств в формализованной теории вовсе не гарантируется. Однако подобная аргументация не совсем убедительна, поскольку значения обоих языков, или теорий, все-таки совпадают, ввиду того, что при конструировании формального языка мы используем метаязык, который в значительной степени заимствует значения из содержательной теории.

Таким образом, при рассмотрении вопроса о соотношении содержательной и формальной теорий, который является решающим при обсуждении вопроса о реальном существовании несчетных множеств, мы ограничились пока обсуждением того, каким образом получают значения термины формальной теории. Однако подлинное различие, как подчеркивает Бенацерраф, между сколемитами и канторианцами состоит в том, что первые предпочитают ограничиться именно таким обсуждением. Другими словами, регламентация обыденного языка формальным языком первого порядка считается ими достаточным шагом для «схватывания», часто сводящегося к постулированию, значения содержательных концепций. Но вот с точки зрения канторианцев требуется еще одно важное дополнение, а именно, определение области квантификации, а также значения нелогических терминов словаря. Так, «∈» может означать отношение членства среди множеств, а ∀ будет универсальным квантором. Если же мы ограничиваемся, как сколемиты, только регламентацией содержательного языка логикой первого порядка, всякая дальнейшая спецификация значения будет излишней, например, для тех же символов «∈» и «∀». Однако такая стратегия вряд ли может быть оправдана, поскольку язык первого порядка не имеет всех тех преимуществ, которые готовы пересилить все неудобства отсутствия явной процедуры приписывания значения.

Теперь возникает вопрос, являются ли эти шаги достаточными для регламентации содержательной теории первопорядковой логикой, или же требуется что-то еще. И тут мы подходим к решающему различию между канторианцем и сколемитом. С точки зрения канторианца важна еще и область квантификации, а также то, какие подмножества картезианских произведений этой области приписаны терминам нелогического словаря. Например, «∈» может означать отношение членства среди множеств. С точки зрения сколемита последние шаги, связанные с заданием области квантификации, не необходимы, и предыдущих шагов вполне достаточно для того, чтобы сделать неэффективной любую дальнейшую спецификацию значения, например, для «∈» или «∀». Но дело в том, что у сколемита нет никаких аргументов для того, чтобы оправдать отказ от придания значения этим терминам, и ограничить интерпретацию первопорядковой теоретико-модельной структурой объект-языка. Другими словами, такая структура выступает в качестве суррогата значения терминов содержательной математики. Между тем А. Тарский выступил против понимания символа «∈» как неинтерпретированного символа, поскольку именно такое понимание приводит к ненамеренным счетным моделям[23]. Он полагает, что если трактовать «∈» как логическую константу, счетные модели не могут появиться вообще. Следовательно, значение «∈» должно быть фиксировано при всех интерпретациях.

Следовательно, один из аспектов обсуждения философских следствий теоремы Левенгейма — Сколема заключается в проблеме того, схватывается ли значение терминов содержательной математики формализмами. Этот аспект может быть развит в свете общей теории значения, в рамках философии языка. С технической точки зрения содержательная сторона отражена тем фактом, что в аксиоматике Цермело — Френкеля невозможно построить одно-однозначную функцию, которая отображает множество действительных чисел в множество натуральных чисел. Поскольку доказуемая в языке первого порядка теорема Левенгейма — Сколема утверждает противоположное, ясно, что интуитивное содержание теории Кантора не сохраняется в такой ограниченной теории, или не схватывается ею.

Естественно, что ответственность за такое положение дел с аксиоматической теорией возлагается на аксиомы. В данном случае приходится признать, что не каждая модель аксиом является допустимой интерпретацией. Это положение поднимает много вопросов как в отношении понятия аксиомы, так и понятия интерпретации. Действительно, если аксиома имеет несколько интерпретаций, непонятно, по каким критериям считать некоторые из них допустимыми, а другие — нет. Здесь Бенацерраф вводит чрезвычайно важное предположение о том, что в отношении допустимых интерпретаций следует различать два типа неинтерпретированных языков. В одном случае имеется неинтерпретированный язык, для которого нет явной интерпретации, а в другом случае неинтерпретированный язык допускает изначально допустимые интерпретации. Поскольку постановка проблемы о допустимых интерпретациях возникает в связи с теоремой Левенгейма — Сколема, вполне естественно предположение, что язык без явно обозначенной интерпретации не подлежит воздействию этой теоремы. Это означает, что сколемовская релятивизация применима толь-

[23] Tarski A. *Remarks on Skolem* // Skolem T. *Selected Works in Logic.* — Oslo, 1970. — P. 637—638.

ко к определенному классу неинтерпретированных языков, и что более важно, этот релятивизм не является универсальным. Если же эту неясность устранить твердой предпосылкой, что формализованная версия сохраняет связь с интуитивной математикой, тогда класс допустимых интерпретаций должен быть ограничен значением «∈» и областью квантификации, т.е. формализации подлежит теория множеств, а не теория каких-то других объектов.

Но тогда встает вопрос, может ли значение утверждения (которое может быть придано ему в неинтерпретированном языке), быть более точным, чем интерпретации утверждения, понимаемые в теоретико-модельном смысле. Если вместе со Сколемом считать, что утверждения теории множеств могут быть отождествлены с тем, что инвариантно при всех классических моделях теории, тогда мы будем считать, что «∈» есть просто отношение, которое удовлетворяет аксиомам. Если же мы будем считать это отношение логической константой, оно будет отношением членства для множеств, а кванторы пробегают при этом над множествами.

Для оправдания вышеупомянутого утверждения мы должны признать, что понятие намеренной интерпретации является недостаточным. Намеренная интерпретация представляет наше намерение «схватить» содержательный аспект путем формализации логики и основных понятий математики. Само понятие множества включает в себя больше, чем такая намеренная интерпретация. Речь идет о справедливости аксиом теории множеств, и эта справедливость должна быть показана не только намеренной интерпретацией, но и некоторого рода объяснениями о возможностях формализации вообще. Эта проблема упирается в теорию значения и указания в языке, и по сути своей упирается в проблему понимания языка. Как постоянно указывает Я. Хинтикка, язык может пониматься двумя фундаментально различными способами — как исчисление и как универсальный медиум для коммуникации[24]. Принятие одной из точек зрения имеет огромные следствия для того или иного понимания представленной в данной работе проблемы.

[24] Hintikka Ja. *Lingua Universalis vs Claculus Ratiocinator.* — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

5. «Сколемизация всего» и «внутренний реализм» Патнэма

Если мы не «схватываем» интуитивное понятие множества нашими формальными системами, тогда возникает естественный вопрос о том, какое иное средство может дать нам экспликацию «интуитивного понятия множества»? Дело в том, что теория множеств рассматривается как описание определенной независимо существующей реальности, и если она не выполняет этой роли, значит не существует эффективного обращения к этой реальности. Поскольку теория первого порядка представляет в определенном смысле синтаксис, видимо, необходимо обратиться к семантическим концепциям. В противном случае вопрос об истинности утверждений аксиом и следствий из них становится неразрешимым, поскольку невозможно указание на математические объекты и установление истинности и значения математических утверждений.

Как только речь заходит об истине, мы вторгаемся в чистую эпистемологию. В высшей степени показательно, что один из самых амбициозных проектов в области эпистемологии связан с интерпретацией формального результата, а именно теоремы Левенгейма — Сколема. Этот проект замыслен и осуществлен Х. Патнэмом под названием «внутреннего реализма», и использование математики в нем представляет собой один из наиболее убедительных аргументов в пользу «научного реализма». Что касается общей философской установки, то основные идеи Патнэма в этом вопросе можно найти в книге *Разум, истина и история*[25]. Математическая аргументация содержится в его статье *Модели и реальность*[26], представляющей собой доклад, прочитанный перед «смешанной» аудиторией философов и математиков, которая не слишком озабочена выявлением «посылки принцессы Маргарет». Поскольку эта посылка связана с экспликацией философских положений, следует в самых общих чертах описать этот самый «внутренний реализм»[27].

Различение Патнэмом «экстерналистского» и «интерналистского» взглядов на мир восходит к подходу Р. Карнапа, изложенному

[25] Putnam H. *Reason, Truth, and History.* — Cambridge, 1982.

[26] Putnam H. *Models and Reality.* — P. 464—482.

[27] Здесь следует указать превосходное изложение вопроса в кн.: Хакинг Я. *Представление и вмешательство.* — М.: Гнозис, 1998, некоторые моменты которого используются нами при описании позиции Патнэма.

в его знаменитой статье *Эмпиризм, семантика, онтология*[28]. С точки зрения «интернализма» как эпистемологической позиции вопрос о том, из каких объектов состоит мир, осмысленно можно задавать только внутри некоторой теории, или в терминологии Карнапа, это внутренний по отношению к некоторому языковому каркасу вопрос. «Объекты» не существуют вне концептуальных схем, поскольку мир структурируется знаковой системой. При этом на первый план выходят проблемы указания знаками объектов. Патнэм использует теорему Левенгейма — Сколема для радикального утверждения о том, что отношение знаков (или терминов языка) и объектов полностью не определено. «Ни одна точка зрения, которая фиксирует только истинностные значения целостных предложений, не может фиксировать референтов, даже если она определяет истинностные значения предложений в любом возможном мире»[29].

Очевидна связь этой теоремы с тезисом о неопределенности радикального перевода Куайна. Считается, что Патнэм усугубляет и без того парадоксальную мысль Куайна о непостижимости указания. Так, в приводимом им примере он говорит, что когда вы говорите о кошках и коврике («Кошка сидит на коврике»), вы, быть может, имеете в виду вишни и деревья («Вишня висит на дереве»). Различие в указании не будет проявляться для двух этих интерпретаций, поскольку все, в чем уверен один человек (некоторая кошка находится на некотором коврике), выражается предложением, которое в интерпретации другого человека есть нечто, в чем он уже уверен (некоторая вишня висит на некотором дереве). Всякий раз, когда один человек говорит о кошках, он может иметь в виду то, что другой человек называет вишнями, и наоборот. И если один человек собирался бы сказать, что кошка находится на коврике, другой человек согласился бы, поскольку бы считал, что первый человек говорит о том, что вишни — на дереве, т.е. может быть достигнуто полное согласие между двумя людьми о том, каковы факты мира, т.е. о том, какие предложения являются истинными, и все же тот факт, что когда один человек говорит о кошках, в то время как другой человек говорит о том, что первый называет вишнями, может вообще никак не проявиться.

Теорема Левенгейма — Сколема используется Патнэмом с одновременным принятием релятивизма Сколема, согласно которому нет абсолютного значения теоретико-множественных терминов.

[28] Карнап Р. *Значение и необходимость*. — М.: Мир, 1959.
[29] Putnam H. *Reason, Truth and History*. — P. 33.

Такую идеологию, перенесенную в более общий контекст, Патнэм называет «сколемизацией всего». Более тесную связь между формальными результатами и философской позицией можно увидеть, исходя из рассмотрения так называемого результата о перестановках, согласно которому при данной интерпретации *I* языка первого порядка *L* мы можем сконструировать другую («ненамеренную») интерпретацию *J*, которая сохраняет все истинностные условия всех предложений *L*, т.е. сохраняются все истинностные значения во всех возможных мирах, при варьировании объемов терминов и предикатов[30]. Патнэм делает то, что выглядит вполне корректным обобщением, применимым к любому универсуму объектов, к тем же кошкам и вишням. Если взять в качестве аксиом все истины об этих объектах в терминах языка первого порядка, то какую бы интерпретацию мы ни выбрали, всегда будут ненамеренные интерпретации. Если мы выбираем только два рода объектов — кошки и вишни — и используем короткий список истин, мы можем отобразить намеренную интерпретацию о кошках на ненамеренную интерпретацию о вишнях. Таким образом, отправляясь от чисто формального результата Патнэм делает глобальное заключение о значимости этого результата: «Я вовсе не хочу сказать, что “парадокс Левенгейма — Сколема” есть антиномия формальной логики; я считаю, что это скорее антиномия, или что-то вроде этого, философии языка. Больше того, я считаю, что разрешение антиномии — единственное разрешение, которое с моей точки зрения имеет смысл — имеет огромные следствия для великого метафизического спора о реализме, который всегда был центральным вопросом философии языка»[31].

Теперь имеет смысл рассмотреть, каким образом Патнэм переходит от теоретико-множественных проблем к общим проблемам указания в языке. Парадокс Сколема состоит в том, что одни и те же термины аксиоматической теории множеств указывают в разных интерпретациях на разные объекты — «счетные» и «несчетные» множества. Другими словами, одна и та же аксиоматическая система имеет разные модели. Здесь мы имеем дело с типичной ситуацией при формализации, которая, тем не менее, парадоксальна. Мы начинаем с «наивной», или интуитивной, теории множеств, затем формализуем ее и затем, рассматривая ее модели, обнаруживаем, что получили, кроме намеренного результата еще и ненамеренный.

[30] См., например: Hale B. and Wright C. *Putnam's Model-Theoretic Argument* // Companion to Philosophy of Language. — Basil: Blackwell, 1997. — P. 448—452.
[31] Putnam H. *Models and Reality*.

Некоторые модели удовлетворяют «m несчетно» только в том случае, когда m в действительности несчетно, в то время как другие модели выполняют «m несчетно», когда m на самом деле счетно.

После завершения цикла «интуитивная теория — аксиоматическая теория — модели теории» мы остаемся со значениями теоретико-множественных терминов, которые фиксированы только теорией моделей. В этом случае парадокс Сколема состоит в том, что при использовании аксиом первого порядка (непременное условие теоремы Левенгейма — Сколема) мы никак не можем оправдать предпочтения в пользу намеренной интерпретации. Дело, видимо, в том, что аксиомы не «схватывают» интуитивный смысл, скажем, понятия множества. В этом случае теоретико-множественный язык оказывается полностью неопределенным. В этой ситуации Патнэм предлагает следующий выход: он считает, что в дополнение к аксиоматической теории множеств мы должны добавить для подобного «схватывания» понимание, рассматриваемое как некоторое рациональное свойство человека, фиксированное в языке. Но, согласно натуралистическому подходу, понимание есть не что иное, как способ употребления, именно поэтому сколемовская парадоксальность может быть перенесена на область употребления языка. Речь идет в этом случае о том, что употребление терминов формализованного языка, предусматривающее указание на объекты и фиксированное значение терминов, не гарантирует от появления нестандартных интерпретаций. В частности, Патнэм пытается доказать, что употребление языка фиксирует намеренную интерпретацию не в большей степени, чем это делает аксиоматическая теория множеств. Если, в духе платонизма, мы рассматриваем теорию множеств как теорию о реальности, тогда эта реальность, с точки зрения «внутреннего реализма», видна через призму теории множеств. Если мы считаем аксиомы теории множеств основой физической теории о мире, эта «призма» будет некоторого рода ограничением, или тем, что Патнэм назвал «теоретическими ограничениями». Поскольку теория о мире является экспериментальной теорией, в которой измерения всегда имеют конечный характер, Патнэм говорит и об «операциональных ограничениях». Ограничения должны дать намеренную модель, поскольку теория должна быть истинной. Но как следует из аргументации Патнэма, теоретические и операциональные ограничения не фиксируют единственной «намеренной интерпретации» для языка научной теории.

6. Рациональность и аксиомы

Этот результат может показаться странным, поскольку механизм употребления языка не должен допустить появления «дополнительных» (ненамеренных) значений и указаний, поскольку осмысленное употребление языка должно устранять произвол в указании и приписывании значений через введение теоретических и операциональных ограничений. Такие ограничения нужно понимать не только как строго сформулированную теорию, но и как обоснованные интуитивные соображения, скажем, в отношении тех же аксиом теории множеств.

Интерес представляет природа этих теоретических ограничений. Для того чтобы избежать произвола в указании или приписывании значений терминам, мы должны принять что-то вроде конвенции об употреблении терминов, т.е. принять определенного рода решения. Другим источником теоретических ограничений может быть наш опыт обращения с эмпирическим материалом и теоретическими схемами в определенной области науки. С точки зрения Патнэма теоретические ограничения подобного рода не могут дать полной системы аксиом теории множеств (полная система аксиом теории множеств была бы нерекурсивной и трудно представить себе, как можно было бы сконструировать такую теорию в рамках человеческих возможностей). Но невозможность полной системы аксиом означает наличие ненамеренных интерпретаций.

Наличие ненамеренных интерпретаций может означать две вещи — неопределенность в указании на объекты, а также неопределенность истинностных значений утверждений теории. До сих пор обсуждалась первая возможность, а теперь мы переходим к обсуждению второй: «Если я прав, тогда относительность теоретико-множественных понятий распространяется на относительность истинностных значений утверждения $V = L$ (то же для аксиомы выбора и континуум-гипотезы)»[32].

Для понимания ситуации следует рассмотреть пример из теории множеств. Речь идет об аксиоме конструируемости Геделя «$V = L$». Современная теория множеств гласит, что $V = L$ независима от системы аксиом Цермело — Френкеля плюс аксиома выбора (ZFC), т.е. что $ZFC + V = L$ и $ZFC + V \neq L$ непротиворечивы. Отсюда если намеренная модель теории множеств фиксируется *только* ак-

[32] Putnam H. *Models and Reality.* — P. 7—8.

сиомами *ZFC* и имеется на самом деле такая модель, тогда имеется намеренная модель, в которой $V = L$ истинна, и такая намеренная модель, в которой $V = L$ ложна. Утверждение «$V = L$» независимое от остальных аксиом утверждение, и поэтому может рассматриваться как результат теоретических ограничений, в частности, как результат постулирования. Гедель предположил, или постулировал, что оно истинно. В отношении постулируемых утверждений (можно рассматривать как постулаты значения в смысле Карнапа) всегда возникает вопрос о том, как эти постулируемые предложения соотносятся с реальностью. Другими словами, истинно ли это предложение в реальности?

Сам Гедель в конце концов принял точку зрения, согласно которой это утверждение в реальности ложно, исходя из своей интуиции. Патнэм замечает, что хотя эту интуицию Геделя разделяют многие математики, имеет ли она смысл? (Надо заметить, что система, состоящая из утверждения о ложности «$V = L$» плюс теория множеств, непротиворечива, если непротиворечива сама теория множеств.) Какой смысл можно придать утверждению, что это утверждение ложно, кроме как апелляции к интуиции?

Имеет смысл утверждать, что ложность «$V = L$» «в реальности» может означать, что модель, в которой «$V = L$» справедливо, не будет намеренной моделью. Если, как уже было сказано, намеренная модель получается за счет теоретических ограничений, а «$V = L$» удовлетворяет таким ограничениям, тогда нам придется признать, что «$V \neq L$» не следует из теоретических ограничений. Это означает, что истинностное значение утверждения «$V = L$» подвержено относительности, о которой говорит Сколем. Это же относится к таким утверждениям, как аксиома выбора и континуум-гипотеза.

Относительность подобного рода поднимает серьезнейшие вопросы, поскольку трудно понять, как такие утверждения, как аксиома выбора или континуум-гипотеза не имеют определенного истинностного значения. Они сформулированы с учетом всех требований рациональности, и если все-таки принять позицию относительности в отношении подобных утверждений, тень сомнения упадет и на само понятие рациональности. Это будет означать, что на некотором этапе развития математики мы можем сформулировать с первого взгляда рациональные утверждения, которые таковыми не окажутся при более тщательном анализе.

Вопрос можно переформулировать следующим образом. Если мы не знаем истинностного значения, скажем, аксиомы выбора, и оно не может быть решено путем установления конвенции на этот

счет (которые есть часть теоретических ограничений), то принятие аксиомы поднимает вопрос о рациональности. Патнэм приводит следующий пример. Пусть некоторая внеземная цивилизация имеет такую математику, в которой аксиома выбора отвергается. С точки зрения земной математики, принимающей эту аксиому, внеземляне, очевидно, делают ошибку, и очевидно, их математика иррациональна. Этого слишком сильного заключения можно избежать, если не считать, что аксиома выбора не является частью нашей рациональности. Но если она таковой вряд ли является, тогда придется все-таки признать относительность теоретико-множественных понятий в духе Сколема. Это означает, что не существует одной выделенной рационально приемлемой теории множеств, и в этом смысле принятие любого решения относительно истинностного значения аксиомы выбора или континуум-гипотезы есть акт иррациональный.

Обсуждаемые примеры неопределенности указания относятся к теории множеств. Но эта дисциплина претендует на описание внечувственной реальности, и поэтому может возникнуть вопрос, в какой степени мы должны считать, что семантика теории множеств должна быть идентичной семантике физической теории. Другими словами, должны ли мы считать, что семантика абстрактных объектов должна быть семантикой в смысле Тарского? Действительно, использование сингулярных терминов в теории означает, что абстрактные объекты указываются этими терминами, и квантификация над ними приводит к знаменитому критерию Куайна «быть значит быть значением переменной». Но какой смысл имеет указание на абстрактные объекты, если они лишены пространственно-временной локализации? Если у нас есть сомнения в идентичности семантик для физических объектов и абстрактных объектов, то можно предположить, что неопределенность, описанная Патнэмом, является аномалией семантики абстрактных объектов.

Однако Патнэм аргументирует, что апелляция к эмпирическим объектам не устраняет этой неопределенности. В частности, физическая наука не фиксирует единственной «намеренной интерпретации» для словаря теории множеств, и не ограничивает таких интерпретаций для того, чтобы устранить неопределенность истинностных значений теоретико-множественных предложений.

Т. Бейс дает четкое объяснение того, каким образом Патнэм ухитряется связать физическую теорию с теорией множеств[33]. Начина-

[33] Bays T. *On Putnam and His Models* // J. Philosophy. — 2001. — Vol. 98, N 7.

ется этот аргумент с описания теоретической возможности такого взаимодействия. Предположим, что мы имеем машину, делающую измерения каждые три секунды. Она дает тогда результаты в виде 0 и 1, и предположим, что машина ухитряется работать *бесконечный* период времени и дает бесконечную последовательность измерений. Теоретически последовательность 0 и 1 могла бы «кодировать» неконструктивное множество, т.е. множество, которое живет в V, но не в L. В этом случае может показаться, что сама природа ухитряется фальсифицировать гипотезу $V = L$. Но для обоснования воздействия физической науки на интерпретацию теории множеств требуются более точные аргументы.

Эти аргументы включают доказательство очень важной для целей всей программы Патнэма теоремы[34]. Эта теорема (у Патнэма она фигурирует как Теорема 1) гласит: ZFC плюс $V = L$ имеет ω-модель, которая содержит любое счетное множество действительных чисел.

Далее, утверждает Патнэм, пусть OP будет счетной совокупностью действительных чисел, которая кодирует все измерения, которые человек когда-либо может сделать. По теореме 1, имеется модель ZFC плюс $V = L$, которая содержит OP. Так как эта модель удовлетворяет ZFC, она должна быть «намеренной моделью», и поскольку она удовлетворяет $V = L$ и OP, она учитывает проблему измерения, которая обсуждалась выше.

Поскольку единственные ограничения на интерпретацию теоретико-множественного словаря приходят из формальной структуры наших научных теорий (включая явные аксиомы теории множеств) и из физических измерений, существует такая интерпретация, в которой $V = L$ оказывается истинной. Но Патнэм предполагает, что имеется *некоторая* интерпретация теории множеств, — опять-таки, интерпретация, совместимая с остальными нашими научными теориями и со всеми физическими измерениями, которые мы могли бы сделать, — в которой $V = L$ окажется ложной.

Таким образом, мы имеем два следующих утверждения:

(1) Ничего другого, кроме теоретических и операциональных ограничений не может фиксировать «намеренной интерпретации» языка теории множеств.

(2) Не существует «намеренной интерпретации» языка теории множеств.

[34] Putnam H. *Models and Reality*. — P. 6—7.

Наконец, поскольку различные, равно «намеренные» интерпретации теории множеств расходятся в отношении истинностного значения предложений типа $V = L$, для таких предложений просто не существует определенных истинностных значений. По словам Патнэма, «они просто истинны в одних моделях и ложны в других».

Такова в целом структура аргумента Патнэма. Цель ее состоит в демонстрации, что теоретико-множественный язык семантически неопределенен. Для достижения этой цели мы сперва замечаем, что аксиомы теории не определяют единственной интерпретации теоретико-множественного языка. Далее мы наблюдаем, что наполнение научной информацией, т.е. физическими теориями и измерениями (теоретическими и операциональными ограничениями) не улучшает ситуации. Наконец, мы замечаем, что различные «намеренные интерпретации», совместимые с нашими теоретическими и операциональными ограничениями, различаются в отношении истинностного значения предложений $V = L$, и заключаем, что эти значения, сами по себе, неопределенны.

Бейс показал, что теорема 1 является ошибочной[35]. Мы не входим здесь в детали этой аргументации, но укажем, что на самом деле Патнэм имеет в виду не систему ZFC, а более мощную систему аксиом. Действительно, рассмотрим просто *форму* теоремы 1. Для любого счетного множества действительных чисел X имеется ω-модель M такая, что M семантически дает $ZF + V = L$ и $X \in M$. Так как любая модель $ZF + V = L$ есть также модель ZFC, теорема 1 влечет, что существует модель ZFC. И так как это, в свою очередь, влечет, что ZFC непротиворечива, теорема 1 влечет также непротиворечивость ZFC. Однако по второй теореме Геделя о неполноте непротиворечивость ZFC не может быть доказана внутри самой ZFC. Поэтому теорема 1 не может быть доказана внутри теории множеств, с которой он работает. Так что аргумент Патнэма, основанный на теореме 1, не проходит.

Далее Бейс замечает, что доказательство Патнэма можно было бы восстановить, если принять существование недостижимых кардинальных чисел. Но такая теория множеств выходит за пределы общепринятой аксиоматической теории множеств. И если такая сильная система позволяет доказать теорему 1, которая, в свою очередь, свидетельствует в пользу неопределенности семантики, тогда это будет скорее аргументом против такой системы, чем аргументом в ее пользу.

[35] Bays T. *On Putnam and His Models*.

Столь сильные отклонения в программе Патнэма сводят на нет его усилия. Действительно, Патнэм стремится к получению модели $ZFC + V = L$, которая удовлетворяет всем теоретическим и операциональным ограничениям. Теорема 1 и призвана дать такую модель. Но коль скоро теорема 1 доказывается в рамках более сильной аксиоматической системы (с недостижимыми кардинальными числами), мы можем рассматривать ситуацию как поиски Патнэмом модели, которая удовлетворяет $ZF + V = L$ плюс некоторое дополнение (по крайней мере, аксиома о существовании недостижимых кардинальных чисел), но как раз такой модели Патнэм не имеет.

Такая ситуация демонстрирует различие в позициях между Патнэмом с его тезисом о неопределенности семантики и его противниками, отвергающими этот тезис. В самом деле, последние вряд ли примут более сильную теорию, чем стандартная теория множеств. Но даже философы принимают эту более сильную теорию, тогда «теоретические ограничения» этих философов отличаются от тех ограничений, которые имел в виду Патнэм при доказательстве своей теоремы 1.

Приведенная аргументация демонстрирует тезис о том, что мы имеем дело с еще более сильной версией «посылки принцессы Маргарет» — дело не только в том, что надо еще убедить философов в выводах, как будто следующих из технических результатов. Сами математические результаты оказываются ошибочными, а ведь на основе этого результата строится целая эпистемологическая программа. На кону стоит не только программа обоснования «внутреннего реализма», но и сама возможность апелляции к техническим результатам при конструировании философских обобщений. Поэтому имеет смысл вернуться к анализу соотношения основных философских и математических тезисов Патнэма.

В обосновании неопределенности указания терминами научной теории обсуждение теоретических и операционных ограничений имеет первостепенную важность. Что собственно включает понятие «теоретических» ограничений? По Патнэму, ограничения на наше видение мира могут вноситься математикой, естественными науками и философией, и мы считаем, что теоретические ограничения не фиксируют единственной намеренной интерпретации. Но может быть, есть какие-то другие средства такой фиксации? Но здесь Патнэм твердо заявляет в своем тезисе (2), что ничего, кроме теоретических и операциональных ограничений не может фиксировать намеренной интерпретации, а этого они как раз и не делают.

Следует более четко подчеркнуть место понятий теоретических и операциональных ограничений в теоретико-модельном аргументе. Философская цель Патнэма состоит в опровержении так называемого метафизического реализма, т.е. представления о независимой от сознания реальности. Опровержение проходит по схеме доказательства от противного[36].

Доказательство начинается с простых философских посылок:

Посылка 1. Мир состоит из объектов, существующих независимо от сознания.

Посылка 2. Наши утверждения о мире выражают позицию реализма о независимой от сознания реальности.

Далее, в ход идут «математические аргументы» с использованием теоремы Левенгейма — Сколема, в частности, появляются как раз те самые теоретические и операциональные ограничения.

Посылка 3. Одних лишь теоретических и операциональных ограничений недостаточно для фиксации определенного отношения указания между терминами нашего языка и независимой от сознания реальности.

Посылка 4. Нет ничего другого во вселенной, что (в добавление к теоретическим и операциональным ограничениям) могло бы фиксировать отношение указания к независимой от сознания реальности.

Заключение. Наши утверждения семантически неопределенны, т.е. есть ситуация неопределенности указания.

Поскольку заключение абсурдно, следует отвергнуть философские посылки 1 и 2.

Однако, что же все-таки такое теоретические и операциональные ограничения? Ведь можно предположить, что их введение представляет собой ad hoc маневр Патнэма для обоснования своего тезиса «сколемизация всего», поскольку описание их очень расплывчато, и под него можно подставить практически все что угодно. И действительно, как замечает Бейс, каждая кажущаяся интерпретация

[36] Anderson D. *What Is the Model-theoretic Argument?* // J. Philosophy. — 1993. — Vol. 90, N 6. — P. 312—313.

оказывается, при тщательном рассмотрении, специальным случаем «теоретических и операциональных ограничений». Больше того, привлечение рассмотрений, которые могли бы угрожать привилегированному положению теоретических и операциональных ограничений, парируется Патнэмом с помощью аргумента, который обрел название «еще одна теория». Так, многие рассматривают причинную теорию указания (ПТУ) в качестве контрпримера теоретико-модельному аргументу Патнэма, потому что причинная теория не допускает неопределенности указания. Аргумент «еще одной теории» состоит тогда в следующем[37]:

Причинная теория указания должна быть совместима с теорией T, к которой применим теоретико-модельный аргумент, или даже быть частью этой теории. В любом случае, если к теории T будет добавлена ПТУ, тогда получается «еще одна теория» $T \cup$ ПТУ, к которой опять-таки применим теоретико-модельный аргумент. Именно этим приемом достигается необходимая гибкость в понимании теоретических и операциональных ограничений, ответственных за неопределенность указания. Но всегда ли добавление дает «просто еще одну теорию», которая также не фиксирует указания терминов?

Бейс отмечает, что в этом отношении аргумент «просто еще одна теория» упрощает ситуацию. На самом деле следует различить *описание* особенностей модели, которое делает ее «намеренной интерпретацией», и просто *добавление новых предложений* к выполняемой модели, для того чтобы считать это намеренной интерпретацией. Одно дело, когда при некоторых теоретических ограничениях, в частности, при определенной системе аксиом меняется семантика, результатом чего может быть ограничение класса структур, считаемых моделями. Другое дело, когда к старой системе добавляются новые аксиомы, которые требуют интерпретации. Когда Патнэм говорит о «просто еще одной теории», подверженной неопределенности, он имеет в виду добавление новых аксиом. Между тем выделение намеренных интерпретаций, т.е. фиксация указания, делается путем описания, например, при наложения требования о транзитивности моделей (тогда все нетранзитивные структуры не будут намеренными).

Конечно, Патнэм не будет считать введение ограничения транзитивности некоторым описанием уже существующей ситуации.

[37] Douven I. *Putnam's Model-Theoretic Argument Reconstrued* // J. Philosophy. — 1999. — Vol. 96, N 9. — P. 483.

С точки зрения реализма действительно существуют намеренные модели, и разговор о транзитивности только описывает уже существующую ситуацию. Между тем вопрос как раз и состоит в том, чтобы решить, кто прав — реалист или «внутренний реалист», и поэтому ограничение транзитивности есть только предположение и не больше.

Таким образом, с точки зрения Патнэма недопустимо использовать семантически неопределенный язык для описания намеренных интерпретаций. Но собственно говоря, почему этого нельзя делать? По Патнэму, реалист не может предположить истинным утверждение о существовании свойства транзитивности моделей, потому что этот самый вопрос стоит на кону. Бейс полагает, что тут с видным логиком Патнэмом сыграла злую шутку та самая логика, а именно, логика условных утверждений. Вопрос состоит в том, можем ли мы принять одновременно теорию моделей Патнэма и семантическую определенность математического языка, потому что постановка проблемы имеет форму:

Теория моделей Патнэма $\Rightarrow$ Семантическая неопределенность

или

Теория моделей Патнэма $\Rightarrow$ $\neg$Семантическая определенность

В этом смысле нет ничего странного в позиции реалиста, предполагающего правильность как теории моделей Патнэма, так и семантическую определенность языка, для дальнейшего исследования, не ведет ли это предположение к противоречию. Так что вполне допустимо изменение семантики, в результате которого новая теория не подпадает под неопределенность.

7. Интерпретация и понимание

По мнению Я. Хакинга, «сколемизация всего» вряд ли проходит, поскольку следствия теоремы Левенгейма — Сколема касаются только тех теорий, которые формализованы в языке первого порядка, в то время как естественный язык может быть формализован в лучшем случае в языке второго и высших порядков. Патнэм делает вполне корректное обобщение в рамках языка первого порядка, обобщение, применимое к любому универсуму объектов, к тем же кошкам и вишням. Действительно, если взять в качестве аксиом все истины об этих объектах в терминах языка первого порядка, то какую бы интерпретацию мы ни выбрали, всегда будут ненамеренные интерпретации. Если мы выбираем только два рода объектов — кошек и вишни — и используем короткий список истин, мы можем отобразить намеренную интерпретацию о кошках на ненамеренную интерпретацию о вишнях. Таким образом, для языка первого порядка будет справедлив тезис Патнэма, согласно которому: «Ни одна точка зрения, которая фиксирует только истинностные значения целостных предложений, не может фиксировать референты, даже если она определяет истинностные значения предложений в любом возможном мире»[38].

Безусловно, парадоксальность аргументации Патнэма не исчезает, даже если он апеллирует к математической теореме. Я. Хакинг отмечает следующие аспекты неправдоподобности подобного рода обобщений. От абстрактной теоремы Патнэм переходит к таким предложениям, которые находятся вне сферы логики. При этом Патнэм «странным образом» ссылается на Виттгенштейна, согласно которому значения выражений не могут быть исчерпывающим образом заданы правилами. Но обобщение математической теоремы до уровня обыденного языка может быть просто схоластическим занятием.

Однако есть и более фундаментальные возражения против тезиса Патнэма, согласно которому тотальное использование языка фиксирует единственную «намеренную интерпретацию» не в большей степени, чем это делает любая аксиоматическая система, и поэтому требуется еще и «понимание». Но что представляет собой понимание или некоторого рода объяснение? П. Бенацерраф предлагает другое направление в проблеме соотношения сколемовского аргумента и апелляции к языковой практике[39].

Любое объяснение должно состоять из дополнительных слов, а сами эти слова нуждаются в интерпретации. Что, собственно, предлагает в этом случае Патнэм? Он хочет рассматривать любое объяснение как неинтерпретированное расширение уже деинтерпретированной теории. Цель подобного подхода ясна — Патнэм при этом стремится получить новую теорию, для которой будет возможно прежнее изобилие интерпретаций. Сама идея Патнэма заключается в необходимости какого-то рода объяснений нашей практики. Но практика тут может пониматься двумя различными способами. Речь

[38] Putnam H. *Reason, Truth and History.* — P. 33.
[39] Benacerraf P. *Skolem and Sceptic.* — P. 85—113.

может идти о понимании того способа, которым практика определяет значение математического языка. Или же речь может идти о понимании того, как значение определяется употреблением языка вообще. Моя идея состоит в том, что эти два вопроса нельзя путать и они требуют отдельного рассмотрения. И то, что Патнэм объединил эти вопросы, никак не способствует разрешению собственно проблем, связанных с пониманием математического языка. Другими словами, нужен «развод» между философией языка и философией математики.

Что касается математического языка, то можно согласиться с Патнэмом, что детерминанты математического значения содержатся в нашем использовании математического языка. Но, как замечает Бенацерраф, не ясно, почему, по Патнэму, это использование будет как-то «схвачено» аксиомами? Или же всякий раз будет обеспечивать следующего кандидата на сколемизацию тем, что добавленное объяснение должно лишаться интерпретации и добавляться в качестве аксиом к теории первого порядка, которая также лишена интерпретации.

В результате подобной критики Бенацерраф приходит к очень важному выводу: «Математическая практика отражает наши интенции и контролирует наше использование математического языка такими способами, которые могут не осознаваться нами в любой заданный момент и которые превосходят то, что мы точно устанавливаем в любом заданном объяснении»[40]. Это обстоятельство мы могли бы назвать «иррациональностью» в математике. Наше использование математических терминов не «схватывается» аксиомами и нуждается в дополнительном объяснении. Это дополнительное объяснение представляет собой теорию того, как употребляется математический язык, и само это объяснение может нами не осознаваться. Чем это не «иррационализм»?

Однако такая постановка вопроса упирается в то, является ли вопрос о значении математических терминов и, стало быть, об объяснении математической практики вопросом об объяснении употребления языка. Далее мы изложим некоторые сомнения в этом отношении, и тогда перед нами встанет совершенно ясная дилемма: или развод философии языка и философии математики, или же признание «иррационализма» в математике. Далее мы опишем именно эту дилемму.

Обобщение «сколемизма» в стиле Патнэма стало возможным благодаря общему фону в аналитической философии языка, заключающемуся в критике традиционного понятия значения. Атаку на

[40] Ibid. — P. 111.

это понятие предприняли Куайн, Патнэм и Крипке, каждый со своей точки зрения, но всем их аргументам свойственно общее, хотя радикальный отказ от традиционной теории значения может привести к столь же радикальным следствиям в философии вообще. Действительно, понятие значения неразрывно связано с понятием истины. Истинность утверждения зависит от значения (как всего предложения, так и входящих в него слов). И если принять заключение вышеупомянутых философов о том, что не существует определенного (в предельном случае — однозначного) значения терминов языка, то что тогда будет детерминантом истины утверждения?

Как можно реагировать на радикальное устранение понятия определенного значения, следующее, по предположению, из распространения математического результата на язык вообще? П. Бенацерраф предлагает рассматривать аргументы в отношении классического понятия множества как проявление традиционных скептических аргументов. И как таковые они значимы только тогда, когда они обобщаются и приобретают статус «обобщенного сколемизма».

Общим для аргументов Куайна, Патнэма и Крипке, как утверждает К. Райт, является то, что все они представляют собой версии идеи позднего Виттгенштейна о том, что значение не может превзойти употребления. Так, согласно тезису о неопределенности радикального перевода Куайна при определении значения выражения, переводчик будет иметь дело с неопределенным числом взаимно несовместимых гипотез относительно значения. И каждая из этих гипотез будет адекватной для имеющихся данных, так же как будет адекватной при значительном расширении этих данных[41]. Известная реконструкция скептического аргумента Виттгенштейна, предложенная Крипке, сводится к тому, что предыдущее употребление выражения не может рационально ограничить его интерпретации до единственной. Например, указание на любое количество конкретных яблок согласуется с неопределенно многими способами последующего использования слова «яблоко». Стало быть, определенность значения выражения следует искать в другом месте[42].

Использование идеи Виттгенштейна о том, что значение не может превзойти употребления, напрямую связано с идеей рациональности. Если Виттгенштейн прав (так же как правы его интерпретаторы), то значение не содержит чего-то большего по сравнению

[41] См.: Quine W. *Word and Object.* — Cambridge: University Press, 1964.

[42] См.: Kripke S. *Wittgenstein on Rules and Private Language.* — Basil: Blackwell, 1982.

с тем, что можно получить просто в результате рационального размышления по поводу употребления выражения. И никакое число данных по поводу употребления выражения, и никакая, в том числе аксиоматическая, характеристика этого употребления не могут рационально сократить число интерпретаций выражения до одной.

Скептические аргументы в отношении значения были направлены против платонистских тенденций в теории значения, потому что противоположностью идее Виттгенштейна было бы признание того, что значение превосходит употребление. Но в этом случае значение не будет доступно рациональному критерию, который значим при употреблении выражения, а это, в свою очередь, означает, что значение должно быть доступно каким-то прямым образом. Современная эпистемология не признает подобного рода прямого доступа к значению, поскольку при таком доступе оно остается чисто субъективным и личным. Как скептический вызов сколемовского толка, так и платонистский аргумент представляются неудовлетворительными. Однако нелегко найти контраргументы в случае скептического вызова. Во-первых, у разных критиков классической теории значения имеются существенные различия в аргументации и трудно найти общие контраргументы. Во-вторых, не ясно, в какой степени скептические аргументы, являющиеся обобщением математических результатов, значимы для более общего случая языка.

Вернемся к оценке Бенацеррафом патнэмовской идеи объяснения, которое требуется в дополнение к аксиомам, чтобы «схватить» концепцию множества. Патнэм предлагает добавлять в качестве добавляемого объяснения неинтерпретированные утверждения к деинтерпретированной системе, и совершенно оправданно предполагает при этом, что в результате получается система, вновь подверженная сколемовскому скептицизму. В качестве контраргумента Бенацерраф предлагает такое восприятие объяснения, которое не было бы интерпретацией. Здесь Бенацерраф также апеллирует к Виттгенштейну, который сделал следующее замечание: «...Существует такое понимание правила, которое является не интерпретацией»[43]. Так, если к аксиомам Цермело — Френкеля, по мысли Бенацеррафа, добавить объяснения по поводу намеренной концепции множества, то эти замечания могут иметь такую объяснительную силу, которая превосходит ограничения модели первого порядка в отношении определенности содержания концепции множества.

[43] Виттгенштейн Л. *Философские исследования. 201* // Философские работы. — М.: Гнозис, 1994. — Ч. 1. — С. 163.

Но, как замечает К. Райт, как из замечания Виттгенштейна, так и из мысли Бенацеррафа трудно понять, чем может быть объяснение, кроме как интерпретацией[44]. Таким образом, исходя из эпистемологических мотивов следует избегать платонистского примата значения над употреблением. Поэтому придется признать, что значение не может быть определено однозначно, если «единственными детерминантами являются рациональная методология и наибольшее число данных»[45]. Это означает, что значения математических терминов не могут быть определены однозначно, и не могут быть таковыми, если исходить только из рациональных соображений. Является ли это достаточным основанием для того, чтобы говорить об «иррационалистических» основаниях математики, трудно сказать, но одних только рациональных оснований явно недостаточно. Больше того, согласно Райту, понимание или объяснение выражения не может быть результатом единственного рационального решения проблемы интерпретации употребления термина.

Райт замечает, что сам Виттгенштейн полагал недостающим параметром в определенности языка человеческую природу, человеческую практику. Мы приобретаем способность участия в практике, и в такое приобретение вносят вклад не только наши рациональные способности, но также и субрациональная природа нашего мышления. Райт рассматривает эту субрациональную природу как определенную естественную склонность человека поддерживать определенные структуры суждения и его реакции на них.

Дополнительное объяснение, которое требовалось для определенности значения, не может быть чем-то инвариантным для всеобщности моделей теории, которая содержит объяснение. Оно, как и реакция на него, обусловлено не попытками рационально интерпретировать теорию, а совсем другими факторами. Это еще одно подтверждение обоснованности разговора об «иррационализме» математики.

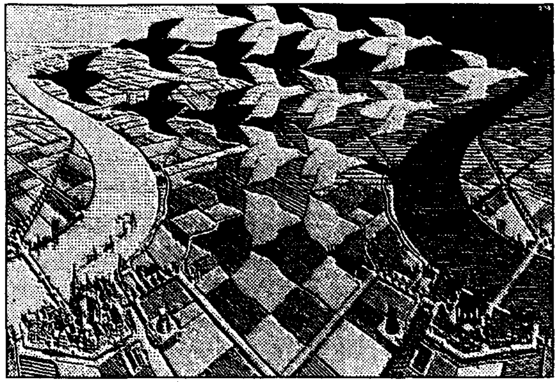
Как видно, все эти проблемы суть результат попыток апелляции от чисто математических результатов к естественному языку, поскольку центральными понятиями являются понятия однозначного указания и значения лингвистических терминов. Но как только мы обращаемся к философии языка, мы сталкиваемся с весьма многими эпистемологическими затруднениями, в частности с проблемой эпистемического доступа к математическим объектам. Как

[44] См.: Wright C. *Skolem and the Sceptic.* — P. 117—137.

[45] Ibid.

я утверждал ранее, подобного рода затруднений можно избежать, если избегать философских проблем, обусловленных спецификой математических объектов. Дж. Аззуни говорит, что математические термины должны пониматься аналогично эмпирическим терминам, и тогда заключение о структуре математических утверждений будет прямым следствием анализа языка математических теорий. Этот тезис Аззуни называет лингвистическим реализмом[46]. А все затруднения порождены метафизической инертностью математических объектов, которая не имеет прямого отношения к значению математических терминов. Поэтому имеет смысл развести в стороны позицию лингвистического реализма и философские проблемы указания и значения. Если этого не будет сделано, то тогда придется признать, что в значительной степени математические соображения не подлежат суду рациональных принципов. Другими словами, вряд ли можно безоговорочно применять идеи Виттгенштейна о механизме действия языка к анализу значений математических терминов.

[46] См.: Azzouni J. *Metaphysical Myths, Mathematical Practice.* — Cambridge: University Press, 1997.



ПРЕЛЮДИЯ К ГЛАВЕ 5

Между тем математики имеют тенденцию считать основные правила значимого логического вывода само собой разумеющимся обстоятельством. Иногда они считаются столь ясными, что нет нужды в их экспликации. Иногда предполагалось — и предполагается до сих пор — что Фреге и Рассел решили эту задачу раз и навсегда. А если они не сделали этого, то это сделал приспешник Гильберта Вильгельм Аккерман. Потому что именно он в 1928 году под присмотром Гильберта сформулировал впервые эту базисную часть логики (или она казалась таковой), так что каждый встречный с тех пор принимал ее как само собой разумеющееся обстоятельство. Это то, что теперь называется логикой первого порядка, кванторной теорией или предикатным исчислением (низшего порядка). Оно обычно представляется так, как будто является незначительной регламентацией выражений нашего обыденного языка — *все* и *некоторый*. Эта идея была поддержана использованием Хомским кванторной логики как главного средства его врожденных логических форм предложений естественного языка. Неудивительно, что логика первого порядка рассматривается как самая безопасная, непроблематичная корневая часть логики, и что языки, базирующиеся на ней, считаются естественным инструментом нашего нормального размышления и мышления...

Если в современной логической теории и аналитической философии и есть универсально принятая догма, то это утверждение о непроблематичном характере обычной логики первого порядка в качестве сердцевины логики. Один мой приятель философ сказал мне как-то при обсуждении логики первого порядка: «Если я не понимаю ее, я ничего не понимаю». И когда в другой раз я выразил некоторые сомнения относительно утверждения о том, что принятая логика первого порядка является истинной Sprachlogik (логикой языка), логикой естественного языка, один известный философ сказал: «Тогда в философии уже не остается ничего святого».

Я. Хинтикка. *Принципы математики ревизированные*

ГЛАВА 5

ЯЗЫК И ЛОГИКА

1. Функции логики

В *Principia Mathematica* (1911—1913) Рассела и Уайтхеда в основания математики была положена логика второго и высших порядков. В конце 20-х и начале 30-х годов логическим основанием математики стала логика первого порядка. Это обстоятельство иногда принимает форму почти исторического нарратива, например, как подведение итогов развития целого пласта науки — «исторический триумф логики первого порядка над логикой второго порядка»[1]. Простое техническое различение двух видов логики состоит в том, что в логике первого порядка кванторы пробегают над индивидными переменными, в то время как в логике второго порядка кванторы пробегают не только над индивидными, но также и над предикатными переменными. Однако при более близком рассмотрении оказывается, что два вида логики обладают различной идеологией в отношении фундаментальных целей как логики, так и оснований математики.

Поскольку обе логики претендуют на то, чтобы быть подлинными основаниями математики, следует иметь более точное представление о соотношении логики и математики, потому что многозначность термина «логика» делает многие представления о ее природе несколько расплывчатыми. Знаменитый логицистский тезис Фреге и Рассела, согласно которому математика сводима к логике (афористическое выражение Расселом тезиса — «логика есть юность математики, а математика — зрелость логики»), считается устаревшим, хотя в последнее время логицизм переживает вторую молодость[2]. Но утверждение, что математика есть логика, имеет и расширительный смысл, не имеющий прямого отношения к логицизму. В определенном смысле каждый язык имеет присущую ему логику, которая характеризует понятие следования в этом языке. В таком расширительном смысле любая математическая теория может рассматриваться как логика некоторого языка, если при этом рассматривать термины этой теории как логические частицы языка. Такая ситуация уже рассматривалась нами в предыдущей главе, когда обсуждался вопрос о том, считать ли отношение принадлежности в теории множеств логической частицей. При таком понимании логики ее концепции несут в себе содержание соответствующей теории[3].

В отношении содержания логической или математической теории существует несколько точек зрения. Рассел, сведя математику к логике, провозгласил к тому же и отсутствие содержания в логике, что автоматически переносилось и на математику. Обе дисциплины были объявлены лишенными содержания, в том смысле, что утверждения в этих науках являются тавтологиями. Эта идеология была принята *Венским Кружком*, но отвергнута, как и положено, большинством философов математики как крайне неправдоподобная точка зрения[4]. Однако постановка проблемы отсутствия содержания в логике оказалась крайне полезной при разработке и обосновании концепции логики первого порядка как оснований математики. Логика не имеет содержания в том смысле, что в аксиоматической теории логика не вводит с черного хода в математическую теорию никаких дополнительных предположений, чем достигается полная ясность относительно того, какие именно объекты принимаются данной аксиоматической теорией[5].

[1] См. оглавление работы: Shapiro S. *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-order Logic.* — Oxford: University Press, 1991.

[2] Среди работ, в которых разрабатывается подход к основаниям математики в духе Фреге, можно указать Wright C. *Frege's Conception of Numbers as Objects.* — Aberdeen: University Press, 1983; Hale B. *Abstract Objects.* — Basil: Blackwell, 1987. Как это ни парадоксально, к этому направлению можно причислить и самого видного номиналиста наших дней X. Филда, который полагает, что вся математика есть консервативное расширение над логикой (Field H. *Is Mathematical Knowledge Just Logical Knowledge?* // Philos. Rev. — 1984. —Vol. 93, N 4.

[3] Jane I. *A Critical Appraisal of Second-Order Logic* // History and Philosophy of Logic. — 1993. — Vol. 14. — P. 67—86.

[4] Наиболее интересной разработкой проблемы относительно содержательности логических истин в последние три десятка лет является применение к философским проблемам математики аппарата дистрибутивных нормальных форм логики первого порядка Я. Хинтикки. См.: Hintikka J. *Logic, Language Games and Information.* — Oxford: Clarendon Press, 1973.

[5] К сожалению, здесь ситуация не так проста, поскольку статус таких аксиом, как аксиома бесконечности или аксиома выбора крайне не ясен.

Логика первого порядка не имеет содержания, по крайней мере в том смысле, что она служит лишь обеспечению правильного перехода от посылки к заключению в математическом размышлении, и этот переход происходит по вполне ясным правилам, относящимся к использованию логических констант. В этом отношении логика второго порядка гораздо менее ясна, потому что нет такого множества правил, которые бы дали все ее правильные результаты. Другими словами, логика первого порядка обладает полнотой, в то время как логика второго порядка неполна. Выразительные возможности логики второго порядка в качестве оснований математики намного богаче выразительных возможностей логики первого порядка. Тем не менее, по существующим ныне канонам, основания математики представляют собой логику первого порядка плюс аксиоматическая теория множеств. Для того чтобы понять парадоксальность сложившегося положения, следует рассмотреть более тщательно, каковы различия этих двух видов логики.

Фундаментальным понятием логики является понятие следования, которое призвано эксплицировать наши интуитивные представления о том, как следует совершать переход от одного утверждения к другому. Неявной посылкой интуитивных представлений выступает уверенность в том, что понятие следования должно быть универсальным, отражая структуру человеческого мышления в самых разных дискурсах, от математики до философии. Однако это представление неверно уже потому, что логика как таковая может пониматься по-разному. В значительной степени это связано и с различным пониманием аксиоматического метода. В последнее время принято учитывать и то обстоятельство, что распространенное понимание логики как математической логики не принимает во внимание, что последняя является кодификацией математического теоретизирования, где в силу многих тонких особенностей математики фундаментальные понятия, имеющие хождение в философии (ввиду традиционной связи философии и логики), могут претерпеть значительную модификацию в математических контекстах. Другими словами, надо различать применение логики в математике и применение логики в обычном дискурсе.

Действительно, при использовании аксиоматического метода аксиомы часто имеют нелогический характер, будучи систематизацией определенной области математики, или же какой-либо научной отрасли. Если в естественных или гуманитарных науках подобного рода систематизация — едва ли достижимый идеал, то в математике она обретает плоть. Это в самом деле идеал, потому что, имея полную аксиоматическую систему в изложенном выше смысле, для получения нового знания требуется лишь извлечение логических следствий из аксиом. В некотором смысле такая программа является воплощением рационализма в философском смысле, поскольку, ограничиваясь логическими следствиями из аксиом, можно забыть о реальности.

Многие исследователи настаивают на том, что несмотря на свое присутствие в качестве аксиом теории множеств, эти аксиомы по сути являются логическими.

Тут есть одно противоречие, которое касается природы аксиом. Если говорить в духе рационализма о врожденном знании, то аксиомы должны быть просты в некотором смысле. Однако трудно ожидать, что полная система аксиом, представляющая какой-то фрагмент реальности во всем его богатстве, будет состоять из простых истин. В научной практике такого не случается, хотя и продолжает оставаться недостижимым идеалом. Так, уравнения Максвелла, из которых следует вся классическая электродинамика, определенно непросты. Представление в четырехмерном формализме Минковского упрощает их, но вряд ли это полученный результат более интуитивно понятен и ясен.

Содержательные или эмпирические истины, нашедшие отражение в аксиомах, могут там присутствовать явно или же скрыто. Явное присутствие имеет место при интерпретированных аксиомах, а неявное — в неинтерпретированных. Если все теоремы выводятся из аксиом чисто логическими средствами, тогда мы имеем дело с чисто логической системой аксиом, независимо от того являются ли аксиомы интерпретированными или нет. Все дело в значении логических констант, которое должно оставаться постоянным при любых интерпретациях нелогических констант. Ясно, что такое положение дел связано с желанием, чтобы правила вывода были рекурсивными или вычислимыми. Такое понимание функций логики является результатом взгляда, согласно которому логика представляет формальный каркас, содержащий отношения (следования) между содержательными утверждениями. «Здесь мы имеем пример роли логики, которая по вполне понятным причинам укоренилась в умах большинства моих сотоварищей философов, логиков и математиков. Логика есть изучение отношений логического следования, то есть отношений импликации. Ее конкретное проявление заключается в способности выполнять логические выводы, то есть выводить дедуктивные заключения. Я буду называть это *дедуктивной* функцией логики»[6].

Теперь следует различить аксиоматизацию нелогических систем, в которой аксиомы представляют собой содержательные утверждения, из которых выводятся другие содержательные утверждения, и аксиоматизацию логических систем, в которых имеют дело с логическими истинами. Несмотря на использование одного и того же слова (что часто случается в развитии науки и философии), между двумя его смыслами имеется фундаментальное различие. Аксиоматизация логики была изобретена специально как кодификация формальных правил, которые желательны при формализации математического дискурса. Это метод рекурсивного перечисления всех логических истин, которые только можно получить из определенных (логических) аксиом в некотором формальном языке. Различение имеет смысл и в связи с понятием намеренной интерпретации — нелогические аксиоматики имеют практически всегда намеренные интерпретации, в то время как вопрос об интерпретациях подобного рода для логических аксиоматик несколько искусствен.

Обычно считается, что цель логического вывода состоит в том, чтобы при переходе от утверждения к утверждению сохранялась истинность утверждений. Но одно дело — сохранять логические истины и совсем другое — сохранять содержательные истины. Содержательные истины представляют собой эмпирические истины о мире, т.е. фактические истины, в то время как логические истины имеют совсем другое концептуальное происхождение. Логика, будучи на протяжении многих веков связанной с метафизикой, легко благословляет вывод от материальной импликации $p \supset q$ (где p и q — содержательные утверждения) к модальному утверждению о необходимости $N(p \supset q)$, вывод, который не проходит в случае содержательных утверждений. В этом случае логический вывод не будет гарантировать сохранение истины. В некотором смысле вывод в нелогической системе является подлинным выводом, в то время как логический вывод — «сегментом рекурсивного перечисления истин».

Однако история логики и математики сложилась так, что это важнейшее различие было смазано, если можно так выразиться, контингентным событием создания логики первого порядка. Прежде всего, следует отметить, что аксиоматической системой, по поводу которой возникли дискуссии, которые, в конечном счете привели

[6] Hintikka J. *The Principles of Mathematics Revisited.* — Cambridge: University Press, 1998. — Chapter 1: The Functions of Logic. — P. 4.

к выделению в логике языка первого порядка, была аксиоматическая система теории множеств Э. Цермело. Поскольку усилиями Фреге и Рассела теория множеств рассматривалась как часть логики, содержательная аксиоматическая система Цермело как основание теории множеств (и всей математики) во многом была подобна аксиоматической логической системе. (Справедливости ради надо сказать, что различие, о котором мы сейчас говорим, родилось лишь совсем недавно, и во времена Цермело о нем не могло быть и речи.) Аксиоматическая система теории множеств Цермело была подвергнута резкой критике, и поэтому им (среди других исследователей) были предприняты значительные усилия для прояснения логики, которая лежит в основе теории множеств. С одной стороны, это были усилия по построению содержательной аксиоматики, а с другой — исходя из потребностей теории множеств, была выделена логика первого порядка как базовая логическая система. Это привело к отделению логики первого порядка от логик высших порядков, в которых допускается квантификация над такими абстрактными сущностями как предикаты, классы, множества и отношения.

Официально логика первого порядка родилась в 1928 г., когда вышла книга Д. Гильберта и В. Аккермана *Основы теоретической логики*[7], где этот фрагмент логики был сформулирован явным образом. Ряд обстоятельств сделал логику первого порядка средством логического вывода в математике. Во-первых, как видно из всех учебников, где излагается предикатная логика или кванторная логика (другие названия логики первого порядка), кванторные формулы используются как формализация обыденного языка. В. Куайн в ряде своих работ[8] назвал этот процесс «регламентацией обыденного языка», что впрочем неудивительно, поскольку для него, как уже говорилось ранее, «first-order logic is logic enough». Коль скоро обыденный язык подвергается относительно удовлетворительной формализации, логика первого порядка стала считаться естественным инструментом не только математического, но и обыденного мышления. Далее, «легко видеть, почему логика первого порядка кажется мечтой логика. Прежде всего эта логика допускает полную аксиоматизацию. С первого взгляда это кажется эффективным исполнением надежд Гильберта и других на непроблематичную и полностью аксиоматизируемую базисную логику. Существование такой

[7] Русское издание этой книги датируется 1948 г.

[8] См., например: Quine W.V.O. *Methods of Logic.* — MIT Press, 1960 и Quine W.V.O. *Word and Object.* — Cambridge: University Press, 1964.

логики было на самом деле одной из предпосылок того, что ныне известно под именем программы Гильберта — то есть, программы доказательства непротиворечивости некоторых математических теорий, в первую очередь арифметики и анализа, путем демонстрации того, что из их аксиом невозможно формально вывести противоречие. Если бы используемая при этом логика была неполна, тогда весь проект терял свой смысл, потому что могло бы существовать недоказуемое противоречие среди логических следствий этих аксиом. К счастью, Геделем в 1930 году была показана полная аксиоматизируемость логики первого порядка. Больше того, было показано, что логика первого порядка допускает все виды приятных металогических результатов, таких как компактность (бесконечное множество предложений непротиворечиво, если и только если, непротиворечивыми являются все его конечные подмножества), направленная снизу вверх теорема Левенгейма — Сколема (непротиворечивое конечное множество предложений имеет счетную модель), теорема отделимости (если σ и τ — непротиворечивые множества формул, но $\sigma \cup \tau$ противоречиво, тогда для некоторой «отделимой формулы» в S в стандартном словаре σ и τ мы имеем $\sigma \Rightarrow S, \tau \Rightarrow \neg S$), интерполяционная теорема (если $\Rightarrow (S1 \supset S2)$ нетривиально, тогда для некоторой формулы I в общем словаре $S1$ и $S2$, $\Rightarrow (S1 \supset \mathrm{I})$, $\Rightarrow (\mathrm{I} \supset S2)$), теорема Бета (неявная определимость влечет точную определимость), и так далее. Короче, логика первого порядка кажется не только базисной, но и настоящим раем логиков»[9].

Однако этот «рай» оказался несовершенным, поскольку значительное число математических концепций не может быть выражено в языке первого порядка. К таким концепциям относятся математическая индукция, вполне-упорядочение, конечность, кардинальность, мощность множества и др. Сразу же следует заметить, что все эти понятия выразимы на языке второго порядка. Между тем подобная функция является прерогативой логики, и в этом смысле логика второго порядка более предпочтительна для математического теоретизирования. Хинтикка называет такую функцию логики дескриптивной, и полагает, что «многие интересные феномены в основаниях математики становятся более понятными в свете трений, которые часто очевидны между дескриптивной и дедуктивной функциями логики в математике».

Дедуктивная функция логики реализуется в теории доказательств, а дескриптивная — в теории моделей. Рассмотрение условий истинности в теории моделей, или логической семантике, является более фундаментальным шагом в осмыслении природы логики, чем рассмотрение чисто дедуктивной структуры. Действительно, логические выводы основаны на значении входящих в них символов. Но трактовка логических связок на этом пути не дает нам опять-таки фундаментального понимания их природы. А вот в теории моделей мы можем получить такую трактовку, рассмотрев отношение предложения p к множеству $M(p)$ его моделей. Предполагаемый вывод от $p1$ к $p2$ в этом случае общезначим, если и только если, $M(p1) \subseteq M(p2)$. В этом смысле реальная логика, используемая в формализованном представлении мышления, основана на теоретико-модельном значении логических констант.

[9] Hintikka J. *The Principles of Mathematics Revisited.* — P. 6—7.

2. Две концепции логики

Различение двух описанных выше функций логики на самом деле является следствием двух различных логических традиций, возникших во второй половине XIX в.[10] Первая традиция восходит к работам Дж. Буля, Шредера и К. Пирса, которые усматривали основную мотивацию своих исследований в прослеживании сходства логики с алгеброй (что и привело к названию их дисциплины «алгебра логики», и названию всей традиции как «алгебраической»[11]). В частности, ими было обращено внимание на аналогии между алгебраическими операциями типа сложения и умножения и видами логического вывода. Общая цель этой школы состояла в разработке такого исчисления, которое было бы пригодно для использования в различных областях математики. Булева алгебра, положившая фактически начало этому направлению, представляет собой абстрактную алгебру, наряду с теорией групп или теорией полей. Обычно построение формальной системы начинается с выделения некоторого набора операций, анализ которых позволяет прийти к некоторой абстрактной структуре. В результате получается множество аксиом, некоторые из которых объявляются «законами мысли».

Вторая традиция восходит к Дж. Пеано и Г. Фреге, в работах которых главное место занимает концепция логики как основы для математики. Эта традиция имеет в качестве своих продолжателей

[10] Heijenoort J. van. *Set-Theoretical Semantics* // Logic Colloqium, 76. — Amsterdam, 1977. — P. 183—190.

[11] Sluga H. *Frege Against Booleans* // Notre dame Journal of Formal Logic. — 1987. — Vol. 28. — P. 80—98.

Рассела, Виттгенштейна, Венский Кружок, и пожалуй, самым стойким из современных ее сторонников является В. Куайн, который до конца жизни отрицал важность теории моделей. Основным положением этой традиции является убеждение, что метаязык невозможен, что нельзя выйти за пределы языка. Менее метафорично, это означает, что переинтерпретация языка невозможна, как невозможно выражение семантики языка в самом языке. Все, что можно сделать в логической теории, это опереться на синтаксические конструкции. Исходной целью этого направления была кодификация логики, лежащей в основе всего рационального дискурса. Такой универсальный язык должен быть применим во всех контекстах без снабжения в дальнейшем какой-либо интерпретацией.

Различие между двумя этими направлениями можно выразить следующим образом. Алгебраическое направление имело дело с алгебраическими структурами, а также с теми общими приемами и теоретизированием, которое было общим при изучении этих структур. Логистическое же направление (как часто его называют в связи с логицизмом Фреге и Рассела) имеет дело с универсальным теоретизированием, нерелятивизованным ни к какому контексту. Я. Хинтикка увязывает эти две традиции с фундаментально различными представлениями о природе отношения языка и его логики к реальности. Первая традиция, продолженная Левенгеймом, Геделем и Тарским, рассматривает язык как исчисление. Этот термин призван высветить те особенности подхода к логике, при котором возможны различные переинтерпретации языка, использование концепции истины, концепции метаязыка, и многих интуитивных теоретико-модельных представлений в систематической логической теории, например, идеи Э. Бета и Я. Хинтикки представления формальных доказательств как неудавшихся попыток построить контрпример[12]. Вторую традицию Хинтикка охарактеризовал так: язык как универсальный медиум. Именно универсальность устанавливает демаркацию между логистическим подходом и теорией моделей.

В техническом плане это проявляется следующим образом. При логистическом подходе для представления предикатов, отношений и индивидных констант используется понятие переменной. Индивидная область квантификации не ограничивается каким-либо специфическим образом, предикатные переменные охватывают область

[12] Hintikka J. *On the Development of the Model-Theoretic Viewpoint in Logical Theory* // Lingua Universalis versus Calculus Ratiocinator. — Kluwer Academic Press, 1997. — P. 104—139.

всех свойств, и то же для отношений. Поскольку главными «действующими лицами» являются переменные, логические связки и кванторы, все конструируемое в таком словаре по определению логическое. При теоретико-модельном подходе вместо понятия переменной используется понятие схематической буквы. Этим буквам придается различная интерпретация в различных моделях в теоретико-модельной семантике. Некоторые языки имеют интерпретации одновременно на нескольких моделях. Как видно, в логистическом направлении область значений переменных охватывает все объекты, в то время как в алгебраическом направлении переменные пробегают над неспецифицированной, но фиксированной областью объектов.

Кроме различий в области квантификации, два направления различаются между собой и способом понимания этой концепции. Фреге и Пеано предложили такое понятие, которое практически совпадает с современным понятием квантора. В частности, универсальный квантор Фреге — это квантор $\forall$, но при этом не предполагается ограничений на область квантификации. А вот определение Пирса скорее алгебраическое — экзистенциальный квантор определяется как теоретико-множественное объединение, а универсальный квантор — как теоретико-множественное пересечение. Идея представления экзистенциального квантора как дизъюнкции, а универсального квантора как конъюнкции в случае конечной области квантификации общеизвестна со времени Виттгенштейна. Но вот в случае бесконечной области следует разработать понятия бесконечных конъюнкции и дизъюнкции. Дальнейшие исследования Д. Гильберта обнаружили связь этого вопроса с аксиомой выбора и новым постулатом, который был им выдвинут, а именно «трансфинитной аксиомой». Эта новая аксиома позволила заменить кванторами бесконечные конъюнкцию и дизъюнкцию. В более общем плане следует сказать, что в теории инфинитарных языков логики изучают различные расширения языков первого порядка. Такого рода исследования распадаются на две ветви. Во-первых, как было упомянуто, логики вводят бесконечные дизъюнкции и конъюнкции. Во-вторых, разрабатываются теории с бесконечными последовательностями кванторов.

Следует упомянуть также, что ряд исследователей выделяют еще и третью концепцию логики, называя ее математической школой, к которой причисляют таких математиков, как Дедекинд и Гильберт[13].

[13] См.: Shapiro S. *Foundations without Foundationalism.* — P. 175.

Цель этого направления состоит в том, чтобы аксиоматизировать различные ветви математики. В противоположность алгебраическому подходу, который осуществляет аксиоматизацию сразу для нескольких систем, математический подход стремится осуществить аксиоматизацию конкретной области. Правда, надо оговориться, что Гильберт может быть причислен к любой из школ, что и делается различными исследователями. Больше того, этот математик является главным при аргументации в пользу выделения определенной концепции логики. (Например, для Хинтикки именно творчество Гильберта является образцом теоретико-модельного подхода к логике[14]).

Универсалистский подход более привлекателен для философов, поскольку он реализует многие из неявных представлений традиционной метафизики. В этом отношении уместно упоминание о тезисе Рассела, по которому метафизика многих философов в истории философии неявно определялась принятой ими логикой. Что касается понимания логики как исчисления, или теоретико-модельного подхода, то с точки зрения философов он в значительной степени является математической теорией. «Теория моделей есть математическая теория. Она начинает с аксиом, которые в большинстве работ по теории моделей понимаются интуитивно, и которым придается точная форма. Таким образом, теория моделей может быть сформулирована как аксиоматическая математическая теория точно в таком же духе, как и теория групп или теория чисел. Когда она сформулирована таким образом, она может рассматриваться как отрасль аксиоматической теории множеств»[15].

Однако взгляд на теорию моделей как чисто математическую теорию считается рядом исследователей результатом непонимания того, что собственно включено в теоретико-модельный подход[16]. Во-первых, каждая математическая теория развивает свою собственную теорию моделей. Во-вторых, именно результаты, скажем, в теории моделей модальной логики, теории моделей теории групп, теории моделей теории множеств являются вкладом в современную логику. Будь теория моделей только математической теорией, пришлось бы признать теорию моделей теории моделей, что выглядит неестественно.

[14] Hintikka J. *The Principles of mathematics Revisited.*

[15] Resnik M. *Frege and the Philosophy of Mathematics.* — Cornell: University Press, 1980. — P. 120—121.

[16] Hintikka J. *On the Development of the Model-Theoretic Viewpoint in Logical Theory.* — P. 116.

Хинтикка признает, что кое в чем Резник все-таки прав, поскольку теоретико-модельные аргументы опираются на теоретико-множественные предпосылки. Но это не делает теорию моделей частью теории множеств, потому что не существует такого множества аксиом теории множеств, которые были бы пригодны для всех теоретико-модельных построений. Что еще более важно, в то время как среди теоретиков в области теории множеств существуют значительные разногласия относительно того, какого рода все более сильные аксиомы теории множеств надо принимать, консенсус находится часто на пути теоретико-модельных рассмотрений.

Но все-таки, несмотря на такую аргументацию, остается еще след «посылки принцессы Маргарет». Не все философы готовы к тому, чтобы полностью математизированная теория заняла место того, что было прерогативой философских рассмотрений. Ранее мы уже упоминали случай, когда философы были в смятении от того, что все ключевые теоремы логики, которая по предположению имела дело с мышлением, оказались алгебраическими теоремами.

3. Логическое следование

Рассмотрим фундаментальное понятие логического следования, которое обычно считается универсальным для всех логических языков. Между тем это понятие имеет весьма различные характеристики в логике первого порядка и логике второго порядка. В определенном смысле две эти логики, или два логических языка отличаются друг от друга как раз понятием следования, свойственным каждому из языков. Глубинное различие заключается в разных целях логического исследования[17].

Прежде всего отметим, что имеются два понятия следования: семантическое, или модальное, и дедуктивное. Семантическое по-

[17] Поскольку логика второго порядка сейчас не в моде, аргументацию в ее защиту следует искать у структуралистов, которые свою программу оснований математики ставят в зависимость от важности для математической практики логики второго порядка. Я весьма обязан в своем изложении вопроса двум цитируемым ниже прекрасным работам структуралиста С. Шапиро. Больше того, как мне кажется, цели и задачи проблемно-ориентированного подхода к основаниям математики в значительной степени совпадают с аналогичными целями и задачами структурализма, по крайней мере в отношении понятия логического следования. При этом я не разделяю философскую позицию структурализма, и принимаю ее лишь в версии П. Бенацеррафа.

нятие следования определяется таким образом: предложение Φ есть логическое следствие множества Γ предложений, если невозможно, чтобы при истинности каждого члена Γ было ложным Φ. Другими словами, Φ истинно при каждой интерпретации, при которой каждый член Γ истинен. Обычно такое понятие следования полагается более интуитивным и используется в начальных курсах по логике (см., например, «канонический» текст С. Клини *Математическая логика*, где теория доказательств предваряется теорией моделей). Дедуктивное понятие следования определяется следующим образом: Φ есть следствие Γ, если имеется вывод Φ из посылок в Γ. Теорема полноты заключается в том, что предложение Φ первого порядка есть теоретико-доказательное следствие множества Γ предложений первого порядка, если и только если, Φ есть теоретико-модельное следствие Γ. Таким образом, для языка первого порядка семантическое следование совпадает по объему с дедуктивным.

Именно полнота логического исчисления, которая полагается некоторым «идеалом», является причиной отождествления двух понятий логического следования. Между тем семантическая концепция следования призвана выразить смысл, в котором теоремы некоторой математической теории представляют теорию об определенном роде объектов, — скажем, теоремы арифметики — теорию о натуральных числах. Аксиомы теории должны при этом характеризовать ту область математических объектов, которая была целью формализации. Другими словами, интерпретация формальной теории должна быть намеренной, и, больше того, все интерпретации подобного рода должны быть изоморфными, поскольку они говорят «об одном и том же». Только так гарантируется сохранение истины, которое является целью логического следования. Что касается дедуктивного понятия следования, то оно призвано прояснить, в каком случае математики полагают тот или иной вывод «законным», и делается это за счет выявления посылок заключения.

Соотношение двух видов логического следования, согласно Дж. Коркорану[18], таково: если Φ есть следствие Γ в семантическом смысле, то заключение Φ «уже логически неявно присутствует» в посылках. В определенном смысле заключение будет излишним, потому что при этом не получается новой информации. Это понятие резко контрастирует с дедуктивным, потому что есть возможность того,

[18] Corcoran J. *Gaps between Logical Theory and Mathematical Practice* // The Methodological Unity of Science / Ed. M. Bunge. — Dordrecht: D. Reidel. — P. 23—50.

что Φ неявно содержится в Γ, даже если дедукция Φ из Γ невозможна. Предположим, что доказано, что Φ есть семантическое следствие Γ, но доказательство включает в себя некоторое погружение структур Γ в более богатую структуру. Такая ситуация вполне обычна для математики. В подобных случаях может быть показано, что теорема есть семантическое следствие соответствующих аксиом второго порядка, но не дедуктивное следствие. В типичном случае теорема есть дедуктивное следствие этих аксиом вместе с некоторыми фактами относительно фоновой теории. Пусть Σ будут принципами фоновой теории, используемой для установления Φ. Тогда математик устанавливает $(\Gamma + \Sigma) \vdash \Phi$, и это показывает, что $\Gamma \models \Phi$ и, вероятно, что Φ не оправдано на основании только лишь Γ. Вероятно даже, что $\Gamma \nvdash \Phi$.

Приведенный пример показывает, что различие двух концепций логического следования тесно связано с различием логики первого порядка и логики второго порядка. Но последнее различие само по себе важно и имеет и другие корни. Действительно, при рассмотрении проблем оснований математики едва ли не самым важным обстоятельством является язык формализации содержательных математических утверждений. Речь идет о предпочтении языка первого порядка по сравнению с языками высших порядков, в частности, языка второго порядка. Стандартный взгляд по этому вопросу представлен знаменитым афоризмом В. Куайна: «Логика второго порядка является теорией множеств в овечьей шкуре» (см., например, его *Философию логики*[19]). Апелляция к «волку в овечьей шкуре» оправдана прежде всего с точки зрения онтологических допущений: неясные онтологические интенсиональные сущности языка второго порядка менее предпочтительны, чем явные экстенсиональные онтологические допущения теории множеств. Конечно, такие предпочтения оправданы лишь в той мере, в какой справедлив другой афоризм Куайна: «Нет сущности без тождества» (английский вариант еще более афористичен: «No entity without identity»). Следует напомнить, что в *Principia Mathematica* Рассела и Уайтхеда основания математики сформулированы в языках высших порядков, а четкое разделение ролей языка первого порядка и языков высших порядков можно обнаружить в работе *Основы теоретической логики* Гильберта и Аккермана 1928 г. Часто вокруг многих философских вопросов складывается «каноническое представление», иногда мало отвечающее реальному становлению вопроса. Поэтому желательно

[19] Quine W.V.O. *Philosophy of Logic.* — Prentice-Hall, 1970.

возвращение к истокам — либо путем чисто исторического рассмотрения, либо более тщательного анализа посылок этого представления. Именно такова ситуация с предпочтением языка первого порядка.

Окончательно важность языка первого порядка в качестве орудия построения оснований математики стала ясна после доказательства Геделем в 1930 г. теоремы полноты для логики первого порядка. Полнота и в самом деле является в высшей мере желательным свойством формальной системы, в которой формулируются содержательные истины математики. Отсутствие этого свойства у языка второго порядка подорвало претензии этого языка на то, чтобы быть базисным языком оснований математики. Сегодня стандартный взгляд заключается в том, что основания математики представлены логикой первого порядка и теорией множеств. Этот взгляд, как уже было сказано, связан со многими философскими представлениями. Одно из них опять-таки связано со стратегией постепенного увеличения онтологической тяжести утверждений в математике Куайна. Логика первого порядка не имеет экзистенциальных утверждений, а теория множеств постепенно вводит такие утверждения в математику. В *Теории множеств и ее логике* Куайн поначалу даже вводит виртуальные классы перед тем, как сделать подлинные экзистенциальные утверждения[20].

Эти утверждения о существовании все более обширных множеств становятся все более далекими от стандартов оправдания экзистенциальных утверждений, так что сама куайновская стратегия разделения на «экзистенциальную часть» теории множеств и «неэкзистенциальную часть» логики первого порядка оказывается сомнительной. Поэтому логика второго порядка с ее экзистенциальными утверждениями интенсиональных сущностей может оказаться не менее плодотворным основанием математики. К тому же появляются весьма интересные языки, которые не так-то легко классифицировать с точки зрения дихотомии «первый порядок / второй порядок». Так, «дружественная независимая логика», предложенная Я. Хинтиккой в качестве плодотворного орудия построения оснований математики, обладает выразительными возможностями логики второго порядка, представляя в то же время по сути своей логику первого порядка[21].

[20] Quine W.V.O. *Set Theory and its Logic.* — Harvard: University Press, 1963.

[21] См.: Hintikka J. *The Principles of Mathematics Revisited.*

4. Логика второго порядка

Таким образом, представляет интерес вопрос о том, может ли логика второго порядка служить в качестве основания математики. Вопрос этот особенно интересен в той связи, что одно из самых важных сегодня направлений в основаниях математики — структурализм — напрямую связано с логикой второго порядка, и основательность претензий структурализма на то, чтобы быть адекватной философией математики, напрямую зависит от того, является ли логика второго порядка адекватным орудием исследования оснований математики (см. по этому поводу работу С. Шапиро *Основания без обоснования*[22]).

Прежде всего следует отметить, что различие между экстенсиональными и интенсиональными сущностями не является решающим для разделения языков на порядки. Хотя интерпретированный язык называется «второпорядковым» или «высшего порядка», если его переменные пробегают над отношениями, пропозициональными функциями, свойствами, классами или множествами сущностей, над которыми пробегают переменные логики первого порядка, природа сущностей не имеет значения для характеристики логики второго порядка.

Отличительной характеристикой порядка языка является размер области квантификации. Язык второго порядка может быть получен добавлением к дедуктивной системе первого порядка расширения аксиом с кванторами типа $[X\,(\Phi(X)) \rightarrow \Phi(Y))$ и аксиомной схемы свертывания $\exists X\ \forall x\ (Xx \equiv \Phi(x))$ для каждой формулы Φ, не содержащей X свободно. Но основное различие языков первого и второго порядков заключается в семантике. Областью переменных первого порядка могут быть натуральные числа.

В стандартной семантике логики второго порядка переменные пробегают над совокупностью всех подмножеств области. Хотя для такой семантики все доказуемые утверждения являются истинными, в ней не проходят полнота и компактность. Все бесконечные структуры категоричны. Преимуществами логики второго порядка со стандартной семантикой являются ясность, соответствие интуиции. При фиксации области квантификации переменных первого порядка понятия «все свойства» или «все подмножества», играю-

[22] Shapiro S. *Foundations without Foundationalism: A case for second-order logic.*

щие решающую роль в основаниях математики, обретают твердый смысл. По этой причине многие считают, что логика второго порядка является более подходящим кандидатом для оснований математики, чем традиционный базис — логика первого порядка плюс теория множеств. А вот сторонники логики первого порядка утверждают, что понятие переменной, пробегающей над всеми свойствами фиксированной области, в высшей степени неясно и по этой причине логика второго порядка вряд ли может считаться хорошим базисом. Для разрешения этого спора требуется рассмотрение дополнительных аргументов в пользу логики второго порядка.

Во-первых, нужно понять, в каком смысле логика второго порядка является логикой. В общепринятом смысле слова логика абстрагируется от специфики рассматриваемого предмета, и представляет собой теорию о том, что истинно и что ложно. Если руководствоваться именно таким критерием, тогда под рубрику логики определенно попадают истинностные функции. Но вот введение кванторов усложняет критерий логики. Действительно, уже логика первого порядка требует кроме истины и лжи два дополнительных понятия — истинности предиката об объекте и самого объекта. В этом отношении логика второго порядка кажется даже более экономной, поскольку там требуется только еще одно дополнительное понятие — значение предикатной переменной. Таким образом, с точки зрения приведенного критерия логика второго порядка определенно является логикой не в меньшей степени, чем логика первого порядка. Действительно, раз уже в логике первого порядка допущено некоторое дополнение, нет никаких априорных возражений против дальнейших допущений и усложнений.

Однако в качестве главного возражения против логики второго порядка выдвигается обвинение в том, что упомянутое выше дополнение выводит эту самую логику из семейства логик вообще. Знаменитый (как и все афоризмы Куайна) афоризм «Логика второго порядка есть волк (теория множеств) в овечьей (логика) шкуре»[23] является скорее метафоричным, нежели точным выражением ситуации, сложившейся в отношении логики второго порядка. И поэтому буквальное толкование афоризма попросту неверно. Как отмечает, среди прочих, Дж. Аззуни[24], логика второго порядка не является, строго говоря, теорией множеств, если под последней подразумевается теория множеств первого порядка, поскольку модели для этих систем не совпадают. Действительно, как известно, теория множеств первого порядка имеет нестандартные модели, в которых «∈» не является отношением членства. Различие между логикой первого порядка и логикой второго порядка проявляется, если прибегнуть к терминологии Куайна, в онтологическом плане, имея в виду его критерий существования «Быть значит быть значением переменной». В случае одной переменной предикация Pa свойства P сингулярному термину a не предполагает, что выражение Pa имеет в качестве онтологических допущений объем предиката P. Онтологические допущения, как следует из критерия существования, определяются областью квантификации. Именно по этой причине отношение членства «∈» не предполагается в использовании нотации «Pa». Но как только мы переходим к квантификации предиката, предикация становится равносильной отношению членства, и больше того, по сути становится логической константой. В определенном смысле логика второго порядка действительно становится равносильной теории множеств[25].

Дело в том, что понятие стандартной модели для языка второго порядка предполагает, что переменные для одноместного предиката должны пробегать над всеми совокупностями объектов в универсуме индивидов. Это предположение существенно, поскольку логика второго порядка не является рекурсивно аксиоматизируемой. Что касается рекурсивно аксиоматизируемых фрагментов, они будут представлять собой класс обобщенных моделей Генкина таких, что теоремы фрагмента и только они истинны для всех моделей этого класса. Но эти модели не являются стандартными. Если бы мы были ограничены рекурсивно аксиоматизируемыми системами, мы не могли бы сказать, что модели для оценки логической истины являются стандартными. Но это можно сделать, если синтаксическую операцию предикации представить в виде отношения членства (в виде логической константы) и позволить предикатной переменной пробегать над всеми подмножествами универсума индивидов. Таким образом, выражение $\exists F\ (Fa)$ вынуждает нас считать одним и тем же значения, которые принимает предикат, и указание сингулярным термином a. Суть аргументации Аззуни состоит в том, что логика второго порядка оказывается если не теорией множеств, то двухсортной первопорядковой теорией объектов и их классов. Теоретико-множественные модели языков второго порядка и интерпре-

[23] Quine W.V.O. *Philosophy of Logic.* — P. 66.

[24] Azzouni J. *Metaphysical Myths, Mathematical Practice.* — Cambridge: University Press, 1994. — P. 16.

[25] Ibid. — P. 17—18.

тации этих языков приписывают значениям предикатных переменных сущности одного сорта[26].

Так где же лежит различие между логиками первого порядка и второго порядка? Д. Босток замечает, что сам по себе факт, что в одной теории пишется Fa, а в другой теории — $a \in F$, означает лишь различие в нотации, что имеет место, скажем, в случае стандартной и польской нотации. Две логики могли бы различаться в отношении того, что считать правильно построенной формулой[27]. Действительно, в логике второго порядка такое соединение символов как ab или FG не считалось бы правильно построенной формулой, в то время как в первопорядковой теории множеств $b \in a$ или $G \in F$ являются правильно построенными формулами. Правда, во избежание парадоксов такие формулы можно признать ложными, а то и вовсе отказать им в статусе правильно построенных формул. Так что различие между логикой первого порядка и логикой второго порядка лежит в их семантиках.

В частности, в двух этих случаях по-разному работает понятие общезначимости. Формальное определение общезначимости звучит одинаково для обеих логик: формула общезначима, если и только если, она истинна при всех интерпретациях входящих в нее символов. В это определение входит намеренная интерпретация логических связок. В логике первого порядка вводится специальная интерпретация кванторов, при которой они пробегают над всеми объектами. В логике второго порядка в дополнение постулируется специальная интерпретация для кванторов второго уровня, т.е. предикатных кванторов, которая обобщает все способы, которыми предикат может быть истинен для одних объектов, и ложен для других. Именно это дополнительное условие и создает различие между двумя логиками. Оно ответственно за то, что в то время как логика первого порядка может быть снабжена полным множеством аксиом и правил, логика второго порядка лишена этого. Кроме того, этот же факт ответствен за то, что многие важные понятия в логике первого порядка не определимы, и в то же время определимы в логике второго порядка.

Приведем иллюстрацию этого обстоятельства. Известно, что тождество неопределимо в языке первого порядка, т.е. если этот язык имеет нормальные модели, в которых «=» интерпретируется как тождество, тогда он также имеет и «ненормальные» модели, в которых «=» интерпретируется другим образом. В логике второго порядка мы имеем определение $a = b \leftrightarrow \forall F\,(Fa \leftrightarrow Fb)$, которое интуитивно правдоподобно. Таким образом, дополнительный вид квантификации в логике второго порядка придает ей большие выразительные возможности, но в то же время лишает ее компактности или конечной аксиоматизируемости. Как уже было сказано, те же выразительные возможности равносильны теории классов, представленной двухсортной теорией. Различие только лишь в онтологических допущениях, поскольку многие полагают логику второго порядка нейтральной в отношении онтологии, считая, что она избегает допущения классов как сущностей.

При сопоставлении логик первого порядка и второго порядка следует обратить внимание на то, в какой степени они естественны. Уже говорилось о том, что сторонники «регламентации обыденного языка» логикой первого порядка (например, Куайн) считают, что она покрывает огромную область структур обыденного языка. И только некоторые «тонкости», которые не по плечу логике первого порядка, требуют логики второго порядка. Но вот подобного рода «тонкости» играют огромную роль, скажем, в математике. Дедекинд показал, что постулаты элементарной арифметики натуральных чисел дают категоричные структуры (все модели этих постулатов имеют одну и ту же структуру, т.е. структуру натуральных чисел). То же сделал Кантор для действительных чисел. Но оба этих доказательства опираются на второпорядковое понимание этих постулатов, потому что известно, что никакое множество первопорядковых постулатов, которые имеют бесконечные модели, не может быть категорическим. Так что приемлемость этих доказательств ведет к признанию необходимости логики второго порядка.

Другой пример необходимости логики второго порядка таков[28]. Пусть имеется бесконечное число посылок типа

A не есть родитель *B*
A не есть родитель родителя *B*
A не есть родитель родителя родителя *B*
....
Из этих посылок следует заключение

A не есть предок *B*.

[26] Higginbotham J. *On High-Order Logic and Natural language* // Philosophical Logic / Ed. T. Smiley. — Oxford: University Press, 1998. — P. 8.

[27] Bostock D. *On Motivating Higher-Order Logic* // Philosophical Logic / Ed. T. Smiley. — Oxford: University Press, 1998. — P. 31.

[28] Ibid. — P. 36—37.

Такой вывод вполне значим для тех, кто понимает содержание понятие «предок». В логике первого порядка этот вывод не является значимым, поскольку логика первого порядка компактна. Компактность означает, что если утверждение следует из бесконечного множества посылок, тогда оно должно следовать из конечного подмножества множества этих посылок.

Одна из главных причин спора между сторонниками логики первого порядка и логики второго порядка заключается в том, возможно ли достижение категоричности, поскольку именно это свойство является главным признаком соответствия интуиции: формальная система должна описывать объективный мир математических сущностей. Логика второго порядка категорична, но, как уже было указано, многие полагают понятие переменной над всеми свойствами формально неточным. Однако вполне возможно сделать понятие переменной над всеми свойствами формальным, поскольку возможно построение некоторой версии аксиоматической теории, достаточной для формулировки стандартной семантики логики второго порядка. В такой версии можно доказать категоричность теории и многие существенные результаты теории множеств. Но формальная метатеория, в которой получается категоричность, сама может считаться теорией первого порядка. Следовательно, в ней проходит теорема Левенгейма — Сколема о нестандартных моделях, и категоричности больше нет. В пользу этого взгляда можно привести все те аргументы, которые традиционно приводятся при рассмотрении релятивизма в теории множеств, согласно которому одно и то же множество может иметь различную мощность в различных формальных системах.

Против этого сторонники логики второго порядка высказывают твердое убеждение, что метатеория, о которой идет речь, не может рассматриваться как неинтерпретированная теория с различными возможными моделями. Намеренная интерпретация этой метатеории — интуитивная семантика естественных языков, в которых формулируются содержательные истины математики. На первый план выступает область таких языков, а не понятие модели. Категоричность относится к естественному языку, а не к изоморфизму моделей в каждой интерпретации.

5. Релятивизм: Сколем vs Цермело

Ясно, что обсуждение проблем логики второго порядка в сопоставлении с аксиоматической теорией множеств сводится к тому,

какая из этих теорий лучше «схватывает» интуитивные или содержательные истины математики. Релятивизм, свойственный аксиоматической теории множеств, возникает из-за того, что в ее основе лежит логика первого порядка, для которой справедлива теорема Левенгейма — Сколема. Важно иметь в виду, что релятивизм, как он имеет место у Сколема, отнюдь не направлен специально против логики второго порядка. Потому что скептицизм относительно возможностей однозначного описания математической реальности применим к более широкому кругу проблем и вызывает к жизни гораздо больший круг проблем, чем проблемы логики второго порядка. Далее мы рассмотрим некоторые проблемы теории указания и теории значения, связанные с релятивизмом, а пока ограничимся сопоставлением логики первого порядка и логики второго порядка.

Релятивист может настаивать на том, что переменные логики первого порядка являются неинтерпретированными и могут существовать как стандартные, так и нестандартные интерпретации. В этом смысле возникает вопрос, что имеется в виду под «натуральными числами», если допустимы нестандартные интерпретации. Естественный ответ состоял бы в том, что на самом деле переменные первого порядка должны интерпретироваться интуитивно, а для более точной трактовки натуральных чисел пригодна аксиоматика Пеано в языке второго порядка, самым важным положением которой является аксиома индукции

$$(P0 \ \& \ \forall x\,(Px \rightarrow Ps\dot{x})) \rightarrow \forall x\ \mathrm{P}x.$$

С точки зрения релятивиста это ничего не дает, поскольку эту аксиому второго порядка можно рассматривать как аксиомную схему первого порядка и поэтому для такой аксиоматики можно дать разные модели с отличной друг от друга кардинальностью одних и тех же множеств. Попытка выделить из этого набора моделей «минимальную», которая бы отвечала намеренной интерпретации, проблематична. Единственный способ избежать такой проблематичности состоит в апелляции к тому факту, что указание на натуральные числа ясно и недвусмысленно и что все структуры арифметики изоморфны. Но вряд ли понятия «все свойства» или «все подмножества» удовлетворяют критерию ясности.

Таким образом, логика второго порядка не избегает релятивистских обвинений в неясности своих концепций. Но ответ на такого рода обвинения представляет собой задачу более общего плана, поскольку речь идет о релятивизме в отношении уже объектного языка. В историческом отношении любопытна полемика Сколема с Цермело в отношении возможностей аксиоматического представления теории множеств[29]. Аксиоматизация Цермело была формализацией второго порядка, в то время как Сколем пришел к выводу о том, что роль формализации может выполнить только логика первого порядка, но со всеми вытекающими из этой стратегии неприятностями типа релятивизма в понимании концепции множества.

Среди аксиом Цермело, по замечанию Френкеля и Бар-Хиллела, наиболее характерной является аксиома выделения (Aussonderungs). Именно этой аксиомой совершается радикальный отход от точки зрения, согласно которой каждому условию $F(x)$ соответствует некоторое множество s, такое что x $(x \in s \equiv F(x))$. Известно, что эта точка зрения ведет к парадоксам, и Цермело предложил применять операцию образования множеств предметов, обладающих некоторым свойством, к уже имеющимся множествам. Цермело делает два ослабления неограниченной аксиомы свертывания: множество не может задаваться независимо, а всегда должно быть выделено как подмножество уже заданного множества; кроме того, свойство, по которому множество выделяется, должно быть определенным. Понятие определенности является одним из наиболее дискутируемых понятий в философии математики и ее основаниях. В данном случае можно, следуя Сколему, полагать, что определенность означает формулу первого порядка. Более точно, эта аксиома у Цермело имеет вид: «Всякий раз, когда пропозициональная функция $P(x)$ определена для всех элементов множества M, M обладает подмножеством, содержащим те элементы, которые в точности являются элементами x из M, для которых $P(x)$ истинно».

При этом Цермело полагал пропозициональную функцию $P(x)$ определенной для области d, при условии, что для каждого элемента x из d, «фундаментальные отношения на области, посредством аксиом и универсально принятых законов логики, определяют без произвола, справедливо или нет $P(x)$»: Сколем, как уже было указано, сформулировал отделение как схему, как пример для каждой формулы языка первого порядка. Именно это легло в основу канонического представления.

Поскольку Сколем критиковал понятие определенности, Цермело предпочел дать ему аксиоматическую трактовку, результатом которой явилось определение в языке второго порядка: если $P(g)$

[28] Ibid. — P. 36—37.

[29] Skolem T. *Some Remarks on Axiomatized Set Theory*, 1922 // Heijenoort J., van. From Frege to Godel. — Harvard: University Press, 1967. — P. 290—301.

определенна для каждой пропозициональной функции g, тогда определенны будут $\forall f\,(P(f))$ и $\exists f\,(P(f))$. Цермело полагает базисными сущностями пропозициональные функции, поскольку кванторы второго порядка пробегают над ними. Сколем же считает, что понятия универсального и экзистенциального квантора в применении к пропозициональной функции неясны, и предлагает рассматривать пропозициональные функции аксиоматически. В этом случае аксиоматика будет первого порядка, а пропозициональные функции будут играть роль индивидов.

Шапиро полагает, что спор Цермело и Сколема в конечном счете упирается в два разных понимания того, как в математику вводятся новые сущности[30]. Один способ — это постулирование сущностей, которые составляют некоторую реальность. Аксиоматика и формализация при описании этих сущностей призваны описать уже существующие объекты, и поэтому какие-то другие интерпретации аксиоматики и формализации считаются несущественными. Второй способ состоит в задании аксиом, и сущности, удовлетворяющие этим аксиомам, существуют. В этом случае вопрос заключается в том, какого рода аксиоматика и формализация используются. Если это аксиомы первого порядка, то тогда невозможно протестовать против нестандартных моделей и, естественно, невозможно выделить какую-то предпочтительную модель. Такое неявное задание сущностей приводит к неизоморфности моделей и некатегоричности теории. Если это аксиомы второго порядка, то тогда получается порочный круг, поскольку объекты «определяются» с помощью тех же самых объектов.

Таким образом, различие между логикой первого порядка и логикой второго порядка упирается в различное понимание конструирования математических объектов. Одна из версий антиреализма связывает напрямую конструирование математического объекта со значением математического термина, который призван указывать на соответствующий объект. С другой стороны, математическая практика может быть отождествлена с употреблением математического термина. Согласно идеям позднего Виттгенштейна, значение термина не может превзойти его употребления. Известная реконструкция Крипке скептического аргумента Виттгенштейна сводится к тому, что предыдущее употребление выражения не может рационально ограничить его интерпретации до единственной. Схожий

[30] Shapiro S. *Second-order Logic, Foundations, and Rules* // J. Philosophy. — 1990. — P. 234—261.

скептический аргумент излагается Патнэмом в его концепции внутреннего реализма[31]. Если Виттгенштейн (и его интерпретаторы) правы, тогда значение не содержит чего-то большего по сравнению с тем, что можно получить просто в результате рационального размышления по поводу употребления выражения. И никакое число данных по поводу употребления выражения, и никакая, включая аксиоматическую, характеристика этого употребления не могут рационально ограничить число интерпретаций выражения до единственной.

Скептические аргументы в отношении значения были направлены против платонистских тенденций в теории значения, потому что противоположностью идее Виттгенштейна было бы признание того, что значение превосходит употребление. Но в этом случае значение не будет доступно рациональному критерию, который значим при употреблении выражения, а это, в свою очередь, предполагает, что значение должно быть доступно каким-то прямым образом. Современная эпистемология не признает подобного рода прямого доступа к значению, поскольку при таком доступе оно остается чисто субъективным и личным.

Как скептический вызов сколемовского толка, так и платонистский аргумент представляются неудовлетворительными. Однако нелегко найти контраргументы в случае скептического вызова. Во-первых, у разных критиков классической теории значения имеются существенные различия в аргументации, и трудно найти общие контраргументы. Во-вторых, не ясно, в какой степени скептические аргументы, являющиеся обобщением математических результатов, являются значимыми для более общего случая языка.

Однако аргументация, связанная теорией значения и теорией указания, выводит нас за пределы сравнения логики первого порядка и логики второго порядка. На самом деле, представляет интерес, в какой степени предпочтение той или иной логики мотивируется чисто математическими интересами и в какой степени это предпочтение может иметь философские мотивы.

Прежде всего следует отметить, что абстрактная постановка проблемы о том, какая логика лучше, бессмысленна с точки зрения проблемно-ориентированного подхода к основаниям математики. Надо задать вопрос о цели применения той или иной логики. Больше того, видимо, не существует единственной правильной практи-

[31] Kripke S. *Wittgenstein on Rules and Private Language.* — N.Y.: Blackwell, 1982; Putnam H. *Models and Reality* // J. Symbolic Logic. — 1980. — Vol. 45, N 3. — P. 464—482.

ки такого применения. Мы имеем в зависимости от поставленной задачи неопределенное число неэквивалентных моделей неформальной математической практики.

Можно предположить, что в основе предпочтения логики первого порядка лежит цель изучения понятия дедуктивной системы. Понятие доказательства является в этом случае важнейшим, тем более что теоретико-модельное отношение следования не схватывает понятия «доказательства» или даже «доказуемый». Тут надо четко выявить те цели и задачи, которые ставятся при исследовании математической практики. Понятие классического следования, которое подразумевается очевидным многими философами, сталкивается с трудностями.

6. Компактность и нестандартные модели

Важнейшей характеристикой классического следования является компактность. Отношение следования компактно, если любое следствие бесконечного множества посылок есть следствие его конечного подмножества. Это свойство выглядит довольно естественным, поскольку при анализе понятия следования мы исходим из понятия вывода истинного заключения из истинных посылок. Обобщения этой идеи просты: следует допустить истинное заключение из нулевого числа посылок и бесконечное число посылок. Имея в виду математическую практику, можно обобщить идею аргумента еще раз — предположить бесконечное число посылок, поскольку любая посылка может быть удвоена за счет двойного отрицания, повторения этой операции и т.д.

Наличие у классического следования свойства компактности делает следование более управляемым. При компактности вывод значим, если и только если, заключение следует из конечного числа посылок. С другой стороны, компактность представляет собой сильное ограничение на выразительные возможности формализмов. Понятие следования можно рассматривать с синтаксической точки зрения, в рамках которой следование трактуется как свойство дедуктивной системы. Желательное свойство дедуктивной системы состоит в том, чтобы доказуемые формулы были истинными. Компактность соответствует этому желательному свойству. Дедуктивная система в этом случае полна. Однако есть вывод такого рода, в котором следование может рассматриваться с семантической точки зрения. Действительно, пусть у нас имеется утверждение «для каждого n, $A(n)$» есть логическое следствие бесконечного множества посылок $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ..., где n — натуральное число. Интуитивно такой вывод оправдан, но он не обладает свойством компактности и, стало быть, не является частью классической концепции следования.

Объяснение нарушения классического следования состоит в том, что логика с компактностью была предназначена для аксиоматизации математики, т.е. для поиска конечного числа аксиом, из которых может быть выведена вся содержательная математика. Теорема Геделя о неполноте арифметики показала невозможность такой аксиоматизации. То есть стандартная модель арифметики, состоящая из чисел 1, 2, 3, ..., не может быть представлена таким множеством формул, которые характеризовали бы эту модель точно. Это значит, что такое множество формул имеет различные неизоморфные модели. Таким образом, категоричность исключает компактность, но именно компактность требуется теорией доказательства. Кодификацией такого рода доказательства является логика первого порядка, а логика второго порядка не имеет свойства компактности.

Соотношение стандартной модели арифметики и нестандартных моделей таково: стандартная модель представляет исходный фрагмент каждой модели первопорядковых истин арифметики, а нестандартные модели содержат дополнительные числа, большие, чем все натуральные числа. Именно по этой причине получается ω-противоречивость: $A(n)$ может быть справедливо для всех стандартных чисел 0, 1, 2, ... и т.д. и все же не быть истинным для каждого числа в модели. Избежать подобной противоречивости можно добавлением фразы «1, 2, 3, ... исчерпывают все числа», но такое добавление не может быть выражено в терминах первого порядка[32].

Девис и Херш дают прекрасное объяснение ситуации[33]. Математика есть человеческая активность, подобно философии или конструированию компьютеров. Во всякой такой активности используется естественный язык. В то же самое время математики используют формальный язык. Можно даже сказать, что возможность изложения математического открытия на формальном языке является в определенном смысле тестом, правильно ли оно понято. Пусть стандартный универсум M — это конечные действительные числа. Формальный язык, на котором мы говорим о M, — это L. Любое предложение в L есть суждение о M, и оно может быть истинным или лож-

[32] Reed S. *Thinking about logic.* — Oxford: University Press, 1994. — P. 42—48.

[33] Davis Ph., Hersh R. *The Mathematical Experience.* — Penguin Books, 1983. — P. 247—253.

ным. Мы называем множество истинных таких предложений K «моделью» и говорим, что M есть модель для K. Под этим мы имеем в виду, что M есть математическая структура, такая что для каждого предложения из K, которое будучи интерпретированным как указание на M, является истинным. Конечно, мы не «знаем» K в каком-то эффективном смысле; если бы мы знали это, то имели бы ответ на каждый вопрос в анализе. Тем не менее мы считаем K вполне определенным объектом, относительно которого мы можем размышлять и выводить заключения.

Существенным фактом было то, что в дополнение к M, стандартному универсуму, есть также нестандартные модели для K, т.е. имеются математические структуры M^*, существенно отличные от M, и что они, тем не менее, являются моделями для K в естественном смысле термина: имеются объекты в M^* и отношения между объектами в M^*, такие что если символы в L переинтерпретированы для приложения к этим псевдообъектам и псевдоотношениям подходящим образом, тогда каждое предложение в К все еще истинно, хотя и имеет другое значение.

Дэвис и Херш приводят прекрасную аналогию. Пусть M — множество студентов первого курса, а M^* — множество их фото, представляющее квадрат два на два. Тогда истинные утверждения о студентах соответствуют истинным утверждениям о фото. Но есть больше квадратов два на два, чем студентов. Так что M^* больше, чем M. Пусть «Гарри тоньше Тома». Тогда это предложение, интерпретированное в M^*, будет предложением о квадратах. Оно не истинно, если отношение «тоньше» интерпретировано стандартно. «Тоньше» должно быть переинтерпретировано как псевдоотношение между псевдостудентами. Например, можно определить «тоньше» так: квадрат Гарри тоньше квадрата Тома, если Гарри тоньше Тома. Тогда истинные утверждения о студентах будут истинными утверждениями о квадратах.

Нестандартный универсум может быть использован для нестандартного анализа. Но при этом используется теорема компактности. Она связана с теоремой полноты Геделя, которая устанавливает, что множество предложений логически непротиворечиво, если и только если предложения имеют модель, т.е. если имеется универсум, в котором они истинны. Теорема компактности легко следует из теоремы полноты: если каждое конечное подмножество совокупности предложений L истинно в стандартном универсуме, тогда каждое конечное подмножество логически непротиворечиво. Поэтому вся совокупность предложений логически непротиворечива (так как любая дедукция может использовать только конечное число посылок). По теореме полноты имеется (нестандартный) универсум, в котором вся совокупность истинна.

Главным преимуществом языка второго порядка перед языком первого порядка является то, что арифметика второго порядка позволяет устранить нестандартные модели за счет выражения во второпорядковом языке того факта, что стандартная модель является исходным сегментом всех остальных моделей, и того, что именно в этом сегменте мы и заинтересованы. Факт этот выражается аксиомой индукции, которая, как мы уже видели, является второпорядковой. Аксиома утверждает, что любое свойство, которым обладает 0, если оно принадлежит числу n, принадлежит и числу $n + 1$. Если использовать для выражения этой аксиомы язык первого порядка, то появляется неясность в отношении выражения «любое свойство». В первопорядковой версии аксиомы используются схематические буквы, пробегающие над подмножествами, что не исключает появления нестандартных моделей. А семантика языка второго порядка гарантирует, что «любое свойство» означает на самом деле любое свойство.

Другими словами, логика второго порядка более предпочтительна по той причине, что понятие следования в ней отвечает интуитивным представлениям о значимом заключении аргумента. Полнота логики первого порядка гарантирует, что правила вывода в ней гарантируют доказательство следствий первого порядка, но при этом ряд интуитивных следствий в ней не проходят. Таким образом, мы имеем два метода исследования содержательных математических утверждений: теорию доказательства и теорию моделей. Если в исследовании превалирует теория доказательств, тогда центральной концепцией является понятие дедуктивной системы. «Логик будет настаивать на точном соответствии теоретико-модельного отношения следования и дедуктивного отношения следования», — говорит С. Шапиро. В трактовке как исчисления высказываний, так и исчисления предикатов сначала дается теоретико-модальное изложение, а затем — теория доказательств. Между тем при использовании формальных языков мы стремимся к прояснению вопросов онтологии и эпистемологии в математическом познании. В этом случае понятие дедуктивной системы не является центральным. Дело в том, что более важно понятие теоретико-модельной интерпретации, т.е. семантика, поскольку соотношение формального языка и интерпретации представляет соотношение языка и мира. В конечном счете, несмотря на свою специфику, математический дискурс есть все-таки дискурс о мире.

Логика первого порядка считается предпочтительной для математического дискурса по той причине, что в математике главным является доказательство. Теоретико-модельное отношение следования не «схватывает» понятия доказательства; действительно, семантическое понятие следования может быть шире дедуктивного понятия, будучи реализацией интуитивных представлений. Может создаться парадоксальное положение, когда семантическое следствие уже принятых результатов окажется синтаксически недоказуемым. Такая ситуация погрузит математический дискурс в хаос и парадоксы. По этой причине сторонники логики первого порядка, т.е. логики с полнотой, ограничивают математический дискурс доказательными утверждениями.

Математический дискурс, или математическая практика, заключается в описании «математической реальности», намеренной интерпретации символов. Распространенным методом такого описания является аксиоматизация. Пусть система аксиом имеет ряд моделей. Если намеренная интерпретация совпадает с моделью аксиом, и если каждая модель совпадает с намеренной интерпретацией, тогда аксиоматизация считается успешной. Вопрос заключается в том, сводится ли математический дискурс к дедукции следствий из аксиом. Если дедуктивная система полна, тогда действительно все содержательные истины будут доказуемы. Это и будет аргументом в пользу логики первого порядка. Однако Булос[34] обратил внимание на парадоксальную ситуацию с понятием логического следования в логике первого порядка. Пусть имеется аргумент I в языке первого порядка, который имеет более или менее короткий вывод I из посылок в языке второго порядка. Булос приводит такой пример. Можно дать и теоретико-модельное доказательство, что I значимо в теоретико-модельной семантике. Так как I — первого порядка и логика первого порядка полна, существует выведение заключения I из посылок в стандартной дедуктивной системе первого порядка. Булос, однако, показывает, что самое короткое выведение I имеет огромное число шагов. Ясно, что если аргумент первого порядка значим, тогда в этом можно убедиться через вывод в стандартной дедуктивной системе первого порядка. Однако только что приведенный пример говорит о том, что такой «в принципе» вывод не конструктивен. Более подходящим кандидатом на математический дискурс является открытие следствий из аксиом в рамках логики

[34] Boolos G. *The consistency of Frege's Foundations of Arithmetic* // On Being and Saying / Ed. J. Thompson. — Cambridge: University Press, 1987. — P. 3—20.

второго порядка, тем более что в рамках логики первого порядка многие теоремы содержательной математики не представляют собой следствий из аксиом.

На самом деле ни та, ни другая активность не является подлинно «репрезентативной» для математики. Наиболее употребительным приемом служит вложение исследуемой структуры в более богатую структуру, которая проливает свет на первую. Такой более богатой структурой может быть та же теория множеств. Так что с точки зрения претензий на большую основательность в математической практике не выигрывает ни логика первого порядка, ни логика второго порядка. Все определяется целями математического дискурса.

ЛИТЕРАТУРА

Блэкберн С. *Профессор чего угодно* // Гуманитарные науки в Сибири. — 2002. — № 3.

Виттгенштейн Л. *Философские исследования.* 201 // Философские работы. — М.: Гнозис, 1994.

Гедель К. *Расселовская математическая логика* // Рассел Б. *Ввведение в математическую философию.* — М.: Гнозис, 1996.

Карнап Р. *Значение и необходимость.* — М.: Мир, 1959.

Клайн М. *Математика: утрата определенности.* — М.: Мир, 1984.

Платон. *Государство.* Соч.: В 3 т. — М.: Мысль, 1971. — Т. 3.

Проблемно-ориентированный подход к науке / Отв. ред. В.В. Целищев. — Новосибирск: Наука, 2001.

Рассел Б. *Введение в математическую философию* / Пер. В.В. Целищева. — М.: Гнозис, 1996.

Рассел Б. *История западной философии.* — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1997.

Рассел Б. *Мудрость Запада.* — М.: Республика, 1998.

Рассел Б. *Проблемы философии* / Пер. В.В. Целищева. — Новосибирск: Наука, 2001.

Френкель А., Бар-Хиллел И. *Основания теории множеств.* — М.: Мир, 1966.

Хакинг Я. *Представление и вмешательство.* — М.: Гнозис, 1998.

Хао Ван. *Процесс и существование* // Математическая логика и ее применение. — М., 1965.

Целищев В.В. *Логическая истина и эмпиризм.* — Новосибирск: Наука, 1974.

Целищев В.В. *Логика существования.* — Новосибирск: Наука, 1975.

Целищев В.В. *Язык второго порядка и проблемно-ориентированный подход к основаниям математики* — 1 // Философия науки. — 2001. — № 1(9). — С. 76—90.

Целищев В.В. *Математика и философия: технические детали и философские интерпретации* // Философия науки. — 2002. — № 2(13). — С. 27—43.

Целищев В.В. *Поиски новой философии математики* // Философия науки. — 2002. — № 3(11). — С. 135—147.

Целищев В.В., Бессонов А.В. *Две интерпретации логических систем.* — Новосибирск: Наука, 1979.
Целищев В.В. Петров В.В. *Философские проблемы логики.* — М.: Высш. шк., 1982.
Aczel P. *Non-Well-Founded Sets.* — Stanford, 1988.
Anderson D. *What Is the Model-theoretic Argument?* // J. Philosophy. — 1993. — Vol. 90, N 6. — P. 312—313.
Anderson F. *Some Correction to Godel's Ontological Proof* // Faith and Philosophy. — 1990. — Vol. 7, N 3, July.
Azzouni J. *Metaphysical Myths, Mathematical Practice.* — Cambridge: University Press, 1994.
Balaguer M. *Platonism and Antiplatonism in Mathematics.* — Oxford: University Press, 1998.
Barrow J. *Pi in the Sky.* — Oxford: Clarendon Press, 1992.
Bays T. *On Putnam and His Models* // J. Philosophy. — 2001. — Vol. 98, N 7.
Benacerraf P. *What Numbers Could Not Be* // Philos. Rev. — 1965. — Vol. 74, N 1.
Benacerraf P. *Mathematical Truth* // J. Philosophy. — 1973.
Benacerraf P. *Skolem and Sceptic* // Proceedings of Aristotelian Society. — 1985. — Suppl. vol. 59.
Benacerraf P. *What Mathematical Truth Could not Be* // Philosophy of Mathematics Today. / Ed. M. Schirn. — Oxford, 1998.
Bernays P. *Platonism in Mathematics* // Philosophy of Mathematics. / Ed. P. Benacerraf, H. Putnam. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964.
Beth E. *Mathematical Thought.* — Dordrecht: Reidel, 1965.
Bishop E. *Foundations of Constructive Analysis.* — N.Y.: McGraw-Hill, 1967.
Boolos G. *The Iterative Conception of Set* // J. Philosophy. — 1971. — Vol. 68.
Boolos G. *To Be Is to Be a Value of Variable* // J. Philosophy. — 1975. — Vol. 72. — P. 509—527.
Boolos G. *On Second-Order Logic* // J. Philosophy. — 1984. — Vol. 81. — P. 54—72.
Boolos G. *The consistency of Frege's Foundations of Arithmetic* // On Being and Saying / Ed. J. Thompson. — Cambridge: University Press, 1987.
Bostock D. *On Motivating Higher-Order Logic* // Philosophical Logic. / Ed. T. Smiley. — Oxford: University Press, 1998.
Cantor G. *Gesammelte Abhandlungen* / Ed. A. Fraenkel and E. Zermelo. — Berlin, 1932.
Cantor G. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers.* — N.Y.: Open Court, 1955.
Chihara Ch. *Constructibility and Mathematical Existence.* — Oxford: University Press, 1990.
Cohen P. *Set Theory and the Continuum Hypothesis.* — Benjamin; Massachusetts, 1966.

Colyvan M. *The Indispensability of Mathematics.* — Oxford: University Press, 2001.
Corcoran J. *Gaps between Logical Theory and Mathematical practice* // The Methodological Unity of Science / Ed. M. Bunge. — Dordrecht: D. Reidel. — P. 23—50.
Curry H. *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics.* — Amsterdam, 1970.
Dauben J. *George Cantor.* — Princeton: University Press, 1979.
Davis Ph., Hersh R. *The Mathematical Experience.* — Penguin, 1983.
Douven I. *Putnam's Model-Theoretic Argument Reconstrued* // J. Philosophy. — 1999. — Vol. 96, N 9. —P. 483.
Field H. *Science without Numbers.* — Princeton: University Press, 1980.
Field H. *Is Mathematical Knowledge Just Logical Knowledge?* // Philos. Rev. — 1984. — Vol. 93, N 4.
Field H. *On Conservativeness and Incompleteness* // J. Philosophy. — 1985. — Vol. 82. — P. 239—60.
Fraenkel A., Bar-Hillel Y., Levi A. *Foundations of Set Theory.* — 2-nd ed. — Amsterdam, 1973.
Fuller S. *Thomas Kuhn: A Philosophical History for Our Times.* — Chicago: University Press, 2001.
George A. *Skolem and Lewenheim — Skolem Theorem: A Case Study of Philosophical Significance of mathematical Results* // History and Philosophy of Logic. — 1985. — N 6.
Godel K. *What is Cantor's Continuum Problem?* // Philosophy of Mathematics / Ed. P. Benacerraf, H. Putnam. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964.
Goldman A.I. *A Causal Theory of Knowledge* // Essays on Knowledge and Justification / Ed. G. Pappas, M. Swain. — Cornell: University Press, 1978.
Hacking I. *The Social Construction of What?* — Harvard: University Press, 1999.
Hacking J. *What Mathematics Has Done to Some and Only Some Philosophers* // Mathematics and Necessity / Ed. T. Smiley. — Oxford: University Press, 2000.
Hale B. *Abstract Objects.* — Basil: Blackwell, 1987.
Hale B. and Wright C. *Putnam's Model-Theoretic Argument* // Companion to Philosophy of Language. — Blackwell, 1997.
Halett M. *Cantorain Set Theory and Limitation of Size.* — Oxford: University Press, 1984. — P. 32.
Hart W.D. *Review of Mathematical Knowledge by M. Steiner.* — Ithaka: Cornell University Press, 1975 // J. Philosophy. — 1977. — Vol. 74, N 2, febr.
Hays J. *The battle of the Frog and the Mouse* (from the *Fables of Aleph*) // Mathematical Intelligencer. — 1984. — Vol. 6.
Hersh R. *Mathematics has a Front and a Back* // Synthese 88, 1991.
Hersh R. *A Fresh Winds in the Philosophy of Mathematics* // Amer. Math. Monthly. — 1995. — Aug.-Sept. — P. 590—591.

Hersh R. *What is Mathematics, Really?* — Oxford: University Press, 1997.
Higginbotham J. *On High-Order Logic and Natural language* // Philosophical Logic / Ed. T. Smiley. — Oxford: University Press, 1998.
Hintikka J. *Logic, Language Games and Information.* — Oxford: Clarendon Press, 1973.
Hintikka Ja. *The Principles of Mathematics Revisited.* — Cambridge: University Press, 1996.
Hintikka Ja. *Lingua Universalis vs Calculus Ratiocinator.* — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
Jane I. *A Critical Appraisal of Second-Order Logic* // History and Philosophy of Logic. — 1993. — Vol. 14.
Kitcher Ph. *The Nature of Mathematical Knowledge.* — Oxford: University Press, 1983.
Klenk V. *Intended Models and Lewenheim-Skolem Theorem* // J. Philos. Logic. — 1976. — N 5. — P. 475—489.
Korner S. *The philosophy of Mathematics.* — L.: Hutchinson, 1960.
Kreisel G. *Der unheivolle Einbruch der Logic in die Mathematik* // Acta Philosophica Fennica. — Vol. 28, N 1—3.
Kripke S. *Wittgenstein on Rules and Private Language.* — N.Y.: Blackwell, 1982.
Lavine Sh. *Understanding the Infinite.* — Cambridge: Harvard University Press, 1994.
Maddy P. *Believing Axioms.* I // J. Symbolic Logic. — 1988. — Vol. 53.
Maddy P. *Believing the Axioms.* II // J. Symbolic Logic. — 1988. — Vol. 53, N 3. — P. 736—764.
Maddy P. *Mathematical Realism* // Midwest Studies in Philosophy. — 1988. — Vol. 12. — P. 275.
Maddy P. *Realism in Mathematics.* — Oxford: University Press, 1990.
Maddy P. *Philosophy of Mathematics: Prospects for the 1990s* // Synthese 88. — 1991. — P. 155—164.
Maddy P. *Naturalism in Mathematics.* — Oxford: University Press, 1997.
Martin D. *Hilbert's First Problem: The Continuum Hypothesis* // Proceedings of Symposia in Pure mathematics. — 1976. — Vol. 28.
Martin R. *Intension and Decision.* — N.Y., 1964.
Moore G. *Beyond First-Order Logic: The Historical Interplay between Mathematical Logic and Axiomatic Set Theory* // History and Philosophy of Logic. — 1980. — Vol. 1.
Moore G. *Zermelo's Axiom of Choice.* — Springer, 1982.
Moschovakis Y. *Descriptive Set Theory.* — Amsterdam: North Holland, 1980.
Mostowski A. *Thirty Years of Foundational Studies* // Acta Philosophica Fennica, Fasc. XVII. — Helsinki, 1965.
Passmore J. *Recent Philosophers.* — N.Y.: Open Court, 1991.
Penrose R. *The Emperor's New Mind.* — L.: Vintage, 1990.
Philosophy of Mathematics / Eds. Benacerraf P., Putnam H. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964.

Philosophy of Mathematics Today / Ed. M. Schirn. — Oxford, 1998.
Putnam H. *Review of the Concept of a Person* // Philosophical Papers. Mind, Language and Reality. — Cambridge: University Press, 1975. — Vol. 2.
Putnam H. *Models and Reality* // J. Symbolic Logic. — 1980. — Vol. 45, N 3.
Putnam H. *Reason, Truth, and History.* — Cambridge, 1982.
Quine W.V.O. *Set Theory and Its Logic.* — Harvard: University Press, 1963.
Quine W. V.O. *Word and Object.* — Cambridge: University Press, 1964.
Quine W.V.O. *Epistemology Naturalized* // Ontological Relativity and Other Essays. — Harvard: University Press, 1969.
Quine W.V.O. *Philosophy of Logic.* — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1970.
Reed S. *Thinking about logic.* — Oxford: University Press, 1994.
Resnik M. *Mathematics as a Science of Patterns.* — Oxford: Clarendon Press, 1997.
Rota G.-C. *Mathematics and Philosophy: The Story of Misunderstanding* // Review of Metaphysics. — 1990. — Vol. 44, N 174, Dec.
Rota G.-C. *The Pernicious Influence of Mathematics upon Philosophy* // Synthese 88. — 1991. — P. 165—178.
Rucker R. *Infinity and the Mind.* — Bantam Books, 1983.
Russell B. *Principles of Mathematics.* — N.Y., 1903.
Russell B. *Mathematics and Metaphysicians* // Mysticism and Logic, 1957.
Russell B. *On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types* // Essays in Analysis / Ed. D. Lackey. — N.Y., 1974. — P. 153.
Scott D. *Foreword to J. Bell, Bolean -Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.* — Oxford: University Press, 1977. — P. xii.
Shapiro S. *Mathematics and Reality* // Philosophy of Science. — 1983. — Vol. 50. — P. 523—548.
Shapiro S. *Second-order Logic, Foundations, and Rules* // J. Philosophy. — 1990.
Shapiro S. Foundations without Foundationalism: A Case for Second-order Logic. — Oxford: University Press, 1991.
Shapiro S. *Mathematics and Philosophy of Mathematics* // Philosophia Mathematica. — 1994. — Vol. 2, N 3.
Shapiro S. *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology.* — Oxford: University Press, 1997.
Skolem T. *Einige Bemerkungen zur aximatischen Begrundung der Mengelehre* //From Frege to Godel / Ed. van Heijenoort. — Cambridge, 1967.
Skolem T. *Some Remarks on Axiomatized Set Theory* // From Frege to Godel / Heijenoort J., van. — Harvard: University Press, 1967.
Skolem T. *Sur la Portee du Theoreme de Lewenheim — Skolem* // Skolem T. Selected Works in Logic / Ed. E.J. Fenstad. — Universitetsforlaget, 1970. — P. 468.
Sluga H. *Frege Against Booleans* // Notre Dame Journal of Formal Logic. — 1987. — Vol. 28. — P. 80—98.

Takeuti G. *Two Applications of Logic to Mathematics.* — Princeton: University Press, 1977.
Tappenden J. *Recent Works in Philosophy of Mathematics* // J. Philosophy. — 2001. — Vol. 97. — P. 488—497.
Tarski A. *Remarks on Skolem* // Skolem T. *Selected Works in Logic.* — Oslo, 1970.
Tiles M. *The Philosophy of Set Theory: An Historical Introduction to Cantors Paradise.* — Basil: Blackwell, 1989.
Velleman D. *Letter of 28 March 1991.* Internet FOM.
Wang Hao. *From Mathematics to Philosophy.* — L., 1974.
Whitehead A.N. *Principia Mathematica.* — Cambridge: University Press, 1910.
Wright C. *Frege's Conception of Numbers as Objects.* — Aberdeen: University Press, 1983.
Wright C. *Skolem and Sceptic* // Proceedings of Aristotelian Society. — 1985. — Suppl. vol. 59.
Zermelo E. *Investigations in the Foundations of Set Theory.* 1908 // From Frege to Godel / Ed. van Heijenort J.— Harvard: University Press, 1967.

ОГЛАВЛЕНИЕ